UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATÉMATICA

PEDRO MEDEIROS SABOYA

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES HARMÔNICAS

FORTALEZA

2019

PEDRO MEDEIROS SABOYA

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES HARMÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matématica do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matématica.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S122i Saboya, Pedro Medeiros.
Introdução às funções harmônicas / Pedro Medeiros Saboya. – 2019.
62 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Matemática, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.

1. Função Harmônica. 2. Problema de Dirichlet. 3. Função de Green. 4. Propriedade do Valor Médio. 5. Desigualdade de Harnack. I. Título.

CDD 510

PEDRO MEDEIROS SABOYA

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES HARMÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matématica do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matématica.

Aprovada em: 24/06/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Fabio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus, meu Senhor e Amado.

Aos meus pais, Moacyr Saboya e Mônica Couceiro.

Ao meu orientador, Gleydson Chaves Ricarte.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me criar, amar, e me inspirar para bem desenvolver essa monografia.

À Igreja Católica, em particular a Comunidade Católica Shalom, por serem meu sustento na fé, na vida, e por me levarem sempre mais para a sabedoria que me leva à Deus.

À minha família, em particular meus pais, que sempre me motivaram e contribuíram para que eu seguisse adiante nos estudos e em minhas decisões.

Ao Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte por me orientar na graduação, em particular, em minha monografia.

Ao Eduardo V. Teixeira da UFC, e ao Marcelo Furtado da Universidade de Brasília, além dos autores citados nas "referências", por seus escritos dos quais obtive muitos resultados para esta monografia.

A todos os professores da Organização Educacional Farias Brito, em particular Prof. Judson Santos e Prof. Marcelo Mendes, por me ensinarem não só a matemática do ensino médio, que trouxe-me mais gosto pela matéria, mas por seus ensinamentos de fé e de caráter.

Aos professores da UFC, em particular o Prof. Rodrigo Rodrigues e ao Prof. José Ederson Melo Braga, por tanto me ensinarem e me ajudarem a amadurecer humana e intelectualmente.

"Na tarde do mesmo dia, que era o primeiro da semana, os discípulos tinham fechado as portas do lugar onde se achavam, por medo dos judeus. Jesus veio e pôs-se no meio deles. Disse-lhes ele: 'A paz esteja convosco!'."

(Bíblia, Jo 20: 19)

RESUMO

As funções harmônicas são objetos de estudo primordiais para a matemática moderna, em particular na área da análise e de EDP, mas também em outras áreas do conhecimento, como na física, no estudo de fluxos e na teoria do potencial. Visando o aprofundamento em relação a tal classe de funções são demonstradas equivalências em relação à definição de tais funções, introduzindo assim conceitos como "função fracamente harmônica"e "propriedade do valor médio". Além disso, obtêm-se resultados acerca da regularidade de tais funções, provando que elas são na realidade "suaves"e, ainda mais, "analíticas". Em meio as demonstrações obtêm-se estimativas em relação a tais funções e suas derivadas, propriedades relacionadas ao máximo e mínimo delas (princípio do máximo), além de resultados como a "Desigualdade de Harnack". Em seguida analisa-se um tipo especial de função harmônica, a solução fundamental do Laplaciano. A partir dela obtêm-se a fórmula de representação de Green, a função de Green e, por fim, a solução do Problema de Dirichlet para bolas. Em meio as demonstrações utilizam-se resultados prévios como o "Teorema da Divergência", o Teorema da Convergência Dominada, o Teorema de Weierstrass, o Teorema de Clairaut-Schwarz e o Teorema do Valor Médio sem, contudo, demonstrá-los.

Palavras-chave: Função Harmônica. Propriedade do Valor Médio. Princípio do Máximo. Função Fracamente Harmônica. Problema de Dirichlet. Desigualdade de Harnack. Solução Fundamental. Função de Green

ABSTRACT

Harmonic functions are primordial objects of study for modern mathematics, particularly in the area of analysis and EDP, but also in other areas of knowledge, such as physics. Aiming at the deepening of such a class of functions, equivalences are demonstrated in relation to the definition of such functions, thus introducing concepts such as "weakly harmonic function"and "mean-value property". In addition, results are obtained about the regularity of such functions, proving that they are in fact "soft"and, still more, "analytical". In the middle of the demonstrations we obtain estimates in relation to such functions and their derivatives, properties related to their maximum and minimum (maximum principle), as well as results such as "Harnack's inequality". Then a special kind of harmonic function, the fundamental solution of Laplace's equation, is analyzed. From it we obtain the representation formula using Green's function, Green's function and, finally, the solution of the Problem of Dirichlet for balls. In the middle of the demonstrations we use previous results such as the "Divergence Theorem", Dominated Convergence Theorem, Weierstrass Theorem, Clairaut-Schwarz Theorem, and Mean Value Theorem without, however, demonstrating them.

Keywords: Harmonic Functions. Mean-value Property. Maximum Principle. Weakly harmonic function. Dirichlet Problem. Harnack's inequality. Fundamental Solution. Green's Function.

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Conjunto aberto conexo do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
$C^n(\Omega)$	Conjunto das funções com domínio em Ω cuja n-ésima derivada é continua.
∇u	Gradiente da função u.
$div\, u$	Divergente da função u.
$D_{x_i}u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	Derivada parcial de u com respeito a variável x_i.
$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$	Derivada mista de ordem $\|\alpha\| = k$ de u, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
$C_0^n(\Omega)$	Conjunto das funções que pertencem a $C^n(\Omega)$ e tem suporte compacto.
$\nabla u \cdot \eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$	Derivada direcional de u na direção η.
$diam(\overline{\Omega}) = sup\{\|x-y\|;\ x, y \in \overline{\Omega}\}$	Diâmetro do conjunto $\overline{\Omega}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As funções harmônicas são um instrumento matemático muito utilizado em diversas partes da física e da matemática. Elas são definidas por meio da Equação de Laplace.

Tal equação, cujo nome é em homenagem a Pierre Simon Laplace, é uma equação diferencial parcial elíptica utilizada por Euler no estudo de hidrodinâmica em 1752 e mais tarde por Pierre, a partir de 1782, para estudar a atração gravitacional entre corpos no espaço. Em seguida foi ainda usada no estudo de campos eletrostáticos, da temperatura em estado estacionário, tal qual para estudar as funções potenciais (elétrico e gravitacional, por exemplo), que são objeto de estudo da teoria do potencial (IÓRIO, 2012).

Ainda na física, é comum o estudo de fluxos, e alguns deles tem propriedades interessantes. Por exemplo, tomemos situações de equilíbrio (ou estado estacionário) sobre um aberto U. Denotando por F a densidade de fluxo e η_x a normal unitária em $x \in \partial V$, $V \subset U$ aberto, temos que o fluxo de F é nulo, ou seja,

$$\int_{\partial V} F \cdot \eta_x dS_x = 0.$$

Daí, aplicando o teorema da divergência (que enunciaremos ao longo da monografia), obtemos que

$$\int_V divF dx = \int_{\partial V} F \cdot \eta_x dS_x = 0.$$

Portanto, como $V \subset U$ é um aberto qualquer, e $\int_V divF dx = 0$, obtemos que

$$divF = 0 \; em \; U.$$

Além disso, em vários casos (na eletricidade e na termodinâmica, por exemplo), obtemos que $\exists u$; $F = -a\nabla u$, para algum $a > 0$ constante. Portanto, como $divF = 0$, obtemos que

$$\Delta u = div(\nabla u) = 0 \; em \; U.$$

Assim, como veremos adiante, obtemos que u e harmônica em U. portanto, estudando e, eventualmente obtendo, u conseguimos conhecer melhor F e o fluxo de F (EVANS, 2010).

Motivado por tantas aplicações e por sua importância nos estudos das Equações Diferenciais Parciais, como é o caso do Problema de Dirichlet, resolvi expor sobre tais funções, explorando resultados básicos com relação a elas, baseando-me no livro "Elliptic Partial Differential Equations"(HAN; LIN, 1997).

Tomando $u \in C^2(\Omega)$, denotamos o laplaciano de u por Δu, e o obtemos pela relação

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial X_i^2}.$$

Ou ainda,

$$\Delta u(x) = div(\nabla u).$$

A equação de Laplace, obtida por meio do laplaciano, é dada por

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega.$$

Podemos então definir as funções harmônicas como as funções $u \in C^2(\Omega)$ que satisfazem a equação de Laplace.

Já o Problema de Dirichlet pode ser assim descrito:

Dados um conjunto Ω e uma função $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0\,; x \in \Omega \\ u(X) = f\,; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Partindo da definição de funções harmônicas, exploraremos inicialmente características próprias de tais funções, como o fato de satisfazem a "propriedade do valor médio", a partir do qual tiramos conclusões sobre máximos e mínimos delas, via principio do máximo, sobre sua suavidade e até acerca da quantidade de soluções do "Problema de Dirichlet", sobre certas condições. Em seguida buscaremos obter informações sobre sua regularidade e para isso exploraremos estimativas de suas derivadas o que nos levam a provar que elas são funções analíticas. Em seguida demonstraremos a Desigualdade de Harnack e exploraremos o conceito de função fracamente harmônica, do qual obteremos uma nova equivalência para funções harmônicas.

Terminado o estudo geral sobre tais funções, nos restringiremos em seguida as funções harmônicas radiais, de onde iniciaremos o estudo da solução fundamental do laplaciano. A partir dela obteremos a formula de representação de Green e, em seguida, a função de Green. Estudaremos por fim algumas de suas propriedades, resolveremos o problema de Dirichlet para bolas via "fórmula integral de Poisson"e obteremos algumas consequencias de tal fórmula.

OBS.: Note que o estudo das funções harmônicas só é interessante para $n \geq 2$. De fato, para $n = 1$, temos

$$\Delta u(x) = 0 \Leftrightarrow u''(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Ou seja, em $\mathbb{R}$, as funções harmônicas são retas. Portanto, eventualmente utilizaremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$.

2 PROPRIEDADE DO VALOR MÉDIO

Embora a definição de função harmônica seja simples, obter propriedades acerca delas simplesmente pela Equação de Laplace não é tão simples. Para tanto, definiremos a Propriedade do Valor Médio, a partir da qual teremos uma equivalência à definição de função harmônica. Em seguida poderemos melhor tratar tais funções, deduzindo assim o Principio do Máximo, Estimativas para as derivadas de funções harmônicas, a Desigualdade de Harnack, além de estudar a regularidade de tais funções e o conceito de função fracamente harmônica.

2.1 Definição e Equivalência

Nesta seção definiremos duas propriedades do valor médio, uma por meio da média esférica e outra por meio da média sólida. Em seguida reescreveremos as propriedades removendo a singularidade da média. Depois provaremos que ambas as propriedades são equivalentes e ainda mais, são equivalentes à definição de função harmônica.

Definição 2.1.1. *Para $u \in C(\Omega)$, nós dizemos que*

(i) u satisfaz a primeira propriedade do valor médio se para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$, $u(x)$ é igual a sua média esférica, ou seja,

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \tag{2.1}$$

(ii) u satisfaz a segunda propriedade do valor médio se para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$, $u(x)$ é igual a sua média sólida, ou seja,

$$u(x) = \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \tag{2.2}$$

onde w_n denota a área superficial da esfera unitaria em $\mathbb{R}^n$.

Obs 2.1.1. *As propriedades do valor médio podem ainda ser reescritas por:*

(i) u satisfaz a primeira propriedade do valor médio se para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$,

$$u(x) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+sz) dS_z \tag{2.3}$$

(ii) u satisfaz a segunda propriedade do valor médio se para qualquer $B_r(x) \subset \Omega$,

$$u(x) = \frac{n}{w_n} \int_{B_1(0)} u(x+sz) dS_z \tag{2.4}$$

De fato, basta aplicar a mudança de variável y = x + rz.

Se $B_r(x) \subset \Omega$, então:

Da equação (2.1):

$$u(x) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz) s^{n-1} dS_z = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz) dS_z$$

Da equação (2.2):

$$u(x) = \frac{n}{w_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} u(y) dS_y = \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_1(0)} u(x+rz) r^n dS_z = \frac{n}{w_n} \int_{B_1(0)} u(x+rz) dS_z$$

Proposição 2.1.1. *Ambas as propriedades são equivalentes e nomearemos tais propriedades simplesmente por propriedade do valor médio.*

Prova. De fato, seja $B_r(x) \subset \Omega$ qualquer.

Daí, $\forall 0 \leq s \leq r$, $B_s(x) \subset B_r(x)$.

$(i) \to (ii)$:

Reescrevendo a equação (2.1) , $\forall 0 \leq s \leq r$, vale:

$$u(x) s^{n-1} = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y,$$

E integrando em relação a s de 0 a r, obtemos:

$$u(x) \frac{r^n}{n} = \int_0^r u(x) s^{n-1} ds = \frac{1}{w_n} \int_0^r \Big(\int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y \Big) ds = \frac{1}{w_n} \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

de onde obtemos (ii).

$(ii) \to (i)$:

Reescrevendo a equação (2.2), temos:

$$u(x) r^n = \frac{n}{w_n} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{w_n} \int_0^r \Big(\int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y \Big) ds,$$

Derivando em relação a r e usando o Teorema Fundamental do Calculo, obtemos:

$$n u(x) r^{n-1} = \frac{d}{dr} \Big(u(x) r^n \Big) = \frac{n}{w_n} \frac{d}{dr} \Big(\int_0^r \Big(\int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y \Big) ds \Big) = \frac{n}{w_n} \int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y,$$

de onde concluímos (i).

□

Definição 2.1.2. *Diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é regular se Ω é um aberto limitado tal que $\partial\Omega$ é (uma hiperfície) de classe C^1.*

Obs 2.1.2. *Toda bola, $B_r(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ é regular, pois é aberta, limitada e $\partial B_r(a)$ é de classe C^1.*

Teorema da Divergência: Seja Ω regular, F um campo vetorial de classe C^1 em $\overline{\Omega}$, e $\eta(x)$ o vetor normal unitário exterior ao ponto $x \in \partial\Omega$. Então

$$\int_{\Omega} divF(x)dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \eta(x)dS_x.$$

Teorema da Convergência Dominada: Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis em um conjunto mensuravel $E \subset \mathbb{R}^n$ que convergem q.t.p. para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável sobre E, g, tal que $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então f é integrável sobre E e

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Teorema de Weierstrass Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua no compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Então, f assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em K.

