



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

RENNAN FERREIRA DANTAS

DENSIDADE MÍNIMA DE CÓDIGOS DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

FORTALEZA
2019

RENNAN FERREIRA DANTAS

DENSIDADE MÍNIMA DE CÓDIGOS DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação. Área de concentração: Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D215d Dantas, Rennan Ferreira.

Densidade mínima de códigos de identificação em grades. / Rennan Ferreira Dantas. – 2019.
108 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em
Ciência da Computação, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio.

1. Código de identificação. 2. Densidade mínima. 3. Método da descarga. 4. Grades triangulares. 5.
Grades king. I. Título.

CDD 005

RENNAN FERREIRA DANTAS

DENSIDADE MÍNIMA DE CÓDIGOS DE IDENTIFICAÇÃO EM GRADES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação. Área de concentração: Ciência da Computação.

Aprovada em: 28/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Cláudia Linhares Sales
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Júlio César da Silva Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Sulamita Klein
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Dr. Antonio Josefran de Oliveira Bastos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Nicolas de Almeida Martins
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Dedico esta tese de doutorado aos meus pais,
Raimundo e Sinésia; aos meus avós e a minha
namorada Renata.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por iluminar o meu caminho. Eu sei que o cuidado Dele se faz presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço aos meus pais por todo amor e pelo esforço que fizeram durante toda a vida para proporcionar a mim o melhor possível. A eles tudo devo e dedico este trabalho e todas as conquistas que tive e que terei durante a minha vida.

Agradeço ao meu orientador, professor Rudini Sampaio, por todo aprendizado, paciência, conselhos e amizade desde a minha iniciação científica ainda na graduação. Muito do que sei hoje devo aos seus ensinamentos.

Agradeço também ao professor Frédéric Havet pela supervisão durante meu estágio no INRIA-Sophia Antipolis. Também agradeço ao Júlio Araújo, à Karol Maia e ao Cláudio Carvalho por todo auxílio e companheirismo que me prestaram durante esse estágio. Ao Júlio Araújo devo agradecer também pelos passes para gol que perdi e pelos esclarecimentos entre uma surra e outra no *trash* ping-pong.

Agradeço aos professores Cláudia Linhares, Josefran Bastos, Júlio Araújo, Nicolas Almeida e Sulamita Klein por contribuir com os seus sólidos conhecimentos para este trabalho, além da disponibilidade para participar da banca avaliadora. Agradeço especialmente aos professores Júlio Araújo e Cláudia Linhares que participaram da banca desde o período de Qualificação. As suas contribuições foram fundamentais para a qualidade desta tese de doutorado.

Agradeço aos professores que tive durante toda vida, especialmente aos professores do grupo de pesquisa ParGO. Muito obrigado por todo conhecimento e disponibilidade. “Professores brilhantes ensinam para uma profissão. Professores fascinantes ensinam para a vida”(Augusto Cury).

Agradeço a minha família, especialmente as minhas tias Luzia e Graça pelo incentivo que sempre me deram. Tia Graça, a sua luta pela vida me deu força em muitos momentos da caminhada. Durante os anos em que estive dedicado a este projeto de vida que se iniciou ainda na graduação, precisei abdicar de muitos momentos com a família para que o trabalho fosse realizado. Durante esta jornada, a vovó Zulmira e o vovô Antônio Geraldo fizeram a sua passagem deste mundo. A vocês eu também dedico este trabalho. Felizmente ainda existem muitos momentos a serem vividos com os entes queridos e quero vivê-los também por vocês.

A minha amada namorada Renata Karla, eu dou méritos por este objetivo alcançado. O seu amor, o seu cuidado até com os menores detalhes, a ajuda sempre disponível e a compreensão inesgotável foram, sem dúvida, alguns dos mais importantes alicerces sobre o qual me apoiei para desenvolver esse trabalho.

Aos meus queridos amigos de toda uma vida, em particular Ailde Melo, Andréa Lima, Carlos Antônio, Carlos Filho, Emanuella Lopes, Flávia Quintella, Isaac Queiroz, Ísilda Barreto, Júnior Saraiva, Rafael Alves, Rebeca Rocha, Rodrigues Júnior, Thiago Parente e Thiago Vieira; o meu obrigado por todo o incentivo e compreensão por tantos momentos de

ausência durante a realização deste trabalho.

O doutorado, por si só, é uma tarefa que exige muito. Agradeço aos colegas Márcio Santos, Pablo Soares, Rafael Teixeira, Tatiane Fernandes, Mardson Ferreira e Vinícius Lima do LAB 2. A vocês, que estão comigo desde o mestrado, o meu obrigado por dividirem comigo as alegrias e dificuldades deste período.

Cursar o doutorado trabalhando foi muito difícil. Felizmente, tive amigos no trabalho com quem pude dividir as minhas angústias e compartilhar sonhos. Agradeço também aos colegas do Campus da UFC em Crateús em particular: Allysson Araújo, Amanda Pires, Emerson Barros, Fabiana Almeida, Filipe Fernandes, Lívio Freire, Lisieux Andrade, Luiz Alberto e Wellington Franco. Obrigado pela disponibilidade de sempre para ajudar.

Cursar o doutorado, trabalhando e com função de gestão tornou esse doutorado quase impossível de ser concluído. Dessa forma, preciso agradecer aos professores Lívio Freire, Roberto Cabral, André Meireles, Arnaldo Barreto, Wellington Franco e Allysson Araújo por dividirem comigo essas tarefas administrativas durante esse período. Por fim, fica o meu agradecimento especial à professora Lisieux Andrade. Muito obrigado por todo o seu trabalho na Coordenação do Curso de Ciência da Computação. O seu trabalho na coordenação foi, fundamentalmente, o que me deu tempo para concluir o doutorado. A caminhada se tornou mais fácil com vocês ao meu lado. “Por vezes sentimos que aquilo que fazemos é apenas uma gota de água no oceano. Mas o oceano seria menor se lhe faltasse uma gota” (Madre Teresa de Calcutá).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Tenho-vos dito isto, para que em mim tenhais paz; no mundo tereis aflições, mas tende bom ânimo, eu venci o mundo.”

João 16:33

RESUMO

Nesta tese, estudamos o Problema do Código de Identificação em grades triangulares e em grades *king*, ambas infinitas. Denotamos por $N[v]$ a vizinhança fechada de v em um grafo G e, para um conjunto $C \subseteq V(G)$, $C[v] = N[v] \cap C$. Um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um *código de identificação* em um grafo G se, para todo $v \in V(G)$, $C[v] \neq \emptyset$ e, para todos $u, v \in V(G)$ distintos, $C[u] \neq C[v]$. Sejam G um grafo, r um inteiro qualquer não-negativo e $N_r(v)$ o conjunto dos vértices de G que estão a uma distância no máximo r de v em G . Para qualquer código de identificação $C \subseteq V(G)$, a *densidade* de C em G , denotada por $d(C, G)$, é definida por $d(C, G) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{|C \cap N_r(v_0)|}{|N_r(v_0)|}$, onde v_0 é um vértice arbitrário em G . A densidade mínima de um código de identificação em G é denotada por $d^*(G)$. Dado um inteiro positivo k , seja \mathcal{T}_k a grade triangular infinita com k linhas. Utilizando o Método da Descarga, determinamos a densidade mínima para \mathcal{T}_k , com $2 \leq k \leq 6$ e com $k \geq 7$ ímpar. Determinamos também um limitante inferior e um limitante superior para $d^*(\mathcal{T}_k)$, quando $k \geq 8$ par, e conjecturamos um valor exato. Denotamos por \mathcal{K}_k a grade *king* com k linhas. Novamente utilizando o Método da Descarga, determinamos a densidade mínima para \mathcal{K}_k , com $3 \leq k \leq 6$ e determinamos um limitante inferior e um limitante superior para $d^*(\mathcal{K}_k)$ para todo $k \geq 7$.

Palavras-chave: Código de identificação. Densidade mínima. Método da descarga. Grades triangulares. Grades *king*.

ABSTRACT

In this thesis we study *Identifying Code Problem* in triangular grids and king grids both infinite. We denote by $N[v]$ the closed neighbourhood of v in G and, for a set $C \subseteq V(G)$, $C[v] = N[v] \cap C$. A set $C \subseteq V(G)$ is an *identifying code* in a graph G if for all $v \in V(G)$, $C[v] \neq \emptyset$ and, for all distinct $u, v \in V(G)$, $C[u] \neq C[v]$. Let G be a graph. For any non-negative integer r , we denote by $N_r(v) = \{x \mid \text{distance}(v, x) \leq r\}$ in G . For any identifying code $C \subseteq V(G)$, the *density* of C in G , denoted by $d(C, G)$, is defined by $d(C, G) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{|C \cap N_r(v_0)|}{|N_r(v_0)|}$, where v_0 is an arbitrary vertex in G . The infimum of the density of an identifying code in G is denoted by $d^*(G)$. Given a positive integer k , let \mathcal{T}_k be the triangular grid with k rows. Using Discharging Method, we determine the minimum density of \mathcal{T}_k , for $2 \leq k \leq 6$ and for odd $k \geq 7$. We also determine a lower bound and an upper bound for $d^*(\mathcal{T}_k)$ for every even $k \geq 8$ and we conjecture the exact value. We denote by \mathcal{K}_k the king grid with k rows. Also using Discharging Method, we determine the minimum density of \mathcal{K}_k , for $3 \leq k \leq 6$ and we also determine a lower bound and an upper bound for $d^*(\mathcal{K}_k)$ for every $k \geq 7$.

Keywords: Identifying code. Minimum density. Discharging method. Triangular grids. King grids.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Um código de identificação para \mathcal{S}_1 de densidade $\frac{1}{2}$	18
Figura 2 – Exemplos de grades infinitas.	26
Figura 3 – Grafo K_5 e grafo $K_{3,3}$: dois grafos não planares.	27
Figura 4 – Grafo K_4 : um grafo que pode ser desenhado sem cruzamento de arestas.	27
Figura 5 – (a) Grafo estrela; (b) Partições A e B de um grafo bipartido.	27
Figura 6 – Exemplo de grafo cordal.	28
Figura 7 – Exemplo de grafo split com conjunto independente S e clique K	28
Figura 8 – O grafo de permutação $G[4, 3, 6, 1, 5, 2]$	29
Figura 9 – Grafo de intervalo. Fonte: Wikipedia.	31
Figura 10 – Os vértices pretos nos grafos representam um conjunto dominante em (a); um código de separação em (b) e um código de identificação em c. Fonte: FOUCAUD (2012).	36
Figura 11 – Exemplo de um grafo com sistema de observação de tamanho mínimo. Fonte: AUGER <i>et al.</i> (2013).	38
Figura 12 – Exemplo de representação de grade triangular.	44
Figura 13 – Dois códigos de identificação ótimos de \mathcal{T}_2 : $D_{2,a}$ (cima) e $D_{2,b}$ (baixo). Os vértices cinzas são aqueles no código.	47
Figura 14 – Códigos de identificação $D_{3,a}$ (cima) e $D_{3,b}$ (baixo) de \mathcal{T}_3 com densidade $1/3 \approx 0.333$	47
Figura 15 – Código de identificação D_6 de \mathcal{T}_6 com densidade $1/3$	47
Figura 16 – Quase-coluna Q_x com $Q_x \cap C = \emptyset$	48
Figura 17 – Simetria vertical φ na linha 1 e simetria horizontal ψ em $c' = \varphi(c) = (3, 4)$	51
Figura 18 – Dois códigos de identificação de \mathcal{T}_4 com densidade mínima $1/3$: D_4 (cima) e D'_4 (baixo).	52
Figura 19 – Dois casos suficientes para $u = (3, 2) \in U_3$	55
Figura 20 – Subcasos 1.1 e 1.2: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$	57
Figura 21 – Subcaso 1.3: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$	58
Figura 22 – Subcaso 1.4: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$	59
Figura 23 – Subcaso 1.5: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$	60
Figura 24 – Subcasos 2.1 e 2.2: $v = (2, 2)$ com um vizinho U_1 que não está na borda (ou $(3, 2)$ ou $(2, 3)$).	61
Figura 25 – Subcasos 3.1, 3.2 e 3.3: $v = (2, 2)$ com nenhum vizinho em U_1 , com 1 vizi- nho em C e com 3 vizinhos em U_2	62
Figura 26 – Subcaso 3.4: $v = (2, 2)$ com nenhum vizinho em U_1 , nenhum vizinho em C e 3 vizinhos em U_2	63
Figura 27 – Prova do Teorema 4.3: $u \in U$ na borda de \mathcal{T}_k com $k \geq 5$	67

