UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EMANUEL MENDONÇA VIANA

CAMPOS CONFORMES E MÉTRICAS CRÍTICAS EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

FORTALEZA

2019

EMANUEL MENDONÇA VIANA

CAMPOS CONFORMES E MÉTRICAS CRÍTICAS EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V667c Viana, Emanuel Mendonça.
Campos conformes e métricas críticas em variedades compactas com bordo / Emanuel Mendonça Viana. – 2019.
69 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Campos vetoriais conforme gradiente. 2. Hemisfério da esfera euclidiana. 3. Variedades com bordo. 4. Métricas críticas. 5. Funcional de Einstein-Hilbert. I. Título.

CDD 510

EMANUEL MENDONÇA VIANA

CAMPOS CONFORMES E MÉTRICAS CRÍTICAS EM VARIEDADES COMPACTAS COM BORDO.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 27 / 06 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marco Magliaro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

À minha amada mãe, por todas suas orações.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter guiado meu caminho até aqui, por ser meu refúgio, minha fortaleza e por renovar minhas forças nos muitos momentos de fraqueza.

Aos meus amados pais Rita Mendonça e Valdésio Viana, por todo amor, carinho, conselhos e apoio incondicional, bem como pelo esforço para oferecer uma educação de qualidade. Em especial, à minha mãe, por todo zelo, preocupação e por todo cuidado que sempre teve comigo, assim como suas orações e pedidos à Deus. À minha irmã Camila Viana, minha sobrinha Alice Maia e meu cunhado José Luis Maia por momentos imprescindíveis de lazer e alegria, bem como equilíbrio necessário para chegar até aqui, pelas suas orações e por sempre acreditarem no meu potencial.

Ao meu tio Gerardo Valdisio Rodrigues Viana, pelo apoio, orientação, ensinamentos de perseverança e resiliência, e, principalmente, por palavras de incentivo durante o início dos meus estudos.

À minha noiva Carla Paiva, pela sua paciência e compreensão nos momentos mais complicados durante o curso, por ter aguentado meus estresses, pois muitas foram as vezes que deixamos de sair por conta dos meus estudos, que se mostrou, como sempre, fiel e presente em cada momento que precisei de uma palavra de ânimo e sugestões para lidar com determinadas escolhas. Obrigado pelo amor, diálogo e compreensão. Esses últimos anos foram bem delicados e serei eternamente grato por toda a fé que depositou em mim.

Ao professor Abdênago Barros, pela sua orientação, o incetivo, a ajuda e motivação nos momentos difíceis para elaboração dessa tese. Agradeço pela sua paciência e disponibilidade para as conversas quase que diárias, assim como muitos de seus valiosos conselhos (nos mais variados assuntos) ficarão para sempre gravados em minha memória. Finalizo o doutorado tendo comigo a certeza de ter tido uma excelente formação sob sua orientação e ter conquistado uma grande amizade.

Ao professor Gervásio Colares pelos conselhos e ensinamentos não necessariamente matemáticos, importantes para o meu amadurecimento profissional e pessoal, desde os primeiros meses do curso de Bacharelado em Matemática, sob a condição de orientador de iniciação científica, e após como orientador de mestrado.

Aos professores Adam da Silva, Ernani Ribeiro Jr., Fabricio Oliveira e Marco Magliaro por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora e por várias sugestões para a versão final da tese.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos professores Marcos Melo, Daniel Cibotaru, Fábio Montenegro, Luciano Mari, Luquésio Petrola, Jorge Herbert e Antonio Caminha que contribuíram de forma direta para minha formação, pelos belos cursos ministrados, demonstrando grande dedicação e excelência didática. Agradeço ao professor Ernani Ribeiro Jr. pelas inúmeras discussões sobre matemática, sugestões e pelas conversas descontraídas durante o cafezinho da manhã, juntamente com os meus amigos Adam, Elzimar, Fabricio e Halyson.

Aos meus amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos), Adam da Silva, Amilcar Montalbán, Antônio Wilson, Diego Sousa, Diego Eloi, Eddygledson Gama (Nino), Elzimar Rufino, Fabricio Oliveira, Halyson Baltazar, Israel Evangelista, Jocel Faustino, J. Tiago Cruz, Marcos Raniere, Tiarlos Cruz, Renato Targino e Valdir Junior. Muito obrigado por esses anos de convivência, ajuda, pela força e pelas conversas despreocupadas no café da tarde e em tantos outros momentos.

Aos meu amigos Renato Spartani, Hercília Diniz, Vinicius Arcelino, Rafael Motta, Ricardo Spartani, Fábio Motta, Camila Sá que apoiaram-me nos momentos mais difíceis, em palavras e ações.

À Rocilda e Elton pela revisão deste trabalho e sugestões.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares, secretárias da Pós-Graduação, por toda competência e agilidade.

"Sei perfeitamente como o tempo é precioso.
Aproveite o momento."
(STEPHEN HAWKING)

RESUMO

Esse trabalho está dividido em duas partes e tem como objetivo estudar campos conformes e métricas críticas em variedades compactas com bordo. A primeira dessas partes está relacionada a variedades riemannianas compactas $(M^n,\, g)$ com bordo suave sob a existência de campo vetorial não trivial conforme gradiente. Com controles apropriados na curvatura de Ricci, mostramos que M é isométrica a um hemisfério da esfera, onde usamos os resultados de rigidez de Reilly (1977 e 1980). Em seguida, considerando o caso em que a variedade é Einstein com a existência de um campo vetorial não nulo conforme gradiente, provamos que sua curvatura escalar é positiva e ela deve ser isométrica a um hemisfério da esfera. Finalmente, encerramos tal parte, mostrando que uma limitação na energia de um campo vetorial conforme implica que tal variedade é isométrica ao hemisfério da esfera. Na segunda parte, estudamos variedades compactas $(M^n,\, g)$ que admitem uma solução não constante para o sistema de equações $-(\Delta f)g+\nabla^2 f-fRic=\mu Ric+\lambda\, g$, onde Ric é o tensor de Ricci, enquanto que μ, λ são parâmetros reais. Mais precisamente, sob a hipótese que $(M^n,\, g)$ tenha curvatura de Weyl radial nula, que significa $W(.\,,.\,,.\,,\nabla f)=0$, onde W é o tensor de Weyl, forneceremos a classificação completa para as seguintes estruturas: triplas estáticas positivas, métricas críticas do funcional volume e métricas críticas do funcional curvatura escalar total.

Palavras-chave: Campos vetoriais conforme gradiente. Hemisfério da esfera euclidiana. Variedades com bordo. Métricas críticas. Funcional volume. Funcional de Einstein-Hilbert. Tensor de Weyl.

ABSTRACT

This work is divided into two parts and it aims to study conformal vector fields and critical metrics on compact manifold with smooth boundary. The first of these parts is related to compact Riemannian manifold $(M^n,\, g)$ with smooth boundary under the existence of nontrivial conformal gradient vector field. With appropriate controls on the Ricci's curvature, we show that M is isometric to a hemisphere of the sphere, where we use the stiffness results of Reilly (1977 e 1980). Next, considering the case in which the manifold is Einstein with the existence of nonzero conformal gradient vector field, we prove that its scalar curvature is positive and it must be isometric to a hemisphere of $\mathbb{S}^n$. Finally, we conclude that part by showing that a suitable control on the energy of a conformal vector field implies that M is isometric to a hemisphere $\mathbb{S}^+_n$. In the second part, we study compact Riemannian manifolds $(M^n,\, g)$ that admit a non-constant solution to the system of equations $-\Delta f\, g + Hessf - fRic = \mu Ric + \lambda g$, where Ric is the Ricci tensor of g whereas μ and λ are two real parameters. More precisely, under assumption that $(M^n,\, g)$ has zero radial Weyl curvature, this means that the interior product of ∇f with the Weyl tensor W is zero, we shall provide the complete classification for the following structures: positive static triples, critical metrics of volume functional and critical metrics of the total scalar curvature functional.

Keywords: Conformal gradient vector fields. Hemisphere of the Euclidean sphere. Manifolds with boundary. Critical metrics. Volume functional. Einstein-Hilbert functional. Weyl tensor.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Essa tese está dividida em duas partes. Inicialmente, forneceremos um breve desenvolvimento histórico dos problemas estudados, bem como os resultados obtidos nos últimos anos. Além disso, descreveremos nossa contribuição nos problemas aqui apresentados.

No primeiro momento do trabalho, apresentamos resultados de caracterização de hemisférios para variedades riemannianas com bordo suave e não vazio, e tal parte é baseada no artigo *Conformal gradient vector fields on Riemannian manifolds with boundary* (2019) escrito pelo autor em parceria com I. Evangelista. Em tal capítulo, mais precisamente, o Capítulo 3, consideramos $(M^n,\, g)$, $n \geq 2$, uma variedade riemanniana compacta orientada com bordo suave ∂M. Denotaremos por ∇, ∇^2, Δ e dM a conexão riemanniana, o hessiano, o laplaciano e a forma volume sobre M, respectivamente, enquanto que $\nabla_{\partial M}$, $\Delta_{\partial M}$ e $d\sigma$ denotam a conexão riemanniana, o laplaciano e a forma volume sobre ∂M, respectivamente. Ademais, denotamos por $h(X,Y) = g(\nabla_X \nu, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a segunda forma fundamental associada ao campo vetorial unitário ν que aponta para fora ao longo de ∂M. Além disso, um campo vetorial suave $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ é *conforme* se $\mathcal{L}_\xi g = 2fg$, para uma função suave f sobre M, onde $\mathcal{L}_\xi$ é a derivada de Lie na direção de ξ. Caso ξ seja o gradiente de uma função suave sobre M, então ξ é dito ser um *campo vetorial conforme gradiente.*

A partir da fórmula de Koszul, e com ξ conforme, obteremos no texto que se segue a seguinte relação
$$\nabla\xi = fg + \varphi,$$
onde identificaremos φ com um $(0,2)-$tensor antissimétrico e ξ com um tensor $\xi(Y) = g(\xi, Y)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma das questões de interesse em geometria riemanniana é a caracterização de esferas entre a classe de variedades riemannianas compactas e conexas. Umas dessas caracterizações é dada por Obata (1962), a saber, uma condição necessária e suficiente para uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ completa ser isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(c)$ deve ser a existência de uma função suave não constante f sobre M satisfazendo
$$\nabla_X \nabla f = -cfX,\ X \in \mathfrak{X}(M),$$
para alguma constante $c > 0$, onde ∇_X é o operador derivada covariante com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Por outro lado, em meados do século passado, vários autores estudaram extensivamente variedades riemannianas com curvatura escalar constante, admitindo uma transformação suave conforme não isométrica. Naquela época, muitos famosos geômetras tentaram provar uma conjectura sobre a esfera euclidiana como sendo a única variedade riemanniana M^n compacta e orientável que admitia uma métrica de curvatura escalar constante R munida de um campo vetorial conforme X. Entre esses autores, citamos Bochner, Goldberg (1962b; 1962a), Hsiung (1968), Lichnerowicz, Nagano (1959), Obata (1971) e Yano (1959); referimos o leitor ao livro de Yano (1970) para um resumo desses resultados. Apesar de muitos esforços para provar a conjectura, ela permaneceu sem resposta até o início da década de oitenta, quando Ejiri (1981) encontrou um contraexemplo para essa conjetura construindo métricas de curvatura escalar constante em produtos *warped* do tipo $\mathbb{S}^1 \times_h N$, onde N é uma variedade riemanniana de dimensão $n-1$ com curvatura escalar constante positiva, h é uma função positiva sobre o círculo $\mathbb{S}^1$ satisfazendo uma certa equação diferencial ordinária e $X = h\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo vetorial conforme, veja Ejiri (1981) para detalhes.

No sentindo de caracterizar a esfera, uma questão natural surge: sob quais condições uma variedade riemanniana n-dimensional compacta e conexa que admite um campo vetorial não nulo conforme gradiente é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$? Deshmukh e Al-Solamy (2008) responderam essa questão provando que se (M^n, g) é uma variedade riemanniana n-dimensional fechada e conexa que admite um campo vetorial não nulo conforme gradiente e cuja curvatura de Ricci satisfaz $0 < Ric \leq (n-1)\Big(2 - \dfrac{nc}{\lambda_1}\Big)c$, onde c é uma constante positiva e λ_1 é o primeiro autovalor não nulo do operador laplaciano, então M é isométrica a $\mathbb{S}^n(c)$.

Uma questão análoga é caracterizar os hemisférios para variedades com bordo suave e não vazio. Nessa direção, Reilly (1977) provou que uma variedade riemanniana M compacta com bordo totalmente geodésico, que admite uma função não constante f sobre M tal que $\nabla^2 f = -cfg$, para alguma constante $c > 0$, $f \geq 0$ sobre M e $f = 0$ em ∂M, é necessariamente isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. Ainda nessa direção, Reilly (1980) também mostrou que se uma variedade riemanniana M compacta, conexa, orientada e com bordo não vazio conexo ∂M admite uma função não constante f sobre M que satisfaz $\nabla^2 f = -cfg$, para alguma constante $c > 0$, e $f\big|_{\partial M}$ é constante, então M é isométrica à bola geodésica sobre $\mathbb{S}^n(c)$.

Desta forma, podemos fazer o seguinte questionamento sobre variedades com bordo não vazio:

Questão 1.1. *Sob quais condições uma variedade riemanniana n-dimensional compacta e conexa com bordo suave não vazio que admite um campo vetorial não nulo conforme gradiente é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+$?*

Respondemos afirmativamente a esta questão sob algumas condições adicionais, mais exatamente provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta e conexa com bordo* *não vazio tal que a curvatura de Ricci satisfaz*

$$0 < Ric \leq (n-1)\left(2 - \frac{nc}{\lambda_1}\right)c,$$

para uma constante positiva c, onde λ_1 é o primeiro autovalor não nulo do operador laplaciano com condição de Dirichlet no bordo. Seja ∇f um campo vetorial conforme não nulo sobre M tal que $\Delta f = 0$ em ∂M. Então M^n é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.

Na sequência, motivado pelo trabalho de Deshmukh (2008), consideramos o caso em que a variedade é Einstein com a existência de um campo vetorial não nulo conforme gradiente. Mais precisamente, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Seja $(M^n,\, g)$ uma variedade Einstein compacta e conexa com bordo não vazio tendo constante de Einstein $\lambda = (n-1)c$ e ∇f um campo vetorial não nulo conforme em M. Suponha que Δf é não constante e $\Delta f = 0$ em ∂M. Então $c > 0$ e M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.*

Por outro lado, em uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$, a energia de um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ é definida por $E(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |X|^2$, e, além disso, na esfera $\mathbb{S}^n(c)$ de curvatura constante $\dfrac{1}{\sqrt{c}}$, qualquer função altura $h : \mathbb{S}^n(c) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \langle x, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, com respeito a um vetor constante $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz uma equação tipo Obata. Daí, com o vetor conforme $\xi = \nabla h$ e a função $f = -\sqrt{c}\,h$, temos que $E(\xi) = c^{-2}E(\nabla f)$. Tal observação motiva o seguinte questionamento: se uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ compacta admite um campo vetorial não nulo conforme ξ com função potencial f satisfazendo $E(\xi) = c^{-2}E(\nabla f)$, para uma constante positiva c, ela é necessariamente isométrica à esfera $\mathbb{S}^n(c)$? Uma resposta afirmativa para tal questão é dada por Deshmukh (2010) para variedades riemannianas compactas de curvatura escalar constante.

Desde que o trabalho de Deshmukh (2010) trata apenas de variedades sem bordo tentando caracterizar as esferas, podemos formular uma questão análoga para variedades com bordo suave. Mais precisamente,

Questão 1.2. *Sob quais condições uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ compacta com bordo suave ∂M admitindo um campo conforme não trivial ξ com função potencial f satisfazendo $E(\xi) = c^{-2}E(\nabla f)$, para uma constante positiva c, é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$?*

Uma resposta afirmativa para a Questão 1.2 é apresentada no seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja $(M^n,\, g)$ uma variedade riemanniana compacta com bordo ∂M suave e totalmente geodésico, e ξ um campo vetorial conforme sobre M com função potencial não* *constante satisfazendo $f = 0$ em ∂M. Suponha que M tem curvatura escalar constante $R = n(n-1)c$. Então $c > 0$ e*

$$E(\xi) \geq c^{-2} E(\nabla f).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.

No segundo momento, baseado no artigo *On static manifolds and related critical spaces with zero radial Weyl curvature* (2019) escrito pelo autor em parceria com A. Barros, H. Baltazar e R. Batista iremos estudar variedades riemannianas $(M,\, g)$ compactas que admitem uma solução não constante f para o sistema de equações

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = \mu Ric + \lambda g, \tag{1}$$

onde Ric, Δ e ∇^2 denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador laplaciano e o hessiano sobre M, e (μ, λ) são dois parâmetros reais. Mais precisamente, supondo que $(M,\, g)$ tenha curvatura de Weyl radial nula, isso significando que o produto interior de ∇f com o tensor de Weyl W é nulo ($i_{\nabla f} W = W_{ijkl} \nabla_l f = 0$), temos uma classificação completa para as seguintes estruturas: triplas estáticas positivas, métricas críticas do funcional volume e métricas críticas do funcional curvatura escalar total. Mais precisamente, nessa parte da tese, consideraremos uma variedade riemanniana $(M,\, g)$ n-dimensional compacta com curvatura escalar constante R que admite uma solução suave não constante f para o sistema de equações (1). Ressalta-se que investigaremos apenas casos especiais de tais estruturas, a saber, triplas estáticas positivas, métricas críticas do funcional volume e métricas críticas do funcional curvatura escalar total. Note que, cada uma dessas métricas satisfazem a equação fundamental (1) para parâmetros apropriados (μ, λ). Na sequência, descreveremos um breve desenvolvimento histórico para cada estrutura e nossa contribuição para o assunto.