Teorema 2.1.2. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se, e somente se, u satisfaz a propriedade do valor médio em Ω.*

Prova. Seja $u \in C^2(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$.
Defina para $0 < s \leq r$ a função m pela média esférica, ou seja,

$$m(s) = \frac{1}{w_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x)} u(y)dS_y = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+sz)dS_z$$

Derivando em relação a s, e voltando a variável y, obtemos:

$$m'(s) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+sz) \cdot zdS_z = \frac{1}{w_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y-x}{s}\right)dS_y$$

Mas $\eta(y) = \frac{y-x}{s}$, pois $y \in \partial B_s(x)$.
Daí,

$$m'(s) = \frac{1}{w_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x)} \nabla u(y) \cdot \eta(y)dS_y$$

Assim, usando o **Teorema da Divergência** em $F = \nabla u$, concluímos que:

$$m'(s) = \frac{1}{w_n s^{n-1}} \int_{B_s(x)} div(\nabla u(y))dy$$

Ou seja,

$$m'(s) = \frac{1}{w_n s^{n-1}} \int_{B_s(x)} \Delta u(y)dy \tag{2.5}$$

$\Longrightarrow$) Suponha que u é harmônica em Ω. Em particular, é harmônica em $B_s(x) \subset \Omega$. Logo, pela equação (2.5),

$$m'(s) = 0, \forall 0 < s < r.$$

Daí,

$$m(s) = cte, \forall 0 < s < r.$$

Mas, como m é contínua em $(0, r]$ temos que

$$m(r) = \lim_{s \to 0^+} m(s) \Rightarrow \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \lim_{s \to 0^+} \Big(\frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + sz) dS_z \Big).$$

Contudo, u sendo contínua em ∂B_r, temos que $u(x+sz)$ é limitado para $z \in \partial B_1$, como consequência do **Teorema de Weierstrass**.

Portanto, pelo **Teorema da Convergência Dominada**, obtemos:

$$\lim_{s \to 0^+} \Big(\frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+sz) dS_z \Big) = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} \Big(\lim_{s \to 0^+} u(x+sz) \Big) dS_z = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x) dS_z = u(x).$$

Portanto,

$$\frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = u(x), \forall B_r(x) \subset \Omega$$

Então u satisfaz a propriedade do valor médio em Ω.

$\Longleftarrow$) Suponha agora que u satisfaz a propriedade do valor médio em Ω.

Pela **Equação 2.5**, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big(\frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \Big) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy.$$

Daí, pela propriedade do valor médio, obtemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \Big(u(x) \Big) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy.$$

Portanto,

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0, \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

de onde concluímos que $\Delta u(y) = 0, \forall y \in \Omega$.
De fato, se $\exists x_0 \in \Omega; \Delta u(x_0) \neq 0$ (digamos > 0), então, como $u \in C^2(\Omega)$, temos que Δu é contínua, e, portanto, $\exists B_s(x_0) \subset \Omega; \Delta u(y) > 0, \forall y \in B_s(x_0)$, de onde obteríamos

$$\int_{B_s(x)} \Delta u(y)dy > 0,$$

absurdo.
Daí, u é harmônica em Ω.

$\square$

2.2 Princípio do Máximo

Nesta seção demonstramos o princípio do máximo em sua versão forte e na sua versão fraca, visando determinar onde as funções harmônicas atingem seus máximos e mínimos, sobre a condição do domínio da função ser limitado. Baseado nisso, restringimos a quantidade de soluções do problema de Dirichlet.

Teorema 2.2.1 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Se Ω é limitado e $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio em Ω, então u assume o seu máximo e mínimo apenas em $\partial\Omega$, amenos que u seja constante.*

Prova. Note inicialmente que sendo Ω limitado, então $\overline{\Omega}$ é compacto.
Portanto, como a função u é contínua, então u admite máximo e mínimo em $\overline{\Omega}$ pelo **Teorema de Weirstrass**.
Agora provemos o principio, primeiramente para o máximo.
Defina

$$\Sigma = \left\{ x \in \Omega; u(x) = M \equiv \max_{\overline{\Omega}} u \right\} \subset \Omega.$$

Temos que Σ é fechado, pois u é contínua.
Provemos que Σ é aberto.
Seja $x_0 \in \Sigma$. Daí, $x_0 \in \Omega$.
Como Ω é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$.
Pela propriedade do valor médio,

$$M = u(x_0) = \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy \leq \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_r(x_0)} M dy = M.$$

Dai,

$$u(x) = M, \forall x \in B_r(x_0),$$

ou seja,

$$B_r(x_0) \subset \Sigma.$$

Assim, Σ é aberto.

Uma vez que Σ é fechado e aberto em Ω, temos então que $\Sigma = \emptyset$ ou $\Sigma = \Omega$, pois Ω é conexo.

Assim, o máximo de u ocorre em $\partial\Omega$ ou u é constante.

Para o mínimo, seja $v = -u$. Assim, seu maxímo é o mínimo de u. Daí, v é constante ou seu máximo ocorre na $\partial\Omega$. Daí, u é constante ou seu mínimo ocorre na $\partial\Omega$.

$\square$

Corolário 2.2.1 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Se Ω é limitada a função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω, então*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \forall x \in \Omega$$

Prova. Como u é harmônica, então u satisfaz a propriedade do valor médio.

Dai, pelo **Teorema 2.1.2**, há dois casos:

Caso 1: u é constante, então, de fato,

$$\inf_{\partial\Omega} u = u(x) = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Caso 2: o maximo e o mínimo de u ocorrem em $\partial\Omega$. Daí, $\exists x_1, x_2 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_1) = \inf_{\overline{\Omega}} u$ e $u(x_2) = \sup_{\overline{\Omega}}$

Dai,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x_1) = \inf_{\overline{\Omega}} u \leq u(x), \forall x \in \Omega$$

$$\sup_{\partial\Omega} u \geq u(x_2) = \sup_{\overline{\Omega}} \geq u(x), \forall x \in \Omega$$

E, portanto,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \forall x \in \Omega$$

$\square$

Corolário 2.2.2. *Se Ω é limitado, então, dadas as funções f,g o sistema*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem no máximo uma solução. Em particular, o Problema de Dirichlet tem no máximo uma solução.

Prova. Se não houver solução, OK.
Se houver, sejam u_1, u_2 soluções. Então, sendo $i \in \{1,2\}$, temos, para as função f,g, que:

$$\begin{cases} \Delta u_i(x) = f; x \in \Omega \\ u_i(X) = g; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Definindo $v = u_2 - u_1$, obtemos:

$$x \in \Omega \Rightarrow \Delta v(x) = \Delta u_2(x) - \Delta u_1(x) = f - f = 0$$

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow v(x) = u_2(x) - u_1(x) = g - g = 0$$

Daí, v é harmônica em Ω e nula em $\partial\Omega$.
Assim, v satisfaz a propriedade do valor médio e, portanto, pelo **Teorema 2.1.2**, assume seu máximo e mínimo em $\partial\Omega$ ou é constante.
No primeiro caso, seu máximo e mínimo ocorrem em $\partial\Omega$ e, portanto, valem 0. Portanto, v é nula em Ω.
No segundo caso, v é constante e, sendo nula em $\partial\Omega$, é então nula em Ω.
Portanto, em ambos os casos, $v(x) = 0, \forall x \in \Omega$ e, portanto, $u_1(x) = u_2(x), \forall x \in \Omega$.
Em particular, para $f = 0$, tal sistema é um Problema de Dirichlet e tem no máximo uma solução.

□

2.3 Convolução e Suavidade

Nesta seção obteremos uma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em seguida definiremos a operação convolução e provaremos uma "propriedade regularizante"da convolução. Por fim provaremos que toda função harmônica é suave.

Definição 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos o suporte de f, denotado por $supp(f)$, como sendo*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n |\ f(x) \neq 0\}}.$$

Quando o suporte de f é compacto, dizemos então que f é de suporte compacto.

Obs 2.3.1. *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é de suporte compacto, então $f|\partial\Omega = 0$.*

Além disso, suas derivadas parciais também são de suporte compacto.

Lema 2.3.1. *Seja $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}; 0 \leq x < 1 \\ 0; x \geq 1 \end{cases}$$

Então, $\phi \in C^\infty([0, \infty))$

Prova. Note que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ pela regularidade das funções e^x e $\frac{1}{x-1}$.
Basta provarmos então que $\phi^{(k)}$ é contínua em $x = 1$.
Faremos isso em dois passos.
Inicialmente, seja $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Então, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}} h(t)}{t^k} = 0 \tag{2.6}$$

De fato, por indução, se $k = 1$,

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}} h(t)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\frac{1}{t}}{e^{-\frac{1}{t}}} \lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}} h(0) = \lim_{t \to 0^-} e^{\frac{1}{t}} h(0) = 0$$

e, se vale para $k - 1$, então:

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}} h(t)}{t^k} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\frac{1}{t^k}}{e^{-\frac{1}{t}}} \lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-k}{t^{k+1}}}{\frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}} h(0) = (-k) \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{k-1}} h(0) = 0,$$

onde na última igualdade vem da hipótese indutiva.
Agora, por indução, provaremos também que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists h_k \in C^\infty(\mathbb{R}), a_k \in \mathbb{N}$ tal que se $0 \leq x < 1$, então

$$\phi^{(k)}(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} h_k(x)}{(x-1)^{a_k}}.$$

e, portanto, o lema estará provado, pois

$$\lim_{x\to 1^-}\phi^{(k)}(x)=\lim_{x\to 0^-}\phi^{(k)}(x+1)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}h_k(x+1)}{x^{a_k}}=0=\phi^{(k)},$$

onde a penúltima igualdade vem da equação 2.6.

Se $k=1$, temos, para $0\le x<1$:

$$\phi'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2}=e^{\frac{1}{x-1}}h_1(x)\frac{1}{(x-1)^{a_1}},$$

onde $h_1(x)=-1$ e $a_1=2$.

Se vale até $k-1$, temos então:

$$\phi^{(k-1)}(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}h_{k-1}(x)}{(x-1)^{a_{k-1}}}.$$

Daí,

$$(\phi^{(k-1)})'(x)=\frac{\left(e^{\frac{1}{x-1}}(-\frac{1}{(x-1)^2})h_{k-1}(x)+e^{\frac{1}{x-1}}(h_{k-1})'(x)\right)(x-1)^{a_{k-1}}-\left(e^{\frac{1}{x-1}}h_{k-1}(x)\right)a_{k-1}(x-1)^{a_{k-1}-1}}{(x-1)^{2a_{k-1}}}$$

E, portanto,

$$\phi^{(k)}(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^{2(a_{k-1}+1)}}\left[-h_{k-1}(x)+h'_{k-1}(x)(x-1)^{a_{k-1}+2}-h_{k-1}(x)a_{k-1}(x-1)^{a_{k-1}+1}\right]$$

Assim,

$$\phi^{(k)}(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}h(x)}{(x-1)^{a_k}},$$

onde $h_k(x)=-h_{k-1}(x)+h'_{k-1}(x)(x-1)^{a_{k-1}+2}-h_{k-1}(x)a_{k-1}(x-1)^{a_{k-1}+1}$ e $a_k=2(a_{k-1}+1)$.

□

Obs 2.3.2. *Definindo agora $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ por $\psi(x)=k\phi(|x|^2)$, onde $k\in\mathbb{R}$ é constante, obtemos que ψ pode ser reescrita por*

$$\psi(x)=\begin{cases}ke^{\frac{1}{|x|^2-1}};0\le|x|^2<1\\ 0;|x|^2\ge 1\end{cases}$$

ou ainda,

$$\psi(x)=\begin{cases}ke^{\frac{1}{|x|^2-1}};|x|<1\\ 0;|x|\ge 1\end{cases}$$

Tome

$$k = (\int_{B_1(0)} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} dx)^{-1} < \infty,$$

Note que ψ satisfaz as seguintes propriedades:

- $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, pois* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *e* $n : \mathbb{R}^n \to [0,\infty); n(x) = |x|^2$ *satisfaz* $n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*, e* $\psi = \phi \circ n$.
- *Se* $r \in \mathbb{R}$ *e* $y \in B_1(0)$*, então* $\psi(ry) = \psi(r|y|)$*, pois* $\psi(ry) = k\phi(|ry|^2) = k\phi(|r|y||^2) = \psi(r|y|) = \psi(r)$.
- $\psi(x) = 0$*, se* $x \notin B_1(0)$*. Daí,* $supp(\psi) \subset B_1(0)$*. Portanto,* ψ *tem suporte compacto.*
- $\psi(-x) = \psi(x)$*, pois* $\psi(-x) = k\phi(|-x|^2) = k\phi(|x|^2) = \psi(x)$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = \int_{B_1(0)} \psi(x)dx = 1.$
- $$w_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)dr = 1, \tag{2.7}$$

  De fato,

  $$\int_{B_1(0)} \psi(x)dx = \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} \psi(x)dS_x dr = \int_0^1 \int_{\partial B_1(0)} \psi(ry)r^{n-1}dS_y dr = \int_0^1 \int_{\partial B_1(0)} \psi(r)r^{n-1}dS_y dr$$

  Além disso,

  $$\int_0^1 \int_{\partial B_1(0)} \psi(r)r^{n-1}dS_y dr = \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr \int_{\partial B_1(0)} dS_y = w_n \int_0^1 \psi(r)r^{n-1}dr.$$

Definição 2.3.2. *Sejam U,V conjuntos abertos tais que $U \subset V$. Sejam ainda f,g funções contínuas tais que $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$. Então a convolução de f e g, denotada por $f * g$ é a função definida por $f * u : U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f * g(x) = \int_U f(x-y)g(y)dy$$

.