Figura 28 – Código de identificação D_5 de \mathcal{T}_5 com densidade $3/10$	67
Figura 29 – Código de identificação D_6 de \mathcal{T}_6 com densidade $1/3$	68
Figura 30 – Código de identificação $D_{3,a}$ de \mathcal{T}_3 com densidade $1/3$	68
Figura 31 – Recorte gerando um código de identificação ótimo da grade <i>king</i> infinita. Os vértices pretos são os vértices que pertencem ao código.	70
Figura 32 – As configurações de um vértice defectivo: $v = (a, b) = (3, 3)$	73
Figura 33 – Código de identificação para \mathcal{K}_7	82
Figura 34 – Código de identificação de \mathcal{K}_8	82
Figura 35 – Código de identificação de \mathcal{K}_9	83
Figura 36 – Demonstração do Lema 5.1.	84
Figura 37 – Demonstração do Lema 5.1.	84
Figura 38 – Dois recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_5 (densidade $4/15$).	84
Figura 39 – Dois recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_6 (densidade $5/18$).	85
Figura 40 – Cinco recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_3 (densidade $1/3$).	85
Figura 41 – Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 1.	86
Figura 42 – Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 2.	86
Figura 43 – Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 3.	87
Figura 44 – Recorte gerando um código de identificação ótimo de \mathcal{K}_4 (densidade $5/16$).	87
Figura 45 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.1.	88
Figura 46 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.2.	89
Figura 47 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.3.	89
Figura 48 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.4.	90
Figura 49 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.5.	90
Figura 50 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.6.	91
Figura 51 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.7.	91
Figura 52 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.1.	92
Figura 53 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.2.	92
Figura 54 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.3.	93
Figura 55 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.4.	93
Figura 56 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.5.	94
Figura 57 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.1.	94
Figura 58 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.2.	95
Figura 59 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.3.	95
Figura 60 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.4.	96
Figura 61 – Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.5.	96
Figura 62 – Exemplo de código de identificação para grafo G não direcionado e para o grafo G orientado. Fonte: SKAGGS (2009).	99
Figura 63 – Recorte de grade hexagonal.	99
Figura 64 – Exemplo de grade <i>king</i> cilíndrica.	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Densidades ótimas de Código de Identificação para grades retangulares infinitas. Fonte: Próprio autor.	17
Tabela 2 – Comparação das complexidades dos problemas de decisão CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO e CONJUNTO DOMINANTE para algumas classes de grafos. Fonte: FOUCAUD (2012).	42
Tabela 3 – Comparação das complexidades e fator de aproximação dos problemas de otimização MIN ID COD e MIN DOM para algumas classes de grafos. A classe de complexidade precisa do MIN ID-COD não está totalmente determinada para os grafos planares. Fonte: FOUCAUD (2012).	43
Tabela 4 – Densidades ótimas de Código de Identificação para grades triangulares com número limitado de linhas. Fonte: Próprio autor.	45
Tabela 5 – Densidades ótimas de Código de Identificação para grades <i>king</i> com número limitado de linhas. Fonte: Próprio autor.	71

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Organização da Tese	19
2	CONCEITOS BÁSICOS	20
2.1	Notação e terminologia	20
2.2	Método da Descarga	22
2.2.1	<i>Introdução</i>	<i>22</i>
2.2.2	<i>Notações e definições</i>	<i>22</i>
2.2.3	<i>Funcionamento do Método da Descarga</i>	<i>23</i>
2.3	Classes de grafos	25
2.3.1	<i>Grades</i>	<i>25</i>
2.3.2	<i>Grafos planares</i>	<i>26</i>
2.3.3	<i>Bipartidos</i>	<i>26</i>
2.3.4	<i>Grafos cordais ou triangularizados</i>	<i>27</i>
2.3.5	<i>Grafos Split</i>	<i>28</i>
2.3.6	<i>Grafos de Permutação</i>	<i>29</i>
2.3.7	<i>Grafos de Intervalo</i>	<i>29</i>
2.4	Complexidade computacional	30
2.4.1	<i>Algoritmos e problemas computacionais</i>	<i>30</i>
2.4.2	<i>Problemas de decisão e classes relacionadas</i>	<i>32</i>
2.4.3	<i>Problemas de otimização, algoritmos aproximativos e classes relacionadas</i>	<i>33</i>
3	O PROBLEMA DO CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO	35
3.1	Introdução	35
3.2	Problemas de identificação relacionados a códigos de identificação	37
3.3	Alguns resultados sobre códigos de identificação	39
3.4	Aspectos computacionais	41
4	GRADES TRIANGULARES	44
4.1	Introdução	44
4.2	A grade triangular infinita com duas, três ou seis linhas	45
4.3	O Método da Descarga	50
4.4	Grades triangulares infinitas com quatro linhas	51
4.5	Grade triangular infinita com cinco linhas ou mais	63

5	GRADES KING	69
5.1	Introdução	69
5.2	Limites inferiores gerais para grades <i>king</i>	70
5.3	Grades <i>king</i> com pelo menos sete linhas	75
5.4	Grades <i>king</i> com três, quatro, cinco ou seis linhas	83
6	CONCLUSÃO	97
6.1	Questões em aberto	97
6.2	Trabalhos futuros	98
	REFERÊNCIAS	101

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, estudamos o problema do código de identificação em grades. O conceito de código de identificação foi introduzido por M. Karpovsky, K. Chakrabarty e L. B. Levitin em 1998 (KARPOVSKY, CHAKRABARTY, e LEVITIN, 1998). Desde então, o estudo sobre esses códigos e suas variantes tem sido desenvolvido. Antoine Lobstein mantém em sua página¹ uma bibliografia com mais de 300 artigos relacionados ao assunto.

Uma aplicação desse conceito é a de diagnosticar processadores com falha em sistemas de multiprocessadores. Modela-se um sistema de multiprocessadores como um grafo $G = (V, E)$ onde os vértices são os processadores e as arestas representam comunicações entre eles. Ou seja, se dois processadores se comunicam, existe uma aresta entre os vértices associados aos processadores.

Dados um grafo G e um vértice $u \in V(G)$, seja $N(u)$ o conjunto dos vizinhos de u em G e seja $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ a *vizinhança fechada* de u . Podemos ver o código de identificação como um conjunto C de processadores selecionados para reportar falhas dos processadores com os quais ele se comunica e as dele próprio, atuando assim como um supervisor de sua vizinhança fechada no grafo. Um supervisor pode avisar ao controlador geral dos processadores que existe um processador com problema na sua região enviando um bit 0 (caso contrário, envia um bit 1).

Para que um código de identificação C funcione corretamente, precisamos que duas premissas sejam verdadeiras:

- Se todos os processadores de C enviarem bit 1, então não existe nenhum defeituoso,
- Se pelo menos um dos processadores de C enviar bit 0, deveremos ser capazes de identificar qual está com defeito.

Para isso, admitimos que não é possível ocorrer mais de uma falha no mesmo instante de tempo. Mais formalmente, definimos a seguir o que é um código de identificação.

Definição 1.1. *Dado um grafo G , um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um código de identificação se:*

- (i) *para qualquer vértice v , $N[v] \cap C \neq \emptyset$, e*
- (ii) *para quaisquer dois vértices $u \neq v$, $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$.*

Dado um conjunto $C \subseteq V(G)$, o *identificador* ou *conjunto de identificação* de um vértice $v \in V(G)$ é $C[v] = N[v] \cap C$. Uma observação importante é que, se G possui gêmeos verdadeiros (ou seja, vértices u e v tais que $N[u] = N[v]$), então G não possui código de identificação. Por exemplo, grafos completos não possuem código de identificação. O teorema abaixo mostra que esta condição é suficiente.

Teorema 1.1. *(STANTON, 2011) Para qualquer grafo G , os seguintes pontos são equivalentes:*

- (i) *G tem um código de identificação;*
- (ii) *$C = V(G)$ é um código de identificação; e*
- (iii) *$N[u] \neq N[v]$ para todos $u, v \in C$ distintos.*

¹<https://www.lri.fr/~lobstein/bibLOCDOMetID.html>

É fácil ver que (ii) implica (i) e (iii), pois, se $C = V(G)$ é um código de identificação, então $N[u] \cap C = N[u]$, para todo $u \in V(G)$. Pelo mesmo motivo, (iii) implica (ii). Para ver que (i) implica (ii), note que, se $C \subseteq V(G)$ é um código de identificação, então $C \cup \{u\}$ também é um código de identificação para qualquer $u \in V(G)$. Grafos que possuem código de identificação são chamados de *identificáveis*.

O problema do código de identificação é relacionado a muitos outros tipos de problemas de identificação em estruturas combinatoriais (grafos, digrafos e hipergrafos) tais como as noções de teste de cobertura, códigos de discriminação, conjuntos de dominação localizador e etc. Todos esses problemas possuem várias aplicações como, por exemplo, diagnóstico de doenças, detecção de falha em redes de computadores, localização de ameaças em instalações, identificação biológica de indivíduos de acordo com os seus atributos e reconhecimento de padrões (DE BONTRIDDER *et al.* (2003) e MORET e SHAPIRO (1985)).

Códigos de identificação são também aplicados em roteamento compacto em redes (LAIFENFELD *et al.*, 2007, 2009), em redes de sensores de emergência em instalações (RAY *et al.*, 2003), para modelar um problema de detecção de localização com redes de sensores (RAY *et al.*, 2004) e também em análise de estruturas secundárias de RNA (HAYNES *et al.*, 2006). Um experimento real de sistema de sensor de movimento baseado em códigos de identificação foi implementado e discutido em UNGRANGSI, TRACHTENBERG, e STAROBINSKI (2004).

Um particular interesse foi dedicado a grades pois muitas aplicações computacionais possuem uma topologia de grade como os sistemas distribuídos em geral. Mais especificamente, temos os sistemas computacionais em *grid* como as redes de computadores *ad-hoc*, redes de processadores e até mesmo *blockchain* que pode ser visto sob a perspectiva de grades. Um estudo sobre *blockchain* pode ser encontrado em RISIUS e SPOHRER (2017). Dos mais de 300 trabalhos que constam na bibliografia de Antoine Lobstein que citamos no Capítulo 1, mais de 30 trabalhos são em grades.

