



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDDYGLEDSON SOUZA GAMA

SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE PLATEAU MERGULHADAS

FORTALEZA

2015

EDDYGLEDSON SOUZA GAMA

SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE PLATEAU Mergulhadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Luquesio Petrola de Melo Jorge

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G176s Gama, Eddygledson Souza.

Soluções do problema de Plateau mergulhadas / Eddygledson Souza Gama. – 2015.  
58 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.

Orientação: Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge.

1. Variedades convexas. 2. Problema de Plateau. 3. Lema de Dehn. I. Título.

CDD 510

---

EDDYGLEDSON SOUZA GAMA

SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE PLATEAU MERGULHADAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial..

Aprovada em: 07/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Luquesio Petrola de Melo Jorge (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luciano Mari  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa  
Universidade Federal do Piauí(UFPI)

---

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa (Suplente)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais Simone  
Conceição Souza e José Maria Sousa Gama  
e à todos os meus familiares.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares por me apoiarem nessa aventura. Especialmente ao meu pai Jorge Maria e à minha mãe Simone Conceição por todo o suporte e força.

Ao Prof. Dr. Luquesio Petrola de Melo Jorge, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Luciano Mari e Leandro de Freitas Pessoa pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores Esdras Soares, Lev Birbrair e Darlan Ribeiro pelas valiosas sugestões.

À todos os meus amigos que me ajudaram e me aconselharam durante esta jornada, especialmente ao Davi Ribeiro e Diego Sousa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento”.

(Albert Einstein)

## RESUMO

Essa dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo faz-se uma breve introdução das ferramentas necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Por sua vez, no segundo capítulo define-se de forma precisa o problema de Plateau para variedades convexas, e prova-se a existência de soluções nesse ambiente. A terceira, e última parte dessa trabalho é dedicada a prova um resultado que garante que sobre determinadas condições a solução do problema de Plateau é um mergulho. Em particular, como aplicação desse resultado, obtém-se um versão do Lema de Dehn para variedades analíticas e convexas.

**Palavras-chave:** Variedades convexas. Problema de Plateau. Lema de Dehn.



## ABSTRACT

This dissertation is divided into three chapters. In the first chapter is done a brief introduction of the main tools necessary for the development of this work. On the other hand, in the second chapter, the problem of Plateau for convex manifolds is defined, and it shows the existence of solutions of such problem in this ambient. The third and last part of this work is dedicated to proving a result that guarantees that over certain conditions the solution of the Plateau problem is an embedded. In particular, as an application of this result, it obtains a version of Dehn's lemma for analytic and convex manifolds.

**Keywords:** Convex manifolds. Plateau's problem. Dehn's lemma.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico de uma aplicação com uma curva folding . . . . .	45
Figura 2 – Local comportamento de $f_i(\mathbb{D})$ . . . . .	47
Figura 3 – Representação de $f_k(\mathbb{D})$ . . . . .	51

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\nabla$	Conexão
$\Delta$	Operador de Laplace
$\text{Id}_M$	Aplicação identidade de $M$
$\mathfrak{X}(M)$	Espaço de todos os campos de vetores suave em $M$
$\Gamma(E)$	Espaço de todas as seções suave de $E$
$C^\infty(M)$	Espaço de todas as funções suave em $M$
$C^{k,\alpha}(M, N)$	Espaço de todas as aplicações de classe $C^{k,\alpha}$
$\text{Hom}(E, F)$	Espaço de todos os homomorfismo entre os fibrados vetoriais $E$ e $F$
$B(f)$	Segunda forma fundamental de $f$
$\tau(f)$	Campo tensão de $f$
$\pi_1(M)$	Primeiro grupo fundamental de $M$
$H_k(M, \partial M)$	Grupo homologia singular de dimensão $k$ do par $(M, \partial M)$
$H^k(M)$	Grupo cohomologia de dimensão $k$ de $M$

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	DEFINIÇÕES BÁSICAS . . . . .	15
2.1	Geometria . . . . .	15
2.1.1	<i>Geometria riemanniana</i> . . . . .	15
2.1.2	<i>Princípio do máximo</i> . . . . .	22
2.1.3	<i>Convexidade</i> . . . . .	24
2.2	Topologia . . . . .	24
2.2.1	<i>Espaço de recobrimento</i> . . . . .	25
2.2.2	<i>Complexo simplicial</i> . . . . .	25
2.2.3	<i>Homologia e cohomologia</i> . . . . .	28
2.2.3.1	<i>Cohomologia de de Rham</i> . . . . .	28
2.2.3.2	<i>Homologia singular</i> . . . . .	28
2.2.4	<i>Torre topológica</i> . . . . .	30
3	PROBLEMA DE PLATEAU . . . . .	34
3.1	Existência de solução . . . . .	34
3.2	Propriedades . . . . .	41
3.3	Curvas folding . . . . .	45
4	TEOREMA DE MERGULHO DE MEEKS E YAU . . . . .	48
4.1	Teorema de Meeks e Yau . . . . .	48
4.2	Lema de Dehn . . . . .	52
5	CONCLUSÃO . . . . .	54
	REFERÊNCIAS . . . . .	55

## 1 INTRODUÇÃO

Com o advento do cálculo diferencial desenvolvido por Sir. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século 17, novas perspectivas surgiam tanto da matemática como na física, principalmente pela vasta aplicabilidade do cálculo diferencial na descrição de fenômenos naturais. Em trabalhos preliminares, já no expansão do cálculo diferencial no século 18, Leonard Euler, and posteriormente, Joseph-Louis Lagrange deram início a uma larga e intensa linha investigação na matemática, cálculo variacional. Matematicamente, a questão os instigava era a seguinte: Dado uma curva no  $\mathbb{R}^3$ , será que existe uma gráfico com bordo essa curva que minimiza a energia?

Embora Euler e Lagrange tenham feitos fenomenais contribuições em todas as áreas conhecidas da matemática, e terem dado a formulação matemática do problema acima, ainda não era possível saber naquele momento se a questão anterior poderia ser resolvida para qualquer dado de contorno fixado. No obstante, o matemático-físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau, em seus trabalhos com película de sabão, notou que dado qualquer contorno feito com arame, sempre existirá uma película com bordo esse arame de tal modo que para qualquer pequena perturbação na superfície, mantendo o arame sempre fixado, a superfície perturbada sempre retornará para a superfície inicial. Em outras palavras, ele observou que aquela configuração inicial feita pela película de sabão minimizava a energia para que sua existência esteja em equilíbrio no ambiente. Em resumo, os experimentos de Plateau mostrou que pelo menos na natureza o problema variacional abordado por Euler e Lagrange tinha solução. Posteriormente esse problema ficou conhecido como o problema de Plateau.

No início do século passado, RADÓ (1930) para o  $\mathbb{R}^3$  e DOUGLAS (1931) para o  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) deram uma resposta afirmativa ao problema de Plateau. Mais precisamente, eles demonstraram o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** (Douglas-Radó). *Seja  $\Gamma$  uma curva de Jordan em  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) tal que  $d_{\mathbb{R}^n} < \infty^1$ , então existe uma aplicação contínua  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

1.  $f|_{\mathbb{S}^1}$  é uma parametrização monótona sobrejetiva de  $\Gamma$ ;
2.  $f|_{\text{int}\mathbb{D}}$  é harmônica e conforme;
3.  $\text{Area}[f] = d_{\mathbb{R}^n}$  e  $E[f] = e_{\mathbb{R}^n}^2$ .

Além disso, admitindo que a curva fronteira (o contorno dado) possa ser projetada injetivamente sobre uma curva convexa no plano  $\mathbb{R}^2$ , Radó (1933) demonstrou que com essa condição adicional existe uma única solução por problema de Plateau com esse bordo. Além disso, a solução é um gráfico.

A primeira generalização dos trabalhos de DOUGLAS e RADÓ para outros ambientes foi dada por MORREY (1948). Em seu profundo trabalho (MORREY, 1948),

---

<sup>1</sup>Veja seção 3 para a definição dessa constante

<sup>2</sup>Veja seção 3 para a definição dessa constante

ele estendeu os resultados obtidos por RADÓ (1930) e DOUGLAS (1931) demonstrando a existência do problema de Plateau para variedades homogêneas regulares. Além dessa formidável extensão, ele ainda foi capaz de demonstrar a regularidade para as soluções do problema de Plateau<sup>3</sup>.

Essencialmente, as ideias desenvolvidas por RADÓ (1930) e DOUGLAS (1931) deram início a uma larga e intensa linha de pesquisa na geometria diferencial no século passado. Por exemplo, questões simples de saber se as soluções do problema de Plateau eram imersão, mergulhadas e regulares no interior e até o bordo permaneceram em abertos por um longo período. Nesse momento, devemos pontual que seria impossível falamos aqui todos os resultados obtidos nesse cenário. No entanto, vamos nos deter apenas a citar as referências que foram utilizadas ao longo do texto. No obstante, recomendamos a leitura dessas referências para mais informações a respeito dos resultados obtidos e outras questões consonante ao problema de Plateau.

Com respeito a regularidade até o bordo, se a curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  for analítica, então qualquer solução do problema de Plateau é uma superfície mínima até o bordo. Esse resultado foi provado por LEWY (1951). De fato, como foi provado posteriormente por HILDEBRANT (1969), e por HEINZ and HILDEBRANT (1970), o resultado anterior pode ser estendido consideravelmente para qualquer variedade riemanniana de dimensão 3. Na seção 3, vamos enunciar de forma precisar esses resultados. No tocante a questão de pontos de ramificação (pontos onde a aplicação deixa de ser imersão), OSSERMAN (1970) provou que em  $\mathbb{R}^3$  as soluções do problema de Plateau não têm falsos pontos de ramificação. Esse resultado foi generalizado em um elegante trabalho devido ao GULLIVER II (1973). Ele demonstrou a não existência de pontos de ramificação para uma larga classe de problemas variacionais, a qual engloba o problema de Plateau. Além disso, GULLIVER II, OSSERMAN, and ROYDEN (1973) desenvolveram a teoria dos pontos de ramificação.

Uma vez feita essa breve introdução ao problema de Plateau e questões relacionadas, nesse trabalho estudaremos uma extensão desse problema para variedades convexas. Aqui abordaremos duas situações completamente diferentes. Primeiro abordamos o problema de existência de solução do problema de Plateau para esse novo ambiente. Logo após, vamos estudar critérios para decide quando uma solução do problema de Plateau é um mergulho. Os resultados aqui apresentados são devidos ao MEEKS III and YAU (1982).

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2, fazemos uma breve revisão das ferramentas geométricas, analíticas e topológicas necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Por sua vez, na seção 3, enunciamos de forma mais precisa o problema de Plateau, e falaremos dos principais resultados de regularidade e não existência de pontos de ramificação que utilizaremos posteriormente no trabalho. Em seguida, definire-

---

<sup>3</sup>Na seção 3 explicaremos melhor essa passagem

mos o conceito de variedade convexa, e provaremos a existência de solução do problema de Plateau para esse ambiente. Na segunda parte dessa seção, obteremos algumas propriedades que toda solução do problema de Plateau precisa satisfazer. Finalizaremos essa seção demonstrando que determinadas classes de aplicações não podem ser minimizantes de área. Finalmente na seção 4, provamos que sobre particulares condições toda solução do problema de Plateau é um mergulho. Como aplicação desse resultado, provaremos que quando a curva  $\Gamma$  está na fronteira de um domínio analítico e convexo, e se a curva for homotópica a um caminho constante, então a solução do problema de Plateau é um mergulho. Esse resultado pode ser interpretado como uma versão do Lema de Dehn para esse ambiente.

## 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nessa primeira parte do trabalho vamos fazer uma breve apresentação de todos os conceitos básicos, tanto da Geometria, quanto da Topologia necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Aqui nos focaremos em apresentar os teoremas, quase sempre sem demonstrá-los, porém daremos sempre a devida referência para que o leitor possa encontrar suas respectivas demonstrações, e extensões de tudo o que será feito aqui. Isso é feito para tornar o trabalho menos denso, de modo que sua leitura se torne agradável e transparente.

### 2.1 Geometria

Iniciaremos do nosso trabalho fazendo uma breve revisão dos conceitos geométricos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

#### 2.1.1 Geometria riemanniana

Sejam  $(M^m, g)$  uma variedade riemanniana de dimensão  $m$  com uma métrica riemanniana  $g$  e  $p : E^{m+k} \rightarrow M$  uma aplicação suave e sobrejetiva, onde  $E^{n+k}$  é uma variedade suave de dimensão  $n+k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $E$  é um fibrado vetorial real de dimensão  $k$  sobre  $M$  se  $p : E \rightarrow M$  goza das seguintes propriedades:

- a. Para todo  $q \in M$ , o conjunto  $E_q := \pi^{-1}(q)$  possui uma estrutura de espaço vetorial real de dimensão  $k$ ;
- b. Para cada  $q \in M$  existem uma vizinhança aberta  $U \subset M$  de  $q$  e um difeomorfismo  $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tais que:
  - i. Para cada  $q \in U$ , a restrição  $\Psi : E_q = \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$  é um isomorfismo linear,
  - ii. Se  $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$  denota a projeção sobre o primeiro fator, então  $\pi = \pi_U \circ \Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ .

**Observação 2.1.** *Por simplicidade, de agora em diante quando falamos em fibrados vetoriais, vamos deixar subentendido a dimensão do fibrado, salvo possivelmente em particulares casos.*

**Observação 2.2.** *A aplicação  $\Psi$  acima é chamada de trivialização local.*

Antes de prosseguirmos com nosso trabalho, precisaremos fazer algumas construções de particulares fibrados vetoriais. Para tanto, necessitaremos do seguinte resultado que nos dá uma forma construtiva de construir fibrados vetoriais sobre variedades riemannianas. Sua demonstração segue essencialmente os mesmos passos da construção de uma estrutura suave em uma variedade topológica, veja por exemplo LEE (2002) para mais detalhes.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $M^m$  uma variedade suave,  $k \in \mathbb{N}$  e, para cada  $q \in M$ , seja  $E_q$  um*



espaço vetorial real de dimensão  $k$ . Denote por  $E := \coprod_{q \in M} E_q$  a soma topológica dos  $E_q$  e  $p : E \rightarrow M$  a aplicação  $p(E_q) = q$ . Admita que sejam dadas:

- a. Uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$  de  $M$ ;
- a. Para cada  $\alpha$ , uma bijeção  $\Psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  tal que para cada  $q \in U_\alpha$  a aplicação  $\Psi_q : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$  é um isomorfismo linear;
- a. Para cada  $\alpha, \beta \in \Theta$  tais que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , uma aplicação suave  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$  tal que a composição  $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$  tem a forma

$$\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}(q, v) = (q, g_{\alpha\beta}(v)).$$

Nessas condições, existe uma única estrutura de variedade suave de dimensão  $m + k$  em  $E$  tal que  $p : E \rightarrow M$  é um fibrado vetorial suave de dimensão  $k$ .

**Observação 2.3.** Acima, o conjunto  $\text{GL}(k, \mathbb{R})$  denota o grupo linear real de dimensão  $k$ .

Em seguida, vamos fazer duas aplicações desse teorema em dois sutis exemplos que serão necessários posteriormente nesse trabalho. Aqui seguiremos as elegantes exposições dadas por MUNIZ NETO (2014) e XIN (1996) para essas construções.

**Exemplo 2.1.** Sejam  $p_E : E^{n+k} \rightarrow M$  and  $p_F : F^{n+l} \rightarrow M$  fibrados vetoriais sobre  $M$ . Para cada  $q \in M$  denote por  $\text{Hom}(E_q, F_q)$  o espaço vetorial das transformações lineares de  $E_q$  em  $F_q$ . Chame  $\text{Hom}(E, F) = \coprod_{q \in M} \text{Hom}(E_q, F_q)$ . Considere uma cobertura por abertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$  de  $M$  tal que para cada  $\alpha$  existam

$$\begin{array}{ccc} \Psi_\alpha : p_E^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) & \longmapsto & (q, \psi_\alpha(q)v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \Phi_\alpha : p_F^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{R}^l \\ (q, v) & \longmapsto & (q, \phi_\alpha(q)v) \end{array}.$$

Chame  $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta}$  e  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} = h_{\alpha\beta}$  sempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Se  $\{e_1, \dots, e_k\}$  e  $\{e_1, \dots, e_l\}$  são as bases canônicas de  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^l$ , respectivamente, definimos

$$\begin{array}{ccc} \chi_\alpha : \coprod_{q \in U_\alpha} \text{Hom}(E_q, F_q) & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathcal{M}(l \times k, \mathbb{R}) \\ T \in \text{Hom}(E_q, F_q) & \longmapsto & (q, T_\alpha^\chi(q)) \end{array},$$

onde  $T_\alpha^\chi(q)$  denota a matriz de  $T : E_q \rightarrow F_q$  com respeito as bases  $\{\psi_\alpha^{-1}e_1, \dots, \psi_\alpha^{-1}e_k\}$  e  $\{\phi_\alpha^{-1}e_1, \dots, \phi_\alpha^{-1}e_l\}$ . Uma simples checagem nos mostra que quando  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  e se  $B \in \mathcal{M}(l \times k, \mathbb{R})$ , então

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(q, B) = (q, h_{\alpha\beta}(q)B g_{\alpha\beta}(q)).$$

Em particular, pelo Teorema 2.1 existe uma estrutura de variedade suave em  $\text{Hom}(E, F)$  de modo que

$$\begin{array}{ccc} p : \text{Hom}(E, F) = \coprod_{q \in M} \text{Hom}(E_q, F_q) & \longrightarrow & M \\ T \in \text{Hom}(E_q, F_q) & \longmapsto & q \end{array}$$

é um fibrado vetorial de dimensão  $kl$ .