Lema 2.3.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R} \in C(\Omega)$. Então $f * u \in C^(\Omega)$.*

Prova. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$. Basta provar que

$$f * u(x_n) = \int_\Omega f(x_n - y)u(y)dy \to \int_\Omega f(x-y)u(y)dy = f * u(x)$$

Como $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, então

$$f(x_n - y)u(y) \to f(x-y)u(y),$$

e f é limitado (pelo **Teorema de Weirstrass**), ou seja,

$$|f(x_n - y)u(y)| \leq ||f||_\infty |u(y)|$$

Mas u é continua e, portanto, integravel. Daí, pelo **Teorema da Convergencia Dominada**, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} f * u(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x_n - y)u(y)dy = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f(x_n - y)u(y)dy = \int_\Omega f(x-y)u(y)dy = f * u(x).$$

$\square$

Teorema de Clairaut-Schwarz: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2. Então, para qualquer ponto $x \in D$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Obs 2.3.3. *Seja $f \in C^n(\Omega)$, $n \geq 2$. Então, se $|\alpha| = m, 1 \leq m \leq n$, então $\exists \beta, x_j$ tal que $|\beta| = m-1$ e $D^\alpha = D_{x_j}(D^\beta f)$.*

Prova. De fato, seja $\alpha = (p_1, ..., p_k)$ com $|\alpha| = m$.
Então, $\exists p_j$ tal que $p_j \geq 1$ (caso contrário $m = \sum x_j = 0 < 1$, absurdo).
Logo, tomando $\beta = (p_1, ..., p_j - 1, ..., p_k)$, temos que $|\beta| = m-1$ e, usando o **Teorema de Clairaut-Schwarz**, obtemos ainda

$$D_{x_j}(D^\beta f) = D_{x_j}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_j - 1} x_j ... \partial^{p_n} x_n}\right) = \frac{\partial^m f}{\partial^{p_1} x_1 ... \partial^{p_j} x_j ... \partial^{p_n} x_n} = D^\alpha f.$$

$\square$

Teorema do Valor Médio: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : A \to \mathbb{R} \in C^1(A)$. Sejam $x, y \in A$ tal que $L(x,y) = \{tx + (1-t)y;\ 0 \leq t \leq 1\} \subset A$. Então, existe $z \in L(x,y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x).$$

Teorema 2.3.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R} \in C(\Omega)$. Então $f * u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prova. Para simplificar, denotemos a convolução $f * u(x) = \int_\Omega f(x-y)u(y)dy$ por g.
Precisamos provar que $g \in C^n(\Omega), \forall n \in \mathbb{N}$.
Basta provar que

$$\forall \alpha, |\alpha| = n, D^\alpha g = \left(D^\alpha f\right) * u(x) = \int_\Omega D^\alpha f(x-y)u(y)dy,$$

pois o lado direito da expressão é uma função contínua.

Provaremos por indução em n.

Caso base: $n = 1$.

Provemos que se $f \in C^1(\Omega)$, então

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)u(y) \right) dy.$$

Basta provar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+he_i)-g(x)}{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * u(x).$$

Seja $x \in \Omega$ e h suficientemente pequeno tal que $x+he_i \in \Omega$.

Pelo **Teorema do Valor Médio** para $x-y, x-y+he_i$, obtemos que $\exists c(h) \in \mathbb{R}$ tal que $|c(h)| \leq h$ e

$$f(x-y+he_i) - f(x-y) = \nabla f\big((x-y+c(h)e_i\big) \cdot (he_i) = h\frac{\partial f}{\partial x_i}\big((x-y+c(h)e_i\big).$$

Então, temos que

$$\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h} = \frac{\int_\Omega f(x+he_i-y)u(y)dy - \int_\Omega f(x-y)u(y)dy}{h} =$$

$$= \int_\Omega \Big(\frac{f(x-y+he_i)-f(x-y)}{h} \Big) u(y)dy = \int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y+c(h)e_i) \Big) u(y)dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * u(x+c(h)e_i).$$

Mas,

$$\lim_{h\to 0} \big(x+c(h)e_i\big) = x.$$

Então, pelo **Lema 2.3.2**, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * u(x+c(h)e_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * u(x).$$

Hipótese de indução:

$$\forall \alpha, |\alpha| = k, D^\alpha g(x) = \int_\Omega D^\alpha f(x-y)u(y)dy$$

Passo indutivo: provaremos para k+1, ou seja, se α é um multi-índice com $|\alpha| = k+1$, temos que

$$D^\alpha g = \int_\Omega D^\alpha f(x-y)u(y)dy$$

Ora, $\exists \beta$ tal que $D^\alpha g(x) = D_{x_j}(D^\beta g)$, e $\frac{\partial D^\beta f}{\partial x_j} = D^\alpha f$, onde $|\beta| = k$.

Note que $D^\beta f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, pois $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Logo, aplicado o caso base para $D^\beta g = \int_\Omega D^\beta f(x-y)u(y)dy$, obtemos que

$$\frac{\partial D^\beta g}{\partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial D^\beta f}{\partial x_j}(x-y)u(y)dy.$$

Portanto,

$$D^\alpha g = \int_\Omega D^\alpha f(x-y)u(y)dy$$

□

Teorema 2.3.2. *Se u é harmônica em Ω, então u é suave, ou seja, $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prova. Utilizaremos a função ψ definida anteriormente e o fato de u satisfazer a propriedade do valor médio em Ω (pois u é harmônica em Ω).

Sejam, para $\varepsilon > 0$,

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\},$$

$$\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\frac{x}{\varepsilon}),\ e$$

$$u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R};\ u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \psi_\varepsilon(x-z)u(z)dz.$$

Seja $x \in \Omega_\varepsilon$. Provaremos que $u_\varepsilon(x) = u(x)$.

Temos que, $d(x, \partial\Omega) > \varepsilon$ e, portanto, $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Então, definindo $\Lambda := \{z - x; z \in \Omega\}$, obtemos:

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \psi_\varepsilon(x-z)u(z)dz = \int_\Lambda \psi_\varepsilon(-y)u(x+y)dy$$

Mas, $B_\varepsilon(0) \subset \Lambda$. De fato, $a \in B_\varepsilon(0) \Rightarrow a + x \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow a + x \in \Omega \Rightarrow a \in \Lambda$.

Logo, como temos que se $x \notin B_\varepsilon(0)$, entao $\psi_\varepsilon(x) = 0$ $\big($pois $\psi(x) = 0$, se $x \notin B_1(0)\big)$, obtemos

$$\int_\Lambda \psi_\varepsilon(-y)u(x+y)dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \psi_\varepsilon(-y)u(x+y)dy$$

Temos também que $\psi_\varepsilon(-x) = \psi_\varepsilon(x)$, ou seja,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \psi_\varepsilon(-y)u(x+y)dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \psi_\varepsilon(y)u(x+y)dy$$

Então,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \psi_\varepsilon(y)u(x+y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|y|<\varepsilon} \psi(\frac{y}{\varepsilon})u(x+y)dy = \int_{|y|<1} \psi(y)u(x+\varepsilon y)dy$$

Assim,

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^1 \Big(\int_{\partial B_r(0)} \psi(y) u(x+\varepsilon y) dS_y \Big) dr = \int_0^1 \Big(\int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} \psi(rz) u(x+\varepsilon rz) dS_z \Big) dr$$

Além disso,

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^1 \int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} \psi(r) u(x+\varepsilon rz) dS_z dr = \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rz) dS_z$$

Contudo, definindo $s = \varepsilon r$, temos que $s < \varepsilon$ (pois $r \in (0,1)$) e, portanto, $B_s(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.
Assim, pela **Equação 2.3**, obtemos:

$$\int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rz) dS_z = \int_{\partial B_1(0)} u(x+sz) dS_z = w_n u(x)$$

Dai, pela **Equação 2.7**,

$$u_\varepsilon(x) = u(x) w_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = u(x)$$

Assim, pelo **Teorema 2.3.1**, $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ e, portanto, $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.
Por fim, note que

$$\Omega \subset \bigcup_\varepsilon \Omega_\varepsilon.$$

De fato, se $x \in \Omega$, como Ω é aberto, $d(x, \partial\Omega) > 0$.
Daí, $\exists \varepsilon_0 > 0; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon_0$.
Assim, $x \in \Omega_{\varepsilon_0}$.
Portanto, $u \in C^\infty(\Omega)$.

□

2.4 Estimativas e Regularidade

Nesta seção iniciaremos obtendo que derivadas preservam harmonicidade. Em seguida obteremos estimativas para derivadas parciais, a partir da qual obteremos o Teorema de Liouville e a analiticidade de funções harmônicas.

Proposição 2.4.1. *Suponha que $u \in C(\Omega)$ é harmônica em Ω. Então, $D^\alpha u$ é harmônica em Ω, para todo multi-índice α.*

Prova. Note que u é suave, pois é harmônica.
Daí, basta provar por indução em $|\alpha|$ que $\Delta(D^\alpha u) = 0$.

Passo 1: $|\alpha| = 1$.

Temos então que $D^{\alpha}u = D_{x_i}u$, para algum x_i.

Contudo, aplicando o **Teorema de Clairaut-Schwarz**, temos que

$$\Delta(D_{x_i}u) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\Big)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0.$$

Portanto, $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta(D_{x_i}u) = 0$.

Passo 2: Se $\forall |\alpha| = m$ vale, então, provemos que vale para β tal que $|\beta| = m+1$.

Temos que $\exists \alpha$ tal que $|\alpha| = m$ e $D^{\beta} = D_{x_j}(D^{\alpha}u)$.

Mas, pela hipótese, D^{α} é harmônica, ou seja, $\Delta(D^{\alpha}u) = 0$.

Daí, aplicando o resultado do passo 1, obtemos que $\Delta(D^{\beta}u) = 0$.

$\square$

Lema 2.4.1. *Suponha que $u \in C(\overline{B}_R)$ é harmônica em $B_R = B_R(x_0)$. Então vale que*

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{R}\max_{\overline{B}_R}|u|,\ \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

Prova. Note inicialmente que $D_{x_i}u$ é harmônica em B_R e, portanto, satisfaz a propriedade do valor médio.

Daí,

$$D_{x_i}u(x_0) = \frac{n}{w_n R^n}\int_{B_R(x_0)} D_{x_i}u(y)dy$$

Sendo ν_i a i-ésima cordenada do vetor $\eta(y)$, e aplicando o **Teorema da Divergência** no campo de vetor F que vale u na i-ésima cordenada e 0 nas outras, obtemos:

$$\int_{B_R(x_0)} D_{x_i}u(y)dy = \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu_i dS_y$$

Assim sendo,

$$D_{x_i}u(x_0) = \frac{n}{w_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu_i dS_y$$

E, portanto,

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)||\nu_i| dS_y$$

Mas,

$$|u(y)| \leq \max_{\partial B_R}|u|,$$

e

$$|\nu_i| \leq |\eta(y)| = 1.$$

Então,

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} \max_{\partial B_R} |u| \int_{\partial B_R(x_0)} dS_y \leq \frac{n}{w_n R^n} \max_{\overline{B}_R} |u| w_n R^{n-1} = \frac{n}{R} \max_{\overline{B}_R} |u|.$$

□

Teorema 2.4.2. *Suponha que $u \in C(\overline{B}_R)$ é uma função harmônica não negativa em $B_R = B_R(x_0)$. Então vale que*

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0),\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Prova. Análogo ao Lema anterior, obtemos:

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u(y)||\nu_i| dS_y$$

Daí, como $|u(y)| = u(y)$, pois u é não negativa, e $|\nu_i| \leq |\eta(y)| = 1$, obtemos:

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y$$

Porém, sendo u harmônica, u satisfaz a propriedade do valor médio, ou seja,

$$\int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y = w_n R^{n-1} u(x_0)$$

Portanto,

$$|D_{x_i}u(x_0)| \leq \frac{n}{w_n R^n} w_n R^{n-1} u(x_0) = \frac{n}{R} u(x_0).$$

□

Corolário 2.4.1 (Teorema de Liouville)**.** *Uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$ limitada por cima ou por baixo é constante.*

Prova. Sejam u, v funções harmônicas em $\mathbb{R}^n$ limitadas por cima e por baixo, respectivamente.
Daí, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tais que $u(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. e $m \leq v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Defina $f(x) = M - u(x)$ e $g(x) = v(x) - m$.
Logo, f e g são não negativas e harmônicas em $B_R(x), \forall R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, pelo **Teorema 2.4.2**, temos, para todo $i \in \{1,2,...,n\}$:

$$|D_{x_i}f(x)| \leq \frac{n}{R}f(x),\ |D_{x_i}g(x)| \leq \frac{n}{R}g(x)$$

De onde obtemos, fazendo $R \to \infty$, que:

$$D_{x_i}f(x) = 0,\ D_{x_i}g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

E, portanto,

$$D_{x_i}u(x) = 0,\ D_{x_i}v(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Daí,

$$\nabla u(x) = 0,\ \nabla v(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

O que prova que u, v são funções constantes, concluindo a demonstração.

□

Proposição 2.4.3. *Suponha que $u \in C(\overline{B}_R)$ é harmônica em $B_R = B_R(x_0)$. Então, para todo multi-índice α com $|\alpha| = m$, vale que*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{B}_R} |u|$$

Prova. Seja $\alpha = x_1, x_2, ..., x_p$, tal que $x_1 + x_2 + ... + x_p = m$.

Provaremos por indução em m

Caso base: $m = 1$

Temos que $x_i = 1$ e $x_j = 0, \forall j \neq i$.

Daí, o resultado vale pelo **Lema 2.4.1**.

Hipotese de indução: Seja $\forall \alpha; |\alpha| = m$, vale que

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{B}_R} |u|$$

Passo indutivo: Seja $\alpha = x_1, x_2, ..., x_p$, tal que $x_1 + x_2 + ... + x_p = m + 1$.

Precisamos provar que

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{\overline{B}_R} |u|$$

Temos que $\exists \beta$ tal que $|\beta| = m$ e $D_{x_j}\left(D^\beta u\right) = D^\alpha u$, para algum x_j.

Para $0 < \theta < 1$, defina $r = (1-\theta)R \in (0, R)$.

Então, aplicando o **Lema 2.4.1** para D^β, usando B_r, obtemos:

$$|D^\alpha u(x_0)| = |D_{x_j}(D^\beta u)(x_0)| \leq \frac{n}{r}\max_{\overline{B}_r}|D^\beta|. \tag{2.8}$$

Seja agora $x \in \overline{B}_r$.