A respeito de grades triangulares infinitas com número de linhas limitadas, denote por \mathcal{T}_k a grade triangular infinita com k linhas. No Capítulo 4 deste trabalho, nós provamos que $d^*(\mathcal{T}_1) = d^*(\mathcal{T}_2) = 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) = d^*(\mathcal{T}_4) = 1/3 = 0.3333 \dots$, $d^*(\mathcal{T}_5) = 3/10 = 0.3$, $d^*(\mathcal{T}_6) = 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(4k)$ para todo $k \geq 7$ ímpar. Além disso, provamos que $1/4 + 1/(4k) \leq d^*(\mathcal{T}_k) \leq 1/4 + 1/(2k)$ para todo $k \geq 8$ par e conjecturamos que $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(2k)$ para todo $k \geq 8$ par. Esses resultados foram apresentados no *Bordeaux Graph Workshop* em 2016 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2016) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017a).

A respeito de grades retangulares infinitas \mathcal{G}_S , Cohen *et al.* (COHEN *et al.*, 1999) determinaram um código de identificação periódico de \mathcal{G}_S com densidade $7/20 = 0.35$. Em 2005, esta densidade foi provada ser ótima por Ben-Haim e Litsyn (BEN-HAIM e LITSYN, 2005). Alguns artigos também obtiveram resultados para grades retangulares com um número finito de linhas. Para qualquer inteiro positivo k , denote por \mathcal{S}_k a grade retangular infinita

com k linhas. Daniel, Gravier e Moncel (DANIEL, GRAVIER, e MONCEL, 2004) mostraram que $d^*(\mathcal{S}_1) = 1/2 = 0.5$ e $d^*(\mathcal{S}_2) = 3/7 \approx 0.4286$. Este resultado foi reproduzido no Lema 1.1. Eles também mostraram que, para todo $k \geq 3$, $\frac{7}{20} - \frac{1}{2k} \leq d^*(\mathcal{S}_k) \leq \min \left\{ \frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{2}{k} \right\}$. Estes limitantes foram recentemente melhorados por Bouznif *et al.* (BOUZNIF, HAVET, e PREISSMANN, 2016), que estabeleceram

$$\frac{7}{20} + \frac{1}{20k} \leq d^*(\mathcal{S}_k) \leq \min \left\{ \frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{3}{10k} \right\}.$$

Esses últimos também provaram $d^*(\mathcal{S}_3) = 3/7 \approx 0.4286$. Recentemente, Jiang (JIANG, 2018) provou que $d^*(\mathcal{S}_4) = 11/28 \approx 0.3928$ e $d^*(\mathcal{S}_5) = 19/50 = 0.38$. Os resultados sobre Código de Identificação em Grades Retangulares estão resumidos na Tabela 1.

Grade retangular	Densidade ótima
\mathcal{G}_S	$7/20 = 0.35$ (BEN-HAIM e LITSYN, 2005)
\mathcal{S}_1	$1/2 = 0.5$ (DANIEL, GRAVIER, e MONCEL, 2004)
\mathcal{S}_2	$3/7 \approx 0.4286$ (DANIEL, GRAVIER, e MONCEL, 2004)
\mathcal{S}_3	$3/7 \approx 0.4286$ (BOUZNIF, HAVET, e PREISSMANN, 2016)
\mathcal{S}_4	$11/28 \approx 0.3928$ (JIANG, 2018)
\mathcal{S}_5	$19/50 = 0.38$ (JIANG, 2018)
\mathcal{S}_k	$\geq \frac{7}{20} + \frac{1}{20k}$ $\leq \min \left\{ \frac{2}{5}, \frac{7}{20} + \frac{3}{10k} \right\}$ (BOUZNIF, HAVET, e PREISSMANN, 2016)

Tabela 1: Densidades ótimas de Código de Identificação para grades retangulares infinitas.
Fonte: Próprio autor.

De todas essas grades principais, apenas a densidade $d^*(\mathcal{G}_H)$ da grade hexagonal permanece em aberto. O melhor limitante superior conhecido para $d^*(\mathcal{G}_H)$ é $3/7 \approx 0.4286$ e vem de dois códigos de identificação construídos por Cohen *et al.* (COHEN *et al.*, 2000). Esses autores também demonstraram um limitante inferior de $16/39 \approx 0.4103$. Em 2009, este limitante inferior foi melhorado para $12/29 \approx 0.4138$ por Cranston e Yu (CRANSTON e YU,

2009). Mais recentemente, Cukierman e Yu (CUKIERMAN e YU, 2013) o melhoraram, utilizando o método da descarga, para $5/12 \approx 0.4167$. Esses autores obtiveram pelo menos três outros códigos de identificação com densidade $3/7 \approx 0.4286$ para \mathcal{G}_H , os quais são diferentes dos códigos obtidos por Cohen *et al.* (COHEN *et al.*, 2000).

Com relação às grades *king*, foi mostrado em (COHEN, HONKALA, e LOBSTEIN, 2001) que $d^*(\mathcal{G}_K) \geq 2/9 \approx 0.222$ e, em (CHARON *et al.*, 2001), foi mostrado que este limitante é apertado, ou seja, $d^*(\mathcal{G}_K) = 2/9 \approx 0.222$. No Capítulo 5 deste trabalho, nós mostramos que para toda grade *king* G , $d^*(G) \geq 2/9 \approx 0.222$. Além disso, mostramos que este limitante é alcançado somente para grade *king* que é produto forte de dois caminhos infinitos. Dado um inteiro positivo k , denotamos por \mathcal{K}_k a grade *king* com k linhas. Nós provamos que $d^*(\mathcal{K}_3) = 1/3 \approx 0.333$, $d^*(\mathcal{K}_4) = 5/16 = 0.3125$, $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15 \approx 0.267$ e $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18 \approx 0.278$. Nós também provamos que $\frac{2}{9} + \frac{8}{81k} \leq d^*(\mathcal{K}_k) \leq \frac{2}{9} + \frac{4}{9k}$, para todo $k \geq 7$. Esses resultados foram apresentados no *IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium - LAGOS* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017b) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2018 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2018).

A seguir, reproduzimos um resultado de (DANIEL, GRAVIER, e MONCEL, 2004). A partir deste resultado, teremos dois resultados diretos sobre a densidade ótima do código de identificação para \mathcal{T}_1 e para \mathcal{K}_1 no Corolário 1.1.

Lema 1.1. (DANIEL, GRAVIER, e MONCEL, 2004) *Temos que $d^*(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2} = 0.5$.*

Demonstração. Seja C um código de identificação de \mathcal{S}_1 . Para qualquer conjunto $X = \{u, v, w, t\}$ de quatro vértices consecutivos em \mathcal{S}_1 , temos que $|C \cap X| \geq 2$. De fato, se $|C \cap X| = 1$, então v e w têm o mesmo conjunto de identificação, ou um deles não é identificado pelo código. Se $|C \cap X| = 0$, ambos v e w não são identificados. Portanto, $d^*(\mathcal{S}_1) \geq \frac{1}{2} = 0.5$. Na Figura 1, mostramos um código de identificação de \mathcal{S}_1 com densidade $\frac{1}{2} = 0.5$ (vértices pretos pertencem ao código), o que conclui a prova. \square

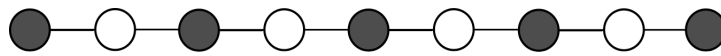


Figura 1: Um código de identificação para \mathcal{S}_1 de densidade $\frac{1}{2}$.

Corolário 1.1. *Como $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{K}_1 \cong \mathcal{S}_1$, temos que $d^*(\mathcal{T}_1) = d^*(\mathcal{K}_1) = d^*(\mathcal{S}_1) = \frac{1}{2} = 0.5$.*

O Problema do Código de Identificação é estudado em várias outras classes de grafos. Alguns exemplos são: COHEN e HAVET (2018) que estuda o Problema de Código de Identificação para grafos direcionados; LU, XU, e ZHANG (2019) que estuda o referido problema em produtos diretos $K_n \times G$, quando G é um grafo regular; e HUDRY e LOBSTEIN (2019a) que estuda o Problema do Código de Identificação em *sóis completos*, que são grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos, $H_n = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ e $J_n = \{j_{1,2}, j_{2,3}, \dots, j_{n,1}\}$, onde H_n induz uma clique e J_n induz um conjunto independentemente, com arestas $j_{i,i+1}h_i$ e $j_{i,i+1}h_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$.

1.1 Organização da Tese

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos e notações de Teoria dos Grafos e de Complexidade Computacional que utilizamos neste trabalho. Apresentaremos também o Método da Descarga que utilizamos para obter alguns dos resultados apresentados nessa tese.

No Capítulo 3, aprofundaremos o estudo sobre o problema do código de identificação apresentando algumas outras definições relacionadas e exemplos. Além disso, exploraremos o estado da arte: mostraremos alguns resultados de determinação do código de identificação mínimo para algumas classes de grafos e também alguns resultados, para algumas classes de grafos, sobre complexidade computacional de problemas de decisão e otimização relacionados ao Problema do Código de Identificação.

O Capítulo 4 contém os nossos resultados sobre a densidade mínima de códigos de identificação em grades triangulares. Nesse capítulo, demonstramos a densidade mínima exata de códigos de identificação para grades triangulares com um número k de linhas quando $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e para $k \geq 7$ ímpar. Para $k \geq 8$ par, determinamos um limitante inferior e um limitante superior para a densidade do código de identificação. Esses resultados foram apresentados no *Bordeaux Graph Workshop* em 2016 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2016) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017a).

No Capítulo 5, estão os nossos resultados sobre a densidade mínima de códigos de identificação em grades *king*. O capítulo contém as demonstrações da determinação da densidade mínima exata de códigos de identificação para grades *king* com um número k de linhas quando $k \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Para $k \geq 7$, determinamos um limitante inferior e um limitante superior para a densidade do código de identificação. Também determinamos que o código de identificação de uma grade *king* finita deve ter densidade estritamente maior do que $2/9$. Esses resultados foram apresentados no *IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium - LAGOS* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017b) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2018 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2018).

Finalmente, no Capítulo 6, fazemos as últimas considerações sobre este trabalho, indicamos questões em aberto que encontramos durante o estudo do problema e apontamos direções para possíveis trabalhos futuros.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos, baseado nos livros de Bondy e Murty (BONDY e MURTY, 2008), CORMEN *et al.* (2009) e WEST (2001), que utilizamos neste trabalho. Mais informações podem ser encontradas nos referidos livros. Apresentaremos também o Método da Descarga que utilizamos para obter alguns dos resultados apresentados nesta tese. Definiremos algumas noções e notações relacionadas ao método e mostraremos alguns exemplos de aplicação do método. Elencaremos ainda algumas classes de grafos (com suas definições, exemplos e caracterizações) que são estudadas sistematicamente com relação ao problema do código de identificação. Por fim, definiremos algumas noções de Teoria da Complexidade que servirão como base para os resultados que apresentaremos no Capítulo 3.

2.1 Notação e terminologia

Um *grafo* G é uma tripla consistindo de um conjunto não vazio de vértices $V(G)$, um conjunto de arestas $E(G)$ e uma relação que associa cada aresta a dois vértices (não necessariamente distintos) chamados *extremidades*. Um *laço* é uma aresta cujas extremidades são iguais. *Múltiplas arestas* são arestas que possuem o mesmo par de extremidades. Um *grafo simples* é um grafo que não contém laços e nem múltiplas arestas. Especificamos um grafo simples por seu conjunto de vértices e seu conjunto de arestas, tratando o conjunto de arestas como um conjunto de pares não ordenados de vértices e escrevendo $e = uv$ (ou $e = vu$) para uma aresta e com extremidades u e v . Quando u e v são extremidades de uma aresta, eles são *adjacentes* e são *vizinhos*.

