



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CAMPUS DE CRATEÚS**  
**BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**JOÃO PAULO DE ARAÚJO**

**SOBRE A VALIDADE DA CONJECTURA DE REED PARA GRAFOS**  
**LIVRES DE  $\{P_5, FLAG^C\}$**

**CRATEÚS**

**2019**

JOÃO PAULO DE ARAÚJO

SOBRE A VALIDADE DA CONJECTURA DE REED PARA GRAFOS

LIVRES DE  $\{P_5, FLAG^C\}$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Msc. Rennan Ferreira Dantas

Coorientador: Prof. Msc. Luiz Alberto do Carmo Viana

CRATEÚS

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A689s Araújo, João Paulo de.  
Sobre a validade da Conjectura de Reed para os grafos livres de {P5, Flag C} / João Paulo de Araújo. –  
2019.  
53 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús,  
Curso de Ciência da Computação, Crateús, 2019.  
Orientação: Prof. Dr. Rennan Ferreira Dantas.  
Coorientação: Prof. Me. Luiz Alberto do Carmo Viana.

1. Teoria dos Grafos. 2. Coloração. 3. Conjectura de Reed. 4. P5. 5. Flag C. I. Título.

CDD 004

---

JOÃO PAULO DE ARAÚJO

SOBRE A VALIDADE DA CONJECTURA DE REED PARA GRAFOS

LIVRES DE  $\{P_5, FLAG^C\}$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Crateús da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Msc. Rennan Ferreira Dantas (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Msc. Luiz Alberto do Carmo  
Viana (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Nicolas de Almeida Martins  
Universidade Vale do Acaraú(UVA - Sobral)

---

Prof. Msc. Rafael Teixeira de Araújo  
Centro Universitário da Grande Fortaleza  
(UNIGRANDE - CE)

---

Prof. Msc. Jefferson Lourenço Gurguri  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia  
do Ceará (IFCE)

À minha Mãe, seu cuidado e sua dedicação me deram a esperança para permanecer forte. Minha irmã, seu apoio me deu força em muitos momentos. À minha namorada, sua presença proporcionou a segurança e a certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por tudo o que tem me proporcionado. Depois, a minha família, em especial minha irmã e minha mãe, por todo o esforço e dedicação para me proporcionar uma educação digna.

À minha namorada Cris, por todo apoio e compreensão em todas as horas, inclusive na elaboração deste trabalho. Certamente ela é um dos maiores presentes que Deus poderia conceder. Sem seu apoio e dedicação este trabalho não seria realizado.

Ao meu orientador Rennan Dantas. Muito mais que orientador e professor é um dos maiores exemplos de dedicação. Sem seus conhecimentos este trabalho não teria nenhuma linha.

Uma dupla que não poderia ficar de fora, professor Luiz, meu coorientador, e professora Lisieux. Os dois foram grandes pilares na elaboração deste trabalho. Não existem palavras para expressar a gratidão de conhecer duas pessoas tão incríveis.

Foram muitos os professores do campus que deixaram sua parcela de contribuição em para minha graduação, mas posso deixar de fazer um agradecimento especial ao professor Wellington Franco. Seu apoio no início da graduação foi fundamental em decisões muito importantes que me possibilitaram continuar os estudos.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram. Sintam-se todos cumprimentados! Em especial aos meus amigos: Michelly Martins, Ângela Lima, Micias Ciriaco, Davi Barros, Wermeson Rocha, Mardônio Vieira, Ícaro Mourão, Francisco Antonio e Marcus Vinícius, amigo que considero como um irmão.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.”

(São Francisco de Assis)

## RESUMO

A Teoria dos Grafos foi estabelecida pelos estudos publicados por Leonhard Euler no século *XVIII* sobre o problema das pontes da cidade de Königsberg. Passado pouco mais de um século, o londrino Francis Guthrie perguntou-se se qualquer mapa político poderia ser colorido com no máximo quatro cores, o que estabeleceu a Conjectura das Quatro Cores. Em 1998, Bruce Alan Reed propôs outra conjectura relacionada a coloração de grafos, proporcionando a elaboração de trabalhos que provaram a veracidade de sua Conjectura para algumas classes de grafos. Considerando que alguns desses trabalhos possuem argumentações um pouco complexas, o presente trabalho presta um estudo minucioso do trabalho de Medha Dhurandhar, Validade da Conjectura de Reed para os grafos livres de  $\{P_5, Flag^C\}$ , detalhando os resultados por meio de demonstrações e argumentações mais simples e com maiores detalhes, a fim de facilitar a compreensão do referido trabalho.

**Palavras-chave:** Teoria dos Grafos. Conjectura de Reed. Grafos livres de  $\{P_5, Flag^C\}$ .

## ABSTRACT

Graphs Theory was established by the studies published by Leonhard Euler in the *XVIII* century about the problem of the bridge of Königsberg. Over a century, the Londoner Francis Guthrie asked himself whether any political map could be colored with at most four colors which established the Conjecture of the Four Colors. In 1998, Bruce Alan Reed's proposed another conjecture related to graphs coloring, providing the elaboration of works that provides the truth of his Conjecture for some graphs classes. Considering that some of these works have rather complex arguments, the present work proposes a meticulous study of the work of Medha Dhurandhar, Validity of the Reed Conjecture for graphs  $\{P_5, Flag^C\}$ -free, deconstructing the results through simpler proves and arguments in greater detail, in order to facilitate the understanding of this work.

**Keywords:** Theory of Graphs. Reed's Conjecture. Graphs  $\{P_5, Flag^C\}$ -free.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema do Problema das Sete Pontes de Königsberg apresentado por Euler	16
Figura 2 – Grafo $G$	17
Figura 3 – Representação de um grafo completo	18
Figura 4 – Representação de subgrafo e subgrafo induzido	19
Figura 5 – Representação de um grafo $P_5$ .	19
Figura 6 – Complemento do grafo $H_1$ da Figura 4	20
Figura 7 – Representação de um grafo linha.	20
Figura 8 – Representação de clique em um grafo.	21
Figura 9 – Grafo que representa o Problema das Pontes de Königsberg	22
Figura 10 – Representação de um grafo bipartido	22
Figura 11 – Exemplos de grafos bipartidos completos.	23
Figura 12 – Configurações cadeira, casa, touro, dardo, pipa e jóia.	23
Figura 13 – Grafo Flag e seu complemento.	23
Figura 14 – Representação dos conjuntos $R$ , $S$ e $T$ .	28
Figura 15 – Ilustração das configurações apresentadas no item (b) da Proposição 2.	29
Figura 16 – Ilustração das configurações apresentadas no item (c) da Proposição 2.	29
Figura 17 – das configurações apresentadas no item (a) da Proposição 3.	30
Figura 18 – das configurações apresentadas no item (b) da Proposição 3.	31
Figura 19 – Ilustração das configurações apresentadas no item (c) da Proposição 3.	31
Figura 20 – Configurações do grafos descrito no item (a) da Afirmação 1 na Proposição 4.	32
Figura 21 – Ilustração da construção descrita no item (b) da Afirmação 1 na Proposição 4.	33
Figura 22 – Ilustração das configurações descritas no item (c) da Afirmação 1 na Proposição 4.	33
Figura 23 – Ilustração das configurações descritas no item (d) da Afirmação 1 na Proposição 4.	34
Figura 24 – Configurações descritas nos itens (a) e (b) da Afirmação 2 na Proposição 4.	35
Figura 25 – Ilustração das descrições do item (e) da Afirmação 2 na Proposição 4.	36
Figura 26 – Ilustração das especificações do item (f) da Afirmação 2 na Proposição 4.	37
Figura 27 – Representação das especificações do item (g) da Afirmação 2 na Proposição 4.	37
Figura 28 – Representações das especificações dos itens (b) e (c) da Afirmação 3 da Proposição 4.	38

Figura 29 – Ilustrações das descrições do item ( <i>d</i> ) da Afirmação 3 da Proposição 4. . . .	39
Figura 30 – Ilustração das especificações do item ( <i>e</i> ) da Afirmação 3 da Proposição 4. .	39
Figura 31 – Ilustração da definição de $S_k$ . . . . .	41
Figura 32 – Ilustração da Configuração descrita no item ( <i>d</i> ) na Parte III da demonstração.	42
Figura 33 – Representação das configurações descritas em ( <i>g</i> ) e ( <i>h</i> ) na Parte III da demonstração. . . . .	42
Figura 34 – Representação das configurações descritas em ( <i>i</i> ) e ( <i>j</i> ) na Parte III da demonstração. . . . .	43
Figura 35 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta <i>ya</i> . . . . .	44
Figura 36 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta <i>yb</i> . . . . .	45
Figura 37 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta <i>xb</i> . . . . .	45

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grafos não direcionados definidos por configurações proibidas validados para a conjectura de Reed. . . . .	25
---	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2.1</b>	<i>Objetivo geral</i> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2.2</b>	<i>Objetivos específicos</i> . . . . .	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria dos Grafos</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Grafos e alguns conceitos</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.3</b>	<b>Classes de Grafos</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Número Cromático de um Grafo</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>PROBLEMA</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>SOBRE A VALIDADE DA CONJECTURA DE REED PARA OS GRA- FOS LIVRES DE <math>\{P_5, \text{Flag}^C\}</math></b> . . . . .	<b>27</b>
<b>4.1</b>	<b>Notações</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>4.2</b>	<b>Demonstração</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>ANEXO A – On Validity of Reed’s Conjecture for <math>\{P_5, \text{Flag}^C\}</math>-free Graphs</b>	<b>48</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Justificativa

A Teoria dos Grafos tem como primeiro resultado os estudos publicados por Leonhard Euler sobre o problema das pontes da cidade de Königsberg (FERREIRA; BORGES, 2015). Mesmo sendo essencialmente teórica, a teoria dos grafos modela uma boa gama de problemas práticos, podendo ser citado como exemplo o próprio problema das pontes de Königsberg. Passado pouco mais de um século dos estudos de Euler, o londrino Francis Guthrie perguntou-se se qualquer mapa político poderia ser colorido com no máximo quatro cores, o que estabeleceu a conjectura das quatro cores, cuja veracidade já é determinada.

Em Teoria dos Grafos ainda não se conhece uma forma de determinar a quantidade mínima de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor. O que se conhece são alguns limites clássicos, não tão satisfatórios. Em 1998 Bruce Alan Reed elaborou uma conjectura que busca propor um limite superior para o número cromático de um grafo, proporcionando a elaboração de trabalhos que provaram a veracidade de sua conjectura para algumas classes de grafos. Alguns desses trabalhos possuem demonstrações complexas, tornando-os um pouco intrincados. Partindo desse pressuposto, o presente trabalho torna mais nítida a compreensão do trabalho de Medha Dhurandhar, Validade da Conjectura de Reed para os grafos livres de  $\{P_5, Flag^C\}$ .

O corrente trabalho contribui com a comunidade acadêmica envolvida tornando mais compreensível a validade da Conjectura de Reed para a classe dos grafos livres de  $\{P_5, Flag^C\}$ . O trabalho ainda difunde a Conjectura de Bruce Reed bem como sua importância para a Teoria dos Grafos .

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 *Objetivo geral*

Elucidar a validade da Conjectura de Reed para a classe dos grafos livres de  $\{P_5, Flag^C\}$ .

### ***1.2.2 Objetivos específicos***

- Analisar minuciosamente o trabalho de Dhurandhar (2017);
- Analisar as provas de classes de grafos que sejam semelhantes ao trabalho de Dhurandhar (2017), para as quais a conjectura é válida.

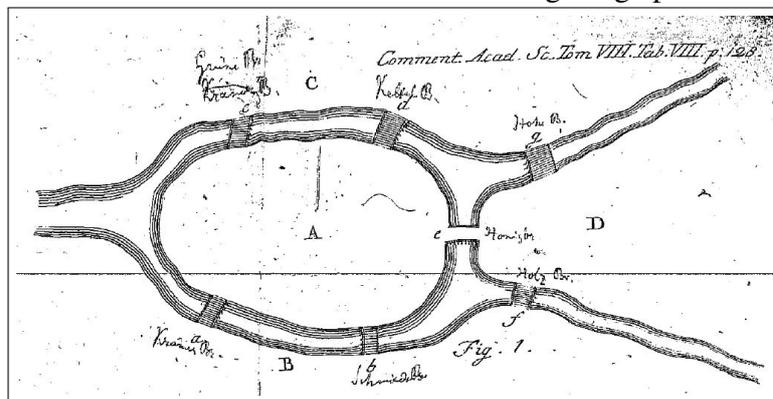
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fim de fornecer o conhecimento que possibilita a compreensão do que será abordado neste trabalho, algumas definições são apresentadas neste capítulo. Na Seção 2.1 será mostrada uma breve introdução à Teoria dos Grafos. A Seção 2.2 conceitua grafos e apresentará alguns conceitos que eles possuem. A Seção 2.3 apresenta o conceito de classe de grafos, além de demonstrar algumas classes que fazem parte do que é abordado neste trabalho. A Seção 2.4 apresenta o conceito coloração própria e número cromático.

### 2.1 Teoria dos Grafos

A Teoria dos Grafos foi estabelecida pelos estudos publicados por Leonhard Euler sobre o problema das pontes da cidade de Königsberg, uma cidade do território da Prússia (FERREIRA; BORGES, 2015). A cidade era dividida pelo rio Pregel, como mostra a Figura 1, e formava quatro distritos. Os distritos eram conectados por pontes, sete no total. O Problema das Pontes de Königsberg consistia em saber se era possível atravessar as pontes passando por cada uma delas uma única vez e retornar ao ponto de partida.

Figura 1 – Esquema do Problema das Sete Pontes de Königsberg apresentado por Euler



Fonte: (Euler, 1741,p.128)

A Teoria dos Grafos é uma das áreas mais recentes da matemática quando comparada com outras. Ela modela uma vasta gama de problemas práticos como por exemplo os que envolvem coloração própria, um dos clássicos de Teoria dos Grafos que faz parte do escopo deste trabalho.

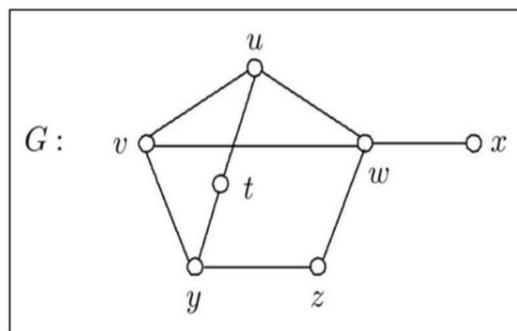
## 2.2 Grafos e alguns conceitos

Um grafo, representado por  $G$ , é constituído de dois conjuntos finitos  $V$  não vazio, e  $E$  de objetos. Por  $V$  e  $E$  serem conjuntos de  $G$ , a notação  $G = (V, E)$  é normalmente utilizada.

Dado o fato de  $V$  e  $E$  serem conjuntos pertencentes ao grafo  $G$ , é comum referir-se a eles como  $V(G)$  e  $E(G)$ . Cada objeto  $u \in V(G)$  é denominado **vértice** de  $G$ , também conhecido por ponto ou nó, e cada objeto  $e \in E(G)$  é denominado **aresta** de  $G$ , também chamado *link* ou arco por algumas literaturas (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Cada aresta  $e$  em um grafo  $G$  é constituída pela interligação de um par de vértices  $\{u, v\}$  pertencentes a  $V(G)$ , podendo cada aresta  $e$  ser representada por  $uv$  ou  $vu$ . É importante mencionar que se uma aresta  $e$  liga dois vértices  $u$  e  $v$  em um grafo,  $u$  e  $v$  são chamados **adjacentes** em  $G$ . Se um grafo não possui mais de uma aresta interligando o mesmo par de vértice, ele é dito um **grafo simples**.

A estrutura de um grafo é comumente representada por um diagrama. Os vértice de um grafo  $G$  no diagrama são representados por pontos ou círculos e cada aresta representada por uma linha unindo vértices de suas extremidades, como ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Grafo  $G$



Fonte: (Chromatic Graph Theory, 2008)

Assim como a adjacência dos vértices em grafos, outras peculiaridades pertencentes a eles são de grande importância para o presente trabalho e não dispensam suas respectivas definições, como por exemplo a **ordem de um grafo**, que é dada pelo número de vértices existentes no grafo.