A primeira estrutura que consideramos é a tripla estática positiva, que é uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ compacta com bordo suave ∂M que admite uma solução não constante para o sistema (1) com $(\mu, \lambda) = (0, 0)$, além disso tal função potencial f é não negativa no interior de M e anula-se precisamente no bordo ∂M.

Abaixo segue um clássico exemplo de tripla estática positiva com bordo não vazio.

Exemplo 1.1. *Um exemplo de tripla estática positiva com fronteira conexa é obtido escolhendo $(S^n_+(r),\, g)$, onde $S^n_+(r)$ é o hemisfério superior aberto de raio r em $\mathbb{R}^{n+1}$, dotado com a métrica euclidiana g. Assim, $\partial M = S^{n-1}(r)$ é o equador, a função altura f sobre $S^n_+(r)$ é positiva, anula-se precisamente sobre $\partial M = S^{n-1}(r)$, e satisfaz à Eq. (1) com $(\mu, \lambda) = (0, 0)$.*

Nos últimos anos, o estudo de espaços estáticos tem tido interesse substancial tanto do ponto de vista físico quanto matemático. Por exemplo, foi conjecturado que o único espaço-tempo estático no vácuo simplesmente conexo com constante cosmológica positiva e conexo no horizonte de eventos é o espaço De Sitter de raio r. Vale lembrar, que a identidade $\mathcal{L}_g^*(f) = -\Delta f\, g + \nabla^2 f - fRic = 0$ aparece em Relatividade Geral, onde ela define soluções estáticas das equações de campos de Einstein. O núcleo de $\mathcal{L}_g^*$ está relacionado aos espaços-tempo estáticos em Relatividade Geral, como pode ser visto em Corvino (2000). Neste sentido, este problema desempenha um papel importante na Relatividade Geral e, para os nossos propósitos, tal conjectura pode ser escrita da seguinte forma:

> *A única tripla estática compacta $(M^n,\, g,\, f)$ de dimensão n, com curvatura escalar positiva e bordo conexo é dada por um hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$, onde a função f é a função altura correspondente.*

A conjectura foi formulada por Boucher-Gibbons-Horowitz (1984) e ela é chamada *cosmic no-hair conjecture.*

Nas últimas décadas algumas contribuições parciais para a solução da conjectura foram obtidas em muitas perspectivas diferentes, veja, por exemplo, Ambrozio (2017), Baltazar e Ribeiro Jr. (2018), Barros e Da Silva (2019), Montiel (2015a), Kobayashi (1982), Lafontaine (1983), Qing e Yaun (2013). Embora todas as evidências indicassem que a conjectura fosse válida, Gibbons, Hartnoll e Pope (2003) construíram contraexemplos para a conjectura *cosmic no-hair* nos casos $4 \leq n \leq 8$, usando métricas Einstein não homogêneas encontradas por Böhm. Entretanto, permanece interessante mostrar sob quais condições tal conjectura é verdadeira.

Neste ponto, é importante lembrar o seguinte resultado de classificação para uma métrica estática sob a condição de Bach-*flat* obtida por Qing e Yuan (2013).

Teorema 1.1 (Kobayashi (1982), Lafontaine (1983), Qing e Yuan (2013))**.** *Seja $(M^n,\, g,\, f)$ uma tripla estática positiva n-dimensional com curvatura escalar $R = n(n-1)$. Suponha que $(M^n,\, g)$ seja Bach-flat, então $(M^n,\, g)$ é coberta por uma tripla estática equivalente a uma das triplas estática seguintes:*

1. *O hemisfério padrão com métrica canônica $(\mathbb{S}^n_+,\, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$.*
2. *O cilindro canônico sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica produto*

$$\Big(M = \Big[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\Big] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = dt^2 + \frac{n-2}{n} g_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big).$$

3. *O espaço de Schwarzschild definido por*

$$\Big(M = [r_1, r_2] \times \mathbb{S}^{n-1},\ g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} dt^2 + t^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big),$$

onde $r_1 < r_2$ são raízes positivas de f e $m \in \left(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\right)$ é uma constante real.

Contudo, antes de apresentar nosso primeiro resultado, relembramos que uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ tem *curvatura de Wely radial nula* quando, para uma função potencial adequada f sobre M^n, o tensor de Weyl satisfaz $i_{\nabla f}W = 0$, onde

$$i_{\nabla f}W = W(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\nabla f).$$

Naturalmente, toda variedade localmente conformemente plana pertence a essa classe. Destacamos também que, no caso quadridimensional, todas as estruturas apresentadas nesse trabalho que satisfazem a condição da curvatura Weyl ser radialmente nula, devem ser localmente conformemente plana, veja, por exemplo, os argumentos usados na parte inicial da prova do Teorema 2 em Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2014).

Espaços estáticos satisfazendo $i_{\nabla f}W = 0$ foram estudados recentementes por Baltazar e Ribeiro Jr. (2018). Com respeito a esse trabalho, os autores provaram que, se uma tripla estática positiva $(M^n,\, g,\, f)$ tem curvatura seccional não negativa e $i_{\nabla f}W = 0$, então, a menos de um quociente finito, M^n é isométrico ou a um hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$ ou ao cilindro canônico sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Após tais considerações, nosso primeiro resultado classifica triplas estáticas positivas com curvatura de Weyl radial nula sem a hipótese adicional.

Teorema 4.6. *Seja $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 5$, uma tripla estática positiva n-dimensional com curvatura escalar $R = n(n-1)$. Suponha que $(M^n,\, g)$ satisfaz $i_{\nabla f}W = 0$. Então $(M^n,\, g,\, f)$ é coberta por uma das triplas estáticas descritas no Teorema 1.1.*

Em seguida, utilizando a mesma nomenclatura de Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2014), consideraremos uma métrica Miao-Tam, que é uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ compacta com bordo suave ∂M que admite solução não constante para Equação (1) com $(\mu, \lambda) = (0, 1)$ e, analogamente ao caso estático, a função potencial f anula-se precisamente na fronteira de M, e é estritamente positiva no interior de M. Tais métricas foram investigadas por Miao e Tam (2009) e, como podemos ver no Teorema 5 desse trabalho, elas caracterizam-se por serem pontos críticos do funcional volume.

Além disso, Miao e Tam (2011) obtiveram uma classificação completa para tais métricas críticas sob a hipótese que tais variedades sejam localmente conformemente plana. Ademais, tais autores construíram exemplos explícitos de métricas críticas que estão na forma de produtos *warped* (veja Teorema 1.2 (2011)).

Mais recentemente, inspirados nas ideias desenvolvidas por Miao e Tam (2011) (veja também os trabalhos de Kobayashi (1982), bem como Kobayashi e Obata (1981) para o caso estático), Baltazar, Batista e Bezerra (2017) melhoraram o resultado de Miao-Tam substituindo a suposição de localmente conformemente plana pela condição Bach-*flat*, veja

Teorema 2 em tal trabalho. Em particular, como consequência imediata desse resultado, os autores provaram que uma métrica crítica Miao-Tam compacta, simplesmente conexa e Bach-*flat* com bordo isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$ deve ser isométrica a bola geodésica na forma espacial simplemente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Para mais detalhes sobre esse assunto veja, por exemplo, Baltazar, Da Silva e Oliveira (2018), Baltazar e Ribeiro Jr. (2017; 2018), Baltazar, Diógenes e Ribeiro Jr. (2017), Barbosa, Lima e Freitas (2016), Barros e Da Silva (2019), Barros *et al.* (2014), Batista *et al.* (2017) e Kim e Shin (2018) e referências contidas nesses trabalhos.

Motivados pela descrição acima, investigaremos as métricas críticas de Miao-Tam sob a condição da curvatura de Weyl ser radialmente nula. Mais precisamente, iremos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.5. *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 5$, *uma métrica crítica Miao-Tam com* $i_{\nabla f}W = 0$. *Então* $(M,\, g)$, *ou é isómetrica a* $(I \times N, ds^2 + r^2 h)$, *onde* I *é um intervalo finito de* $\mathbb{R}$ *contendo a origem* 0, $(N,\, h)$ *é uma variedade Einstein compacta sem bordo com* $Ric = (n-2)\kappa_0 h$, *para alguma constante* κ_0, r *é uma função positiva em* I *satisfazendo* $r'(0) = 0$ *bem como*

$$r'' + \frac{R}{n(n-1)} r = a r^{1-n}$$

para alguma constante $a > 0$, *e* κ_0 *satisfaz a equação*

$$(r')^2 + \frac{R}{n(n-1)} r^2 + \frac{2a}{n-2} r^{2-n} = \kappa_0,$$

ou M *é uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{S}^n$, *ou* $(M,\, g)$ *é coberta por um dos produtos warped tendo* $\mathbb{Z}_2$ *como grupo de recobrimento.*

Como consequência imediata do Teorema 4.5, deduzimos o seguinte resultado de rigidez.

Corolário 4.1. *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 5$, *uma métrica Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico à esfera canônica* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Se* $i_{\nabla f}W = 0$, *então* $(M^n,\, g)$ *é isométrica à bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$.

Finalmente, a última estrutura que estudamos na segunda parte da tese será a equação do ponto crítico para o funcional curvatura escalar total, por simplicidade representaremos tal estrutura por métricas CPE, que é uma variedade riemanniana compacta que admite uma solução não constante para Equação (1) com $(\mu, \lambda) = (1, -R/n)$. Para entender o caráter variacional dessa métrica, seja $\mathcal{M}$ o conjunto das métricas riemannianas em M^n de volume 1, e $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ o subconjunto da métricas riemannianas com curvatura escalar constante. Definimos o funcional curvatura escalar total, ou funcional

Einstein-Hilbert, $\mathcal{R} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, como se segue

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R_g dM_g.$$

Ressaltamos que os pontos críticos desse funcional são precisamente as métricas Einstein, veja Capítulo 4 de Besse (1987) para mais detalhes. Com essas considerações em mente, a equação de Euler-Lagrange de $\mathcal{R}$ restrita ao conjunto $\mathcal{C}$ pode ser escrita da seguinte forma de equação do ponto crítico

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = Ric - \frac{R}{n}g,$$

onde f é uma função suave em M e $\mathfrak{L}_g^*$ é L^2-adjunto formal da linearização do operador curvatura escalar $\mathfrak{L}_g$ dado por

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic.$$

Em particular, comparando as duas últimas equações, obtemos exatamente (1) for $(\mu, \lambda) = (1, -R/n)$.

Por volta dos anos de 1980 foi conjecturado que toda métrica CPE deveria ser Einstein. Portanto, se ela é válida, considerando uma solução não trivial f de (1), então após aplicar o teorema de Obata (1962), concluímos que $(M^n,\, g)$ deve ser isométrica a esfera canônica. Essa conjectura foi proposta em Besse (1987) e abaixo apresentamos esse problema da seguinte maneira.

Conjectura 1.1 (Conjectura CPE)**.** *Uma métrica* CPE *sempre é Einstein.*

Algumas respostas positivas foram dadas para essa conjectura. Para uma visão geral do progresso recente sobre este assunto, referimos os seguintes artigos: Barros e Ribeiro Jr. (2014); Barros, Leandro e Ribeiro Jr. (2015); Chang, Hwang e Yun (2010; 2012); Hwang (2000; 2003; 2013), Leandro (2015); Santos (2017) e Yun e Chang (2019; 2014; 2016). Em particular, a Conjectura 1.1 é válida para variedades localmente conformemente plana e variedades Bach-*flat*, veja Lafontaine (1983) e Qing (2013), respectivamente. Mais recentemente, Baltazar (2017) provou que a Conjectura CPE é verdadeira para variedades n-dimensional com curvatura seccional não negativa satisfazendo a condição da curvatura de Weyl ser radialmente nula. No nosso último resultado dessa segunda parte, provamos tal conjectura considerando a curvatura de Weyl radial nula. Esse resultado refina os resultados sobre métricas CPE localmente conformemente plana em Lafontaine (1983), bem como o Teorema 1 em Baltazar (2017). Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *A Conjectura 1.1 é verdadeira para variedades compactas de dimensão n,*

$n \geq 5$, *satisfazendo* $i_{\nabla f} W = 0$.

2 PRELIMINARES

Ao longo deste capítulo forneceremos algumas notações básicas bem como alguns fatos de Geometria Riemanniana necessários para o bom encaminhamento nos demais capítulos. Na Seção 2.1 incluiremos algumas definições básicas sobre variedades riemannianas e resultados basilares da teoria de geometria que servirá como arcabouço para os resultados no Capítulo 3 e os demais da tese. Na Seção 2.2 iremos apresentar as definições do tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci e curvatura escalar associados a uma variedade riemanniana, bem como apresentar alguns conceitos e outros tensores essenciais para este trabalho. Não entraremos em detalhes sobre demonstrações nessas seções que se seguem, porém o leitor pode consultar Besse (1987), Chavel (1984), Chow, Lu e Ni (2006), Carmo (2015) ou Petersen (2006) para esclarecimentos das seções.

2.1 Definições e resultados básicos

No que se segue, seja $(M^n,\, g)$, $n \geq 2$, uma variedade riemanniana compacta orientada com bordo suave ∂M, com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos vetores suaves de M e o espaço das funções suaves sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. Além disso, ∇^2 e Δ denotará, respectivamente, o hessiano e o laplaciano sobre M.

Primeiramente, relembremos que a norma de Hilbert-Schmidt para $(0,2)-$tensores em uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ é a induzida do produto interno $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(TS^*)$, onde S^* denota o tensor adjunto de S.

Em um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, denotando por $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ a base coordenada, (g_{ij}) a matriz da métrica, (g^{ij}) a sua inversa neste sistema de coordenadas, $T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j)$, $S_{ij} = S(\partial_i, \partial_j)$, teremos

$$\langle T, S\rangle = \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} T_{ij} S_{kl}.$$

Em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, usando a identificação natural dos $(0,2)-$tensores com os $(1,1)-$tensores, isto é, $T(e_i, e_j) = g(Te_i, e_j)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle T, S\rangle &= \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij} = \sum_{i,j} g(Te_i, e_j) g(Se_i, e_j) \\ &= \sum_i g(Te_i, \sum_j g(Se_i, e_j) e_j) = \sum_i g(Te_i, Se_i).\end{aligned}$$

Por exemplo, caso $S = g$, teremos $\langle T, g\rangle = \mathrm{tr}(T)$. Em um sistema de coordenadas, adotaremos a convenção de índices repetidos para indicar soma.

Precisaremos recordar também a seguinte propriedade da **derivada de Lie**:

para um $(0,2)-$tensor T em $(M^n,\, g)$, temos

$$(\mathcal{L}_X T)\,(Y,Z) = X(T(Y,Z)) - T([X,Y],Z) - T(Y,[X,Z]),$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, fazendo $T = g$, temos

$$(\mathcal{L}_X g)\,(Y,Z) \;\;=\;\; g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y).$$

Ademais, tomando o traço na relação acima, obtemos

$$\mathrm{tr}\,(\mathcal{L}_X g) = 2\,\mathrm{div}X. \tag{2}$$

Quando $\mathcal{L}_X g = 0$, dizemos que o campo vetorial X é Killing.

A seguir recordamos que, se g é a métrica riemanniana de M e $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, então vale a **fórmula de Koszul** para a conexão de Levi-Civita ∇ de M:

$$\begin{aligned} 2\,g(\nabla_X Y, Z) \;\;=&\;\; X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y). \end{aligned} \tag{3}$$

A identidade de Bianchi contraída duas vezes é dada por

$$2g^{ij}\nabla_i R_{jk} = \nabla_k R, \tag{4}$$

e ela é equivalente ao **tensor de Einstein** $Ric - \dfrac{1}{2}Rg$ ser livre de divergência:

$$\mathrm{div}\left(Ric - \frac{1}{2}R\,g\right) = 0.$$

Para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos acima vejamos a seguinte definição.

Definição 2.1. *A divergência de um $(1,r)-$tensor T em M é o $(0,r)-$tensor dado por*

$$(\mathrm{div}\,T)(v_1,\ldots,v_r)(p) = \mathrm{tr}\,(\omega \mapsto (\nabla_\omega T)\,(v_1,\ldots,v_r)(p))\,,$$

onde $p \in M^n$ e $(v_1,\ldots,v_r) \in T_pM \times \ldots \times T_pM$.

Por exemplo, seja T um $(0,2)-$tensor em uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$, e tome um referencial ortonormal local $\{e_1,\ldots,e_n\}$ em M. Assim, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}T)(Z) &= g\left((\nabla_{e_i}T)(Z), e_i\right)\\ &= g(\nabla_{e_i}T(Z) - T(\nabla_{e_i}Z), e_i)\\ &= g(\nabla_{e_i}T(Z), e_i) - g(T(\nabla_{e_i}Z), e_i),\end{aligned}$$

i.e,

$$\mathrm{div}(T(Z)) = (\mathrm{div}T)(Z) + T(\nabla_{e_i}Z, e_i).$$

Mais geralmente, temos o seguinte lema, cuja prova pode ser encontrada no trabalho de Gomes (2012).