**Observação 2.4.** Aqui  $\mathcal{M}(l \times k, \mathbb{R})$  denota o espaço vetorial das matrizes reais com  $k$  linha e  $l$  colunas.

Outro exemplo que nos será muito útil é dado pelo fibrado induzido por uma aplicação.

**Exemplo 2.2.** Sejam  $p_E : E^{n+k} \rightarrow N^n$  um fibrado vetorial sobre  $N^n$  and  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação suave. Para cada  $q \in M$  denote por  $F_q := \{(q, v) : v \in E_{f(q)}\}$ , e chame  $F = \coprod_{q \in M} F_q$  como nosso candidato a fibrado vetorial com aplicação definida por

$$p_F : F = \coprod_{q \in M} F_q \longrightarrow M \\ (q, v) \in F_q \longmapsto q .$$

Fixe uma cobertura por abertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Theta}$  de  $N$  tal que para cada  $\alpha$  existam

$$\Psi_\alpha : p_E^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) \longmapsto (q, \psi_\alpha(q)v) .$$

Chamando  $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ , obtemos que  $\{V_\alpha\}$  é uma cobertura aberta de  $M$ . Além disso, claramente temos que  $p_F^{-1}(V_\alpha) = \coprod_{q \in V_\alpha} F_q$ . Agora, suponha que  $\pi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  seja a projeção sobre o segundo fator, e defina

$$\Phi_\alpha : p_F^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ (q, v) \in F_q \longmapsto (q, \pi \circ \Psi_\alpha(f(q))(f(q), v)) .$$

Observe que, se  $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}(q, v) = (q, g_{\alpha\beta}(q)v)$ , quando  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , então  $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(q, v) = (q, g_{\alpha\beta}(f(q))v)$ . Portanto, todas as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas. Logo existe uma única estrutura de variedade suave em  $F^{m+k}$  tornando  $p_F : F \rightarrow M$  um fibrado vetorial de dimensão  $k$ .

**Observação 2.5.** O fibrado  $F$  construído acima é chamado de fibrado induzido por  $f$ , e de agora em diante será denotado por  $f^{-1}E$ .

**Observação 2.6.** Algumas vezes vamos cometer o abuso de notação de chamar  $E$  de um fibrado vetorial, deixando subentendido a aplicação  $p$ , salvo alguns casos onde será necessário explicitamos a aplicação.

Continuando com nossa exposição. Sejam  $(M, g)$  uma variedade riemanniana e  $p : E^{m+k} \rightarrow M$  um fibrado vetorial sobre  $M$ . Dizemos que um aplicação  $s : M \rightarrow E$  é uma seção do fibrado, se  $p \circ s = \text{Id}_M$ . Denote por  $\Gamma(E)$  o espaço de todas as seções suaves de  $E$  e por  $\mathfrak{X}(M)$  o espaço de todos os campos de vetores suaves em  $M$ . Dizemos que um conjunto  $\{E_1, \dots, E_k\}$  é uma base para  $E$ , se para cada  $q \in M$   $\{E_1(q), \dots, E_k(q)\}$  é uma base para  $E_q = p^{-1}(q)$ . Se  $\{E_1, \dots, E_k\}$  está definido apenas em um conjunto aberto  $U$  de  $M$ , então dizemos, nesse caso, que  $\{E_1, \dots, E_k\}$  é uma base local para  $E$ . Definido esses novos conceitos, podemos agora definir o conceito de conexão sobre um fibrado vetorial  $E$ .

Uma conexão no fibrado vetorial  $E$  é uma aplicação

$$\nabla : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$$

com as seguintes propriedades: Para cada  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $Y, X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$ , valem as seguintes propriedades:

- a.  $\nabla_{fX+gY}s = f\nabla_Xs + g\nabla_Ys$ ;
- b.  $\nabla_X(s + \tilde{s}) = \nabla_Xs + \nabla_X\tilde{s}$ ;
- c.  $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_Xs$ .

Embora a definição acima necessite que todas as entidades envolvidas estejam definida globalmente em  $M$ , a seguinte observação nos diz que de fato ela é local, no seguinte sentido. A demonstração dessa afirmação pode ser vista em PETERSEN (2006) ou CARMO (2011).

**Observação 2.7.** *Assim como no caso riemanniano tradicional, é possível mostrar que o valor de  $\nabla_Xs$  em  $p \in M$  depende apenas dos valores de  $s$  em uma vizinhança de  $p$  em  $M$ , e do valor de  $X$  em  $p$ . Isto significa que se  $s = \tilde{s}$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$ , então  $\nabla_Xs|_p = \nabla_X\tilde{s}|_p$ . Além disso, se  $X(p) = Y(p)$ , então  $\nabla_Xs|_p = \nabla_Ys|_p$ . Realmente, é possível demonstrar algo um pouco mais sutil, podemos provar que o valor de  $\nabla_Xs$  em  $p$  depende apenas do valores de  $s$  ao longo de uma curva passando por  $p$  com vetor tangente  $X(p)$ .*

Em seguida, vejamos agora como podemos induzir uma conexão nos fibrados construídos nos exemplos 2.1 e 2.2.

**Exemplo 2.3.** *Suponha que  $p_E : E \rightarrow M$  e  $p_F : F \rightarrow M$  sejam fibrados vetoriais sobre  $M$  com respectivas conexões  $\nabla^E$  e  $\nabla^F$ , respectivamente. Pelo Exemplo 2.1 existe uma única estrutura de fibrado vetorial em  $\text{Hom}(E, F)$ . Além disso, com o auxílio das conexões em  $E$  e  $F$ , podemos definir uma conexão  $\nabla^{\text{Hom}(E, F)}$  em  $\text{Hom}(E, F)$  da seguinte forma: para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , cada  $T \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$  e cada  $s \in \Gamma(E)$  definimos*

$$(\nabla_X^{\text{Hom}(E, F)}T)(s) = \nabla_X^F(T(s)) - T(\nabla_X^E s). \quad (1)$$

*Uma simples verificação nos mostra que, de fato,  $\nabla^{\text{Hom}(E, F)}$  é uma conexão em  $\text{Hom}(E, F)$ .*

**Exemplo 2.4.** *Sejam  $p : E \rightarrow N$  um fibrado vetorial com conexão  $\nabla^E$  e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Considere em  $f^{-1}E$  a estrutura diferenciável do Exemplo 2.2. Podemos definir uma conexão  $\nabla^{f^{-1}E}$  em  $f^{-1}E$  da seguinte forma: Para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s \in \Gamma(f^{-1}E)$ ,  $s = s_\alpha E_\alpha \circ f$ , onde  $s_\alpha$  são funções suaves definidas localmente em  $M$ , e  $\{E_\alpha\}$  uma base local de  $E$  temos:*

$$\nabla_X^{f^{-1}E}s = ds_\alpha(X)E_\alpha \circ f + s_\alpha (\nabla_{f_*X}^E E_\alpha) \circ f. \quad (2)$$

*Embora a definição acima tenha o desconforto de ser local, podemos verificar sem muitas*

dificuldades que realmente essa expressão local é uma conexão global em  $f^{-1}E$ .

Particularizando as definições anteriores e voltando um pouco para a geometria riemanniana. Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana. É bem conhecido que existe uma única conexão  $\nabla$ , chamada conexão de Levi-Civita ou conexão riemanniana de  $M^4$

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

tal que para todo  $X, Y$  e  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , e  $f, g \in C^\infty(M)$  vale

- a.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$ ;
- b.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$ ;
- c.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$ ;
- d.  $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ ;
- e.  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$ .

Agora, gostaríamos de obter a expressão local dessa conexão em um sistema de coordenada local  $U \subset M$  com coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$  e base local associada  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$  para  $TM$ . Para tanto, suponha que  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  nesse sistema de coordenadas e computamos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= X(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= X(Y^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left\{ X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k) \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  são chamados de símbolos de Christoffel da conexão. Eles provém das seguintes igualdades:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (3)$$

onde  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ .

**Observação 2.8.** *Com o intuito de tornar nossa exposição mais simples, em todo esse trabalho faremos uso da convenção de Einstein sob a soma dos índices.*

Sejam agora  $M$  e  $N$  variedades riemannianas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Considere em  $\text{Hom}(TM, f^{-1}TN)$  a estrutura diferenciável a conexão  $\nabla$  obtida a partir da conexão da construções anteriores e da conexões riemannianas em  $M$  e  $N$ . Denote por  $df$  a seção de  $\text{Hom}(TM, f^{-1}TN)$  definida por  $q \mapsto df(q)$  onde  $df(q)(X) := (q, (f_*)_q X)$ , para todo  $X \in TM$ . Como essa notação em mente, podemos finalmente definir a segunda forma fundamental de uma aplicação suave  $f$ .

**Definição 2.1.** *Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Definimos a segunda forma fundamental de  $f$  como*

<sup>4</sup>Veja CARMO (2011) ou (PETERSEN, 2006) para mais informações sobre a construção dessa conexão.

sendo a aplicação bilinear  $B(f) : TM \times TM \rightarrow f^{-1}TN$  definida por:

$$B_{XY}(f) = (\nabla_X df)(Y). \quad (4)$$

Para provar que a segunda forma fundamental é simétrica, precisaremos obter a expressão local da segunda forma fundamental em sistemas de coordenadas locais. Para tal fim, tome sistemas de coordenadas  $(U, x^i)$  em  $M$  e  $(V, y^\alpha)$  em  $N$ . Suponha que nesses sistemas de coordenadas tenhamos:  $f = (f^\alpha)$ ,  $g_M = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$  e  $g_N = \bar{g}_{\alpha\beta}dy^\alpha \otimes dy^\beta$ , com respectivos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  para  $M$  e  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  para  $N$ , onde  $g_M$  e  $g_N$  denotam as métricas riemannianas de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Nessas condições, podemos explicitar a segunda forma fundamental nesses sistemas de coordenadas como segue:

$$\begin{aligned} B_{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}}(f) &= \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} df \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( df \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) - df \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) - df \left( \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \nabla_{f_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)} \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

Em particular, a segunda forma fundamental de  $f$  é simétrica, uma vez que os símbolos de Christoffel são. Diferenciando um pouco da nomenclatura clássica de subvariedades, o traço da segunda forma fundamental é chamado de campo tensão de  $f$ .

**Definição 2.2.** O campo de tensão da aplicação  $f$  denotado por  $\tau(f)$  é definido por

$$\tau(f) = \text{tr}(B(f)). \quad (6)$$

Em seguida, gostaria de obter a expressão local do campo tensão de  $f$ . Isto pode ser obtido como segue: multiplicando a igualdade (5) pela matriz inversa  $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \tau(f) &= g^{ij} B_{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}}(f) \\ &= g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial f^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right\} \\ &= \left\{ \Delta_M f^\alpha + g^{ij} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right\} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

Antes de irmos além, permita-nos agora obter duas fórmulas que serão fundamentais quando fomos demonstrar a existência de soluções do problema de Plateau para variedades convexas. A primeira delas nos dá uma expressão explícita para a segunda forma fundamental da composta de duas aplicações suaves. Por sua vez, a segunda formula relaciona a segunda forma de uma aplicação entre métricas conformes.

**Lema 2.1.** *Sejam  $f : M \rightarrow N$  e  $p, h : N \rightarrow \mathbb{R}$  aplicações suaves. Suponha que  $g$  seja uma métrica riemanniana em  $N$ , e considere a métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2h}g$ . Com essas notações temos as seguintes igualdades:*

$$B_{XX}(h \circ f) = B_{f_*X, f_*X}(h) + dh(B_{XX}(f)), \quad (8)$$

$$\tilde{B}_{X,X}(p) = B_{XX}(p) - 2X(h)X(p) + g(X, X)g(\nabla h, \nabla p), \quad (9)$$

onde acima  $B(p)$  denota a segunda forma fundamental de  $p$  com respeito à métrica riemanniana  $g$  e  $\tilde{B}(p)$  denota a segunda forma fundamental de  $p$  com respeito à métrica riemanniana  $\tilde{g}$ .

Demonstração: Com efeito, a partir de (4), temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} B_{XX}(h \circ f) &= \nabla_X(d(h \circ f))(X) = \nabla_X(dh \circ df)(X) \\ &= \nabla_X(dh \circ df(X)) - dh \circ df(\nabla_X X) = \nabla_X(dh(df(X))) - dh(df(\nabla_X X)) \\ &= \nabla_{f_*X}(dh)(f_*(X)) + (dh)(\nabla_{f_*X} f_*(X)) - dh(df(\nabla_X X)) \\ &= \tilde{B}_{f_*X, f_*X}(h) + dh(B_{XX}(f)). \end{aligned}$$

Antes de provamos a segunda igualdade, permita-nos relembrar a seguinte relação entre as conexões riemanniana de métricas conformes. Se  $\nabla$  é a conexão riemanniana de  $N$  com a métrica  $g$  e  $\tilde{\nabla}$  é a conexão riemanniana de  $N$  com a métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2h}g$ , então

$$\tilde{\nabla}_X X = \nabla_X X + 2X(h)X - g(X, X)\nabla h,$$

onde  $\nabla h$  é o gradiente de  $h$  com respeito a métrica  $g$ . Feita essa breve revisão cuja prova pode ser vista em CARMO (2011), podemos provar a segunda igualdade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{X,X}(p) &= \tilde{\nabla}_X(dp)(X) = XX(p) - dp(\tilde{\nabla}_X X) \\ &= XX(p) - dp(\nabla_X X + 2X(h)X - g(X, X)\nabla h) \\ &= B_{X,X}(p) - 2X(h)X(p) + g(X, X)g(\nabla h, \nabla p). \end{aligned}$$

Isso finaliza a prova da segunda igualdade.

Quando  $f$  é a inclusão  $i : \partial M \hookrightarrow N$ , onde  $M \subset N$  é um domínio compacto com fronteira  $C^2$ , dizemos que  $M$  é um domínio estritamente convexo (respectivamente, 1-convexo), se a segunda forma fundamental de  $i$  for positiva (respectivamente, não-negativa) definida, isto é,  $B(i) > 0$  (respectivamente,  $\geq 0$ ) no sentido de formas bilineares. Por outro lado, se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , e se  $B(f) > 0$  (respectivamente,  $\geq 0$ ), no sentido de formas bilineares, dizemos que  $f$  é uma função estritamente convexa (respectivamente, 1-convexa).

No tocante a domínios estritamente convexos, BESSA, JORGE, and MARI (2015) demonstraram que sempre é possível construir uma função Lipschitziana, a qual é suave e estritamente convexa em uma vizinhança da fronteira do domínio.

**Proposição 2.1** (Bessa-Jorge-Mari). *Seja  $M \subset N$  um domínio compacto estritamente convexo com bordo de classe  $C^3$ , então existe uma função Lipschitziana  $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de  $M$ , estritamente convexa em uma vizinhança de  $\partial M$  tal que  $\phi^{-1}((-\infty, 0]) = M$  e  $\phi^{-1}(0) = \partial M$ . Além disso, a função  $\phi$  é 1-convexa em  $M$ .*

### 2.1.2 Princípio do máximo

Nessa breve parte do trabalho vamos falar um pouco a respeito de uma poderosa ferramenta analítica, o princípio do máximo. Nessa parte do trabalho, seguiremos a exposições dadas por PETERSEN (2006) e GILBARG and TRUDINGER (2001) para esse contexto.

Permita-nos começar nosso trabalho com o conceito de função harmônica entre variedades riemannianas.

**Definição 2.1** (Aplicação harmônica). *Uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  é dita harmônica, se  $\tau(f) = 0$ .*

**Observação 2.9.** *No caso de uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tomando a orientação usual da reta, obtemos  $\tau(f) = \Delta f$ , onde aqui  $\Delta$  denota o operador de Laplace usual.*

Usando essa notação padrão para o operador de Laplace, dizemos que  $f$  é uma função subharmônica (respectivamente, superharmônica) se  $\Delta f \geq 0$  (respectivamente,  $\Delta f \leq 0$ ), como na notação clássica. Como veremos agora podemos enfraquecer essa definição de harmonicidade consideravelmente. Antes porém, vamos necessitar da seguinte definição.

**Definição 2.2.** *Dizemos que uma função Lipschitziana  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a desigualdade*

$$\Delta f \geq g, \tag{10}$$

onde  $g$  é uma função contínua, no sentido das distribuições se para cada função suave

não-negativa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  com suporte compacto vale

$$-\int_M \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle \geq \int_M g\phi.$$

Analogamente, dizemos que uma função Lipschitziana  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a desigualdade

$$\Delta f \leq g, \tag{11}$$

onde  $g$  é uma função contínua, no sentido das distribuições se para cada função suave não-negativa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  com suporte compacto vale

$$-\int_M \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle \leq \int_M g\phi.$$

Dizemos que uma função Lipschitziana  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é subharmônica (respectivamente, superharmônica) no sentido das distribuições se ela satisfaz (10) (respectivamente, (11)) com  $g \equiv 0$  no sentido acima. Uma vez definido todos esses conceitos, podemos enunciar o principal resultado dessa parte do trabalho. Sua demonstração e extensões podem ser vista em GILBARG and TRUDINGER (2001).

**Teorema 2.2** (Princípio do Máximo). *Suponha que  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função Lipschitziana e subharmônica (respectivamente superharmônica) no sentido das distribuições, então  $f$  é localmente constante numa vizinhança de cada ponto de máximo (respectivamente mínimo). Se  $f$  possui um máximo (respectivamente mínimo) global, então  $f$  é constante.*

Além dessa versão do princípio do máximo, vamos necessitar posteriormente da seguinte versão mais fraca do princípio de máximo.