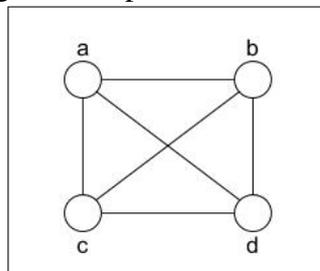
Diz-se vizinhos de um vértice  $v \in V(G)$ , o conjunto de vértices  $V'$  adjacentes a  $v$ , representado por  $N(v)$  quando não há ambiguidade no grafo ou  $N_G(v)$  quando a ambiguidade existir. Na Figura 2, os vértices  $y, u$  e  $w$  são os vizinhos do vértice  $v$ , porém o vértice  $t$  não é vizinho de  $v$ . Essa é dita uma **vizinhança aberta** do vértice  $v$ , dado que esse vértice não está incluso em  $N(v)$ . Denota-se **vizinhança fechada** de um vértice  $v$  por  $N[v]$ , ou  $N_G[v]$  caso

haja ambiguidade, onde  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Na Figura 2, os vértices  $y, u, w$  e  $v$  constituem a vizinhança fechada do vértice  $v$ , sendo esta denotada por  $N[v]$  ou  $N_G[v]$  caso haja ambiguidade.

Em Teoria dos Grafos, o **grau** de um vértice  $v$ , denotado por  $\text{deg}(v)$  é dado pelo número de vizinhos que  $v$  possui. Já o **grau máximo** de um grafo  $G$ , denotado por  $\Delta(G)$ , é o maior grau entre os vértices de  $G$ . Na Figura 2,  $\text{deg}(x) = 1$ ,  $\text{deg}(y) = \text{deg}(u) = \text{deg}(v) = 3$ ,  $\text{deg}(t) = \text{deg}(z) = 2$  e o  $\text{deg}(w) = 4$ . Assim  $\Delta(G) = 4$ .

Se todos os seus vértices de um grafo são vizinhos entre si, esse é conceituado como **completo**. A notação para um grafo completo é representada da forma  $K_n$ , onde  $n$  representa sua ordem. O grafo da Figura 3 é um  $K_4$ , dada a sua quantidade de vértices.

Figura 3 – Representação de um grafo completo



Fonte: (Próprio autor)

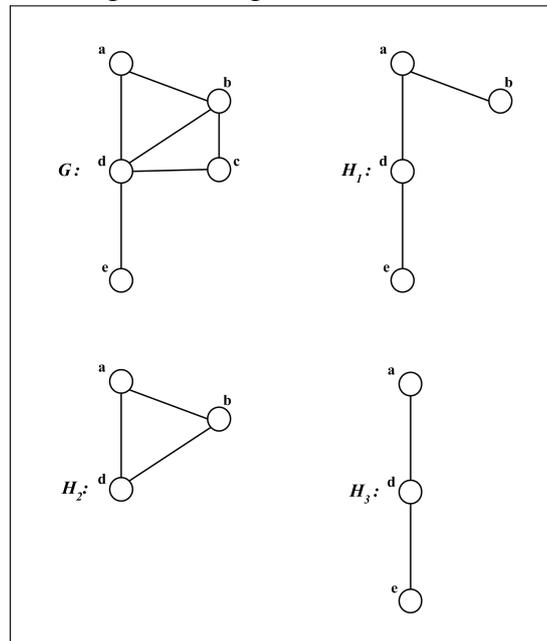
Segundo Chartrand e Zhang (2008), existem muitas maneiras de produzir um novo grafo a partir de um ou mais grafos. Em algumas definições, como a de subgrafo e grafo complementar, é simples perceber isso.

"Um grafo  $H$  é considerado um **subgrafo** de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ " (CHARTRAND; ZHANG, 2008, p.29). Um subgrafo pode, ainda, ser um **subgrafo induzido**. Um subgrafo  $H$  de  $G$  é induzido se  $H$  contém todas as arestas de  $G$  que são formadas pelo conjunto de vértices de  $H$ . Na Figura 4, o grafo  $H_1$  é um subgrafo de  $G$ , mas não é um subgrafo induzido, pois deveria existir um aresta ligando os vértices  $b$  e  $d$ , diferente dos grafos  $H_2$  e  $H_3$  que contêm todas as arestas de  $G$  que são formadas por  $V(H_2)$  e  $V(H_3)$  e são, portanto, subgrafos induzidos de  $G$ .

Segundo Chartrand e Zhang (2008), um subgrafo pode ser usado para descrever maneiras pelas quais alguém pode se mover dentro de um grafo, como, por exemplo, um **caminho** em um grafo  $G$ . "Um subgrafo  $P$  de um grafo  $G$  é um caminho em  $G$  se puder ser representado da forma  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , de modo que as arestas são  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ " (CHARTRAND; ZHANG, 2008, p.32). Dadas as definições de passeio e caminho, é interessante mencionar a definição de **comprimento**. O comprimento de um caminho é o número de arestas que este possui. Na Figura

4, o grafo  $H_3$ , que é um subgrafo de  $G$ , também é um caminho em  $G$  e seu comprimento é 2.

Figura 4 – Representação de subgrafo e subgrafo induzido

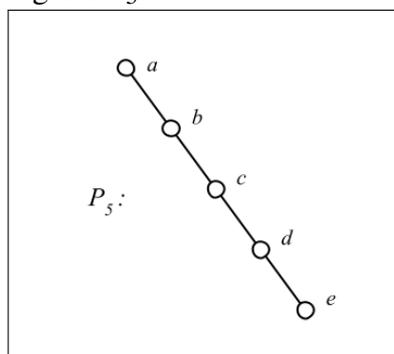


Fonte: (Próprio autor)

Um grafo pode ainda possuir **ciclos**. Um grafo possui ciclo  $C$  se existir um caminho com comprimento maior que 1 de maneira que o vértice de origem desse caminho seja o mesmo de destino. Na Figura 4 o grafo  $G$  possui um ciclo formado pelos vértices  $a, b$  e  $d$ , como exemplifica o subgrafo  $H_2$ . Dada a definição de ciclo em um grafo, se faz importante a definição de **corda**. Uma corda em um ciclo  $C$  é uma aresta que conecta dois vértices não consecutivos

Um tipo peculiar de grafo que aborda algumas das definições anteriores é o  $\mathbf{P}_4$ . Um grafo  $G$  é um  $\mathbf{P}_4$  se  $V(G) = \{x, y, z, w\}$  e  $E(G) = \{xy, yz, zw\}$  (CAMPOS *et al.*, 2010). A definição de  $\mathbf{P}_5$  é similar. A Figura 5 exemplifica um  $P_5$  com  $V = \{a, b, c, d, e\}$  e  $E = \{ab, bc, cd, de\}$

Figura 5 – Representação de um grafo  $P_5$ .

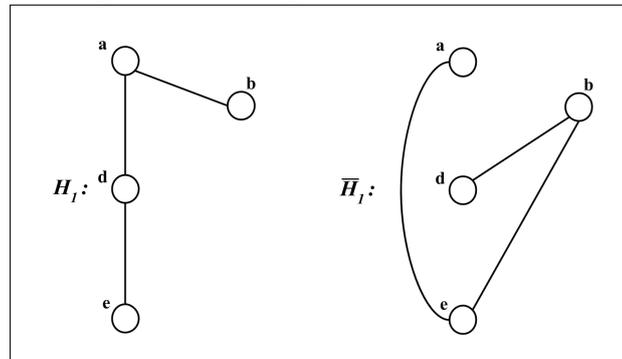


Fonte: (Próprio autor)

O **complemento** de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo formado pelo conjunto

de vértices de  $G$  em que cada aresta  $uv$  é pertencente a  $E(\overline{G})$  se, e somente se, não pertence a  $E(G)$  (CHARTRAND; ZHANG, 2008). A Figura 6 explana o complemento  $\overline{H_1}$  do grafo  $H_1$  da Figura 4, com  $(\overline{H_1}) = \{ae, eb, bd\}$ .

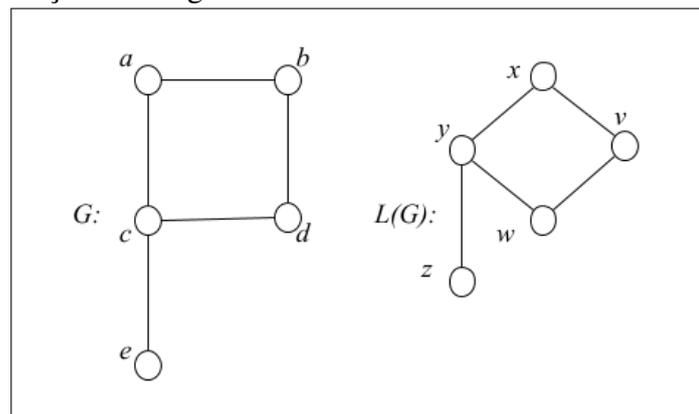
Figura 6 – Complemento do grafo  $H_1$  da Figura 4



Fonte: (Próprio autor)

Outro exemplo de grafo formado a partir de outros é o **grafo linha**. Um grafo linha  $L(G)$  tem seu conjunto de vértices composto pelo conjunto de arestas de  $G$ , ou seja, cada aresta de  $G$  equivale a um vértice de  $L(G)$ . Dois vértices  $u$  e  $v$  em  $L(G)$  são adjacentes se, e somente se, suas arestas correspondentes em  $G$  possuem um vértice em comum (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Na Figura 7 as arestas  $ab, ac, db, cd$  e  $ce$  de  $G$  equivalem aos vértices  $x, y, v, w$  e  $z$  no grafo  $L(G)$ .

Figura 7 – Representação de um grafo linha.

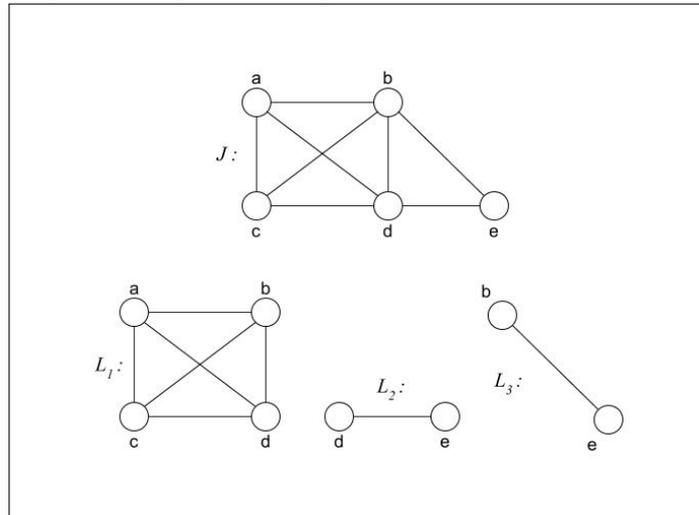


Fonte: Próprio autor

Segundo Chartrand e Zhang (2008), uma **clique** em um grafo  $G$  é um subgrafo completo de  $G$ . O termo **k-clique** é comumente utilizado para se referir ao tamanho de uma clique, ou seja, a quantidade de vértices que essa possui. O tamanho da maior clique que um grafo  $G$  possui é dito **número de clique** e é denotado por  $\omega(G)$ .

Uma **clique maximal** é o maior subconjunto de vértices adjacentes entre si que não esteja estritamente contido em outro. Na Figura 8, o subgrafo  $L_1$  formado pelos vértices  $a, b, c$  e  $d$  é o clique maximal do grafo  $J$ .

Figura 8 – Representação de clique em um grafo.



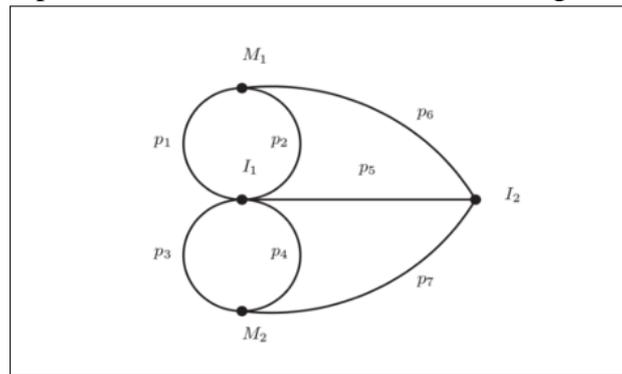
Fonte: Próprio autor

Outra definição de muita importância para este trabalho é a definição de **conjunto independente** de um grafo. É dito que um grafo  $G$  possui um conjunto independente  $I$ , se houver em  $G$  um subconjunto de vértices  $I$  de maneira que não exista nenhuma aresta ligando qualquer par de vértices de  $I$ . A Figura 10 ilustra esse conceito com  $X$  e  $Y$  representando dois conjuntos independentes.

Todos os grafos anteriormente apresentados são considerados **grafos simples**. Quando mais de uma aresta interliga o mesmo par de vértices, essas são chamadas **arestas paralelas**, em algumas literaturas chamadas **múltiplas arestas**, (CHARTRAND; ZHANG, 2008). Um grafo que possui arestas paralelas interligando o mesmo par de vértices é definido por **multigrafo**. A Figura 9, que ilustra o problema das pontes da cidade de Königsberg, explica o conceito de multigrafo. Cada aresta contida no grafo representa uma das sete pontes da cidade.

Os grafos são objetos combinatórios que podem ser classificados perante algumas propriedades. A seção seguinte define formalmente classes de grafos, além de exemplificar esse conceito.

Figura 9 – Grafo que representa o Problema das Pontes de Königsberg



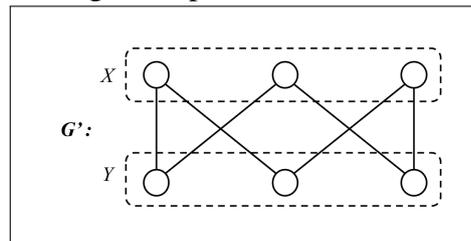
Fonte: Ferreira e Borges (2015)

### 2.3 Classes de Grafos

Em Teoria dos Grafos, uma **classe de grafos** é um conjunto em que cada um de seus elementos satisfaz determinadas propriedades. Existem diversas propriedades usadas para definir classes de grafos. Algumas dessas classes possuem configurações de suma importância para este trabalho, como a classe dos **grafos bipartidos**, definida adiante.

Um grafo  $G$  é **bipartido** se seu conjunto de vértices  $V$  puder ser particionado em dois conjuntos independentes  $X$  e  $Y$ , de modo que cada aresta pertencente a  $E(G)$  tenha uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$  (VULCANI *et al.*, 2015). A Figura 10 ilustra um grafo bipartido com  $X$  e  $Y$  sendo os conjuntos independentes de  $V(G')$ .

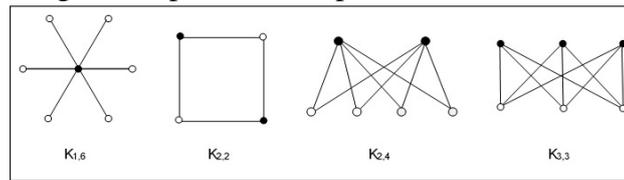
Figura 10 – Representação de um grafo bipartido



Fonte: Próprio autor

Um grafo bipartido pode ser um **grafo bipartido completo**. Um grafo bipartido completo é um bipartido simples, porém cada vértice do conjunto independente  $X$  está unido a todos os vértices do conjunto independente  $Y$ . Um grafo completo é denotado por  $\mathbf{K}_{p,q}$ , onde  $p$  é a cardinalidade do conjunto independente  $X$  e  $q$  a cardinalidade do conjunto independente  $Y$  (VULCANI *et al.*, 2015). A Figura 11 explana quatro diferentes representações de grafos bipartidos completos, com os vértices pretos representando um conjunto independente e os brancos o outro.

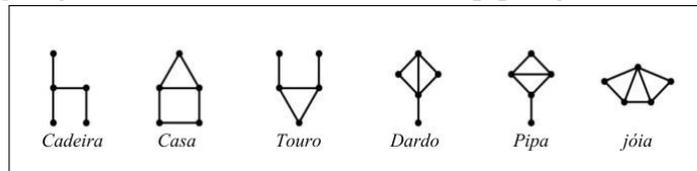
Figura 11 – Exemplos de grafos bipartidos completos.



Fonte: (VULCANI *et al.*, 2015)

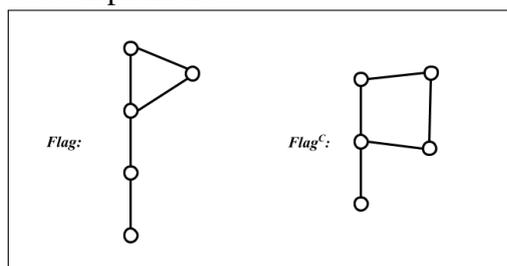
Algumas classes de grafos são definidas por **configurações proibidas**. Configurações proibidas são propriedades que cada grafo pertencente a uma determinada classe não possui, como por exemplo a classe dos grafos **livres de  $P_4$** . Um grafo  $G$  é **livre de  $P_4$**  se  $G$  não possui um subgrafo induzido  $P_4$  Campos *et al.* (2010). De forma análoga é conceituado um **grafo livre de  $P_5$** , que faz parte do escopo deste trabalho. Na Figura 12, explana algumas configurações definidas como proibidas em grafos apresentado no trabalho de Fouquet e Vanherpe (2012) e que também possuem relevância para este trabalho. A Figura 13 ilustra o conceito de grafo *Flag* e seu complemento, que fazem parte do escopo deste trabalho.