Então $B_{R-r}(x) \subset \overline{B}_{R-r} \subset \overline{B}_R$.

Então, como $|\beta| = m$, podemos aplicar a hipótese à B_{R-r}, na função D^β e obter

$$|D^\beta(x)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{B}_{R-r}}|u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{B}_R}|u|$$

Daí,

$$\max_{\overline{B}_r}|D^\beta| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{B}_R}|u|$$

E, portanto, usando a **Equação 2.8** e que $r = (1-\theta)R$, obtemos,

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n}{r}\max_{\overline{B}_r}|D^\beta| \leq \frac{n}{r}\frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{B}_R}|u| = \frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{R^{m+1}\theta^m(1-\theta)}\max_{\overline{B}_R}|u|$$

Tomando então $\theta = \frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N}$, e usando que $e > (1+\frac{1}{m})^m, \forall m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{\theta^m(1-\theta)} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m (m+1) < e(m+1)$$

E assim concluimos que

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1}e^m(m+1)!}{R^{m+1}}\max_{\overline{B}_R}|u|.$$

□

Teorema 2.4.4. *Toda função harmônica é analítica.*

Prova. Seja u uma função harmônica em Ω e $x \in \Omega$.

Como Ω é aberto, podemos tomar $R > 0$ tal que $B_{2R} \subset \Omega$.

Além disso, tomando ainda $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| \leq R$, podemos usar a expressão de Taylor para obter:

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i u\right](x) + R_m(h),$$

onde

$$R_m(h) = \frac{1}{m!}\left[\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m u\right](x_1+\theta h_1,\ldots,x_n+\theta h_n)$$

para algum $\theta \in (0,1)$.

De fato, note que $x+h \in B_R(x)$, pois $|h| < R$.

Assim, para provar que u é analítica, basta provar que

$$\lim_{m\to\infty} |R_m(h)| = 0.$$

Note inicialmente que, nomeando $y = x_1 + \theta h_1, \ldots, x_n + \theta h_n$, então $|y-x| = |h|\theta$.

Portanto, tomando $r < (2-\theta)R$, temos que $B_r(y) \subset B_{2R}(x)$.

De fato, se $|z-y| < r$, então $|z-x| < |z-y| + |y-x| < r + |h|\theta < (2-\theta)R + \theta R < 2R$.

Portanto, aplicando a **Proposição 2.4.3** a $B_r(y)$, concluímos que

$$|D^\alpha u(y)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{r^m} \max_{\overline{B}_r} |u|$$

E, assim,

$$\max_\alpha |D^\alpha u(y)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{r^m} \max_{\overline{B}_r} |u|$$

Daí, obtemos que

$$\left| \left[\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m u \right](y) \right| \leq |h|^m \left| \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m u \right](y) \right| \leq |h|^m n^m \max_\alpha D^\alpha u(y) \leq$$

$$\leq |h|^m n^m \frac{n^m e^{m-1} m!}{r^m} \max_{\overline{B}_r} |u| = \frac{|h|^m n^{2m} e^{m-1} m!}{r^m} \max_{\overline{B}_r} |u|$$

Concluímos então que

$$|R_m(h)| \leq \frac{1}{m!} \frac{|h|^m n^{2m} e^{m-1} m!}{r^m} \max_{\overline{B}_r} |u| \leq \left(\frac{|h| n^2 e}{r} \right)^m \max_{\overline{B}_r} |u|$$

Assim, tomando $|h| \leq \frac{r}{2n^2 e}$, obtemos que $|R_m(h)| \to 0$ se $m \to \infty$.

$\square$

2.5 Desigualdade de Harnack e Função Fracamente Harmônica

Nesta seção obteremos a "desigualdade de Harnack"a partir da propriedade do valor médio. Em seguida definiremos funções fracamente harmônicas e provaremos a "Identidade de Green". Por fim a usaremos junto a propriedade do valor médio para provarmos que a definição de função fracamente harmônica é equivalente a definição de funções harmônicas.

Lema 2.5.1. *Seja $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $r = \frac{d(x_0, \partial\Omega)}{4}$. Então, se u é harmônica em Ω, temos que $\exists c = c(n) > 0$ tal que*

$$u(x) \leq cu(y), \forall x, y \in B_r(x_0)$$

.

Prova. Como u e harmônica, então u satisfaz a propriedade do valor médio.

Além disso, $B_{4r}(x_0) \subset \Omega$.

Daí, sendo $x, y \in B_r(x_0)$, temos que $B_{3r}(x), B_r(y) \subset B_{4r}(x_0) \subset \Omega$

Portanto, usando a propriedade do valor médio para x, obtemos

$$u(x) = \frac{n}{w_n(3r)^n} \int_{B_{3r}(x)} u(z)dz = 3^{-n} \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_{3r}(x)} u(z)dz$$

Além disso, $B_r(y) \subset B_{3r}(x)$.

De fato, $z \in B_r(y)$, então $|z-y| < r$ e $|z-x| < |z-y| + |y-x_0| + |x_0-x| < r+r+r = 3r$.

Dai, usando que $B_r(y) \subset B_{3r}(x)$ e $u \geq 0$, temos

$$3^{-n} \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_{3r}(x)} u(z)dz \geq 3^{-n} \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_r(y)} u(z)dz$$

Mas também temos, pela propriedade do valor médio para y, que

$$3^{-n} \frac{n}{w_n r^n} \int_{B_r(y)} u(z)dz = 3^{-n} u(y)$$

Concluímos então que

$$u(x) \geq 3^{-n} u(y), \forall x, y \subset B_r(x_0),$$

E, definindo $c = 3^n$, concluímos ainda que

$$u(y) \leq 3^n u(x), \forall x, y \subset B_r(x_0).$$

□

Teorema 2.5.1 (Desigualdade de Harnack)**.** *Suponha que u é harmônica em Ω. Então, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante $C = C(\Omega, K)$ tal que se $u \geq 0$ em Ω, então*

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y), \forall x, y \in K$$

Prova. Seja $r = \frac{d(K, \partial\Omega)}{4} > 0$ e $x, y \in K$.

Tome a cobertura $\bigcup_{x \in K} B_r(x)$ de K.

Como K é compacto, então existem $x_1, x_2, ..., x_N$ tais que

$$K \subset \cup_{i=1}^{N} B_r(x_i).$$

Note que podemos tomá-los de modo que $B_r(x_i) \cap B_r(x_{i+1}) \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$.

Daí, como $x,y \in K$, então $\exists p,q \in \{1,2,...,N\}$ tais que $x \in B_r(x_p)$, $y \in B_r(x_q)$.

Sem perda podemos tomar $p < q$.

Daí, podemos tomar pontos $z_i \in B_r(x_i) \cap B_r(x_{i+1})$ para $i \in \{p, p+1, ..., q-1\}$.

Assim, como $d(x_i, \partial\Omega) \geq d(K, \partial\Omega), \forall i \in \{1,2,...,N\}$, podemos aplicar o **Lema 2.5.1** às bolas $B_r(x_i), i \in \{p, p+1, ..., q\}$, e obtemos:

$$u(x) \leq cu(z_p)$$

$$u(z_i) \leq cu(z_{i+1}, i \in \{p, p+1, ..., q-2\}$$

$$u(z_{q-1}) \leq cu(y)$$

De onde obtemos, multiplicando as desigualdades, que

$$u(x) \leq c^{q-p+1}u(y)$$

Mas, $q - p + 1 \leq N$.

Portanto, como $c > 0$ e $u \geq 0$, então $u(x) \leq c^N u(y), \forall x,y \in K$.

Assim, $c^{-N}u(y) \leq u(x), \forall x,y \in K$.

De onde concluímos que $\frac{1}{c^N}u(y) \leq u(x) \leq c^N u(y)$, $\forall x,y \in K$.

Ora, pelo **Lema 2.5.1**, $c = 3^n$ que só depende da dimensão de Ω.

Além disso, N só depende de K.

Daí, definindo $C = c^N$, então $C = C(K,\Omega)$ e

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y), \forall x,y \in K.$$

$\square$

Definição 2.5.1. *Seja $u \in C(\Omega)$. Dizemos que u é fracamente harmônica se para toda $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ temos que*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0.$$

Lema 2.5.2. *Suponha que $u \in C(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e u é fracamente harmônica. Então, se $B_r(x) \subset \Omega$, temos*

$$r\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = n\int_{B_r(x)} u(y)dy$$

Prova. Seja $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$ e defina.

$$\varphi(y,r)=\begin{cases}(|y-x|^2-r^2)^n\,;\,|y-x|\le r\\ 0\,;\,|y-x|>r\end{cases}$$

Defina também $\varphi_k(y,r)=(|y-x|^2-r^2)^{n-k}\big(2(n-k+1)|y-x|^2+n(|y-x|^2-r^2)\big)$ para $|y-x|\le r$ e $k=2,3,...,n$.

Note que $\varphi(\cdot,r)\in C_0^2(\Omega)$, pois $f(y)=|y-x|^2-r^2\in C^2(\Omega)$, $supp(\varphi)=\overline{B_r(x)}$ é compacto, e as derivadas parciais de ordem 1 e 2 de φ são nulas para $|y-x|=r$

Além disso, se $y=(y_1,...,y_n)$ e $|y-x|\le r$, então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}=2(y_i-x_i)n(|y-x|^2-r^2)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i^2}=2n(|y-x|^2-r^2)^{n-1}+4(y_i-x_i)^2n(n-1)(|y-x|^2-r^2)^{n-2}$$

Daí,

$$\Delta_y\varphi(y,r)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^n 2n(|y-x|^2-r^2)^{n-1}+4(y_i-x_i)^2n(n-1)(|y-x|^2-r^2)^{n-2}=$$

$$=2n^2(|y-x|^2-r^2)^{n-1}+4|y-x|^2n(n-1)(|y-x|^2-r^2)^{n-2}=2n(|y-x|^2-r^2)^{n-2}\big(2(n-1)|y-x|^2+n(|y-x$$

$$=2n\varphi_2(y,r)$$

Portanto,

$$\Delta_y\varphi(y,r)=\begin{cases}2n\varphi_2(y,r)\,;\,|y-x|\le r\\ 0\,;\,|y-x|>r\end{cases}$$

Assim, usando que u é fracamente harmônica e que $\varphi\in C_0^2(\Omega)$, temos que

$$\int_{B_r(x)}u(y)\varphi_2(y,r)dy=0$$

Daí, se $n=2$, obtemos que

$$\int_{B_r(x)}u(y)\big(4|y-x|^2-2r^2\big)dy=0$$

Caso contrário, $n\ge 3$.

Neste caso, provaremos que para todo $k \in \{2,3,...,n-1\}$

$$\int_{B_r(x)} u(y)\varphi_k(y,r)dy = 0 \Rightarrow \int_{B_r(x)} u(y)\varphi_{k+1}(y,r)dy = 0 \tag{2.9}$$

De fato, seja $k \in \{2,3,...,n-1\}$. Derivando a hipotese da *Equação 2.9* em relação a r, obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\int_{B_r(x)} u(y)\varphi_k(y,r)dy\Big) = \int_{\partial B_r(x)} u(y)\varphi_k(y,r)dS_y + \int_{B_r(x)} u(y)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)dy$$

Mas se $2 \leq k \leq n-1$ e $|y-x| = r$, então $\varphi_k(y,r) = 0$. Portanto, concluímos que

$$\int_{B_r(x)} u(y)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r)dy = 0$$

Note que

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(y,r) =$$

$$= (n-k)(|y-x|^2-r^2)^{n-k-1}(-2r)\big(2(n-k+1)|y-x|^2+n(|y-x|^2-r^2)\big)+(|y-x|^2-r^2)^{n-k}(-2nr) =$$

$$= (-2r)(|y-x|^2-r^2)^{n-k-1}\Big((n-k)\big(2(n-k+1)|y-x|^2+n(|y-x|^2-r^2)\big)+n(|y-x|^2-r^2)\Big) =$$

$$= (-2r)(n-k+1)\Big((|y-x|^2-r^2)^{n-k-1}\big(2(n-k)|y-x|^2+n(|y-x|^2-r^2)\big) = (-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(y,r)$$

Assim, concluímos então que

$$\int_{B_r(x)} u(y)(-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(y,r)dy = 0$$

Ou ainda,

$$\int_{B_r(x)} u(y)\varphi_{k+1}(y,r)dy = 0$$

Assim sendo, podemos tomar $k = n$ em (5) e obtemos que

$$0 = \int_{B_r(x)} u(y)\varphi_n(y,r)dy = \int_{B_r(x)} u(y)\big((n+2)|y-x|^2-nr^2\big)dy$$

Portanto, obtemos que, para $n \geq 2$ (pois já valia para $n = 2$), temos

$$\int_{B_r(x)} u(y)\big((n+2)|y-x|^2-nr^2\big)dy = 0$$

Assim, derivando em relação a r, obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\int_{B_r(x)} u(y)\big((n+2)|y-x|^2-nr^2\big)dy\Big) =$$

$$= \int_{\partial B_r(x)} u(y)\big((n+2)|y-x|^2 - nr^2\big)dS_y + \int_{B_r(x)} u(y)(-2nr)dy =$$

$$= 2r^2 \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y - 2nr \int_{B_r(x)} u(y)dy$$

Assim sendo, como $r > 0$, podemos dividir a expressão por $2r$ e obtemos o resultado para todo $n \geq 2$

$$r \int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = n \int_{B_r(x)} u(y)dy$$

□

Identidade de Green: Seja Ω é regular, η o vetor normal unitario exterior ao ponto $x \in \partial\Omega$, e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot \eta - v\nabla u \cdot \eta)dS_x.$$

Prova. Tome $F = u\nabla v$.

Note que $F \in C^1(\overline{\Omega})$.

Daí, usando o **Teorema da Divergência** e a relação

$$div(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v,$$

obtemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \eta dS_x.$$

E, portanto,

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)dx - \int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot \eta)dS_x - \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \eta)dS_x = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot \eta - v\nabla u \cdot \eta)dS_x.$$

□

Teorema 2.5.2. *Suponha que $u \in C(\Omega)$. Então u é fracamente harmônica se, e somente se, u é harmônica em Ω.*

Prova. $\Longleftarrow$) Suponha que u é harmônica.