Lema 2.1. *Seja T um $(0,2)-$tensor simétrico em uma variedade riemanniana $(M^n,\ g)$. Então vale*

$$\mathrm{div}(T(\varphi Z)) = \varphi(\mathrm{div}\, T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z),$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável φ em M. Em particular, se $Z = \nabla f$, para alguma função diferenciável f em M, então

$$\mathrm{div}(T(\varphi\nabla f)) = \varphi(\mathrm{div}\, T)(\nabla f) + \varphi\langle \nabla^2 f, T\rangle + T(\nabla\varphi, \nabla f).$$

A identidade (5) a seguir é conhecida na literatura como a **fórmula de Bochner**.

Teorema 2.1 (Bochner)**.** *Se M é uma variedade riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + g(\nabla f, \nabla(\Delta f)) + |\nabla^2 f|^2. \tag{5}$$

Finalmente, um autovalor do operador de Laplace Δ em M é um número λ que corresponde a existência de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, dita autofunção de Δ, tal que f é não constante, $f\big|_{\partial M} = 0$ e

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

Os autovalores de Δ formam um conjunto discreto $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Ademais, se f é uma função não constante tal que $f\big|_{\partial M} = 0$, então

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M |\nabla f|^2 dM}{\displaystyle\int_M f^2 dM},$$

com a igualdade se, e somente se, $\Delta f = -\lambda f$, e qualquer autofunção para λ_1 anula-se somente em ∂M.

2.2 Notações e alguns tensores importantes

Na seção que se segue, recordaremos alguns tensores bem como terminologia no estudo de curvatura para variedades riemannianas $(M^n,\, g)$, $n \geq 4$.

O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} Rm\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,Z} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Ademais, usando a métrica, podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, onde

$$Rm\,(X,Y,Z,W) = \langle Rm\,(X,Y)W, Z \rangle.$$

Tomando o traço do tensor de Riemann obtemos o bem conhecido **tensor de Ricci**, que é um $(0,2)-$ tensor, que para um referencial ortonormal $\{e_i\}$ pode ser expresso na seguinte forma

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} Rm(X, e_i, Y, e_i).$$

Em coordenadas teremos:

$$R_{ij} = R_{ilj}{}^{l} = g^{lm} R_{iljm}$$

e a **curvatura escalar** é

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

Dado um plano bidimensional $\Pi \subset T_pM$ e $X_p, Y_p \in T_pM$ vetores que geram Π, então

$$K(\Pi) = \frac{Rm(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}, \tag{6}$$

não depende da base escolhida para Π, e é chamada **curvatura seccional** do plano Π. Uma variedade riemanniana completa e com curvatura seccional constante é dita uma **forma espacial**.

Ademais, para nossos propósitos, lembremos ainda a **identidade de Bianchi**, que, para os campos $X, Y, Z, W, V \in \mathfrak{X}(M)$, é dada por

$$\nabla Rm(X, Y, Z, W, V) + \nabla Rm(Y, Z, X, W, V) + \nabla Rm(Z, X, Y, W, V) = 0,$$

e que, em coordenadas, tal relação é equivalente a

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Daí, como consequência, deduzimos a seguinte igualdade

$$(\mathrm{div}\, Rm)_{jkl} = \nabla_i R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

Ademais, segue das fórmulas de comutatividade da derivada covariante (**identidade de Ricci**) que para qualquer variedade riemanniana M temos

$$\nabla_i \nabla_j R_{kl} - \nabla_j \nabla_i R_{kl} = R_{ijks} R_{sl} + R_{ijls} R_{ks},$$

e para mais detalhes referimos o livro de Chow (2007).

Agora, relembremos alguns tensores para uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ essenciais para o nosso trabalho. Primeiro recorde que, em dimensão $n \geq 3$, o tensor de Riemann admite a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} \;&=\; W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\big(R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{il} g_{jk} - R_{jk} g_{il}\big) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g_{jl} g_{ik} - g_{il} g_{jk}\big), \end{aligned} \tag{7}$$

onde W_{ijkl} denota o tensor de curvatura de Weyl e R_{ij} denota o tensor de Ricci.

O tensor de Schouten A é definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\big(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}\big). \tag{8}$$

Das equações (7) e (8) concluímos que

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + (A \owedge g)_{ijkl}, \tag{9}$$

onde $\owedge$ representa o produto Kulkarni-Nomizu, o qual é definido por

$$(S \owedge T)_{ijkl} = S_{ik} T_{jl} + S_{jl} T_{ik} - S_{il} T_{jk} - S_{jk} T_{il},$$

para quaisquer $(0, 2)-$tensores S e T.

Outro tensor importante é o tensor de Cotton C, definido como se segue:

$$C_{ijk} = (n-2)\left(\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}\right), \tag{10}$$

e usando a equação (8), temos a seguinte relação

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}\big(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}\big), \tag{11}$$

o qual está relacionado com o tensor de Weyl da seguinte maneira:

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl}, \tag{12}$$

quando $n \geq 4$.

Observação 2.1. *Uma importante propriedade do tensor de Cotton é que ele é antissimétrico nos dois primeiros índices e tem traço nulo em quaisquer índices, isto é,*

$$C_{ijk} = -C_{jik} \text{ e } g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \tag{13}$$

Finalmente, consideremos o tensor de Bach definido para $n \geq 4$, em termos das componentes do tensor de Weyl, o qual foi introduzido por Bach em 1921:

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}, \tag{14}$$

enquanto, para $n = 3$, o tensor de Bach é dado por

$$B_{ij} = \nabla_k C_{kij}. \tag{15}$$

Dizemos que a métrica é Bach-*flat* se o tensor de Bach é nulo, i.e., $B_{ij} = 0$. Para mais detalhes acerca desses tensores referimos os seguintes traballhos: Besse (1987), Chow (2007) e Viaclovsky (2014).

Destacamos que, em dimensão 4, as métricas Bach-*flat* são precisamente pontos críticos do funcional conformemente invariante

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 dM_g, \tag{16}$$

definido no espaço das métricas riemannianas. Em particular, se uma métrica é localmente conformemente plana então ela é também Bach-*flat*. Além disso, se a métrica é de Einstein, então ela é Bach-*flat*, pois o tensor de Cotton (11) é identicamente nulo e o tensor de Weyl tem traço igual a zero. Porém, como pode ser visto em Besse (1987), a recíproca desses fatos nem sempre acontece.

A seguir, apresentamos uma definição essencial para esta tese, bem como trazemos de novo à memória o conceito de tensor sem traço.

Definição 2.2. *Uma métrica riemanniana g é dita métrica de Einstein se o tensor de Ricci satisfaz $Ric_g = \lambda g$, para alguma constante real λ.*

Por fim, o tensor sem traço $\mathring{T}$ de um $(0,2)-$tensor T arbitrário em uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ é dado por

$$\mathring{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g_{ij}.$$

Ademais, notemos que

$$|\mathring{T}|^2 = \mid T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g \mid^2 = |T|^2 - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(T))^2.$$

Sob essas notações, finalizamos tal capítulo com o seguinte lema, devido a H. Baltazar, R. Batista e K. Bezerra.

Lema 2.2 (Baltazar, Batista e Bezerra, 2017, Lema 1)**.** *Seja $(M^n,\, g)$ uma variedade riemanniana com curvatura escalar constante. Então temos que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|Ric|^2 &= |\nabla Ric|^2 - \frac{1}{2}|C_{ijk}|^2 + \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} \\ &\quad + \frac{R}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3). \end{aligned}$$

3 CAMPOS CONFORMES GRADIENTE EM VARIEDADES COM BORDO

Este capítulo baseia-se no estudo dos campos vetoriais conformes gradiente em variedades riemannianas com bordo suave não vazio. Os teoremas deste capítulo foram motivados pelos trabalhos de Deshmukh (2008 e 2010), onde o mesmo obteve alguns resultados de rigidez para esferas envolvendo a limitação do tensor de Ricci com um campo vetorial conforme gradiente, e limitações de energia de um campo conforme não trivial. Inspirados nesses trabalhos, estudaremos tais campos em variedades com bordo suave não vazio. Os teoremas dessa parte baseiam-se no artigo *Conformal gradient vector fields on Riemannian manifolds with boundary* (2019), escrito pelo autor em parceira com I. Evangelista.

3.1 Definições e resultados existentes

Nesta seção, considere $(M^n,\, g)$, $n \geq 2$, uma variedade riemanniana compacta orientada com bordo suave ∂M. Denotaremos por ∇, ∇^2, Δ e dM a conexão riemanniana, o hessiano, o laplaciano e a forma volume sobre M, respectivamente, enquanto que $\nabla_{\partial M}$, $\Delta_{\partial M}$ e $d\sigma$ denotam a conexão riemanniana, o laplaciano e a forma volume sobre ∂M, respectivamente. Ainda denotamos por $h(X,Y) = g(\nabla_X \nu, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a segunda forma fundamental associada ao campo vetorial unitário ν que aponta para fora ao longo de ∂M.

Para realizar o estudo de campos conformes, lembremos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Um campo vetorial suave $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ é conforme se*

$$\mathcal{L}_\xi g = 2fg \tag{17}$$

para uma função suave f sobre M, onde $\mathcal{L}_\xi$ é a derivada de Lie na direção de ξ.

Neste caso, dizemos que a função f é o fator conforme de ξ (ver Besse 1987) e segue imediatamente de (2) que $f = \dfrac{1}{n}\mathrm{div}\,\xi$. Se ξ é o gradiente de uma função suave sobre M, então ξ é dito ser um *campo vetorial conforme gradiente*. Nesse caso, ξ é fechado, e segue que um campo vetorial conforme gradiente ξ satisfaz

$$\nabla_X \xi = \left(\frac{div\,\xi}{n}\right) X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ademais, dizemos que ξ é um campo vetorial não trivial, caso ele não seja um campo vetorial conforme Killing. De modo direto, a partir da fórmula de Koszul (3), temos a seguinte identidade para qualquer campo vetorial Z sobre M,

$$2g(\nabla_X Z, Y) = \mathcal{L}_Z g(X,Y) + d\eta(X,Y), \ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde η é a $1-$forma dual associada a Z, isto é, $\eta(Y) = g(Z,Y)$. Note ainda que podemos definir φ como $(1,1)-$tensor antissimétrico:

$$d\eta(X,Y) = 2g(\varphi(X), Y), \ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Portanto, podemos usar as equações acima para obter

$$\nabla_X \xi = fX + \varphi(X), \ \ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{18}$$

A função f será chamada *função potencial* associada a ξ. Veja que podemos identificar φ com um $(0,2)-$tensor antissimétrico e ξ com um tensor $\xi(Y) = g(\xi, Y), \ Y \in \mathfrak{X}(M)$, para reescrever (18) como

$$\nabla \xi = fg + \varphi. \tag{19}$$

Relembremos que a fórmula de Ricci-Bochner na versão tensorial pode ser escrita na forma

$$\mathrm{div}(\nabla^2 f) = Ric(\nabla f) + \nabla(\Delta f). \tag{20}$$

Em particular, caso ∇f seja um campo vetorial conforme, então

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g, \tag{21}$$

e, consequentemente, tomando a divergência em (21) e usando Ricci-Bochner (20), obtemos

$$Ric(\nabla f) = -\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\nabla(\Delta f). \tag{22}$$

A seguir, para a demonstração do nosso resultado que trata de variedades com bordo totalmente geodésico explicitaremos tal definição abaixo.

Considere uma subvariedade $\widetilde{M}$ de uma variedade riemanniana $(M^n,\, g)$. A métrica riemanniana g induz uma métrica riemanniana $\widetilde{g}$ na subvariedade $\widetilde{M}$ e, dessa forma, $(\widetilde{M},\, \widetilde{g})$ também é uma subvariedade riemanniana de $(M,\, g)$.

Definição 3.2. *Uma subvariedade $\widetilde{M}$ de uma variedade riemanniana $(M,\, g)$ diz-se totalmente geodésica quando seu tensor segunda forma é nulo.*

Assim, uma subvariedade totalmente geodésica $\widetilde{M}$ é extrinsecamente plana: observadores em $\widetilde{M}$ não veem curvas. Entretanto, isso não quer dizer que $\widetilde{M}$ é intrinsecamente plana; na verdade, pela equação de Gauss, tal subvariedade tem a mesma curvatura intrínseca que M. Para mais referências veja os livros de Chen (2000, cap. 11) e de Helgason (1978). A proposição abaixo contida em O'Neill (1983, p.104) apresenta equivalências para a definição acima.

Proposição 3.1. *Para uma subvariedade riemanniana* $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ *de uma variedade riemanniana* (M, g) *os seguintes itens são equivalentes:*

1. $\widetilde{M}$ *é totalmente geodésica em* (M, g).
2. *Toda geodésica de* M *também é geodésica de* $\widetilde{M}$.
3. *Para um campo vetorial* X *tangente à subvariedade riemanniana* $\widetilde{M}$, *a geodésica* γ *sobre a variedade riemanniana* (M, g), *definida no intervalo* $(-\epsilon, \epsilon)$ *com direção inicial* $\gamma'(0) = X$, *permanece na subvariedade.*

Para finalizar esta seção, apresentaremos um conceito necessário para o entendimento do nosso último resultado de tal capítulo (Teorema 3.3).

Dada uma variedade riemanniana (M^n, g), a energia de um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ é definida por

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_M |X|^2. \tag{23}$$

Observação 3.1. *Na esfera* $\mathbb{S}^n(c)$ *de curvatura constante* $\frac{1}{\sqrt{c}}$, *qualquer função altura* $h : \mathbb{S}^n(c) \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \langle x, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},$$

com respeito a um vetor constante $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, *satisfaz* $\nabla_X \nabla h = -\sqrt{c}\, hX$. *Daí, o vetor conforme* $\xi = \nabla h$ *e a função* $f = -\sqrt{c}\, h$ *satisfazem*

$$E(\xi) = c^{-2}E(\nabla f).$$

Tal observação motivou a formulação da Questão 1.2 contida na introdução.

3.2 Lemas essenciais

Neste momento apresentaremos dois lemas contendo fórmulas integrais que serão essenciais para os resultados deste capítulo. Mais precisamente, esses dois primeiros lemas serão utilizados nas demonstrações dos primeiros três teoremas da Seção 3.3.

Lema 3.1. *Seja* (M^n, g) *uma variedade riemanniana compacta e conexa com bordo suave* ∂M *e* ∇f *um campo vetorial conforme em* M. *Então,*

(i) $\displaystyle\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM = \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM - \frac{n-1}{n}\int_{\partial M}(\Delta f)g(\nabla f, \nu)d\sigma.$

(ii) $\displaystyle\int_M \big(Ric(\nabla(\Delta f), \nabla f) + \frac{n-1}{n} \mid \nabla(\Delta f) \mid^2 \big) dM = 0.$

(iii) $\displaystyle\frac{n-2}{2(n-1)} g(\nabla R, \nabla f) - \frac{1}{n-1}\mathrm{div}(f\nabla R) + \Delta\big(\Delta f + \frac{R}{n-1}f\big) = 0.$

Em particular, se R é constante,

$$\Delta\Big(\Delta f + \frac{R}{n-1}f\Big) \;=\; 0. \tag{24}$$

Demonstração: Usando a equação (22) temos

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = -(n-1)g\big(\nabla(\frac{\Delta f}{n}), \nabla f\big) = -\frac{n-1}{n}\nabla f(\Delta f),$$

bem como

$$\mathrm{div}\big(\frac{\Delta f}{n}\nabla f\big) = -\frac{1}{n-1}Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{n}(\Delta f)^2. \tag{25}$$

Portanto, integrando (25) e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) dM = \frac{(n-1)}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM - \frac{(n-1)}{n}\int_{\partial M}(\Delta f) g(\nabla f, \nu) d\sigma,$$

que é precisamente o primeiro item do lema.

Além disso, por (22), temos

$$Ric\big(\nabla(\frac{\Delta f}{n}), \nabla f\big) = -\frac{n-1}{n^2} \mid \nabla(\Delta f) \mid^2, \tag{26}$$

e integrando (26) inferimos

$$\int_M \big(Ric(\nabla(\Delta f), \nabla f) + \frac{n-1}{n} \mid \nabla(\Delta f) \mid^2 \big) dM = 0,$$

o que prova o segundo item.

Tomando o divergente na relação (22) e usando (21), obtemos

$$\frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla f) + g(Ric, \nabla^2 f) + \frac{n-1}{n}\Delta(\Delta f) \;=\; 0,$$

consequentemente,

$$\frac{n}{2(n-1)}g(\nabla R, \nabla f) + \Delta(\Delta f) + \frac{R}{n-1}\Delta f \;=\; 0. \tag{27}$$

Desde que $\Delta(Rf) = R\Delta f + 2g(\nabla R, \nabla f) + f\Delta R$, segue por (27),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{n}{2(n-1)}g(\nabla R, \nabla f) + \Delta\left(\Delta f + \frac{R}{n-1}f\right) - \frac{f}{n-1}\Delta R - \frac{4}{2(n-1)}g(\nabla R, \nabla f) \\
&= \frac{n-4}{2(n-1)}g(\nabla R, \nabla f) + \Delta\left(\Delta f + \frac{R}{n-1}f\right) - \frac{f}{n-1}\Delta R \\
&= \frac{n-2}{2(n-1)}g(\nabla R, \nabla f) - \frac{1}{n-1}\mathrm{div}(f\nabla R) + \Delta\left(\Delta f + \frac{R}{n-1}f\right)
\end{aligned}$$

o que estabelece o último item. Caso R seja constante, temos imediatamente a equação (24). Isto finaliza a prova do lema. $\square$

O segundo lema apresenta fórmulas integrais para uma variedade riemanniana com bordo suave e curvatura escalar constante.