A denominação grafo vem do fato deste poder ser representado graficamente: os vértices como pontos e as arestas como curvas conectando suas extremidades. Neste trabalho, nós restringimos nossa atenção para grafos simples. Nesse caso, uma aresta é determinada por suas extremidades. então nós podemos nomear uma aresta por suas extremidades. Em um grafo simples, vemos as arestas como um par não ordenado de vértices e podemos ignorar a formalidade da relação de associação de extremidades a arestas. A partir de agora, toda vez que mencionarmos grafo, estaremos nos referindo a um grafo simples, a não ser que seja dito o contrário.

Um *grafo direcionado* (ou digrafo) D é um par ordenado $(V(D), A(D))$ composto por um conjunto, não vazio, $V(D)$ de vértices e um conjunto $A(D)$, disjunto de $V(D)$, de *arcos*. Cada arco é um par ordenado de vértices de D , esta é a diferença entre grafos e digrafos. Se o par (u, v) está em $A(D)$ diz-se que o arco vai de u para v , além disso chamamos u de *cauda* e v de *cabeça* do arco. Um digrafo D é dito *orientado* se nenhum de seus pares de vértices $u, v \in V(D)$ é conectado por dois arcos em direções opostas, ou seja, se nenhum par de vértices $u, v \in V(D)$ é conectado por (u, v) e por (v, u) .

Cada vértice v em um grafo direcionado possui dois tipos de graus: o *grau de*

entrada, $d^-(v)$ e o grau de saída, $d^+(v)$. O grau de entrada de um vértice v é o número de arcos que têm v como cabeça, enquanto o grau de saída é o número de arcos que possuem v como cauda. A vizinhança de entrada de um vértice v em um digrafo D é o conjunto $N^-(v) = \{x \in V(D) \mid (x, v) \in A(D)\}$ enquanto a vizinhança de saída é o conjunto $N^+(v) = \{x \in V(D) \mid (v, x) \in A(D)\}$.

Um grafo G é *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são finitos. Caso contrário, dizemos que G é *infinito*. O *complemento* \overline{G} de um grafo G é o grafo com conjunto de vértices $V(G)$ definido por $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$. Uma *clique* em um grafo é um conjunto de vértices adjacentes dois a dois. Um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes dois a dois. Chamamos de *grafo completo* o grafo que possui uma aresta entre qualquer par de vértices distintos. O grafo completo com n vértices é indicado por K_n . O grafo que não possui nenhuma aresta é chamado de *grafo vazio*.

Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e a atribuição de extremidades às arestas em H é a mesma de G . Escrevemos $H \subseteq G$ e dizemos que “ G contém H ”. Seja B um subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' e o conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem ambas as extremidades em V' . Dizemos que B é um *subgrafo de G induzido por V'* . O grafo B é denotado por $G[V']$. Dizemos também que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G .

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ é a união de dois conjuntos independentes (eventualmente vazios) disjuntos chamados partes de G . Um *caminho* P em um grafo G é um subgrafo de G cujos vértices podem ser ordenados tais que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos na lista. O primeiro e o último vértice da sequência são chamados de *extremidades* do caminho. Um caminho com n vértices é indicado por P_n e o *comprimento* de um caminho é o número de arestas que este possui. A *distância* entre dois vértices u e v em um grafo G é o comprimento do menor caminho que possui extremidades u e v em G . Um *ciclo* é um grafo com um número de vértices igual ao número de arestas, cujos vértices podem ser posicionados em volta de um círculo tais que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles aparecem consecutivamente no círculo.

Um grafo é *conexo* se cada par de vértices em G pertence a um caminho; caso contrário, G é desconexo. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G . A *vizinhança* de um vértice u é o conjunto de vértices adjacentes a u , denotada por $N(u)$. A *vizinhança fechada* de um vértice u é indicado por $N[u]$, onde $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Se um vértice v é uma extremidade de uma aresta e , então v e e são *incidentes*. O grau de um vértice v em G é o número de arestas incidentes a v e é denotado por $d_G(v)$. Se não houver ambiguidade, denota-se apenas por $d(v)$ o grau de um vértice v em G . O *grau máximo* de um grafo G é o maior grau de um vértice de G e é indicado por $\Delta(G)$.

Dois grafos G e H são ditos *idênticos* (denotado por $G = H$) se $V(G) = V(H)$ e $E(G) = E(H)$. Para grafos simples, dois grafos G e H são ditos *isomórficos* (denotado por $G \cong H$) se existe uma função $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$. Esse mapeamento θ é chamado um *isomorfismo*

entre G e H .

2.2 Método da Descarga

Esta seção é fortemente baseada no trabalho de Mohammad Salavatipour (SALAVATIPOUR, 2003). Usaremos notações, definições e exemplos estabelecidos no referido trabalho. Explicamos o que é o Método da Descarga e como é o seu funcionamento através de alguns exemplos.

2.2.1 Introdução

Em 1852, enquanto coloria um mapa da Inglaterra, Francis Guthrie se perguntou se seria possível colorir um mapa com não mais do que 4 cores, onde duas regiões vizinhas recebam cores diferentes. Esse é o Problema das 4 Cores, muito conhecido em Combinatória. A primeira referência impressa sobre esse problema foi publicada em 1878 no periódico *Proceedings of the London Mathematical Society*. Essa publicação provocou um enorme interesse sobre esse problema, com grande número de variações, conjecturas e falsas demonstrações.

O Problema das 4 Cores é responsável por muito do que se conhece hoje em Teoria dos Grafos. A tentativa de resolvê-lo possibilitou o desenvolvimento de vários ramos da Teoria dos Grafos. Entre as ferramentas que foram desenvolvidas para tentar resolver o problema, se encontra o Método da descarga como podemos ver em (APPEL e HAKEN, 1976).

Nos últimos anos, esse método foi utilizado para resolver dezenas de outros problemas. No entanto, existem vários outros problemas em aberto para os quais a aplicação dessa ferramenta aparenta ser bastante promissora. Neste capítulo, definiremos notações utilizadas pela ferramenta, estudaremos o funcionamento da mesma e alguns exemplos que demonstram a sua aplicação.

2.2.2 Notações e definições

Se o grau de um vértice v for igual a i , pelo menos i ou no máximo i , então v é um i -vértice, um $\geq i$ -vértice ou um $\leq i$ -vértice, respectivamente. Um grafo G é *imerso* em uma superfície \mathcal{W} se seus vértices podem ser mapeados em pontos distintos de \mathcal{W} e as arestas podem ser mapeadas em curvas ligando os pontos associados aos vértices de suas extremidades. Além disso, as curvas associadas a qualquer par de arestas não podem compartilhar nenhum ponto em \mathcal{W} , exceto por um ponto associado a um vértice comum dessas arestas.

Uma *face* de uma imersão (*embedding*) de G em uma superfície \mathcal{W} é um conjunto maximal aberto obtido da remoção dos pontos dessa imersão. Um grafo G é *planar* se ele tem uma imersão em uma esfera. Como um plano é topologicamente equivalente a uma esfera, a menos de um ponto chamado de *polo*, todo grafo planar é também imersível em um plano e a face contendo o polo é chamada de *face externa*.

Para uma imersão de um grafo planar G , o conjunto de faces de G é denotado por $F(G)$ ou, quando não houver ambiguidade, F . Dizemos que os vértices de uma face f são os vértices que incidem nas arestas que delimitam a face f . Para toda face f , o *tamanho* ou *comprimento* de f , denotado por $|f|$, é o número de arestas no interior de f , com as pontes contadas duas vezes. *Ponte* é uma aresta cuja remoção aumenta em uma unidade o número de componentes conexas do grafo.

Uma face é chamada *i-face*, $\leq i$ -face ou $\geq i$ -face, se o tamanho de f é i , no máximo i ou pelo menos i , respectivamente. Um grafo planar G é chamado uma *triangularização* se toda face de G tem tamanho 3. A clássica relação de Euler geralmente desenvolve um papel importante na prova de problemas em grafos planares que usam o Método da Descarga.

Teorema 2.1. Fórmula de Euler (EULER, 1758): Para todo grafo plano G finito conexo com conjunto de vértices V , conjunto de arestas E e conjunto de faces F , temos que

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Após essas definições e notações, vamos descrever o funcionamento do Método da Descarga.

2.2.3 Funcionamento do Método da Descarga

Seja Π a classe dos grafos planares e suponha que queremos provar que todo grafo de Π tem uma propriedade específica P . Vamos tomar um grafo arbitrário $G \in \Pi$ e atribuir algumas cargas aos elementos de G , por exemplo, aos vértices, às arestas ou às faces de G . Usando a fórmula de Euler, mostramos que a carga total é um valor constante para as cargas inicialmente atribuídas aos elementos de G , independente de G . Então, distribuímos as cargas de acordo com algum conjunto de regras de *descarregamento* que nós definimos, enquanto preservamos a carga total. Após essa fase de descarregamento, mostramos que ou a carga total está diferente (o que é impossível) ou G tem alguma estrutura específica que implica a propriedade P .

Geralmente, provamos que estruturas específicas implicam uma propriedade P antes de aplicar o Método da Descarga. O caminho mais comum para fazer isso é começar a prova por contradição e assumindo que existem grafos em Π que não satisfazem a propriedade P . Dentre todos esses grafos, consideramos um, que chamamos de G_0 , o qual tem o menor número de vértices. Então, assumindo que G_0 é um contra-exemplo mínimo, provamos que certas estruturas de vértices, arestas ou faces não podem existir em G_0 . Essas estruturas são chamadas de *configurações redutíveis*. Uma vez que o conjunto de configurações redutíveis foi definido, mostramos que elas são *inevitáveis*. Ou seja, mostramos que qualquer grafo em Π deve ter pelo menos uma delas. Isso mostra que não existe um contra-exemplo mínimo, ou seja, todo grafo em Π tem a propriedade P .

Para fazer o segundo passo, mostrar a inevitabilidade das configurações redutíveis,

utilizamos o Método da Descarga. Isso é, tomamos um grafo arbitrário $G \in \Pi$ e aplicamos as cargas iniciais. Usando a fórmula de Euler, mostramos que a carga total é, por exemplo, alguma constante negativa que depende apenas das cargas iniciais aplicadas. Então, aplicamos as regras de descarregamento e mostramos que ou todo elemento de G tem uma carga não-negativa, portanto, a carga total seria não-negativa, ou G deve ter alguma das configurações redutíveis. A carga total deve permanecer negativa já que as regras do descarregamento preservam a carga total. Portanto, existem alguns elementos com carga negativa em G .

Algumas vezes, não usamos nenhuma configuração redutível nas provas envolvendo Método da Descarga. Somente pela aplicação de um conjunto inicial de cargas e de regras de descarregamento, podemos chegar à conclusão desejada. No entanto, na maioria das aplicações do referido método, antes de aplicar as cargas iniciais e as regras de descarregamento, chegamos a um conjunto adequado de configurações redutíveis. Por essa razão, é comum se referenciar a ambos os passos gerais, o processo de encontrar um conjunto de configurações redutíveis e de provar a inevitabilidade das mesmas, como Método da Descarga.

Vamos agora demonstrar o uso dessa técnica através de alguns exemplos. O primeiro exemplo é um fato bem conhecido e que não requer o uso da técnica, que será utilizada apenas para fins ilustrativos.