Figura 12 – Configurações cadeira, casa, touro, dardo, pipa e jóia.



Fonte: Fouquet e Vanherpe (2012)

Figura 13 – Grafo Flag e seu complemento.



Fonte: Dhurandhar (2017)

Os conceitos já abordados neste trabalho mostram uma pequena parcela da amplitude da Teoria dos Grafos. Os elementos que essa área da matemática utiliza possuem diversas propriedades que possibilitam simplificar e modelar diversos problemas, como mencionado anteriormente. A próxima seção trata da numeração cromática de um grafo, um dos principais conceitos quando se fala no problema de colocação de grafos, mencionado no início desta seção.

## 2.4 Número Cromático de um Grafo

A coloração de grafos dispõe de muitas aplicações. Quando se tem um problema que pode ser associado a um grafo, os objetos desse problema podem ser representados pelos vértices do grafo, as relações desses objetos pelas arestas e dispor uma informação de cada objeto pode ser visto como a atribuição de cores aos vértices. Em alguns problemas os objetos não podem assumir a mesma informação quando estão relacionados, como, por exemplo, duas antenas em que frequências podem se sobrepor. Isso significa que vértices ligados por uma aresta não admitem a mesma cor.

Em uma definição mais formal, uma coloração de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices de  $G$ , uma cor para cada vértice. Uma **coloração própria** de um grafo é uma atribuição de cores aos seus vértices, de modo que vértices adjacentes sejam coloridos com cores diferentes (CHARTRAND; ZHANG, 2008).

"Uma coloração própria pode ser considerada como uma função  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $c(u) \neq c(v)$  se  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G$ " (CHARTRAND; ZHANG, 2008, p.148). Dessa forma, uma  **$k$ -coloração própria** é dada pela atribuição de no máximo  $k$  cores a  $G$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $G$  possui uma  $k$ -coloração própria, o mesmo é dito  **$k$ -colorível**. Se  $k$  é o menor natural tal que  $G$  é  $k$ -colorível, o número cromático de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é igual a  $k$ .

Reed (1998) propôs uma conjectura que estabelece um limite superior para o número cromático de um grafo. "Uma conjectura é uma proposição que ainda não foi provada e nem refutada. É uma sentença sendo proposta como verdade, mas que precisa ser provada para virar teorema" (ABE, 2018). A conjectura proposta por Reed é melhor detalhada na seção seguinte.

### 3 PROBLEMA

A Conjectura de Reed é um limite superior proposto para o número cromático de um grafo e sua validade já foi mostrada para diversas classes de grafos. Reed conjecturou que para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G) + \Delta(G) + 1}{2} \right\rceil$ , com  $\omega(G)$  e  $\Delta(G)$  denotando, respectivamente, o tamanho da maior clique de  $G$  e o número máximo de vizinhos de qualquer vértice desse grafo.

O trabalho de Dhurandhar (2017) provou que a Conjectura de Reed é válida para a classe dos **grafos livres de  $\{\mathbf{P}, \mathbf{Flag}^C\}$** , onde  $\mathbf{Flag}^C$  é o complemento dos grafos Flag, apresentado na Figura 13. O trabalho considera, além de algumas demonstrações matemáticas como demonstração por indução, argumentações estruturadas no próprio trabalho, o que torna sua compreensão um pouco complexa. Uma questão interessante de se mencionar nesse trabalho é o fato desse trazer um *survey* de muitas classes de grafos já provados para a conjectura, também definidas por configurações proibidas, o que proporcionou conhecimento mais amplo da conjectura estudada. Na Tabela 1 são listadas as classes de grafos apresentadas no referido trabalho.

Tabela 1 – Grafos não direcionados definidos por configurações proibidas validados para a conjectura de Reed.

Demonstração da validade	Classe de Grafos
Aravind <i>et al.</i> (2011)	Grafos livres de $(P_5, P_2 \cup P_3, \text{Casa}, \text{Dardo})$
	Grafos livres de $(P_5, \text{Pipa}, \text{Touro}, (K_3 \cup K_1) + K_1)$
	Grafos livre de $(P_5, C_4)$
	Grafos livres de $(\text{Cadeira}, \text{Casa}, \text{Touro}, K_1 + C_4)$
	Grafos livres de $(\text{Cadeira}, \text{Casa}, \text{Touro}, \text{Dardo})$
	Grafos livres de $3K_1$ Grafos livres de $\{2K_2, C_4\}$
Gernert e Rabern (2007)	Grafos com $\chi \leq \omega + 2$
	Grafos planares e toroidais
	Grafos decompositáveis
Chudnovsky <i>et al.</i> (2006)	Grafos de linha generalizados
	Grafos perfeitos
King <i>et al.</i> (2007)	Grafos linha de multigrafos
Rabern (2008)	Grafos com complementos desconectados
Kohl e Schiermeyer (2010)	Grafos $G$ com $\chi(G) > \left\lceil \frac{V(G)}{2} \right\rceil$ e grafos com $\Delta(G) > \left\lceil \frac{V(G) - \alpha(G) + 3}{2} \right\rceil$
	Grafo $G$ com $\Delta(G) \geq  V(G)  - 7$ , e grafos $G$ com $\Delta(G) \geq  V(G)  - \alpha(G) - 4$

Fonte: Dhurandhar (2017)

Como mencionado anteriormente, o trabalho de Dhurandhar (2017) possui argumentações um pouco complexas e pouco detalhadas. Esse tipo de abordagem torna o trabalho bastante complexo, principalmente para leigos no assunto.

O trabalho de Serrato (2014) aborda argumentações utilizadas no trabalho de Kohl e Schiermeyer (2010) para provar a veracidade da Conjectura de Reed para os grafos livres triângulo com  $\Delta \geq \frac{8(n-\alpha)+118}{21}$ . Ao analisar essas argumentações, Serrato (2014) mostra como a classe pode ser estendida, demonstrando que a conjectura também é válida para a classe dos grafos de potência de ciclos.

O capítulo seguinte apresenta elucidação do trabalho de Dhurandhar (2017). Nele a demonstração torna-se mais nítida, dado a quantidade de detalhes omitidos na demonstração original e que são ressaltadas neste trabalho.

## 4 SOBRE A VALIDADE DA CONJECTURA DE REED PARA OS GRAFOS LIVRES DE $\{P_5, \text{Flag}^C\}$

Nesta seção é apresentada uma versão com maiores detalhes do trabalho de Dhurandhar (2017). A demonstração é dividida em três partes a fim de mitigar a complexidade da demonstração original, sendo apresentada na subseção 4.2. A presente seção contém ainda uma subseção destinada às notações intrínsecas à demonstração.

### 4.1 Notações

Seja  $G$  um grafo e  $C$  uma coloração de  $G$ . Seja  $v$  um vértice pertencente a  $V(G)$   $C(v) = \alpha$ . Com isso,  $v$  é denotado um  $\alpha$ -vértice de  $G$ . Além disso, um vértice  $v$  é dito  $\alpha$ -vértice de  $u$ , tal que  $v$  é adjacente a  $u$ ,  $C(v) = \alpha$ .

Segundo Jensen (2002), um vértice  $v$  pertencente a um grafo  $G$  é dito crítico, se  $\chi(G - v) < \chi(G)$ . Se todos os vértices de um grafo  $G$  são críticos,  $G$  é dito um **grafo vértice-crítico**.

### 4.2 Demonstração

As partes que compõem a demonstração são denominadas Parte I, Parte II e Parte III. Antes de iniciar a Parte I, se faz importante mencionar que todos os grafos considerados a partir de agora são simples. Além disso, levando em conta que os grafos abordados são livres de  $P_5$ , é importante ressaltar que os únicos ciclos ímpares sem cordas são  $C_5$ . Por estrutura um  $C_3$  não possui corda.

**Teorema:** Se  $G$  é um grafo livre de  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ , então  $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil$ .

**Parte I.** Seja  $G$  um grafo livre de  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$  e minimal para  $\chi(G) > \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil$ . Seja  $u \in V(G)$ . Visto que  $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - u)$  é válido, então, por minimalidade,  $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - u) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G - u) + \omega(G - u) + 1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil < \chi(G)$ . Com isso, tem-se que  $\chi(G - u) = \chi(G) - 1 = \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil, \forall u \in V(G)$ .

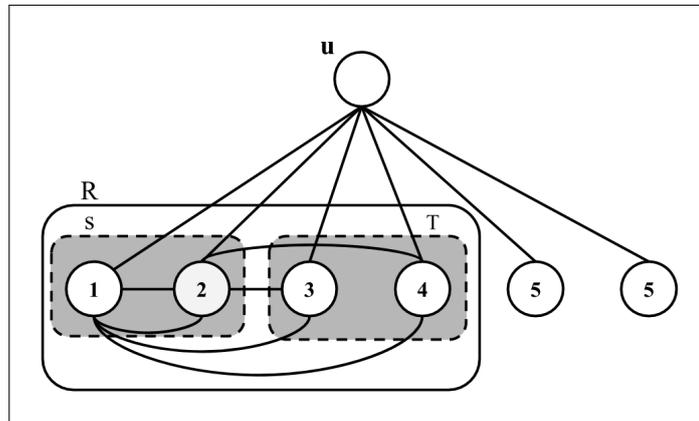
Seja  $C$  uma  $\chi(G)$ -coloração. Seja  $R = \{x \in N(u) / x \text{ possui uma cor de } C \text{ que nenhum outro vértice de } N(u) \text{ possui}\}$ . Com isso, tem-se que  $\deg(u) \geq |R|$ . Os vértices pertencentes ao conjunto  $R$

são os vértices de da vizinhança de  $u$  que possuem cores únicas, ou seja, são os vértices que pertencem às classes de cores unitárias da vizinhança de  $u$ . Como cada classe de cor não contida em  $R$  é representada por pelo menos 2 vértices, o  $\deg(u) \geq |R| + 2 \left( \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil - |R| \right)$ . Como  $\Delta(G) \geq \deg(u)$ ,  $\Delta(G) \geq |R| + 2 \left( \left\lceil \frac{\Delta(G) + \omega(G) + 1}{2} \right\rceil - |R| \right)$ , o que resulta em  $|R| \geq \omega(G) + 1$ .

**Parte II.** Sejam os conjuntos  $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{T}', \mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}'_1$  definidos da seguinte forma:

- $\mathbf{S} = \{x \in R / xy \in E(G) \forall y \in R - x\}$ , ou seja,  $S$  é um subconjunto cujos elementos são os vértices de  $R$  que são adjacentes a todos os outros vértices de  $R$ , como ilustra a Figura 14;
- $\mathbf{T}$  é um subconjunto de  $R$  tal que  $\mathbf{T} = \mathbf{R} - \mathbf{S}$ . Definidos os conjuntos  $S$  e  $T$ , é importante o fato de que  $\mathbf{R} = \mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ , Também ilustrado na Figura 14;
- $\mathbf{T}' = \{x' \in V(G) - N[u] / \exists x, y \in T \text{ com } xy \notin E(G), x'x \in E(G) \text{ e os vértices } x' \text{ e } y \text{ possuem a mesma cor}\}$ ;
- $\mathbf{S}_1 = \{w \in S / \exists y \in T' \text{ tal que } wy \notin E(G)\}$ ;
- $\mathbf{S}'_1 = \{x \in V(G) - N[u] / \text{para algum } \alpha\text{-vértice } y \in S_1 \text{ e } z \in T' \text{ sujeito a } yz \notin E(G), x \text{ é um } \alpha\text{-vértice de } z\}$ .

Figura 14 – Representação dos conjuntos  $R, S$  e  $T$ .



Fonte: Próprio autor

Definidos os conjuntos, têm-se as seguintes proposições:

**Proposição 1.**  $|\mathbf{T}| \geq 2$ .

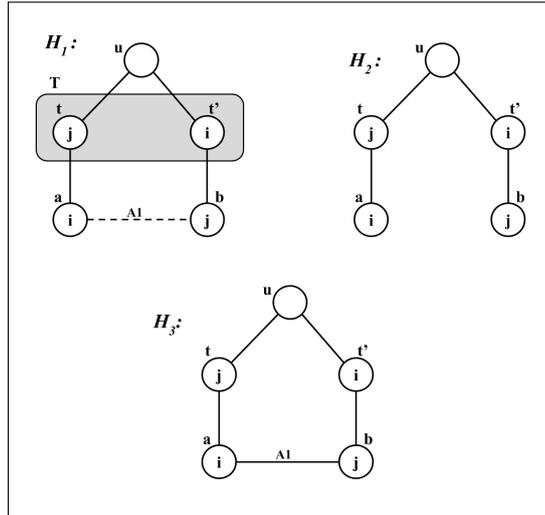
Se  $|T| = 0$  implicaria no subgrafo induzido por  $R$  ser uma clique, mas, como demonstrado na **Parte I**,  $|R| \geq \omega + 1$ , o que não seria possível se o subgrafo induzido por  $R$  fosse uma clique. Vale ressaltar que  $|T|$  não pode ser 1 por definição do conjunto  $T$ .

**Proposição 2.** Se dois vértices  $t$  e  $t' \in T$ , tal que  $tt' \notin E(G)$  e têm cores  $j, i$ , respectivamente, então  $t(t')$  possuem um único  $i(j)$ -vértice.

Como  $t$  possui um único  $i$ -vértice e  $t'$  um único  $j$ -vértice, então:

- (a) as arestas  $au$  e  $bu$  não existir, pois os vértices  $t$  e  $t'$  possuírem as cores  $i$  e  $j$ . Assim, se as arestas  $au$  e  $bu$  existisse,  $t$  e  $t'$  não pertenceriam a  $T$ ;
- (b) a aresta  $ab$ , exemplificada por  $A1$  na Figura 15, deve necessariamente existir, caso contrário os vértices  $\{a, t, u, t', b\}$  induziriam um  $P_5$ , como ilustrado por  $H_2$ ;

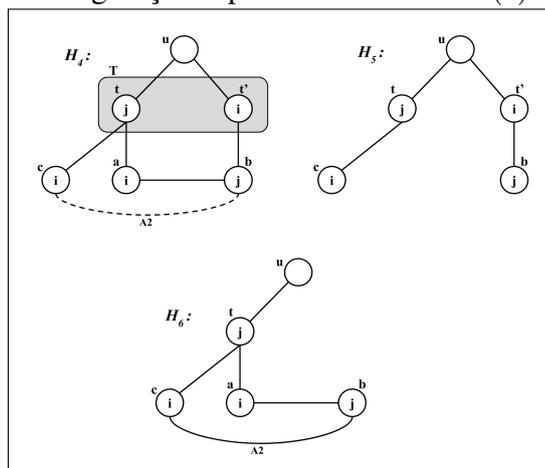
Figura 15 – Ilustração das configurações apresentadas no item (b) da Proposição 2.



Fonte: Próprio autor

- (c) Se fosse possível  $t$  possuir mais de um vizinho de cor  $i$ , como exemplifica o vértice  $c$  na Figura 16, então:

Figura 16 – Ilustração das configurações apresentadas no item (c) da Proposição 2.



Fonte: Próprio autor

- (i) não existe aresta conectando  $u$  e  $c$  pelo mesmo motivo de  $au \notin E(G)$ ;
- (ii) a aresta  $cb$ , exemplificada por  $A2$  na Figura 16, pertence a  $E(G)$ , do contrário os vértices  $\{c, t, u, t', b\}$  induzem um  $P_5$ , ilustrado por  $H_5$ . Porém, a existência

de  $cb$  implica a existência do  $Flag^C$  induzido pelos vértices  $\{c, b, a, t, u\}$ , como ilustra o grafo  $H_6$  na Figura 16, o que é uma contradição. O mesmo aconteceria caso  $t'$  tivesse mais de um  $j$ -vértice;

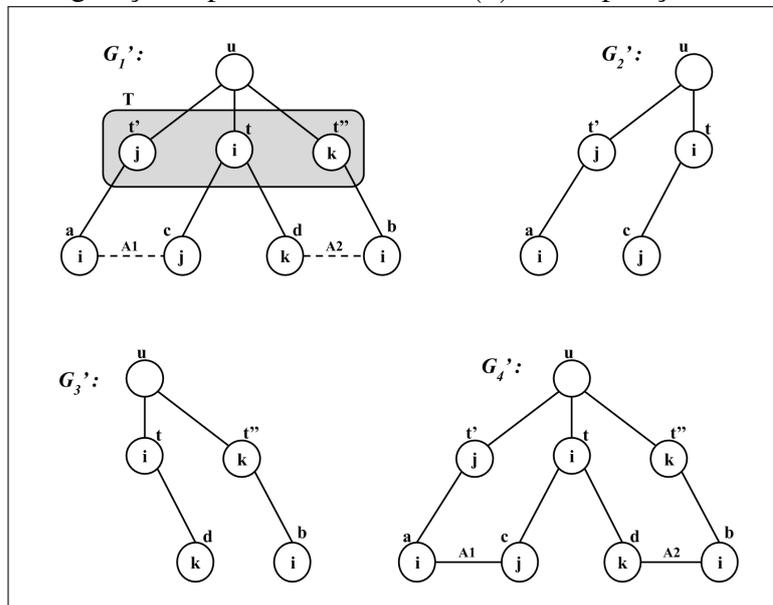
Portanto, pode-se concluir que os vértice  $t$  e  $t'$  não podem ter mais de um  $i(j)$ -vértice.

