UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE PENALIZADO PELA CURVATURA MÉDIA E O FUNCIONAL DE WILLMORE

FORTALEZA
2019

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE PENALIZADO PELA CURVATURA MÉDIA E O FUNCIONAL DE WILLMORE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise Geométrica.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V715p Vieira, Francisca Damiana.
Primeiro autovalor do operador de Laplace penalizado pela curvatura média e o funcional de Willmore / Francisca Damiana Vieira. – 2019.
57 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Operador de Laplace. 2. primeiro autovalor. 3. operador de Schrödinger. 4. funcional de Willmore. I. Título.

CDD 510

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR DE LAPLACE PENALIZADO PELA CURVATURA MÉDIA E O FUNCIONAL DE WILLMORE

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise Geométrica.

Aprovada em: 18/06/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Luiz Antônio Caetano Monte
Universidade Federal do Ceará-Campus Russas (UFC/Russas)

Aos meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Nesse momento tão especial da minha vida, venho expressar minha gratidão a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão do meu doutorado.

Primeiramente agradeço a Deus por todo amor e por permanecer sempre comigo.

Agradeço aos meus pais, Antonio e Moça, por todo amor, dedicação, carinho, incentivo e por serem exemplos de determinação.

Aos meus irmãos, Francisco, Antonia, Aparecida e Leidmar e aos meus sobrinhos Lívia e Edmundo por todo amor, carinho, amizade e pelos momentos de descontração. Em especial, a Leidmar por todo incentivo e confiança depositados em mim e no meu trabalho. E principalmente, por ter despertado em mim a paixão e encanto pela área de Matemática.

Aos meus cunhados, Francisco e Tiago por toda amizade, conversas e brincadeiras.

Ao professor Fábio Montenegro pela paciência, ética e amizade sempre presentes na sua orientação e principalmente pelos inúmeros conhecimentos transmitidos.

Agradeço ao professor Levi Lima pela ideia do problema e contas iniciais para desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores, Abdênago Alves, Cleon da Silva, Barnabé Pessoa e Luiz Antonio por terem aceitado o convite em participar da banca examinadora.

A todos os professores da Pós-graduação em Matemática da UFC que contribuíram diretamente na minha formação.

A todos os meus amigos da Pós-graduação (alunos e ex-alunos), minha gratidão por toda amizade e discussões matemáticas. Em particular, agradeço ao José Ilhano por toda amizade, incentivo, discussões matemáticas, conversas e brincadeiras ao longo de toda a minha Pós-graduação.

Aos professores do IFE/UFCA pelo apoio à liberação do meu afastamento para a conclusão desse doutorado, principalmente aos colegas matemáticos.

Agradecimentos também a Andréa Dantas e Jessyca Soares, secretárias da Pós-graduação, por toda competência, agilidade e simpatia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001.

“A persistência é o caminho do êxito. ”
(CHARLES CHAPLIN)

RESUMO

Neste trabalho, provaremos alguns resultados para o primeiro autovalor de um operador diferencial linear do tipo Schrödinger

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{n}\mathbf{H}^2,$$

definido sobre hipersuperfícies fechadas, com mesmo volume da esfera e imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde $-\Delta$ é o operador de Laplace-Beltrami e $\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{n} k_j$, sendo k_j as curvaturas principais na hipersuperfície. Sobre essas condições, exibiremos uma generalização local para o resultado clássico do funcional de Willmore para a esfera euclidiana. Como consequência, provaremos que o primeiro autovalor desse operador na esfera euclidiana é um máximo local e que esse resultado é global no espaço das hipersuperfícies fechadas de $\mathbb{R}^3$ e gênero zero.

Palavras-chave: Operador de Laplace. Primeiro autovalor. Operador de Schrödinger. Funcional de Willmore.

ABSTRACT

In this work, we will prove some results for the first eigenvalue of a linear differential Schrödinger operator

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{n}\mathbf{H}^2,$$

defined on closed hypersurfaces with the same volume of the sphere and immersed in $\mathbb{R}^{n+1}$, where $-\Delta$ is the Laplace-Beltrami operator and $\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{n} k_j$, with k_j the hypersurface principal curvatures. Under these conditions, we will show a local generalization for the classical result of the Willmore functional for the Euclidean sphere. As a consequence, we will prove that the first eigenvalue of this operator in the Euclidean sphere is a local maximum and this result is a global one in the closed hypersurface space of $\mathbb{R}^3$ and genus zero.

Keywords: Laplace operator. First eigenvalue. Schrödinger operator. Willmore functional.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo dessa tese é apresentar resultados que estabelecem uma relação entre o primeiro autovalor de um operador do tipo Schrödinger e teoremas de rigidez para a esfera. Considere o operador de Jacobi

$$L = -\Delta - |II|^2$$

onde $-\Delta : \mathcal{C}_0^\infty(M) \to \mathcal{C}_0^\infty(M)$ é o operador de Laplace definido por $\Delta u = div(\nabla u)$ e $|II|^2 = \sum_{j=1}^{n} k_j^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental. Esse operador surge de forma natural em problemas físicos e geométricos envolvendo estabilidade

Teorema 1.1 (BARBOSA and CARMO (1984)) *Um domínio D numa variedade M^n orientada e compacta é estável se e só se $\int_D(-f\Delta f - |II|^2 f^2)\mathrm{dM} \geq 0$ para toda função f em ∂D e $\int_M f\mathrm{dM} = 0$.*

E em problemas de rigidez, como foi conjecturado em 1993 por Alikakos e Fusco

Conjectura 1 (ALIKAKOS and FUSCO (1993)) *(a) Suponha que Ω é uma superfície suave, compacta, simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$. O segundo autovalor de*

$$L = -\Delta - \sum_j k_j^2$$

é maximizado por zero, precisamente quando Ω é uma esfera.
(b) Suponha que Ω é uma curva no plano, suave, simples e fechada. O segundo autovalor de

$$L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{ds}^2} - k^2$$

é maximizado por zero, precisamente quando Ω é um círculo.

Foi na elaboração de uma prova definitiva para essa conjectura, que Harrell e Loss perceberam que para trabalhar sua técnica em cenários mais gerais que $\mathbb{R}^3$ havia a necessidade de modificar o potencial desse operador. Diante disso, apresentaram um resultado cuja conjectura segue imediatamente como consequência

Teorema 1.2 (HARRELL II and LOSS (1998)) *Seja Ω uma hipersuperfície diferenciável compacta de dimensão d imersa em $\mathbb{R}^{d+1}$; em particular auto-interseções são permitidas. A métrica na superfície é a métrica euclidiana padrão herdada de $\mathbb{R}^{d+1}$. Então,o segundo autovalor λ_2 do operador*

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{d}\mathbf{H}^2$$

é estritamente negativo a menos que Ω seja uma esfera, neste caso λ_2 é igual a zero.

Nesta tese iremos trabalhar com esse novo operador apresentado por Harrel e Loss. Exibiremos sua definição formal, a seguir

Definição 1 *Seja M uma hipersuperfície compacta e sem bordo imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e considere o operador diferencial linear do tipo Schrödinger, denotado por $\mathcal{L}$, definido da seguinte forma*

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{n}\mathbf{H}^2,$$

onde $-\Delta$ é o operador de Laplace-Beltrami e $\mathbf{H} : M \to \mathbb{R}$ é o operador multiplicação associado ao potencial $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x)$ no espaço de Hilbert $L^2(M)$, que corresponde ao quadrado de n vezes a curvatura média em M, ou seja, $\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{n} k_j$ onde k_j são as curvaturas principais em M.

No desenvolvimento de nossos resultados para o operador $\mathcal{L}$, usamos o funcional, conhecido como a energia de Willmore, que associa a toda superfície compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ uma quantidade

$$W(S) = \frac{1}{2\pi}\int_S \mathrm{H}^2 \mathrm{dS} = \frac{1}{2\pi}\int_S \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 \mathrm{dS}.$$

Esse funcional surge naturalmente em outras ciências, como no estudo de: conchas elásticas [POISSON (1814)], [GERMAIN (1821)] e membranas celulares [TODA and ATHUKORALAGE (2013)]. Na matemática, ele ficou bastante conhecido pela famosa Conjectura de Willmore, proposta em 1965 e provada em [MARQUES and NEVES (2014)]

Conjectura 2 (WILLMORE (1965)) *Toda superfície compacta S de gênero 1 em $\mathbb{R}^3$ deve satisfazer*

$$W(S) \geq \pi.$$

Além disso, $W(S) = \pi$ se, e somente se, S é o toro de revolução gerado por um círculo de raio um e centrado a uma distância $\sqrt{2}$ do eixo de revolução:

$$(u, v) \longmapsto ((\sqrt{2} + \cos u)\cos v, (\sqrt{2} + \cos u)\sin v, \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

Nesse mesmo trabalho, Willmore provou o seguinte teorema:

Teorema 1.3 (WILLMORE (1965)) *Toda superfície compacta S de gênero 0 em $\mathbb{R}^3$ satisfaz*

$$W(S) \geq 2.$$

Além disso, $W(S) = 2$ se, e somente se, S é uma esfera euclidiana.

Com base nesse resultado e usando variações por hipersuperfícies de volume constante, provamos que o funcional de Willmore atinge seu mínimo local na esfera $\mathbb{S}^n$ para $n > 2$

Teorema 1.4 *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos uma variedade imersa M_t^n com o mesmo volume de $\mathbb{S}^n$, obtida por uma variação que preserva volume, tal que $M_0 = \mathbb{S}^n$. Então para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos*

$$W(M_t) \geq n. \tag{1}$$

Além disso, $W(M_t) = n$ se, e somente se, M_t é uma esfera euclidiana.

E conjecturamos

Conjectura 3 *Toda hipersuperfície compacta M^n de gênero 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$ com mesmo volume da esfera unitária deve satisfazer*

$$\mathcal{W}(M) \geq n. \tag{2}$$

Além disso, $\mathcal{W}(M) = n$ se, e somente se, M é a esfera euclidiana.

Posteriormente, usamos o Teorema 1.3 para provar que o primeiro autovalor do operador $\mathcal{L}$ atinge seu máximo global na esfera $\mathbb{S}^2$

Teorema 1.5 *Considere o operador $\mathcal{L} : H^2(S) \to L^2(S)$ definido por*

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2, \tag{3}$$

onde Δ e $\mathbf{H}$ são, respectivamente, o laplaciano e 2 vezes a curvatura média relacionados a métrica induzida em S a partir da métrica de $\mathbb{R}^3$. O primeiro autovalor λ_1^0 do operador $\mathcal{L}$ na esfera $\mathbb{S}^2$ é máximo global entre todos os primeiros autovalores de $\mathcal{L}$ nas superfícies S de gênero 0 com mesmo volume de $\mathbb{S}^2$.