Exemplo 2.1. (SALAVATIPOUR, 2003) *Todo grafo planar simples $G = (V, E)$ tem um vértice de grau no máximo 5.*

Demonstração. Tome G um grafo plano. Seja F o conjunto de faces de G . Para todo vértice $v \in V$ com grau $d(v)$, atribuímos $d(v) - 6$ unidades de carga e para cada face $f \in F$ com tamanho $|f|$, atribuímos $2|f| - 6$ unidades de carga. Note que $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{f \in F} |f|$. Assim, utilizando a Fórmula de Euler, a carga total é: $\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2|f| - 6) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = 6(|E| - |V| - |F|) = -12$. Como o grafo é simples, toda face tem tamanho pelo menos 3. Assim, todas as faces contribuem para a carga total com uma carga não-negativa. Dessa forma, uma vez que a carga total é negativa, deve existir pelo menos um vértice com carga negativa. Logo, para algum vértice v : $d(v) - 6 < 0$. Então $d(v) \leq 5$, como queríamos. \square

O exemplo acima é simples. O próximo exemplo é um pouco menos simples e contém deslocamento de cargas, ou seja, a fase de descarregamento.

Exemplo 2.2. (SALAVATIPOUR, 2003) *Em todo grafo planar simples $G = (V, E)$ com grau mínimo pelo menos três, existe um vértice de grau d incidente a uma face de tamanho l tal que $d + l \leq 8$.*

Demonstração. Chamamos uma incidência de face-vértice de *canto* (*corner*). Para todo vértice $v \in V$ com grau $d(v)$, atribuímos uma carga de $d(v) - 4$, e para cada face $f \in F$ de tamanho $|f|$, atribuímos uma carga de $|f| - 4$. Novamente, pela fórmula de Euler, a carga total é: $\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (|f| - 4) = 2|E| - 4|V| + 2|E| - 4|F| = 4(|E| - |V| - |F|) = -8$. Na fase de descarregamento, cada vértice v envia $\frac{d(v)-4}{d(v)}$ unidades de carga para cada canto que ele participa. Similarmente, cada face f envia $\frac{|f|-4}{|f|}$ unidades de carga para cada canto que pertence

a ela. Portanto, depois da fase de descarregamento, todos os vértices e faces possuem carga 0. Como a carga total era negativa, então existe um canto com carga negativa. Assuma que esse canto é formado pela incidência de um vértice v de grau $d(v) = d$ e a face f com $|f| = l$. A carga do canto é $\frac{d-4}{d} + \frac{l-4}{l} < 0$. Portanto, $2ld - 4l - 4d < 0$. Esse fato, junto com o fato de que cada face tem o tamanho pelo menos 3 (grafo simples) e que assumimos que o grau mínimo é pelo menos 3, implica que:

$$d < \frac{2l}{l-2} \leq 6 \text{ e } l < \frac{2d}{d-2} \leq 6.$$

Pela segunda inequação, temos que $l < 6$. Adicionando l em ambos os lados da primeira inequação, temos $d + l < \frac{l^2}{l-2}$, o que é no máximo 8 para $3 \leq l < 6$. □

Nessa seção, vimos a aplicação do método da descarga para grafos planares e utilizando a Fórmula de Euler. No Capítulo 5, utilizaremos o método da descarga em grades *king* que não são planares. Na próxima seção, abordaremos a classe de grafos planares e algumas outras classes de grafos.

2.3 Classes de grafos

Nesta seção, apresentamos classes de grafos que são sistematicamente objeto de estudos relacionados à códigos de identificação e que serão apresentadas no Capítulo 3. Quando identificamos estruturas em um grafo, como é o caso dos códigos de identificação, as principais aplicações são considerar os grafos como estruturas da vida real. Grafos podem modelar redes de computadores (cada computador é um vértice e cada aresta é uma conexão de rede), redes espaciais (cada vértice é uma local e cada aresta é uma estrada entre dois locais), redes sociais (cada vértice é um indivíduo e cada aresta é uma relação entre eles) ou moléculas (os vértices são átomos e as arestas são as ligações entre eles). Em geral, os grafos modelam qualquer situação onde nós temos um conjunto de elementos e uma relação binária entre eles.

2.3.1 Grades

Nesta tese, citamos três grades planares infinitas nomeadas: *grades hexagonais* (denotada por \mathcal{G}_H), *grades retangulares* (denotada por \mathcal{G}_S) e *grades triangulares* (denotada por \mathcal{G}_T). A *grade king* (denotada por \mathcal{G}_K) é a única dessas grades que não é planar.

O conjunto de vértices desses grafos infinitos é o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o conjunto de arestas é definido da seguinte forma (ver exemplos na Figura 2):

- $E(\mathcal{G}_S) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}\}$
- $E(\mathcal{G}_H) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, (-1)^{i+j+1}), (\pm 1, 0)\}, \text{ onde } (i, j) = u\}$
- $E(\mathcal{G}_T) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, 1), (-1, -1)\}\}$
- $E(\mathcal{G}_K) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, -1)\}\}$

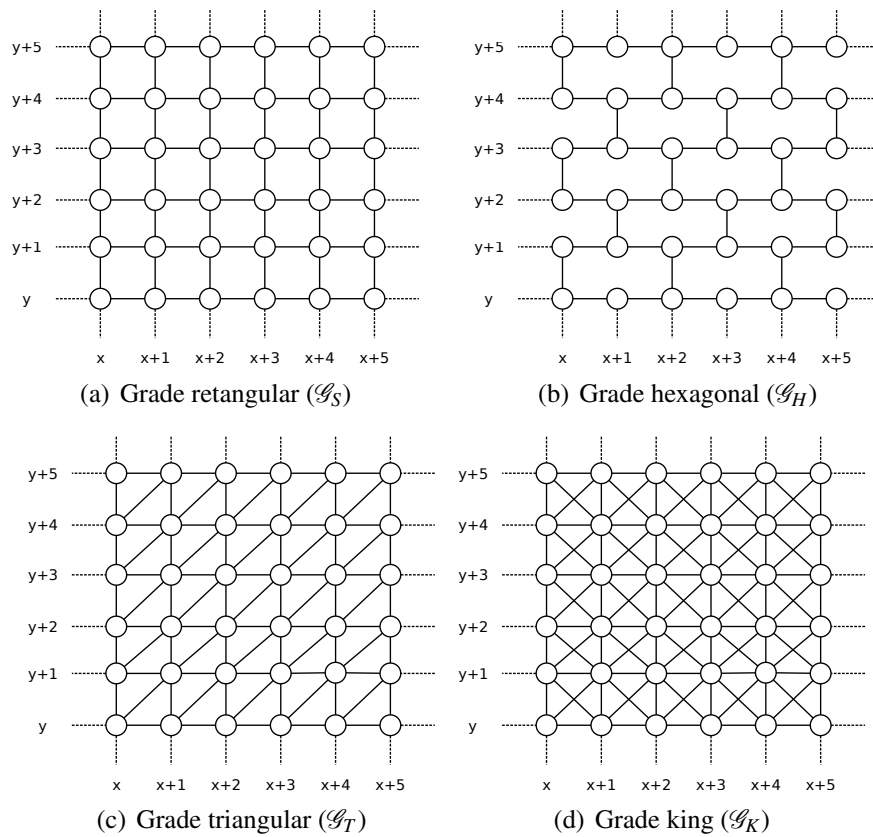


Figura 2: Exemplos de grades infinitas.

A grade *king* representa o grafo onde os vértices são os quadrados em um tabuleiro de xadrez infinito e as arestas representam os movimentos que o rei pode fazer nesse tabuleiro. Muitos estudos foram realizados em uma variação dessas grades infinitas: as grades infinitas com um número limitado de linhas. Denotamos por \mathcal{S}_k , a grade retangular com número limitado de $k \geq 1$ linhas; por \mathcal{T}_k , a grade triangular com número limitado de linhas; e por \mathcal{K}_k , a grade *king* com número limitado de linhas. O conjunto de vértices desses grafos é o conjunto $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \dots, k\}$ e o conjunto de arestas é definido da mesma forma como nas grades infinitas correspondentes.

2.3.2 Grafos planares

Essa classe de grafos foi definida na Subseção 2.2.2. Dois exemplos comuns de grafos que não podem ser imersos em um plano, extraídos do Teorema de Kuratowski, são os grafos K_5 e $K_{3,3}$ mostrados na Figura 3. Já na Figura 4, vemos o exemplo do grafo K_4 que pode ser desenhado sem que ocorra cruzamento de arestas.

2.3.3 Bipartidos

Uma *bipartição* de um grafo G é uma partição de dois conjuntos independentes disjuntos em G cuja união é $V(G)$. Um grafo é dito *bipartido* se possui uma bipartição. Temos

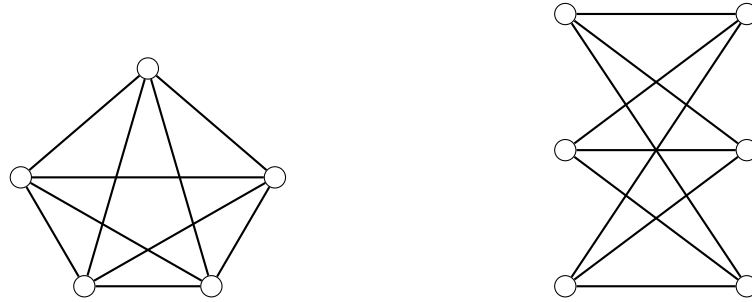


Figura 3: Grafo K_5 e grafo $K_{3,3}$: dois grafos não planares.

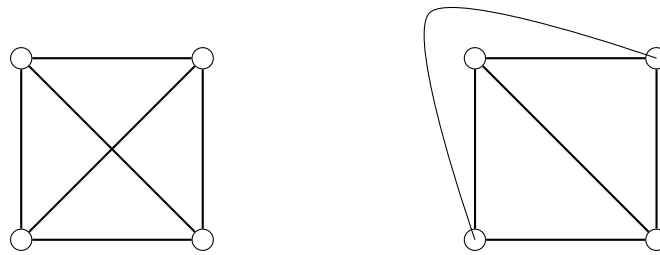


Figura 4: Grafo K_4 : um grafo que pode ser desenhado sem cruzamento de arestas.

uma caracterização dos grafos bipartidos no Teorema 2.2.

Teorema 2.2. (KÖNIG, 1936) *Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclo de comprimento ímpar.*

Uma *estrela* é um grafo bipartido completo $K_{1,n}$ (ver a Figura 5 (a)). Na Figura 5 (b), temos um outro exemplo de um grafo bipartido.

As Subseções 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 e 2.3.7 foram fundamentadas no livro GOLUMBIC (2004).

2.3.4 Grafos cordais ou triangularizados

Um grafo G é dito *cordal* ou *triangularizado* se todo ciclo de comprimento estritamente maior que 3 possui uma corda, ou seja, uma aresta entre dois vértices não consecutivos

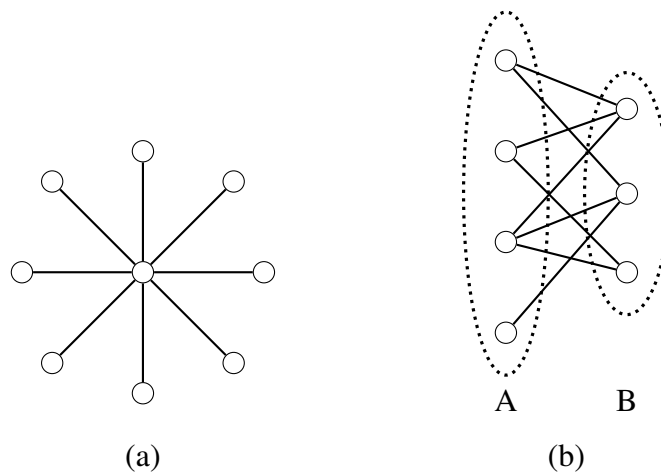


Figura 5: (a) Grafo estrela; (b) Partições A e B de um grafo bipartido.

do ciclo. Equivalentemente, G não contém um subgrafo induzido isomorfo a um ciclo com n vértices para $n > 3$.