Suponha, por absurdo, que $\exists\varphi \in C_0^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u\Delta\varphi \neq 0$ (digamos > 0).

Então, como $u\Delta\varphi$ é continua, temos que $\exists x_0 \in \Omega,\ B_r(x_0) \subset \Omega$ tal que $\int_{B_r(x_0)} u\Delta\varphi > 0$.

Daí, usando a **Identidade de Green** para u, φ em $B_r(x_0)$ temos

$$\int_{B_r(x_0)} (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u)dx = \int_{\partial B_r(x_0)} (u\nabla\varphi\cdot\eta - \varphi\nabla u\cdot\eta)dS_x$$

Mas $\int_{\partial B_r(x_0)} (u\nabla\varphi\cdot\eta - \varphi\nabla u\cdot\eta)dS_x = 0$, pois

$\varphi \in C_0^2(\Omega) \Rightarrow \varphi \in C_0^2(B_r(x_0)) \Rightarrow \varphi|_{\partial B_r(x_0)} = \nabla\varphi|_{\partial B_r(x_0)} = 0$,

e $\int_{B_r(x_0)} \varphi\Delta u = 0$, pois $\Delta u = 0$ em $\Omega \supset B_r(x_0)$.

Portanto, $\int_{B_r(x_0)} u\Delta\varphi = 0$, absurdo!

Assim, concluímos que $\forall\varphi \in C_0^2(\Omega)$, temos que $\int_\Omega u\Delta\varphi \neq 0$, ou seja, u é fracamente harmônica em Ω.

$\Longrightarrow$) Suponha que u é fracamente harmônica.

Para todo $B_r(x) \subset \Omega$ temos, pelo **Lema 2.5.2**

$$r\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = n\int_{B_r(x)} u(y)dy$$

Portanto,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y\right) = \frac{n}{w_n}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r(x)} u(y)dy\right) =$$

$$= \frac{n}{w_n}\left\{-\frac{n}{r^{n+1}}\int_{B_r(x)} u(y)dy + \frac{1}{r^n}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y\right\} = 0.$$

Isso implica que

$$\frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = constante.$$

Mas, sabemos que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = \lim_{r\to 0}\frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)dS_z =$$
$$\frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)} u(x)dS_z = \frac{1}{w_n}u(x)\int_{\partial B_1(0)} dS_z = \frac{1}{w_n}u(x)w_n = u(x).$$

Assim, pela continuidade, concluímos que $constate = u(x)$, ou seja,

$$\frac{1}{w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = u(x),\ \forall B_r(x) \subset \Omega$$

Portanto, u satisfaz a propriedade do valor médio em Ω e, assim, é harmônico em Ω.

$\square$

3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Uma vez que provamos propriedades básicas de funções harmônicas em geral, vamos agora focar em propriedades de soluções particulares. Para isso iniciaremos definindo a solução fundamental da equação de Laplace. Em seguida obteremos a função de Green e estudaremos algumas de suas propriedades. Finalizaremos solucionando o Problema de Dirichlet em $B_R(0)$ e obtendo corolários de tal solução.

Utilizaremos neste capítulo a notação B_R para se referir a $B_R(0)$.

3.1 Definição e Fórmula de representação de Green

Nesta seção iniciaremos estudando funções harmônicas radiais. Em seguida definiremos a solução fundamental (do laplaciano) por meio delas. Depois acharemos algumas propriedades dela e provaremos a fórmula de representação de Green para funções $C^2(\overline{\Omega})$.

Proposição 3.1.1. *Se u é uma função harmônica radial não trivial(constante) em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, então $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$u(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 ln|x|;\ n = 2 \\ c_1 + c_2|x|^{2-n};\ n \geq 3 \end{cases}$$

Prova. Como u é radial,

$$\exists v : [0, +\infty) \to \mathbb{R};\ u(x) = v(r);\ r = |x| \tag{3.1}$$

Daí, como u é harmônica para $x \neq 0$, temos que $\Delta_x v(r) = \Delta_x u(x) = 0$ para $r \neq 0$.
Mas, temos que

$$r_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial v(r)}{\partial x_i} = \frac{\partial v(r)}{\partial r} r_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 v(r)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v'(r)\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\partial v'(r)}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) + v'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} = \frac{\partial v'(r)}{\partial r} r_{x_i}\frac{x_i}{r} + v'(r)\left(\frac{r - x_i r_{x_i}}{r^2}\right) =$$

$$= v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2}\right) = v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{r^2 - (x_i)^2}{r^3}\right)$$

$$\Delta_x v(r) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 v(r)}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{r^2-(x_i)^2}{r^3}\right)\right) =$$

$$= v''(r)\left(\frac{\sum x_i^2}{r^2}\right) + v'(r)\left(\frac{nr^2-\sum x_i^2}{r^3}\right) = v''(r)\left(\frac{r^2}{r^2}\right) + v'(r)\left(\frac{nr^2-r^2}{r^3}\right) = v''(r)+v'(r)\frac{n-1}{r}$$

Portanto,

$$v''(r)+v'(r)\frac{n-1}{r} = 0,\ r>0$$

Definindo $w(r) = v'(r)$, obtemos

$$w'(r)+w(r)\frac{n-1}{r} = 0$$

Daí, $w(r) = 0$ ou $w(r) \neq 0$.

No primeiro caso, $v'(r) = 0$, portanto, $v(r) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ e, assim, $u(x) = c_1$ (solução trivial).

No segundo caso,

$$(ln[w(r)])' = \frac{w'(r)}{w(r)} = \frac{1-n}{r} = (1-n)ln(r)$$

Portanto, integrando, para algum $c \in \mathbb{R}$

$$ln[w(r)] = (1-n)ln(r)+c,$$

Assim, para algum $c_2 \in \mathbb{R}$

$$w(r) = c_2 r^{1-n},$$

Então,

$$v'(r) = c_2 r^{1-n}$$

Integrando novamente, obtemos, para algum $c_1 \in \mathbb{R}$

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2\, ln(r);\ n=2 \\ c_1 + c_2 r^{2-n};\ n \geq 3 \end{cases}$$

De onde segue que o resultado.

$\square$

Proposição 3.1.2. *Seja u uma função harmônica radial não trivial em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que, para v definida na* ***Equação 3.1****,*

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial v(r)}{\partial r} dS_x = 1, \ \forall r > 0$$

então, para algum $c \in \mathbb{R}$, temos

$$u(x) = \begin{cases} c + \frac{1}{2\pi} ln|x| \, ; n = 2 \\ c + \frac{1}{w_n(2-n)} |x|^{2-n} \, ; n \geq 3 \end{cases}$$

Prova. Se $n = 2$, temos que $v(r) = c_1 + c_2 \, lnr$, para alguns $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Logo, como $\int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial v(r)}{\partial r} dS_x = 1, \ \forall r > 0$, e $\frac{\partial}{\partial r}\big(c_1 + c_2 \, ln(r)\big) = c_2 \frac{1}{r}$ obtemos, para $r > 0$ qualquer,

$$\int_{\partial B_r(0)} c_2 \frac{1}{r} dS_x = 1$$

Mas,

$$\int_{\partial B_r(0)} c_2 \frac{1}{r} dS_x = \frac{c_2}{r} \int_{\partial B_r(0)} dS_x = \frac{c_2}{r} 2\pi r = 2\pi c_2.$$

Portanto,

$$2\pi c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2\pi}$$

E,

$$v(r) = c_1 + \frac{1}{2\pi} ln(r).$$

Ou seja,

$$u(x) = c_1 + \frac{1}{2\pi} ln|x|.$$

Se $n \geq 3$, temos que $v(r) = c_1 + c_2 r^{2-n}$, para alguns $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Logo, como $\int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial v(r)}{\partial r} dS_x = 1, \ \forall r > 0$, e $\frac{\partial}{\partial |x|}\big(c_1 + c_2 r^{2-n}\big) = c_2(2-n) r^{1-n}$ obtemos, para $r > 0$ qualquer,

$$\int_{\partial B_r(0)} c_2 (2-n) r^{1-n} dS_x = 1$$

Mas,

$$\int_{\partial B_r(0)} c_2(2-n)r^{1-n}dS_x = c_2(2-n)r^{1-n}\int_{\partial B_r(0)} dS_x =$$

$$= c_2(2-n)r^{1-n}w_n r^{n-1} = c_2(2-n)w_n$$

Portanto,

$$c_2(2-n)w_n = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{(2-n)w_n}$$

E,

$$v(r) = c_1 + \frac{1}{w_n(2-n)}r^{2-n}$$

Ou seja,

$$u(x) = c_1 + \frac{1}{w_n(2-n)}|x|^{2-n}$$

$\square$

Obs 3.1.1. *Se trocarmos a condição u harmônica radial por u harmônica em* $\mathbb{R}^n - \{a\}, a \in \mathbb{R}^n$ *fixo tal que* $u(x) = v(r)$ *para* $r = |x-a|$*, obteremos que*

$$u(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 ln|x-a|;\ n = 2 \\ c_1 + c_2|x-a|^{2-n};\ n \geq 3 \end{cases}$$

Ainda mais, se

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial v(r)}{\partial r} dS_x = 1,\ \forall r > 0$$

Então, para algum $c \in \mathbb{R}$*,*

$$u(x) = \begin{cases} c + \frac{1}{2\pi} ln|x-a|\,; n = 2 \\ c + \frac{1}{w_n(2-n)}|x-a|^{2-n}\,; n \geq 3 \end{cases}$$

Definição 3.1.1. *Definimos a solução fundamental do Laplaciano como sendo a função* $\Gamma(a,\cdot) : \mathbb{R}^n - \{a\} \to \mathbb{R}$*, para* $a \in \mathbb{R}^n$*, tal que*

$$\Gamma(a,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} ln|x-a|\,; n = 2 \\ \frac{1}{w_n(2-n)}|x-a|^{2-n}\,; n \geq 3 \end{cases}$$

Ou ainda, $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} ln(r)\,; n = 2 \\ \frac{1}{w_n(2-n)} r^{2-n}\,; n \geq 3 \end{cases}$$

Obs 3.1.2. *A função* $\Gamma(a,x)$ *é harmônica para* $x \neq a$*,*

$$\frac{\partial \Gamma(a,x)}{\partial n_x} = \frac{1}{w_n |x-a|^{n-1}},$$

e,

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_x} dS_x = 1,\ \forall r > 0$$

.

Prova. A harmonicidade vem da **Obs 3.1.1**.

Além disso, sendo n_x a normal unitária para $x \in \partial B_r(a)$, temos

$$\nabla \Gamma(a,x) = \frac{x-a}{w_n |x-a|^n},$$

$$n_x = \frac{x-a}{|x-a|},\ e$$

$$\frac{\partial \Gamma(a,x)}{\partial n_x} = \nabla \Gamma \cdot n_x = \frac{x-a}{w_n |x-a|^n} \cdot \frac{x-a}{|x-a|} = \frac{|x-a|^2}{w_n |x-a|^{n+1}} = \frac{1}{w_n |x-a|^{n-1}}.$$

Por fim,

$$\int_{\partial B_r(a)} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x} \right) dS_x = \int_{\partial B_r(a)} \left(\frac{1}{w_n |x-a|^{n-1}} \right) dS_x = \frac{1}{w_n} \int_{\partial B_r(a)} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \right) dS_x =$$

$$= \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} dS_x = \frac{1}{w_n r^{n-1}} w_n r^{n-1} = 1$$

.

□

Obs 3.1.3. *A função* Γ *é integrável em* Ω *para todo* Ω *limitado.*

Prova. De fato, como Ω é limitado, seja $B_R(a) \supset \Omega$. Basta provar que

$$\int_{B_R(a)} \Gamma(x,a) dx < \infty.$$

Mas, temos que

$$\int_{B_R(a)} \Gamma(a,x)dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(a)} \Gamma(a,x)dS_x dr = \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} \Gamma(a,a+ry)r^{n-1}dS_y dr =$$

$$\int_0^R \int_{\partial B_1(0)} \Gamma(ry)r^{n-1}dS_y dr = \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} \Gamma(r)r^{n-1}dS_y dr = \int_0^R \Gamma(r)r^{n-1}dr \int_{\partial B_1(0)} dS_y =$$

$$= w_n \int_0^R \Gamma(r)r^{n-1}dr.$$

Logo, basta ver que:

Se $n = 2$,

$$\int_{B_R(a)} \Gamma(x,a)dx = 2\pi \int_0^R \frac{1}{2\pi} ln(r)rdr = \int_0^R ln(r)rdr = ln(R)\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} < \infty,$$

e, se $n \geq 3$,

$$\int_{B_R(a)} \Gamma(x,a)dx = w_n \int_0^R \frac{1}{w_n(2-n)} r^{2-n}r^{n-1}dr = \frac{1}{2-n}\int_0^R rdr = \frac{1}{2-n}\frac{R^2}{2} < \infty.$$

□

Lema 3.1.1. *Suponha que Ω é regular e $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Então, para todo $a \in \Omega$, se $B_r(a) \subset \Omega$, e n_x é o vetor normal unitário exterior ao ponto $x \in \partial B_r(a)$, então valem as seguintes igualdades*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\partial B_r(a)} \left(u\frac{\partial \Gamma(a,x)}{\partial n_x} \right) dS_x = u(a);$$

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{B_r(a)} \Gamma(a,x)\Delta u dx = 0;$$

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\partial B_r(a)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_x} \right) dS_x = 0.$$

Prova. Temos, pela **Obs 3.1.2**,

$$\frac{\partial \Gamma(a,x)}{\partial n_x} = \frac{1}{w_n|x-a|^{n-1}}.$$

Então,

$$\int_{\partial B_r(a)} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x} \right) dS_x = \int_{\partial B_r(a)} \left(u\frac{1}{w_n|x-a|^{n-1}} \right) dS_x = \frac{1}{w_n}\int_{\partial B_r(a)} \left(u\frac{1}{r^{n-1}} \right) dS_x =$$

$$= \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} u(x)dS_x = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(a+ry)r^{n-1}dS_y = \frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)} u(a+ry)dS_y$$

Portanto,

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\partial B_r(a)}\left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}\right)dS_x = \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)}u(a+ry)dS_y = \frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)}u(a)dS_y =$$

$$= \frac{u(a)}{w_n}\int_{\partial B_1(0)}dS_y = \frac{u(a)}{w_n}w_n = u(a)$$

Além disso,

$$|\int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx| \leq \int_{B_r(a)}|\Gamma||\Delta u|dx \leq ||\Delta u||_\infty\int_{B_r(a)}|\Gamma|dx = ||\Delta u||_\infty w_n\int_0^r|\Gamma(s)|s^{n-1}ds$$

Ou seja,

$$|\int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx| \leq ||\Delta u||_\infty w_n\int_0^r|\Gamma(s)|s^{n-1}ds \tag{3.2}$$

E também,

$$|\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}\right)dS_x| \leq \int_{\partial B_r(a)}\left|\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}\right|dS_x$$

Mas,

$$|\frac{\partial u}{\partial n_x}| \leq |\nabla u| \leq ||\nabla u||_\infty$$

Assim,

$$|\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}\right)dS_x| \leq ||\nabla u||_\infty\int_{\partial B_r(a)}|\Gamma|dS_x$$

Mas,

$$\int_{\partial B_r(a)}|\Gamma|dS_x = w_n|\Gamma(r)|r^{n-1}.$$

Daí,

$$|\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}\right)dS_x| \leq ||\nabla u||_\infty w_n|\Gamma(r)|r^{n-1} \tag{3.3}$$

Façamos o restante da análise em dois casos.