Lema 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo suave e curvatura escalar R constante. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que ∇f é um campo vetorial conforme não nulo sobre M e $\Delta f = 0$ em ∂M. Então:*

(i) $\displaystyle\int_M (\Delta f)^2 dM = -\int_M g(\nabla(\Delta f), \nabla f)dM = \frac{n}{n-1}\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM.$

(ii) $\displaystyle\frac{n}{n-1}\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM + \frac{R}{n-1}\int_M f\Delta f\, dM = -\int_{\partial M} f\, g(\nabla(\Delta f), \nu)d\sigma.$

(iii) $\displaystyle\int_M \Delta|\nabla f|^2 dM = 0$. *Em particular,* $\displaystyle\int_{\partial M} g(\nabla|\nabla f|^2, \nu)d\sigma = 0$, *onde ν é o campo vetorial unitário que aponta para fora de ∂M em M. Além disso, $\nabla|\nabla f|^2 = 0$ sobre ∂M.*

Demonstração: Desde que $\mathrm{div}(\Delta f\nabla f) = (\Delta f)^2 + g(\nabla(\Delta f), \nabla f)$, temos

$$\int_M (\Delta f)^2 dM = -\int_M g(\nabla(\Delta f), \nabla f)dM,$$

e usando (22), deduzimos

$$\int_M (\Delta f)^2 dM = \frac{n}{n-1}\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)dM,$$

que prova o primeiro item do enunciado.

Para o segundo item, note que $\mathrm{div}(f\nabla(\Delta f)) = f\Delta(\Delta f) + g(\nabla f, \nabla(\Delta f))$, e assim,

$$\int_M g(\nabla f, \nabla(\Delta f))dM = \int_M \mathrm{div}(f\nabla(\Delta f))dM - \int_M f\Delta(\Delta f)dM.$$

Aplicando o teorema da divergência, bem como as relações (22) e (24), deduzimos

$$-\frac{n}{n-1}\int_M Ric(\nabla f,\nabla f)dM \;=\; \int_{\partial M} g(f\nabla(\Delta f),\nu)d\sigma + \frac{R}{n-1}\int_M f\Delta f dM,$$

que é precisamente (ii).

Por outro lado, integrando a fórmula de Bochner e utilizando as relações obtidas anteriormente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M \Delta|\nabla f|^2 dM &= \int_M Ric(\nabla f,\nabla f)dM + \int_M |\nabla^2 f|^2 dM + \int_M g(\nabla f,\nabla(\Delta f))dM\\ &= \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM + \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM - \int_M (\Delta f)^2 dM\\ &= 0,\end{aligned}$$

o que nos dá, aplicando novamente o teorema da divergência,

$$0 = \int_M \Delta|\nabla f|^2 dM = \int_{\partial M} g(\nabla|\nabla f|^2,\nu)d\sigma.$$

Desde que $\frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2 = \nabla_{\nabla f}\nabla f$, temos, em ∂M,

$$\frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2 = \frac{\Delta f}{n}(\nabla f) = 0,$$

onde usamos a relação (21) e a hipótese do laplaciano ser nulo sobre o bordo, e com isso finalizamos a prova do lema. □

A seguir, apresentaremos dois lemas que serão úteis na demonstração do Teorema 3.3 contido na próxima seção.

Lema 3.3. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo ∂M suave e totalmente geodésico. Seja ξ um campo vetorial conforme sobre M com função potencial f satisfazendo $f\big|_{\partial M} = 0$. Denote por* div *e* $\mathrm{div}_{\partial M}$ *os operadores divergência em M e ∂M, respectivamente, e por ξ^T a parte tangente de ξ em ∂M. Então,*

$$\mathrm{div}(\xi) = nf, \qquad \mathrm{div}_{\partial M}(\xi^T) = (n-1)f. \tag{28}$$

Ademais,

$$\int_M g(\nabla f,\xi)dM = -n\int_M f^2 dM. \tag{29}$$

Demonstração: Para demonstrarmos a primeira identidade em (28), tome o traço na equação (19).

Vejamos a segunda igualdade em (28). Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ um referencial ortonormal em ∂M tal que $e_n = \nu$, onde ν é um campo vetorial unitário que aponta para fora ao longo de ∂M. Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i}(\xi^T + g(\xi,\nu)\nu), e_i) + g(\nabla_\nu \xi, \nu)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \big(g(\nabla_{e_i}\xi^T, e_i) + g(\xi,\nu)g(\nabla_{e_i}\nu, e_i)\big) + g(f\nu + \varphi(\nu), \nu)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g((\nabla_{\partial M})_{e_i}\xi^T, e_i) + g(\xi,\nu)h(e_i,e_i) + f\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g((\nabla_{\partial M})_{e_i}\xi^T, e_i) + f\\
&= \mathrm{div}_{\partial M}(\xi^T) + f,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato do bordo ∂M ser totalmente geodésico e φ ser antissimétrico. Daí,

$$\mathrm{div}_{\partial M}(\xi^T) = (n-1)f.$$

Para o que resta, note que $\mathrm{div}(f\xi) = g(\xi, \nabla f) + nf^2$, e então integrando tal relação sobre M obtemos (29). $\square$

O próximo lema encerra as ferramentas necessárias para a prova do nosso último teorema do capítulo.

Lema 3.4. *Seja* (M^n, g) *uma variedade riemanniana compacta com bordo suave* ∂M *e curvatura escalar* R *constante. Seja* ξ *um campo vetorial conforme em* M *com função potencial* f *tal que* $f = 0$ *sobre* ∂M*. Então,*

$$\int_M Ric(\xi, \nabla f)dM = -R\int_M f^2 dM. \tag{30}$$

Demonstração: Inicialmente, desde que a curvatura escalar é constante, a identidade de Bianchi contraída duas vezes (4) implica que $\mathrm{div}Ric = 0$. Então obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fRic(\xi)) &= Ric(\nabla f, \xi) + f(\mathrm{div}Ric)(\xi) + f\,g(Ric, \nabla\xi)\\
&= Ric(\nabla f, \xi) + f\,g(Ric, fg + \varphi)\\
&= Ric(\nabla f, \xi) + Rf^2,
\end{aligned}$$

onde na última equação usamos a antissimetria de φ para concluir que $g(Ric, \varphi) = 0$.

Integrando a expressão acima sobre M, usando o teorema da divergência e o fato que f é nula sobre o bordo ∂M, obtemos a equação (30). $\square$

3.3 Teoremas e suas provas

Com o auxílio dos dois primeiros lemas da Seção 3.2, mostramos algumas respostas para a Questão 1.1 formulada na introdução desse trabalho. Mais precisamente, a primeira resposta para tal questão é o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta e conexa com bordo suave não vazio tal que a curvatura de Ricci satisfaz*

$$0 < Ric \leq (n-1)\left(2 - \frac{nc}{\lambda_1}\right)c,$$

para uma constante positiva c, onde λ_1 é o primeiro autovalor não nulo do operador laplaciano com condição de Dirichlet no bordo. Seja ∇f um campo vetorial conforme não nulo sobre M tal que $\Delta f = 0$ em ∂M. Então M^n é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.

Demonstração: Seja $Y = \nabla\Big(\dfrac{\Delta f}{n}\Big) + c\,\nabla f$, então

$$Ric(Y,Y) \;=\; Ric\left(\nabla\left(\frac{\Delta f}{n}\right), \nabla\left(\frac{\Delta f}{n}\right)\right) + c^2 Ric(\nabla f, \nabla f) + 2cRic\left(\nabla\left(\frac{\Delta f}{n}\right), \nabla f\right).$$

Integrando a equação anterior e usando o Lema 3.1, inferimos

$$\begin{aligned}\int_M Ric(Y,Y)dM \;&=\; \frac{1}{n^2}\int_M Ric\big(\nabla(\Delta f), \nabla(\Delta f)\big)dM + \frac{c^2(n-1)}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM \\ &\quad -\frac{2c(n-1)}{n^2}\int_M \mid \nabla(\Delta f)\mid^2 dM - \frac{c^2(n-1)}{n}\int_{\partial M} g((\Delta f)\nabla f, \nu)d\sigma.\end{aligned} \tag{31}$$

Desde que Δf é uma função não constante se anulando em ∂M, temos que o primeiro autovalor λ_1 não nulo do laplaciano em M com a condição de Dirichlet no bordo, satisfaz

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M \mid \nabla(\Delta f)\mid^2 dM}{\displaystyle\int_M (\Delta f)^2 dM}.$$

Usando este fato na equação (31), obtemos

$$\int_M Ric(Y,Y)dM \;\leq\; \frac{1}{n^2}\int_M \Big(Ric\big(\nabla(\Delta f), \nabla(\Delta f)\big) - (n-1)\big(2 - \frac{nc}{\lambda_1}\big)c \mid \nabla(\Delta f)\mid^2\Big)dM.$$

A hipótese sobre o tensor de Ricci e a desigualdade acima implicam que

$$\nabla\left(\frac{\Delta f}{n}\right) = -c\nabla f.$$

Como, por hipótese, ∇f é um campo vetorial conforme gradiente, ele satisfaz a seguinte relação $\nabla_X \nabla f = \dfrac{\Delta f}{n} X$, com $X \in \mathfrak{X}(M)$, e, dessa forma, inferimos

$$\nabla_X \nabla\big(\Delta f\big) = -c\big(\Delta f\big)X. \tag{32}$$

Daí, a hipótese $c > 0$, a igualdade (32) e a condição sobre o bordo, $\Delta f\big|_{\partial M} = 0$, permite-nos aplicar o Teorema B em Reilly (1980) para então concluir que M é isométrica a bola geodésica de $\mathbb{S}^n(c)$. Além disso, a função f satisfaz

$$\Delta f(x) = \cos(\sqrt{c}\, d(x, x_o)),$$

onde x_0 é o centro da bola geodésica e d é a função distância sobre $\mathbb{S}^n(c)$. Consequentemente, a hipótese $\Delta f\big|_{\partial M} = 0$ implica que o bordo ∂M é um equador, e, portanto, M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$. Isto finaliza a prova do teorema. □

Inspirado no trabalho de Deshmukh (2008), caracterizamos os hemisférios de variedades Einstein com campo vetorial não nulo conforme gradiente sob certas hipóteses. Mais precisamente, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Einstein compacta e conexa com bordo não vazio tendo constante de Einstein $\lambda = (n-1)c$ e ∇f um campo vetorial não nulo conforme em M. Suponha que Δf é não constante e $\Delta f = 0$ em ∂M. Então $c > 0$ e M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que $c > 0$. De fato, desde que (M^n, g) é uma variedade Einstein compacta e conexa, temos $\dfrac{R}{n} = (n-1)c$ e assim, $Ric(\nabla f) = (n-1)c\nabla f$. Daí, usando a equação (22) obtemos

$$\frac{1}{n}\nabla(\Delta f) = -c\,\nabla f. \tag{33}$$

Segue assim, pela equação (33), que

$$\Delta\left(\frac{\Delta f}{n}\right) = -c\,\Delta f. \tag{34}$$

Como Δf é não constante, a igualdade (34) nos diz que a constante c é um autovalor não nulo do laplaciano Δ com a condição de Dirichlet no bordo, e isso implica que $c > 0$.

Dessa forma, usando (33), procedemos de maneira análoga como na demonstração do Teorema 3.1 para concluir que M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$. $\square$

De posse das informações contidas nos dois últimos lemas da seção anterior, Lema 3.3 e Lema 3.4, temos o seguinte resultado de rigidez, que responde a Questão 1.2 formulada na introdução. Mais precisamente, obtivemos o seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta com bordo ∂M suave e totalmente geodésico, e ξ um campo vetorial conforme sobre M com função potencial não constante satisfazendo $f = 0$ no bordo. Suponha que M tem curvatura escalar constante $R = n(n-1)c$. Então $c > 0$ e*

$$E(\xi) \geq c^{-2}E(\nabla f). \tag{35}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M é isométrica ao hemisfério $\mathbb{S}^n_+(c)$.

Demonstração: Pela equação (20) e a antissimetria de φ, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla^2 f(\xi)) &= \operatorname{div}(\nabla^2 f)(\xi) + g(\nabla^2 f, \nabla\xi) \\ &= g(\nabla(\Delta f), \xi) + Ric(\nabla f, \xi) + g(\nabla^2 f, fg + \varphi), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f(\xi)) = g(\nabla(\Delta f), \xi) + Ric(\nabla f, \xi) + f\Delta f.$$

Por outro lado, desde que $\operatorname{div}(\Delta f\,\xi) = g(\nabla(\Delta f), \xi) + nf\Delta f$, temos

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f(\xi) - \Delta f\,\xi) = -(n-1)f\Delta f + Ric(\nabla f, \xi). \tag{36}$$

Integrando (36) sobre M e usando o teorema da divergência, inferimos

$$\int_{\partial M} (\nabla^2 f(\xi, \nu) - g(\xi, \nu)\Delta f)d\sigma = -(n-1)\int_M f\Delta f dM + \int_M Ric(\nabla f, \xi)dM. \tag{37}$$

Pelo fato de $\frac{1}{2}\Delta f^2 = |\nabla f|^2 + f\Delta f$, $\Delta f^2 = 2\operatorname{div}(f\,\nabla f)$ e $f\big|_{\partial M} = 0$, segue que

$$\int_M |\nabla f|^2 dM = -\int_M f\Delta f\, dM.$$

Daí, utilizando a equação (36) e o Lema 3.4, bem como o teorema da divergência, obtemos

$$\int_M |\nabla f|^2 dM = \frac{R}{n-1}\int_M f^2 dM + \frac{1}{n-1}\int_{\partial M} (\nabla^2 f(\xi, \nu) - g(\xi, \nu)\Delta f)d\sigma.$$

Pelas equações de Gauss-Weingarten e o fato do bordo ser totalmente geodésico, temos

$$\int_{\partial M}(\nabla^2 f(\xi,\nu)-g(\xi,\nu)\Delta f)d\sigma \;=\; \int_{\partial M} g(\nabla f_\nu,\xi^T)d\sigma-\int_{\partial M} g(\xi,\nu)\Delta_{\partial M} f d\sigma.$$

Então, usando o Lema 3.3, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}(\nabla^2 f(\xi,\nu)-g(\xi,\nu)\Delta f)d\sigma &= -\int_{\partial M} f_\nu \mathrm{div}_{\partial M}(\xi^T)d\sigma-\int_{\partial M} f\Delta_{\partial M}(g(\xi,\nu))d\sigma\\ &= -(n-1)\int_{\partial M} f_\nu f d\sigma-\int_{\partial M} f\Delta_{\partial M}(g(\xi,\nu))d\sigma\\ &= 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_M |\nabla f|^2 dM=\frac{R}{n-1}\int_M f^2 dM. \tag{38}$$

Note facilmente que (38) implica que $R>0$ e, consequentemente, $c>0$. Além disso, usando (29) e definição de energia de um campo vetorial, inferimos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla f+c\xi|^2 dM &= c^2\int_M |\xi|^2 dM+2c\int_M g(\xi,\nabla f)+\int_M |\nabla f|^2\\ &= c^2\int_M |\xi|^2 dM-2nc\int_M f^2+\int_M |\nabla f|^2\\ &= c^2\int_M |\xi|^2 dM-\int_M |\nabla f|^2 dM,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_M |\nabla f+c\xi|^2 dM=2c^2\big(E(\xi)-c^{-2}E(\nabla f)\big). \tag{39}$$

Daí, obtemos $E(\xi)-c^{-2}E(\nabla f)\geq 0$, que é equivalente a (35), e se ocorre a igualdade em tal relação, devemos ter

$$\nabla f=-c\xi. \tag{40}$$

Além disso, tomando a derivada covariante em (40) e utilizando a equação (19) deduzimos

$$\nabla_X\nabla f+cfX=-c\varphi(X).$$

Dessa última igualdade, desde que φ é antissimétrica, obtemos, para qualquer $X\in\mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_X\nabla f=-cfX.$$

Portanto, pelas hipóteses sobre f, podemos, novamente, aplicar o Teorema B em Reilly (1980) para garantir que M é isométrica a bola geodésica sobre $\mathbb{S}^n(c)$. Como, por hipótese, o bordo ∂M é totalmente geodésico, concluímos que M é isométrica ao hemisfério de $\mathbb{S}^n(c)$, como queríamos demonstrar. $\square$

4 VARIEDADES ESTÁTICAS E ESPAÇOS CRÍTICOS RELACIONADOS

Neste capítulo, iremos obter resultados de rigidez para espaços críticos sob a condição da curvatura de Weyl ser radialmente nula. Tais espaços satisfazem um sistema de equações com duas constantes reais e para determinadas escolhas das constantes envolvidas em tal sistema vamos estudar as seguintes estruturas: 1. triplas estáticas positivas, ou simplesmente, métricas estáticas, 2. métricas críticas Miao-Tam e 3. métricas críticas do funcional curvatura escalar total, ou simplesmente, métricas CPE. Os teoremas dessa parte baseiam-se no artigo *On static manifolds and related critical spaces with zero radial Weyl curvature* (2019), escrito pelo autor em parceira com A. Barros, H. Baltazar e R. Batista.