Um vértice x de G é chamado *simplicial* se a sua vizinhança (o conjunto $N(x)$) induz um grafo completo de G , isto é, $N(x)$ é uma clique. Uma *ordem de eliminação simplicial* é uma ordem v_n, \dots, v_1 para eliminação de vértices cada vértice v_i é um vértice simplicial de um grafo remanescente induzido por $\{v_1, \dots, v_i\}$. Algumas caracterizações dos grafos cordais são encontradas no Lema 2.1 e no Teorema 2.3. Na Figura 6, encontramos um exemplo de grafo cordal.

Lema 2.1. (DIRAC, 1961) *Todo grafo triangularizado $G = (V, E)$ tem um vértice simplicial. Além disso, se G não é uma clique, então existem dois vértices simpliciais não adjacentes.*

Teorema 2.3. (DIRAC, 1961) *Um grafo G tem um ordem de eliminação simplicial se e somente se G é cordal.*

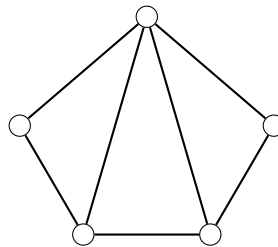


Figura 6: Exemplo de grafo cordal.

2.3.5 Grafos Split

Um grafo $G = (V, E)$ é definido ser *split* se existe uma partição $V = S \cup K$ de seus vértices em um conjunto independente S e uma clique K . Não existe restrição nas arestas entre os vértices de S e os vértices de K . Encontramos caracterizações de grafos split no Teorema 2.4 e no Teorema 2.5. Um exemplo de um grafo split pode ser visto na Figura 7.

Teorema 2.4. *Um grafo G é um grafo split se, e somente se, seu complemento \bar{G} é um grafo split.*

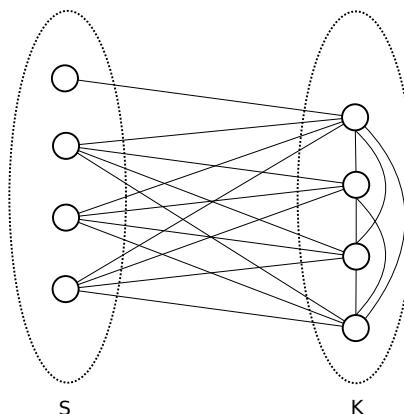


Figura 7: Exemplo de grafo split com conjunto independente S e clique K .

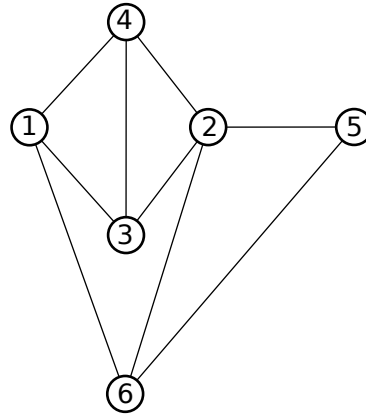


Figura 8: O grafo de permutação $G[4, 3, 6, 1, 5, 2]$.

Teorema 2.5. (FOLDES e HAMMER, 1976) *Seja G um grafo. As seguintes condições são equivalentes:*

1. G é um grafo split
2. G e \overline{G} são grafos triangularizados
3. G não contém subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$, C_4 ou C_5

2.3.6 Grafos de Permutação

Suponha que π é uma permutação dos números $1, 2, \dots, n$. Vamos pensar em π como uma sequência $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ então, por exemplo, a permutação $\pi = [4, 3, 6, 1, 5, 2]$ tem $\pi_1 = 4$, $\pi_2 = 3$, etc. Denota-se por π_i^{-1} a posição na sequência onde o número i pode ser encontrado. Em nosso exemplo, $\pi_1^{-1} = 4$ e $\pi_3^{-1} = 2$.

Podemos construir um grafo $G[\pi]$ a partir de π da seguinte maneira: $G[\pi]$ tem vértices numerados de 1 até n ; dois vértices são conectados por uma aresta se o maior dos seus números correspondentes está à esquerda do menor em π . $G[\pi]$ é algumas vezes chamado de *grafo de inversão* de π .

Se π é uma permutação dos números $1, 2, \dots, n$, então o grafo $G[\pi] = (V, E)$ é definido como segue:

$$V = \{1, 2, \dots, n\} \text{ e}$$

$$ij \in E \leftrightarrow (i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0$$

Um grafo G é chamado de *grafo de permutação* se existe uma permutação π tal que $G \cong G[\pi]$.

2.3.7 Grafos de Intervalo

Em 1957, HAJÓS (1957) apresentou o seguinte problema: Dado um número finito de intervalos em uma linha reta, um grafo associado com esse conjunto de intervalos pode ser

construído da seguinte maneira:

- cada intervalo corresponde a um vértice; e
- dois vértices são conectados por uma aresta se e somente se os intervalos correspondentes se sobrepõem pelo menos parcialmente

A Proposição 2.1, o Teorema 2.6 e o Teorema 2.7 trazem algumas caracterizações dos grafos de intervalo. Um exemplo de grafo de intervalo pode ser visto na Figura 9.

Proposição 2.1. (HAJÓS, 1957) *Um grafo de intervalo satisfaz a propriedade de grafo triangularizado, ou seja, todo ciclo com comprimento estritamente maior que 3 possui uma corda.*

Teorema 2.6. (GILMORE e HOFFMAN, 1964) *Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) G é um grafo de intervalo
- (ii) G não contém um ciclo de tamanho 4 sem cordas e seu complemento \overline{G} é um grafo de comparabilidade
- (iii) As cliques maximais de G podem ser linearmente ordenadas tal que, para todo vértice x de G , as cliques maximais contendo x ocorrem consecutivamente

Um grafo não direcionado $G = (V, E)$ é um *grafo de comparabilidade* se existe uma orientação F das arestas de G satisfazendo

$$F \cap F^{-1} = \emptyset, F \cup F^{-1} = E, F^2 \subseteq F,$$

onde $F^2 = \{ac \mid ab, bc \in F \text{ para algum vértice } b\}$. A relação F é uma ordem parcial estrita de V , cuja relação de comparabilidade é exatamente E , e F é chamada uma *orientação transitiva* de G . Grafos de comparabilidade são também conhecidos como *grafos orientáveis transitivamente* ou *grafos ordenados parcialmente*.

Teorema 2.7. (LEKKEIKERKER e BOLAND, 1962) *Um grafo G é um grafo de intervalo se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) G é um grafo triangularizado, e
- (ii) quaisquer três vértices de G podem ser ordenados de forma que todo caminho do primeiro vértice para o terceiro vértice possui vértices na vizinhança fechada do segundo vértice.

2.4 Complexidade computacional

Nesta seção, introduziremos noções básicas de teoria da complexidade. Maiores detalhes podem ser encontrados nos livros ARORA e BARAK (2009), AUSIELLO *et al.* (2012), CORMEN *et al.* (2009), PAPADIMITRIOU (2003) e SIPSER (2012).

2.4.1 Algoritmos e problemas computacionais

Informalmente, um *algoritmo* é qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como *entrada* e produz algum valor ou con-

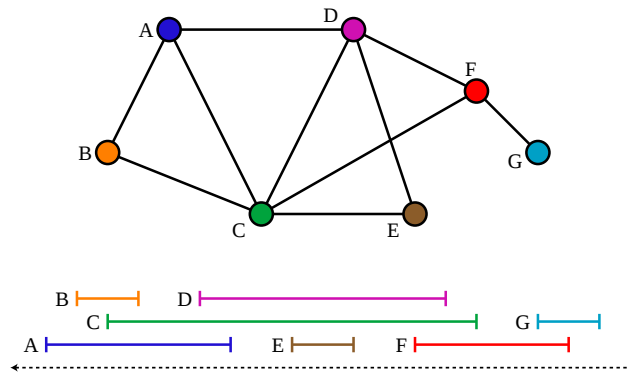


Figura 9: Grafo de intervalo.

Fonte: Wikipedia.

junto de valores como *saída*. Portanto, um algoritmo é uma sequência de etapas computacionais que transformam a entrada na saída.

Também podemos considerar um algoritmo como uma ferramenta para resolver um *problema computacional* bem especificado. O enunciado do problema especifica em termos gerais a relação desejada entre a entrada e a saída. O algoritmo descreve um procedimento computacional específico para se conseguir essa relação entre a entrada e a saída.

Poderia ser necessário ordenar uma sequência de números em uma ordem não decrescente. Por exemplo, dada a sequência de entrada $\langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$, um algoritmo de ordenação devolve como saída a sequência $\langle 26, 31, 41, 41, 58, 59 \rangle$. Tal sequência de entrada é denominada *instância* do problema de ordenação. Em geral, uma *instância de um problema* consiste na entrada (que satisfaz quaisquer restrições impostas no enunciado do problema) necessária para calcular uma solução para o problema.

Diz-se que um algoritmo é *correto* se, para toda instância de entrada, ele parar com a saída correta. Dizemos que um algoritmo *resolve* um problema computacional dado.

O tempo despendido por um algoritmo depende da entrada. Por exemplo, ordenar mil números demora mais tempo que ordenar três números. Além disso, um algoritmo que ordena número pode demorar quantidade de tempos diferentes para ordenar duas sequências de entrada do mesmo tamanho. Em geral, o tempo gasto por um algoritmo cresce com o tamanho da entrada.

A melhor noção para *tamanho da entrada* depende do problema que está sendo estudado. Por exemplo, se a entrada para um algoritmo é um grafo, o tamanho da entrada pode ser descrito pelos números de vértices e arestas no grafo.

O *tempo de execução* de um algoritmo em uma determinada entrada é o número de operações primitivas ou “passos” executados. O *tempo de execução do pior caso* é o tempo de execução mais longo para qualquer entrada de tamanho n .

O tempo de execução de um algoritmo em uma determinada entrada é a soma dos tempos de execução para cada instrução executada. Desta forma, o tempo de execução de um algoritmo pode ser expresso por uma função. A *taxa de crescimento* ou *ordem de crescimento*

do tempo de execução de um algoritmo é o termo (desprezando-se as constantes) de mais alta ordem na fórmula que representa o tempo de execução do algoritmo. Em geral, consideramos que um algoritmo é mais *eficiente* que outro se seu tempo de execução do pior caso apresentar uma ordem de crescimento mais baixa.

Quando observamos tamanhos de entrada suficientemente grandes para tornar relevante apenas a ordem de crescimento do tempo de execução, estamos estudando a *eficiência assintótica* dos algoritmos. A notação O limita superiormente uma função de forma assintótica.

O campo da complexidade computacional tem como objetivo classificar *problemas computacionais* de acordo com o quão eficiente eles podem ser resolvidos. Consideraremos dois tipos de problemas: *problemas de decisão* e *problemas de otimização*.

2.4.2 Problemas de decisão e classes relacionadas

Problemas de decisão são problemas cuja saída é simplesmente “sim” ou “não”. Por exemplo, seja CAMINHO o seguinte problema de decisão: dado um grafo direcionado G , vértices u e v , e um inteiro k , existe um caminho de u para v com no máximo k arestas? Uma resposta para esse problema é “sim” ou “não”. Para um problema de decisão \mathcal{P} , uma *instância “SIM”* é uma instância para qual a resposta do problema é “sim”.

A classe de complexidade P consiste nos problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Mais especificamente, são problemas que podem ser resolvidos em tempo $O(n^k)$, para alguma constante k independente de n , onde n é o tamanho da entrada do problema.