**Lema 2.2.** *Seja  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e com integral de Dirichlet finita, onde  $D$  é um domínio compacto e conexo com fronteira suave. Suponha que para alguma constante  $\beta > 0$  tenha-se  $\Delta h \geq -\beta|h|^2$  no sentido das distribuições. Então  $\sup_D h \leq \sup_{\partial D} h$ .*

Demonstração: Suponha por absurdo que isso não ocorra. Seja  $c$  uma constante satisfazendo

$$\sup_D h > c > \sup_{\partial D} h \text{ e } \beta(\sup_D h - c) < 1.$$

Multiplicando a desigualdade  $\Delta h \geq -\beta|h|^2$  por  $(h - c)$  e integrando por partes em  $D_c = \{x \in D : h(x) \geq c\}$  obtemos que:

$$-\int_{D_c} |\nabla h|^2 \geq -\beta \int_{D_c} |\nabla h|^2 (h - c).$$



Consequentemente, temos que:

$$0 \geq \int_{D_c} |\nabla h|^2 - \beta \int_{D_c} |\nabla h|^2 (h - c) = \int_{D_c} |\nabla h|^2 (1 - \beta(h - c)) \geq 0.$$

Daí segue-se imediatamente que  $\nabla h = 0$  em  $D_c$ , o que não é possível haja vista que  $\sup_D h > c$ .

### 2.1.3 Convexidade

Nessa curta seção, devemos definir uma noção de convexidade mais fraco do que a que tínhamos definido anteriormente. Essa noção será importante quando fomos demonstrar o resultado de existência do problema de Plateau para variedades convexas.

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Dizemos que  $f$  é geodesicamente convexa, se para cada geodésica  $\gamma : [0, L] \rightarrow M$ , parametrizada pelo comprimento de arco tivermos

$$f(\gamma((1 - \lambda)L)) \leq \lambda f(\gamma(0)) + (1 - \lambda)f(\gamma(L)), \quad (12)$$

para cada  $\lambda \in (0, 1)$

Com respeito a funções geodesicamente convexas, GREENE and WU (1973) demonstraram o seguinte.

**Teorema 2.3** (Greene-Wu). *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função geodesicamente convexa e  $K \subset M$  conjunto compacto. Então existem uma vizinhança aberta  $U$  de  $K$ , um número real positivo  $\epsilon_0$  e uma sequência de funções suaves  $\phi_\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , tal que  $\phi_\epsilon$  converge para  $f$  uniformemente em  $K$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \inf_{\gamma(t)} \frac{d^2}{dt^2} (\phi_\epsilon \circ \gamma) |_{t=0} \right) \geq 0$$

onde  $\gamma$  varia sobre todas as geodésicas tal que  $\gamma(0) \in K$ .

**Observação 2.10.** *Como foi observado por GREENE and WU (1973), a sequência de funções acima é não-crescente.*

## 2.2 Topologia

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre alguns fatos topológicos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Como estaremos principalmente interessados em variedades, todos os resultado que enunciaremos, serão enunciados para esse contexto. No entanto, vale a pena salientar que muitos desses resultados valem em contextos bem mais gerais. Recomendamos a leitura de (BREDON, 1991), (LIMA, 2009) e (LIMA, 2006) para o aprofundamento nessa parte da topologia.

### 2.2.1 Espaço de recobrimento

Sejam  $M, N$  variedades conexas e  $\pi : M \rightarrow N$  uma aplicação sobrejetiva. Dizemos que  $\pi$  é uma aplicação de recobrimento, fornecendo que para cada  $q \in N$  exista uma vizinhança aberta  $V \ni q$  tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha} U^{\alpha},$$

onde  $\pi|_{U^{\alpha}} : U^{\alpha} \rightarrow V$  homeomorfismo para cada  $\alpha$ . Nas condições, dizemos que  $\pi$  é um recobrimento de  $m$ -folhas se  $\#\pi^{-1}(q) = m$  para todo  $q \in N$ .

Nessa ordem de pensamento, é natural questionar se existe um recobrimento para qualquer variedade topológica conexa. De fato, o resultado abaixo nos mostra que sempre é possível encontrar um recobrimento com boas propriedades para qualquer variedade conexa.

**Teorema 2.4** (Existência de Recobrimento). *Se  $M$  é uma variedade conexa e  $H \leq \pi_1(M)$  é um subgrupo, então existe uma variedade conexa  $\widetilde{M}$  e uma aplicação de recobrimento suave  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  tal que  $\pi_*(\pi_1(\widetilde{M})) = H$ .*

Outro resultado relevante sobre a teoria de espaços de recobrimento que precisaremos posteriormente é o teorema do levantamento de aplicações. Esse resultado fornece uma condição necessária e suficiente para a existência do levantamento de uma aplicação.

**Teorema 2.5** (Existência do Levantamento). *Seja  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento entre variedades conexas. Suponha que  $f : Z \rightarrow M$  seja uma aplicação contínua e  $Z$  variedade qualquer. Fixe  $z_0 \in Z$ ,  $f(z_0) = x_0 \in M$ , e  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Então, existe uma única aplicação contínua  $\tilde{f} : Z \rightarrow \widetilde{M}$  tal que  $\tilde{f}(z_0) = \tilde{x}_0$  e  $\pi \circ \tilde{f} = f$  se, e só se,  $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \leq \pi_*(\pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}_0))$ .*

**Observação 2.11.** *Observe que  $f$  e  $\tilde{f}$  têm a mesma classe de diferenciabilidade. Isto é,  $f \in C^k$  se, e só se  $\tilde{f} \in C^k$ .*

### 2.2.2 Complexo simplicial

Permita-nos agora fazer um breve resumo sobre complexo simplicial, mais detalhes podem ser visto em (BREDON, 1991) e LIMA (2009).

Dados  $r + 1$  vetores  $v_0, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$  tais que  $v_1 - v_0, \dots, v_r - v_0$  sejam linearmente independentes. Definimos um simplexo de dimensão  $r$  (ou  $r$ -simplexo) com vértices nos pontos  $v_0, \dots, v_r$ , como sendo o conjunto, denotado por  $\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle$ , de todas as combinações convexas de  $v_0, v_1, \dots, v_r$ , isto é,

$$\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^r \alpha_i v_i; \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}.$$

Se  $p = \sum \alpha_i v_i \in \langle v_0, \dots, v_r \rangle$  então dizemos que os números  $\alpha_i$  são as coordenadas baricêntricas do ponto  $p$ . Se todas elas são positivas, então dizemos que  $p$  é um ponto interior. Por outro lado, se alguma delas for nula, então dizemos que  $p$  é um ponto de bordo, e quando todas são iguais, dizemos que  $p$  é o baricentro do simplexo  $\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle$ . Se  $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{0, 1, \dots, r\}$  com  $i_j \neq i_k$  se  $j \neq k$ , então dizemos que o simplexo  $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \rangle$  é uma face do simplexo  $\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle$ .

**Definição 2.3** (Poliedro). *Um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^m$  é chamado de poliedro, se ele for a união finita de simplexos de  $\mathbb{R}^m$  com as seguintes propriedades:*

1. *Todo ponto de  $K$  pertence a algum simplexo de  $K$ ;*
2. *Toda face de um simplexo de  $K$  é ainda um simplexo de  $K$ ;*
3. *Se  $\sigma$  e  $\tau$  são simplexos de  $K$ , então  $\sigma \cap \tau$  ou é vazio ou é uma face comum de  $\sigma$  e  $\tau$ .*

**Observação 2.12.**

- a. *A dimensão de um poliedro  $K$  é a maior dimensão de um simplexo de  $K$ ;*
- b. *Um conjunto  $L \subset K$  é dito subpoliedro, se ele for um poliedro em  $\mathbb{R}^m$  cujos simplexos estão em  $K$ ;*
- c. *Quando munimos um poliedro  $K$  da topologia induzido do  $\mathbb{R}^m$  vamos denotá-lo por  $|K|$ ;*
- d. *Dizemos que uma aplicação contínua  $f : K \rightarrow L$ , onde  $K$  e  $L$  são poliedros, é uma aplicação simplicial, se cada simplexo de dimensão  $r$  em  $K$  tem imagem um simplexo de dimensão menor ou igual à  $r$  em  $L$ .*

Fixe  $M^m$  uma variedade suave. Dizemos que  $M$  é triangulável, se existe um poliedro  $K$  de dimensão  $m$  e um homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow M$  tal que restrito a cada  $m$ -simplexo de  $K$  este homeomorfismo é a restrição de um difeomorfismo definido numa vizinhança aberta desse simplexo sobre um aberto de sua imagem. Com o auxílio desse homeomorfismo, podemos transladar todos os conceitos definidos até agora para  $M$  de modo natural.

**Exemplo 1.** *Toda esfera  $\mathbb{S}^m$ , em geral, todas as variedades suaves de dimensões 2 e 3 são trianguláveis.*

Antes de irmos além, precisaremos da seguinte definição.

**Definição 2.4** (Aplicação Simplicial). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua entre variedades trianguláveis. Dizemos que  $f$  é simplicial, se para cada simplexo  $s$  de  $M$  a imagem  $f(s)$  é um simplexo  $N$  de dimensão menos ou igual a dimensão de  $s$ .*

Em geral não é verdade que toda aplicação contínua entre variedades suaves trianguláveis seja simplicial com respeito a alguma escolha de triangulação do domínio e contradomínio. No obstante, temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.6** (Lojasiewicz). *Sejam  $M^3$  uma variedade real-analítica e  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma aplicação contínua e analítica em  $\text{int } \mathbb{D}$ . Se  $S(f) = \{x \in \mathbb{D} : \exists y, y \neq x \text{ e } f(x) = f(y)\}$ , então existem triangulações de  $\mathbb{D}$  e  $M$  tais que  $S(f)$  é subcomplexo da triangulação de  $\mathbb{D}$*

e  $f$  é simplicial.

**Observação 2.13.** Em todo esse trabalho  $\mathbb{D} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, x \rangle \leq 1\}$ , onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno usual em  $\mathbb{R}^2$

Continuando como nosso revisão. Fixemos uma variedade triangulável  $M^3$  e um subpoliedro<sup>5</sup> compacto  $N \subset M$  de  $M$ . O conjunto

$$N(N, M) = \{\sigma \in M : \sigma \subset s \text{ simplexo de } M \text{ e } s \cap |N| \neq \emptyset\} \quad (13)$$

é chamado de vizinhança simplicial de  $N$  em  $M$ . Por sua vez, o complemento simplicial de  $N$  em  $M$  é o conjunto definido por

$$C(N, M) = \{\sigma \in M : \sigma \cap |N| = \emptyset\}. \quad (14)$$

A subdivisão  $M'$  de  $M$  obtida subdividindo cada simplexo de  $M$  não pertencente ao conjunto  $N \cup C(N, M)$  é chamada de subdivisão próxima de  $N$ . Com respeito a essa subdivisão, dizemos que o conjunto  $N(N, M')$  é chamada de vizinhança relativamente regular de  $N$  em  $M$ . Como foi demonstrado em ROURKE and SANDERSON (1982), essa vizinhança goza da seguinte propriedade.

**Proposição 2.1.** *Seja  $U$  uma vizinhança relativamente regular de  $N \subset M$ , onde  $M^3$  é uma variedade suave triangulável compacta com bordo e  $U$  subpoliedro de  $M$ . Se  $N \cap \partial M \neq \emptyset$  então  $U \cap \partial M$  é vizinhança relativamente regular de  $N \cap \partial M$  em  $\partial M$ . Se  $N \subset \text{int } M$ , então  $\partial U = \dot{N}(N, M') := N(N, M') \cap C(N, M')$ .*

O próximo resultado, nos diz essencialmente que vizinhanças regulares são retrato de deformação do conjunto. Sua demonstração pode ser vista em ROURKE and SANDERSON (1982).

**Lema 2.1.** *Toda vizinhança relativamente regular é retrato de deformação do subpoliedro em consideração. Ademais, se  $M^3$  for uma variedade suave triangulável, podemos supor que a triangulação em questão é suave por parte, no sentido que quando restringimos a retração a cada 2-simplexo a aplicação restrita a esse 2-simplexo é suave por partes. Em particular, o retrato de deformação construído dessa forma é de classe  $C^1$  por partes.*

Realmente, como escólio da demonstração, podemos notar que o retrato de deformação goza da seguinte propriedade.

**Escólio 2.1.** *O retrato de deformação do lema anterior é localmente injetiva quando restrito ao bordo da vizinhança relativamente regular. Além disso, cada face dos 2-simplexos do conjunto em consideração é recoberto exatamente duas vezes pela retração restrita a fronteira da vizinhança relativa regular.*

---

<sup>5</sup>Isto é  $N$  é imagem de um subpoliedro pelo homeomorfismo que define a triangulação de  $M$

### 2.2.3 Homologia e cohomologia

Nesse seção, vamos fazer uma breve revisão sobre homologia e cohomologia necessário para o desenvolvimento desse trabalho. Aqui continuaremos seguindo as exposições dadas por (BREDON, 1991) e (LIMA, 2009) a essa parte da topologia.

#### 2.2.3.1 Cohomologia de de Rham

Seja  $M$  uma variedade suave. Sabemos que se  $\Lambda^r(M)$  denota o espaço das  $r$ -formas lineares em  $M$ , então existe um operador linear  $d_r : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$  chamada a derivada exterior de ordem  $r$  tal que para cada  $r$  vale  $d_{r+1} \circ d_r \equiv 0$ . Em particular, essa igualdade induz uma sequência

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_0} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-2}} \Lambda^{m-1}(M) \xrightarrow{d_{m-1}} \Lambda^m(M) \xrightarrow{d_m} 0,$$

onde o primeiro operador  $d_{-1}$  é justamente a inclusão. Denote por  $Z^r(M)$  o Kernel de  $d_r$  e a por  $B^r(M)$  a imagem de  $d_{r-1}$ . O subespaço  $Z^r(M)$  é chamado do conjunto de todas as  $r$ -formas fechadas. Por sua vez, o conjunto  $B^r(M)$  é chamado do conjunto de todas as  $r$ -formas exatas. Desde que  $B^r(M) \subset Z^r(M)$ , o espaço quociente

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

tem uma estrutura natural de espaço vetorial, e é chamado do grupo de cohomologia de de Rham de  $M$  de dimensão  $r$ .

#### 2.2.3.2 Homologia singular

Fixe uma variedade suave  $M$ . Sejam  $\Delta_r$  o  $r$ -simplexo com vértices  $e_1, \dots, e_{n+1}$ , onde  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  é a base canônica usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e  $M$  uma variedade suave. Por um  $r$ -simplexo singular em  $M$  significa uma aplicação suave  $\sigma : \Delta_r \rightarrow M$ . Isto é,  $\sigma$  é a restrição de uma aplicação suave em uma vizinhança de  $\Delta_r$ . Considere um anel  $A$  e seja  $S_r(M, A)$  o conjunto de todas as combinações lineares finitas  $x = \sum_{\sigma} x_{\sigma} \sigma$ , onde  $x_{\sigma} \in A$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, r+1\}$  definimos a  $i$ -ésima face do  $r$ -simplexo  $\sigma : \Delta_r \rightarrow M$  como sendo o  $(r-1)$ -simplexo  $\partial_i \sigma : \Delta_{r-1} \rightarrow M$ , definido por

$$\partial_i \sigma(t_1, \dots, t_n) = \sigma(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_r).$$

Definido esses simplexos, podemos agora definir o operador bordo  $\partial^r : S_r(M, A) \rightarrow$

$S_{r-1}(M, A)$  como segue: Para cada  $r$ -simplexo  $\sigma : \Delta_r \rightarrow M$  definimos

$$\partial^r \sigma = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \partial_i \sigma,$$

e estendemos  $\partial^r$  à todo  $S_r(M, A)$  por linearidade em cada soma finita  $x = \sum_{\sigma} x_{\sigma} \sigma$ .

Um fato notável sobre essa família de operadores, é que ela satisfaz

$$\partial^r \circ \partial^{r+1} = 0.$$

De modo que ela gera uma sequência exata

$$S(M, A) : \cdots \xrightarrow{\partial^{r+1}} S_r(M, A) \xrightarrow{\partial^r} S_{r-1}(M, A) \xrightarrow{\partial^{r-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(M, A) \xrightarrow{\partial_1} S_0(M, A) \xrightarrow{\partial^0} 0$$

o qual é chamado de complexo singular de  $M$ . Assim como no caso da Cohomologia de de Rham, associado a esse complexo temos um grupo de homologia singular de  $M$  com coeficiente em  $A$  o qual definiremos agora. Sejam  $Z_r(M, A)$  o Kernel de  $\partial^r$  e  $B_r(M, A)$  a imagem de  $\partial^{r+1}$ . Como  $B_r(M, A) \subset Z_r(M, A)$ , então o quociente  $H_r(M, A) = Z_r(M, A)/B_r(M, A)$  é um bem definido  $A$ -módulo sobre  $A$  chamado de grupo de homologia singular de  $M$  de dimensão  $r$  com coeficientes em  $A$ .