4.1 Definições e resultados existentes

Motivados em unificar nossos resultados, definiremos um espaço crítico como um dos três espaços descritos na introdução da tese como segue.

Definição 4.1. *Um **espaço crítico** é uma tripla* $(M^n,\, g,\, f)$*,* $n \geq 3$*, onde* $(M^n,\, g)$ *é uma variedade riemanniana compacta com curvatura escalar constante que admite uma solução* f *suave e não constante para o sistema de equações*

$$-(\Delta_g f)g + \nabla_g^2 f - f Ric_g = \mu Ric_g + \lambda\, g, \tag{41}$$

onde Ric_g*,* Δ_g *e* ∇_g^2 *denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o operador laplaciano e a forma hessiana, enquanto que* (μ, λ) *são constantes reais dadas por* $(0,0)$ *ou* $(0,1)$ *ou* $\left(1, -\dfrac{R}{n}\right)$*. Além disso, se* $(\mu, \lambda) = (0,0)$ *ou* $(0,1)$*, a variedade considerada deve ser compacta com bordo não vazio* ∂M *e sua função potencial* f *deve ser não negativa e* $f^{-1}(0) = \partial M$*. Finalmente, se* $(\mu, \lambda) = \left(1, -\dfrac{R}{n}\right)$*, a variedade* M *deve ser considerada sem bordo.*

Para simplificar a notação, a partir de agora, exceto quando mencionado, denotaremos as quantidades relacionadas à métrica g sem o subíndice g.

Como já observamos, as classes de variedades que satisfazem a Definição 4.1 que devemos considerar aqui devem ser:

- Triplas estáticas positivas: $(\mu, \lambda) = (0,0)$;
- Métricas críticas Miao-Tam: $(\mu, \lambda) = (0,1)$;
- Métricas CPE: $(\mu, \lambda) = (1, -R/n)$.

Detalharemos as estruturas acima com a apresentação de resultados e exemplos que motivam nossos teoremas de rigidez.

Consideremos $(M^n,\, g)$ uma variedade riemanniana com bordo suave conexo ∂M e seja γ uma métrica riemanniana fixada no bordo. Consideremos ainda, o seguinte espaço

$$\mathcal{M}_\gamma = \{g \text{ métrica riemanniana em } M \text{ tal que } g_{|T\partial M} = \gamma\},$$

o qual é uma variedade suave, veja (Freed e Groisser (1989); Gil-Medrano e Michor (1991)). Com as notações deste mesmo trabalho, Miao e Tam (2009) mostraram que o conjunto

$$\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}_\gamma; \text{a curvatura escalar } R_g \text{ é constante igual a } R\}$$

é localmente uma subvariedade de $\mathcal{M}_\gamma$ desde que zero não seja um autovalor de Dirichlet do operador $(n-1)\Delta_g + R$. Com este resultado em mãos, eles provaram um teorema que servirá como base para definir as métricas críticas de Miao-Tam.

Relembremos que o funcional volume $V : \mathcal{M}_\gamma \to \mathbb{R}$ é dado por

$$V(g) = \int_M dV_g,$$

cuja linearização é escrita como

$$V_g'(h) = \frac{\partial}{\partial t} V(g(t))\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}_g h\, dV_g.$$

A saber, Miao e Tam (2009) mostraram o seguinte resultado de caracterização para as métricas críticas do funcional V restrito ao espaço $\mathcal{M}_\gamma^R$.

Teorema 4.1 (Miao e Tam, 2009). *Seja $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_g + R$ é positivo. Então g é ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em $\mathcal{M}_\gamma^R$ se, e somente se, existe uma função f em $\overline{M}$ tal que*

$$\begin{cases} -(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g, & \text{em } M \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f = 0, & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \tag{42}$$

Por simplicidade, seguindo a notação usada por Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2014) estas métricas recebem a seguinte definição.

Definição 4.2. *Uma **métrica crítica de Miao-Tam** é uma tripla $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 3$, onde $(M^n,\, g)$ é uma variedade riemanniana compacta e conexa com bordo suave ∂M e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz ao seguinte sistema de equações:*

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = g. \tag{43}$$

Tal função f será chamada de função potencial.

Abaixo apresentamos alguns exemplos que foram construídos por Miao e Tam (2009).

Exemplo 4.1. *Considere $M^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R_0 e a função f definida por $f(x) = \dfrac{R_0^2}{2(n-1)} - \dfrac{|x|^2}{2(n-1)}$. Consideremos em $\mathbb{R}^n$ a métrica canônica g e em M a métrica restrita. Daí, temos*

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1} g \text{ e } \Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Portanto,

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = \frac{n}{n-1} g - \frac{1}{n-1} g = g,$$

e além disso $f^{-1}(0) = \partial M$. Logo $(M^n,\, g,\, f)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Exemplo 4.2. *Considere $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1},\, ds^2)$, onde $ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$. Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{L}^{n+1};\, x_1^2 + ... + x_n^2 - t^2 = -1, t \geq 1\}$ mergulhado em $\mathbb{L}^{n+1}$ e seja g a métrica induzida. Nessas condições g é uma métrica riemanniana. Agora fixe $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ e considere $M^n \subset \mathbb{H}^n$ uma bola geodésica centrada em p de raio R_0 e a função f definida por $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)$, onde r é a distância geodésica de $(x_1, ..., x_n, t)$ à p. Assim $t = \cosh r$ e t é a função altura relativa a p. Daí,*

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{(n-1)\cosh R_0} \nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic &= \frac{nt}{(n-1)\cosh R_0} g - \frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g \\
&\quad + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)(n-1)g \\
&= \frac{nt - t + (n-1)\cosh R_0 - (n-1)t}{(n-1)\cosh R_0} g \\
&= g,
\end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. Assim $(M^n,\, g,\, f)$ é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Por fim, de modo análogo ao exemplo anterior, temos que a bola geodésica da esfera também é uma métrica crítica de Miao-Tam. Mais precisamente, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.3. *Considere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. Sejam $M^n \subset \mathbb{S}^n$ um bola geodésica centrada em p de raio $R_0 < \dfrac{\pi}{2}$ e f a função definida por $f(x_1, ..., x_n, t) =$*

$\frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R_0}-1\right)=\frac{1}{n-1}\left(\frac{\cos r}{\cos R_0}-1\right)$, *onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1,...,x_n,t)$ *à* p. *Assim* $t=\cos r$ *e* t *é a função altura relativa a* p. *Daí, obtemos*

$$\nabla^2 f=\frac{1}{(n-1)\cos R_0}\nabla^2(t)=-\frac{t}{(n-1)\cos R_0}g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}-(\Delta f)g+\nabla^2 f-fRic &= \frac{nt}{(n-1)\cos R_0}g-\frac{t}{(n-1)\cos R_0}g\\ &\quad -\frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R_0}-1\right)(n-1)g\\ &= \frac{nt-t-(n-1)t+(n-1)\cos R_0}{(n-1)\cosh R_0}g\\ &= g,\end{aligned}$$

e $f^{-1}(0)=\partial M$. *Assim* $(M^n,\ g,\ f)$ *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Vale observar que os três exemplos acima possuem curvatura escalar constante, e isto não é de todo surpreendente uma vez que se $(M^n,\ g)$ satisfaz isoladamente à equação (43) para alguma função suave f sobre M, então sua curvatura escalar deve ser constante. De fato, tomando o divergente na equação (43), obtemos

$$f\nabla R_g=0. \tag{44}$$

Logo, se $\nabla R_g(p)\neq 0$ para algum $p\in M$, então $\nabla R_g\neq 0$ em algum conjunto aberto não vazio $U\subset M$. Assim, deveríamos ter $f\equiv 0$ em U, o que não pode ocorrer devido (43). Portanto, R_g é constante sobre M. Consequentemente, podemos assumir que $R_g=n(n-1)\varepsilon$, $\varepsilon=-1,0,1$.

Motivados pela caracterização do Teorema 4.1, Miao e Tam provaram a seguinte caracterização das métricas críticas em formas espaciais.

Teorema 4.2 (Miao, Tam, 2009)**.** *Se* M *é um domínio limitado com bordo suave em* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$ *(caso* $M^n\subset\mathbb{S}^n$, *suponha ainda que* $V(M)<\frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$*). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume* $V(\cdot)$ *em* $\mathcal{M}_\gamma^R$ *se, e somente se,* M *é uma bola geodésica.*

Em função do Teorema 4.2, podemos formular o seguinte questionamento.

Questão 4.1. *As bolas geodésicas das formas espaciais simplesmente conexas* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ *e* $\mathbb{H}^n$ *são as únicas métricas críticas de Miao-Tam?*

Em busca de respostas para a questão 4.1, Miao-Tam (2011) consideraram este problema com a hipótese da métrica ser de Einstein e obtiveram a seguinte resposta.

Teorema 4.3 (Miao, Tam, 2011). *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$ *uma métrica crítica de Miao-Tam Einstein e bordo* ∂M *suave. Então* $(M^n,\, g)$ *é isométrica a uma bola geodésica em* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$.

Em 2017, Baltazar e Ribeiro Jr. mostraram que a hipótese Einstein sobre a variedade pode ser substituída por tensor de Ricci paralelo, melhorando o Teorema 4.3.

Baseados nas técnicas de Kobayashi e Obata (1981), Miao e Tam substituíram a hipótese sobre a métrica ser de Einstein por localmente conformemente plana e bordo isométrico à esfera. Mais precisamente, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 4.4 (Miao, Tam, 2011). *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$ *uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera canônica. Se* $(M^n,\, g)$ *é localmente conformemente plana, então* $(M^n,\, g)$ *é isométrica a uma bola geodésica em* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$.

Caso a dimensão seja $n = 3$ ou $n = 4$, Barros et al. (2014) mostraram que o Teorema 4.4 é verdadeiro se considerarmos g uma métrica Bach-*flat* ao invés de localmente conformemente plana. Além disso, H. Baltazar, R. Batista e K. Bezerra, inspirados nas ideias desenvolvidas pelo trabalho de Miao and Tam (2011) (veja também os artigos de Kobayashi (1982), e Kobayashi e Obata (1981) (para o caso estático)), mostraram que no resultado de Miao-Tam pode-se substituir a hipótese de localmente conformemente plana pela condição Bach-*flat*, e para mais detalhes veja o Teorema 2 em Baltazar, Batista e Bezerra (2017).

Continuando nosso estudo, relembremos que uma variedade riemanniana (M, g) tem *curvatura de Weyl radial nula* com respeito a uma função potencial f sobre M se

$$i_{\nabla f} W = W(.\,,\,.\,,\,.\,,\nabla f) = 0. \tag{45}$$

A condição de variedades riemannianas ter curvatura de Weyl radial nula vem sendo estudada por muitos autores em diferentes tipos de estruturas. Destacamos, em especial, que Catino (2012) provou que uma variedade quasi-Einstein generalizada satisfazendo (45) deve ser localmente um produto *warped* e tal hipótese não pode ser removida conforme podemos constatar na Observação 1.2 do referido artigo.

Baseado nas considerações acima, temos um resultado de classificação para métricas críticas de Miao-Tam sob a hipótese $i_{\nabla f} W = 0$. Mais precisamente, temos o seguinte teorema, cuja demonstração será dada mais adiante neste capítulo.

Teorema 4.5. *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 5$, *uma métrica crítica de Miao-Tam com* $i_{\nabla f} W = 0$. *Então* $(M,\, g)$, *ou é isómetrica a* $(I \times N, ds^2 + r^2 h)$, *onde* I *é um intervalo finito de* $\mathbb{R}$ *contendo a origem* 0, $(N,\, h)$ *é uma variedade Einstein compacta sem bordo com Ric* $=$ $(n-2)\kappa_0 h$, *para alguma constante* κ_0, r *é uma função positiva em* I *satisfazendo* $r'(0) = 0$

bem como

$$r'' + \frac{R}{n(n-1)}r = ar^{1-n}$$

para alguma constante $a > 0$, e κ_0 satisfaz a equação

$$(r')^2 + \frac{R}{n(n-1)}r^2 + \frac{2a}{n-2}r^{2-n} = \kappa_0,$$

ou M é uma bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{S}^n$, ou $(M,\, g)$ é coberta por um dos produtos warpeds tendo $\mathbb{Z}_2$ como grupo de recobrimento.

Como consequência imediata do Teorema 4.5, deduzimos o seguinte resultado de rigidez, que responde a Questão 4.1 sob determinada condição.

Corolário 4.1. *Seja $(M^n,\, g,\, f)$, $n \geq 5$, uma métrica Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico à esfera canônica $\mathbb{S}^{n-1}$. Se $i_{\nabla f}W = 0$, então $(M^n,\, g)$ é isométrico à bola geodésica na forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Além disso, trabalharemos com métricas estáticas positivas, e assim como foi feito com a primeira estrutura, detalharemos a segunda que é obtida a partir de (41) com $(\mu, \lambda) = (0, 0)$. Mais explicitamente,

Definição 4.3. *Uma **tripla estática positiva** $(M^n,\, g,\, f)$ é uma variedade riemanniana completa e conexa, com bordo suave ∂M (possivelmente não vazio) e f é uma função suave em M que é não negativa f, $\partial M = f^{-1}(0)$ satisfazendo*

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = 0. \tag{46}$$

Métricas estáticas apareceram no contexto de Relatividade Geral através do estudo das equações de Einstein. De fato, o núcleo do operador $\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic$ está relacionado a espaços-tempo estáticos em Relatividade Geral. Do ponto de vista físico,

$$\mathcal{V} = \mathbb{R} \times M, \qquad \overline{g} = -f^2dt^2 + g,$$

onde $(M,\, g)$ é uma variedade riemanniana e f é uma função positiva sobre M, representa uma variedade lorentziana de dimensão $n+1$. Neste caso, dizemos que $(\mathcal{V},\, \overline{g})$ é um *vacuum* espaço-tempo estático com constante cosmológica Λ, se ela satifaz à equação de Einstein

$$Ric_{\overline{g}} = \Lambda \overline{g}. \tag{47}$$

A equação de Einstein (47) pode ser reescrita em termos de g e f como

$$\nabla_g^2 f \;\;=\;\; f(Ric_g - \Lambda g) \tag{48}$$

e

$$\Delta_g f \;\; = \;\; -\Lambda f, \qquad (49)$$

onde Ric_g, ∇_g^2 e Δ_g denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, a forma hessiana e o operador de Laplace sobre a variedade riemanniana (M, g). Tomando o traço na equação (48) e usando (49), obtemos a relação

$$R_g = (n-1)\Lambda,$$

de onde vem a motivação para a Definição 4.3. A hipersuperfície $\mathbb{R} \times \partial M$ do espaço-tempo $\mathcal{V}$ é chamada de horizonte de evento cosmológico. Com um abuso de linguagem, o bordo ∂M de M também é chamado de horizonte de evento cosmológico.

Muitos resultados de classificação são conhecidos na literatura, principalmente nos casos de curvatura escalar nula e curvatura escalar negativa, por exemplo, o leitor pode verificar: Israel (1967), Chase (1970), Wald (1984), Anderson (2000), Anderson et al. (2002) e Wang (2005). Ademais, um fato bastante conhecido é que a curvatura escalar de uma métrica estática é constante, tal como acontece no caso de métricas críticas de Miao-Tam. Uma prova deste resultado pode ser encontrada em Corvino (2000). Sendo assim, neste trabalho daremos atenção às métricas estáticas com curvatura escalar constante positiva, a qual podemos considerar, a menos de *scaling*, $R_g = n(n-1)$.

Vejamos abaixo um exemplo de métrica estática com curvatura escalar positiva.

Exemplo 4.4 (Métrica estática com curvatura escalar positiva)**.** *Considere* $(M^n,\, g) = (\mathbb{S}^n_+,\, g)$ *o hemisfério superior unitário em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dotado com a métrica euclidiana* g*. Consequentemente, o bordo* $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}$ *é o equador e se* p *é o pólo de* $\mathbb{S}^n_+$*, a função altura correspondente dada por*

$$h(x) = g(x, p), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n_+$$

é positiva sobre $\mathbb{S}^n_+$*, se anula ao longo de* ∂M *e satisfaz à equação tipo Obata*

$$\nabla^2 h = -hg.$$

Portanto, a Definição 4.3 é satisfeita, concluindo que $(\mathbb{S}^n_+,\, g,\, h)$ *é uma tripla estática com curvatura escalar positiva.*

Para este caso, em (1984), Boucher, Gibbons e Horowitz propuseram um problema, ainda em aberto, que ficou conhecido como *Cosmic no-hair conjecture*. Abaixo explicitamos tal problema.

Conjectura 4.1 (Cosmic no-hair conjecture)**.** *A única tripla estática compacta simples-*

mente conexa $(M^n,\, g,\, f)$ *de dimensão* n*, com curvatura escalar positiva e bordo conexo* ∂M *é dada por um hemisfério canônico* $\mathbb{S}^n_+$*, onde a função* f *é a função altura correspondente.*

A conexidade do bordo é essencial na Conjectura 4.1 uma vez que exemplos de métricas estáticas com bordo duplo são conhecidos, por exemplo, o espaço-tempo de Nariari. Para detalhes, veja Hijazi et al. (2015b).