A classe NP consiste nos problemas de decisão que são “verificáveis” em tempo polinomial. Isto é, se, de alguma forma, tivéssemos um “certificado” de uma solução, então poderíamos verificar se esse certificado é correto em tempo polinomial para tamanho da entrada do problema. Por exemplo, para o problema CAMINHO, um certificado seria um conjunto de arestas de G . Podemos verificar em tempo polinomial se esse conjunto de arestas compõe um caminho de u para v e se possui cardinalidade no máximo k . Qualquer problema em P está também em NP , pois se um problema está em P , então podemos resolvê-lo em tempo polinomial sem sequer ser fornecido um certificado.

Introduziremos agora o conceito de *redução em tempo polinomial*. Dados dois problemas de decisão \mathcal{P} e \mathcal{Q} , uma redução de \mathcal{P} para \mathcal{Q} em tempo polinomial é uma função f computável em tempo polinomial que transforma qualquer instância $I_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} em uma instância $I_{\mathcal{Q}} = f(I_{\mathcal{P}})$ de \mathcal{Q} tal que $I_{\mathcal{P}}$ é uma instância “SIM” em \mathcal{P} se e somente se $I_{\mathcal{Q}}$ é uma instância “SIM” de \mathcal{Q} . A metodologia das reduções foi introduzida por KARP (1972) e demonstrou que uma grande variedade de problemas são NP -Completos. Nesse artigo de Karp, estão incluídas as provas originais da NP -Compleitude dos famosos problemas Clique, Cobertura de Vértices e Ciclo Hamiltoniano.

Um dos maiores e mais famosos problemas em aberto em complexidade computacional, introduzido por COOK (1971), é determinar se $P = NP$. Um problema de decisão \mathcal{P} é

NP -Completo se ele está em NP e \mathcal{P} é NP -difícil, isto é, cada problema em NP pode ser reduzido em tempo polinomial para \mathcal{P} . Uma consequência disso é que existe algoritmo polinomial para um problema NP -Completo se e somente se $P = NP$.

2.4.3 Problemas de otimização, algoritmos aproximativos e classes relacionadas

Muitos problemas interessantes são *problemas de otimização*, para os quais cada solução possível (isto é, “válida”) tem um valor associado e dentre as quais desejamos encontrar uma solução viável com o melhor valor. Por exemplo, em um problema que denominamos MENOR CAMINHO, temos um grafo não direcionado G , arestas u e v , e desejamos encontrar um caminho de u para v que utiliza o menor número de arestas. Cada caminho de u para v é uma solução viável. Um menor caminho de u para v é uma melhor solução ou solução ótima.

O conjunto de instância de \mathcal{P} é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ e o conjunto de soluções de uma instância $I_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} é denotada $\mathcal{SOL}(I_{\mathcal{P}})$; o tamanho de uma solução ótima para $I_{\mathcal{P}}$ é denotada $OPT(I_{\mathcal{P}})$.

De forma similar aos problemas de decisão, os problemas de otimização para os quais o valor da solução é computável em tempo polinomial e os problemas de otimização que podem ser verificados em tempo polinomial pertencem à classe NPO . Se, além disso, um problema de otimização pode ser resolvido exatamente por um algoritmo de tempo polinomial (ou seja, sempre retorna a solução ótima), esse problema pertence à classe PO .

O interesse em estudar problemas de otimização em vez de problemas de decisão vem da possibilidade de julgar a qualidade da solução. Um algoritmo de tempo polinomial $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ para um problema de otimização \mathcal{P} é dito um *algoritmo α -aproximativo* para \mathcal{P} se, dada uma instância $I_{\mathcal{P}}$, ela retorna uma solução $SOL_{I_{\mathcal{P}}}$ cujo valor é no máximo $\alpha \cdot OPT(I_{\mathcal{P}})$ se \mathcal{P} é um problema de minimização, e pelo menos $OPT(I_{\mathcal{P}})/\alpha$ se \mathcal{P} é um problema de maximização. O valor α é o *fator de aproximação* de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Um problema de otimização é dito *α -aproximável* se ele admite um algoritmo α -aproximativo.

Utilizando esse formalismo, agora podemos classificar problemas de otimização de acordo com o tipo de fator de aproximação com os quais eles podem ser aproximados. Por exemplo, a classe APX é a classe dos problemas de otimização que são c -aproximáveis por alguma constante c . De forma mais geral, para uma família \mathcal{F} de funções de \mathbb{N} para \mathbb{N} , podemos definir a classe \mathcal{F} - APX como a classe de problemas de otimização que possuem um algoritmo $f(|I|)$ -aproximativo, onde I é uma instância de \mathcal{P} e $f \in \mathcal{F}$.

Com respeito a essa definição, algumas das principais classes de complexidade são: APX , \log - APX e poly - APX . Outra classe interessante é a classe $PTAS$ de problemas de otimização \mathcal{P} que tem um *esquema de aproximação em tempo polinomial*, isto é, um algoritmo aproximativo tomando uma instância $I_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} e uma constante fixa $\varepsilon > 0$ como entrada, e que fornece uma $(1 + \varepsilon)$ -aproximação de $I_{\mathcal{P}}$ em tempo polinomial em $|I_{\mathcal{P}}|$. Sua subclasse $FPTAS$ contém problemas que possuem *esquema de aproximação totalmente polinomial* onde a dependência em ambos $I_{\mathcal{P}}$ e $1/\varepsilon$ na complexidade do tempo é polinomial, isto é, o tempo de

execução pode ser da forma $O((\frac{1}{\epsilon})^{c_1} \cdot |I_{\mathcal{P}}|^{c_2})$ para constantes c_1 e c_2 .

Temos a seguinte sequência de inclusões entre as classes de complexidade dos problemas de otimização:

$$PO \subseteq FPTAS \subseteq PTAS \subseteq APX \subseteq \log\text{-}APX \subseteq \text{poly}\text{-}APX \subseteq NPO$$

Dada uma classe de complexidade C de problemas de otimização e um tipo de redução, um problema de otimização \mathcal{P} é dito ser C -difícil com respeito a esse tipo de redução se cada problema em C tem uma redução do dado tipo para \mathcal{P} . Se, além disso, \mathcal{P} pertence a C , então \mathcal{P} é dito C -completo.

3 O PROBLEMA DO CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar o conceito de código de identificação, visto no Capítulo 1, de modo mais detalhado. Destacaremos alguns resultados de densidade mínima de códigos de identificação e complexidade computacional relacionados ao problema presentes na literatura. Mostraremos também outros problemas da literatura que são relacionados ao problema de código de identificação. Este capítulo é fortemente fundamentado na Tese de FOUCAUD (2012).

3.1 Introdução

A noção de Código de Identificação é exatamente a combinação de duas outras noções: *conjuntos dominantes* e *códigos de separação*.

Definição 3.1. *Um conjunto dominante de um grafo G é um subconjunto \mathcal{D} de vértices de G tal que para cada vértice $v \in V(G)$, $\mathcal{D} \cap N[v] \neq \emptyset$.*

Um exemplo de conjunto dominante é mostrado na Figura 10(a). Um vértice x de \mathcal{D} domina um vértice v se $x = v$ ou $x \in N(v)$. Este problema e muitas de suas variantes tem sido extensivamente estudadas ao longo dos anos. Dois livros sobre este tópico são: HAYNES, HEDETNIEMI, e SLATER (1998) e HAYNES (2017).

Um código de separação de um grafo é um subconjunto de vértices que permite diferenciar cada um dos vértices de todos os outros usando as suas vizinhanças dentro do código.

Definição 3.2. *Um código de separação é um subconjunto \mathcal{C} de vértices de G tal que para cada par u e v de vértices distintos de G , temos que $N[u] \cap \mathcal{C} = C[u] \neq N[v] \cap \mathcal{C} = C[v]$.*

Um exemplo de um grafo com um código de separação é representado na Figura 10(b), onde os vértices são rotulados e os conjuntos $C[x]$ são indicados. Se existe um vértice $x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in N[u]$ mas $x \notin N[v]$ ou $x \notin N[u]$ mas $x \in N[v]$, então dizemos que x separa o par u, v .

Definição 3.3. *Dado um grafo G , um subconjunto \mathcal{C} de $V(G)$ é um código de identificação de G se \mathcal{C} é um conjunto dominante de G e também é um código de separação de G .*

Um exemplo de código de identificação é representado na Figura 10(c), onde os vértices são rotulados e os conjuntos $C[x]$ estão indicados para cada vértice $x \in V(G)$. Note que o conjunto dominante da Figura 10(a) e o código de separação da Figura 10(b) não são códigos de identificação pois no primeiro caso, os vértices d e f não são separados e no segundo caso o vértice h não é dominado.

Para os grafos direcionados, a definição de Código de Identificação é um pouco modificada: substituí-se $N[u]$ por $N^+(u) \cup \{u\}$. Assim, um vértice v de um grafo direcionado é identificado pela sua vizinhança de saída e pelo próprio vértice v .

Seguem algumas notações e definições que utilizaremos sobretudo nos capítulos 4 e 5.

Definição 3.4. *Dado um código de identificação C de G , denotamos por:*

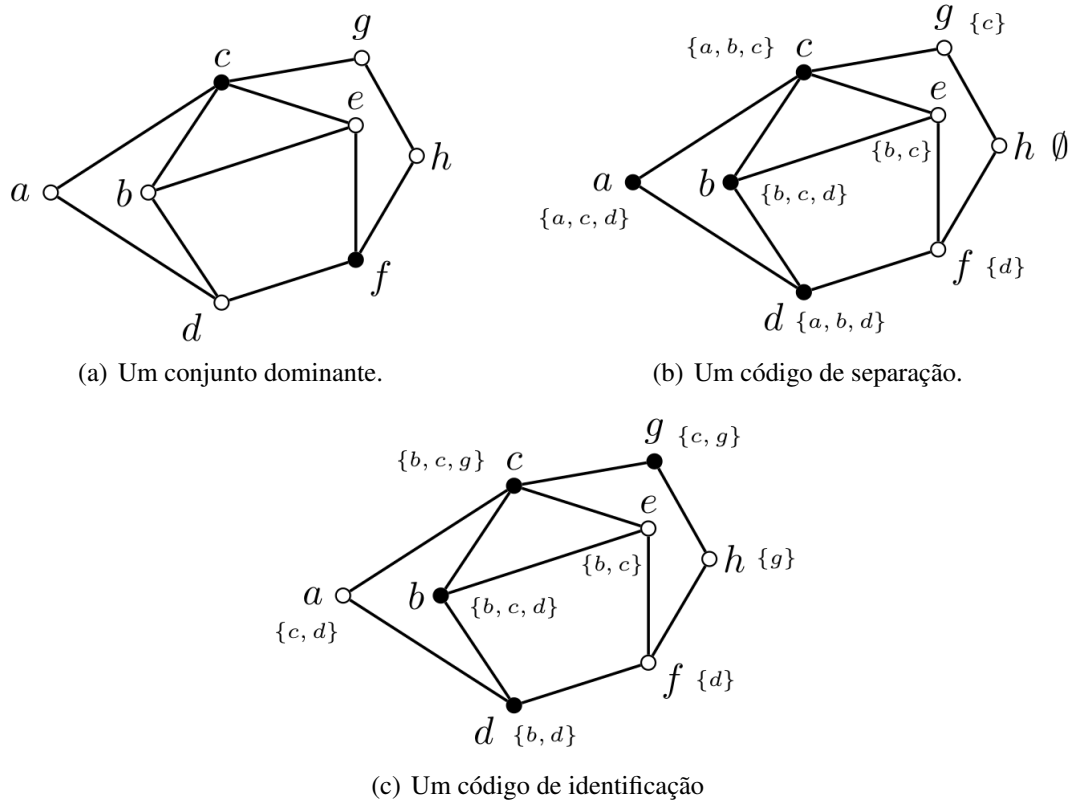


Figura 10: Os vértices pretos nos grafos representam um conjunto dominante em (a); um código de separação em (b) e um código de identificação em (c).