Em seguida, usando o Teorema 1.4 provamos que o primeiro autovalor atinge seu máximo local na esfera $\mathbb{S}^n$, para $n > 2$

Teorema 1.6 *Considere a variação da esfera $X_t(\mathbb{S}^n)$ que preserva volume. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos um operador diferencial linear*

$$\mathcal{L}_t = -\Delta^t - \frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2, \tag{4}$$

onde Δ^t e $\mathbf{H}_t$ são, respectivamente, o laplaciano e n vezes a curvatura média $\overline{\mathrm{H}}_t$ relacionados a métrica $(\bar{g}_t)_{ij}$ induzida em $M_t = X_t(\mathbb{S}^n)$. Então, o primeiro autovalor λ_1^t do operador $\mathcal{L}_t$ atinge um máximo local em $t = 0$, isto é, o primeiro autovalor λ_1^0 do operador $\mathcal{L}_0$ definido em $X_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$ é máximo entre os primeiros autovalores das hipersuperfícies $X_t(\mathbb{S}^n)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Essa tese está estruturada da seguinte maneira: no Capítulo 2 temos alguns resultados necessários para o entendimento desse trabalho, já o Capítulo 3 contém todo o estudo dessa tese em relação a variações de imersões. O Capítulo 4 dedicamos aos resultados ligados a Willmore, enquanto que o Capítulo 5 foi reservado aos resultados obtidos em relação ao operador trabalhado $\mathcal{L}$.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo dessa seção é fazer um breve apanhado dos objetos e resultados que serão necessários para o entendimento das próximas seções.

2.1 Métrica Riemanniana

Iniciaremos com a definição de métrica Riemanniana e a partir dessa daremos toda uma estruturação geométrica sobre as variedades imersas.

Definição 2 *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 3 *Uma variedade diferenciável M com uma métrica g é chamada variedade Riemanniana.*

Proposição 1 *Toda variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*
Demonstração: Vide [CARMO (2005)].

Definição 4 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado de isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{para todo } p \in M, u, v \in T_pM. \tag{5}$$

Com as definições de métrica e isometria podemos introduzir os conceitos de imersões isométricas e métrica induzida.

Definição 5 *Seja $f : (M^n, g^M) \to (N^{n+k}, g^N)$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo p em M. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemmaniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, u, v \in T_pM$, ou seja, $g^M = f^*g^N$. Como df_p é injetiva, $\langle , \rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da Definição 2 seguem naturalmente. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica. Além disso, se f for um difeomorfismo (local) e* *uma imersão isométrica dizemos que f é uma isometria (local).*

Temos as ferramentas necessárias para definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada.

Definição 6 *Definimos o volume $vol(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$*

$$vol(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{6}$$

A expressão acima está bem definida. Com efeito, se R está contido em outra vizinhança coordenada $\mathbf{y}(V)$ de uma parametrização positiva $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \to M$, teremos com as notações acima e pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas,

$$\int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$
$$\int_{\mathbf{y}^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})}\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = vol(R),$$

o que mostra que a definição 6 não depende do sistema de coordenada escolhido.

Teorema 2.1 *(Teorema da Função Implícita) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ um subconjunto aberto, e denote por $(x, y) = (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^k)$ as coordenadas padrão em U. Suponha que $\mathbf{\Phi} : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função suave, $(a, b) \in U$ e $c = \mathbf{\Phi}(a, b)$. Se a matriz $k \times k$*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}^i}{\partial y^j}(a, b) \right)$$

é não-singular, então existem vizinhanças $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ de a, $W_0 \subseteq \mathbb{R}^k$ de b e uma função suave $\mathbf{F} : V_0 \longrightarrow W_0$ tal que $\mathbf{\Phi}^{-1}(c) \cap (V_0 \times W_0)$ é gráfico de $\mathbf{F}$, ou seja, $\mathbf{\Phi}(x, y) = c$ para $(x, y) \in V_0 \times W_0$ se, e somente se $y = \mathbf{F}(x)$.

Demonstração: Vide [LEE (2013)].

2.2 Conexões Afim

Definição 7 *Sejam $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe $\mathcal{C}^\infty$ definidas em M. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 8 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c, *denominado derivada covariante de* V *ao longo de* c, *tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde* V *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I.

c) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathcal{X}(M)$, *i.e.,*$V(t) = Y(c(t))$, *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 9 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = 0$, *para todo* $t \in I$.

Definição 10 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle , \rangle$. *A conexão é dita compatível com a métrica* $\langle , \rangle$, *quando para toda curva* c *e quaisquer pares de campos de vetores paralelos* P *e* P' *ao longo de* c, *temos* $\langle P, P' \rangle$*=constante.*

Proposição 2.1 *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Uma conexão* ∇ *em* M *é dita compatível com a métrica se, e só se, para todo par* V *e* W *de campos de vetores ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \tag{7}$$

Demonstração: Vide [CARMO (2005)].

Corolário 1 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{8}$$

Demonstração: Suponha que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t \in I$, e com $\frac{dc}{dt}\big|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z \rangle\bigg|_{t=t_0} = \langle \nabla_X(p)Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_X(p)Z \rangle_p.$$

Como p é arbitrário, segue-se (8). A recíproca é óbvia.

Definição 11 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Teorema 2.2 *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ é simétrica.

b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração: Vide [CARMO (2005)]

2.3 Curvatura Seccional

Definição 12 *(Operador Curvatura) A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z \in \mathcal{X}(M), \tag{9}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana (2.2) em M.

Proposição 2.2 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração: Vide [CARMO (2005)]

O operador curvatura está diretamente relacionado a curvatura seccional(ou Riemanniana) que definiremos posteriormente.

Notação: Dado um espaço vetorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}, \tag{10}$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 2.3 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2} \tag{11}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração: Para evitar cálculos, observemos que podemos passar da base $\{x, y\}$ de σ para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iterações das seguintes transformações elementares:

a) $\{x, y\} \to \{y, x\}$,

b) $\{x, y\} \to \{\lambda x, y\}$,

c) $\{x, y\} \to \{x + \lambda y, y\}$.

É fácil ver que $K(x, y)$ é invariante por tais transformações. De fato, mostraremos isso em c)

$$K(x + \lambda y, y) = \frac{\langle R(x + \lambda y, y)x + \lambda y, y\rangle}{|(x + \lambda y) \wedge y|^2} \tag{12}$$

Usando (9) e a Proposição2.2

$$\langle R(x + \lambda y, y)x + \lambda y, y\rangle = \langle R(x, y)x, y\rangle$$

Por outro lado, usando a expressão (10) e propriedades de produto interno e norma

$$|x + \lambda y|^2|y|^2 - \langle x + \lambda y, y\rangle^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$$

e portanto,

$$K(x + \lambda y, y) = K(x, y).$$

Os outros casos saem de forma análoga, o que demonstra o afirmado.

Definição 13 *(Curvatura Seccional) Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer (garantido pela Proposição anterior) de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

2.4 Primeira Forma e Segunda Forma

Nesta seção apresentaremos os instrumentos que nos permitem estudar as relações entre as geometrias de uma variedade imersa M e a variedade ambiente $\overline{M}$. Para o que segue seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão igual a $k = n+m$. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. A métrica Riemanniana em $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica em M : se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

Definição 14 *(Primeira Formal Fundamental) Seja M uma subvariedade mergulhada em $\overline{M}$ e $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ a aplicação de inclusão com a métrica em M induzida por $\overline{M}$. Denotando por g a métrica do ambiente $\overline{M}$, a métrica induzida i^*g na variedade mergulhada M é chamada primeira forma fundamental (por vezes também será denotada por g.).*

Precisamos considerar a conexão Riemanniana em M associada a primeira forma i^*g.

Definição 15 *Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores de M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais para $\overline{M}$, definimos*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Notação: Indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \equiv U$.

A relação entre a conexão do ambiente $\overline{\nabla}$ e a conexão tangente ∇ é descrita pelo tensor $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ definido por

Definição 16 *(Tensor Segunda Forma Fundamental)*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões de X e Y, respectivamente.

Proposição 2.4 *O tensor $B(X, Y)$ definido acima é bilinear e simétrico.*

Demonstração: Vide [CARMO (2005)].

Definição 17 *(Segunda Forma Fundamental) Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_pM,$$

é, pela Proposição 2.4, uma forma bilinear e simétrica. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

Definição 18 *(Operador de Weingarten) Associado à aplicação bilinear H_η temos uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por*

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Temos uma expressão para o operador de Weingartem em termo da derivada covariante

Proposição 2.5 *Seja $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T. \tag{13}$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y \rangle \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

2.5 Hipersuperfícies

Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma hipersuperfície.

Definição 19 *(Curvaturas Principais) Seja $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ com $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \geq n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas (i.e, escolhemos orientações para M e $\overline{M}$) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos* *que sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \ldots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os λ_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f.*

As funções simétricas de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo:

1. $\mathcal{K} = \det(S_\eta) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ é denominada a **curvatura de Gauss-Kronecker** de f;
2. $\mathrm{H} = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ é denominada a **curvatura média** de f.

Teorema 2.3 *(Gauss). Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2. \tag{14}$$

Demonstração: Vide [CARMO (2005)].

Observação 1 *No caso em que $M = M^2 \subset \overline{M} = \mathbb{R}^3$, o produto $\lambda_1\lambda_2$ das curvaturas principais é conhecido como a* **curvatura Gausssiana** *da superfície. Neste caso, a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional, Definição 13, em uma superfície. Isso decorre da fórmula de Gauss dada acima por (14) que relaciona a curvatura seccional em uma variedade com a curvatura seccional no ambiente.*

Um resulta de grande relevância no estudo de hipersuperfícies é o teorema atribuído a Alexandrov, que caracteriza a esfera e será usado adiante.

Teorema 2.4 *(Teorema de Alexandrov) As únicas hipersuperfícies compactas, conexas, de curvatura média constante, mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ são as esferas.*

Demonstração: Vide [ALEKSANDROV (1962)].

2.6 Operadores Diferenciais

Usando a derivação covariante de tensores podemos estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais, como o gradiente, Laplaciano e Hessiano, que serão muito utilizados no decorrer desse trabalho.

Definição 20 *(Gradiente) Seja M uma variedade Riemanniana. O gradiente de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$ é o único campo de vetores $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$ que satisfaz a equação*

$$\langle \nabla f, X\rangle = Xf, \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

ou equivalentemente,

$$\langle \nabla f, .\rangle = df.$$

Em coordenadas locais, ∇f tem a expressão

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{15}$$

Definição 21 *(Divergência) Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores. A divergência de X, $div(X)$, é o traço do operador $Y \mapsto \nabla_Y X$.*

Teorema 2.5 *(Teorema da Divergência) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada com bordo. Para qualquer campo vetorial suave X compactamente suportado em M,*

$$\int_M (divX)\mathrm{dV_g} = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle \mathrm{dV_{\tilde{g}}},$$

onde N é o campo vetorial normal unitário apontando para fora ao longo de ∂M e $\tilde{g}$ é a métrica Riemanniana induzida em ∂M.