**Proposição 3.** Se três vértices  $t, t'$  e  $t'' \in T$ , com o vértice  $t$  tendo cor  $i$ , então  $t'$  tem um  $i$ -vértice  $a$ ,  $t''$  têm um  $i$ -vértice  $b$ , sendo  $a = b$ .

Sejam  $t$  e  $t''$  coloridos com as cores  $j$  e  $k$ , respectivamente. Pela Proposição 2,  $t$  tem um único  $i$ -vértice  $a$  e  $t''$  um único  $i$ -vértice  $b$ . Se fosse possível  $a \neq b$ , então:

- (a) seja  $c$  um  $j$ -vértice de  $t$  e  $d$  um  $k$ -vértice de  $t$ . Pela Proposição 2, a aresta  $ac$ , ilustrada por  $A1$  na Figura 17, assim como  $db$ , ilustrada por  $A2$ , pertencem a  $E(G)$ . Supondo por contradição a inexistência de  $A1$ , os vértices  $\{a, t', u, t, c\}$  induziriam um  $P_5$ , como o exemplificado por  $G'_2$  na Figura 17. Da mesma forma, supondo que  $A2 \notin E(G)$ , os vértices  $\{d, t, u, t'', b\}$  induziriam um  $P_5$ , como no grafo  $G'_3$ . Portanto, as arestas  $A1$  e  $A2$  pertencem a  $E(G)$ , como em  $G'_4$  na Figura 17;

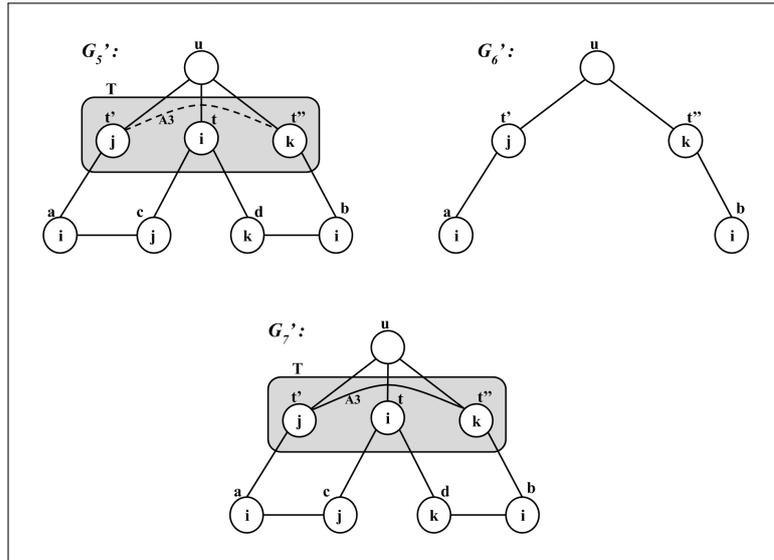
Figura 17 – das configurações apresentadas no item (a) da Proposição 3.



Fonte: Próprio autor

- (b) levando em conta o item (a), a aresta  $t't''$ , representada por  $A3$  na Figura 18, também deve pertencer a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $A3 \notin E(G)$ , os vértices  $\{a, t', u, t'', b\}$  induzem um  $P_5$ , como em  $G'_6$ . Conclui-se com isso que  $A3 \in E(G)$ , como em  $G'_7$  na Figura 18;
- (c) a aresta  $t'd$ , exemplificada por  $A4$  na Figura 19, pertence a  $E(G)$ . Supondo que

Figura 18 – das configurações apresentadas no item (b) da Proposição 3.

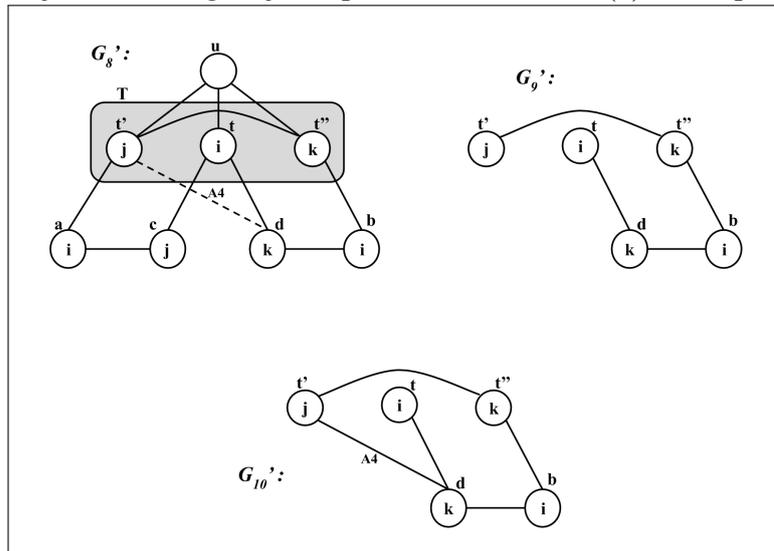


Fonte: Próprio autor

$A4 \notin E(G)$ , os vértices  $\{t, d, b, t'', t'\}$  induziriam um  $P_5$ , como ilustra  $G_9$ , mas o fato de  $A4 \in E(G)$  implica a existência do  $Flag^C = \{t', t'', b, d, t\}$  como ilustrado por  $G_{10}$ , uma contradição.

Portanto, conclui-se que se três vértices,  $t, t'$  e  $t'' \in T$ , com  $t$  tendo cor  $i$ , então  $t'$  tem um  $i$ -vértice  $a$ ,  $t''$  tem um  $i$ -vértice  $b$ , sendo  $a = b$ , tornando a Proposição 3 verdadeira.

Figura 19 – Ilustração das configurações apresentadas no item (c) da Proposição 3.



Fonte: Próprio autor

**Proposição 4. subgrafo induzido por  $S'_1 \cup T'$  é completo.**

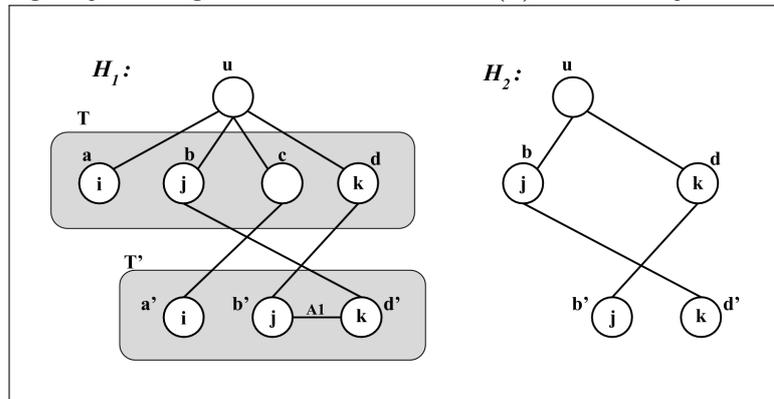
Para isso, antes é necessário demonstrar as seguintes afirmações:

**Afirmção 1. O subgrafo induzido por  $T'$  é completo**

Supondo que  $\exists a', b', d', c' \in T'$  tal que  $a'b' \notin E(G)$ , por definição de  $T' \exists a, b, c, d \in T$  tal que  $a$  e  $a'$  têm cor  $i$ ,  $b$  e  $b'$  têm cor  $j$  e  $d, d'$  têm cor  $k$ . Além disso, as arestas  $ac, bd \notin E(G)$ . Tem-se com essas premissas que:

- (a) como  $ac, bd \notin E(G)$ , pela Proposição 2,  $ca', db' \in E(G)$ , como no grafo  $H_1$  na Figura 20. A aresta  $b'd'$ , representada por  $A1$ , pertence a  $E(G)$ , do contrário os vértices  $\{b', d, u, b, d'\}$  induziriam um  $P_5$ , como ilustra o grafo  $H_2$  na Figura 20.
- (b) a aresta  $ab$ , representada por  $A2$  na Figura 21, deve pertencer a  $E(G)$ . Supondo que  $A2 \notin E(G)$  tem-se pela Proposição 3 que  $ab', ba' \in E(G)$ , ocasionando o  $P_5 = \{b', a, u, b, a'\}$  representado por  $H_4$  na Figura 21. Com isso  $A2 \in E(G)$ , como representado por  $H_5$  ainda na Figura 21;

Figura 20 – Configurações do grafos descrito no item (a) da Afirmação 1 na Proposição 4.



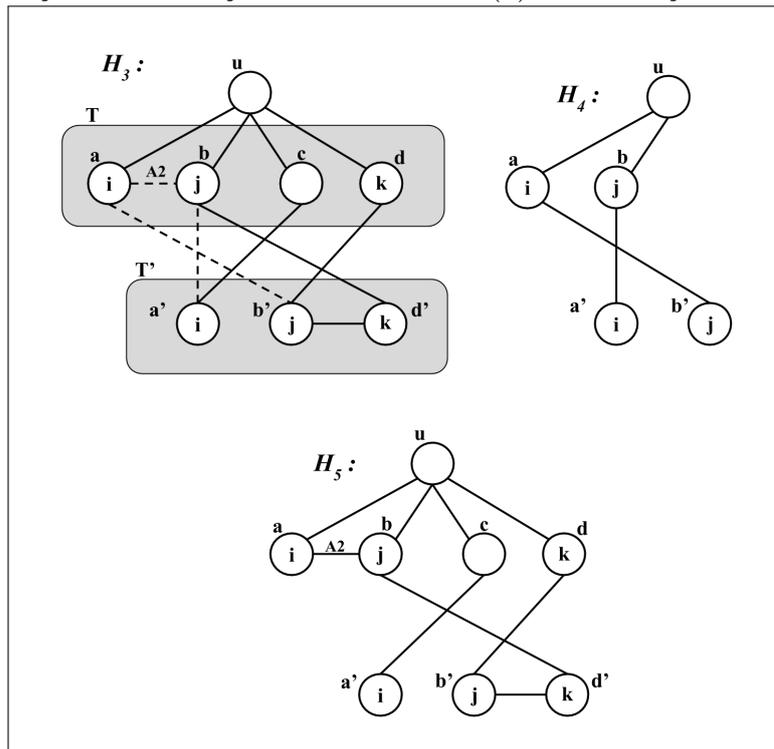
Fonte: Próprio autor

- (c) a aresta  $ad$ , representada por  $A3$  na Figura 22, pertence a  $E(G)$ . Supondo que  $ad \notin E(G)$ , tem-se:
- (i) como  $A3 \notin E(G)$ , pela Proposição 2 as arestas  $ad', dd' \in E(G)$ , o que induziria o  $P_5 = \{a', d, u, a, d'\}$ , representado por  $H_7$  da Figura 22;
- (ii)  $a'd' \in E(G)$  para evitar o  $P_5 = \{a', d, u, a, d'\}$ , porém o fato de  $a'd' \in E(G)$  acaba induzindo um  $Flag^C = \{a', d', b', d, u\}$ , ilustrados por  $H_7$  e  $H_8$  na Figura 22;

Levando em conta (i) e (ii) conclui-se que a aresta  $A3 \in E(G)$  como ilustra o grafo  $H_9$  da Figura 22, sendo importante o fato da arestas  $bc \in E(G)$  ser análogo;

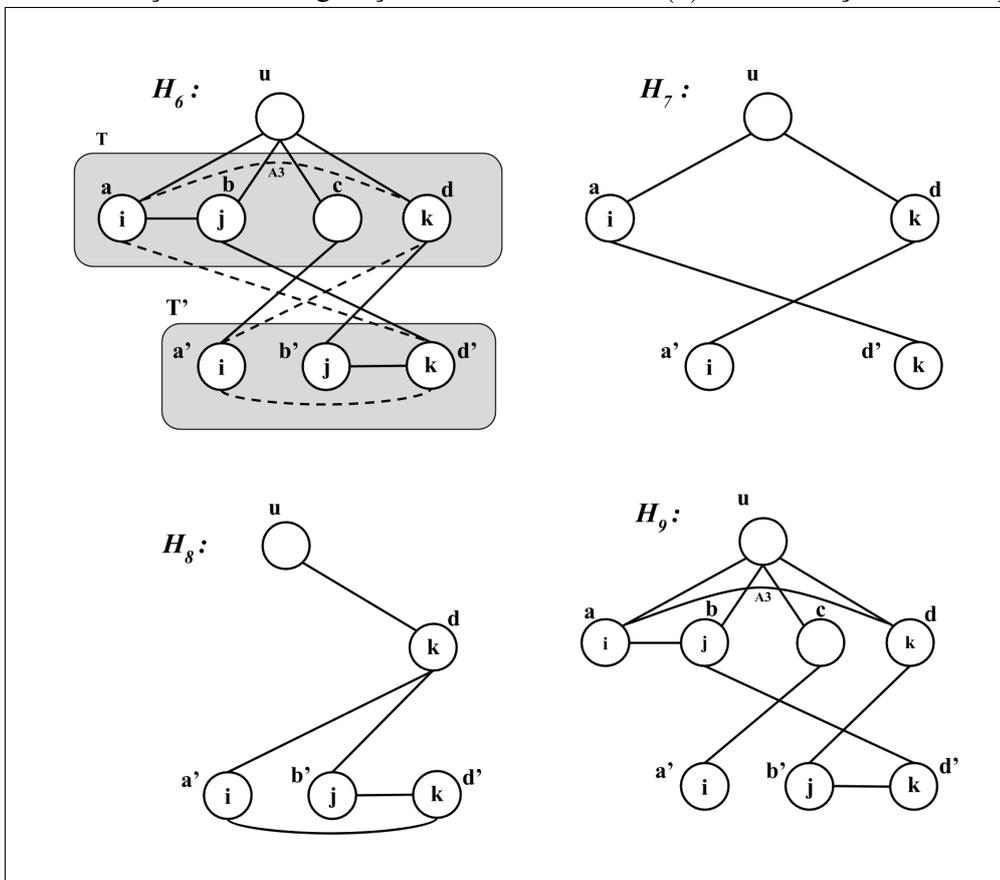
- (d) a aresta  $a'b$ , ilustrada por  $A4$  na Figura 23, pertencer a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $A4 \notin E(G)$ , então:
- (i)  $a'd \in E(G)$ , pois sua inexistência induziria um  $Flag^C = \{d, a, b, c, a'\}$  se

Figura 21 – Ilustração da construção descrita no item (b) da Afirmação 1 na Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

Figura 22 – Ilustração das configurações descritas no item (c) da Afirmação 1 na Proposição 4.