Algumas respostas parciais para esta conjectura foram obtidas. Por exemplo, se $(M^n,\, g)$ é de Einstein, o Teorema B (tipo Obata) em Reilly (1980) resolve a conjectura. Assumindo que a métrica estática g seja localmente conformemente plana, Kobayashi (1982) e Lafontaine (1983) provaram, independentemente, que a conjectura é verdadeira. Ademais, espaços estáticos com a condição de curvatura de Weyl radialmente nula foram investigados em H. Baltazar e E. Ribeiro Jr. (2018), e em tal trabalho, os autores provaram que, se uma tripla estática positiva $(M^n,\, g,\, f)$ tem curvatura seccional não negativa e $i_{\nabla f}W = 0$, então, a menos de um quociente finito, M^n é isométrico ou a um hemisfério canônico $\mathbb{S}^n_+$ ou ao cilindro canônico sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Inspirados nos resultados anteriores, classificaremos tripla estática positiva sob a condição $i_{\nabla f}W = 0$ sem a hipótese adicional, i.e., temos o seguinte teorema.

Teorema 4.6. *Seja* $(M^n,\, g,\, f)$*,* $n \geq 5$*, uma tripla estática positiva* n*-dimensional com curvatura escalar* $R = n(n-1)$*. Suponha que* $(M^n,\, g)$ *satisfaz* $i_{\nabla f}W = 0$*. Então* $(M^n,\, g,\, f)$ *é coberta por uma das triplas estáticas descritas no Teorema 1.1.*

Por fim, descreveremos a última estrutura que é obtida escolhendo os parâmetros μ e λ, respectivamente, por 1 e $-R/n$ na equação (41).

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das métricas riemannianas de uma variedade compacta (fechada) M^n, para cada $g \in \mathcal{M}$ tem-se que R_g é uma função suave em M^n, dessa forma temos a seguinte aplicação $L : \mathcal{M} \to C^\infty(M)$ que associa cada métrica riemanniana sua função curvatura escalar. A linearização de L em g é dada por

$$\mathfrak{L}_g(h) = \frac{d}{dt} R_{g+th}\,|_{t=0} = -\Delta \mathrm{tr}(h) + \mathrm{div}(\mathrm{div}(h)) - \langle h, Ric\rangle,$$

onde h é um $2-$tensor simétrico. Considerando $\mathfrak{L}_g$ uma aplicação linear do espaço vetorial dos $2-$tensores simétricos $S^2(M)$ no espaço vetorial das funções suaves de M^n podemos usar integração por partes e encontrar o L^2-adjunto $\mathfrak{L}_g^* : C^\infty \to S^2(M)$. De fato, usando coordenadas temos

$$\int_M \mathfrak{L}_g(h) f\, dM_g \;=\; \int_M h \mathfrak{L}_g^*(f)\, dM_g,$$

e, portanto, $\mathfrak{L}_g^*(f) = -(\Delta f) g + \nabla^2 f - f Ric$.

Por outro lado, via integração sobre M podemos definir o seguinte funcional.

Definição 4.4. *Dada uma variedade riemanniana compacta* $(M^n,\, g)$ *definimos o funcional curvatura escalar total* $\mathcal{R} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *por*

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R_g dM_g. \tag{50}$$

O estudo dos pontos críticos deste funcional restrito a alguns subconjuntos específicos de métricas deram origem a alguns resultados e problemas interessantes. Consideremos agora o subconjunto de $\mathcal{M}$ das métricas de volume unitário $\mathcal{M}_1 = \{g \in M; Vol_g(M) = 1\}$. A derivada do funcional $\mathcal{R}$ restrito a $\mathcal{M}_1$ em g na direção de um $2-$tensor h é dada por

$$\mathcal{R}'_g(h) = \int_M \langle -Ric + \frac{R_g}{n} g, h\rangle_g \, dM_g.$$

Portanto, os pontos críticos desse funcional são precisamente as métricas Einstein, veja o livro de Besse (1987), Capítulo 14. Além disso, com essas considerações, é sabido que a equação de Euler-Lagrange de $\mathcal{R}$ restrido ao conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, que são as métricas riemannianas com curvatura escalar constante, pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathfrak{L}^*_g(f) = Ric - \frac{R}{n} g,$$

e assim, temos a seguinte definição.

Definição 4.5. *Uma métrica CPE* (critical point equation) *é uma tripla* $(M^n,\, g,\, f)$*, onde* $(M^n,\, g)$ *é uma variedade riemanniana orientada compacta sem bordo de dimensão* $n \geq 3$*, volume unitário e curvatura escalar constante, e* f *é uma função em* M *que satisfaz a seguinte equação de estrutura*

$$Ric - \frac{R}{n} g = -(\Delta f) g + \nabla^2 f - f Ric. \tag{51}$$

Quando $f = 0$, a equação (51) se reduz a $Ric = \dfrac{R}{n} g$, isto é, uma métrica Einstein. Além disso, a única solução conhecida com f não constante até o presente momento é o caso da esfera canônica $\mathbb{S}^n$ com f sendo uma função altura.

Em torno da década de oitenta do século XX, conjecturou-se que toda métrica CPE deve ser Einstein. Tal conjectura (ver Conjetura 1.1) foi enunciada na introdução desse trabalho. Ademais, tomando o traço em (51), obtemos

$$\Delta f + \frac{R}{n-1} f = 0,$$

e, portanto, se $\dfrac{R}{n-1}$ não é um autovalor positivo do laplaciano, então $f = 0$ e a conjectura é verdadeira; caso contrário, f é uma autofunção do laplaciano de média nula e pela teoria espectral, R é positivo. Um resultado basilar na classificação de variedades compactas, devido a Obata, nos permite reescrever a conjectura CPE como um problema de rigidez, para esclarecer essa observação relembremos o seguinte resultado.

Teorema 4.7. *(Obata, 1962) Uma variedade riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$ admite uma função não-constante f satisfazendo*

$$\nabla^2 f = -c^2 f g$$

se, e somente, se a variedade é isométrica à esfera $\mathbb{S}^n(c)$ de raio $\dfrac{1}{c}$, com $c > 0$.

Tal teorema, permite-nos reescrever a conjectura CPE como um resultado de rigidez, isto é,

Conjectura 4.2. *Seja (M^n, g, f) uma métrica* CPE. *Então g é Einstein, $M^n = \mathbb{S}^n(r)$ e f é uma função altura.*

Respostas parciais foram obtidas ao longo dos últimos anos para a conjectura CPE, porém, o problema continua em aberto até o presente momento. Como último resultado desse capítulo, refinamos os resultados de Lafontaine (1983), bem como o Teorema 1 em Baltazar (2017), provando o seguinte teorema.

Teorema 4.8. *A Conjectura 1.1 é verdadeira para variedades compactas de dimensão n, $n \geq 5$, satisfazendo $i_{\nabla f} W = 0$.*

4.2 Resultados chaves

Nessa subseção, apresentamos uma igualdade que será útil para nosso trabalho, bem como uma expressão para um espaço crítico.

Tomando o traço na equação (41), que reescrevemos em termos de coordenadas por $-\Delta f\, g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = \mu R_{ij} + \lambda g_{ij}$, obtemos

$$-n\Delta f + \Delta f - fR \;=\; \mu R + n\lambda$$

e, consequentemente,

$$-(n-1)\Delta f \;=\; (\mu+f)R+n\lambda,$$

ou seja,

$$\Delta f+\frac{(\mu+f)R+n\lambda}{n-1}=0. \tag{52}$$

Relembremos a seguir um 3−tensor definido no trabalho de Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2014) (veja também Barros e Ribeiro Jr. (2014)),

$$\begin{aligned} T_{ijk} \;=\; & \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f-R_{jk}\nabla_i f)-\frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f-g_{jk}\nabla_i f)\\ & +\frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f-g_{jk}R_{is}\nabla_s f). \end{aligned} \tag{53}$$

O tensor T_{ijk} tem as mesmas propriedades que o tensor de Cotton. Um cálculo direto, implica

$$(\mu+f)C_{ijk}=T_{ijk}+W_{ijkl}\nabla_l f. \tag{54}$$

De fato, pela equação de estrutura de espaços críticos, escrita em coordenadas, temos

$$fR_{jk}+\mu R_{jk}+\lambda g_{jk}=\nabla_j\nabla_k f-(\Delta f)g_{jk},$$

e assim,

$$(\nabla_i f)R_{jk}+f\nabla_i R_{jk}+\mu\nabla_i R_{jk} \;=\; \nabla_i\nabla_j\nabla_k f-(\nabla_i\Delta f)g_{jk},$$

de onde inferimos

$$(\mu+f)\nabla_i R_{jk} \;=\; -(\nabla_i f)R_{jk}+\nabla_i\nabla_j\nabla_k f-(\nabla_i\Delta f)g_{jk}.$$

Analogamente,

$$(\mu+f)\nabla_j R_{ik} \;=\; -(\nabla_j f)R_{ik}+\nabla_j\nabla_i\nabla_k f-(\nabla_j\Delta f)g_{ik}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\mu+f)(\nabla_i R_{jk}-\nabla_j R_{ik}) \;=\; & (\nabla_i\nabla_j\nabla_k f-\nabla_j\nabla_i\nabla_k f)+\frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk}-\nabla_j f g_{ik})\\ & -(\nabla_i f R_{jk}-\nabla_j f R_{ik}), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$(\mu + f)C_{ijk} = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \tag{55}$$

Pela equação (9), obtemos

$$\begin{aligned} R_{ijkl}\nabla_l f &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il})\nabla_l f \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk})\nabla_l f, \end{aligned}$$

e, por conseguinte, substituindo essa expressão em (55), inferimos

$$\begin{aligned} (\mu + f)C_{ijk} &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f + R_{jl}\nabla_l f g_{ik} - R_{il}\nabla_l f g_{jk} - R_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\ &= W_{ijkl}\nabla_l f + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jl}\nabla_l f - g_{jk}R_{il}\nabla_l f) + \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\ &= W_{ijkl}\nabla_l f + T_{ijk}, \end{aligned}$$

provando (54).

O tensor T em (53) desempenha um papel fundamental no estudo dos conjuntos de níveis da função potencial f (veja, por exemplo, a Proposição 1 de Barros, Diógenes e Ribeiro Jr. (2014)).

Para o nosso propósito, precisamos da seguinte fórmula do tipo Bochner estabelecida para as métricas $V-$estáticas, que foi provada por Baltazar e Ribeiro Jr. em (2018). No nosso caso, se a variedade satisfaz (41), adaptando a prova de tais autores podemos deduzir uma fórmula divergente para um espaço crítico. Porém, antes de explicitar tal expressão, que está contida na Proposição 4.1, vejamos a seguir três lemas, cujas provas são dadas de forma análoga ao que é feita no trabalho citado acima, e dessa forma, tais demonstrações não serão apresentadas, podendo o leitor consultar Baltazar e Ribeiro Jr. (2018).

Lema 4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta com curvatura escalar constante e f uma função suave sobre M^n satisfazendo a equação (41). Então temos*

$$(\mu+f)(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i(\mu+f)g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}),$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$.

De forma análoga, obtemos uma fórmula divergente para qualquer variedade riemanniana $(M^n,\, g)$ com curvatura escalar constante.

Lema 4.2. *Sejam $(M^n,\, g)$ uma variedade riemanniana conexa com curvatura escalar constante e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave definida sobre M. Então*

$$\begin{aligned}\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= -(\mu+f)|C_{ijk}|^2 + 2(\mu+f)|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla(\mu+f), \nabla|Ric|^2\rangle \\ &\quad + \frac{2n}{n-2}(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad - \frac{2}{n(n-2)}(\mu+f)R^3 + 2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}) \\ &\quad + 2C_{ijk}\nabla_j(\mu+f)R_{ik} - 2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl},\end{aligned}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$.

Procederemos deduzindo uma outra fórmula divergente que desempenhará um papel crucial na prova da Proposição 4.1.

Lema 4.3. *Seja $(M^n,\, g,\, f,\, \mu,\, \lambda)$ um espaço crítico. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= -(\mu+f)|C_{ijk}|^2 + (\mu+f)|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{\lambda n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + 2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}).\end{aligned}$$

Finalmente, apresentamos a proposição que contém uma fórmula divergente para um espaço crítico.

Proposição 4.1. *Seja $(M^n,\, g,\, f,\, \mu,\, \lambda)$ um espaço crítico. Então:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= (\mu+f)\left(|\nabla Ric|^2 + \frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2\right) + \frac{\lambda n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad + (\mu+f)\left(\frac{2R}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}\operatorname{tr}(\mathring{Ric}^3)\right) \\ &\quad - 2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{n-2}{n-1}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f.\end{aligned}$$

Demonstração: Por (54), temos

$$\begin{aligned}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 &= T_{ijk}C_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} \\ &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)C_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} \\ &= \frac{n-1}{n-2}R_{ik}\nabla_j f C_{ijk} - \frac{n-1}{n-2}R_{jk}\nabla_i f C_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} \\ &= \frac{2(n-1)}{n-2}R_{ik}\nabla_j f C_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk},\end{aligned}$$

onde usamos a antissimetria do tensor de Cotton. Substituindo esse dado no Lema 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= -(\mu+f)|C_{ijk}|^2 + 2(\mu+f)|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla(\mu+f),\nabla|Ric|^2\rangle \\
&+\frac{2n}{n-2}(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 \\
&-\frac{2}{n(n-2)}(\mu+f)R^3 + 2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}) \\
&-2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} + \frac{n-2}{n-1}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 \\
&-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l f C_{ijk} \\
&= -\frac{1}{n-1}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 + 2(\mu+f)|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla(\mu+f),\nabla|Ric|^2\rangle \\
&+\frac{2n}{n-2}(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 \\
&-\frac{2}{n(n-2)}(\mu+f)R^3 + 2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}) \\
&-2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l C_{ijk}.
\end{aligned}$$

Comparando essa última expressão com o Lema 4.3, inferimos

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{2}\right)\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= -\frac{1}{n-1}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 + 2(\mu+f)|\nabla Ric|^2 \\
&+\langle\nabla(\mu+f),\nabla|Ric|^2\rangle + \frac{2n}{n-2}(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} \\
&-\frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{2}{n(n-2)}(\mu+f)R^3 \\
&+2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}) - 2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} \\
&-\frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l C_{ijk} + (\mu+f)|C_{ijk}|^2 - (\mu+f)|\nabla Ric|^2 \\
&-\langle\nabla f,\nabla|Ric|^2\rangle + \frac{n\lambda}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 - 2\nabla_i((\mu+f)C_{ijk}R_{jk}),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= \left(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\right)(\mu+f) + \frac{n\lambda}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\
&+\frac{2n}{n-2}(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} - \frac{4n-2}{(n-1)(n-2)}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 \\
&-\frac{2}{n(n-2)}(\mu+f)R^3 - \frac{n-2}{n-1}W_{ijkl}\nabla_l C_{ijk} \\
&-2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\mathring{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}$, temos

$$(\mu+f)R_{ij}R_{ik}R_{jk} = (\mu+f)\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk} + \frac{3}{n}(\mu+f)R|\mathring{Ric}|^2 + (\mu+f)\frac{R^3}{n^2},$$

e então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{div}((\mu+f)\nabla|Ric|^2) &= \left(\frac{n-2}{n-1}|C_{ijk}|^2 + |\nabla Ric|^2\right)(\mu+f) + \frac{n\lambda}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &+(\mu+f)\left(\frac{2n}{n-2}\mathrm{tr}(\mathring{Ric}^3) + \frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2)\right) \\ &-2(\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} - \frac{n-2}{n-1}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f,\end{aligned}$$

o que prova a proposição. □

4.3 Lemas chaves

Nessa subseção estão contidos os lemas necessários para a prova dos teoremas enunciados no início desse capítulo. Iniciaremos essa seção mostrando que, em um ponto regular $q \in M$, o gradiente da função potencial é um autovetor do tensor de Ricci, se $(M,\, g)$ satisfaz a condição da curvatura de Weyl ser radialmente nula.

Lema 4.4. *Seja $(M^n,\, g,\, f,\, \mu,\, \lambda)$ um espaço crítico satisfazendo $i_{\nabla f}W = 0$. Suponha que $q \in M$ é um ponto regular de f, i.e., $|\nabla f|(q) \neq 0$. Então, ∇f é um autovetor para o tensor de Ricci.*

Demonstração: Pela equação (12) conjuntamente com a relação (54) e nossa hipótese sobre o tensor de Weyl, deduzimos que

$$\begin{aligned}T_{ijk}\nabla_k f &= (\mu+f)C_{ijk}\nabla_k f \\ &= -\frac{n-2}{n-3}(\mu+f)[\nabla_l(W_{ijkl}\nabla_k f) - W_{ijkl}\nabla_l\nabla_k f] \\ &= \frac{n-2}{n-3}(\mu+f)W_{ijkl}\nabla_l\nabla_k f \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde no último passo usamos o fato do tensor de Weyl ser antissimétrico combinado com a propriedade simétrica do operador hessiano.

Agora, considere um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ diagonalizando Ric no ponto $q \in M^n$ tal que $\nabla f(q) \neq 0$, a saber, temos que $Ric(e_i) = \alpha_i e_i$, onde α_i são os autovalores associados.