Note que se  $M$  tem fronteira não vazia, então  $S_r(\partial M, A)$  é um sub-módulo de  $S_r(M, A)$ . Em particular, desde que o operador bordo  $\partial^r$  deixa o subcomplexo  $S_r(\partial M, A)$  invariante, então no quociente  $S_r(M, A)/S_r(\partial M, A)$  podemos definir um operador  $\bar{\partial}^r : S_r(M, A)/S_r(\partial M, A) \rightarrow S_{r-1}(M, A)/S_{r-1}(\partial M, A)$  e a homologia associada a essa família de operadores nos dá a homologia singular relativa de  $M$  módulo  $\partial M$ . Além disso, as seqüências exatas curtas

$$0 \xrightarrow{i} S_r(\partial M, A) \xrightarrow{i} S_r(M, A) \xrightarrow{q} S_r(M, A)/S_r(\partial M, A) \longrightarrow 0,$$

onde  $i$  denota a inclusão e  $q$  a aplicação quociente, nos dão à sequência exata de homologia singular do par  $(M, \partial M)$  com coeficientes em  $A$  :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*^{r+1}} H_r(\partial M, A) \xrightarrow{i_*} H_r(M, A) \xrightarrow{q_*} H_r(M, \partial M, A) \xrightarrow{\partial_*^r} H_{r-1}(\partial M, A) \cdots \quad (15)$$

Embora tenhamos definido a homologia singular sobre um anel  $A$  qualquer, nesse trabalho estaremos apenas interessado em dois casos particulares, quando  $A$  for  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ , o conjunto dos inteiros ou o conjunto dos inteiros módulo 2, respectivamente. Finalizaremos essa parte do nosso trabalho enunciando os seguintes resultados que serão relevantes para nosso desenvolvimento. Infelizmente, por serem teoremas muitos técnicos, no sentido que necessitariam o desenvolvendo completo da teoria para que finalmente posarmos enunciá-los de forma precisa. O que acabaria tornando esse trabalho muito longo

e com uma leitura cansativa. Assim, aqui vamos apenas citar as principais consequências desses teoremas, e recomendamos a leitura de BREDON (1991) para mais informações.

**Teorema 2.7** (Hurewicz). *Existe um epimorfismo  $f : \pi_1(M, x_0) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})$ .*

**Teorema 2.8** (Teorema dos Coeficientes Universais). *Para todo  $r$  tem-se que  $H^r(M, A)$  é isomorfo a  $\text{Hom}(H_r(M, A), A)$ .*

e

**Teorema 2.9** (Dualidade de Poincaré). *Para cada  $p \leq m$   $H_p(M, \partial M, A)$  é isomorfo a  $H^{m-p}(M, A)$ .*

**Observação 2.14.** *Como mencionamos mais cedo, nos teoremas acima  $A$  é ou  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2$ . Além disso, o grupo  $H^r(M, A) = H^r(M) \otimes A$ , onde  $\otimes$  denota o produto tensorial.*

### 2.2.4 Torre topológica

Nessa parte do texto, vamos seguir as exposições dadas por HEMPEL (1976), JACO (1980) e ROURKE and SANDERSON (1982) para a construção de torre topológicas sobre uma aplicação simplicial.

Sejam  $N^2$ ,  $M^3$  e  $\widetilde{M}^3$  variedades suaves trianguláveis e  $f : N \rightarrow M$  e  $\tilde{f} : N \rightarrow \widetilde{M}$  aplicações simpliciais. Por simplicidade, chame  $L = f(N)$  e  $\widetilde{L} = \tilde{f}(N)$ . Considere agora vizinhanças relativamente regulares  $V$  e  $\widetilde{V}$  de  $L$  em  $M$  e  $\widetilde{L}$  em  $\widetilde{M}$ , respectivamente. Suponha por um momento que  $\widetilde{M}$  seja o espaço de recobrimento de  $V$  com triangulação induzida pela projeção de recobrimento  $p$  e da triangulação de  $V$ . Nessas condições, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{V} & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ & \tilde{f} \nearrow & & \searrow p \\ N & \xrightarrow{f} & V & \longrightarrow & M \end{array}$$

Todo diagrama desse tipo será chamado de nível sobre  $f$ . Como essa notação, dizemos que o nível é trivial, duas folhas, regular ou universal, se aplicação de recobrimento  $p$  tiver a mesma propriedade, respectivamente.

Generalizando um pouco mais o diagrama acima, podemos agora definir o

conceito de torre topológica. Abstratamente, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & V_n & \longrightarrow & M_n \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & & \swarrow p_n & \\
 & V_2 & \longrightarrow & M_2 \\
 & & \swarrow p_2 & \\
 & V_1 & \longrightarrow & M_1 \\
 & & \swarrow p_1 & \\
 N & \xrightarrow{f_0} & V_0 & \longrightarrow & M_0 \\
 & \nearrow f_1 & & & \\
 & \nearrow f_2 & & & \\
 & \nearrow f_n & & &
 \end{array} \tag{16}$$

é chamado de torre sobre  $f_0 : N \rightarrow M_0$  com altura  $n$ , se cada subdiagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & V_{i+1} & \longrightarrow & M_{i+1} \\
 & \nearrow f_{i+1} & & \swarrow p_{i+1} \\
 N & \xrightarrow{f_i} & V_i & \longrightarrow & M_i
 \end{array}$$

é um nível sobre  $f_i : N \rightarrow M_i$  para cada  $i$ .

O seguinte resultado nos diz que sempre é possível obter uma torre topológica, desde que o espaço base tenha um recobrimento. A demonstração desse teorema é uma imediata aplicação do Teorema 2.4 e Teorema 2.5.

**Lema 2.3.** *Uma torre de duas folhas com altura  $n$  pode ser estendida à uma torre de duas folhas e altura  $n + 1$ , se  $V_n$  tem um recobrimento de duas folhas  $M_{n+1}$  com projeção de recobrimento  $p_{n+1}$  tal que  $(f_n)_*(\pi_1(N)) \subset (p_{n+1})_*(\pi_1(M_{n+1}))$ .*

O próximo resultado afirma que não é possível encontrar torre de altura suficientemente grande sem inserimos níveis triviais, níveis onde a aplicação de recobrimento seja um homeomorfismo.

**Lema 2.4.** *Sejam  $N$  um complexo simplicial finito,  $M_0$  uma variedade suave de dimensão 3 triangulável e  $f_0 : N \rightarrow M_0$  uma aplicação simplicial, então existe um número natural  $\mathcal{C}$  tal que qualquer torre sobre  $f_0$  com altura maior que  $\mathcal{C}$  tem um nível trivial.*

Demonstração: Defina o conjunto

$$X(f_0) = \{(\sigma, \tau) \in N \times N : \sigma, \tau \text{ 2-simpleso de } N, \sigma \neq \tau, f_0(\sigma) = f_0(\tau)\}.$$



Desde que  $N$  é finito, temos que  $\mathcal{C} = \#X(f_0) < +\infty$ . Seja

$$\begin{array}{ccc}
 & & V_n \longrightarrow M_n \\
 & & \vdots \quad \swarrow p_n \quad \vdots \\
 & & V_2 \longrightarrow M_2 \\
 & & \swarrow p_2 \\
 & & V_1 \longrightarrow M_1 \\
 & & \swarrow p_1 \\
 N & \xrightarrow{f_0} & V_0 \longrightarrow M_0 \\
 & \nearrow f_1 & \\
 & \nearrow f_2 & \\
 & \nearrow f_n &
 \end{array}$$

uma torre de altura  $n$ . Defina  $X(f_k) = \{(\sigma, \tau) \in N \times N : \sigma, \tau \text{ 2-simplexo de } N, \sigma \neq \tau, f_k(\sigma) = f_k(\tau)\}$  e veja que  $X(f_{k+1}) \subset X(f_k)$  pela comutatividade do diagrama. Além disso,  $X(f_{k+1}) \neq X(f_k)$  se o nível  $k$  não for trivial. Para ver isso, suponha que isso não aconteça. Isto significa que  $X(f_{k+1}) = X(f_k)$  e o nível não é trivial. Em seguida, fixe  $x_0 \in f_k(N)$  e  $\tilde{x}_0 \in p_k^{-1}(x_0) \cap f_{k+1}(N)$ .

Afirmção:  $p_k|_{f_{k+1}(N)}: f_{k+1}(N) \rightarrow f_k(N)$  é injetiva.

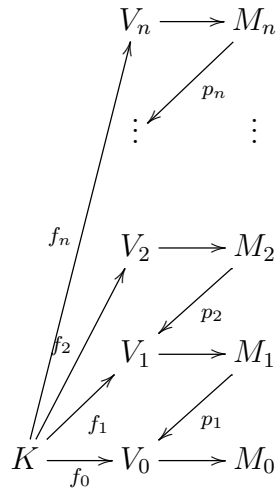
Suponha que existam  $x_1 \neq x_2$  em  $f_{k+1}(N)$  tal que  $p_k(x_1) = p_k(x_2)$ . Como estamos induzindo em  $\widetilde{M}_k$  a triangulação pull-back de  $V_k$ , então podemos escolher  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  2-simplexos tais que  $f_{k+1}(\sigma_i) \ni x_i$  e  $f_k(\sigma_1) = f_k(\sigma_2)$ . Por outro lado,  $f_{k+1}: \sigma_i \rightarrow \widetilde{M}_k$  é o levantamento a partir do ponto base  $x_i$  da aplicação  $f_k: \sigma_1 \rightarrow V_k$  com respeito ao ponto  $p_k(x_i)$ . Pela unicidade do levantamento,  $f_{k+1}(\sigma_1) \neq f_{k+1}(\sigma_2)$ , o que não é possível.

Voltando para a demonstração, sabemos que existem retrações  $R_i: V_i \rightarrow f_i(N)$ , pelo Lema 2.1. Em particular, o homomorfismo induzido por cada  $R_i$  é isomorfismo. Esse último fato, juntamente com o fato que

$$p_k|_{f_{k+1}(N)}: f_{k+1}(N) \rightarrow f_k(N)$$

é bijetiva nos diz que  $p_{k*}: \pi_1(\widetilde{M}_k, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(V_k, x_0)$  é sobrejetivo. Daí segue que  $p_k$  é um homeomorfismo, o que é um absurdo, pois o nível não é trivial.

Neste caso, se



é uma torre de altura  $n > \mathcal{C}$ , então, pelo que vimos acima,  $\#X(f_{\mathcal{C}}) = \#X(f_{\mathcal{C}+1}) = 0$ . Portanto, o nível  $\mathcal{C} + 1$  é trivial, absurdo.

Finalizaremos essa seção como mais uma construção topológica, a qual necessitaremos na demonstração do principal teorema desse trabalho.

Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  seja uma aplicação simplicial com respeito a alguma triangulação  $T$  de  $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$  e uma triangulação  $K$  de  $M$ . Suponha que  $f(\mathbb{S}^1)$  seja uma curva de Jordan em  $\partial M$ . Chame  $f_0 = f$ ,  $M_0 = M$  e  $K_0 = f_0(K)$ . Considere uma vizinhança relativamente regular  $V_0$  de  $K_0$  em  $M_0$  tal que  $S_0 = V_0 \cap \partial M_0$  seja uma vizinhança relativamente regular de  $f_0(\mathbb{S}^1)$  em  $M_0$ . Suponha que tenhamos construído uma torre de altura  $k$  sobre  $f_0$ . Se existe um recobrimento de duas folhas de  $V_k$ , então podemos estender essa torre da seguinte forma: chame  $M_{k+1}$  o espaço de recobrimento de duas folhas de  $V_k$  e  $p_{k+1}$  a projeção de recobrimento associada. Induzimos em  $M_{k+1}$  a triangulação induzida por  $V_k$  via aplicação de recobrimento. Pelo Teorema 2.5, podemos levantar a aplicação simplicial  $f_k : \mathbb{D} \rightarrow V_k$  a uma aplicação simplicial  $f_{k+1} : \mathbb{D} \rightarrow V_{k+1}$ , onde  $V_{k+1}$  é uma vizinhança relativamente regular de  $f_{k+1}(\mathbb{D})$  tal que  $S_{k+1} = V_{k+1} \cap \partial M_{k+1}$  seja uma vizinhança relativamente regular de  $f_{k+1}(\mathbb{S}^1)$  em  $\partial M_{k+1}$ .

**Observação 2.15.** Note que pelo Lema 2.4 podemos fazer a extensão da torre até uma altura menor ou igual a  $\mathcal{C} = \#X(f_0)$ .

### 3 PROBLEMA DE PLATEAU

Esse capítulo do trabalho está dividida em três principais partes. Na primeira seção desse capítulo vamos definir o conceito de variedade homogênea no sentido de Morrey. Além disso, enunciaremos o teorema de existência do problema de Plateau para esse tipo de variedade, e falaremos sobre os resultados de regularidades e não existência de pontos de ramificação para ambientes 3-dimensionais. Além disso, como aplicação do teorema de existência do problema de Plateau para variedade homogênea, vamos obter um resultado de existência do problema de Plateau para variedade convexa. Na segunda seção desse capítulo, vamos obter algumas propriedades das aplicações harmônica ou conforme, e como consequência dessas propriedades, vamos concluir que o conjunto singular de uma solução do problema de Plateau tem uma particular estrutura topológica. Finalmente, na última seção desse trabalho, vamos definir o conceito de curva folding, e obteremos um resultado que demonstrar que aplicações com essa tipo de estrutura não podem ser mínimos de área.

#### 3.1 Existência de solução

Sejam  $(M, g)$  uma variedade riemanniana e  $\gamma \in M$  uma curva de Jordan, isto é, uma curva fechada e simples (sem auto-inteseções) a qual é imagem da esfera  $\mathbb{S}^1$  por alguma aplicação contínua. O problema de Plateau consiste em mostrar a existência de uma aplicação contínua do disco unitário fechado em  $M$  tal que restrita à esfera  $\mathbb{S}^1$ , a solução seja uma parametrização de  $\gamma$ . Além disso, pede-se que a solução goza da propriedade de ter menor área com respeito a classe de todas as aplicações Lipschitz de classe  $C^1$  por partes<sup>6</sup> do disco unitário fechado sobre  $M$  tal que restrita à esfera  $\mathbb{S}^1$  seja também uma parametrização de  $\gamma$ . Em termos matemáticos, isso significa que queremos resolver o seguinte problema: Dada uma curva de Jordan  $\gamma \in M$ , encontre uma aplicação  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbb{S}^1) = \gamma \\ \text{Area}(f) \leq \text{Area}(g), \end{cases} \quad (17)$$

para toda aplicação lipschitziana  $g$  de classe  $C^1$  por partes tal que  $g(\mathbb{S}^1) = \gamma$ .

Como havíamos comentado mais cedo na introdução desse trabalho, os profundos trabalhos RADÓ (1930), DOUGLAS (1931) e posteriormente MORREY (1948) demonstraram a existência de soluções do problema de Plateau para uma vasta classe de variedades suaves, as variedades homogêneas regulares. Dito isso, permita-nos antes de mais nada definir o que significa uma variedade ser homogênea regular.

**Definição 3.1.** *Seja  $(M^m, g)$  uma variedade Riemaniannade completa de classe  $C^k$ ,  $m \geq 3, k \geq 1$ . Dizemos que  $M$  é uma variedade homogênea regular, se existem constantes reais*

---

<sup>6</sup>Isto é, é de classe  $C^1$  no complementar de um conjunto formado por curvas de classes  $C^1$  e pontos.

positivas uniforme  $C_1 \leq C_2$  tais que para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança coordenada centrada em  $p$  difeomorfa ao disco unitário, e sob esse difeomorfismo, se a métrica tem a forma  $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$  então:

$$C_1 dx^i \otimes dx^i \leq g_{ij} dx^i \otimes dx^j \leq C_2 dx^i \otimes dx^j. \quad (18)$$

**Exemplo 2.** Toda variedade riemanniana compacta sem bordo de classe  $C^1$  e  $\mathbb{R}^m$  com a métrica padrão são variedades homogêneas regulares.

Antes imos além no trabalho, necessitaremos da definição de área e energia de uma aplicação. Em todos esse trabalho, vamos supor que  $(u, v)$ , nessa ordem, é o sistema de coordenada adotado em  $\mathbb{D}$ .

**Definição 3.2.** Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^m$  aplicação Lipschitz de classe  $C^1$  por partes, onde  $(M^m, g)$  variedade riemanniana. Definimos a área de  $f$  por

$$\text{Area}(f) := \int_{\mathbb{D}} \sqrt{g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) - g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} dudv. \quad (19)$$

Por sua vez, definimos a energia de  $f$  por

$$E(f) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv. \quad (20)$$

**Observação 3.1.** A partir da desigualdade  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$  vemos que

$$\text{Area}(f) \leq E(f).$$

com igualdade se, e só se,  $f$  é conforme. Isto é, fornecendo que

$$g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) = g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \text{ e } g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0$$

Fixe uma curva de Jordan  $\gamma \subset M^m$ . Defina  $d_M(\gamma)$  como sendo o ínfimo das áreas de todas as aplicações Lipschitzianas de classe  $C^1$  por partes definidas no disco unitário fechado cuja restrição a esfera  $\mathbb{S}^1$  é uma parametrização monótona de  $\gamma$ , isto é, a restrição é sobrejetiva e a imagem inversa de cada ponto de  $\gamma$  é um conjunto conexo em  $\mathbb{S}^1$ . Analogamente, defina  $e_M(\gamma)$  como o ínfimo das energias de todas as aplicações Lipschitzianas de classe  $C^1$  por partes definidas no disco unitário fechado cuja restrição à esfera  $\mathbb{S}^1$  é uma parametrização monótona de  $\gamma$ . Como veremos agora, essas duas constantes são as peças fundamentais para a existência de solução do problema de Plateau em variedades homogêneas regulares.

**Teorema 3.1** (Morrey). *Seja  $M$  uma variedade homogênea de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Se  $d_M < \infty$ , então existe uma aplicação  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  harmônica e conforme cuja restrição ao bordo*

do disco é uma parametrização monótona de  $\gamma$  com  $\text{Area}(f) = d_M(\gamma)$  e  $E(f) = e_M(\gamma)$ .