Demonstração: Vide [LEE (2013)].

Definição 22 (Laplaciano) *Seja (M, g) uma n-variedade Riemanniana com ou sem bordo. O operador linear*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & u & \longmapsto & -div(\nabla u), \end{array}$$

é chamado de Laplaciano. Em coordenadas locais Δu tem a expressão

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right). \tag{16}$$

Teorema 2.6 (Fórmulas de Green) *Seja $h \in \mathcal{C}^1, f \in \mathcal{C}^2$ funções em M tal que $h\nabla f$ tem suporte compacto, então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\}\mathrm{d}V = 0. \tag{17}$$

Se também assumimos que $h \in \mathcal{C}^2$ e ambas f, h tem suporte compacto, então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}\mathrm{d}V = 0. \tag{18}$$

Definição 23 (Hessiano) *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$ uma função diferenciável. Definimos o Hessiano de f como o (0,2)-tensor*

$$\begin{array}{rccc} (\nabla^2 f) : & \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \end{array} \tag{19}$$

ou como o (1,1)-tensor

$$\begin{array}{rccc} (\nabla^2 f): & \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ & X & \longmapsto & \nabla_X \nabla f, \end{array} \tag{20}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Observação 2 *Segue imediatamente de (19) que para cada $p \in M$*

$$tr\{v \mapsto (\nabla^2 f)(v)(p)\} = div(\nabla f)(p) = \Delta f(p),$$

onde tr denota o traço do hessiano.

Apresentaremos algumas definições envolvendo os autovalores e autofunções do operador de Laplace, que serão usados posteriormente na demonstração de alguns resultados. Para mais detalhes, vide CHAVEL (1984).

Definição 24 *Um número real λ é chamado um* **autovalor de** $-\Delta$ *se existe uma função real $u \in \mathcal{C}^2$ em M, não identicamente nula, tal que*

$$-\Delta u = \lambda u. \tag{21}$$

Neste caso, u é chamada uma **autofunção** *correspondente a λ. O espaço de soluções da equação acima para um dado autovalor λ é chamado seu* **auto-espaço**.

Existe uma base ortonormal $\{\phi_j\}_{j\leq 0}$ de $L^2(M)$ formada por autofunções, ou seja,

$$-\Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j \;\; e \;\; \langle\phi_j, \phi_k\rangle_2 := \int_M \phi_j\phi_k \mathrm{d}V = \delta_{jk} \tag{22}$$

e os autovalores satisfazem

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \uparrow \infty,$$

e se repetem de acordo com sua multiplicidade.

Primeiramente, sabendo que ϕ é uma autofunção de $-\Delta$ segue que seu autovalor λ deve ser não-negativo. De fato, fazendo $f = h = \phi$ e aplicando na Fórmula de Green (17), obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda\phi = -\Delta\phi \\ \Rightarrow \; & \langle -\Delta\phi - \lambda\phi, \phi\rangle_2 = 0 \\ \Rightarrow \; & \lambda\int_M \phi^2 \mathrm{d}V = -\int_M \phi\Delta\phi \mathrm{d}V \\ \Rightarrow \; & \lambda||\phi||_2^2 = \int_M |\nabla\phi|^2 \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda = ||\phi||^{-2} \int_M |\nabla\phi|^2 \mathrm{d}V \geq 0. \tag{23}$$

Além disso, de (23) temos que se $\lambda = 0$ então ϕ é uma função constante e dessa forma segue que $\lambda_0 = 0$. Notamos ainda que a ortogonalidade de auto-espaços distintos é uma consequência direta da Fórmula de Green (18). De fato, sejam φ, ψ autofunções dos autovalores λ, τ respectivamente. Então,

$$0 = \int_M \{\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\}\mathrm{d}V = (\lambda - \tau)\int_M \varphi\psi \mathrm{d}V$$

e segue o resultado. Por fim, se $\phi_1, \phi_2, \ldots$ é uma sequência ortonormal em $L^2(M)$ de autofunções tal que ϕ_j é uma autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$ então $\phi_1, \phi_2, \ldots$ é uma sequência ortonormal completa de $L^2(M)$. Em particular, para $f \in L^2(M)$ temos

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j \tag{24}$$

em $L^2(M)$, e

$$||f||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle^2. \tag{25}$$

Definição 25 (O operador diferencial $\mathcal{L}$) *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos o operador*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & H^2(M) & \longrightarrow & L^2(M) \\ & f & \longmapsto & \left(-\Delta - \dfrac{1}{n}\mathbf{H}\right)(f), \end{array}$$

onde Δ e $\mathbf{H}$ são, respectivamente, o Laplaciano (Definição 22) e n vezes a curvatura média na métrica induzida em M a partir da métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observação 3 *$\mathcal{L}$ é um operador do tipo Schrödinger, esse tipo de operador emergiu da teoria ondulatória da matéria formulada pelo físico austríaco Erwin Schrödinger na terceira década do século XX e é caracterizado por*

$$-\Delta + V,$$

onde $V : M \to \mathbb{R}$ é o operador multiplicação associado ao potencial $V = V(x)$ no espaço de Hilbert $L^2(M)$ e $-\Delta$ é o operador de Laplace. Em particular, trabalhamos com o operador cujo o potencial é dado por $V = \dfrac{1}{n}\mathbf{H}$, sendo $\mathbf{H}$ igual a n vezes a curvatura *média na variedade Riemanniana M, ou seja,* $\mathbf{H} = n\mathrm{H} = \sum_{j=1}^{n} k_j$.

Observação 4 *Para qualquer função contínua V em M o espectro de $-\Delta + V$ consiste de uma sequência crescente e ilimitada de autovalores*

$$\lambda_1(-\Delta + V) < \lambda_2(\Delta + V) \leq \lambda_3(-\Delta + V) \leq \ldots .$$

O primeiro autovalor $\lambda_1(-\Delta + V)$ é conhecido por ser simples e satisfazer (em virtude do Princípio do Minimax)

$$\lambda_1(-\Delta + V) \leq \frac{1}{V(M)} \int_M V dv_g,$$

onde $V(M)$ e dv_g, respectivamente, é o volume e o elemento de volume Riemanniano de (M, g). Além disso, essa desigualdade é restrita a menos que V seja constante.

Definição 26 *Considerando um operador elíptico L, chamamos $\lambda_1 > 0$ o autovalor principal de L.*

Teorema 2.7 (Princípio Variacional para o autovalor principal) .

(i) Temos

$$\lambda_1 = min\{B[u, u]; u \in H_0^1(U), ||u||_{L^2} = 1\}. \tag{26}$$

(ii) Além disso, o mínimo acima é atingido em uma função w_1, positiva no interior de U, que resolve

$$\begin{cases} Lw_1 & = & \lambda_1 w_1 & em\ U \\ w_1 & = & 0 & em\ \partial U. \end{cases}$$

(iii) Finalmente, se $u \in H_0^1(U)$ é qualquer solução fraca de

$$\begin{cases} Lw_1 & = & \lambda_1 w_1 & em\ U \\ w_1 & = & 0 & em\ \partial U, \end{cases}$$

então u é um múltiplo de w_1.

Demonstração: Vide EVANS (2010).

Observação 5 *(i) A afirmação (iii) diz que o autovalor principal λ_1 é simples. Em particular,*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots .$$

(ii) A expressão (26) é a fórmula de Rayleigh e é equivalente a afirmação

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(U) \\ u \neq 0}} \frac{B[u, u]}{||u||^2_{L^2(U)}}.$$

3 VARIAÇÕES POR HIPERSUPERFÍCIES DE VOLUME CONSTANTE

3.1 Variações da esfera por hipersuperfícies de volume constante

Definição 27 *(Variação de uma imersão) Seja* $h : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas* M^n *e* $\overline{M}^{n+m}$*. Uma variação de* h *é uma aplicação diferenciável*

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \to \overline{M}^{n+m}$$

tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*, a aplicação* $F_t : M^n \to \overline{M}^{n+m}$*, definida para* $p \in M$ *por* $F_t(p) = F(t, p)$*, é uma imersão isométrica, com* $F_0 = h$*.*

Proposição 3.1 *Sejam* $\Phi : U \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma parametrização da esfera,* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ *e* $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to (-\delta, \delta)$ *funções suaves. Então, existe uma variação por uma família de mergulhos*

$$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^{n+1}$$

$$X(t, x) = (1 + t(f \circ \Phi)(x) + \varphi(t))\Phi(x) \tag{27}$$

tal que $vol(X_t(\mathbb{S}^n)) = vol(\mathbb{S}^n)$ *para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*.*

Demonstração: Considere a família de mergulhos

$$X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^{n+1}$$

$$X(t, s, x) = (1 + t(f \circ \Phi)(x) + s)\Phi(x)$$

para t e s suficientemente pequenos.

Iremos denotar $f(\Phi(x)) = f(x)$. Passemos a calcular o volume de tal imersão. Temos que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x_i} = t\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Phi + (1 + t(f \circ \Phi)(x) + s)\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \\ \bar{g}_{ij}(t, s) = \left\langle \dfrac{\partial X}{\partial x_i}, \dfrac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = t^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + (1 + t(f \circ \Phi)(x) + s)^2 g_{ij}. \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial s}(0, 0) = 2\, g_{ij}.$$

Por outro lado, denotando por $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{ij})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\bar{g}(t, s)} &= \frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\bar{g}(t, s)}\,\frac{\sqrt{\bar{g}(t, s)}}{\sqrt{\bar{g}(t, s)}} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\ln\sqrt{\bar{g}(t, s)}\right).\sqrt{\bar{g}(t, s)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\ln \overline{g}(t,s)\right).\sqrt{\overline{g}(t,s)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}^{ij}\ \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial s}\right)\sqrt{\overline{g}(t,s)}.$$

E para $t = s = 0$, temos

$$\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial s}\right)(0,0) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g_{ij}\right)\sqrt{g} = n\sqrt{g}.$$

O volume da imersão é dado por

$$V(t,s) = \int_U \sqrt{\overline{g}(t,s)}\ dx.$$

Então,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t,s) = \int_U \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{\overline{g}(t,s)}\right) dx.$$

E para $t = s = 0$, temos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)(0,0) = n\int_U \sqrt{g}\, dx = n\, vol(\mathbb{S}^n) > 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita (2.1) aplicado à função $(t,s) \mapsto V(t,s)$, existe uma vizinhança $(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\delta,\delta)$ da origem $(0,0)$ e uma função $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to (-\delta,\delta)$ suave com $\varphi(0) = 0$ e satisfazendo

$$V(t,\varphi(t)) = V(0,0),\ \ \forall\, t \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Além disso,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0) = -\frac{(\partial V/\partial t)\,(0,0)}{(\partial V/\partial s)\,(0,0)} = -\frac{1}{n\, vol(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n} f d\mathbb{S}^n.$$

Observação 6 *O cálculo de* $\frac{\partial V}{\partial t}(0,0)$ *será feito posteriormente na Proposição 3.2.*

Daí concluímos que

$$\varphi(t) = \left(\frac{-1}{n\, vol(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n} f d\mathbb{S}^n\right) t + O(t^2).$$

Observe que φ também depende de f e, portanto de x. Porém,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big|_{t=0} = 0. \tag{28}$$

E ainda,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{t=0} = 0. \tag{29}$$

Consequentemente,

$$\nabla(f + \varphi'(0)) = \nabla f \qquad \text{e} \qquad \Delta(f + \varphi'(0)) = \Delta f.$$

Segue que a variação da esfera $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$X(t, x) = (1 + t(f \circ \Phi)(x) + \varphi(t))\Phi(x)$$

preserva volume.