Daí, pela equação (53), temos

$$\begin{aligned}
0 = T_{ijk}\nabla_k f &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f\nabla_k f - R_{jk}\nabla_i f\nabla_k f) - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f\nabla_k f - g_{jk}\nabla_i f\nabla_k f)\\
&\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f\nabla_k f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f\nabla_k f)\\
&= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f\nabla_k f - R_{jk}\nabla_i f\nabla_k f) - \frac{R}{n-2}(\nabla_j f\nabla_i f - \nabla_i f\nabla_j f)\\
&\quad + \frac{1}{n-2}(R_{jk}\nabla_k f\nabla_i f - R_{ik}\nabla_k f\nabla_j f),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$R_{jk}\nabla_k f\nabla_i f - R_{ik}\nabla_k f\nabla_j f = 0$$

e, então, em $q \in M$, obtemos

$$(\alpha_j - \alpha_i)\nabla_i f\,\nabla_j f = 0, \tag{56}$$

consequentemente, se considerarmos o seguinte conjunto não vazio $L = \{i; \nabla_i f \neq 0\}$, então de (56) inferimos $\alpha_i = \alpha$, para todo $i \in L$, e

$$Ric(\nabla f) = Ric\Big(\sum_{i\in L}\nabla_i f e_i\Big) = \sum_{i\in L}\nabla_i f\alpha_i e_i = \alpha\nabla f,$$

o que de fato queríamos provar. $\square$

No que se segue, seja $q \in M^n$ um ponto regular arbitrário, e considere um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em uma vizinhança de q contida em M tal que $e_1 = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Procedendo de maneira similar ao trabalho de Baltazar, Batista e Bezerra (2017), podemos verificar que

$$(\mu + f)|\mathring{Ric}|^2 = \langle\nabla\mathring{R}_{11}, \nabla f\rangle + \mathring{R}_{11}\Delta f. \tag{57}$$

De fato, usando a identidade de Bianchi contraída duas vezes (4) juntamente com

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = \mu R_{ij} + \lambda g_{ij} \tag{58}$$

e

$$(\mu + f)\mathring{R}_{ij} = \nabla_i\mathring{\nabla}_j f \tag{59}$$

obtemos

$$\mathrm{div}(\mathring{Ric}(\nabla f)) = \nabla_i(\mathring{R}_{ij}\nabla_j f)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathring{R}_{ij}(\lambda g_{ij} + (\mu + f)R_{ij} + (\Delta f)g_{ij}) \\
&= (\mu + f)\mathring{R}_{ij}R_{ij} \\
&= (\mu + f)|\mathring{Ric}|^2.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos $\mathring{Ric}(\nabla f) = \mathring{R}_{11}\nabla f$, e consequentemente, deduzimos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathring{Ric}(\nabla f)) &= \nabla_i(\mathring{R}_{11}\nabla_i f) \\
&= \nabla_i\mathring{R}_{11}\nabla_i f + \mathring{R}_{11}\nabla_i\nabla_i f,
\end{aligned}
$$

e, portanto, temos (57).

Na sequência, por (54) juntamente com o fato que ∇f é um autovetor para Ric, definiremos um $2-$tensor auxiliar W^R_{ik} que desempenhará um papel fundamental na demonstração de nossos principais resultados. Tal tensor é definido por

$$
W^R_{ik} := \frac{(n-2)^2}{(n-1)(n-3)}\frac{(\mu+f)^2}{|\nabla f|^2}W_{ijkl}R_{jl},
$$

para $i, k = 2, \ldots, n$. Em particular, derivamos uma expressão útil para a norma quadrada do tensor de Ricci sem traço.

Lema 4.5. *Seja $(M^n, g, f, \mu, \lambda)$ um espaço crítico satisfazendo $i_{\nabla f}W = 0$. Então, para qualquer ponto regular, temos:*

1. $|\mathring{Ric}|^2 = \frac{n}{n-1}\mathring{R}^2_{11} + |W^R|^2$.

2.

$$
\begin{aligned}
\big(\mathring{R}^2_{11} + \frac{1}{n}|\mathring{Ric}|^2\big)\Delta f + \frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) &= (\mu + f)\Big(-\frac{n-2}{2(n-1)}|C_{ijk}|^2 + 2\mathring{R}_{11}|\mathring{Ric}|^2\Big) \\
&\quad -(\mu + f)\mathrm{tr}(\mathring{Ric}^3).
\end{aligned}
$$

3.

$$
|\mathring{Ric}|^2\Delta f + \frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) = (\mu + f)\Big(|C_{ijk}|^2 - \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{n}{n-2}\mathrm{tr}(\mathring{Ric}^3)\Big).
$$

4.

$$
\frac{n-2}{n-1}\mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f) = (\mu + f)\Big(\frac{n-2}{2(n-1)}|C_{ijk}|^2 - \nabla_p(C_{pij}R_{ij})\Big).
$$

Demonstração: Pela relação (54), temos

$$
(\mu + f)C_{ijk} = T_{ijk}.
$$

Além disso,

$$(\mu+f)C_{i1k}=T_{i1k},$$

e daí, considerando $i,k=2,\ldots,n$, temos que

$$\begin{aligned}(\mu+f)C_{ijk}\nabla_j f &= \left(\frac{n-1}{n-2}R_{ik}-\frac{R}{n-2}g_{ik}+\frac{1}{n-2}R_{11}g_{ik}\right)|\nabla f|^2\\ &= \frac{n-1}{n-2}\left(\mathring{R}_{ik}+\frac{\mathring{R}_{11}}{n-1}g_{ik}\right)|\nabla f|^2. \qquad (60)\end{aligned}$$

Por outro lado, levando em conta a hipótese sobre o tensor de Weyl, e usando (12) e (41), obtemos

$$\begin{aligned}(\mu+f)C_{ijk}\nabla_j f &= -\left(\frac{n-2}{n-3}\right)(\mu+f)\nabla_l W_{ijkl}\nabla_j f\\ &= \left(\frac{n-2}{n-3}\right)(\mu+f)W_{ijkl}\nabla_l\nabla_j f\\ &= \left(\frac{n-2}{n-3}\right)(\mu+f)^2 W_{ijkl}R_{jl}, \qquad (61)\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos apenas a equação fundamental (41). Daí, comparando as expressões obtidas em (60) e (61) deduzimos

$$W_{ik}^R=\mathring{R}_{ik}+\frac{\mathring{R}_{11}}{n-1}g_{ik},$$

onde W_{ik}^R é definido por $W_{ik}^R=\dfrac{(n-2)^2}{(n-1)(n-3)}\dfrac{(\mu+f)^2}{|\nabla f|^2}W_{ijkl}R_{jl}$, for $i,k=2,\ldots,n$.

Em particular, temos a seguinte expressão para a norma quadrada do tensor de Ricci sem traço

$$\begin{aligned}|W_{ik}^R|^2 &= \sum_{i,k\geq 2}(W_{ik}^R)^2\\ &= \sum_{i,k\geq 2}\left(\mathring{R}_{ik}^2+\frac{2}{n-1}\mathring{R}_{11}\mathring{R}_{ik}\,g_{ik}+\frac{\mathring{R}_{11}^2}{(n-1)^2}\,g_{ik}^2\right)\\ &= |\mathring{Ric}|^2-\frac{n}{n-1}\mathring{R}_{11}^2,\end{aligned}$$

o que prova o primeiro item do lema. Vejamos a seguir a verificação do segundo item.

Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) &= \mathring{R}_{ij}\nabla_k f\nabla_k\mathring{R}_{ij}\\ &= \mathring{R}_{ij}(\nabla_i(\mathring{R}_{kj}\nabla_k f)-\nabla_i\nabla_k f\mathring{R}_{kj})\\ &\quad+\frac{1}{2}C_{kij}(\mathring{R}_{ij}\nabla_k f-\mathring{R}_{kj}\nabla_i f).\end{aligned}$$

Pela definição do tensor T (veja a equação (53)) inferimos

$$\frac{n-2}{n-1}C_{kij}T_{ijk} = C_{kij}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f),$$

e por conseguinte,

$$\begin{aligned} -\frac{n-2}{n-1}C_{ikj}T_{ijk} &= C_{ikj}(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f) \\ &= C_{kji}(R_{ij}\nabla_k f - R_{kj}\nabla_i f) \\ &= 2\mathring{R}_{ij}\nabla_k f C_{kij}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \mathring{R}_{ij}\nabla_k f C_{kij} &= -\frac{n-2}{2(n-1)}T_{ijk}C_{ijk} \\ &= -\frac{n-2}{2(n-1)}(\mu+f)|C_{ijk}|^2. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 4.4, e as equações (41) e (52), podemos reescrever $\frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2)$ como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) &= \mathring{R}_{ij}\left(\nabla_i\Big(\mathring{R}_{11}\nabla_j f\Big)\right) + \mathring{R}_{ij}\left(-f\mathring{R}_{ik} - \mu\mathring{R}_{ik} - \lambda\mathring{R}_{ik} - (\Delta f)g_{ik}\right)\mathring{R}_{kj} \\ &\quad -\frac{n-2}{2(n-1)}C_{kij}T_{kij} \\ &= \mathring{R}_{11}\langle\nabla\mathring{R}_{11},\nabla f\rangle + \mathring{R}_{11}\mathring{R}_{ij}\nabla_i\nabla_j f - \mathring{R}_{ij}\nabla_i\nabla_k f\mathring{R}_{jk} \\ &\quad -\frac{n-2}{2(n-1)}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 \\ &= \mathring{R}_{11}\langle\nabla\mathring{R}_{11},\nabla f\rangle + (\mu+f)\mathring{R}_{11}|\mathring{Ric}|^2 - (\mu+f)tr(\mathring{Ric}^3) \\ &\quad -\frac{R}{n}(\mu+f)|\mathring{Ric}|^2 - (\Delta f+\lambda)|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}(\mu+f)|C_{ijk}|^2 \\ &= \mathring{R}_{11}\langle\nabla\mathring{R}_{11},\nabla f\rangle + (\mu+f)\mathring{R}_{11}|\mathring{Ric}|^2 - (\mu+f)tr(\mathring{Ric}^3) \\ &\quad -\frac{\Delta f}{n}|\mathring{Ric}|^2 - \frac{n-2}{2(n-1)}(\mu+f)|C_{ijk}|^2. \end{aligned} \tag{62}$$

Essa identidade junto com a equação (57) completa a prova do segundo item.

Para o terceiro item, note que

$$\begin{aligned} (\mu+f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} &= W_{ijkl}\nabla_i\nabla_k f R_{jl} \\ &= \nabla_i W_{klji}\nabla_k f R_{jl} \\ &= -\frac{n-3}{n-2}C_{klj}\nabla_k f R_{jl}, \end{aligned}$$

e, ainda mais,

$$\begin{aligned} C_{klj}\nabla_k f R_{jl} &= \frac{1}{2}C_{klj}(\nabla_k f R_{jl} + \nabla_k R_{jl}) \\ &= \frac{1}{2}C_{klj}\nabla_k f R_{jl} + \frac{1}{2}C_{lkj}\nabla_l R_{jk}) \\ &= \frac{1}{2}C_{klj}(\nabla_k f R_{jl} - \nabla_l R_{jk}). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\mu + f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} &= -\frac{n-3}{2(n-2)}C_{klj}(\nabla_k f R_{jl} - \nabla_l R_{jk}) \\ &= \frac{n-3}{2(n-2)}C_{ijk}(-\nabla_i f R_{jk} + \nabla_j R_{ik}) \\ &= \frac{n-3}{2(n-2)}\frac{n-2}{n-1}C_{ijk}T_{ijk} \\ &= \frac{n-3}{2(n-1)}(\mu + f)|C_{ijk}|^2, \end{aligned}$$

i.e.,

$$W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{n-3}{2(n-1)}|C_{ijk}|^2.$$

Essa informação juntamente com as fórmulas obtidas no Lema 2.2 e a Proposição 4.1 permite-nos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) &= -\frac{1}{2}(\mu + f)\Delta|\mathring{Ric}|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{div}((\mu + f)\nabla|\mathring{Ric}|^2) \\ &= -\Big(\frac{1}{2}\Delta|\mathring{Ric}|^2 - |\nabla \mathring{Ric}|^2\Big)(\mu + f) + \frac{n-2}{n-1}(\mu + f)|C_{ijk}|^2 + \frac{\lambda n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + 2\mathcal{E} \\ &= -(\mu + f)\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{1}{2}(\mu + f)|C_{ijk}|^2 - \mathcal{E} + \frac{n-2}{n-1}(\mu + f)|C_{ijk}|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + 2\mathcal{E} \\ &= \frac{3n-5}{2(n-1)}(\mu + f)|C_{ijk}|^2 - (\mu + f)\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{\lambda n}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + \mathcal{E} \\ &= (\mu + f)\Big(\frac{3n-5}{2(n-1)}|C_{ijk}|^2 - \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big) \\ &\quad + \left(\frac{(\mu + f)R + \lambda n}{n-1}\right)|\mathring{Ric}|^2 - (\mu + f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} \\ &= (\mu + f)\Big(|C_{ijk}|^2 - \nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\Big) - \Delta f|\mathring{Ric}|^2, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{E} = \frac{1}{n-1}(\mu + f)R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2}(\mu + f)tr(\mathring{Ric}^3) - (\mu + f)W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}$, e assim completamos a terceira afirmação do lema.

Usando a relação (57) e o item 3, provado anteriormente, inferimos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(|W^R|^2\nabla f) &= |W^R|^2\Delta f + \nabla f(|W^R|^2) \\
&= |\mathring{Ric}|^2\Delta f - \frac{n}{n-1}\mathring{R}_{11}\Delta f + |\nabla f|(|\mathring{Ric}|^2) \\
&\quad -\frac{2n}{n-1}\mathring{R}_{11}\langle\nabla\mathring{R}_{11},\nabla f\rangle \\
&= \frac{n}{n-1}\mathring{R}_{11}^2\Delta f - \frac{2n}{n-1}(\mu+f)\mathring{R}_{11}|\mathring{Ric}|^2 \\
&\quad +|\mathring{Ric}|^2\Delta f + \nabla f(|\mathring{Ric}|^2).
\end{aligned}$$

Então, substituindo o item 2 do lema na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(|W^R|^2\nabla f) &= \frac{n-2}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\Delta f + \frac{n-2}{2(n-1)}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) - \frac{n}{n-1}(\mu+f)tr(\mathring{Ric}^3) \\
&\quad -\frac{n(n-2)}{2(n-1)^2}(\mu+f)|C_{ijk}|^2,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n-2}\operatorname{div}(|W^R|^2\nabla f) &= |\mathring{Ric}|^2\Delta f + \frac{1}{2}\nabla f(|\mathring{Ric}|^2) - \frac{n}{n-2}(\mu+f)tr(\mathring{Ric}^3) \\
&\quad -\frac{n}{2(n-1)}(\mu+f)|C_{ijk}|^2.
\end{aligned}$$

Para concluir a prova do item, e, consequentemente, do lema, é suficiente comparar a identidade acima com o item 3. Isto finaliza a prova do lema. □

4.4 Prova dos teoremas principais

Nesta seção, concentraremos nossa atenção na classificação de espaços críticos que satisfaçam $i_{\nabla f}W = 0$. A prova segue de uma ideia inspirada nos trabalhos de Yun e Hwang (2014; 2016) (veja também Baltazar, Batista e Bezerra (2017)) e o objetivo principal é provar que estas estruturas devem ser Bach-*flat*. Consequentemente, como há classificação de tais estruturas sob a hipótese Bach-*flat* (veja Teorema 1.1, Teorema 2 de Baltazar et al. (2017) e o Teorema 3.10 do trabalho de Qing e Yuan (2013)) nossos resultados irão ser provados mostrando que espaços críticos tendo curvatura de Weyl radialmente nula são Bach-*flat*. Mais precisamente, estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 4.9. *Seja* $(M^n,\, g,\, f,\, \mu,\, \lambda)$, $n \geq 5$, *um espaço crítico satisfazendo* $i_{\nabla f}W = 0$. *Então* $(M^n,\, g)$ *é Bach-flat.*

Demonstração: Como considerado nas preliminares, se o bordo é não vazio, então a função potencial f satisfaz $f > 0$ no interior de M e, por Miao e Tam (2009), se ν denota o normal unitário que aponta para fora de ∂M, então $\langle \nabla f, \nu \rangle < 0$ sobre cada componente conexa de ∂M.

A seguir, consideramos Σ_0 como uma componente conexa de $f^{-1}(-\mu)$ e escolhemos uma pequena vizinhança de Σ_0. Como veremos em breve, para métricas CPE ($\mu = 1$), será suficiente trabalhar com essa vizinhança somente no conjunto $M_0 = \{x \in M; f \geq -\mu\}$. Para nosso propósito, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, iremos denotar tal vizinhança por $V_\varepsilon = \{-\mu \leq f \leq -\mu + \varepsilon\}$.

Além disso, é importante notar que a função $\mathring{R}_{11} = \mathring{Ric}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$ pode ser continuamente definida em todo M e sua derivação em conjuntos críticos pode ser considerada no sentido das distribuições, e para uma completa descrição sobre tal extensão veja a conclusão da seção 3 de Yun e Hwang (2014).