Com respeito a regularidade dessas soluções, MORREY (1948) demonstrou o seguinte resultado de regularidade interior.

**Teorema 3.2** (Radó-Douglas-Morrey). *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  uma solução do problema de Plateau para uma curva  $\gamma \subset M$ .*

- a. *Se  $M$  é de classe  $C^3$ , então  $f$  é de classe  $C^{2,\sigma}$  em  $\text{int}(\mathbb{D})$ , para todo  $\sigma \in (0, 1)$ .*
- b. *Se  $M$  é de classe  $C^{k,\sigma}$ ,  $k \geq 3$  e  $0 < \sigma < 1$ , então  $f$  é de classe  $C^{k,\sigma}$  em  $\text{int}(\mathbb{D})$ .*
- c. *Se  $M$  é analítica, então  $f$  é analítica em  $\text{int}(\mathbb{D})$ .*

Antes de prosseguimos, relembre as seguintes definições:

**Definição 3.3.** *Uma variedade riemanniana  $(M, g)$  é de classe  $C^{k,\sigma}$ ,  $k \geq 3$ ,  $0 < \sigma \leq 1$ , se existe um atlas de  $\mathcal{A}$  de  $M$  tal que dadas quaisquer  $x$  e  $y \in \mathcal{A}$  as mudanças de coordenadas  $x \circ y^{-1}$  e  $y \circ x^{-1}$  são aplicações de classe  $C^{k,\sigma}$  no domínio de definição e os coeficientes da métrica  $g$  em qualquer sistema  $x \in \mathcal{A}$  são funções de classe  $C^{k-1,\sigma}$ , isto é, se  $g = g_{ij}dx_i dx_j$  no sistema de coordenada  $x$ , então os coeficientes  $g_{ij}$  são funções de classe  $C^{k-1,\sigma}$ .*

**Definição 3.4.** *Dizemos que uma variedade riemanniana  $(M, g)$  é analítica, se existe um atlas de  $\mathcal{A}$  de  $M$  tal que dadas quaisquer  $x$  e  $y \in \mathcal{A}$  as mudanças de coordenadas  $x \circ y^{-1}$  e  $y \circ x^{-1}$  são aplicações analíticas no domínio de definição e os coeficientes da métrica  $g$  em qualquer sistema  $x \in \mathcal{A}$  são funções analíticas.*

Note que esse resultado de regularidade é interior, no sentido que somente nos diz algo a respeito da regularidade da aplicação no interior do disco. Dito isso, podemos nos questionar o que acontece se a curva  $\gamma$  tiver algum tipo de diferenciabilidade, será que a solução herda o mesmo tipo de diferenciabilidade? Uma resposta parcial para essa pergunta foi dada por HILDEBRANT (1969) para o caso real analítica.

**Teorema 3.3** (Hildebrandt). *Suponha que  $M$  seja uma variedade real analítica. Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  uma solução do problema de Plateau com fronteira  $\gamma$ . Nestas condições temos as seguintes afirmações:*

- a. *Se  $\gamma \in C^k$  (ou  $\gamma \in C^{k-1,\alpha}$ ),  $t \geq 4$ , então  $f \in C^{k-1,\beta}(\mathbb{D})$ , para algum  $\beta \in [0, 1)$ .*
- b. *Se  $\gamma \in C^{k,\beta}$ ,  $t \geq 4$  e  $\beta \in (0, 1)$ , então  $f \in C^{k-1,\beta}(\mathbb{D})$ .*
- c. *Se  $\gamma \in C^\infty$ , então  $f \in C^\infty(\mathbb{D})$ .*
- d. *Se  $\gamma$  é analítica, então  $f$  é analítica em  $\mathbb{D}$ .*

Além disso, as afirmações acima são válidas em contextos mais gerais. Assuma que  $\sigma$  é um subarco de  $\mathbb{S}^1$ , o qual é aplicado monotonicamente no interior de um subarco  $\gamma_0$  de  $\gamma$ .

Então, para qualquer domínio  $\bar{G}$  de  $\text{int } \mathbb{D} \cup \sigma$ , as seguintes afirmações são verdadeiras.

- a. *Se  $\gamma_0 \in C^k$  (ou  $\gamma_0 \in C^{k-1,\alpha}$ ),  $t \geq 4$ , então  $f \in C^{k-1,\beta}(\bar{G})$ , para algum  $\beta \in [0, 1)$ .*
- b. *Se  $\gamma_0 \in C^{k,\beta}$ ,  $t \geq 4$  e  $\beta \in (0, 1)$ , então  $f \in C^{k-1,\beta}(\bar{G})$ .*
- c. *Se  $\gamma_0 \in C^\infty$ , então  $f \in C^\infty(\bar{G})$ .*
- d. *Se  $\gamma_0$  é analítica, então  $f$  pode ser estendida analiticamente através  $\sigma$ .*

Posteriormente, em um trabalho mais profundo sob a regularidade no bordo, HEINZ and HILDEBRANT (1970) mostraram que é possível estender o teorema acima

para variedades riemannianas não analíticas.

**Teorema 3.4** (Hildebrandt-Heinz). *Sejam  $(M^m, g)$  uma variedade riemanniana,  $m \geq 2$ , de classe  $C^2$ , and  $\gamma \subset M$  uma curva de Jordan de classe  $C^2$ . Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  seja uma superfície de classe  $C^0(\mathbb{D}) \cap C^2(\text{int } \mathbb{D})$ , parcialmente limitado por  $\gamma$  no seguinte sentido: existe um arco  $\sigma := \{w = e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2\} \subset \mathbb{S}^1$  tal que  $f(w) \in \gamma$  se  $w \in \sigma$ . Nessas condições temos as seguintes afirmações:*

- i. *Para cada  $w_0 \in \sigma$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f \in C^{1,\nu}(\overline{S_\epsilon(w_0)})$  para todo  $\nu$  com  $0 < \nu < 1$ , onde  $S_\epsilon(w_0) := \{w \in \text{int } \mathbb{D} : |w - w_0| < \epsilon\}$ .*
- ii. *Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  é não constante e  $\partial_w f(w_0) = 0$ , então temos que para  $w \rightarrow w_0$ ,  $w \in \mathbb{D}$ , a seguinte representação assintótica em um sistema de coordenadas  $\{x^i\}$  em torno de  $f(w_0)$  em  $M$*

$$\partial_w f = a(w - w_0)^l + o(|(w - w_0)|^l), \quad (21)$$

onde  $l$  é um inteiro positivo, e  $a$  é um vetor complexo  $a = (a^1, \dots, a^n) \neq 0$  satisfazendo

$$g_{ij} a^i a^j = 0,$$

onde  $g = g_{ij} dx^i dx^j$ .

- iii. *Se  $M$  e  $\gamma$  são de classe  $C^{s,\mu}$ ,  $s \geq 2$  e  $0 < \nu < 1$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f \in C^{s,\mu}(\overline{S_\epsilon(w_0)})$ , para qualquer  $w_0 \in \sigma$ .*
- iv. *Se  $M$  e  $\gamma$  são de classe  $C^\infty$ , então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f \in C^\infty(\overline{S_\epsilon(w_0)})$ , para qualquer  $w_0 \in \sigma$ .*
- v. *Se  $M$  e  $\gamma$  são real analíticas, então  $f$  pode ser estendida analiticamente através  $\sigma$ .*
- vi. *Se  $f$  aplica  $\sigma$  monotonicamente em  $\gamma$ , então o inteiro  $l$  de (21) é par.*

**Observação 3.2.** *Acima temos usado a notação complexa  $\partial_w f := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right)$ .*

Uma vez tendo garantido a existência e regularidade da solução no interior e até o bordo da solução do problema de Plateau, era uma questão em aberto saber se tais soluções eram de fato imersões mínimas autênticas, no sentido que a jacobiana de  $f$  é não nula. O problema que surgia nessa linha de pensamento era a existência de pontos de ramificação, os quais são pontos onde a solução deixa de ser imersão no sentido usual. Um resposta parcial para variedades analíticas foi dado por GULLIVER II, OSSERMAN, and ROYDEN (1973) no seguinte contexto.

**Teorema 3.5** (Gulliver-Osserman-Royden). *Suponha que  $M$  seja uma variedade analítica. Se  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma aplicação harmônica e conforme, então o conjunto dos pontos de ramificação de  $f$  é finito.*

Realmente, quando se exige que a aplicação  $f$  seja mínimo de área, então é possível dizer que o conjunto dos pontos de ramificação é vazio. Esse teorema foi provada em OSSERMAN (1970) para  $\mathbb{R}^3$ , e generalizado por GULLIVER II (1973) para qualquer variedade riemanniana  $M$  de dimensão 3.

**Teorema 3.6** (Gulliver-Osserman). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana de dimensão 3. Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  seja solução do problema de Plateau, então  $f$  é uma imersão em  $\text{int } \mathbb{D}$ .*

Além dessas questões de existência, regularidade e não existência de pontos de ramificação. Uma outra questão instigava acerca das soluções do problema de Plateau. Será que as soluções do problema de Plateau eram imersões até a fronteira? A resposta para essa questão foi dada por GULLIVER II and LESLEY (1973) no seguinte teorema.

**Teorema 3.7** (Gulliver-Lesley). *Seja  $M^3$  uma variedade analítica. Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  seja uma solução do problema de Plateau com fronteira uma curva analítica  $\gamma$  em  $M$ . Então  $f$  é uma imersão em  $\mathbb{D}$ .*

Feita toda essa revisão sobre os principais resultados de existência, regularidade e não existência de pontos de ramificação no interior e bordo, podemos agora prosseguir com nosso trabalho.

**Definição 3.5** (Variedade Convexa). *Dizemos que  $M$  é uma variedade convexa, se  $M$  está contido no interior de um domínio estritamente convexo  $N$  de uma variedade Riemanniana  $\tilde{N}$  e existe uma função contínua  $\eta : N \rightarrow \mathbb{R}$  geodesicamente convexa em uma vizinhança de  $N \setminus M$  satisfazendo:*

$$M = \{x \in N : \eta(x) \leq 0\} \text{ e } \partial M = \eta^{-1}(0).$$

**Exemplo 3.** *Todo corpo convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  com interior não vazio e  $0 \in \text{int } \Omega$  é uma variedade convexa. Nesse caso,  $N$  é uma bola de centro na origem e raio suficientemente grande,  $g$  é a função distância a fronteira do corpo.*

Fixe uma curva de Jordan  $\gamma \in \partial M$ . No restante dessa seção vamos assumir que  $M$  é uma variedade convexa e que a variedade  $\tilde{N}$  que contém  $M$  como domínio seja de classe  $C^2$ . Nosso teorema de existência de solução para o problema de Plateau pode ser enunciado da seguinte forma.

**Teorema 3.8** (Existência Solução-Meeks & Yau). *Se  $d_M(\gamma) < \infty$ , então existe uma aplicação harmônica e conforme  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  que aplica  $\mathbb{S}^1$  monotonicamente sobre  $\gamma$  com  $\text{Area}(f) = d_M(\gamma)$  e  $E(f) = e_M(\gamma)$ . Além disso, ou  $f$  aplica  $\mathbb{D}$  em  $\partial M$  ou em  $f(\text{int}(\mathbb{D})) \subset \text{int } M$ .*

Demonstração: Como  $M$  é um domínio de  $N$ , então mostraremos a existência dessa aplicação para  $N$ , e depois verificaremos que essa solução está contida em  $M$ . Em seguida, lembre que desde que  $N$  é um domínio estritamente convexo e compacto de uma variedade riemanniana  $(\tilde{N}, g)$ , então pelo Lema 2.1 existe uma função  $h$  como as propriedades descritas naquele lema. Em seguida, defina a seguinte função  $\tilde{h}$  de classe  $C^2$  como segue

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in N \\ 1 + e^{-\frac{1}{h}}, & \text{se } x \in \tilde{N} \setminus N \end{cases} \quad (22)$$

Escolhar um valor regular  $a > 1$  de  $\tilde{h}$  próximo de 1 e defina  $\widehat{N} := \tilde{h}^{-1}((-\infty, a])$ . Diminuindo  $a$ , se necessário, podemos supor que  $\widehat{N}$  é compacto.

Com essas escolhas, definimos uma nova métrica conforme à métrica  $g$  em  $\text{int } \widehat{N}$  da seguinte forma

$$\tilde{g} := \frac{(a-1)^2}{(a-\tilde{h})^2} g. \quad (23)$$

No que segue, vamos denotar por  $d$  a função distância até  $\partial\widehat{N}$  com respeito à métrica  $g$ .

Afirmção 1:  $(\text{int } \widehat{N}, \tilde{g})$  é uma variedade homogênea regular.

Prova da Afirmção: Usando a aplicação exponencial, obtemos um  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: se  $x \in \widehat{N}$  então a bola geodésica de centro  $x$  e raio  $\epsilon$ , com respeito à métrica  $g$ , é difeomorfa a bola euclidiana de mesmo raio. Sob este difeomorfismo, a métrica se representa como  $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ , onde os autovalores de  $(g_{ij})$  são limitadas por cima e por baixo por constantes  $c_1$  e  $c_2$  positivas independentes de  $x \in \widehat{N}$ , haja vista que  $\widehat{N}$  é compacta. Deformando de forma radial a bola euclidiana de raio  $\epsilon$  na bola unitária obtemos que a métrica pull back de  $g$  pela composição com este difeomorfismo é dada por  $\epsilon^2 g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ .

Por outro lado, como  $h$  é estritamente convexa em uma vizinhança de  $\tilde{N} \setminus N$ , podemos tomar  $a$  de modo que o completar de  $N$  em  $\widehat{N}$  esteja contida nesta vizinhança, daí segue que

$$\nabla\tilde{h} = \frac{\nabla h}{h^2} \exp\left(\frac{-1}{h}\right) \quad (24)$$

é não nula em uma vizinhança de  $\partial\widehat{N}$ , a norma e a conexão acima são com respeito a métrica  $g$ . Portanto é limitada por cima e por baixo em uma vizinhança  $U$  de  $\partial\widehat{N}$  formada por segmentos (com respeito à métrica  $g$ ) perpendiculares à  $\partial\widehat{N}$ . Em particular, podemos limitar a função  $(a - \tilde{h})$  nessa vizinhança pela função distância  $d$  da seguinte forma:

$$K_1 d(y) \leq (a - \tilde{h}(y)) \leq K_2 d(y).$$

Considere o conjunto  $N_\eta = \{x \in \widehat{N}; d(x) < \eta\}$ , onde  $\eta \leq \epsilon$  pequeno de modo que  $N_\eta$  esteja na vizinhança  $U$ . Dado  $x \in N_\eta$ , sabemos a bola geodésica  $B\left(x, \frac{d(x)}{2}\right)$  é difeomorfa a bola euclidiana de mesmo raio. Além disso, se a métrica  $g$  se representa como  $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$  com respeito a este difeomorfismo, então após uma deformação radial na bola unitária, vemos que a métrica  $g$  tem a seguinte forma

$$\left(\frac{d(x)}{2}\right)^2 g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

Usando as seguintes estimativas  $\frac{d(x)}{2} \leq d(y) \leq \frac{3}{2}d(x)$  e  $K_1 d(y) \leq (a - \tilde{h}(y)) \leq K_2 d(y)$  para  $y \in B\left(x, \frac{d(x)}{2}\right)$  vemos que a métrica  $\tilde{g}$  com respeito a composição dos



difeomorfismos acima satisfaz a seguinte desigualdade:

$$C^1 g_{ij} dx^i \otimes dx^j \leq \tilde{g} \leq C^2 g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Daí, e do fato de que a métrica  $\tilde{g}$  é limitada por cima e por baixo em  $\widehat{N} \setminus N_\eta$  segue nossa afirmação.

Pela afirmação anterior e pelo Teorema 3.1 existe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \widehat{N}$  harmônica e conforme com respeito a métrica  $\tilde{g}$ , tal que  $f|_{\mathbb{S}^1}$  é uma parametrização monótona de  $\gamma$ .

Afirmiação 2:  $h \circ f$  satisfaz a seguinte desigualdade com respeito à métrica  $g$

$$\Delta(h \circ f) \geq -\beta |h \circ f|^2, \quad (25)$$

para alguma constante  $\beta > 0$  em  $f(\mathbb{D}) \cap V$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $\widehat{N} \setminus N$  onde  $h$  é estritamente convexa.

Por simplicidade chame  $\sigma := \frac{1}{2} \log \left( \frac{(a-1)^2}{(a-\tilde{h})^2} \right)$ . Pela fórmula (8)

$$B_{X,X}(h \circ f) = \tilde{B}_{f_*X, f_*X}(h) + dh(\tilde{B}_{X,X}(f)), \quad (26)$$

com respeito a métrica  $\tilde{g}$ . Tomando traço obtemos que

$$\Delta(h \circ f) = \text{tr}\{X \rightarrow \tilde{B}_{f_*X, f_*X}(h)\}. \quad (27)$$

Por outro lado, pela fórmula (9)

$$\tilde{B}_{f_*X, f_*X}(h) = B_{f_*X, f_*X}(h) - 2\langle \nabla h, f_*X \rangle \langle \nabla \sigma, f_*X \rangle + g(f_*X, f_*X) \langle \nabla h, \nabla \sigma \rangle. \quad (28)$$

Usando (24) vemos que

$$\nabla \sigma = \frac{\nabla h}{h^2} \exp\left(\frac{-1}{h}\right) \frac{1}{a-\tilde{h}}. \quad (29)$$

A partir dessa igualdade e do fato que  $h$  é estritamente convexa obtemos que

$$\tilde{B}_{f_*X, f_*X}(h) > -2 \frac{1}{h^2} \exp\left(\frac{-1}{h}\right) \frac{1}{a-\tilde{h}} X(h \circ f)^2.$$

Em particular, por (27)

$$\Delta(h \circ f) > -2 \frac{1}{h^2} \exp\left(\frac{-1}{h}\right) \frac{1}{a-\tilde{h}} |h \circ f|^2.$$

Como  $2 \frac{1}{h^2} \exp\left(\frac{-1}{h}\right) \frac{1}{a-\tilde{h}}$  é limitado em  $f(\mathbb{D}) \cap V$  nossa afirmação segue.