Caso 1: $n = 2$.

Podemos assumir $r < e$ (pois desejamos $r \to 0^+$).

Daí, $|ln(s)| = -ln(s)$, e obtemos, pela **Equação 3.2**

$$|\int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx| \leq ||\Delta u||_\infty 2\pi\int_0^r|\Gamma(s)|sds = ||\Delta u||_\infty\int_0^r\big(|ln(s)|s\big)ds =$$

$$-||\Delta u||_\infty \int_0^r \big(ln(s)s\big)ds = -||\Delta u||_\infty \bigg(ln(r)\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4}\bigg).$$

Mas,

$$\lim_{r\to 0^+} \bigg(ln(r)\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4}\bigg) = 0$$

Portanto,

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{B_r(a)} \Gamma \Delta u dx = 0$$

Além disso, pela **Equação 3.3**

$$|\int_{\partial B_r(a)} \bigg(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg) dS_x| \leq ||\nabla u||_\infty 2\pi \frac{1}{2\pi}|ln(r)|r = -||\nabla u||_\infty ln(r)r.$$

E, como

$$\lim_{r\to 0^+} ln(r)r = 0,$$

então,

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\partial B_r(a)} \bigg(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg) dS_x = 0.$$

Caso 2: $n \geq 3$.

Pela **Equação 3.2**

$$|\int_{B_r(a)} \Gamma \Delta u dx| \leq ||\Delta u||_\infty w_n \int_0^r |\frac{1}{w_n(2-n)} s^{2-n}| s^{n-1} ds = ||\Delta u||_\infty \frac{1}{(n-2)} \int_0^r s ds = ||\Delta u||_\infty \frac{1}{(n-2)} \frac{r^2}{2}$$

Mas,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{B_r(a)} \Gamma \Delta u dx = 0$$

E, pela **Equação 3.3**

$$|\int_{\partial B_r(a)} \bigg(\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg) dS_x| \leq ||\nabla u||_\infty w_n |\frac{1}{w_n(2-n)} r^{2-n}| r^{n-1} = ||\nabla u||_\infty \frac{1}{n-2} r$$

E, como

$$\lim_{r\to 0^+} r = 0,$$

então,

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}\right)dS_x = 0.$$

□

Teorema 3.1.3. *Suponha que Ω é regular, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e η_x o vetor normal unitário exterior ao ponto $x \in \partial\Omega$. Então, para todo $a \in \Omega$, vale a fórmula de representação de Green dada por*

$$u(a) = \int_{\Omega}\Gamma(a,x)\Delta u(x)dx - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(a,x)\frac{\partial u}{\partial \eta_x}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_x}(a,x)\right)dS_x.$$

Prova. Temos que Ω é aberto.

Portanto, $\exists B_r(a) \subset \Omega$.

Pela **Identidade de Green** aplicado a u,Γ na região $\Omega/B_r(a)$, denotando por m_x a normal unitária ao ponto $x \in \partial(\Omega\setminus B_r(a))$, temos que

$$\int_{\Omega\setminus B_r(a)}(\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma)dx = \int_{\partial(\Omega\setminus B_r(a))}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial m_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial m_x}\right)dS_x$$

Mas temos que $\Delta\Gamma = 0$ em $\Omega\setminus B_r(a)$, pois $\Delta\Gamma = 0$ em $\mathbb{R}^n - \{a\}$ e $a \notin \Omega\setminus B_r(a)$, visto que $a \in \Omega \cap B_r(a)$.

Assim sendo,

$$\int_{\Omega\setminus B_r(a)} u\Delta\Gamma dx = 0$$

Além disso, $\partial(\Omega\setminus B_r(a)) = \partial\Omega \cup \partial B_r(a)$.

Sendo n_x o vetor normal unitário exterior a $x \in \partial B_r(a)$, então $n_x = -m_x, x \in \partial B_r(a)$ e $m_x = \eta_x, x \in \partial\Omega$.

Assim,

$$\int_{\partial(\Omega\setminus B_r(a))}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial m_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial m_x}\right)dS_x = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial m_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial m_x}\right)dS_x + \int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial m_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial m_x}\right)dS_x =$$

$$= \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \eta_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_x}\right)dS_x - \int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}\right)dS_x$$

Portanto,

$$\int_{\Omega\setminus B_r(a)}\Gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \eta_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_x}\right)dS_x - \int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n_x}\right)dS_x$$

Agora, note que

$$\int_{\Omega\setminus B_r(a)}\Gamma\Delta u dx = \int_{\Omega}\Gamma\Delta u dx - \int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx$$

Assim,

$$\int_{\Omega}\Gamma\Delta u dx-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\eta_x}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_x}\right)dS_x=\int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx-\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n_x}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial n_x}\right)dS_x$$

Aplicando o resultado do **Lema 3.1.1**, obtemos que

$$\int_{B_r(a)}\Gamma\Delta u dx-\int_{\partial B_r(a)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\eta_x}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_x}\right)dS_x=u(a).$$

Portanto, concluimos que

$$\int_{\Omega}\Gamma\Delta u dx-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\eta_x}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_x}\right)dS_x=u(a).$$

□

Corolário 3.1.1. *Suponha que Ω é regular, $u\in C^2(\overline{\Omega})$ e η_x o vetor normal unitário exterior ao ponto $x\in\partial\Omega$. Então, para todo $a\in\Omega$ temos que*

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_x}dS_x=1$$

.

Prova. Basta tomar $u\equiv 1$ no **Teorema 3.1.3**. □

Obs 3.1.4. *Nas condições do **Teorema 3.1.3** e para $x\in\Omega$ qualquer, temos, aplicando o **Teorema 3.1.3**, que*

$$u(x)=\int_{\Omega}\Gamma(x,y)\Delta u(y)dy-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial\eta_y}(y)-u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y. \tag{3.4}$$

3.2 Função de Green

Nesta seção iniciaremos usando a fórmula de representação de Green trocando a solução fundamental por outra função γ mais geral. Definiremos então a Função de Green como um caso particular da γ. Acharemos então um candidato a solução do problema de Dirichlet (de modo mais geral). E, por fim, obteremos propriedades da função de Green.

Lema 3.2.1. *Seja Ω regular, $u\in C^2(\overline{\Omega})$, $x\in\Omega$ fixo e $\Phi(x,\cdot):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta_y\Phi(x,y)=0$ em Ω. Então, definindo $\gamma(x,\cdot):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ com $\gamma(x,y)=\Gamma(x,y)+\Phi(x,y)$, temos que*

$$u(x)=\int_{\Omega}\gamma(x,y)\Delta u(y)dy-\int_{\partial\Omega}\left(\gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial\eta_y}(y)-u(y)\frac{\partial\gamma}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y.$$

Prova. Aplicando a **Identidade de Green** para u,Φ em Ω, temos

$$\int_{\Omega}(\Phi(x,y)\Delta u(y)-u(y)\Delta_y\Phi(x,y))dy=\int_{\partial\Omega}\left(\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial\eta_y}(y)-u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y.$$

Daí, como $\Delta_y\Phi(x,y)=0$, obtemos

$$\int_{\Omega}\Phi(x,y)\Delta u(y)dy-\int_{\partial\Omega}\left(\Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial\eta_y}(y)-u\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y=0. \tag{3.5}$$

Assim, somando as **Equações 3.4 e 3.5**, e usando $\gamma(x,y)=\Gamma(x,y)+\Phi(x,y)$, obtemos

$$u(x)=\int_{\Omega}\gamma(x,y)\Delta u(y)dy-\int_{\partial\Omega}\left(\gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial\eta_y}(y)-u(y)\frac{\partial\gamma}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y.$$

□

Definição 3.2.1. *Seja Ω regular, $u\in C^2(\overline{\Omega})$, $x\in\Omega$ fixo. Se $\exists\Phi(x,\cdot):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta_y\Phi(x,y)=0,\forall y\in\Omega$ e $\Phi(x,y)=-\Gamma(x,y),\forall y\in\partial\Omega$, então, definimos a Função de Green como sendo $G(x,\cdot):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ com $G(x,y)=\Gamma(x,y)+\Phi(x,y)$.*

Obs 3.2.1. *A Função de Green, caso exista, é única.*

Prova. Basta provar que a função Φ da definição da função de Green é única.

Suponha que Φ exista.

Então, Φ é solução de um Problema de Dirichlet e Ω é limitado.

Logo, pelo **Corolário 2.2.2** do Principio do Máximo, Φ é única.

□

Teorema 3.2.1. *Seja Ω regular, $x\in\Omega$ fixo, e suponha que $\exists\Phi(x,\cdot):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases}\Delta_y\Phi(x,y)=0,\forall y\in\Omega\\ \Phi(x,y)=-\Gamma(x,y),\forall y\in\partial\Omega\end{cases}$$

Então, dados $f\in C(\overline{\Omega})$ e $g\in C(\partial\Omega)$, se o sistema

$$\begin{cases}\Delta u(x)=f(x),\forall x\in\Omega\\ u(x)=g(x),\forall x\in\partial\Omega\end{cases}$$

tem solução $u\in C^2(\overline{\Omega})$, então ela é única e é dada por

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x,y)f(y)dy+\int_{\partial\Omega}\left(g(y)\frac{\partial G}{\partial\eta_y}(x,y)\right)dS_y.$$

Prova. Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução.

Então, pelo **Lema 3.2.1**, usando a Função de Green, temos

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \left(G(x,y)\frac{\partial u}{\partial \eta_y}(y) - u(y)\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) \right) dS_y.$$

Mas se $y \in \partial\Omega$, então

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y) = \Gamma(x,y) - \Gamma(x,y) = 0.$$

Portanto,

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) \right) dS_y.$$

Daí,

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(g(y)\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) \right) dS_y.$$

Ou seja, obtemos a solução.

Além disso, pelo **Corolário 2.2.2** do Principio do Máximo, tal solução é única.

□

Proposição 3.2.2. *Seja Ω regular. Então a Função de Green $G(x,y)$ é simetrica em $\Omega \times \Omega$, ou seja, $G(x,y) = G(y,x), \forall x \neq y \in \Omega$.*

Prova. Sejam $x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2$.

Daí, como Ω é aberto, $\exists r_1, r_2$ tais que $B_{r_1}(x_1) \subset \Omega$ e $B_{r_2}(x_2) \subset \Omega$.

Tome r < $\min r_1, r_2, |x_2 - x_1|/2$.

Então, $B_r(x_1) \cap B_r(x_2) = \emptyset$ e $B_r(x_1) \cup B_r(x_2) \subset \Omega$.

Defina $G_1(y) = G(x_1, y)$ e $G_2(y) = G(x_2, y)$.

Então, para $i \in \{1,2\}$, temos que $\Delta G_i(y) = 0$, se $y \neq x_i$.

Além disso, sendo m_y o normal unitário ao ponto $y \in \partial(\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))$ e aplicando a **Identidade de Green** a G_1, G_2 em $\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))$, obtemos

$$\int_{\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))} (G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1) dy = \int_{\partial(\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))} (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial m_y} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial m_y}) dS_y.$$

Mas, sendo $\eta_y, n_{1,y}, n_{2,y}$ os normais unitários aos pontos $y \in \partial\Omega, \partial B_r(x_1), \partial B_r(x_2)$, respectivamente, então $\eta_y = m_y$, $n_{1,y} = -m_y$ e $n_{2,y} = -m_y$.