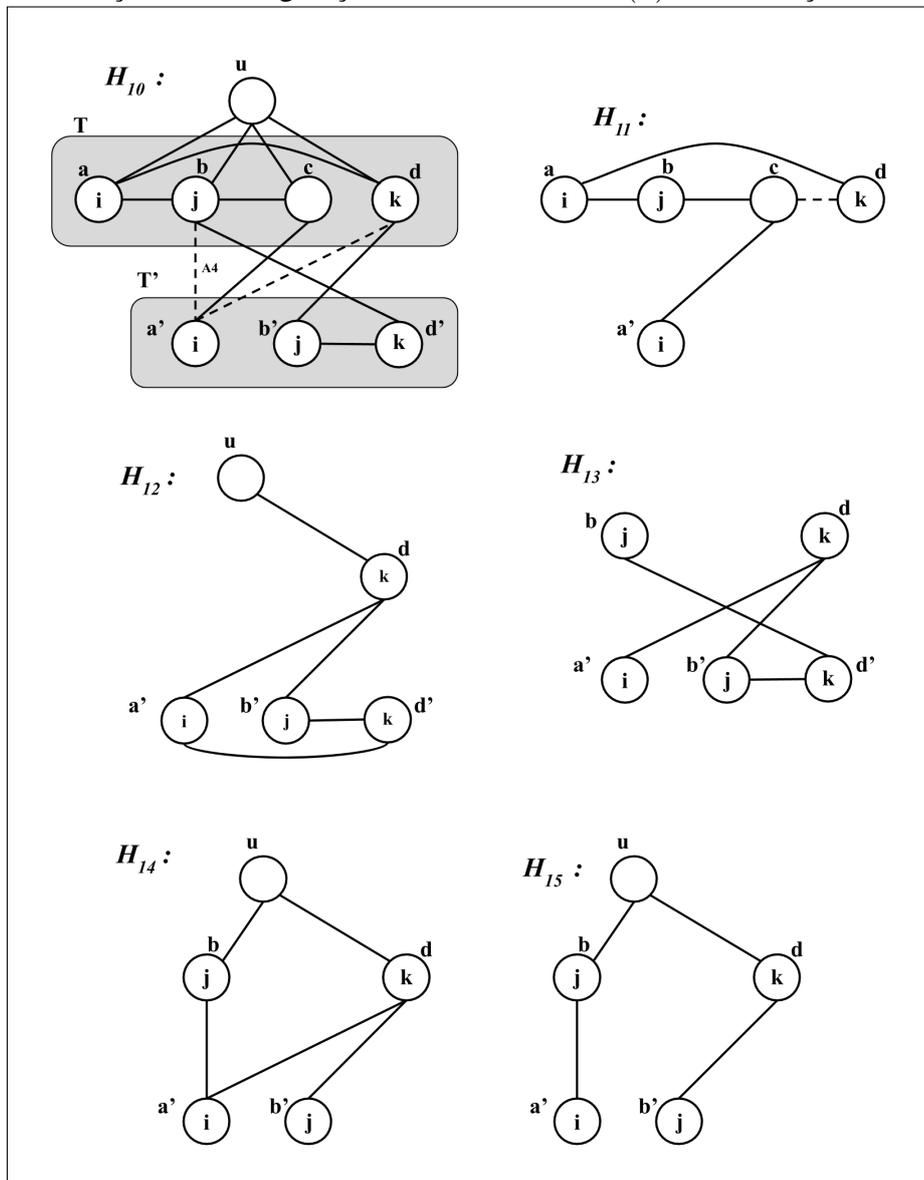
Fonte: Próprio autor

$cd \in E(G)$  ou o  $P_5 = \{a', d, a, b, c\}$  se  $cd \notin E(G)$ , como ilustrado por  $H_{11}$  na Figura 23.

(ii) a inexistência de  $A_4$  induziria também o  $Flag^C = \{a', d', b', d, u\}$  se  $a'd' \in E(G)$  ou  $P_5 = \{b, d', b', d, a'\}$  se  $a'd' \notin E(G)$ , devidamente exemplificados por  $H_{12}$  e  $H_{13}$  na Figura X, respectivamente.

os casos (i) e (ii) implicam que  $a'd \notin E(G)$ , caso contrário induziria o  $Flag^C = \{u, b, a', d, b'\}$ , exemplificado pelo grafo  $H_{14}$  na Figura 23. Porém, o  $P_5 \{a', b, u, d, b'\}$  que  $H_{15}$  ilustra na Figura 23 ainda ocorre, uma contradição. Isso permite a conclusão de que  $T'$  é completo.

Figura 23 – Ilustração das configurações descritas no item (d) da Afirmação 1 na Proposição 4.



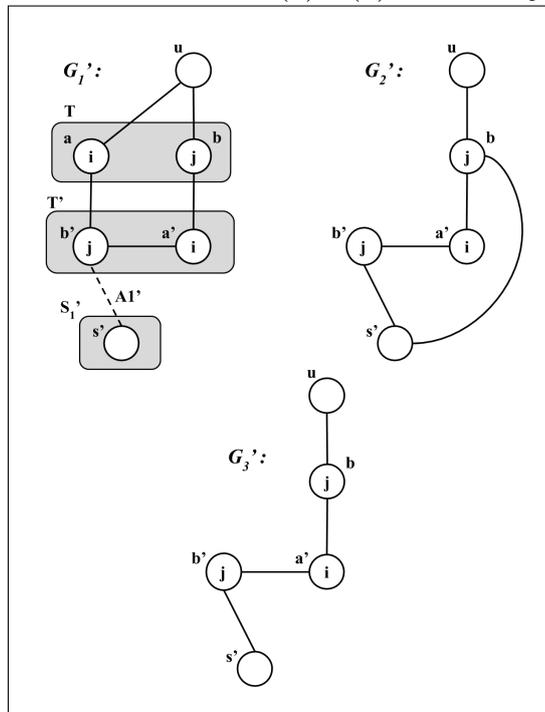
Fonte: Próprio autor

**Afirmação 2.**  $st' \in E(G) \forall s \in S'_1, t' \in T'$ .

Supondo que  $\exists s' \in S'_1$  e  $a' \in T'$  tal que  $s'a' \notin E(G)$ , tem-se que:

- (a) de acordo com a **Parte II**, existem  $a$  e  $b$  pertencentes a  $T$ , tal que a aresta  $ab \notin E(G)$  e  $\{a, b', a', b\}$  é um caminho bi-colorido, como exemplificado na Figura 24.
- (b) a aresta  $s'b'$ , exemplificada por  $A1'$  na Figura 24 não pertence a  $E(G)$ . Supondo que  $A1' \in E(G)$ , tem-se a ocorrência do  $Flag = \{s', b', a', b, u\}$  se  $s'b \in E(G)$  ou a ocorrência do  $P_5 = \{s', b', a', b, u\}$  se  $s'b \notin E(G)$ , ilustrados por  $G'_2$  e  $G'_3$  na Figura 24. Portanto,  $s'b' \notin E(G)$ ;

Figura 24 – Configurações descritas nos itens (a) e (b) da Afirmção 2 na Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

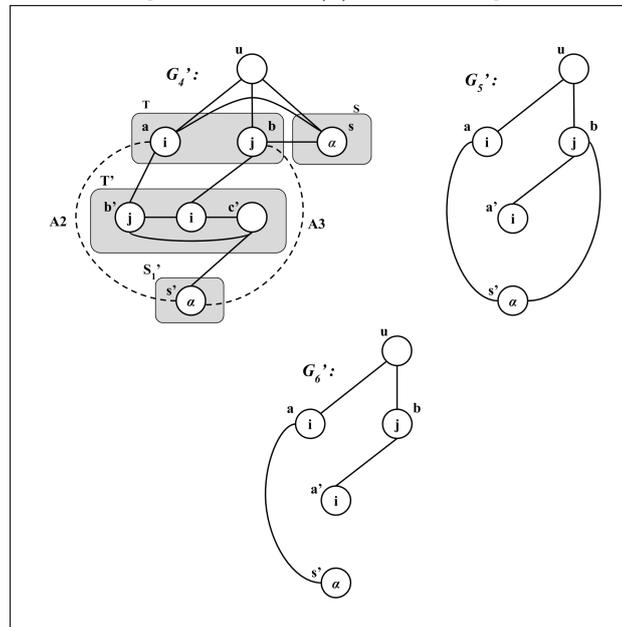
- (c) seja  $s$  um vértice de cor  $\alpha$ , tal que  $s \in S$ . Agora, seja  $c' \in T'$  tal que  $sc' \notin E(G)$  e o vértice  $s'$ , anteriormente definido, é um  $\alpha$ -vértice de  $c'$ ;
- (d) como o conjunto  $T'$  induz um grafo completo,  $ca', cb' \in E(G)$ ;
- (e) as arestas  $s'b$  e  $s'a$ , ambas representadas por  $A2$  e  $A3$  em  $G'_4$  na Figura 25, não pertencem a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $A2, A3 \in E(G)$ , tem-se:
- (i) os vértices  $\{s', a, u, b, a'\}$  induzem um  $Flag^C$ , ilustrado por  $G'_5$  na Figura 25;
- (ii) se apenas  $A2 \in E(G)$ , os vértices  $\{a', b, u, a, s'\}$  induzem um  $P_5$ , exemplifi-

cado por  $G'_6$  na Figura 25;

- (f) a aresta  $sa' \notin E(G)$ , como ilustra  $A4$  em  $G'_7$  na Figura 26. Supondo que  $A4 \in E(G)$ , os vértices  $\{u, s, a', c', s'\}$  induzem um  $P_5$ , como ilustra  $G'_8$  na Figura 26;
- (g) a aresta  $sb' \notin E(G)$ , como ilustra  $A5$  em  $G'_7$ . Supondo que  $A5 \in E(G)$ , os vértices  $\{u, s, b', c', s'\}$  induzem um  $P_5$ , exemplificado por  $G'_9$ . Isso implicaria que:
- (i) a aresta  $c'b \in E(G)$ , exemplificada por  $A6$  na Figura 27, do contrário os vértices  $\{s, b, a', c', s'\}$  induziriam um  $P_5$ , como representa o grafo  $G_{11}$  na Figura 27;
- (ii) a aresta  $c'a \in E(G)$ , ilustrada por  $A7$  na Figura 27, caso contrário, os vértices  $\{s', c', b', a, s\}$  induziriam um  $P_5$ . Porém, os vértices  $\{b, u, a, c', s'\}$  induzem um  $Flag_C$ , representado por o que é uma contradição.

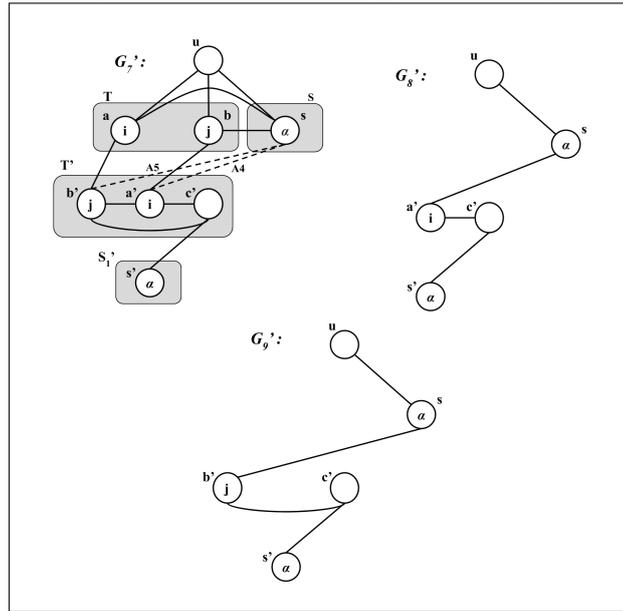
Portanto, conclui-se a afirmação de que  $st' \in E(G) \forall s \in S'_1, t' \in T'$ .

Figura 25 – Ilustração das descrições do item (e) da Afirmação 2 na Proposição 4.



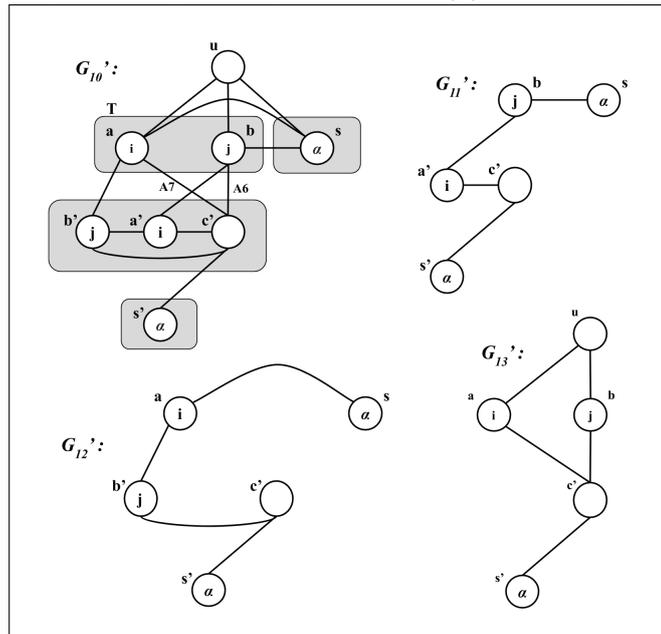
Fonte: Próprio autor

Figura 26 – Ilustração das especificações do item (f) da Afirmação 2 na Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Representação das especificações do item (g) da Afirmação 2 na Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

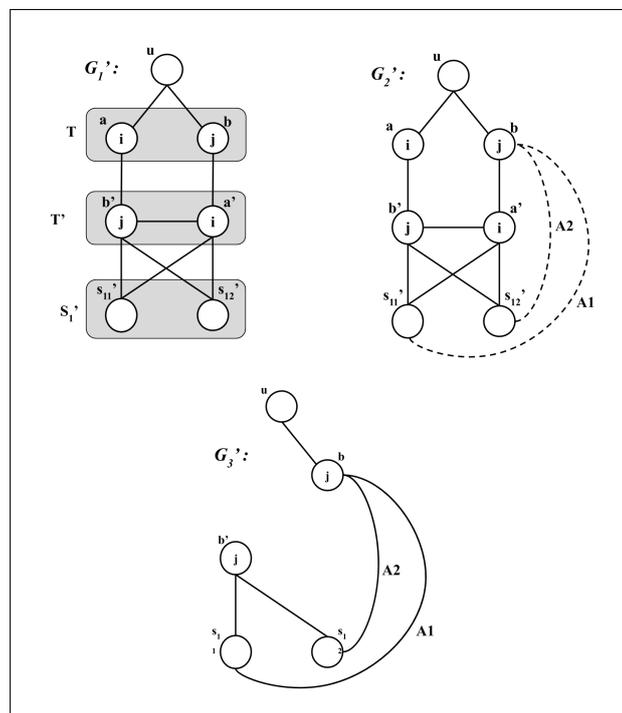
**Afirmção 3. O subgrafo induzido por  $S'_1$  é completo.**

Supondo por contradição que é possível existir  $s'_{11}, s'_{12} \in S'_1$ , tal que a aresta  $s'_{11}s'_{12} \notin E(G)$ , então:

- (a) pela Proposição 1, existem  $a$  e  $b$  pertencentes a  $T$ , tal que  $ab \notin E(G)$ . Assim, pela Proposição 2, existem vértices  $a'$  e  $b'$  pertencentes a  $T'$ , tal que  $\{a, b', a', b\}$  é um caminho bi-colorido;
- (b) como  $st' \in E(G) \forall s \in S'_1$  e  $t' \in T'$ , como demonstrado anteriormente, as arestas

- $s'_{11}a'$ ,  $s'_{12}a'$ ,  $s'_{11}b'$  e  $s'_{12}b'$  pertencem a  $E(G)$ , como em  $G'_1$  na Figura 28;
- (c) as arestas  $s'_{11}b$  e  $s'_{12}b$ , ambas representadas por  $A1$  e  $A2$  na Figura 28, não podem existir simultaneamente. Supondo por contradição que  $A1$  e  $A2$  existem conjuntamente, os vértices  $\{s'_{11}, b', s'_{12}, b, u\}$  induzem um  $Flag^C$ , como exemplificado por  $G'_3$  na Figura 28. Sem perda de generalização,  $A1 \notin E(G)$ ;
- (d) a aresta  $s'_{11}a$ , representada por  $A3$  na Figura 29, pertence a  $E(G)$ . Supondo por contradição a inexistência de  $A3$ , tem-se o  $P_5$  induzido pelos vértices  $\{b, u, a, b', s'_{11}\}$ , ilustrado por  $G'_5$  na Figura 29. Portanto,  $A3 \in E(G)$ , como em  $G'_6$ ;
- (e) o fato de  $A3 \in E(G)$  implica que:
- (i) a aresta  $s'_{12}a$ , exemplificada por  $A4$  na Figura 30, não pertence a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $A4 \in E(G)$ , os vértices  $\{s'_{11}, a', s'_{12}, a, u\}$  induziriam um  $Flag^C$ , como em  $G'_8$ . Portanto  $A4 \notin E(G)$ ;

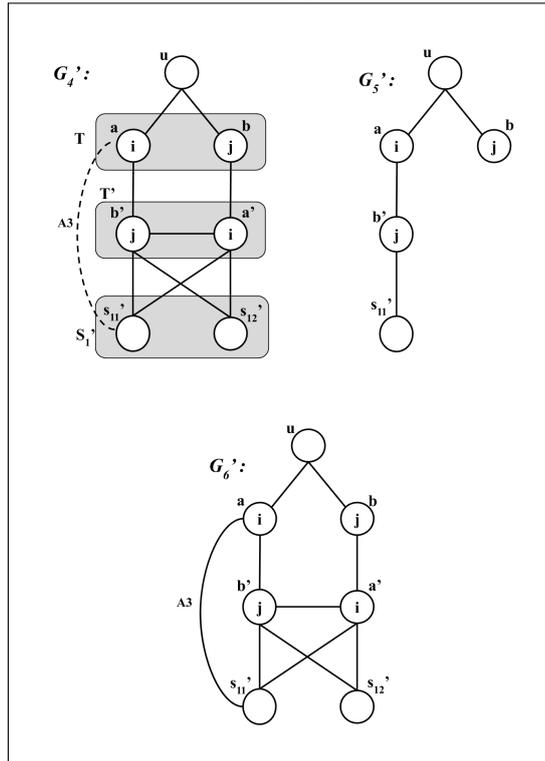
Figura 28 – Representações das especificações dos itens (b) e (c) da Afirmação 3 da Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

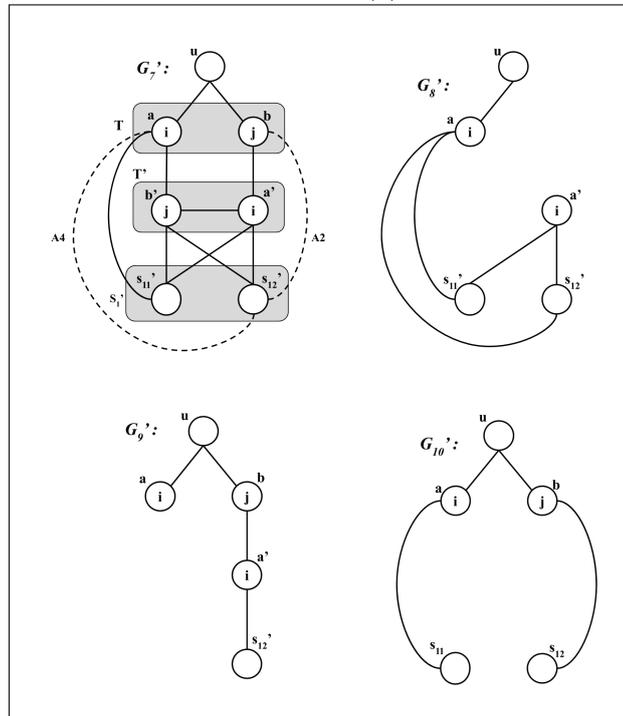
- (ii) a aresta  $s'_{12}b$ , exemplificada por  $A2$  na Figura 30, pertence a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $A2 \notin E(G)$ , os vértices  $\{a, u, b, a', s'_{12}\}$  induziriam um  $P_5$ , como ilustrado por  $G'_9$ . Assim,  $A2 \in E(G)$ . No entanto, os vértices  $\{s'_{11}, a, u, b, s'_{12}\}$  induzem um  $P_5$ , como em  $G'_{10}$ , o que é uma contradição.