3.2 Diferenciais de elementos geométricos

Por simplicidade, no decorrer dessa seção vamos omitir o t em todos os elementos geométricos definidos sobre $X_t(M)$ e denotaremos os mesmos apenas com uma barra sobreposta.

3.2.1 Diferenciais de primeira ordem em relação a t

Seja $X_t(x) = (1 + tf + \varphi(t))\Phi$ a variação definida na Proposição 3.1. Sua derivada em $t = 0$ é dada por

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = (f + \varphi'(t))\Phi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = (f + \varphi'(0))\Phi$$

onde utilizamos a notação simplificada $f = f \circ \Phi$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X_t}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(t\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + (1 + t\,f + \varphi(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + (f + \varphi'(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial X_t}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Phi + (f + \varphi'(0))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

onde $\partial f/\partial x_i = \partial(f \circ \Phi)/\partial x_i$.

Por outro lado, para cada imersão X_t o tensor métrico correspondente é

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ij} &= \left\langle \frac{\partial X_t}{\partial x_i}, \frac{\partial X_t}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \left\langle \left(t\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + (1 + tf + \varphi(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \left(t\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\Phi + (1 + tf + \varphi(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= \left(t\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + (1 + tf + \varphi(t))^2 g_{ij}.
\end{aligned}$$

Observe que $\det(\bar{g}_{ij}) = \det(g_{ij}) + O(t)$. Consequentemente, para t suficientemente pequeno $\bar{g}_{ij}$ é uma métrica riemanniana.

Proposição 3.2 *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos uma imersão X_t definida em (27) e consequentemente uma hipersuperfície mergulhada M_t^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, com o mesmo volume de $\mathbb{S}^n$, tal que $M_0 = \mathbb{S}^n$. A cada hipersuperfície associamos uma métrica induzida $\bar{g}_{ij}$ e obtemos as seguintes derivadas de primeira ordem em $t = 0$:*

(1) $\displaystyle \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2\,(f + \varphi'(0))\,g_{ij};$

(2) $\displaystyle \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\Big|_{t=0} = -2\,(f + \varphi'(0))\,g^{ij};$

(3) $\left.\dfrac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial t}\right|_{t=0} = n\left(f+\varphi'(0)\right)\sqrt{g};$

(4) $\left.\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0} = -\nabla f;$

(5) $\left.\dfrac{\partial\bar{h}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0} = (f+\varphi'(0))g_{ij} - (\nabla^2 f)_{ij};$

(6) $\left.\dfrac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\right|_{t=0} = -(f+\varphi'(0)) - \dfrac{1}{n}\Delta f;$

(7) $\left.\dfrac{\partial\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\right|_{t=0} = -2(f+\varphi'(0)) - \dfrac{2}{n}\Delta f.$

Demonstração:

(1) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial\bar{g}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{g}_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\left(t\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)+\left(1+tf+\varphi(t)\right)^2 g_{ij}\Bigg)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\\
&\quad +2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))g_{ij}.
\end{aligned}$$

Fazendo $t=0$, temos:

$$\left.\frac{\partial\bar{g}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\left(f+\varphi'(0)\right)g_{ij}.$$

(2) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial\bar{g}^{ij}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

Sabemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\bar{g}^{ij}\bar{g}_{jk}=\delta^i_k$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{g}^{ij}\bar{g}_{jk}\right)=0\\
\Rightarrow\ &\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{g}^{ij}}{\partial t}\bar{g}_{jk}+\bar{g}^{ij}\frac{\partial\bar{g}_{jk}}{\partial t}\right)=0\\
\Rightarrow\ &\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{g}^{ij}}{\partial t}\bar{g}_{jk}=-\sum_{j=1}^{n}\bar{g}^{ij}\frac{\partial\bar{g}_{jk}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\bar{g}_{jk} &= -\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_k}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right.\Bigg(\frac{\partial f}{\partial x_k}\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{jk}\Bigg)\bar{g}^{ij}\\
&= -\sum_{j,r=1}^{n}\Bigg(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right.\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{jr}\Bigg)\bar{g}^{ij}.\delta_k^r\\
&= -\sum_{j,r,p=1}^{n}\Bigg(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right.\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{jr}\Bigg)\bar{g}^{ij}.\bar{g}^{rp}.\bar{g}_{pk}\\
&= -\sum_{p=1}^{n}\Bigg(\sum_{j,r=1}^{n}\Bigg(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).\right.\\
&\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{jr}\Bigg)\bar{g}^{ij}.\bar{g}^{rp}\Bigg)\bar{g}_{pk}\\
j \leftrightarrow p\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\sum_{p,r=1}^{n}\Bigg(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right).\right.\\
&\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{pr}\Bigg)\bar{g}^{ip}.\bar{g}^{rj}\Bigg)\bar{g}_{jk}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t} &= -\sum_{p,r=1}^{n}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)+\left(t\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right)\\
&+2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))\bar{g}_{pr}\Bigg)\bar{g}^{ip}.\bar{g}^{rj}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $t=0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\Big|_{t=0} &= -\sum_{p,r=1}^{n}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\Big|_{t=0}\right)\left(0.\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\Big|_{t=0}\right)+\left(0.\frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\Big|_{t=0}\right).\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\Big|_{t=0}\right)+2(1+0.f+\varphi(0))(f+\varphi'(0))g_{pr}\Bigg)g^{ip}.g^{rj}\\
&= -\sum_{p,r=1}^{n}2(f+\varphi'(0)).g_{pr}.g^{ip}.g^{rj}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{r=1}^{n} 2(f+\varphi'(0))\delta_r^i.g^{rj} \\
&= -2(f+\varphi'(0))g^{ij}.
\end{aligned}
$$

(3) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

Denotando por $\bar{g} = \det(\bar{g}_{ij})$, temos por um cálculo idêntico ao feito na Proposição 3.1, que

$$\frac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}^{ij}\ \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\right)\sqrt{\bar{g}}.$$

Para $t=0$,

$$\left.\frac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\ 2\,(f+\varphi'(0))\,g_{ij}\right)\sqrt{g} = n\ (f+\varphi'(0))\,\sqrt{g}.$$

(4) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

Temos que

$$\left\langle \overline{N}, \frac{\partial X_t}{\partial x_i}\right\rangle = 0.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left.\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle + \left\langle \Phi, \left.\frac{\partial^2 X_t}{\partial t\partial x_i}\right|_{t=0}\right\rangle = 0 \\
\Rightarrow\ &\left\langle \left.\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle = -\left\langle \Phi, \left.\frac{\partial^2 X_t}{\partial t\partial x_i}\right|_{t=0}\right\rangle \\
\Rightarrow\ &\left\langle \left.\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle = -\left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_i}[(f+\varphi'(0))\Phi]\right\rangle \\
\Rightarrow\ &\left\langle \left.\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\rangle = -\frac{\partial f}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, obtemos as projeções dessa derivada sobre os tangentes. Uma vez que a primeira derivada do vetor normal é completamente tangente, segue que

$$\left.\frac{\partial\overline{N}}{\partial t}\right|_{t=0} = -\sum_{i,j=1}^{\infty} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = -\nabla f.$$

(5) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

Por definição, $\bar{h}_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial X_t}{\partial x_i}, \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x_j} \right\rangle$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\left(\left\langle \frac{\partial X_t}{\partial x_i}, \frac{\partial \overline{N}}{\partial x_j}\right\rangle\right) \\
&= \left(\left\langle \left.\frac{\partial^2 X_t}{\partial x_i \partial t}\right|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \left.\frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial x_j \partial t}\right|_{t=0}\right\rangle\right) \\
&= \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}[(f+\varphi'(0))\Phi], \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(-\nabla f)\right\rangle\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}\left\langle \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle + (f+\varphi'(0))\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla f)\right\rangle \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right)\right\rangle \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \sum_{k,l=1}^{n}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} + g^{kl}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right. \\
&\quad \left. + g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l}\right\rangle \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right\rangle - \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right\rangle \\
&\quad - \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l}\right\rangle \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}g_{il} - \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}g_{il} \\
&\quad - \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l}\right\rangle \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(g_{il}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j} + g^{kl}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l}\right\rangle\right) \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(g^{kl}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle\right) \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_k} \\
&= (f+\varphi'(0))g_{ij} - (\nabla^2 f)_{ij}.
\end{aligned}
$$

(6) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\right|_{t=0}$:

Por definição, $\overline{\mathrm{H}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{1}{n}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\right|_{t=0} g_{ij} + g^{ij}\left.\frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t}\right|_{t=0}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(-2(f+\varphi'(0))g^{ij}g_{ij} + g^{ij}((f+\varphi'(0))g_{ij} - g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij})\Big) \\
&= \frac{1}{n}\left(-2n(f+\varphi'(0)) + n(f+\varphi'(0)) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij}\right) \\
&= -(f+\varphi'(0)) - \frac{1}{n}\Delta f.
\end{aligned}
$$

(7) Cálculo de $\left.\dfrac{\partial \overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\right|_{t=0}$:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\right|_{t=0} &= 2\mathrm{H}\left.\frac{\partial \overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\right|_{t=0} \\
&= 2\left(-(f+\varphi'(0)) - \frac{1}{n}\Delta f\right) \\
&= -2(f+\varphi'(0)) - \frac{2}{n}\Delta f.
\end{aligned}
$$

Observação 7 *Note que*

$$\int_{\mathbb{S}^n} (f+\varphi'(0))\,d\mathbb{S}^n = 0,$$

uma vez que a variação que estamos trabalhando preserva volume e

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(0) = \int_U \left.\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right|_{t=0} dx = n\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\,d\mathbb{S}^n.$$