Agora, pela afirmação anterior, o Lema 2.2 e o fato que  $\gamma \in \partial M$  concluímos que  $f(\mathbb{D}) \subset N$ .

Afirmiação 3:  $f(\mathbb{D}) \subset M$ .

Admita que isso não aconteça. Seja  $\eta$  a função da definição de variedade convexa. Suponha que  $x_0$  seja um ponto de máximo para a função  $\eta \circ f$  e defina o conjunto  $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{D} : \eta \circ f(x) \geq \epsilon\}$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Note que  $\Omega_\epsilon \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ . Em particular, cada  $\Omega_\epsilon$  é compacto e disjunto de  $\mathbb{S}^1$ . Pelo Teorema 2.3 existe uma sequência de funções suaves  $\{\eta_i\}$  definidas em uma vizinhança aberta de  $f(\Omega_\epsilon)$  convergindo uniformemente para  $\eta$  e satisfazendo a seguinte desigualdade  $B(\eta_i) \geq -\epsilon_i$  com  $\epsilon_i \rightarrow 0$ . A partir das igualdades (27) e (28) vemos que

$$\Delta(\eta_i \circ f) \geq -C\epsilon_i,$$

em  $\Omega_\epsilon$ , onde  $C$  é uma constante. Daí segue que  $\Delta(\eta \circ f) \geq 0$  em  $\Omega_\epsilon$  no sentido das distribuições. Pelo Teorema 2.2 a função  $\eta \circ f$  é constante em uma vizinhança de  $x_0$ . Isso mostra que o conjunto  $\{x \in \mathbb{D} : \eta \circ f(x) = \eta \circ f(x_0)\}$  é aberto e fechado em  $\mathbb{D}$ . Portanto  $\eta \circ f$  é constante, o qual é um absurdo, pois  $\gamma \subset \partial M$ . Isso mostra nossa afirmação.

Para concluir a prova do teorema, note que usando o mesmo arumento da afirmação anterior e aplicando mais uma vez o Teorema 2.2 obtemos que  $f(\mathbb{D}) \subset \partial M$  ou  $f(\text{int } \mathbb{D}) \subset \text{int } M$ , e isso finaliza a prova do teorema.

### 3.2 Propriedades

Nessa seção, vamos obter algumas das propriedades das aplicações harmônicas e conformes. No que segue, trabalharemos exclusivamente com aplicações que tenham como domínio o disco unitário fechado. Todavia, alguns desses resultados se generalizam para domínios mais gerais, como subconjuntos de superfícies de Riemann. Iniciaremos essa seção como a seguinte simples consequência dos resultados de 3.4.

**Proposição 3.1** (Hildebrandt-Heinz). *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma aplicação harmônica e conforme tal que sua restrição à  $\mathbb{S}^1$  seja uma parametrização monótona de  $\gamma$ . Se  $f \in C(\mathbb{D}) \cap C^2(\text{int}(\mathbb{D}))$ , então  $f|_{\mathbb{S}^1}$  é injetiva.*

Demonstração: Suponha que isso não aconteça e seja  $\sigma \subset \mathbb{S}^1$  um arco tal que  $f(\sigma) = p_0$ . Seja  $\{x^i\}$  um sistema de coordenada centrado em  $p_0$  tal que  $x^i(p_0) = 0$ . Pelo Teorema 3.4, item *iv*, a aplicação  $f$  é de  $C^\infty(\overline{S_\epsilon(w_0)})$  para qualquer  $w_0 \in \sigma$  fixo. Em particular, usando o fato que  $f$  é conforme, obtemos que  $\partial_w f = 0$  ao longo de  $\sigma$ . Por outro lado, como  $f$  é uma função harmônica, então pelo Teorema 2.2 a aplicação  $f$  não pode ser constante em uma vizinhança de  $w_0$ . Aplicando novamente o Teorema 3.4, item *ii*, obtemos a seguinte representação assintótica para  $f$ .

$$\partial_w f = a(w - w_0)^l + o(|w - w_0|^l),$$

onde  $l \in \mathbb{N}$  e  $a$  é um vetor não nulo. Em particular

$$0 = a \frac{(w - w_0)^l}{|w - w_0|^l} + \frac{o(|w - w_0|^l)}{|w - w_0|^l},$$

para todo  $w \in \sigma \setminus \{w_0\}$ . Fazendo sutis escolhas de seqüências, obtemos que  $a = 0$ , o que não é possível. Isso finalizar nossa prova.

Antes de provamos os próximos resultados, vamos fazer uma breve digressão acerca de alguns resultados sobre conjuntos nodais. As demonstrações desses teoremas podem ser vista em (COLDING and MINICOZZI II, 2011).

**Teorema 3.9** (Bers). *Suponha que a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um aberto contido em  $\mathbb{R}^2$ , seja uma solução da seguinte equação diferencial parcial*

$$(a_{ij}v_j)_i + b_iv_i + cv = 0, \quad (30)$$

onde  $(a_{ij})$  é uma matriz simétrica, uniformemente elíptica. Além disso, suponha que  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  sejam suaves. Suponha que  $x_0$  seja um zero de ordem  $d$  de  $f$ . Então existe uma mudança de coordenada  $T$  tal que  $x_0 = 0$ , nesse sistema de coordenada

$$v(x) = p_d(x) + q(x), \quad (31)$$

onde  $p_d$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$  e

$$|q(x)| + |x||\nabla q(x)| + \cdots + |x|^d|\nabla^d q(x)| \leq C|x|^{d+1}, \quad (32)$$

para algum  $C < +\infty$  dependendo de  $a_{ij}, b, c$  e  $d$ .

e

**Lema 3.1.** *Suponha que a função  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  tenha a forma  $v(x) = p_d(x) + q(x)$ , onde  $p_d$  é um polinômio homogêneo de grau  $d$  e que existe uma constante  $C$  tal que*

$$|q(x)| + |x||\nabla q(x)| \leq C|x|^{d+1}.$$

Então existem um aberto  $V$  contendo 0 e um difeomorfismo de classe  $C^1$   $F : V \rightarrow U$  com  $F(0) = 0$  tal que  $F^{-1}(F(V) \cap (U \cap \{v = 0\}))$  é igual a união de  $d$  curvas suaves passando pela origem transversalmente em  $V$ .

Como uma simple aplicação desse dois resultados, podemos agora estudar os pontos onde a imersão deixa de ser é injetiva.

**Lema 3.2.** *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma imersão mínima. Suponha que  $p \neq q$  e  $f(p) = f(q)$ . Então existem abertos disjuntos  $U_1 \ni p$  e  $U_2 \ni q$  tais que ou  $f(U_1) = f(U_2)$  ou  $f(U_1)$  e  $f(U_2)$  se intersectam ao longo de um número finitos de curvas passando por  $f(p)$ . Além disso, a interseção é transversal em todos os pontos, exceto possivelmente em  $f(p)$ .*

Demonstração: Suponha que não existam vizinhanças cujas as imagens são iguais por  $f$ . Se a auto-interseção for transversal em  $f(p)$ , então naturalmente pelo teorema de transversalidade podemos escolher uma vizinhanças coordenadas de modo que a auto-interseção

continue sendo transversal nesta vizinhança. Logo, necessitamos apenas nos concentrar no caso em que os planos tangentes são iguais em  $f(p)$ .

Suponha pois que os planos tangentes são iguais em  $f(p) = f(q)$ . Usando a aplicação exponencial de  $M$  em  $f(p) = f(q)$ , podemos escolher uma bola geodésica centrada em  $f(p) = f(q)$  de raio pequeno com coordenadas  $(x^1, x^2, x^3)$ , onde  $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p$  e  $\frac{\partial}{\partial x^2}|_p$  pertencem ao plano tangente de  $f(p)$ . Escolha agora duas vizinhanças disjuntas  $V_1 \ni p$  e  $V_2 \ni q$  tais que  $f(V_i)$  nesse sistema de coordenadas possam ser escritas como gráficos funções  $\phi_i$  sobre um aberto  $U \ni 0$ , respectivamente. Isto significa que  $f(V_i) = \{(x^1, x^2, \phi_i(x^1, x^2)) : (x^1, x^2) \in U\}$  e  $f(p) = f(q) = (0, 0, 0)$  nesse sistema de coordenadas. Desde que  $f$  é imersão mínima, a partir da representação do campo tensão em (7), vemos que essas funções satisfazem a seguinte equação diferencial parcial:

$$\Delta\phi_k + \Gamma_{13}^3 \frac{\partial\phi_k}{\partial x^1} + \Gamma_{23}^3 \frac{\partial\phi_k}{\partial x^2} = 0.$$

Em particular, temos que

$$\Delta(\phi_1 - \phi_2) + \Gamma_{13}^3 \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial x^1} + \Gamma_{23}^3 \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial x^2} = 0. \quad (33)$$

Pelo Teorema 3.9 e pelo Lema 3.1, os gráficos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  se intersectam ao longo da união finita de curvas, as quais se intersectam transversalmente, exceto em  $0 = f(p)$ . Consequentemente, isso nos diz que  $f(V_1)$  e  $f(V_2)$  se intersectam transversalmente ao longo de um número finito de curvas suaves passando por  $f(p) = f(q)$ .

O próximo resultado nos diz que sob certas condições sobre a aplicação  $f$ , ela não pode se auto intersectar ao longo de um conjunto aberto.

**Lema 3.3.** *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma imersão mínima com as seguintes propriedades:  $f(x) \in f(\partial\mathbb{D})$  se, e só se,  $x \in \partial\mathbb{D}$  e  $f|_{\mathbb{D}}$  injetiva. Nessas condições, para quaisquer abertos disjuntos  $U_1$  e  $U_2$  em  $\mathbb{D}$  vale  $f(U_1) \neq f(U_2)$ .*

Demonstração: Suponha que  $U_1$  e  $U_2$  sejam abertos disjuntos tais que  $f(U_1) = f(U_2)$  e  $f|_{U_i}$  seja um mergulho. Diminuindo um pouco mais  $U_1$  e  $U_2$  podemos supor que  $U_1$  é um disco contido em  $D_\epsilon = \{x \in \mathbb{D} : |x| < 1 - \epsilon\}$  para algum  $\epsilon$  pequeno. Note que existe um difeomorfismo conforme  $k : U_1 \rightarrow U_2$  dado pela composição de  $f|_{U_1} \circ (f|_{U_2})^{-1}$  satisfazendo  $f = f \circ k$ .

Seja  $U$  maior disco aberto de  $D_\epsilon$  contendo  $U_1$  e tal que exista uma aplicação injetiva conforme  $h : U \rightarrow \mathbb{D}$  tal que  $f = f \circ h$  e  $h|_{U_1} = k$ . Suponha que exista  $x \in \partial U \cap D_\epsilon$ . Como  $f(x)$  não pertence a  $f(\mathbb{S}^1)$  e  $f$  é uma imersão então  $f^{-1}(f(x))$  é um conjunto finito. De fato, do contrário existiria uma sequência  $(x_n)$  de pontos de  $f^{-1}(f(x))$  e  $x_n \rightarrow x_0 \in f^{-1}(f(x))$ . Como  $f(x_0)$  não pertence a  $f(\mathbb{S}^1)$  então podemos escolher uma vizinhança em torno de  $x_0$  de modo que  $f$  é um mergulho, o que não é possível se  $x_n \rightarrow x_0$ . Isso prova

nossa afirmação. No que segue, vamos admitir que  $f^{-1}(f(x)) = \{x_1 = x, x_2, \dots, x_k\}$ .

Considere uma vizinhança  $V \ni f(x)$  tal que:

$$f^{-1}(V) = \prod_{i=1}^k D_i,$$

onde  $D_i$  são abertos contendo  $x_i$  e  $f|_{D_i}$  mergulho. Além disso, assumimos que  $D_1 \ni x$  seja um disco contido em  $D_\epsilon$ . Desde que  $D_1 \cap U$  é conexo (ele é a interseção de disco), então  $h(D_1 \cap U) \subset D_i$ . Pelo lema anterior segue que  $f(D_1) \subset f(D_i)$  se diminuirmos um pouco mais  $D_1$ , pois  $D_1 \cap U$  é aberto. Nesse caso, podemos estender  $h$  de modo natural ao aberto  $U \cup D_1$  de modo que ela continue sendo conforme e injetiva. Fazendo isso para cada ponto do bordo de  $U$  estendemos  $h$  a uma função definida num disco maior que  $U$  com as mesmas propriedades que  $h$ . O que não é possível pela maximalidade de  $U$ . Isso prova que  $U = D_\epsilon$ . Por sua vez, como  $\epsilon > 0$  foi arbitrário, então podemos estender  $h$ , usando o mesmo argumento acima, a uma função injetiva e conforme no int  $\mathbb{D}$  satisfazendo  $f = f \circ h$ . Como  $f|_{\mathbb{S}^1}$  é injetiva, podemos estender  $h$  a todo  $\mathbb{D}$  de modo que na fronteira satisfaça  $h(x) = x$ . Daí segue que  $h$  é identidade em  $\mathbb{D}$ , isso nos fornece um absurdo pois  $U_1$  é disjunto de  $U_2$ .

Finalizaremos essa seção com um resultado de estrutura sobre o conjunto singular de uma aplicação contínua. Antes desse resultado, permita-nos definir o conjunto singular. Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma aplicação contínua e suave em int( $\mathbb{D}$ ). O conjunto singular de  $f$  é o conjunto definido por

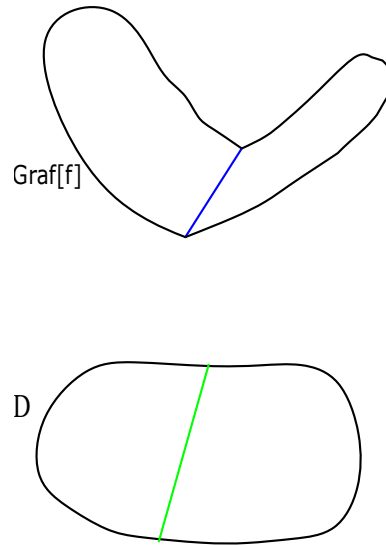
$$S(f) = \{x \in \mathbb{D} : \exists y, y \neq x \text{ e } f(x) = f(y)\}. \quad (34)$$

Com o auxílio dos lemas anterior podemos dar a seguinte descrição para o conjunto singular de  $f$ .

**Corolário 3.1.** *Nas hipótese do Lema 3.3 o conjunto singular de  $f$  não pode ser um ponto, uma curva com um ponto final em  $\mathbb{D}$  ou um conjunto com interior não vazio.*

Demonstração: Com efeito, suponha que  $S(f)$  contenha um ponto. Como no Lemma 3.2, podemos escolher vizinhanças coordenadas de modo que localmente  $f(\mathbb{D})$  se escreva como gráficos de funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , as quais coincidem somente em 0. Como  $\phi_1 - \phi_2$  satisfaz a equação diferencial (33), então pelo princípio do máximo  $\phi_1 = \phi_2$ , o que não é possível, pois estamos assumindo que a interseção é apenas um ponto. Além disso, o Lema 3.2 nos diz que essa  $S(f)$  não contém um curva com um ponto final no interior de  $\mathbb{D}$ , pois nesse ponto, ou a interseção é uma aberto contendo o ponto ou um número par de curvas que se intersectam nesse ponto. Finalmente, o Lema 3.3 nos diz que o interior de  $S(f)$  é vazio.

Figure 1 – Gráfico de uma aplicação com uma curva folding



### 3.3 Curvas folding

Nessa seção vamos descrever uma situação analítica onde sempre será possível diminuir a área de uma aplicação de classe  $C^1$  por partes. Antes porém, vamos definir o conceito de curva folding ou curva de dobramento.

**Definição 3.6** (Curva folding). *Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  seja uma aplicação Lipschitziana em  $\mathbb{D}$  e uma imersão  $C^1$  em cada meio disco  $D^\pm = \{(u, v) \in \mathbb{D} : \pm u \leq 0\}$ . Dizemos que o eixo  $v$  é uma curva folding para  $f$ , se uma das duas condições abaixo é satisfeita para todo  $(0, v) \in \mathbb{D}$ , onde  $-1 < v < 1$ :*

- ou o plano gerado por  $f_* \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(0,v)}$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$  é transversal ao plano gerado por  $f_* \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(0,v)}$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$ ;
- ou o vetor  $\lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$  é múltiplo positivo do vetor  $\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$ .

Fazendo pequenas modificações, podemos definir o conceito de curva folding para curvas de classe  $C^1$ . As únicas modificações necessárias são as seguintes: A curva se estenda a uma curva  $C^1$  com fins no bordo do disco e a aplicação seja uma imersão  $C^1$  nas duas regiões limitadas pela curva estendida.

Antes de provamos o principal resultado dessa seção. Precisaremos fazer uma breve digressão sobre a primeira fórmula de variação da área. Recomendamos LAWSON Jr (1980) para elegantes exposição sob essa fórmula.