Figura 29 – Ilustrações das descrições do item (d) da Afirmação 3 da Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

Figura 30 – Ilustração das especificações do item (e) da Afirmação 3 da Proposição 4.



Fonte: Próprio autor

Conclui-se assim que o subgrafo induzido por  $S'_1$  é completo, demonstrando também a veracidade da Proposição 4.

**Parte III.** Para esta parte da demonstração, sejam os conjuntos  $S_n$  e  $S'_n$  definidos da seguinte forma:

- $S_n = T$  quando  $n = 0$  e  $S_n = \{x \in S - \bigcup_{m=0}^{n-1} S_m / \exists y \in S'_{n-1} \text{ com } xy \notin E(G)\}$  quando  $n \geq 1$ ;
- $S'_n = T'$  quando  $n = 0$  e  $S'_n = \{z \in E(G) - N[u] / \text{para algum } \alpha\text{-vértice } x \in S \text{ e } y \in S'_{n-1}, \text{ tal que } xy \notin E(G), z \text{ é um } \alpha\text{-vértice de } y\}$  quando  $n \geq 1$ .

Por construção, toda cor utilizada em  $S_n$  é utilizada em  $S'_n$ . Também é importante o fato de  $S_n$  ser um subconjunto de  $S$ .

Agora seja  $S'_0, S'_1, \dots, S'_k$  uma sequência maximal. Pelas definições dos conjuntos  $S_n$  e  $S'_n$ , para todo  $x \in W$ , tal que  $W = S - \bigcup_{k=0}^{k-1} S_m$ , é adjacente a todo vértice de  $\bigcup_{k=0}^{k-1} S'_m$ . Com isso, tem-se a seguinte afirmação:

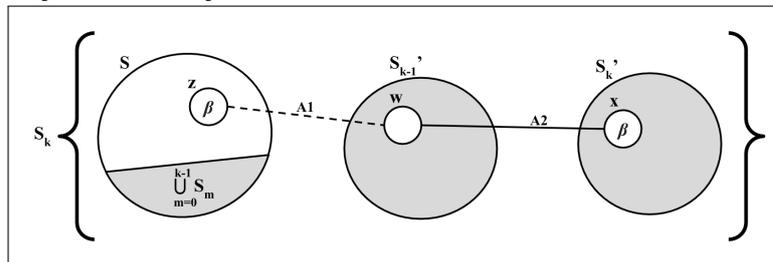
**Afirmação: O subgrafo induzido por  $W \cup \left\{ \bigcup_{k=0}^{k-1} S'_m \right\}$  é completo.**

A afirmação pode ser demonstrada da seguinte forma:

1. para  $k = 0$ , tem-se que:
  - (a)  $x \in W = S - \bigcup_{n=0}^{k-1} S'_n$ , ou seja,  $W = S$  tal que  $x$  é adjacente a todo vértice de  $\bigcup_{m=0}^k S'_m$ , ou seja,  $S'_0 = T'$ ;
  - (b) como  $W$  é subconjunto de  $S$ , então  $W$  é completo. Considerando a Proposição 4 da **Parte I**, tem-se que  $T'$  é completo. Pel definição de  $W$ , tem-se que para todo  $v$  tal que  $v \in W$ , e  $u'$ , tal que  $u' \in T'$ ,  $vu' \in E(G)$ ;
2. para  $k = 1$  tem-se que:
  - (a)  $x \in W = S - \bigcup_{n=0}^{k-1} S_n$ , ou seja,  $W = S - S_0$  tal que  $x$  é adjacente a todo vértice de  $\bigcup_{n=0}^k S'_n$ , ou seja,  $S_0 = T' \cup S'_1$ ;
  - (b) como  $W$  é subconjunto de  $S$ , então  $W$  é completo. Pela Proposição 4 na **Parte I**,  $T' \cup S'_1$  também é completo. Pela definição de  $W$ , tem-se que para todo  $v \in W$  e para todo  $u'' \in T' \cup S'_1$ ,  $u''v \in E(G)$ .
3. Assumindo que o subgrafo induzido por  $\bigcup_{n=0}^{k-1} S'_n$  é completo, e supondo por contradição que existe um vértice  $x \in S'_k$ , um vértice  $y \in S'_j$ , tal que  $xy \notin E(G)$  e  $j$  o menor índice que isso ocorre, então:
  - (a) por construção, existe um  $\beta$ -vértice  $z \in S_k$  e um vértice  $w \in S'_{k-1}$  tal que  $zw \notin E(G)$ ,

- além de um vértice  $x$  que é  $\beta$ -vértice de  $w$ ;
- (b) para definir  $S'_k$ , antes é necessário definir  $S_k$ , sendo que um vértice  $v'$  pertence a  $S_k$  se  $v' \in S - \bigcup_{n=0}^{k-1} S'_n$  e para algum  $y' \in S'_{k-1}$ ,  $v'y' \notin E(G)$ ;
- (c) pela definição de  $S_k$ , o vértice  $x$  pertence a  $S'_k$  se existe um vértice  $w \in S'_{k-1}$ , tal que  $xw \in E(G)$ , como representado por A2 na Figura 31. Além disso, deve necessariamente existir um vértice  $z \in S_k$ , tal que  $zy \notin E(G)$ , como exemplificado por A1 na Figura 31, sendo  $z$  colorido com a mesma cor de  $x$ ;
- (d) o índice  $j > 0$ . Supondo por contradição que  $j = 0$ , então:
- i. por hipótese de indução, existe uma aresta entre os vértices  $y \in S'_j$  e  $w \in S'_{k-1}$ , como ilustrada por A3 na Figura 32.
  - ii. dado que  $j = 0$ , então  $S'_j = S'_0 = T'$ , com isso, pela construção de  $S_k$ , existe uma aresta entre os vértices  $y \in S'_j$  e  $z \in S_k$ , como ilustrado por A4 na Figura 32. A existência de A3 e A4 induz o  $P_5 = \{u, z, y, w, x\}$ , como ilustra o grafo  $G'_1$ , portanto,  $j > 0$ ;

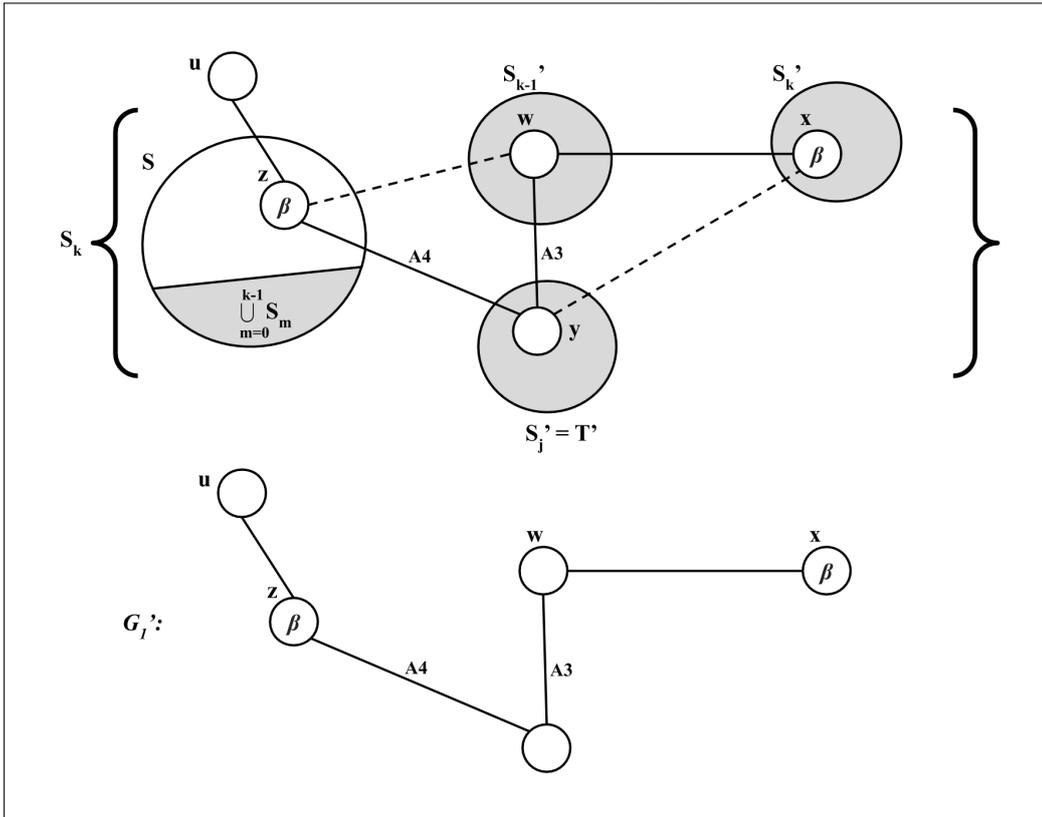
Figura 31 – Ilustração da definição de  $S_k$



Fonte: Próprio autor

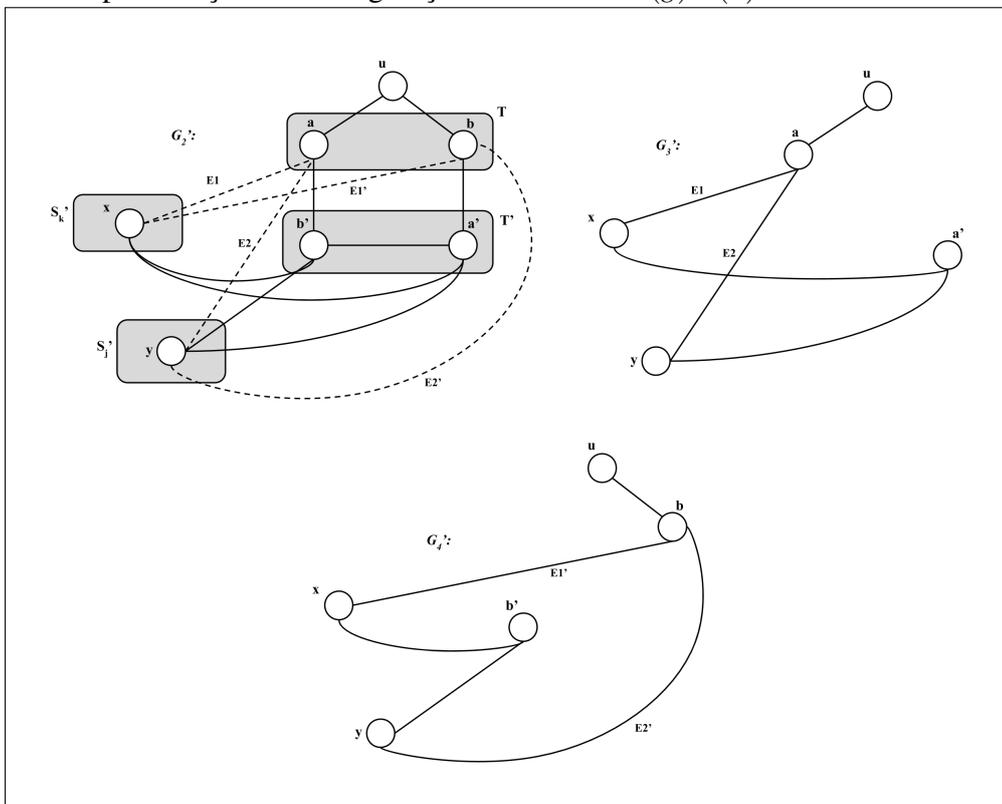
- (e) seja o vértice  $a' \in S'_0$ . Dado que  $S_0 = T'$ , por definição de  $T'$ , existem dois vértices  $a$  e  $b$  pertencentes a  $T$ . Além disso, existe um vértice  $b'$  pertencente a  $T'$ , tal que  $\{a, b', a', b\}$  é um caminho bi-colorido;
- (f) como  $j > 0$ ,  $xa'$  e  $xb'$  pertencem a  $E(G)$ , por hipótese de indução. Também por hipótese de indução,  $ya', yb' \in E(G)$ .
- (g) as arestas  $xa$  e  $ya$ , representadas por  $E1$  e  $E2$  na Figura 33, não podem pertencer simultaneamente a  $E(G)$ . Supondo que  $E1$  e  $E2$  existem conjuntamente, os vértices  $\{x, a', y, a, u\}$  induzem um  $Flag^C$ , como ilustra  $G'_3$  na Figura 33;
- (h) assim como  $E1$  e  $E2$ , as arestas  $xb$  e  $yb$ , exemplificadas por  $E1'$  e  $E2'$  na Figura 33, não podem pertencer simultaneamente a  $E(G)$ , pois os vértices  $\{x, b', y, b, u\}$  induziriam um  $Flag^C$ , como exemplificado por  $G'_4$  na Figura 33;

Figura 32 – Ilustração da Configuração descrita no item (d) na Parte III da demonstração.



Fonte: Próprio autor

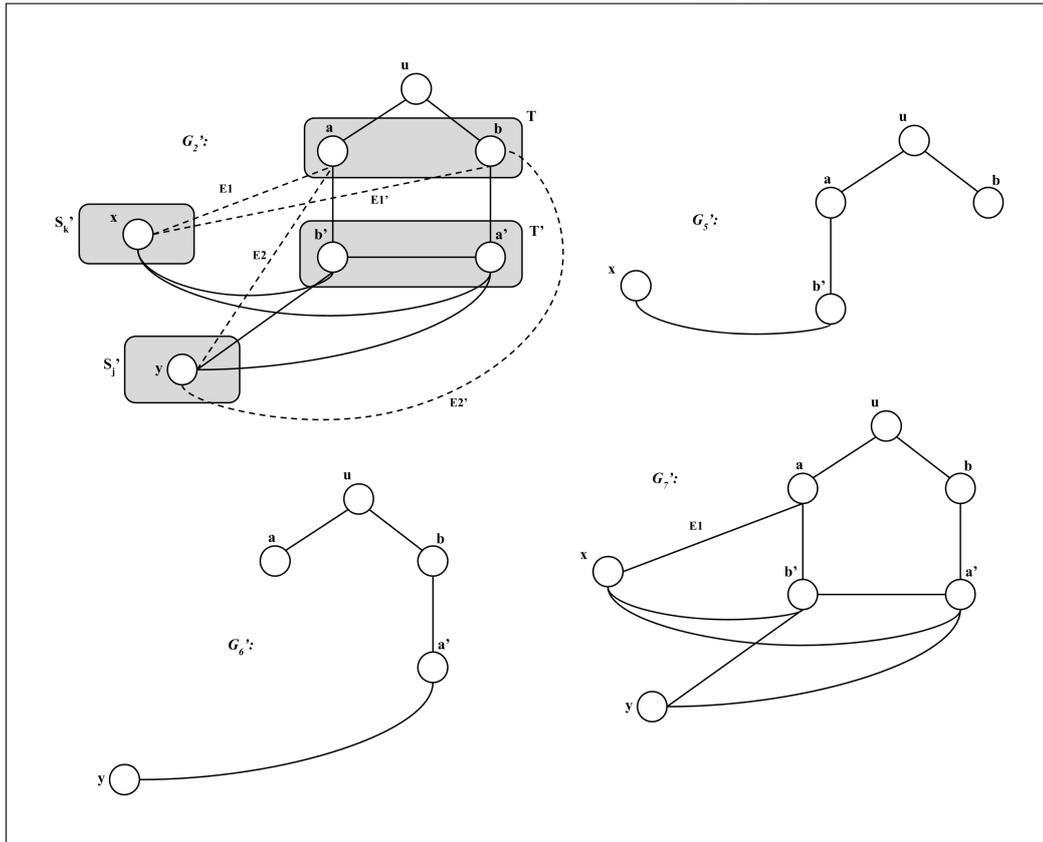
Figura 33 – Representação das configurações descritas em (g) e (h) na Parte III da demonstração.