3.2.2 Diferenciais de segunda ordem em relação a t

Começaremos calculando a segunda derivada da imersão X_t dada em (27)

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = (f + \varphi'(t))\Phi \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \varphi''(t)\Phi \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \varphi''(0)\Phi,$$

onde utilizamos a notação simplificada $f = f \circ \Phi$. Temos também que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial X_t}{\partial x_i} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\left(t\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + (1 + t\,f + \varphi(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(t\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(1 + t\,f + \varphi(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + (f + \varphi'(t))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\Phi + \varphi''(t)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\frac{\partial X_t}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big|_{t=0}\right)\Phi + \varphi''(0)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Proposição 3.3 *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos uma imersão X_t definida em (27) e consequentemente uma hipersuperfície mergulhada M_t^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, com o mesmo volume de $\mathbb{S}^n$, tal que $M_0 = \mathbb{S}^n$. A cada hipersuperfície associamos uma métrica induzida $\bar{g}_{ij}$ e obtemos as seguintes derivadas de segunda ordem em $t = 0$:*

(1) $\displaystyle \frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2(f + \varphi'(0))^2 g_{ij} + 2\varphi''(0)g_{ij};$

(2) $\displaystyle \frac{\partial^2 \bar{g}^{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = -2\sum_{p,r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r}g^{ip}g^{rj} + 6(f + \varphi'(0))^2 g^{ij} - 2\varphi''(0)g^{ij};$

(3) $\displaystyle \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = [|\nabla f|^2 + (f + \varphi'(0))^2(n^2 - n) + n\varphi''(0)]\sqrt{g};$

(4) $\displaystyle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 2(f + \varphi'(0))\nabla f - \nabla\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right) - |\nabla f|^2\Phi;$

(5) $\displaystyle \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \varphi''(0)g_{ij} + 4\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \left(\nabla^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)_{ij} - |\nabla f|^2 g_{ij};$

(6) $\displaystyle \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \frac{(2-n)}{n}|\nabla f|^2 + 2(f+\varphi'(0))^2 - \varphi''(0) + \frac{4}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f - \frac{1}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right);$

(7) $$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 6(f+\varphi'(0))^2 + \frac{12}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f + \frac{2}{n^2}(\Delta f)^2 + \frac{(4-2n)}{n}|\nabla f|^2 - 2\varphi''(0);$$
$$-\frac{2}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right).$$

Demonstração:

(1) Cálculo de $\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

$$\bar{g}_{ij} = \left(t\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + (1+tf+\varphi(t))^2 g_{ij}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + \left(t\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\\
&\quad +2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))g_{ij}\Bigg)\\
&= 2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2[(f+\varphi'(0))^2 + \varphi''(0)]g_{ij}\\
&= 2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2(f+\varphi'(0))^2 g_{ij} + 2\varphi''(0)g_{ij}.
\end{aligned}$$

(2) Cálculo de $\frac{\partial^2 \bar{g}^{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{g}^{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Bigg(-\sum_{p,r=1}^{n}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) + \left(t\frac{\partial f}{\partial x_p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right).\\
&\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) + 2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))g_{pr}\Bigg)\bar{g}^{ip}.\bar{g}^{rj}\Bigg)\\
&= -\sum_{p,r=1}^{n}\Bigg[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Bigg(\left(\frac{\partial f}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right)\left(t\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) + \left(t\frac{\partial f}{\partial x_p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\right).\\
&\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\right) + 2(1+tf+\varphi(t))(f+\varphi'(t))g_{pr}\Bigg)g^{ip}.g^{rj}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(2(f+\varphi'(0))g_{rp}\bigg(\frac{\partial \bar{g}^{ip}}{\partial t}\bigg|_{t=0} g^{rj} + \frac{\partial \bar{g}^{rj}}{\partial t}\bigg|_{t=0} g^{ip}\bigg)\bigg] \\
= \; & -\sum_{p,r=1}^{n}\bigg[\bigg(2\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r} + 2((f+\varphi'(0))^2 + \varphi''(0)).g_{pr}\bigg) g^{ip}.g^{rj} + (2(f+\varphi'(0))g_{rp}) \\
& (-2(f+\varphi'(0))g^{ip}g^{rj} - 2(f+\varphi'(0))g^{rj}g^{ip})\bigg] \\
= \; & -2\sum_{p,r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r} g^{ip}g^{rj} - 2(f+\varphi'(0))^2\sum_{p,r=1}^{n} g_{rp}g^{ip}g^{rj} - 2\varphi''(0)\sum_{p,r=1}^{n} g_{rp}g^{ip}g^{rj} \\
& +4(f+\varphi'(0))^2\sum_{p,r=1}^{n} g_{rp}g^{ip}g^{rj} + 4(f+\varphi'(0))^2\sum_{p,r=1}^{n} g_{rp}g^{ip}g^{rj} \\
= \; & -2\sum_{p,r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r} g^{ip}g^{rj} + 6(f+\varphi'(0))^2 g^{ij} - 2\varphi''(0)g^{ij}.
\end{aligned}
$$

(3) Cálculo de $\dfrac{\partial^2\sqrt{\bar{g}}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\sqrt{\bar{g}}}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg(\frac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial t}\bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg(\frac{\partial}{\partial t}(ln\sqrt{\bar{g}})\sqrt{\bar{g}}\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg(\frac{\partial}{\partial t}(ln(\bar{g}))\sqrt{\bar{g}}\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}(ln(\mathbf{g}))\sqrt{g} + \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}(ln(\mathbf{g}))\frac{\partial\sqrt{\mathbf{g}}}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}(ln(\bar{g}))\sqrt{g} + \sum_{i,j=1}^{n}\bigg(g^{ij}\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg)(n(f+\varphi'(0))\sqrt{g})\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\bar{g}^{ij}\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\bigg)\sqrt{g} + \sum_{i,j=1}^{n}\big(g^{ij}[2(f+\varphi'(0))g_{ij}]\big). \\
&\quad (n(f+\varphi'(0))\sqrt{g})\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\bigg(\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\bigg|_{t=0}\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial t}\bigg|_{t=0} + g^{ij}\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}\bigg)\sqrt{g} + 2n^2(f+\varphi'(0))^2\sqrt{g}\bigg) \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\bigg([-2(f+\varphi'(0))g^{ij}][2(f+\varphi'(0))g_{ij}] + g^{ij}\bigg[2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2(f+ \\
&\quad \varphi'(0))^2 g_{ij} + 2\varphi''(0)g_{ij}\bigg]\bigg)\sqrt{g} + 2n^2(f+\varphi'(0))^2\sqrt{g}\bigg)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-4n(f+\varphi'(0))^2 + 2|\nabla f|^2 + 2n(f+\varphi'(0))^2 + 2n\varphi''(0) + 2n^2(f+\\
&\quad \varphi'(0))^2)\sqrt{g}\\
&= [|\nabla f|^2 + (f+\varphi'(0))^2(n^2-n) + n\varphi''(0)]\sqrt{g}.
\end{aligned}$$

(4) Cálculo de $\dfrac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

Cálculo da Parte Tangente:

Temos que

$$\left\langle \overline{N}, \frac{\partial X_t}{\partial x_i} \right\rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}, \frac{\partial X_t}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \overline{N}, \frac{\partial^2 X_t}{\partial t \partial x_i} \right\rangle = 0\\
\Rightarrow\ & \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}\Big|_{t=0}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \right) \right\rangle + \left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 X_t}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \right) \right\rangle = 0\\
\Rightarrow\ & \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = -2\left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}\Big|_{t=0}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_t}{\partial t}\Big|_{t=0} \right) \right\rangle - \left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 X_t}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \right) \right\rangle\\
\Rightarrow\ & \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = -2\left\langle (-\nabla f), \frac{\partial}{\partial x_i}[(f+\varphi'(0))\Phi] \right\rangle - \left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi''(0)\Phi] \right\rangle\\
\Rightarrow\ & \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = 2\left\langle \nabla f, \frac{\partial f}{\partial x_i}\Phi + (f+\varphi'(0))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi''(0))\Phi \right.\\
& \left. +\varphi''(0)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle\\
\Rightarrow\ & \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = 2(f+\varphi'(0))\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi''(0)).
\end{aligned}$$

Cálculo da Parte Normal:

Temos que

$$\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1.$$

Assim,

$$2\left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}, \overline{N} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}, \overline{N} \right\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \Phi \right\rangle = -\left| \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}\Big|_{t=0} \right|^2$$
$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}, \Phi \right\rangle = -\left| \nabla f \right|^2 .$$

Por fim, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(2(f+\varphi'(0))\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi''(0)) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - |\nabla f|^2 \Phi \\
&= 2(f+\varphi'(0))\nabla f - \nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \right) - |\nabla f|^2 \Phi.
\end{aligned}$$

(5) Cálculo de $\dfrac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

Por definição, $\bar{h}_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial X_t}{\partial x_i}, \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x_j} \right\rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{\partial X_t}{\partial x_i}, \frac{\partial \overline{N}}{\partial x_j} \right\rangle \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \left[\left\langle \frac{\partial^2 X_t}{\partial x_i \partial t}, \frac{\partial \overline{N}}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X_t}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial x_j \partial t} \right\rangle \right] \\
&= \left\langle \frac{\partial^3 X_t}{\partial x_i \partial t^2}\Big|_{t=0}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial^2 X_t}{\partial x_i \partial t}\Big|_{t=0}, \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial x_j \partial t}\Big|_{t=0} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^3 \overline{N}}{\partial x_j \partial t^2}\Big|_{t=0} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi''(0)\Phi), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}((f+\varphi'(0))\Phi), \frac{\partial}{\partial x_j}(-\nabla f) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2(f+\varphi'(0))\nabla f - \nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \right) - |\nabla f|^2 \Phi \right) \right\rangle \\
&= \varphi''(0) \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle - 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}\Phi + (f+\varphi'(0))\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla f) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2(f+\varphi'(0))\nabla f \right) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \right) \right) \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla f|^2 \Phi \right) \right\rangle \\
&= \varphi''(0) g_{ij} - 2\frac{\partial f}{\partial x_i} \left\langle \Phi, \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla f) \right\rangle - 2(f+\varphi'(0)) \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla f) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +2\frac{\partial f}{\partial x_j}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \nabla f \right\rangle + 2(f+\varphi'(0))\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla f) \right\rangle \\
& -\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)\right\rangle - |\nabla f|^2\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle \\
= \quad & \varphi''(0)g_{ij} + 4\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \left(\nabla^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)_{\mathbf{ij}} - |\nabla f|^2 g_{ij}.
\end{aligned}
$$