Portanto, usando ainda $\partial(\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2)) = \partial\Omega \cup \partial B_r(x_1) \cup \partial B_r(x_2)$, obtemos

$$\int_{\Omega \setminus (B_r(x_1) \cup B_r(x_2))} (G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1) dy = \int_{\partial\Omega} (G_1 \frac{\partial G_2}{\partial \eta_y} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial \eta_y}) dS_y$$

$$-\int_{\partial B_r(x_1)}(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{1,y}})dS_y-\int_{\partial B_r(x_2)}(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{2,y}}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}})dS_y$$

Mas, para $i\in\{1,2\}$, temos que $x_i\notin\Omega\setminus(B_r(x_1)\cup B_r(x_2))$, pois $x_1\in\Omega\cap B_r(x_1)$ e $x_2\in\Omega\cap B_r(x_2)$.
Portanto, $\Delta G_i(y)=0$ em $\Omega\setminus(B_r(x_1)\cup B_r(x_2))$.
Assim,

$$\int_{\Omega\setminus(B_r(x_1)\cup B_r(x_2))}(G_1\Delta G_2-G_2\Delta G_1)dy=0.$$

Além disso, se $y\in\partial\Omega$, então $G_i(y)=0$, pois $G(x,y)=0$. Assim sendo,

$$\int_{\partial\Omega}(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\eta_y}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\eta_y})dS_y=0.$$

Logo, obtemos que

$$\int_{\partial B_r(x_1)}(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{1,y}})dS_y+\int_{\partial B_r(x_2)}(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{2,y}}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}})dS_y=0.$$

Além disso, definindo $\Gamma_i(y)=\Gamma(x_i,y)$ e $\Phi_i(y)=\Phi(x_i,y)$, e usando que $G_i(y)=\Gamma_i(y)+\Phi_i(y)$, obtemos

$$\int_{\partial B_r(x_1)}(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}}-G_2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial n_{1,y}})dS_y+\int_{\partial B_r(x_2)}(G_1\frac{\partial \Gamma_2}{\partial n_{2,y}}-\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}})dS_y$$

$$+\int_{\partial B_r(x_1)}(\Phi_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}}-G_2\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{1,y}})dS_y+\int_{\partial B_r(x_2)}(G_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{2,y}}-\Phi_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}})dS_y=0.$$

Mas, pela Identidade de Green aplicado a Φ_1,G_2 em $B_r(x_1)$, e a Φ_2,G_1 em $B_r(x_2)$, obtemos

$$\int_{B_r(x_1)}(\Phi_1\Delta G_2-G_2\Delta\Phi_1)dy=\int_{\partial B_r(x_1)}(\Phi_1\frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}}-G_2\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{1,y}})dS_y.$$

$$\int_{B_r(x_2)}(\Phi_2\Delta G_1-G_1\Delta\Phi_2)dy=\int_{\partial B_r(x_2)}(\Phi_2\frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}}-G_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{2,y}})dS_y.$$

Mas $\Delta G_2=0$ em $B_r(x_1)$, pois $x_2\notin B_r(x_1)$; $\Delta G_1=0$ em $B_r(x_2)$, pois $x_1\notin B_r(x_2)$; e $\Delta\Phi_i=0$ em $B_r(x_1)\cup B_r(x_2)$.
Portanto,

$$\int_{B_r(x_1)}(\Phi_1\Delta G_2-G_2\Delta\Phi_1)dy=0,$$

$$\int_{B_r(x_2)}(\Phi_2\Delta G_1-G_1\Delta\Phi_2)dy=0.$$

Daí,

$$\int_{\partial B_r(x_1)} (\Phi_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}} - G_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{1,y}}) dS_y = 0,$$

$$\int_{\partial B_r(x_2)} (\Phi_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}} - G_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{2,y}}) dS_y = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\partial B_r(x_1)} (\Phi_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}} - G_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{1,y}}) dS_y + \int_{\partial B_r(x_2)} (G_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{2,y}} - \Phi_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}}) dS_y = 0.$$

E, portanto,

$$\int_{\partial B_r(x_1)} (\Gamma_1 \frac{\partial G_2}{\partial n_{1,y}} - G_2 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial n_{1,y}}) dS_y + \int_{\partial B_r(x_2)} (G_1 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial n_{2,y}} - \Gamma_2 \frac{\partial G_1}{\partial n_{2,y}}) dS_y = 0.$$

Mas, pelo **Lema 3.1.1** temos que, para $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{1,2\} - i$,

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B_r(x_i)} \Gamma_i \frac{\partial G_j}{\partial n_{i,y}} dS_y = 0$$

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B_r(x_i)} G_j \frac{\partial \Gamma_i}{\partial n_{i,y}} dS_y = G_j(x_i)$$

De onde segue que

$$-G_2(x_1) + G_1(x_2) = 0$$

Ou seja, como $G_1(x_2) = G(x_1, x_2)$ e $G_2(x_1) = G(x_2, x_1)$, obtemos

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1), \ \forall x_1 \neq x_2$$

.

□

Proposição 3.2.3. *Seja Ω regular e $x, y \in \Omega$ com $x \neq y$. Então, valem as desigualdades*

$$0 > G(x,y) > \Gamma(x,y), \ se\ n \geq 3$$

$$0 > G(x,y) > \Gamma(x,y) - \frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega})), \ se\ n = 2.$$

Prova. Fixe $x \in \Omega$ e defina $G(y) = G(x,y),\ \Gamma(y) = \Gamma(x,y),\ e\ \Phi(y) = \Phi(x,y)$.

Como Φ é limitada em $\overline{\Omega}$ e $\lim_{y \to x} \Gamma(y) = -\infty$, então

$$\lim_{y \to x} G(y) = \lim_{y \to x} \Gamma(y) + \lim_{y \to x} \Phi(y) = -\infty.$$

Daí, $\forall M < 0, \exists r > 0;\ y \in B_r(x) \Rightarrow G(y) < M$.

Em particular, $\exists r > 0;\ \forall y \in \overline{B_r(x)},\ G(y) < 0$.

Note agora que $x \notin \Omega \setminus B_r(x)$.

Daí, $G \in C(\overline{\Omega \setminus B_r(x)})$ e G é harmônico em $\Omega \setminus B_r(x)$.

Logo, pelo **Principio do Máximo (Teorema 2.2.1)**, como G não é constante, então seu máximo e mínimo ocorrem em $\partial(\Omega \setminus B_r(x)) = \partial\Omega \cup \partial B_r(x)$.

Mas $G(y) = 0,\ se\ y \in \partial\Omega$ e $G(y) < 0,\ se\ y \in \partial B_r(x)$.

Então, $\sup_{\partial(\Omega \setminus B_r(x))} G = 0$.

Daí, $G(y) < 0, \forall y \in \Omega \setminus B_r(x)$.

Ou ainda, se $s \leq r$, então $G(y) < 0, \forall y \in \Omega \setminus B_s(x)$.

Mas, seja $z \in \Omega, z \neq x$ qualquer.

Daí, como $x \neq z$ e Ω é aberto, $\exists d > 0$ tal que $z \notin B_d(x)$ e $B_d(x) \subset \Omega$.

Basta tomar $s = \min\{r, d\}$ e obtemos que $G(z) < 0$.

Assim, $G(x,z) < 0, \forall z \neq x$.

Temos ainda que $G(y) = \Gamma(y) + \Phi(y)$, onde $\Delta\Phi(y) = 0$ em Ω e $\Phi(y) = -\Gamma(y)$ em $\partial\Omega$.

Façamos agora dois casos.

Caso 1: $n \geq 3$.

Sabemos que, para $y \in \partial\Omega$,

$$\Gamma(y) = \frac{1}{w_n(2-n)}|x-y|^{2-n} < 0$$

Logo, $\Phi(y) > 0$, pois $\Phi(y) = -\Gamma(y)$ em $\partial\Omega$.

Mas, pelo **Principio do Máximo** obtemos então que $\Phi(y) > 0$ em Ω.

Portanto, $G(y) = \Gamma(y) + \Phi(y) > \Gamma(y)$ e, obtemos que $G(x,y) > \Gamma(x,y)$.

Caso 2: $n = 2$.

Sabemos que, para $y \in \partial\Omega$,

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2\pi} ln|x-y| \leq \frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega})),$$

onde

$$diam(\overline{\Omega}) = sup_{x,y\in\overline{\Omega}}|x-y|$$

Logo,

$$\Phi(y) \geq -\frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega})),$$

Portanto, pelo **Principio do Máximo**, $\Phi(y) > -\frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega}))$ em Ω.
Assim, como $G(y) = \Gamma(y) + \Phi(y) > \Gamma(y) - \frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega}))$, obtemos que
$G(x,y) > \Gamma(x,y) - \frac{1}{2\pi} ln(diam(\overline{\Omega}))$.

□

3.3 Função de Green e Fórmula Integral de Poisson em B_R

Nesta seção acharemos a função de Green em B_R e, com ela, provaremos a "fórmula integral de Poisson", à qual dá a solução do problema de Dirichlet em B_R. Por fim obteremos alguns corolários de tal fórmula.

Proposição 3.3.1. *Seja $G(x,y)$ a função de Green para $\Omega = B_R = B_R(0)$. Então, se $x \neq 0$ e $y \neq x$, então*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(ln|x-y| - ln\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|\right); \; n=2 \\ \frac{1}{w_n(2-n)}\left(|x-y|^{2-n} - \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right); \; n \geq 3 \end{cases}$$

Prova. Seja $x \neq 0$ tal que $|x| < R$.
Sendo $\Phi(y) = \Phi(x,y)$, precisamos determinar Φ de modo que $\Delta\Phi = 0$ em B_R e $\Phi = -\Gamma$ em ∂B_R.
Como há no máximo uma Φ que satisfaça tais condições, basta encontrar uma solução.
Temos que $\Gamma(x,y)$ é harmônica para $y \in B_R - \{x\}$.
Busquemos então $c \in \mathbb{R}$ e $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$ de modo que

$$\Gamma(cx^*, cy) = \Gamma(x,y), \; \forall y \in \partial B_R.$$

Uma vez encontrado, podemos definir $\Phi(y) = -\Gamma(cx^*, cy)$.
Deste modo, para $y \in B_R$ (em particular, $y \neq x^*$) teremos

$$\Delta\Phi(y) = -\Delta\Gamma(cx^*, cy) = 0$$

E, para $y \in \partial B_R$, teremos

$$\Phi(y) = -\Gamma(cx^*, cy) = -\Gamma(x,y)$$

.

Ora, mas como $\Gamma(x,y)$ só depende de $|x-y|$, para encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$ tal que, para $y \in \partial B_R$, tenhamos $|x-y| = |c||x^*-y|$.

Seja $y \in \partial B_R$.

Daí, $|y| = R$, e temos que

$$|x-y|^2 = (x-y)\cdot(x-y) = |x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2 = |x|^2\frac{|y|^2}{R^2} - 2x\cdot y + R^2 =$$

$$= \frac{|x|^2}{R^2}\left(|y|^2 - \frac{2x\cdot yR^2}{|x|^2} + \frac{R^4}{|x|^2}\right) = \frac{|x|^2}{R^2}\left(|y|^2 - 2y\cdot\frac{xR^2}{|x|^2} + \frac{|x|^2R^4}{|x|^4}\right) = \frac{|x|^2}{R^2}\left(y - \frac{R^2}{|x|^2}x\right)^2$$

Portanto, tomando $c = \frac{|x|}{R} \in \mathbb{R}$ e $x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x$, obtemos $|x-y| = |c||x^*-y|$ e $|x^*| = \frac{R^2}{|x|} > R$, como queriamos.

Assim, para obter $G(x,y)$, basta usar que

$$G(x,y) = \Gamma(x,y) + \Phi(x,y) = \Gamma(x,y) - \Gamma\left(\frac{|x|}{R}(y - \frac{R^2}{|x|^2}x)\right) = \Gamma(x,y) - \Gamma\left(\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|}x\right)$$

Daí, se $n = 2$, obtemos

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}ln|x-y| - \frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right| = \frac{1}{2\pi}\left(ln|x-y| - ln\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|\right).$$

E, se $n \geq 3$,

$$G(x,y) = \frac{1}{w_n(2-n)}|x-y|^{2-n} - \frac{1}{w_n(2-n)}\left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-n} = \frac{1}{w_n(2-n)}\left(|x-y|^{2-n} - \left|\frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right).$$

$\square$

Obs 3.3.1. *Seja $G(x,y)$ a função de Green para $\Omega = B_R = B_R(0)$. Então, se $x = 0$ e $y \neq x$, então*

$$G(0,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(ln|y| - ln(R)\right);\ n = 2 \\ \frac{1}{w_n(2-n)}\left(|y|^{2-n} - R^{2-n}\right);\ n \geq 3 \end{cases}$$

Prova. Se $x = 0$, basta notar que $\Phi(0,y) = -\Gamma(R)$ satisfaz:

Para $y \in B_R$, $\Delta\Phi(0,y) = -\Delta\Gamma(R) = 0$, pois $R > 0$.

E, para $y \in \partial B_R$, $|y| = R$ e $\Phi(0,y) = -\Gamma(R) = -\Gamma(0,y)$.

Daí, como $G(0,y) = \Gamma(0,y) + \Phi(0,y) = \Gamma(0,y) - \Gamma(R)$, obtemos:

Se $n = 2$,

$$G(0,y) = \frac{1}{2\pi}ln|y| - \frac{1}{2\pi}ln(R) = \frac{1}{2\pi}\left(ln|y| - ln(R)\right).$$

E, se $n \geq 3$,

$$G(0,y) = \frac{1}{w_n(2-n)}|y|^{2-n} - \frac{1}{w_n(2-n)}R^{2-n} = \frac{1}{w_n(2-n)}\left(|y|^{2-n} - R^{2-n}\right).$$

$\square$

Corolário 3.3.1. *Seja $G(x,y)$ a função de Green para $\Omega = B_R = B_R(0)$. Então, se $x \in B_R$, $y \in \partial B_R$, e η_y é a normal unitária ao ponto $y \in \partial B_R$, temos*

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{w_n R|x-y|^n}.$$

Prova. Seja $x \in B_R$, $G(y) = G(x,y)$.

Então, se $x \neq 0$, temos, para $c = \frac{|x|}{R}$ e $x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x$:

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y_i - x_i}{|x-y|^n} - c^{2-n}\frac{(y_i - x_i^*)}{|x^* - y|^n}\right)$$

Assim,

$$\nabla G = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y-x}{|x-y|^n} - c^{2-n}\frac{y-x^*}{|x^*-y|^n}\right).$$

Mas, para $y \in \partial B_R$,

$$|x-y| = |c||x^*-y| = c|x^*-y|$$

Daí,

$$|x^*-y|^n = \frac{|x-y|^n}{c^n}.$$

Além disso,

$$(y - x^*) = (y - \frac{R^2}{|x|^2}x) = \frac{y|x|^2 - xR^2}{|x|^2}$$

Então, como $c = \frac{|x|}{R}$, obtemos

$$\nabla G = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y-x}{|x-y|^n} - \frac{|x|^2}{R^2}\left(\frac{y|x|^2 - xR^2}{|x|^2|x-y|^n}\right)\right).$$

Ou ainda,

$$\nabla G = \frac{1}{w_n R^2}\left(\frac{y(R^2 - |x|^2)}{|x-y|^n}\right).$$

Daí, como, para $y \in \partial B_R$, temos $\eta_y = \frac{y}{R}$, então

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_y} = \nabla G \cdot \eta_y = \frac{1}{w_n R^2}\left(\frac{y(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}\right)\cdot\frac{y}{R} = \frac{1}{w_n R^2}\left(\frac{|y|^2(R^2-|x|^2)}{R|x-y|^n}\right) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y} = \frac{1}{w_n R}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\right).$$

Se $x = 0$, então
$$\frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y_i}{|y|^n}\right)$$

Daí,
$$\nabla G = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y}{|y|^n}\right).$$

E então, para $yin\partial B_R$,
$$\frac{\partial G}{\partial \eta_y} = \nabla G \cdot \eta_y = \frac{1}{w_n}\left(\frac{y}{|y|^n}\right)\cdot\frac{y}{R} = \frac{1}{w_n}\left(\frac{|y|^2}{R|y|^n}\right) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y} = \frac{1}{w_n R^{n-1}}.$$

Que é o mesmo que aplicar $x = 0$ em
$$\frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{w_n R|x-y|^n}.$$

Portanto, tal expressão vale para todo $x \in B_R$.