Fonte: Próprio autor

- (i) como visto no item (g), as arestas  $E1$  e  $E2$  não podem existir simultaneamente, porém uma das duas deve necessariamente pertencer a  $E(G)$ , do contrário os vértices  $\{x, b', a, u, b\}$  induziriam um  $P_5$ , como ilustrado por  $G'_5$  na Figura 34. Da mesma forma,  $E1'$  ou  $E2'$  deve pertencer a  $E(G)$ , ou os vértices  $\{a, u, b, a', y\}$  induziriam um  $P_5$ , como exemplifica  $G'_6$ ;

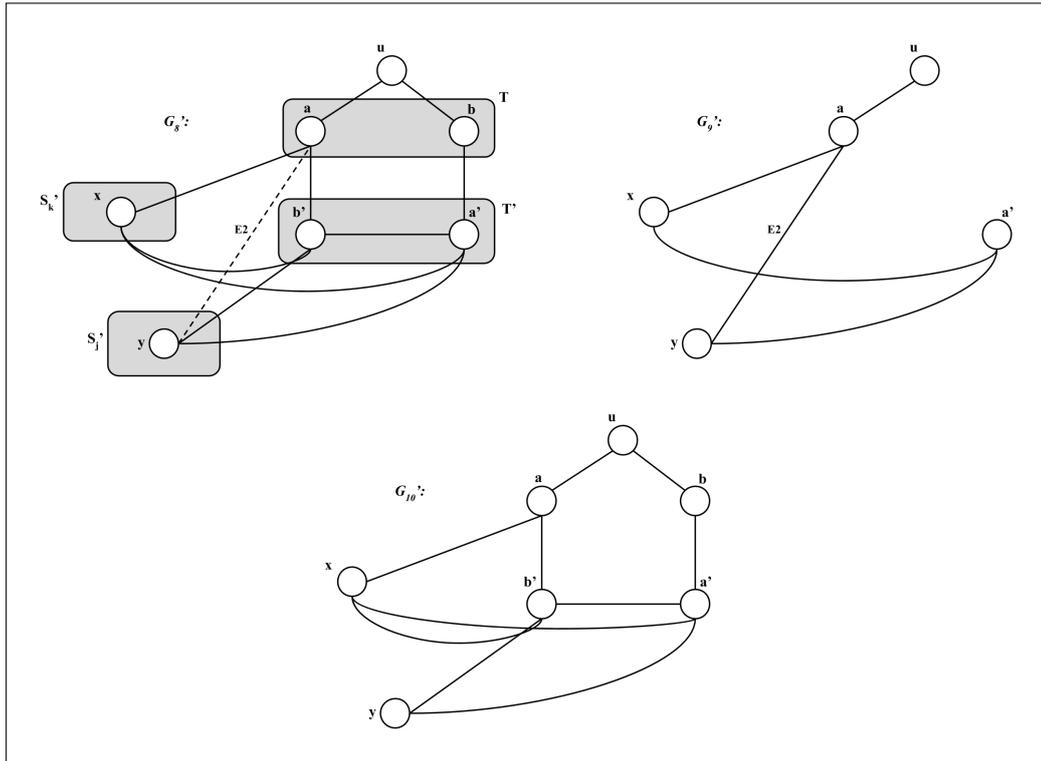
Figura 34 – Representação das configurações descritas em (i) e (j) na Parte III da demonstração.



Fonte: Próprio autor

- (j) levando em conta o item anterior, sem perda de generalidade pode-se assumir que  $E1 \in E(G)$ , como exemplifica o grafo  $G'_7$  na Figura 34. Assim:
- i. a aresta  $y2$ , representada por  $E2$ , a Figura 35, não pertence a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $E2 \in E(G)$ , os vértices  $\{x, a', y, a, u\}$  induzem um  $P_5$ , como o grafo  $G'_9$ . Portanto,  $E2 \notin E(G)$ , como ilustra o grafo  $G'_{10}$ ;
  - ii. a aresta  $yb$ , ilustrada por  $E2'$  na Figura 36, pertence a  $E(G)$ . Supondo por contradição que  $E2' \notin E(G)$ , os vértices  $\{b, u, a, b', y\}$  induzem um  $P_5$ , como o ilustrado por  $G'_{12}$ . Com isso,  $E2' \in E(G)$ , como em  $G'_{13}$ ;
  - iii. a veracidade do item anterior implica na inexistência da aresta  $xb$ , ilustrada por  $E1'$  na Figura 37. Supondo por contradição que  $E1' \in E(G)$ , os vértices

Figura 35 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta  $ya$ .

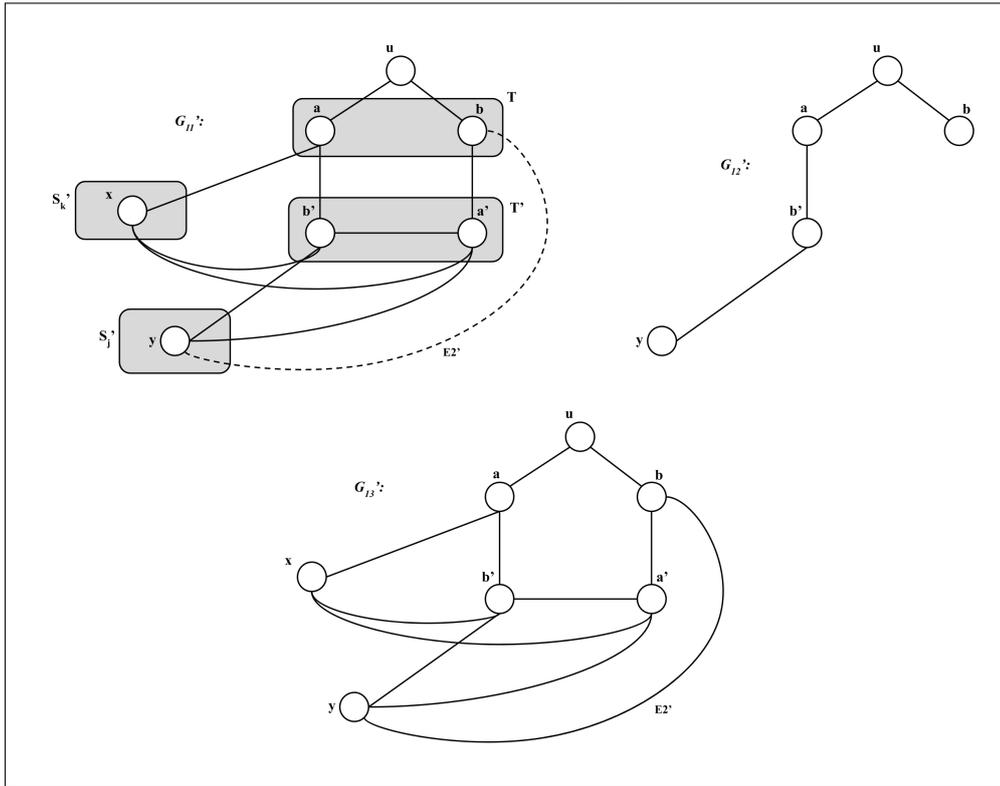


Fonte: Próprio autor

$\{x, b', y, b, u\}$  induzem um  $Flag^C$ , como ilustra o grafo  $G'_{15}$ . Com isso, conclui-se que  $E1' \notin E(G)$ . Porém, tem-se que os vértices  $\{x, a, u, b, y\}$  induzem um  $P_5$ , como ilustrado por  $G'_{16}$ , o que é uma contradição.

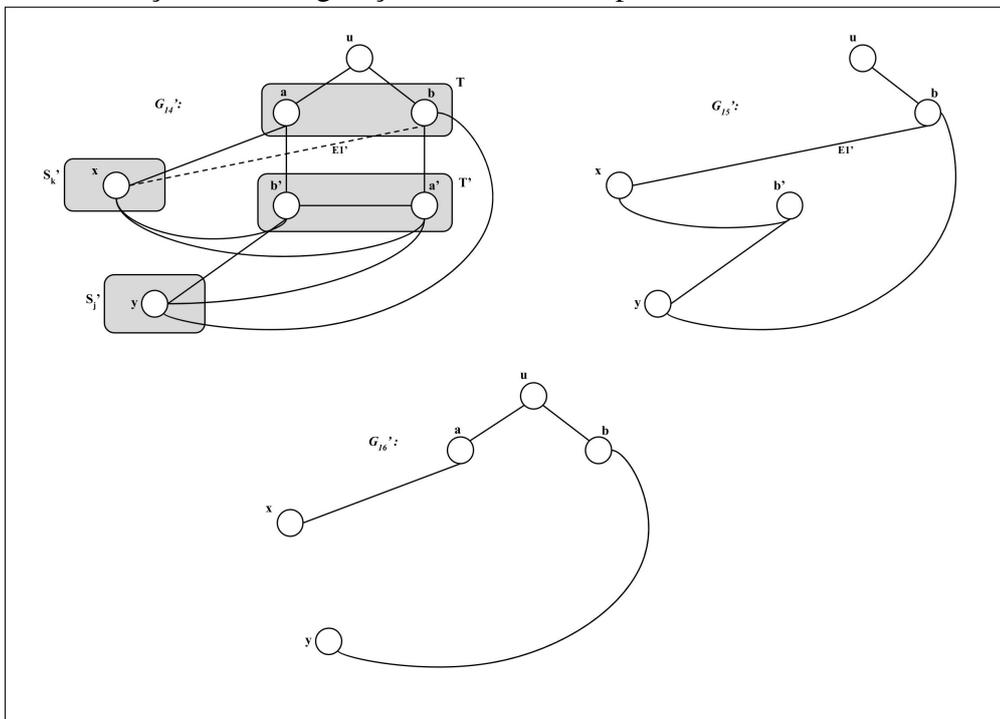
Conclui-se assim que o subgrafo induzido por  $\bigcup_{n=0}^{k-1} S'_n$  é completo completo. Como mostrado anteriormente, todo vértice pertencente a  $W$ , tal que  $W = S - \bigcup_{n=0}^{k-1} S_n$  é adjacente a todo vértice pertencente a  $\bigcup_{n=0}^{k-1} S'_n$ , assim o subgrafo induzido por  $W \cup \left\{ \bigcup_{k=0}^{k-1} S'_m \right\}$  é completo. Com isso, todas as cores unitárias do subgrafo induzido pela vizinhança do vértice  $u$  são usadas no subgrafo induzido por  $W \cup \left\{ \bigcup_{k=0}^{k-1} S'_m \right\}$ . Porém, levando em conta a **Parte I** da demonstração, conclui-se que o subgrafo induzido por  $W \cup \left\{ \bigcup_{k=0}^{k-1} S'_m \right\} \supseteq K_{\omega(G)+1}$ , o que é uma contradição. Portanto, tem-se a veracidade do Teorema.

Figura 36 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta  $yb$ .



Fonte: Próprio autor

Figura 37 – Ilustração das configurações influenciadas pela aresta  $xb$ .



Fonte: Próprio autor

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho teve como objetivo principal elucidar a demonstração estabelecida no trabalho de Dhurandhar (2017). Tal objetivo é motivado pelo fato de que boa parte das informações relevantes para a compreensão do trabalho não é destacada durante a demonstração original. Para o desenvolvimento deste trabalho, foi realizado um estudo bibliográfico a fim de levantar o máximo de informações que pudessem auxiliar na elaboração de uma abordagem mais coerente da demonstração original. Como observado no Capítulo 4, este trabalho destacou informações que no trabalho original são mais difíceis de compreender como, por exemplo, notações e pontos não definidos com clareza, como é o caso da definição de  $\alpha$ -vértice.

Durante o estudo do trabalho de Dhurandhar (2017), especificamente no ponto 2 de sua demonstração, a autora não disponibiliza informações que possibilitem a compreensão de forma clara do porquê afirmação é verdadeira. Isso impulsionou uma leitura ainda mais cuidadosa da primeira parte da demonstração original, que descreve a estrutura de um grafo vértice-crítico e, até o ponto 2, essa descrição não parece ser utilizada, mas não foi o suficiente para esclarecer esse ponto.

Admitindo a veracidade do ponto 2 e todas as melhorias realizadas na demonstração original, a compreensão do trabalho de Dhurandhar (2017) se torna mais nítida. Contudo, o presente trabalho não obteve todo o êxito esperado, uma vez que exatamente um ponto da demonstração original não foi compreendido por completo. Desta forma, propõe-se como trabalhos futuros um estudo sobre os resultados de grafos vértice-crítico relacionando com o ponto 2 da demonstração de Dhurandhar (2017), além de expandir as estruturas trabalhadas para a indagação de uma classe de grafos ainda não validada para a Conjectura de Reed.

## REFERÊNCIAS

- ABE abio H. N. **ALGUNS TERMOS**. [S.l.]: Ciência da Computação, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2018. Nota de aula.
- ARAVIND, N.; KARTHICK, T.; SUBRAMANIAN, C. Bounding  $\chi$  in terms of  $\omega$  and  $\delta$  for some classes of graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 311, n. 12, p. 911–920, 2011.
- CAMPOS, V.; SALES, C. L.; MAIA, A.; SAMPAIO, R. b-coloração de grafos com poucos  $p_4$ 's. **XLISBPO**, 2010.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2008.
- CHUDNOVSKY, M.; ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P.; THOMAS, R. The strong perfect graph theorem. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 51–229, 2006.
- DHURANDHAR, M. On validity of reed conjecture for  $\{P_5, \text{Flag } C\}$ -free graphs. **arXiv preprint arXiv:1706.07906**, 2017.
- FERREIRA, A. F.; BORGES, L. M. As pontes de königsberg. 2015.
- FOUQUET, J.-L.; VANHERPE, J.-M. Reed's conjecture on hole expansions. **arXiv preprint arXiv:1205.0731**, 2012.
- GERNERT, D.; RABERN, L. A knowledge-based system for graph theory, demonstrated by partial proofs for graph-colouring problems. **MATCH Commun. Math. Comput. Chem**, v. 58, n. 2, p. 445–460, 2007.
- JENSEN, T. R. Dense critical and vertex-critical graphs. **Discrete Mathematics**, North-Holland, v. 258, n. 1-3, p. 63–84, 2002.
- KING, A. D.; REED, B. A.; VETTA, A. An upper bound for the chromatic number of line graphs. **European Journal of Combinatorics**, Elsevier, v. 28, n. 8, p. 2182–2187, 2007.
- KOHL, A.; SCHIERMEYER, I. Some results on reed's conjecture about  $\omega$ ,  $\delta$ , and  $\chi$  with respect to  $\alpha$ . **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 310, n. 9, p. 1429–1438, 2010.
- RABERN, L. A note on reed's conjecture. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, v. 22, n. 2, p. 820–827, 2008.
- REED, B.  $\omega$ ,  $\delta$ , and  $\chi$ . **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 27, n. 4, p. 177–212, 1998.
- SERRATO, A. Reed's conjecture and cycle-power graphs. 2014.
- VULCANI, R. d. L. M. *et al.* Grafos eulerianos e aplicações. [sn], 2015.

**ANEXO A – ON VALIDITY OF REED’S CONJECTURE FOR  $\{P_5, Flag^C\}$ -FREE  
GRAPHS**

Arquivo referente ao trabalho de Dhurandhar (2017), utilizado como base neste trabalho.

# On Validity of Reed's Conjecture for $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ -free Graphs

Medha Dhurandhar

**Abstract:** Here we prove that Reed's Conjecture is valid for  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ -free graphs where  $\text{Flag}^C$  is the complement of the Flag graph. Some of the known results follow as corollaries to our result. Reed's conjecture is still open in general.