(6) Cálculo de $\dfrac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

Por definição, $\overline{\mathrm{H}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{H}}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \quad = \quad & \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}^{ij}\bar{h}_{ij}\right)\right] \\
= \quad & \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left[\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\bar{h}_{ij} + \frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t}\bar{g}^{ij}\right] \\
= \quad & \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 \bar{g}^{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} g_{ij} + 2\frac{\partial \bar{g}^{ij}}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial \bar{h}_{ij}}{\partial t}\Big|_{t=0} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{ij}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} g^{ij}\right] \\
= \quad & \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg[\left(-2\sum_{p,r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r}g^{ip}g^{rj} + 6(f+\varphi'(0))^2 g^{ij} - 2\varphi''(0)g^{ij}\right)g_{ij} \\
& +2[-2(f+\varphi'(0))g^{ij}][(f+\varphi'(0))g_{ij} - (\nabla^2 f)_{ij}] + \Bigg(\varphi''(0)g_{ij} + 4\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
& - \left(\nabla^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)_{ij} - |\nabla f|^2 g_{ij}\Bigg)g^{ij}\Bigg] \\
= \quad & \frac{1}{n}\Bigg[-2\sum_{i,j,p,r=1}^{n} g_{ij}g^{ip}g^{rj}\frac{\partial f}{\partial x_p}\frac{\partial f}{\partial x_r} + 6(f+\varphi'(0))^2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{ij} - 2\varphi''(0) \\
& \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{ij} - 4(f+\varphi'(0))^2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{ij} + 4(f+\varphi'(0))\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\nabla^2 f)_{ij} \\
& +\varphi''(0)\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}g^{ij} + 4\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\nabla^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)_{ij} \\
& -|\nabla f|^2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{ij}\Bigg] \\
= \quad & \frac{1}{n}\Bigg[-2|\nabla f|^2 + 6n(f+\varphi'(0))^2 - 2n\varphi''(0) - 4n(f+\varphi'(0))^2 \\
& +4(f+\varphi'(0))\Delta f + n\varphi''(0) + 4|\nabla f|^2 - \Delta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right) - n|\nabla f|^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\Bigg[(2-n)|\nabla f|^2 + 2n(f+\varphi'(0))^2 - n\varphi''(0) + 4(f+\varphi'(0))\Delta f \\
&\quad -\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\Bigg] \\
&= \frac{(2-n)}{n}|\nabla f|^2 + 2(f+\varphi'(0))^2 - \varphi''(0) + \frac{4}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f - \frac{1}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right).
\end{aligned}
$$

(7) Cálculo de $\displaystyle\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(2\overline{\mathrm{H}}\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\right) \\
&= 2\left[\left(\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right] \\
&= 2\Bigg[\left(-(f+\varphi'(0)) - \frac{1}{n}\Delta f\right)^2 + \Bigg(\frac{(2-n)}{n}|\nabla f|^2 + 2(f+\varphi'(0))^2 \\
&\quad -\varphi''(0) + \frac{4}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f - \frac{1}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\Bigg)\Bigg] \\
&= 2\Bigg[(f+\varphi'(0))^2 + \frac{2}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f + \frac{1}{n^2}(\Delta f)^2 + \frac{(2-n)}{n}|\nabla f|^2 \\
&\quad +2(f+\varphi'(0))^2 - \varphi''(0) + \frac{4}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f - \frac{1}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\Bigg] \\
&= 6(f+\varphi'(0))^2 + \frac{12}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f + \frac{2}{n^2}(\Delta f)^2 + \frac{(4-2n)}{n}|\nabla f|^2 \\
&\quad -2\varphi''(0) - \frac{2}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right).
\end{aligned}
$$

4 WILLMORE

Nessa seção, iniciaremos apresentando o resultado para superfícies de gênero 0 proposto por WILLMORE (1965) que garante uma caracterização para a esfera euclidiana em dimensão 2. Em seguida, enunciamos uma generalização local para esse resultado em dimensões mais altas.

4.1 Caso 2 dimensional

Começaremos apresentando o Teorema de Gauss-Bonnet que nos fornece uma importante relação entre as propriedades geométricas locais e as propriedades topológicas globais.

Teorema 4.1 *(Gauss-Bonnet) Seja M uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada e compacta, com curvatura Gaussiana $\mathcal{K}$ (1) e elemento de volume* dA. *Então*

$$\int_M \mathcal{K}\mathrm{dA} = 2\pi\chi(M), \tag{30}$$

em que $\chi = F - A + V$ é a característica de Euler-Poincaré e para uma dada triangulação, F denota o número de faces, A denota o número de arestas, e V denota o número de vértices da triangulação.

Demonstração: Vide [SPIVAK (1975)].

Considere S uma superfície diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$, orientada, fechada e $h : S \to E^3$ um mergulho $\mathcal{C}^\infty$ de S num espaço euclidiano tridimensional E^3.

Definição 28 *(Funcional de Willmore) Seja $\mathcal{F}$ o espaço de todos os mergulhos de classe $\mathcal{C}^\infty$ de S em E^3 e* H^2 *o quadrado da curvatura média em $h(S)$. Então, definimos o funcional*

$$\begin{array}{rccc} W: & \mathcal{F} & \longrightarrow & E \\ & h & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{h(S)} \mathrm{H}^2\mathrm{dS}, \end{array} \tag{31}$$

onde $h(S)$ é considerada como uma hipersuperfície de E^3.

Teorema 4.2 (WILLMORE (1965)) *Seja S uma superfície de gênero 0. Então para toda $f \in \mathcal{F}$ temos*

$$W(f) \geq 2. \tag{32}$$

Além disso, $W(f) = 2$ se, e somente se, $f(S)$ é uma esfera euclidiana.

Demonstração: Denote por k_1 e k_2 as curvaturas principais em $p \in f(S)$ tal que

$$\mathcal{K} = k_1 k_2$$

e

$$\mathrm{H} = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Uma vez que

$$\mathrm{H}^2 = \mathcal{K} + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2,$$

temos

$$W(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{f(S)} \mathcal{K}\mathrm{dS} + \frac{1}{8\pi}\int_{f(S)} (k_1 - k_2)^2\mathrm{dS},$$

ou seja,

$$W(f) = \chi(S) + \frac{1}{8\pi}\int_{f(S)} (k_1 - k_2)^2\mathrm{dS}, \tag{33}$$

onde usamos o Teorema de Gauss-Bonnet (4.1). Segue imediatamente que $W(f) \geq \chi(S)$; já que S tem gênero 0, temos que $\chi(S) = 2$, e segue a equação (32). Além disso, se $W(f) = 2$, então de (33) segue que $k_1 = k_2$ para cada ponto $p \in f(S)$. Assim cada ponto de $f(S)$ é um ponto umbílico e assim $f(S)$ é uma esfera euclidiana. Isto completa a prova do teorema.

4.2 Caso n dimensional

A partir desse momento vamos trabalhar com objetos de dimensões mais altas. Para isso usaremos a teoria de variações de hipersuperfícies que preservam volume apresentada na seção anterior 3.1.

Definição 29 *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos uma imersão X_t definida em (27) e consequentemente uma hipersuperfície mergulhada M_t^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ com o mesmo volume de $\mathbb{S}^n$, tal que $M_0 = \mathbb{S}^n$. Assim, definamos o funcional*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{W}: & (-\varepsilon,\varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\displaystyle\int_{M_t} \mathbf{H}^2\mathrm{dM_t}. \end{array}$$

onde $\mathbf{H}$ é igual a n vezes a curvatura média $\overline{\mathrm{H}}$ relacionada a métrica $\bar{g}_{ij}$ em $M_t = X_t(\mathbb{S}^n)$.

Observação 8 *Observe que fazendo n=2 na definição do funcional anterior obtemos o funcional de Willmore (31). De fato,*

$$\mathcal{W}(t) = \frac{1}{2vol(\mathbb{S}^2)}\int_{M_t} \mathbf{H}^2\mathrm{dM_t} = \frac{1}{2(4\pi)}\int_{M_t}(2\overline{\mathrm{H}})^2\mathrm{dM_t} = \frac{4}{2(4\pi)}\int_{M_t}\overline{\mathrm{H}}^2\mathrm{dM_t} = \frac{1}{2\pi}\int_{M_t}\overline{\mathrm{H}}^2\mathrm{dM_t}.$$

Teorema 4.3 *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos uma variedade mergulhada M_t^n com o mesmo volume de $\mathbb{S}^n$, obtida pela variação X_t dada em (27) tal que $M_0 = \mathbb{S}^n$. Então para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos*

$$\mathcal{W}(t) \geq n. \tag{34}$$

Além disso, $\mathcal{W}(t) = n$ se, e somente se, M_t é uma esfera euclidiana.

Demonstração:
No decorrer dessa demonstração usaremos algumas derivadas obtidas nas subseções 3.2.1 e 3.2.2. Provaremos que o funcional $\mathcal{W}$ atinge um mínimo em $t = 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}'(0) &= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\int_{M_t} \mathbf{H}^2\,\mathrm{dM_t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\int_{U} \mathbf{H}^2\,\sqrt{g}\,\mathrm{d}x\right)\right] \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\int_{U} (n\overline{\mathrm{H}})^2\,\sqrt{g}\,\mathrm{d}x\right)\right] \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\int_{U} \overline{\mathrm{H}}^2\,\sqrt{g}\,\mathrm{d}x\right)\right] \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left[\int_U \frac{\partial\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\Big|_{t=0}\sqrt{g}\mathrm{d}x + \int_U \mathrm{H}^2\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left[\int_{\mathbb{S}^n} \frac{\partial\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \int_U \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left[\int_{\mathbb{S}^n}\left(-2(f+\varphi'(0)) - \frac{2}{n}\Delta f\right)\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right] \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left[-2\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\mathrm{d}\mathbb{S}^n - \frac{2}{n}\int_{\mathbb{S}^n}\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right] \\
&= \frac{-2n}{vol(\mathbb{S}^n)}\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois

$$
\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\mathrm{d}\mathbb{S}^n = 0.
$$