**Teorema 3.10** (Primeira Fórmula de Variação da Área). *Considere uma imersão mínima  $f : D \rightarrow M$ , onde  $D$  é um domínio compacto com fronteira de classe  $C^1$ . Seja  $f_t : \mathbb{D} \rightarrow M$  uma variação a 1-paramêtro de  $f$  com campo variacional  $X$ . Então temos a seguinte igualdade:*

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Area}(f_t) = \int_{\partial D} \langle X, \nu \rangle, \quad (35)$$

onde  $\nu$  é o normal exterior à  $\partial D$ .

Feito essa breve revisão, vamos agora demonstrar o principal resultado dessa seção.

**Proposição 3.2.** *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  como na definição acima. Então  $f$  não é minimizante de área na classe das aplicações Lipschitzianas  $C^1$  por partes cuja restrição à esfera  $\mathbb{S}^1$  tem imagem  $f(\mathbb{S}^1)$ .*

Demonstração: Suponha que  $f$  seja o mínimo de área nessa classe. Queremos construir um campo de vetor de modo que possamos decrescer a área de  $f$  com respeito esse campo variacional. Para tal propósito, vamos dividir sua construção em duas partes da seguinte forma: dividimos o disco  $\mathbb{D}$  em duas partes, o lado “esquerdo” e o lado “direito” com respeito ao eixo  $v$ . Inicialmente definimos um campo de vetor  $X$  no meio disco esquerdo de modo que  $X$  seja de classe  $C^1$ ,  $C^1$  ao longo do eixo  $v$ ,  $X$  seja nula em uma vizinhança da outra parte do bordo do disco esquerdo, ao longo do eixo  $y$  tenhamos  $\langle X, f_*(\frac{\partial}{\partial v}) \rangle|_{(0,v)} = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^-} \langle X, f_*(-\frac{\partial}{\partial u}) \rangle|_{(u,v)} > 0$ . Analogamente, definimos  $X$  do lado direito de modo que  $X$  seja de classe  $C^1$ ,  $C^1$  ao longo do eixo  $v$ ,  $X$  seja nula em uma vizinhança da outra parte do bordo do disco direito, ao longo do eixo  $v$  tenhamos  $\langle X, f_*(\frac{\partial}{\partial v}) \rangle|_{(0,v)} = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \langle X, f_*(\frac{\partial}{\partial u}) \rangle|_{(u,v)} > 0$ . Seja  $f_t$  uma variação a 1-paramêtro de  $f$  com respeito a  $X$ . Por (35) temos que:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Area}(f_t |_{\mathbb{D}^+}) = - \int_{\partial \mathbb{D}^+ \cap \{\text{eixo } v\}} \left\langle X, f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle,$$

e

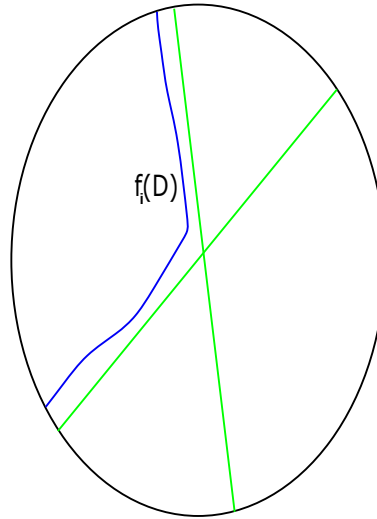
$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Area}(f_t |_{\mathbb{D}^-}) = - \int_{\partial \mathbb{D}^- \cap \{\text{eixo } v\}} \left\langle X, f_* \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle,$$

Em particular

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Area}(f_t) = - \int_{\partial \mathbb{D}^- \cap \{\text{eixo } v\}} \left\langle X, f_* \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle - \int_{\partial \mathbb{D}^+ \cap \{\text{eixo } v\}} \left\langle X, f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle < 0.$$

Isso significa que quando deformamos  $f$  com respeito à  $X$ , a área é estritamente decrescente. Em outras palavras, existe um  $t \neq 0$  tal que  $\text{Area}(f_t) < \text{Area}(f)$ , o que é uma contradição.

Finalizaremos essa seção, fazendo uma breve construção que aparecerá posteriormente na demonstração do teorema principal desse trabalho. Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma aplicação Lipschitz tal que restrita a cada meio disco  $\mathbb{D}^\pm$  seja  $C^1$  e imersão até a parte do bordo contida em  $\mathbb{D}$ . Suponha que possamos escolher um sistema de coordenadas locais  $(x^1, x^2, x^3)$  em torno de  $f(0)$  tal que o eixo  $v$  tenha imagem contida no eixo  $x^3$ . Admita que existam  $l$  planos distintos  $\pi_1, \dots, \pi_l$  passando pelo eixo  $x^3$  e pela origem que decompõem uma pequena bola  $B$  de centro na origem em várias regiões. Suponha que exista

Figure 2 – Local comportamento de  $f_i(\mathbb{D})$ 

uma seqüência de aplicações Lipschitz  $f_i$  tal que

1.  $f_i(\mathbb{D})$  não intersecta  $\cup \pi_r$ ;
2. Cada  $f_i$  é  $C^1$  em ambos os lados dos meios discos;
3.  $f_i$  converge para  $f$  na norma  $C^1$  em ambos os meios discos.

Nessa situação podemos dizer o seguinte a respeito de  $f$ .

**Lema 3.4.** *Se  $f(\mathbb{D}) \cap B \subset \cup_r \pi_r$ , então ou o vetor  $\lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$  é um múltiplo positivo do vetor  $\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)}$  ou existem planos distintos  $\pi_i$  e  $\pi_j$  de modo que para  $v$  pequeno  $\lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)} \in \pi_i$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)} \in \pi_j$ . Em particular,  $f$  tem uma curva folding.*

Demonstração: Por hipótese  $f(\mathbb{D}) \cap B \subset \cup_r \pi_r$  e como  $f$  é de classe  $C^1$  em cada meio disco, então  $\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)} \in \pi_i$  e  $\lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)} \in \pi_j$ . Observe que pela nossa hipótese  $f_* \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_{(0,v)} = \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Suponha por absurdo que tivéssemos  $\pi_i = \pi_j$  e

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)} = \lambda \lim_{u \rightarrow 0^+} f_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_{(u,v)},$$

onde  $\lambda < 0$ . Daí obteríamos que a imagem do eixo  $u$  por  $f$  seria uma curva contida em  $\pi_i$  cuja projeção no plano  $x_1x_2$  é um segmento de reta  $r$  no interior passando pela origem. Como  $f_n$  converge para  $f$  em cada meio disco, então para  $n$  suficientemente grande a imagem do eixo  $v$  por  $f_n$  seria uma curva cuja projeção é uma curva próxima de  $r$  que não intersectaria o plano  $\pi_i$ . Em particular, a imagem do eixo  $u$  por  $f_n$  deveria intersectar qualquer plano  $\pi_k$  com  $k \neq i$ , absurdo haja vista que  $f_n$  não intersecta os planos  $\pi_j$ .

Nessas condições podemos concluir o seguinte sobre  $f$  a partir do lema 3.2.

**Corolário 3.2.** *Nas condições acima a aplicação  $f$  não é minimizante de área.*



## 4 TEOREMA DE MERGULHO DE MEEKS E YAU

Finalmente, nessa parte do trabalho demonstraremos o teorema de mergulho de Meeks e Yau para soluções do problema de Plateau. Como aplicação desse teorema, vamos obter uma versão analítica do Lema de Dehn.

### 4.1 Teorema de Meeks e Yau

Antes de enunciarmos o principal resultado desse trabalho, precisaremos de mais um resultado. No que segue,  $M^3$  será uma variedade suave e  $\gamma \subset \partial M$  será uma curva de Jordan arbitrária.

**Lema 4.1.** *Suponha que  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  seja uma imersão mínima com  $S(f) \neq \emptyset$  e  $S(f) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ . Admita também que  $f$  seja uma aplicação simplicial com respeito a alguma triangulação de  $\mathbb{D}$  e  $M$ . Então existe uma curva de Jordan  $\gamma_1$  em  $\mathbb{D}$  limitando um subdisco  $D^1 \subset \mathbb{D}$  tal que  $\partial D^1 \cap S(f) = \gamma_1$ .*

Demonstração: Como  $f$  é uma aplicação simplicial, então podemos supor sem perda de generalidade que o conjunto  $S(f)$  é subcomplexo de dimensão 1 de  $\mathbb{D}$ . Além disso, cada vértice de  $S(f)$  é conectado por no mínimo dois lados.

Seja  $C$  o conjunto de todas as curvas de Jordan de  $S(f)$  e denote por  $\sigma$  a curva de Jordan com a seguinte propriedade:  $\sigma$  é bordo de um subdisco  $D$  tal que  $\text{int } D \cap S(f)$  tem o menor número de 1-simplexos abertos de  $S(f)$ . Claramente, pelo lema de Zorn tal  $\sigma$  existe.

Note agora que cada 1-simplexo fechado de  $S(f)$  contido em  $D \cap S(f)$  que intersecta  $\sigma$  precisa estar contido em  $\sigma$ , caso contrário, encontraríamos uma curva de Jordan  $\alpha$  com menos 1-simplexos abertos na região interior limitada por  $\sigma$ . Ademais, se existisse um 1-simplexo de  $D \cap S(f)$  que intersectasse  $\sigma$  em um ponto  $p$ , e não estivesse contido em  $\sigma$ , então existiria um subarco  $\tau : [0, 1] \rightarrow S(f)$  tal que  $\tau(0) = p$  e  $\tau((0, 1)) \subset \text{int } D$ . Como  $D$  não contém 1-simplexos fechados, então  $\tau(1) \in \sigma$ . Nesse caso, podemos construir uma curva de Jordan  $\alpha$  contendo menos 1-simplexos abertos na região interior limitada por  $\sigma$ . Isso pode ser construído da seguinte forma: defina  $\alpha$  como sendo  $\tau([0, 1])$  e um subarco de  $\sigma$  ligando  $\tau(0)$  até  $\tau(1)$ . Novamente, pela minimalidade de  $\sigma$  isso não pode ser feito. Em outras palavras, temos verificado que  $D \cap S(f) = \sigma$ .

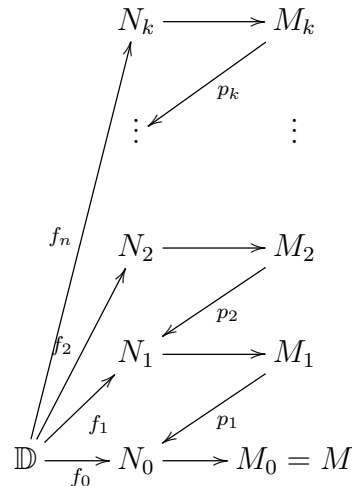
Finalmente, estamos agora preparados para demonstrar o resultado principal desse trabalho.

**Teorema 4.1** (Teorema de Mergulho de Meeks e Yau). *Seja  $f : \mathbb{D} \rightarrow M^3$  uma solução do problema de Plateau para  $\gamma$  com as seguintes propriedades:*

- $S(f)$  é disjunto de  $\mathbb{S}^1$ ;
- $f$  seja simplicial com respeito a alguma triangulação de  $\mathbb{D}$  e  $M$ ;
- $f(\text{int } \mathbb{D}) \cap \partial M = \emptyset$ .

Nessas condições,  $f$  é um mergulho.

Demonstração: Seja  $N_0$  uma vizinhança relativamente regular de  $f(\mathbb{D})$  e chame  $f_0 = f$ . Pelo Lema 2.3 e pelo Lema 2.4 existe uma torre de duas folhas de altura máxima  $k < \infty$



Pela maximalidade de  $k$ , ela não pode ser estendida até uma torre com  $k + 1$  níveis. Isso nos diz, em particular, que  $N_k$  é orientável.

Afirmção:  $H_1(N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$

Suponha pois que essa afirmação não seja verdadeira. Nesse caso, existe um epimorfismo

$$\rho : \pi_1(N_k) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Com efeito, esse epimorfismo pode ser construído pela composição de epimorfismos da seguinte forma: Pelo Teorema 2.7 existe um epimorfismo entre  $\pi_1(N_k)$  e  $H_1(N_k, \mathbb{Z})$ . Como estamos supondo que  $H_1(N_k, \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$ , então  $H_1(N_k, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ , pelo Teorema 2.8, haja vista que  $\mathbb{Z}_2$  é um corpo. Além disso, como  $H_1(N_k, \mathbb{Z})$  é um grupo abeliano livre finitamente gerado, podemos definir de modo natural um epimorfismo  $\psi$  entre  $H_1(N_k, \mathbb{Z})$  e  $\mathbb{Z}_2$  usando o teorema de representação dos grupos abelianos e a projeção natural de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}_2$ . A composição desses epimorfismos nos dá o epimorfismo  $\rho$ .

Note agora que o Kernel de  $\rho$  é um subgrupo de ordem dois de  $\pi_1(N_k)$ . Assim pelo Teorema 2.5 e pelo Lema 2.3, essa torre poderia ser estendida a torre à um nível  $k+1$ , o que contradiz a maximalidade de  $k$ . Conseqüentemente, devemos ter  $H_1(N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ .

De  $H_1(N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ , concluímos que  $H^1(N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ , pelo Teorema 2.8. Por outro lado, pelo Teorema 2.9 essa igualdade implica  $H_2(N_k, \partial N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ . Olhando agora para o seguinte trecho da sequência exata do par  $(N_k, \partial N_k)$  em (15)

$$\cdots \longrightarrow H_2(N_k, \partial N_k, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(\partial N_k, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(N_k, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

obtemos que  $H^1(\partial N_k, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ . Em particular, cada componente conexa de  $\partial N_k$  é

simplesmente conexa. Portanto, pelo Teorema de classificação de superfícies compacta<sup>7</sup> todas as componentes conexas de  $\partial N_k$  são topologicamente  $\mathbb{S}^2$ .

Agora adote em  $\tilde{N}_1$  a métrica riemanniana  $g_1 = p_0^*g$  (pull-back da métrica  $g$  pela aplicação de recobrimento  $p_0$ ). Nos demais recobrimentos  $\tilde{N}_i$  definimos a métrica riemanniana pull-back  $g_i = p_i^*g_{i-1}$  para  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Adotando essa métrica em cada  $\tilde{N}_i$ , obtemos que cada aplicação de recobrimento é uma isometria local.

Afirmção: Cada  $f_i$  é solução do problema de Plateau para  $f_i(\mathbb{S}^1)$ .

Com efeito, suponha que exista uma  $g : \mathbb{D} \rightarrow N_i$  de classe  $C^1$  por partes tal que  $g(\mathbb{S}^1) = f_i(\mathbb{S}^1)$  e  $\text{Area}(g) < \text{Area}(f_i)$ . Compondo  $g$  e  $f_i$  com a isometria local  $p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_i$  vemos que:

$$\text{Area}(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_i \circ g) < \text{Area}(p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_i \circ f) = \text{Area}(f_0) = \text{Area}(f),$$

o que não é possível uma vez que  $f$  é solução do problema de Plateau. Isso prova nossa afirmação.

Como observamos mais cedo no Lema 2.1 e no Escólio 2.1, existe uma retração  $R : N_k \rightarrow f_k(\mathbb{D})$  cuja restrição ao bordo  $R : \partial N_k \rightarrow f_k(\mathbb{D})$  é de classe  $C^1$  por parte e recobre cada 2-simplexo aberto de  $f_k(\mathbb{D})$  exatamente duas vezes. Além disso, a aplicação  $R|_{\partial N_k \setminus f_k(\mathbb{S}^1)}$  é localmente injetiva.

Desde  $\tilde{\gamma} = f_k(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{S}^2 \subset \partial N_k$ , o Teorema de Jordan<sup>8</sup> implica que  $\tilde{\gamma}$  divide  $\mathbb{S}^2$  em dois discos  $D_1$  e  $D_2$  tais que  $D_1 \cap D_2 = \tilde{\gamma}$ . Pela construção de  $R$  temos que

$$\text{Area}(R|_{D_1}) + \text{Area}(R|_{D_2}) \leq 2\text{Area}(f_k),$$

pois nenhum 2-simplexo de  $f_k(\mathbb{D})$  é recoberto mais que duas vezes por  $R|_{\partial N_k}$ . Por outro lado, como  $f_k$  é solução do problema de Plateau, isto implica que:

$$\text{Area}(R|_{D_1}) = \text{Area}(R|_{D_2}) = \text{Area}(f_k). \quad (36)$$

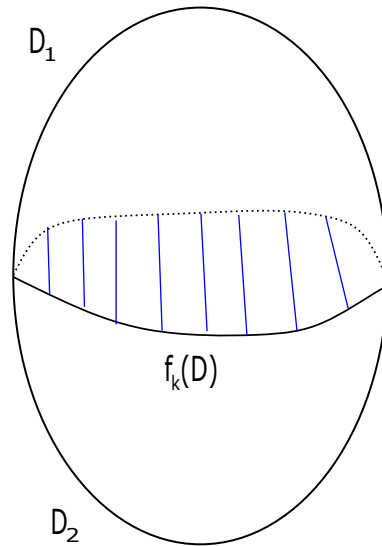
Usando essa igualdade, podemos concluir o seguinte a respeito de  $f_k$ .

Afirmção:  $f_k$  é um mergulho.