**Introduction:**

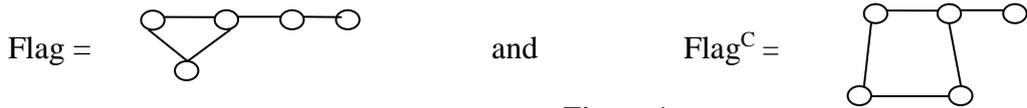
We consider here simple and undirected graphs. For terms which are not defined herein we refer to Bondy and Murty [1]. In 1998, Reed proposed the following Conjecture which gives, for any graph  $G$ , an upper bound for its chromatic number  $\chi(G)$  in terms of the clique number  $\omega(G)$  and the maximum degree  $\Delta(G)$ .

**Reed's Conjecture [2]:** For any graph  $G$ ,  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

In [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] it is shown that Reed's Conjecture holds for some graph classes defined by forbidden configurations:

- $(P_5, P_2 \cup P_3, \text{House}, \text{Dart})$ -free graphs,
- $(P_5, \text{Kite}, \text{Bull}, (K_3 \cup K_1) + K_1)$ -free graphs,
- $(P_5, C_4)$ -free graphs,
- $(\text{Chair}, \text{House}, \text{Bull}, K_1 + C_4)$ -free graphs,
- $(\text{Chair}, \text{House}, \text{Bull}, \text{Dart})$ -free graphs.
- $3K_1$ -free graphs
- $\{2K_2, C_4\}$ -free graphs
- Quasiline graphs
- $K_{1,3}$ -free
- Generalized line graphs
- Graphs with  $\chi \leq \omega + 2$
- Planar and toroidal graphs
- Decomposable graphs
- Perfect graphs
- Line graphs of Multigraphs
- Graphs with disconnected complements
- Graphs  $G$  with  $\chi(G) > \lceil \frac{V(G)}{2} \rceil$  and graphs  $G$  with  $\Delta(G) > \lceil \frac{V(G) - \alpha(G) + 3}{2} \rceil$
- Graphs  $G$  with  $\Delta(G) \geq |V(G)| - 7$ , and graphs  $G$  with  $\Delta(G) \geq |V(G)| - \alpha(G) - 4$

**Notation:** For a graph  $G$ ,  $V(G)$ ,  $E(G)$ ,  $\Delta(G)$ ,  $\omega(G)$ ,  $\chi(G)$  denote the vertex set, edge set, maximum degree, size of a maximum clique, chromatic number respectively. For  $u \in V(G)$ ,  $N(u) = \{v \in V(G) / uv \in E(G)\}$ , and  $\overline{N(u)} = N(u) \cup \{u\}$ . If  $S \subseteq V(G)$ , then  $\langle S \rangle$  denotes the subgraph of  $G$  induced by  $S$ . Also for  $u \in V(G)$ ,  $\deg u$  denotes the degree of  $u$  in  $G$ . If  $C$  is some coloring of  $G$  and if a vertex  $u$  of  $G$  is colored  $m$  in  $C$ , then  $u$  is called a  $m$ -vertex. All graphs considered henceforth are simple.



**Figure 1**

This paper proves that Reed's Conjecture holds for  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ -free graphs.

**Note:** As  $G$  is  $P_5$ -free, the only odd, chordless cycles in  $G$  are  $C_5$ .

**Theorem:** If  $G$  is a  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ -free, then  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

Proof: Let  $G$  be a smallest  $\{P_5, \text{Flag}^C\}$ -free graph with  $\chi(G) > \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ . Let  $u \in V(G)$ . Then by minimality,  $\chi(G) - 1 \leq \chi(G-u) \leq \lceil \frac{\Delta(G-u) + \omega(G-u) + 1}{2} \rceil \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil < \chi(G)$ . Thus  $\chi(G-u) = \chi(G) - 1 = \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil \forall u \in V(G)$ . Let  $C$  be a  $\chi(G)$ -coloring of  $G$  and  $R = \{x \in N(u) \mid x \text{ receives a unique color from } C \text{ in } \langle N(u) \rangle\}$ . Then  $\Delta \geq \deg u \geq |R| + 2(\lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil - |R|)$  and  $|R| \geq \omega(G) + 1$ . **I**

Further let  $R = S \cup T$  where  $S = \{x \in R \mid xy \in E(G) \forall y \in R-x\}$  and  $T = R - S$ . Also let  $T' = \{x' \in V(G) - \overline{N(u)} \mid \exists x, y \in T \text{ with } xy \notin E(G), x'x \in E(G) \text{ and } x', y \text{ have the same color}\}$ . Further let  $S_1 = \{w \in S - T \mid \exists y \in T' \text{ with } wy \notin E(G)\}$  and  $S_1' = \{x \in V(G) - \overline{N(u)} \mid \text{for some } \alpha\text{-vertex } y \in S_1 \text{ and } z \in T' \text{ s.t. } yz \notin E(G), x \text{ is an } \alpha\text{-vertex of } z\}$ .

We have

1.  $|T| \geq 2$  (else  $|T| = 0$  and by **I**,  $\langle R \rangle \supseteq K_{\omega(G)+1}$ ) and  $|S_1| > 0 \Rightarrow |S_1'| > 0$ .

2. **If  $t, t' \in T$  s.t.  $tt' \notin E(G)$  and  $t, t'$  have colors  $j, i$  resp, then  $t (t')$  has a unique  $i$ -vertex ( $j$ -vertex).**

Since  $t (t')$  is a unique  $j (i)$ -vertex of  $u$ ,  $\exists$  a  $j$ - $i$  path say  $P = \{t, V, W, t'\}$ . Let if possible  $t$  have another  $i$ -vertex  $V'$ . Then if  $V'W \notin E(G)$ ,  $\langle W, t' u, t, V' \rangle = P_5$ , and if  $V'W \in E(G)$ ,  $\langle V, W V', t, u \rangle = \text{Flag}^C$ , a contradiction in both the cases.

3. **If  $t, t', t'' \in T$  s.t.  $tt', tt'' \notin E(G)$ , and  $t$  has color  $i$ , then  $t', t''$  have a common, unique  $i$ -vertex.**

Let  $t', t''$  have colors  $j, k$  resp. By **2**, each of  $t', t''$  has a unique  $i$ -vertex say  $A, B$  resp. Let if possible  $A \neq B$  and  $P = \{t, V, A, t'\}$ ,  $M = \{t, W, B, t''\}$  be the  $i$ - $j$ ,  $i$ - $k$  paths. Then  $t't'' \in E(G)$  (else  $\langle A, t', u, t'', B \rangle = P_5$ ). But then if  $t'W \in E(G)$ ,  $\langle t', t'', B, W, t \rangle = \text{Flag}^C$  and if  $t'W \notin E(G)$   $\langle t, W, B, t'', t' \rangle = P_5$ , a contradiction in both the cases.

4.  **$\langle S_1' \cup T' \rangle$  is complete.**

**First we prove that  $\langle T' \rangle$  is complete.** Let if possible  $\exists a', b' \in T'$  s.t.  $a'b' \notin E(G)$ . Then by definition of  $T' \exists A, B, C, D \in T$  s.t.  $A, a'; B, b'$  have same colors and  $AC, BD \notin E(G)$ . Clearly  $AB \in E(G)$  (else by **3**,  $Ba', Ab' \in E(G)$  and  $\langle b', A, u, B, a' \rangle = P_5$ ). Also  $AD \in E(G)$  (else  $a'd', a'D \in E(G)$  and  $\langle a', d', b', D, u \rangle = \text{Flag}^C$ ). Similarly  $BC \in E(G)$ . Now  $a'B \in E(G)$  (else  $a'D \in E(G)$  as otherwise  $\langle D, A, B, C, a' \rangle = \text{Flag}^C$  or  $P_5$  depending on whether  $CD \in E(G)$  or  $\notin E(G)$ ). Also  $\langle a', d', b', D, u \rangle = \text{Flag}^C$  if  $a'd' \in E(G)$  and  $\langle B, d', b', D, a' \rangle = P_5$  if  $a'd' \notin E(G) \Rightarrow a'D \notin E(G)$  (else  $\langle u, B, a', D, b' \rangle = \text{Flag}^C$ ). But then  $\langle a', B, u, D, b' \rangle = P_5$ , a contradiction.

**Next we prove that  $st' \in E(G) \forall s \in S_1', t' \in T'$ .** Let if possible  $\exists s' \in S_1'$  and  $a' \in T'$  s.t.  $s'a' \notin E(G)$ . By **I**,  $\exists A, B \in T$  s.t.  $AB \notin E(G)$  and  $\{A, b', a', B\}$  is a bi-color path. Also  $s'b' \notin E(G)$  (else  $\langle s', b', a', B, u \rangle = \text{Flag}^C$  or  $P_5$  according as whether  $s'B \in E(G)$  or  $\notin E(G)$ ). Now by definition let  $s \in S$  be an  $\alpha$ -vertex and  $c' \in T'$  be s.t.  $sc' \notin E(G)$  and  $s'$  is the  $\alpha$ -vertex of  $c'$ . As  $\langle T' \rangle$  is complete,  $ca', cb' \in E(G)$ . Also both  $s'B$  and  $s'A \notin E(G)$  (else if  $s'A, s'B \in E(G)$  then  $\langle s', A, u, B, a' \rangle = \text{Flag}^C$  and if only  $s'A \in E(G)$ , then  $\langle a', B, u, A, s' \rangle = P_5$ ). Now  $sa' \notin E(G)$  (else  $\langle u, s, a', c', s' \rangle = P_5$ ). Similarly  $sb' \notin E(G) \Rightarrow c'B \in E(G)$  (else  $\langle s, B, a', c', s' \rangle = P_5$ ) and similarly  $c'A \in E(G)$ . But then  $\langle B, u, A, c', s' \rangle = \text{Flag}^C$ , a contradiction.

**Finally we prove that  $\langle S_1' \rangle$  is complete.** Let if possible  $\exists s_{11}', s_{12}' \in S_1'$  s.t.  $s_{11}'s_{12}' \notin E(G)$ . Now by **1**,  $\exists A, B \in T; a', b' \in T'$  s.t.  $AB \notin E(G)$  and  $\{A, b', a', B\}$  is a bi-color path. As  $st' \in E(G) \forall s \in S_1', t' \in T'$ ,  $s_{11}'a', s_{12}'a', s_{11}'b', s_{12}'b' \in E(G)$ . Further either  $s_{11}'B \notin E(G)$  or  $s_{12}'B \notin E(G)$  (else  $\langle s_{11}', b', s_{12}', B, u \rangle = \text{Flag}^C$ ). W.l.g. let  $s_{11}'B \notin E(G)$ . Then  $s_{11}'A \in E(G)$  (else  $\langle B, u, A, b', s_{11}' \rangle = P_5$ )  $\Rightarrow s_{12}'A \notin E(G)$  (else  $\langle s_{11}', a', s_{12}', A, u \rangle = \text{Flag}^C$ ) and  $s_{12}'B \in E(G)$  (else  $\langle B, u, A, a', s_{12}' \rangle = P_5$ ). But then  $\langle s_{11}', A, u, B, s_{12}' \rangle = P_5$ , a contradiction.

Let  $T = S_0$  and  $T' = S_0'$ . Further define  $S_1 = \{x \in S - \bigcup_{m=0}^{l-1} S_m / \exists y \in S_{l-1}' \text{ with } xy \notin E(G)\}$  and  $S_1' = \{z \in V(G) - \overline{N(u)} / \text{for some } \alpha\text{-vertex } x \in S_1 \text{ and } y \in S_{l-1}' \text{ s.t. } xy \notin E(G), z \text{ is an } \alpha\text{-vertex of } y, 1 \leq l\}$ . By construction every color used in  $S_1$  is used in  $S_1'$ ,  $l \geq 0$ . Let  $S_0', \dots, S_k'$  be a maximal such sequence. Then clearly every  $x \in W = S - \bigcup_{l=0}^{k-1} S_l$  is adjacent to every vertex of  $\bigcup_{l=0}^k S_l'$ . **II**

**Claim:**  $\langle W \cup \{\bigcup_{l=0}^k S_l'\} \rangle$  is complete.

We prove the **Claim** by induction. By **4**, the result is true for  $i = 0, 1$ . Assume that  $\langle \bigcup_{l=0}^{k-1} S_l' \rangle$  is complete. Let if possible  $\exists x \in S_k', y \in S_j'$  s.t.  $xy \notin E(G)$ . Let  $j$  be the smallest such index. By construction  $\exists \beta$ -vertex  $z \in S_k$  and  $w \in S_{k-1}'$  s.t.  $zw \notin E(G)$ ,  $x$  is the  $\beta$ -vertex of  $w$ . Now  $j > 0$  (else by induction  $wy \in E(G)$ , by construction  $zy \in E(G)$  and  $\langle u, z, y, w, x \rangle = P_5$ ). Let  $a' \in S_0'$ . Then by definition  $\exists A, B \in T$  and  $b' \in S_0'$  s.t.  $\{A, b', a', B\}$  is a bi-color path. As  $j > 0$ ,  $xa', xb' \in E(G)$ . Also by induction  $ya', yb' \in E(G)$ . Now both of  $xA, yA$  ( $xB, yB$ )  $\notin E(G)$  (else  $\langle x, a', y, A, u \rangle = \text{Flag}^C$ ). But  $xA$  or  $xB$  ( $yA$  or  $yB$ )  $\in E(G)$  (else  $\langle B, u, A, b', x \rangle = P_5$ ). W.l.g. let  $xA \in E(G) \Rightarrow yA \notin E(G)$  (else  $\langle x, a', y, A, u \rangle = \text{Flag}^C$ ). Then  $yB \in E(G)$  (else  $\langle B, u, A, b', y \rangle = P_5$ )  $\Rightarrow xB \notin E(G)$  (else  $\langle x, b', y, B, u \rangle = \text{Flag}^C$ ). But then  $\langle x, A, u, B, y \rangle = P_5$ , a contradiction. Thus  $\langle \bigcup_{l=0}^k S_l' \rangle$  is complete.

Hence by **II**, the **Claim** holds.

But then as every unique color used in  $\langle N(u) \rangle$  is used in  $\langle W \cup \{\bigcup_{l=0}^k S_l'\} \rangle$ , by **I**,  $\langle W \cup \{\bigcup_{l=0}^k S_l'\} \rangle \supseteq K_{\omega(G)+1}$ , a contradiction.

This proves the Theorem.

**Corollary 1:** If  $G$  is  $\{P_5, C_4\}$ -free, then  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

**Corollary 2:** If  $G$  is  $3K_1$ -free, then  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

**Corollary 3:** If  $G$  is  $\{P_3 \cup K_1\}$ -free, then  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

**Corollary 4:** If  $G$  is  $\{2K_2, C_4\}$ -free, then  $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta + \omega + 1}{2} \rceil$ .

## References

- [1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory, volume 244 of Graduate Text in Mathematics, Springer, 2008.
- [2] B. Reed, " $\omega, \Delta$ , and  $\chi$ ", Journal of Graph Theory, 27:177–212, 1998.
- [3] N.R. Aravind, T. Karthick, and C.R. Subramanian, "Bounding  $\chi$  in terms of  $\Delta$  and  $\omega$  for some classes of graphs", Discrete Mathematics, 311:911–920, 2011.
- [4] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour, and R. Thomas, "The Strong Perfect Graph Theorem", Annals of Math., 164:51–229, 2006.
- [5] J.L. Fouquet, V. Giakoumakis, F. Maire, and H. Thuillier, "On graphs without  $P_5$  and  $P_5'$ ", Discrete Mathematics, 146:33–44, 1995.
- [6] J.L. Fouquet and J.M. Vanherpe, "Reed's conjecture on hole expansions", Technical report, L.I.F.O., 2011.

- [7] L. Rabern, “A note on Reed’s conjecture”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22:820–827, 2008.
- [8] D. Seinsche, “On a property of the class of  $n$ -colorable graphs”, *Jour. of Comb. Theory, Series B* (16):191–193, 1974.
- [9] Ingo Schiermeyer, “Chromatic number of  $P_5$ -free graphs: Reed’s conjecture”, *Discrete Mathematics*, 2015.
- [10] L. Esperet, L. Lemoine, F. Maffray, G. Morel, “The chromatic number of  $\{P_5, K_4\}$ -free graphs”, *Discrete Math.* 313:743–754, 2013.
- [11] A. Kohl, I. Schiermeyer, “Some results on Reed’s conjecture about  $\omega, \Delta$  and  $\chi$  with respect to  $\alpha$ ”, *Discrete Math.* 310:1429–1438, 2010.
- [12] L. Rabern, “A note on Reed’s conjecture”, *SIAM J. Discrete Math.* 22 (2): 820–827, 2008.
- [13] A.D. King, B. Reed, A. Vetta, “An upper bound for the chromatic number of line graphs”, *European J. Comb.* 28: 2182–2187, 2007.
- [14] A. Kohl, I. Schiermeyer, “Some results on Reed’s conjecture about  $\omega, \Delta$  and  $\chi$  with respect to  $\alpha$ ”, *Discrete Math.* 310, 1429–1438, 2010.