Ou seja, a esfera é um ponto crítico para o funcional $\mathcal{W}$. Além disso, calculando a segunda derivada, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}''(0) &= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\left(\int_{M_t} \mathbf{H}^2\,\mathrm{dM_t}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left[\int_U \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{H}^2\,\sqrt{g}\right)\mathrm{d}x\right]\right\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left[\int_U \frac{\partial}{\partial t}\left[(n\overline{\mathrm{H}})^2\,\sqrt{g}\right]\mathrm{d}x\right]\right\} \\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left[\int_U \left(\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\sqrt{g} + \overline{\mathrm{H}}^2\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{\int_U \left(\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\sqrt{g} + 2\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\Big|_{t=0} + \mathrm{H}^2\frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{\int_{\mathbb{S}^n}\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_U\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x + \int_U\frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{\int_{\mathbb{S}^n}\frac{\partial^2\overline{\mathrm{H}}^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_U\frac{\partial\overline{\mathrm{H}}}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{\int_{\mathbb{S}^n}\left(6(f+\varphi'(0))^2 + \frac{12}{n}(f+\varphi'(0))\Delta f + \frac{2}{n^2}(\Delta f)^2 + \frac{(4-2n)}{n}|\nabla f|^2\right.\right.\\
&\quad \left.-2\varphi''(0) - \frac{2}{n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\right)\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_U\left[-2(f+\varphi'(0)) - \frac{2}{n}\Delta f\right]\\
&\quad \left.[n(f+\varphi'(0))\sqrt{g}]\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{6\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \frac{12}{n}\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad +\frac{(4-2n)}{n}\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n - 2\int_{\mathbb{S}^n}\varphi''(0)\mathrm{d}\mathbb{S}^n - \frac{2}{n}\int_{\mathbb{S}^n}\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\right)\mathrm{d}\mathbb{S}^n\\
&\quad \left.-4n\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n - 4\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right\}\\
&= \frac{n}{vol(\mathbb{S}^n)}\left\{[6-4n]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \left[\frac{12}{n}-4\right]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad \left.+\frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \left[\frac{(4-2n)}{n}\right]\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n - 2\int_{\mathbb{S}^n}\varphi''(0)\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right\}\\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{[6n^2-4n^3]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \left[12n-4n^2\right]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad \left.+2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + \left[4n-2n^2\right]\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n - 2n\left(n\int_{\mathbb{S}^n}\varphi''(0)\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right)\right\}\\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{[6n^2-4n^3]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + [12n-4n^2]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad +2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + [4n-2n^2]\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n - 2n\Big(-\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\\
&\quad \left.\left.+(n-n^2)\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right)\right\}\\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{[6n^2-4n^3-2n^2+2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad +[12n-4n^2]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\\
&\quad \left.+[4n-2n^2+2n]\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right\}\\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\left\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + [12n-4n^2]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta f\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right.\\
&\quad \left.+2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta f)^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n + [6n-2n^2]\int_{\mathbb{S}^n}|\nabla f|^2\mathrm{d}\mathbb{S}^n\right\}.
\end{aligned}
$$

Usando que $\nabla(f+\varphi'(0)) = \nabla f$ e $\Delta(f+\varphi'(0)) = \Delta f$, respectivamente, por (28) e (29), temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}''(0) &= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\bigg\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n + [6n-2n^2]. \\
&\int_{\mathbb{S}^n}(f+\varphi'(0))\Delta(f+\varphi'(0))\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta(f+\varphi'(0))^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n.
\end{aligned}
$$

Considerando a base $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ do espaço $L^2(\mathbb{S}^n)$, formada pelas autofunções do operador de Laplace, seja $f+\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f+\varphi'(0),\phi_i\rangle\phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i$ onde $-\Delta\phi_i = \beta_i\phi_i$, $\beta_i > 0$ e $\beta_1 = n$. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}''(0) &= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\bigg\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right)^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&+[12n-4n^2]\int_{\mathbb{S}^n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right)\Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right)\mathrm{d}\mathbb{S}^n + 2\int_{\mathbb{S}^n}\left(\Delta\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right)\right)^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&+[6n-2n^2]\int_{\mathbb{S}^n}\left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right)\right|^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n\bigg\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\bigg\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n + [12n-4n^2+2n^2-6n]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i\Delta\phi_i \mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&+2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta\phi_i)^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n\bigg\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\bigg\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n + [6n-2n^2]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i\Delta\phi_i \mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&+2\int_{\mathbb{S}^n}(\Delta\phi_i)^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n\bigg\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\bigg\{[4n^2-2n^3]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n - [6n-2n^2]\int_{\mathbb{S}^n}\beta_i\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n \\
&+2\int_{\mathbb{S}^n}\beta_i^2\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n\bigg\} \\
&= \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\bigg\{[2\beta_i^2-(6n-2n^2)\beta_i+(4n^2-2n^3)]\int_{\mathbb{S}^n}\phi_i^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n\bigg\}.
\end{aligned}
$$

Queremos determinar o sinal de $\mathcal{W}''(0)$. Para isso, precisamos do sinal do polinômio do segundo grau $2\beta_i^2 - (6n - 2n^2)\beta_i + (4n^2 - 2n^3)$. Vamos determinar suas raízes

$$
\begin{aligned}
\beta_i &= \frac{(6n - 2n^2) \pm \sqrt{[-(6n - 2n^2)]^2 - 4.2.(4n^2 - 2n^3)}}{2.2} \\
&= \frac{(6n - 2n^2) \pm \sqrt{4n^2(n-1)^2}}{4} \\
&= \frac{(6n - 2n^2) \pm 2n(n-1)}{4}.
\end{aligned}
$$

Então, as raízes são

$$\beta_i' = 2n - n^2 \ \text{ e } \ \beta_i'' = n.$$

Se existe algum $a_{i_0} \neq 0$ para $i_0 > n+1$, então $\beta_{i_0} > n$ e como o coeficiente que acompanha β_i^2 na expressão é positivo, segue nesse caso o polinômio do segundo grau é sempre positivo. Portanto, $\mathcal{W}''(0) > 0$ e esse funcional possui um ponto de mínimo local em $t = 0$, ou seja, em $M_0 = \mathbb{S}^n$.

Por outro lado, se $a_i = 0$ para todo $i > n + 1$, então $\mathcal{W}''(0) = 0$. Nesse caso, $f + \varphi'(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i\phi_i$ tal que $-\Delta\phi_i = n\phi_i$. Tome uma curva

$$
\begin{array}{rccc}
\beta: & (-\delta, \delta) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\
& t & \longmapsto & t(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}),
\end{array}
$$

tal que $\beta_i'(0) = a_i$ e defina

$$\tilde{\varphi}(t) = -(1 + tf) - \langle \Phi, \beta \rangle + \sqrt{\langle \Phi, \beta \rangle^2 - |\beta|^2 + 1}.$$

Considerando uma variação

$$
\begin{array}{rccc}
\tilde{X}: & (-\delta, \delta) \times U & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\
& (t, x) & \longmapsto & (1 + t(f \circ \Phi)(x) + \tilde{\varphi}(t))\Phi(x),
\end{array}
$$

tal que $\tilde{X}_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$.

Podemos reescrever $\tilde{\varphi}(t, f)$ como

$$\tilde{\varphi}(t, f) = \frac{-[2(1 + tf) - 2\langle \Phi, \beta \rangle] \pm \sqrt{4\langle \Phi, \beta \rangle^2 - 4|\beta|^2 + 4}}{2}.$$

Que satisfaz a seguinte equação de segundo grau

$$\tilde{\varphi}^2 + [2(1+tf) - 2\langle \Phi, \beta \rangle]\tilde{\varphi} + [(1+tf)^2 - 2(1+tf)\langle \Phi, \beta \rangle + |\beta|^2 - 1] = 0.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& \tilde{\varphi}^2 + [2(1+tf) - 2\langle \Phi, \beta \rangle]\tilde{\varphi} + [(1+tf)^2 - 2(1+tf)\langle \Phi, \beta \rangle + |\beta|^2 - 1] = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{\varphi}^2 + 2(1+tf)\tilde{\varphi} + (1+tf)^2 - 2(1+tf)\langle \Phi, \beta \rangle - 2\langle \Phi, \beta \rangle \tilde{\varphi} + |\beta|^2 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (1+tf+\tilde{\varphi})^2 - 2(1+tf+\tilde{\varphi})\langle \Phi, \beta \rangle + |\beta|^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \langle (1+tf+\tilde{\varphi})\Phi - \beta, (1+tf+\tilde{\varphi})\Phi - \beta \rangle = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & |\tilde{X}_t(x) - \beta(t)|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{X}_t$ é uma translação por esferas e consequentemente

$$V(t, \tilde{\varphi}(t)) = vol(\mathbb{S}^n), \text{para todo } t \in (-\delta, \delta).$$

Por outro lado, recordemos que φ foi determinada pelo Teorema da Função Implícita (2.1) para também satisfazer $V(t, \varphi(t)) = vol(\mathbb{S}^n)$. Logo, pela unicidade do mesmo teorema, temos que $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$ e portanto $X_t \equiv \tilde{X}_t$. Assim temos que X_t é uma variação por esferas se, e somente se, $f + \varphi'(0)$ é uma primeira autofunção do operador de Laplace.
Por fim, segue que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\mathcal{W}(t) \geq \mathcal{W}(0) = \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} n^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n = n \Rightarrow \mathcal{W}(t) \geq n. \tag{35}$$

Além disso, se tivermos a igualdade $\mathcal{W}(t) = n$, então $\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(0)$ e assim $\mathcal{W}''(0) = 0$. Nesse caso a variação X_t é apenas uma translação por esferas. Isto conclui a demonstração.

A partir desse resultado, podemos conjecturar

Conjectura 4 *Toda hipersuperfície compacta M^n de gênero 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$ com mesmo volume da esfera unitária, deve satisfazer*

$$\mathcal{W}(M) \geq n. \tag{36}$$

Além disso, $\mathcal{W}(M) = n$ se, e somente se, M é a esfera euclidiana.

5 RESULTADOS DE CARACTERIZAÇÃO DA ESFERA

5.1 Uma propriedade máxima de $\mathbb{S}^2$

Ao longo dessa seção, considere $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$, orientada, fechada e com mesmo volume que a esfera $\mathbb{S}^2$.

Teorema 5.1 *Considere o operador $\mathcal{L} : H^2(S) \to L^2(S)$ definido por*

$$\mathcal{L} = -\Delta - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2, \tag{37}$$

onde Δ e $\mathbf{H}$ são, respectivamente, o laplaciano e 2 vezes a curvatura média da métrica induzida em S a partir da métrica de $\mathbb{R}^3$. O primeiro autovalor λ_1^0 do operador $\mathcal{L}$ na esfera $\mathbb{S}^2$ é máximo global entre todos os primeiros autovalores de $\mathcal{L}$ nas superfícies S de gênero 0.