De fato, suponha que  $S(f_k) \neq \emptyset$ . Note que  $\mathbb{S}^1 \cap S(f_k) = \emptyset$ , pela comutatividade da torre e do fato que  $f_1$  satisfaz esse fato. Como estamos em dimensão 3, o Lema 3.2, Lema 3.3 e Corolário 3.1 nos dizem que é possível encontrar um lado  $E \subset S(f_k)$  tal que  $f_k$  se auto-intersecta da modo transversal ao longo de  $E$ . Admita que  $\sigma$  é um 2-simplexo com uns dos lados sendo  $E$ . Como  $R$  é retração, então existe uma sequência de mergulhos  $R_i : \partial N_k \rightarrow (N_k \setminus f_k(\text{int } \mathbb{D}))$  tal que  $R_i$  converge para  $R$  no interior de cada 2-simplexo. Considere agora o 2-simplexo  $\sigma_1 \subset D_1$  tal que  $R(\sigma_1) = \sigma$ . Seja também  $\sigma_2$  o 2-simplexo

<sup>7</sup>Veja (LEE, 2010)

<sup>8</sup>Veja (BREDON, 1991) ou (LIMA, 2009)

Figure 3 – Representação de  $f_k(\mathbb{D})$ .

adjacente a  $\sigma_1$  ao longo de  $R^{-1}(E) \cap \sigma_1 = E_1$ . Com essa notação em mente, podemos observar que estamos nas mesmas condições do Lema 3.4, onde aqui o papel dos planos é desempenhado pelas folhas de  $f_k(\mathbb{D})$  que se auto-intersectam ao longo de  $E$ . Portanto,  $f_k$  não pode ser minimizante de área pelo Corolário 3.2. Essa contradição prova nossa afirmação.

Afirmação:  $f_1$  é um mergulho.

De fato, suponha que não seja um mergulho. Substituindo  $k$  por algum  $l < k$ , se necessário, podemos supor que  $S(f_{k-1}) \neq \emptyset$ . Seja  $\alpha : \tilde{N}_{k-1} \rightarrow \tilde{N}_{k-1}$  o único automorfismo de recobrimento diferente da identidade. Observe agora o seguinte: se  $x \in S(f_{k-1})$  então  $y = f_k^{-1} \circ \alpha \circ f_k(x) \in S(f_{k-1})$  por causa da comutatividade do diagrama e  $y \neq x$ . Pelo Lema 4.1 e pela terceira hipótese do teorema, existe uma curva de Jordan  $\gamma_1$  limitando um disco  $D_1 \subset \text{int } \mathbb{D}$  tal que

$$D_1 \cap S(f_{k-1}) = \gamma_1.$$

Chame  $\gamma_2 = f_k^{-1} \circ \alpha \circ f_k \circ \gamma_1$  e note que  $\gamma_2 \subset S(f_{k-1})$  é uma curva de Jordan limitando um domínio  $D_2$ . Além disso, temos  $f_k(D_2) = \alpha \circ f_k(D_1)$ . Isso nos diz que:

$$\text{Area}(f_{k-1}(D_2)) = \text{Area}(f_{k-1}(D_1)), \quad (37)$$

pela comutatividade do diagrama.

Defina duas aplicações  $h : D_2 \rightarrow D_1$  e  $g : \mathbb{D} \rightarrow N_{k-1}$  da seguinte forma:  $h := f_k^{-1} \circ \alpha \circ f_k$  e  $g(x) = f_{k-1}(x)$  se  $x \in \mathbb{D} \setminus D_2$  e  $g(x) = f_{k-1} \circ h(x)$  se  $x \in D_2$ . Claramente, a aplicação  $g$  é contínua, de classe  $C^1$  por partes e por (37) temos que

$$\text{Area}(g) = \text{Area}(f_{k-1}). \quad (38)$$

Vejam agora que  $g$  tem uma curva folding. Isso pode ser feito da seguinte forma: escolha um ponto  $p \in \gamma_1$  ( $q = h(p) \in \gamma_2$ ) tal que  $f_{k-1}$  transversal em  $p$ . Tome vizinhança  $U_1 \ni p$  e  $U_2 \ni q$  tal que  $f_{k-1}|_{U_1}$  e  $f_{k-1}|_{U_2}$  são mergulhados e transversais ao longo de um arco  $\beta : [0, 1] \rightarrow N_{k-1}$ . Para cada  $x \in \gamma_1$  ou  $x \in \gamma_2$  sejam  $t_x$  e  $\eta_x$  os vetores tangente e normal exterior a  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  respectivamente. A transversalidade de  $f_{k-1}$  nos diz que nos pontos com imagem em  $\beta([0, 1])$  o plano gerados por  $f_{k-1}(t_x)$  e  $f_{k-1}(\eta_x)$  e transversal ao plano gerado por  $f_{k-1}(t_{h(x)})$  e  $f_{k-1}(\eta_{h(x)})$ . Por outro lado, pela definição de  $g$  temos que:

$$g_*(-\eta_x) = f_{k-1}(-\eta_{h(x)}), \quad g_*(-\eta_x) = f_{k-1}(-\eta_x) \quad \text{e} \quad g_*(t_x) = f_{k-1}(t_{h(x)}).$$

Portanto  $\beta([0, 1])$  é uma curva folding para  $g$ , o absurdo agora segue do lema 3.2 e (38), uma vez que  $f_{k-1}$  é solução do problema de Plateau. Portanto  $f_1$  é um mergulho. Isso finaliza a prova do teorema.

## 4.2 Lema de Dehn

Finalizaremos nosso trabalho com uma versão do Lema de Dehn para variedade analíticas devido ao Meeks e Yau. Vamos obter esse resultado, como uma simple aplicação dos resultados de regularidades discutido na seção de existência do problema de Plateau e do Teorema 4.1. Antes porém, vamos fazer uma breve digressão sobre a história desse resultado.

O clássico Lema de Dehn, devido ao DEHN (1910) nos fala o seguinte:

**Teorema 4.2** (Dehn). *Seja  $M^3$  uma variedade suave, não necessariamente compacta, com bordo não-vazio. Seja  $D$  um 2-simplexo em  $M$  com auto-interseção (singularidades) tal que  $\partial D$  é um 1-simplexo simple (isto é, sem auto-interseção). Além disso, assuma que uma pequena vizinhança tubular de  $\partial D$  em  $D$  seja uma topologicamente um anel fechado sem auto-interseção. Então existe um 2-simplexo  $D_0$  com bordo  $C$  mergulhado em  $M$ .*

Infelizmente, a demonstração de Dehn para esse teorema tinha um pequeno erro, como foi verificado posteriormente por KNESER (1929). No entanto, um grande progresso no intuito de resolver esse problema foi dado por JOHANSSON (1935) e JOHANSSON (1938). Ele demonstrou que a validade do Lema de Dehn no caso orientável implica a validade do Lema de Dehn no caso não-orientável. Portanto, faltava saber se o Lema de Dehn era verdadeiro quando  $M^3$  fosse orientável.

A resposta para essa pergunta foi dada por PAPARKYRUAKOPOULOS (1957). Usando sutis técnicas topológicas de cortar e colar no interior, ele foi capaz de fazer deformações locais no 2-simplexo, sem modificar o bordo, até que no final do todo esse processo de cortar e colar todas as singularidades (auto-interseção) são removidas, e consequentemente obtemos um 2-simplexo com mesmo bordo e mergulhado em  $M^3$ .

Feita essa breve digressão sobre o clássico Lema de Dehn, podemos agora demonstrar uma versão desse teorema para o problema de Plateau em variedades analíticas.

Vamos obter essa versão desse clássico resultado como consequência das ferramentas analíticas desenvolvidas ao longo do trabalho.

**Corolário 4.1** (Versão analítica do Lema de Dehn). *Sejam  $M^3$  uma variedade analítica e convexa e  $\gamma$  uma curva de Jordan analítica em  $\partial M$  homotópica a um caminho constante em  $\partial M$ . Então, cada solução do problema de Plateau para  $\gamma$  é um mergulho.*

Demonstração: Sabemos pelo Teorema 3.8 que ou  $f$  aplica  $\mathbb{D}$  em  $\partial M$  ou  $f(\text{int } \mathbb{D}) \subset \text{int } M$ . Claramente, se  $f(\mathbb{D}) \subset \partial M$ , então  $f$  é um mergulho. Portanto, podemos supor que  $f(\text{int } \mathbb{D}) \subset \text{int } M$ .

Usando o fato que  $f$  é uma imersão mínima e que  $\gamma$  é uma curva analítica, obtemos pelo Teorema 3.2, pelo Teorema 3.4 e pelo Teorema 3.7 que  $f$  é uma aplicação analítica e uma imersão em  $\mathbb{D}$ , incluindo o bordo.

Afirmção: Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f|_{D_\epsilon}$  é um mergulho, onde  $D_\epsilon = \{x \in \mathbb{D} : |x| > 1 - \epsilon\}$ . Com efeito, para cada  $x \in \mathbb{S}^1$  existe uma meia bola  $B_x \subset \mathbb{D}$  contendo  $x$  tal que  $f|_{B_x}$  é um mergulho. Desde que  $\mathbb{S}^1$  é compacto, existe uma subcobertura finita  $B_1, \dots, B_k$  tal que  $\mathbb{S}^1 \subset \cup B_i$  e  $f|_{B_i}$  mergulho. Admita agora que não exista  $\epsilon > 0$  com a propriedade da afirmação. Nesse caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existem  $x_n \neq y_n$  em  $\mathbb{D}$  tais que  $|x_n| > 1 - \frac{1}{n}$ ,  $|y_n| > 1 - \frac{1}{n}$  e  $f(x_n) = f(y_n)$ . Passando a uma subsequências se necessário, podemos supor  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$ , de modo que  $f(x_0) = f(y_0)$  e  $x_0, y_0 \in \mathbb{S}^1$ . Por outro lado, como  $f$  é injetiva em  $\mathbb{S}^1$ , pela Proposição 3.1, então  $x_0 = y_0$ . Suponha agora que  $x_0 \in B_i$ . Claramente, se  $n$  é suficientemente grande, então devemos ter  $x_n, y_n \in B_i$  e  $f(x_n) = f(y_n)$ , mas isso contradiz o fato que  $f|_{B_i}$  é um mergulho.

Finalmente, pelo Teorema 2.6 a aplicação  $f$  é simplicial com respeito a alguma triangulação de  $\mathbb{D}$  e  $M^3$ . Portanto, todas as hipóteses do Teorema 4.1 são satisfeitas. Consequentemente,  $f$  é um mergulho.

## 5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho estudamos o problema de Plateau para variedades convexas. Aqui abordamos duas temáticas bem diferentes. Primeiro estudamos o problema da existência de soluções do problema de Plateau para esse tipo de variedades e a obtenção de algumas propriedades dessas soluções. Em um segundo plano, estudamos o problema de saber quando uma solução do problema de Plateau é um mergulho.

Na seção 3 nos dedicamos a dar uma resposta afirmativa para a existência do problema de Plateau para variedades convexas. A elegante ideia de MEEKS III and YAU (1982) para provar a existência da solução foi fazer um sutil mudança conforme na métrica de modo que essa nova métrica seja homogênea regular no sentido de Morrey. Assim, pelo resultado de existência de MORREY (1948) obtemos a existência da solução do problema de Plateau em um ambiente maior contendo nossa variedade convexa. Em seguida, usando o princípio do máximo, concluímos que a solução realmente pertence a nossa variedade convexa inicial.

Na seção 4 abordamos o problema de decidir quando uma solução do problema de Plateau é um mergulho. Nessa parte do trabalho, usamos técnicas topológicas, obtemos que, se a solução do problema de Plateau  $f : \mathbb{D} \rightarrow M$  satisfaz as seguintes condições:

- $S(f)$  é disjunto de  $\mathbb{S}^1$ ;
- $f$  seja simplicial com respeito a alguma triangulação de  $\mathbb{D}$  e  $M$ ;
- $f(\text{int } \mathbb{D}) \cap \partial M = \emptyset$ ,

então,  $f$  é um mergulho. Além desse resultado, obtemos uma versão analítica do Lema de Dehn. Esse resultado essencialmente nos diz o seguinte: Se  $M^3$  é uma variedade analítica e convexa, e se  $\gamma$  é uma curva de Jordan analítica em  $\partial M$  a qual é homotópica a um caminho constante em  $\partial M$ , então cada solução do problema de Plateau para  $\gamma$  é um mergulho. Em particular, esse resultado nos diz que se  $M$  é um corpo convexo no  $\mathbb{R}^n$ , e se  $\gamma$  é uma curva analítica que também é homotópica a um caminho constante, então toda solução do problema de Plateau é um mergulho.

Embora não tenhamos abordado aqui, existem outras temáticas interessantes que não foram comentadas. Por exemplo, a questão de saber quando a solução do problema de Plateau é única. Outra temática profunda é a questão de existência de soluções do problema de Plateau para um conjunto de curvas etc. Essas questões, e outros desenvolvimentos nessa linha de pesquisa podem ser vista em (DIERKES *et al.*, 1992a) e (DIERKES *et al.*, 1992b).

## REFERÊNCIAS

- BESSA, Gregório Pacelli; JORGE, Luquésio Petrola de Melo; MARI, Luciano. On the spectrum of bounded immersions. **J. Differential Geom.**, v. 99, n. 2, p. 215–253, 2015.
- BREDON, Glen Eugene. **Topology and geometry**. vol. 139. New York: Springer-Verlag (Graduate texts in mathematics), 1991.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Projeto Euclides), 2011.
- COLDING, Tobias Holck; MINICOZZI II, William Philip. **A course in minimal surfaces**. vol. 121. Rhode Island: American Mathematical Society (Graduate texts in mathematics), 2011.
- DEHN, Max. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. **Math. Ann.**, v. 69, n. 1, p. 137–168, 1910.
- DIERKES, Ulrich; HILDEBRANDT, Stefan; KÜSTER, Albrecht; WOHLRAB, Ortwin. **Minimal surface I**Boundary value problems. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften), 1992a.
- DIERKES, Ulrich; HILDEBRANDT, Stefan; KÜSTER, Albrecht; WOHLRAB, Ortwin. **Minimal surface II**Boundary regularity. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften), 1992b.
- DOUGLAS, Jesse. Solution of the problem of Plateau. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 33, n. 1, p. 263–321, 1931.
- GILBARG, David; TRUDINGER, Neil Sidney. **Elliptic partial differential equations of second order**. vol. 224. Berlin: Springer-Verlag (Classics in mathematics), 2001.
- GREENE, Robert E; WU, Hung. On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 22, n. 7, p. 641–653, 1973.
- GULLIVER II, Robert. Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature. **Ann. of Math. (2)**, v. 97, n. 2, p. 275–305, 1973.
- GULLIVER II, Robert; LESLEY, Frank David. On boundary branch points of minimizing surfaces. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 52, n. 1, p. 20–25, 1973.
- GULLIVER II, Robert; OSSERMAN, Robert; ROYDEN, Halsey. A theory of branched immersions of surfaces. **Amer. J. Math.**, v. 95, n. 4, p. 750–812, 1973.



HEINZ, Erhard; HILDEBRANT, Stefan. Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 23, n. 3, p. 371–377, 1970.

HEMPEL, John. **3-manifolds**. vol. 349. Rhode Island: American Mathematical Society, 1976.

HILDEBRANT, Stefan. Boundary behavior of minimal surfaces. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 35, n. 1, p. 47–82, 1969.

JACO, William. **Lectures on three-manifold topology**. vol. 43. Rhode Island: American Mathematical Society (Regional Conference Series in Mathematics), 1980.

JOHANSSON, Ingebrigt. Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma. **Math. Ann.**, v. 110, n. 1, p. 312–321, 1935.

JOHANSSON, Ingebrigt. Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma II. **Math. Ann.**, v. 115, n. 1, p. 658–669, 1938.

KNESER, Hellmuth. Geschlossene flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. **Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.**, v. 38, n. 4, p. 248–259, 1929.

LAWSON Jr, Herbert Blaine. **Lectures on minimal submanifolds**. vol.1. Berkeley: Publish or Perish, 1980.

LEE, John. **Introduction to smooth manifolds**. vol. 218. New York: Springer-Verlag (Graduate texts in mathematics), 2002.

LEE, John. **Introduction to topological manifolds**. vol. 202. New York: Springer-Verlag (Graduate texts in mathematics), 2010.

LEWY, Hans. On the boundary behavior of minimal surfaces. **Proc. Nat'l. Acad. Sci.**, v. 37, p. 103–110, 1951.

LIMA, Elon Lages. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2006.

LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2009.

MEEKS III, William Hamilton; YAU, Shing-Tung. The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds: the embedding of the solution given by Douglas-Morrey and an analytic proof of Dehn's Lemma. **Topology**, v. 21, n. 4, p. 409–442, 1982.

MORREY, Charles Bradfield. The problem of Plateau on a Riemannian manifold.

**Ann. of Math. (2)**, v. 49, n. 4, p. 807–851, 1948.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de geometria diferencial**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção Fronteiras da Matemática), 2014.

OSSERMAN, Robert. A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem. **Ann. of Math.(2)**, v. 91, n. 3, p. 550–569, 1970.

PAPARKYRUAKOPOULOS, Christos Dimitriou. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. **Ann. of Math. (2)**, v. 66, n. 1, p. 1–26, 1957.

PETERSEN, Peter. **Riemannian geometry**. 3. ed. New York: Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics), 2006.

RADÓ, Tibor. On Plateau's problem. **Ann. of Math.(2)**, v. 31, n. 3, p. 457–469, 1930.

Radó, Tibor. **On the problem of Plateau**. vol.2 Berlin: Springer (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete), 1933.

ROURKE, Colin P; SANDERSON, Brian Joseph. **Introduction to piecewise-linear topology**. vol. 69. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

XIN, Yaunlong. **Geometry of harmonic maps**. 1. ed. New York: Birkhäuser (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications), 1996.