Em seguida, tomando $\zeta > 0$ arbitrariamente, podemos usar o item 4 do Lema 4.5 para deduzir

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(-\zeta\nabla(\mu+f)^2 + |W^R|^2\nabla f)\Big|_{\Sigma_0} &= -\zeta\Delta(\mu+f)^2\Big|_{\Sigma_0} + \mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)\Big|_{\Sigma_0} \\ &= -\zeta\Delta(\mu+f)^2\Big|_{\Sigma_0} \\ &= -\zeta(2(\mu+f)\Delta(\mu+f) + 2|\nabla(\mu+f)|^2)\Big|_{\Sigma_0} \\ &= -2\zeta|\nabla f|^2\Big|_{\Sigma_0} < 0, \end{aligned}$$

e consequentemente, pela continuidade da função $\mathrm{div}(-\zeta\nabla(\mu+f)^2 + |W^R|^2\nabla f)$, existe ε_0 (possivelmente menor que ε) tal que

$$\mathrm{div}(-\zeta\nabla(\mu+f)^2 + |W^R|^2\nabla f) < 0, \tag{63}$$

sobre $V_{\varepsilon_0} = \{0 \leq \mu + f \leq \varepsilon_0\} \cap M_0$. Por simplicidade, também denotaremos essa nova vizinhança por V_ε. Usando (63) e (52), temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)\Big|_{V_\epsilon} &= \zeta\Delta(\mu+f)^2 + 2\mathrm{div}(-\zeta\nabla(\mu+f)^2 + |W^R|^2\nabla f) \\ &< \zeta\Delta(\mu+f)^2. \end{aligned}$$

Mas $\zeta\Delta(\mu+f)^2 = 2\zeta((\mu+f)\Delta(\mu+f) + |\nabla(\mu+f)|^2)$, e então

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)\Big|_{V_\epsilon} &= \zeta\Delta(\mu+f)^2 + 2\mathrm{div}(-\zeta\nabla(\mu+f)^2 + |W^R|^2\nabla f) \\ &< 2\zeta((\mu+f)\Delta(\mu+f) + |\nabla(\mu+f)|^2) \\ &< 2\zeta\left((\mu+f)\left(-\frac{(\mu+f)R + \lambda n}{n-1}\right) + |\nabla f|^2\right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)\Big|_{V_\epsilon} < \frac{2\zeta}{n-1}(-(\mu+f)^2R - n\lambda(\mu+f) + (n-1)|\nabla f|^2),$$

e então, quando $\zeta \to 0$, podemos concluir que

$$\mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)\Big|_{V_\varepsilon} \leq 0.$$

Desde que o $2-$tensor W^R_{ij} anula-se quando restrito à componente $\{f = -\mu\}$ do bordo ∂V_ε, usamos o teorema da divergência para inferir

$$0 \leq -\int_{V_\varepsilon} \mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f) = -\int_{\{f=-\mu+\varepsilon\}} |W^R|^2|\nabla f| \leq 0,$$

onde o normal unitário externo para $\{f = -\mu+\varepsilon\}$ é dado por $\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Portanto,

$$\mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f) = 0$$

sobre V_ε, e $W^R\big|_{\{f=-\mu+\varepsilon\}} \equiv 0$.

Dessa forma, tomando mais uma vez o teorema da divergência combinado com as duas consequências acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{V_\epsilon} f\mathrm{div}(|W^R|^2\nabla f)dM_g \\
&= \int_{V_\epsilon} \mathrm{div}(f|W^R|^2\nabla f)dM_g - \int_{V_\epsilon} |W^R|^2|\nabla f|^2 dM_g \\
&= \int_{\{f=-\mu+\varepsilon\}} f|W^R|^2\nabla f d\sigma - \int_{V_\epsilon} |W^R|^2|\nabla f|^2 dM_g,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$0 = \int_{V_\epsilon} |W^R|^2|\nabla f|^2,$$

o que implica $W^R \equiv 0$ sobre V_ε. Em particular, obtemos $W_{ikjl}R_{kl} = 0$ sobre V_ε.

Para o que falta, relembramos que a função f e a métrica g são analíticas reais (para mais etalhes veja, por exemplo, os trabalhos de Corvino (2000), Morrey (2000) e Hagen (1970)). Assim, desde que $W_{ikjl}R_{kl} = 0$ no interior do conjunto V_ε, devemos ter $W_{ikjl}R_{kl} = 0$ em M.

Note que

$$\begin{aligned}
W_{ikjl}\nabla_i R_{kl} &= W_{ikjl}(C_{ikl} + \nabla_k R_{il}) \\
&= W_{ikjl}C_{ikl} + W_{ikjl}\nabla_k R_{il}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= W_{ikjl}C_{ikl} + W_{kijl}\nabla_i R_{kl} \\
&= W_{ikjl}C_{ikl} - W_{ikjl}\nabla_i R_{kl},
\end{aligned}
$$

e então,

$$W_{ikjl}\nabla_i R_{kl} = \frac{1}{2}W_{ikjl}C_{ikl}.$$

Daí, tomando a derivada na relação $W_{ikjl}R_{kl} = 0$ e usando a equação (12), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_i W_{ikjl}R_{kl} + W_{ikjl}\nabla_i R_{kl} \\
&= -\frac{n-3}{n-2}C_{ljk}R_{kl} + \frac{1}{2}W_{ikjl}C_{ikl}. \qquad (64)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\frac{n-3}{n-2}C_{ljk}R_{kl}\nabla_j f - \frac{1}{2}W_{ikjl}\nabla_j f C_{ikl} = 0.$$

Na sequência, mudando os índices por simplicidade, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= C_{ijk}R_{jk}\nabla_i f \\
&= C_{ijk}(R_{jk}\nabla_i f - R_{ik}\nabla_j f),
\end{aligned}
$$

que podemos reescrever, usando (53), da seguinte maneira $C_{ijk}T_{ijk} = 0$.

Portanto, desde que o conjunto $\{f = -\mu\}$ tem medida nula, da equação (54), temos $C_{ijk} = 0$, bem como, utilizando essa informação em (12), obtemos a harmonicidade do tensor de Weyl, e dessa forma, usando a definição do tensor de Bach em (14), é imediato deduzir que $(M^n,\, g)$ é uma variedade Bach-*flat* e isso completa a prova do teorema. $\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos variedades compactas com bordo, onde na primeira parte dessa tese, obtivemos equações integrais para tais variedades, sendo estas consideradas com ou sem curvatura escalar constante. Com essas relações, e com bases nos resultados de Reilly (1977 e 1980) conseguimos classificar variedades riemannianas compactas e conexas com bordo suave não vazio tendo a curvatura de Ricci uma certa limitação e sob a existência de um campo conforme gradiente. Posteriormente, com as técnicas desenvolvidas na prova de tal teorema, tratamos de variedades Einstein com bordo não vazio com a existência de um campo vetorial não nulo conforme, e como tal foi provado no primeiro resultado, conseguimos exibir uma rigidez para tal classe estudada. Finalmente, para a prova do último teorema, que responde o segundo questionamento feito no texto, exibimos dois lemas que versam sobre variedades com bordo totalmente geodésico, no primeiro momento, e com curvatura escalar constante, no segundo lema, e ambos resultados temos a presença, mais uma vez, de um campo conforme. Após tais demonstrações, exibimos uma desigualdade para variedade compacta com bordo totalmente geodésico e curvatura escalar constante, e ocorrendo a igualdade, mostramos que ela é isométrica ao hemisfério da esfera.

No segundo momento da tese, estudamos espaços críticos e para determinadas escolhas nos parâmetros que compõem tal definição, investigamos três estruturas, que foram descritas no texto, e explicitaremos novamente aqui: 1. triplas estáticas positivas, 2. métricas críticas do funcional volume, e 3. métricas críticas do funcional curvatura escalar total. Para triplas estáticas positivas, classificamos tal estrutura com curvatura de Weyl radial nula sem a hipótese da curvatura seccional ser não negativa. A seguir, tratamos métricas críticas Miao-Tam e respondemos afirmativamente um questionamento no texto, mais precisamente, sob a condição $i_{\nabla f}W = 0$ provamos que tais métricas devem ser isométricas a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$. Além disso, para a última estrutura considerada em tal parte, provamos a conjectura CPE para variedades compactas com curvatura Weyl radial nula.

REFERÊNCIAS

AMBROZIO, L. On static three-manifolds with positive scalar curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 107, n. 1, p. 1–45, 2017.

ANDERSON, M. On the structure of solutions to the static vacuum Einstein equations. **Annales Henri Poincaré**, v. 1, n. 6, p. 995–1042, 2000.

ANDERSON, M.; CHRUSCIEL, P.; DELAY, E. Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant. **Journal of High Energy Physics**, v. 2002, n. 10, p. 063, 2002.

BACH, R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. **Mathematische Zeitschrift**, v. 9, p. 110–135, 1921.

BALTAZAR, H. On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature. **Geometriae Dedicata**, v. 198, p. 1–19, 2017.

BALTAZAR, H.; BARROS, A.; BATISTA, R; VIANA, E. On static manifolds and related critical spaces with zero radial Weyl curvature, 2019. (Preprint).

BALTAZAR, H.; BATISTA, R.; BEZERRA, K. On the volume functional of compact manifolds with boundary with harmonic Weyl tensor. **ArXiv e-prints**, 2017. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1710.06247 >. Acesso em: 01 jul. 2019.

BALTAZAR, H.; DA SILVA, A.; OLIVEIRA, F.F. Weakly Einstein critical metric of the volume functional of compact manifolds with boundary. **ArXiv e-prints**, 2018. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1804.10706 >. Acesso em: 01 jul. 2019.

BALTAZAR, H.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR, E. Volume functional of compact manifolds with prescribed boundary metric. **ArXiv e-prints**, 2017. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1709.07839 >. Acesso em: 01 jul. 2019.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 145, p. 3513–3523, 2017.

BALTAZAR, H.; RIBEIRO JR., E. Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary. **Pacific J. Math.**, v. 1, p. 29–45, 2018.

BARBOSA, E.; LIMA, L.; FREITAS, A. The generalized Pohozaev-Schoen identity and some geometric applications. **ArXiv e-prints**, 2016. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1607.03073 >. Acesso em: 01 jul. 2019 e aceito para publicação em Comm. Anal. Geom.

BARROS, A.; DA SILVA, A. Rigidity for critical metrics of the volume functional. **Mathematische Nachrichten**, v. 292, n. 4, p. 709–719, 2019.

BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. Bach-Flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **J. Geom. Anal.**, v. 25, p. 2698–2715, 2014.

BARROS, A.; LEANDRO, B.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds. **Math. Nachr.**, v. 288, n. 16, p. 1814–1821, 2015.

BARROS, A.; RIBEIRO JR., E. Critical point equation on four-dimensional compact manifolds. **Math. Nachr.**, v. 287, n. 14-15, p. 1618–1623, 2014.

BATISTA, R.; DIÓGENES, R.; RANIERI, M.; RIBEIRO JR., E. Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary. **J. Geom. Anal.**, v. 27, p. 1530–1547, 2017.

BESSE, A. **Einstein manifolds**. New York: Springer-Verlag, 1987.

BOUCHER, W.; GIBBONS, G.; HOROWITZ, G. Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. **Phys. Rev. D.**, v. 30, p. 2447, 1984.

CARMO, M. P. DO. **Geometria riemanniana**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor. **Math. Z**, v. 271, p. 751–756, 2012.

CHANG, J.; HWANG, S.; YUN, G. Rigidity of the critical point equation. **Math. Nachr.**, v. 283, p. 846–853, 2010.

CHANG, J.; HWANG, S.; YUN, G. Critical point metrics of the total scalar curvature. **Bull. Korean Math. Soc.**, v. 49, p. 655–667, 2012.

CHASE, J. Event horizons in static scalar-vacuum space-times. **Commun. Math. Phys.**, v. 19, p. 276–288, 1970.

CHAVEL, I. **Eigenvalues in Riemannian Geometry**. New York: Academic Press, 1984.

CHEN, B. **Riemannian submanifolds, in Hanbook of differential geometry, Vol. I**. Amsterdam: North-Holland, 2000.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow.** Providence: American Mathematical Society, 2006.

CHOW, B. et al. **The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects**. Mathematical Surveys and Monographs, 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

CORVINO, J. Scalar curvature deformations and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Comm. Math. Phys.**, v. 124, p. 137–189, 2000.

DESHMUKH, S. Characterizing spheres by conformal vector fields. **Ann. Univ. Ferrara**, v. 56, p. 231–236, 2010.

DESHMUKH, S.; AL-SOLAMY, S. F. Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold. **Colloquium Math.**, v. 112, n. 1, p. 157–161, 2008.

EJIRI, N. A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 33, p. 261–266, 1981.

EVANGELISTA, I.; VIANA, E. Conformal gradient vector fields on Riemannian manifolds with boundary. *Aceito para publicação em Colloquium Mathematicum*, 2019 (in prelo).

FREED, D.; GROISSER, D. The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphism group. **Michigan Mathematical Journal**, v. 36, n. 3, p. 323–344, 1989.

GIBBONS, S.; HARTNOLL, S.; POPE, C. Bohm and Einstein-Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizonts. **Phys. Rev. D.**, v. 67, p. 84024, 2003.

GIL-MEDRANO, O.; MICHOR, P. The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. **Quarterly Journal of Mathematics Oxford**, v. 42, n. 2, p. 183–202, 1991.

GOLDBERG, S. I.; KOBAYASHI, S. The conformal transformation group of a compact homogeneous Riemannian manifold. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 68, p. 378–381, 1962a.

GOLDBERG, S. I.; KOBAYASHI, S. The conformal transformation group of a compact Riemannian manifold. **Amer. J. Math.**, v. 84, p. 170–174, 1962b.

GOMES, J. **Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterizaçao de variedades Riemannianas munidas de um campo conforme ou de alguma métrica especial**. 2012, 91 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

HAGEN, H. On the analyticity of static vacuum solutions of Einstein's equations. **Proc. Cambridge Philos. Soc.**, v. 67, p. 415–421, 1970.

HELGASON, S. **Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces**. Orlando, San Diego New York: Academic Press,, 1978.

HIJAZI, O.; MONTIEL, S.; RAULOT, S. Uniqueness of de Sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant. **Ann. Glob. Anal. Geom.**, v. 47, n. 2, p. 167–178, 2015a.

HIJAZI, O.; MONTIEL, S.; RAULOT, S. Uniqueness of de Sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant. **Annals of Global Analysis and Geometry**, v. 47, n. 2, p. 167–178, 2015b.

HSIUNG, C. C. On the group of conformal transformations of a compact Riemannian manifold. **J. Differential Geom.**, v. 2, p. 185–190, 1968.

HWANG, S. Critical points of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature. **Manuscripta Math.**, v. 103, p. 135–142, 2000.

HWANG, S. The critical point equation on a three-dimensional compact manifold. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 131, p. 3221–3230, 2003.

HWANG, S. Three dimensional critical point of the total scalar curvature. **Bull. Korean Math. Soc.**, v. 50, n. 3, p. 867–871, 2013.

ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum space-times. **Physical Review**, v. 164, n. 5, p. 1776–1779, 1967.

KIM, J.; SHIN, J. Four-dimensional static and related critical spaces with harmonic curvature. **Pacific J. Math.**, v. 295, n. 2, p. 429–462, 2018.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function. **J. Math. Soc. Japan.**, v. 34, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. **Manifolds and Lie Groups**, v. 14, p. 197–206, 1981.

LAFONTAINE, J. Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata. **J. Math. Pures Appliquées**, v. 62, p. 63–72, 1983.

LEANDRO, B. A note on critical point metrics of the total scalar curvature functional. **J. Math. Analysis and App.**, v. 424, p. 1544–1548, 2015.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calc. Var. PDE.**, v. 36, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 363, p. 2907–2937, 2011.

NAGANO, T. The conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor. **J. Math. Soc. Japan.**, v. 11, n. 1, p. 10–14, 1959.

OBATA, M. Certains conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. **J. Math. Soc. Japan**, v. 14, p. 333–340, 1962.

OBATA, M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 77, p. 265–270, 1971.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry**. London: Academic Press Inc., 1983.

PETERSEN, P. **Riemannian Geometry.** 2nd edition. GTM 171. New York: Springer-Verlag, 2006.

QING, J.; YUAN, W. A note on static spaces and related problems. **J. Geom. Phys.**, v. 74, p. 18–27, 2013.

REILLY, R. C. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 26, p. 459–472, 1977.

REILLY, R. C. Geometric applications of the solvability of Neumann problems on a Riemannian manifold. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 75, n. 1, p. 23–29, 1980.

SANTOS, A. Critical metrics of the scalar curvature functional satisfying a vanishing condiction on the Weyl tensor. **Archiv der Math.**, v. 109, p. 91–100, 2017.

VIACLOVSKY, J. A. Critical metrics for Riemannian curvature functionals. **ArXiv e-prints**, 2014. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1405.6080 >. Acesso em: 01 jul. 2019.

WALD, R. **General Relativity.** Chicago and London: The University of Chicago Press, 1984.

WANG, X. On the uniqueness of the ADS spacetime. **Acta Mathematica Sinica, English Series**, v. 21, n. 4, p. 917–922, 2005.

YANO, K. Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. **Ann. of Math.**, v. 69, p. 451–461, 1959.

YANO, K. **Integral formulas in Riemannian geometry**. New York: M. Dekker, 1970.

YUN, G.; HWANG, S. Total scalar curvature and harmonic curvature. **Taiwanese J. Math.**, v. 18, p. 1439–1458, 2014.

YUN, G.; HWANG, S. Erratum to: Total scalar curvature and harmonic curvature. **Taiwanese J. Math.**, v. 20, n. 3, p. 699–703, 2016.

YUN, G.; HWANG, S. Gap theorems on critical point equation of the total scalar curvature with divergence-free Bach tensor. **Taiwanese Journal of Mathematics**, p. 1–15, 2019.