□

Definição 3.3.1. *Definimos o Núcleo de Poisson (em B_R) como sendo a função a $K : B_R \times \partial B_R \to \mathbb{R}$ dada por*
$$K(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y) = \frac{1}{w_n R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}.$$

Proposição 3.3.2. *O Núcleo de Poisson satisfaz as seguintes propriedades para $x \in B_R$ e $y \in \partial B_R$*

1. $\Delta_x K(x,y) = 0$,
2. $K(x,y) > 0$,
3. $\int_{\partial B_R} K(x,y) dS_y = 1$.

Prova.

1. Temos que $x \neq y$, pois $B_R \cap \partial B_R = \emptyset$

   Daí, como $\Delta G_y(x,y) = 0$, para $x \neq y$ obtemos que $\Delta G_x(x,y) = 0$, pois G é simetrico pela **Proposição 3.2.2**.

   Ou seja, G harmônico em relação a x.

   Daí, ∇G é harmônico em relação a x, pela **Proposição 2.4.1**.

   Assim, $K(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y)$ é harmônico em relação a x.

2. Temos que $|x| < R$, pois $x \in B_R$.

   Logo, $R^2 - |x|^2 > 0$.

   Além disso, $|x-y|^n > 0$, pois $x \neq y$.

   Logo, $K(x,y) > 0$.

3. Pelo **Teorema 3.2.1** para $f \equiv 0$ e $g \equiv 1$, e $\Omega = B_R$ obtemos:

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial G}{\partial \eta_y}(x,y)dS_y = 1$$

   Daí,

$$\int_{\partial B_R} K(x,y)dS_y = 1.$$

□

Obs 3.3.2. *Assim como valia na convolução (Teorema 2.3.1), vale para todo multi índice α que*

$$D^\alpha u(x) = \int_{\partial B_R} \left(D_x^\alpha K(x,y)\right)\phi(y)dS_y.$$

Teorema 3.3.3 (Fórmula Integral de Poisson)**.** *Se $\phi \in C(\partial B_R)$, a função u definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_R} K(x,y)\phi(y)dS_y; \; |x| < R \\ \phi(x); \; |x| = R \end{cases}$$

satisfaz $u \in C(\overline{B}_R) \cap C^\infty(B_R)$ e

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \; |x| < R \\ u(x) = \phi(x) \; |x| = R \end{cases}.$$

Prova. Ja temos que se $|x| = R$, então $u(x) = \phi(x)$.

Resta analisar a suavidade em B_R, a harmonicidade em B_R e a continuidade em $\overline{B}_R$.

Porém, pelo **Teorema 2.3.2**, a harmonicidade implica na suavidade.

Além disso a suavidade garante continuidade em B_R.

Resta então provar que u é harmônica em B_R e continua em ∂B_R.

Provemos que $\Delta u(x) = 0$. $\forall x \in B_R$.

Usando a **Obs 3.3.2**, obtemos

$$\Delta u(x) = \Delta_x\left(\int_{\partial B_R} K(x,y)\phi(y)dS_y\right) = \int_{\partial B_R} \left(\Delta_x K(x,y)\right)\phi(y)dS_y.$$

Além disso, pela **Proposição 3.3.2**, $\Delta_x K(x,y) = 0$.

Portanto,

$$\Delta_x u(x) = 0.$$

Resta agora provar que u é contínua em ∂B_R.

Seja $a \in \partial B_R$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer.

Queremos provar que $\exists \delta > 0$ tal que $x \in B_R \cap B_\delta(a) \Rightarrow |u(x) - \phi(a)| < \varepsilon$.

Como $g \in C(\partial B_R)$, então $\exists \delta' > 0$ tal que $y \in \partial B_R \cap B_{\delta'}(a) \Rightarrow |g(y) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Também, como $x \to a \Rightarrow |x|^2 \to |a|^2 = R^2$, então

$\exists \delta'' > 0$; $x \in B_R \cap B_{\delta''}(a) \Rightarrow ||x|^2 - R^2| < \frac{\varepsilon}{2A}$, $A \in \mathbb{R}$.

Tome $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$.

Seja $x \in B_R \cap B_{\frac{\delta}{2}}(a)$.

Usando a **Proposição 3.3.2**, temos que $K(x,y) > 0$ e $\int_{\partial B_R} K(x,y) dS_y = 1$.

Portanto,

$$|u(x) - \phi(a)| = \left| \int_{\partial B_R} K(x,y)\phi(y) dS_y - \int_{\partial B_R} K(x,y)\phi(a) dS_y \right| = \left| \int_{\partial B_R} K(x,y)[\phi(y) - \phi(a)] dS_y \right| \leq$$

$$\leq \int_{\partial B_R} K(x,y)|\phi(y) - \phi(a)| dS_y = \int_{\partial B_R \cap B_\delta(a)} K(x,y)|\phi(y) - \phi(a)| dS_y +$$

$$+ \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} K(x,y)|\phi(y) - \phi(a)| dS_y = A + B.$$

Analisemos A e B separadamente.

Temos que $|g(y) - g(a)| < \varepsilon$, pois $y \in \partial B_R \cap B_\delta(a) \subset \partial B_R \cap B_{\delta'}(a)$.

Logo,

$$A = \int_{\partial B_R \cap B_\delta(a)} K(x,y)|\phi(y) - \phi(a)| dS_y \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_R \cap B_\delta(a)} K(x,y) dS_y \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_R} K(x,y) dS_y = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, se $x \in B_R \cap B_{\frac{\delta}{2}}(a)$. e $y \in \partial B_R \setminus B_\delta(a)$, então $|x - a| < \frac{\delta}{2}$ e $|y - a| \geq \delta$.

Assim,

$$|y - a| \leq |y - x| + |x - a| < |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{|y - a|}{2}$$

Portanto, $\frac{\delta}{2} \leq \frac{|y-a|}{2} < |y - x|$.

Daí, $||y - x|^{-n} < 2^n \delta^{-n}$.

Logo, como $|\phi(y) - \phi(a)| \leq ||\phi||_\infty$, obtemos

$$B = \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} K(x,y)|\phi(y) - \phi(a)| dS_y \leq 2||\phi||_\infty \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} K(x,y) dS_y =$$

$$= 2||\phi||_\infty \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left(\frac{1}{w_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) dS_y = 2||\phi||_\infty \frac{R^2 - |x|^2}{w_n R} \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left| y - x \right|^{-n} dS_y \leq$$

$$\leq 2^{n+1} ||\phi||_\infty \frac{R^2 - |x|^2}{w_n R} \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left(\delta^{-n} \right) dS_y$$

. Mas, sendo $x \in B_R \cap B_{\frac{\delta}{2}}(a) \subset B_R \cap B_{\delta''}(a)$, temos $|R^2 - |x|^2| < \frac{\varepsilon}{2A}$.
Assim sendo,

$$B \leq 2^{n+1} ||\phi||_\infty \frac{R^2 - |x|^2}{w_n R} \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left(\delta^{-n} \right) dS_y < \frac{\varepsilon}{2A} 2^{n+1} ||\phi||_\infty \frac{1}{w_n R} \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left(\delta^{-n} \right) dS_y$$

Daí, tomando

$$A = 2^{n+1} ||\phi||_\infty \frac{1}{w_n R} \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(a)} \left(\delta^{-n} \right) dS_y < \infty,$$

obtemos que $B < \frac{\varepsilon}{2}$.

Portanto,

$$|u(x) - \phi(a)| \leq A + B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in B_R \cap B_{\frac{\delta}{2}}(a).$$

□

Corolário 3.3.2. *[Propriedade do valor médio na Bola] Dada $\phi \in C(\partial B_R)$, e u harmônica em B_R com $u|_{\partial B_R} = \phi|_{\partial B_R}$, então*

$$u(0) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} \phi(y) dS_y.$$

Prova. Tomando $x = 0$ na **Fórmula Integral de Poisson**, obtemos

$$u(0) = \int_{\partial B_R} K(0,y) \phi(y) dS_y.$$

Mas,

$$K(0,y) = \frac{1}{w_n R^{n-1}}.$$

Portanto, obtemos

$$u(0) = \int_{\partial B_R} \frac{1}{w_n R^{n-1}} \phi(y) dS_y = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} \phi(y) dS_y.$$

□

Corolário 3.3.3. *Suponha que $u \in C(\overline{B_R})$ é harmônica em B_R e $u \geq 0$. Então, se $x \in B_R$ e $r = |x|$, vale que*
$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(0).$$

Prova. Pelo **Fórmula Integral de Poisson** temos que
$$u(x) = \frac{1}{w_n R}\int_{\partial B_R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}u(y)dS_y.$$

Mas, sendo $y \in \partial B_R$, obtemos, pela desigualdade triangular, que
$$R-r \leq |y|-|x| \leq |y-x| \leq |y|+|x| \leq R+r.$$

Daí,
$$\frac{R-r}{R+r}\left(\frac{1}{R+r}\right)^{n-2} \geq \frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n} \leq \frac{R+r}{R-r}\left(\frac{1}{R-r}\right)^{n-2}$$

E, portanto,
$$\frac{1}{w_n R}\frac{R-r}{R+r}\left(\frac{1}{R+r}\right)^{n-2}\int_{\partial B_R}u(y)dS_y \geq u(x) \leq \frac{1}{w_n R}\frac{R+r}{R-r}\left(\frac{1}{R-r}\right)^{n-2}\int_{\partial B_R}u(y)dS_y.$$

Mas, pelo **Corolário 3.3.2**, temos
$$\int_{\partial B_R}u(y)dS_y = w_n R^{n-1}u(0).$$

Logo,
$$\frac{1}{w_n R}\frac{R-r}{R+r}\left(\frac{1}{R+r}\right)^{n-2}w_n R^{n-1}u(0) \geq u(x) \leq \frac{1}{w_n R}\frac{R+r}{R-r}\left(\frac{1}{R-r}\right)^{n-2}w_n R^{n-1}u(0).$$

De onde segue o resultado.

□

Corolário 3.3.4 (Teorema de Liouville)**.** *Uma função hârmonica em $\mathbb{R}^n$ limitada por cima ou por baixo é constante.*

Prova. Sejam u, v funções hârmonicas em $\mathbb{R}^n$ limitadas por cima e por baixo, respectivamente.
Daí, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tais que $u(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. e $m \leq v(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Defina $f_1(x) = M - u(x)$ e $f_2(x) = v(x) - m$.
Logo, para $i \in \{1,2\}$, f_i é não negativa e harmônica em $B_R(0), \forall R > 0$.
Daí, seja $x \in \mathbb{R}^n$.

Então, pelo **Corolário 3.3.3**, aplicado a bolas B_R com $R > |x|$, obtemos

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}f_i(0) \leq f_i(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}f_i(0).$$

Mas, como

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r} = 1, \quad \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r} = 1.$$

Obtemos,

$$f_i(0) \leq f_i(x) \leq f_i(0),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

De onde obtemos que $f_i(x) = f_i(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, f_i é costante, e, assim, u e v são constantes.

$\square$

4 CONCLUSÃO

Obtemos ao fim inúmeros resultados acerca das funções harmônicas.

Conseguimos obter uma equivalência para a definição de funções harmônicas via Propriedade do Valor Médio, de onde podemos tirar muitas informações que antes, simplesmente pela Equação de Laplace, era inviável.

Obtemos também o Principio do Máximo, a partir do qual podemos restringir o domínio das funções harmônicas à sua fronteira na busca de máximos e mínimos da função, além restringir o número de soluções do problema de Dirichlet a no máximo uma sobre domínios limitados.

Conseguimos ainda obter uma função regularizante, a partir da qual obtivemos a suavidade das funções harmônicas, tendo em seguida obtido ainda que funções harmônicas são analíticas, ou seja, muito mais regulares do que a hipótese inicial de serem C^2.

Também obtivemos a desigualdade de Harnack, a partir da qual podemos comparar quaisquer duas imagens de uma função harmônica via constantes que independem da função e dos pontos do domínio, mas dependem apenas do domínio e do compacto em que os pontos em questão estão.

Em seguida obtivemos uma nova equivalência à definição de funções harmônicas via funções de suporte compacto, o que torna mais fácil identificar funções harmônicas através do estudo de funções que minimizam energia, fato a ser estudado e analisado em outra ocasião.

Abordando em seguida tal classe de funções sob outra visão, obtivemos uma solução particular rica em propriedades, a Solução Fundamental, a partir da qual obtivemos a função de Green, que nos permite descrever funções de classe C^2 em função de seu laplaciano e do seu valor na fronteira. Assim, obtivemos o único candidato à solução do Problema de Dirichlet, e até de problemas mais gerais, sendo assim possível obter a solução, por exemplo, do Problema de Poisson.

Por fim obtivemos a função de Green e a solução do Problema de Dirichlet em bolas centradas na origem. De modo semelhante, porém, é possível determinar a função de Green e resolver tal problema sobre outros domínios, como o $\mathbb{R}^n_+$, também de modo simples.

REFERÊNCIAS

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. [S.l.]: Providence, RI : American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics , 19).

HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic partial differential equations**. [S.l.]: Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1997.

IÓRIO, V. d. M. **EDP, um curso de graduacao**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.