Demonstração: Sejam $u \in H^2(S)$ a primeira autofunção de $\mathcal{L}$ e λ_1 o autovalor relacionado, ou seja,

$$-\Delta u - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 u = \lambda_1 u. \tag{38}$$

Como u é uma primeira autofunção, pelo Teorema 2.7, podemos considerar $u > 0$ e usando a expressão (38), segue

$$\lambda_1 = -\frac{\Delta u}{u} - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2.$$

Integrando sobre $h(S)$, com $h \in \mathcal{F}$ dado na Definição 28

$$\int_{h(S)} \lambda_1 \mathrm{d}S = -\int_{h(S)} \frac{\Delta u}{u}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{h(S)} \mathbf{H}^2 \mathrm{d}S. \tag{39}$$

Por (2.6),

$$\lambda_1.vol(h(S)) = -\int_{h(S)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{h(S)} \mathbf{H}^2 \mathrm{d}S. \tag{40}$$

Mas, $vol(h(S)) = vol(\mathbb{S}^2) = 4\pi$. Então,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_{h(S)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\mathrm{d}S - \frac{1}{8\pi}\int_{h(S)} \mathbf{H}^2 \mathrm{d}S. \tag{41}$$

Logo,

$$\lambda_1 \leq -\frac{1}{8\pi}\int_{h(S)} \mathbf{H}^2 \mathrm{d}S. \tag{42}$$

Contudo, pelo Teorema 4.2

$$\lambda_1 \leq -\frac{1}{8\pi}\int_{h(S)} \mathbf{H}^2 \mathrm{d}S = -\frac{1}{2\pi}\int_{h(S)} \mathrm{H}^2 \mathrm{d}S = -W(f) \leq -2 = \lambda_1^0. \tag{43}$$

Daí, $\lambda_1 \leq \lambda_1^0$. E a igualdade ocorre se, e somente se $\displaystyle\int_{h(S)} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = 0 \Leftrightarrow |\nabla u| = 0 \Leftrightarrow$ u é constante. Então,

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{H}^2 \Leftrightarrow \mathbf{H} \text{ é constante.}$$

Pelo Teorema de Alexandrov (2.4), temos que $S = \mathbb{S}^2$. O que conclui a prova do resultado.

5.2 Uma propriedade máxima de $\mathbb{S}^n$

Considere $M_t^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma hipersuperfície diferenciável, orientada, fechada e com mesmo volume que a esfera $\mathbb{S}^n$.

Teorema 5.2 *Considere a variação da esfera X_t dada na Proposição 3.1. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associamos um operador diferencial linear em $H^2(M_t)$*

$$\mathcal{L}_t = -\Delta^t - \frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2, \tag{44}$$

onde Δ^t e $\mathbf{H}_t$ são, respectivamente, o Laplaciano e n vezes a curvatura média $\overline{\mathrm{H}}_t$ relacionados a métrica $(\bar{g}_t)_{ij}$ induzida em $M_t^n = X_t(\mathbb{S}^n)$. Sejam $u_t \in H^2(X_t(\mathbb{S}^n))$ a primeira autofunção de $\mathcal{L}_t$ e λ_1^t o autovalor relacionado, ou seja,

$$\mathcal{L}_t(u_t) = -\Delta^t(u_t) - \frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2(u_t) = \lambda_1^t(u_t). \tag{45}$$

Então, o primeiro autovalor λ_1^t do operador $\mathcal{L}_t$ atinge um máximo local em $t = 0$, isto é, o primeiro autovalor λ_1^0 do operador $\mathcal{L}_0$ definido em $X_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$ é máximo entre os primeiros autovalores das hipersuperfícies $X_t(\mathbb{S}^n)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demonstração: Sejam $u_t \in H^2(X_t(\mathbb{S}^n))$ a primeira autofunção de $\mathcal{L}_t$ e λ_1^t o autovalor relacionado. Como u_t é uma primeira autofunção, pelo Teorema 2.7, podemos considerá-la sempre positiva. Então,

$$-\Delta^t(u_t) - \frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2(u_t) = \lambda_1^t(u_t) \Rightarrow \lambda_1^t = -\frac{\Delta^t(u_t)}{u_t} - \frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2.$$

Integrando em M_t a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \lambda_1^t \mathrm{dM_t} &= -\int_{M_t} \frac{\Delta^t(u_t)}{u_t}\mathrm{dM_t} - \frac{1}{n}\int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t} \\ \Rightarrow \quad \lambda_1^t vol(M_t) &= -\int_{M_t} \frac{\Delta^t(u_t)}{u_t}\mathrm{dM_t} - \frac{1}{n}\int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t}. \end{aligned}$$

Usando (2.6) e que a variação da esfera X_t preserva volume, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1^t vol(\mathbb{S}^n) &= -\int_{M_t} \frac{|\nabla^t u_t|^2}{u_t^2}\mathrm{dM_t} - \frac{1}{n}\int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t} \\ \Rightarrow \quad \lambda_1^t &= -\frac{1}{vol(\mathbb{S}^n)}\int_{M_t} \frac{|\nabla^t u_t|^2}{u_t^2}\mathrm{dM_t} - \frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)}\int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t}. \end{aligned}$$

Como o primeiro termo da expressão acima é sempre não positivo, temos que

$$\lambda_1^t \leq -\frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)} \int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t}. \tag{46}$$

Além disso, pelo teorema 4.3

$$\lambda_1^t \leq -\frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)} \int_{M_t} \mathbf{H}_t^2 \mathrm{dM_t} \leq \mathcal{W}(0) = -\frac{1}{nvol(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} n^2 \mathrm{d}\mathbb{S}^n = -n = \lambda_1^0. \tag{47}$$

Portanto, $\lambda_1^t \leq \lambda_1^0$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Por fim,

$$\lambda_1^t = \lambda_1^0 \Leftrightarrow M_t \text{ é uma translação da esfera.}$$

De fato, se M_t é uma translação da esfera, então $\lambda_1^t = \lambda_1^0$.
Por outro lado, se $\lambda_1^t = \lambda_1^0$ temos em (46) a igualdade, ou seja

$$\int_{M_t} \frac{|\nabla^t u_t|^2}{u_t^2} \mathrm{dM_t} = 0.$$

Logo,

$$|\nabla^t u_t|^2 = 0 \Leftrightarrow u_t = constante.$$

Aplicando na equação (45), obtemos

$$-\frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2(u_t) = \lambda_1^t(u_t) \Rightarrow -\frac{1}{n}\mathbf{H}_t^2 = \lambda_1^t \Rightarrow \mathbf{H}_t = \text{constante.}$$

Portanto, pelo teorema de Alexandrov (2.4) segue que $M_t = \mathbb{S}^n$. Consequentemente, temos que o primeiro autovalor na esfera é um máximo local. Isto completa a prova do teorema.

6 CONCLUSÃO

Nesta tese, obtemos dois resultados de caracterização para a esfera a partir do primeiro autovalor de um operador do tipo Schrodinger, cujo potencial é dado pelo quadrado da curvatura média. Em dimensão dois, garantimos que o primeiro autovalor desse operador, no espaço das superfícies de gênero zero, atinge seu máximo na esfera $\mathbb{S}^2$. Contudo, para $n > 2$ provamos a existência de um máximo local na esfera $\mathbb{S}^n$. Para demonstrar esses resultados utilizamos o teorema de caracterização da esfera proposto por Willmore e fez-se necessário generalizar localmente esse teorema, para obtermos o resultado em qualquer dimensão. É natural pensarmos se também podemos obter algum resultado para o primeiro autovalor no caso das superfícies de gênero um. Deixamos esse resultado para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, Aleksandr D. . **I. Amer. Math. Soc. Transl.**, v. 21, n. 2, p. 341–354, 1962.

ALIKAKOS, Nicholas D.; FUSCO, Giorgio. The spectrum of the Cahn-Hilliard operator for generic interface in higher space dimensions. **Indiana University mathematics journal**, v. 42, n. 2, p. 637–674, 1993.

BARBOSA, Joao Lucas; CARMO, Manfredo do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. **Mathematische Zeitschrift**, v. 185, n. 3, p. 339–353, 1984.

CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: Impa (projeto euclides), 2005.

CHAVEL, Isaac. **Eigenvalues in Riemannian geometry**. 2. ed. New York: Academic press, 1984.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. 2. ed. Providence: AMS, 2010.

GERMAIN, Sophie. **Recherches sur la théorie des surfaces élastiques**. Paris: Mme. Ve. Courcier, 1821.

HARRELL II, Evans M.; LOSS, Michael. On the Laplace operator penalized by mean curvature. **Communications in mathematical physics**, v. 195, n. 3, p. 643–650, 1998.

LEE, John M. **Introduction to Smooth manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2013.

MARQUES, Fernando C.; NEVES, André. The willmore conjecture. **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung** , v. 116, n. 4, p. 201–222, 2014.

POISSON, Siméon Denis. Mémoire sur les surfaces élastiques. **Mem. Cl. Sci. Math. Phys., Inst. de France**, p. 167–225, 1814.

SPIVAK, Michael D. **A comprehensive introduction to differential geometry, Volume 3**. 2. ed. Houston: Publish or perish, 1975.

TODA, Magdalena; ATHUKORALAGE, Bhagya. Geometry of biological membranes and Willmore energy. **AIP Conference Proceedings**, v. 1558, n. 1, p. 883–886, 2013.

WILLMORE, Thomas J. Note on embedded surfaces. **An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat.(NS) B**, v. 11, p. 493–496, 1965.

APÊNDICE A – CURVATURA GEODÉSICA

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Para introduzir o conceito de curvatura geodésica, precisamos do seguinte resultado

Proposição .1 *Se $\vec{v}(t)$ e $\vec{w}(t)$ forem dois campos de vetores ao longo da curva $\alpha(t)$ então*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}} \right\rangle.$$

Demonstração: Indicando pelo expoente N a componente normal de um vetor,temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \left\langle \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{dt}}, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{D}\vec{w}}{\mathrm{dt}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\right)^N, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}}\right)^N \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}, \vec{w} \right\rangle + \left\langle \vec{v}, \frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{dt}} \right\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Dada uma curva regular $\alpha : I \to S$ numa superfície orientada S, podemos considerar o campo de vetores unitários tangentes a α, dado por $\vec{\tau}_1(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t)$, e ainda o campo $\vec{\tau}_2 = N \times \vec{\tau}_1$. Assim, em cada instante t, $(\vec{\tau}_1(t), \vec{\tau}_2(t))$ forma uma base ortonormal e positivamente orientada de $T_{\alpha(t)}S$. Por .1 temos

$$\left\langle \vec{\tau}_1(t), \frac{\mathrm{D}\vec{\tau}_1}{\mathrm{dt}}(t) \right\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\vec{\tau}_1|^2\right) = 0,$$

de modo que os vetores $\frac{\mathrm{D}\vec{\tau}_1}{\mathrm{dt}}(t)$ e $\vec{\tau}_2(t)$ são colineares. A **curvatura geodésica** $k_g(t)$ de α no ponto $\alpha(t)$ é definida pela igualdade

$$\frac{\mathrm{D}\vec{\tau}_1}{dt}(t) = |\alpha'(t)| k_g(t) \vec{\tau}_2(t).$$

Ou seja,

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|} \left\langle \frac{\mathrm{D}\vec{\tau}_1}{\mathrm{dt}}(t), \vec{\tau}_2(t) \right\rangle.$$