Fonte: FOUCAUD (2012).

- U , o conjunto $V(G) \setminus C$;
- X_i (respectivamente $X_{\geq i}$, $X_{\leq i}$), o conjunto de vértices $x \in X$ tal que $|C[x]| = i$ (respectivamente $|C[x]| \geq i$, $|C[x]| \leq i$), para qualquer conjunto $X \subseteq V(G)$;
- U_i (respectivamente $U_{\geq i}$, $U_{\leq i}$), o conjunto de vértices v que não estão em C e que $|C[v]| = i$ (respectivamente $|C[v]| \geq i$, $|C[v]| \leq i$);
- C_i (respectivamente $C_{\geq i}$, $C_{\leq i}$), o conjunto dos vértices v que estão em C e que $|C[v]| = i$ (respectivamente $|C[v]| \geq i$, $|C[v]| \leq i$).

Um X -vértice v é um vértice v que pertence a um conjunto X e um X -vizinho u de um vértice v é um vértice $u \in X$ que é vizinho de v . Um vértice de C é *isolado* se nenhum de seus vizinhos está em C . Se $v \in C$ e v é isolado, então nenhum vizinho u de v está em U_1 , pois, caso contrário, u e v possuem o mesmo identificador $\{v\}$. Dizemos que um vértice v está *na linha i* se $v = (x, i)$ para algum $x \in \mathbb{Z}$.

Para encerrar a seção, seguem outras notações que serão bastante utilizadas. Em qualquer passo do procedimento de descarga, denotamos por $\text{chrg}(v)$ a carga de um vértice v . Dizemos que um vértice v está *satisfeito* se $\text{chrg}(v)$ é pelo menos um valor previamente especificado p_v de carga mínima. Seja $\text{exc}(v) = \text{chrg}(v) - p_v$ a quantidade de carga que v pode transferir para outros vértices. Dado um conjunto X de vértices, seja $\text{chrg}(X) = \sum_{v \in X} \text{chrg}(v)$ e $\text{exc}(X) = \sum_{v \in X} \text{exc}(v)$. Seja $N(X) = \cup_{v \in X} N(v) \setminus X$ os vizinhos dos vértices de X que não estão

em X . Seja $\text{uns}(X)$ o número de vizinhos insatisfeitos de X , isto é, os vértices não satisfeitos de $N(X)$.

3.2 Problemas de identificação relacionados a códigos de identificação

Nesta subseção, apresentamos alguns problemas relacionados à código de identificação. Alguns destes conceitos são generalizações ou restrições de códigos de identificação.

A noção de um código de identificação de um grafo G foi generalizada para a noção de um r -código de identificação. Dado um inteiro $r \geq 1$, um r -código de identificação C de G é um subconjunto de $V(G)$ tal que para todo vértice x , existe um vértice de C a uma distância no máximo r de x , e para cada par de vértices distintos x, y , existe um vértice de C que está a uma distância no máximo r de exatamente um entre x e y . Em outras palavras, todos os vértices são dominados e separados a distância r .

Esta noção foi subsequentemente generalizada para uma $(r, \leq l)$ -código de identificação, na qual todos os conjuntos de vértices de cardinalidade no máximo l são dominados e separados uns dos outros a distância r . Com relação a essas noções, alguns trabalhos presentes na literatura são: HONKALA, LAIHONEN, e RANTO (2001), CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN (2003), MONCEL (2005), FRIEZE *et al.* (2007) e AUGER *et al.* (2010).

O problema de Cobertura de Teste (*Test Cover Problem*) generaliza os códigos de separação. Seja \mathcal{L} o conjunto de elementos (“indivíduos”) e \mathcal{A} um conjunto de subconjuntos de \mathcal{L} (“atributos”). Dizemos que um atributo A de \mathcal{A} *separa* dois elementos distintos i, i' de \mathcal{L} se A contém exatamente um entre i e i' . Uma cobertura de teste de um sistema de conjunto $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ é o conjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ tal que cada par de elementos distintos de \mathcal{L} é separado por algum elemento de \mathcal{T} . Uma cobertura de teste só pode existir se todos os pares de indivíduos podem ser separados. Quando isso ocorre, dizemos que o sistema de conjunto $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ é \mathcal{L} -*identificável*. Algumas referências para este problema são: GARY e JOHNSON (1979) e DE BONTRIDDER *et al.* (2003) sob o nome de *coleção de teste* (*test collection*) e MORET e SHAPIRO (1985) sob o nome de *conjunto de teste* (*set test*).

Dado um sistema de conjunto $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ que seja \mathcal{L} -identificável, um subconjunto \mathcal{C} de \mathcal{A} é um *código de discriminação* de $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ se \mathcal{C} é uma cobertura de teste de $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ e cada elemento de \mathcal{L} pertence a algum conjunto de \mathcal{C} . A noção de um código de discriminação foi introduzido em CHARBIT *et al.* (2008) e posteriormente estudado em CHARON *et al.* (2010).

Uma outra variação da noção de código de identificação consiste em considerar a separação e a dominação com respeito a uma vizinhança aberta em vez de fechada. Esta noção foi estudada primeiramente em HONKALA, LAIHONEN, e RANTO (2002) sob o nome de *códigos fortemente identificáveis* (*strongly identifying codes*), e posteriormente foi estudada sobre o nome de *conjuntos dominantes-localizadores em vizinhança aberta* (*open neighborhood locating-dominating sets*) em SCHEINERMAN e WEST (1983), SEO e SLATER (2011), SEO e SLATER (2017) e SAVICA, MAKSIMOVICB, e BOGDANOVICC (2018) e sob o nome de

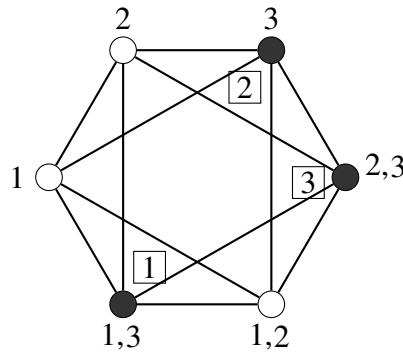


Figura 11: Exemplo de um grafo com sistema de observação de tamanho mínimo.

Fonte: AUGER *et al.* (2013).

códigos de identificação abertos (identifying open codes) em HENNING e YEO (2012a).

Podemos ver uma relação com a noção clássica de *conjunto dominante total (total dominating set)*, onde a dominação na vizinhança fechada é substituída pela dominação na vizinhança aberta (ver, por exemplo, HAYNES, HEDETNIEMI, e SLATER (1998)).

Uma outra noção relacionada à identificação em vizinhança aberta é o *conjunto dominante-localizador (locating-dominating set)*. Um conjunto D é considerado um conjunto dominante-localizador se D é um conjunto dominante tal que para todo vértice v que não está em D , temos que o $N(v) \cap D$ é único. Este conceito foi introduzido em SLATER (1987) e estudado em COLBOURN, SLATER, e STEWART (1987), FINBOW e HARTNELL (1988), SLATER (1995), FOUCAUD *et al.* (2016), FAZIL *et al.* (2016), SWEIGART e KINCAID (2018), Junnila, Laihonen, e Lehtila (2018) e HUDRY e LOBSTEIN (2019b).

Um *Sistema de Observação* em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, onde $w_i = (v_i, Z_i)$, $v_i \in V$ e Z_i é um subconjunto da vizinhança fechada de v_i tal que os conjuntos $L_w(v) = \{w_i : v \in Z_i\}$ são não vazios e distintos para todo $v \in V$. Para um elemento $w_i = (v_i, Z_i) \in W$, denominamos v_i como *observador* e Z_i como *zona de observação* de v_i . Esse conceito foi introduzido em AUGER *et al.* (2013) e posteriormente estudado em AUGER *et al.* (2014) e em ROOZBAYANI e MAIMANI (2017).

Na Figura 11, temos um exemplo de um Sistema de Observação. Os observadores são os vértices pretos. O número de cada identificador está dentro de uma caixa. Do lado externo de cada vértice estão rotulados os observadores de cada vértice. No Problema do Código de Identificação para um grafo G , quando um vértice $v \in V(G)$ é um identificador, v identifica todos os vértices da sua vizinhança fechada $N[v]$. No Problema de Sistema de Observação, um vértice observador $u \in V(G)$ observa apenas os vértices de sua zona de observação $Z_u \subseteq N[u]$. Assim, não necessariamente um observador u possui todos vértices de sua vizinhança fechada $N[u]$ na sua zona de observação. Quando temos que a zona de observação $Z_u = N[u]$ para todo observador u , então esse sistema de observação também é um código de identificação. Dessa forma, o Problema do Sistema de Observação generaliza o Problema do Código de Identificação.

A noção de *cobertura de vértices de identificação* (*identifying vertex cover*) de um grafo G consiste em um subconjunto de vértices \mathcal{C} que é uma cobertura de vértices de G e tal que $e \cap \mathcal{C} \neq e' \cap \mathcal{C}$ para cada par de arestas distintas e e e' de G . Esta noção foi estudada em HENNING e YEO (2012b). O conceito de *código de identificação por arestas* (*edge-identifying codes*) foi introduzido e estudado em FOUCAUD *et al.* (2013).

Um dos conceitos mais antigos relacionados a código de identificação em grafos é o conceito de *conjunto de resolução*, introduzido independentemente em SLATER (1975) e HARARY e MELTER (1976) sob o nome de *conjunto de localização* (*locating set*). Em um grafo G , um subconjunto \mathcal{C} de vértices de G é um conjunto de resolução se para cada par x e y de vértices distintos de G existir um elemento c de \mathcal{C} para o qual as distâncias de c para x e y são distintas. A menor cardinalidade de um conjunto de resolução de um grafo é a sua *dimensão métrica* (*metric dimension*). Resultados sobre este tópicos foram pesquisados em CHARTRAND *et al.* (2000), NING, LU, e GUO (2017), FOUCAUD *et al.* (2017a), FOUCAUD *et al.* (2017b), HAKANEN e LAIHONEN (2018) e em BEAUDOU *et al.* (2018).

Muitas noções de identificação de vértices adjacentes usando cores são estudadas. Em ESPERET *et al.* (2012), a noção de *lid-coloração* (*locally identifying coloring*) foi introduzida. Trata-se de uma coloração c própria dos vértices de um grafo G onde cada par de vértices u e v adjacentes não são gêmeos, ou seja, os conjuntos $\{c(x) | x \in N[u]\}$ e $\{c(x) | x \in N[v]\}$ são distintos. Posteriormente, esta noção foi estudada em FOUCAUD *et al.* (2012), AÏDER, GRAVIER, e SLIMANI (2016) e em MARTINS e SAMPAIO (2018).

A *coloração localizadora* (*locating coloring*) é uma coloração própria onde para cada par de vértices adjacentes u e v , existe uma classe de cor C da qual membros c_u, c_v , dentre todos os vértices de \mathcal{C} , são os mais próximos de u e v respectivamente, tem a propriedade que $d(u, c_u) \neq d(v, c_v)$ (CHARTRAND *et al.*, 2002).

3.3 Alguns resultados sobre códigos de identificação

Seja G um grafo e seja $u \in V(G)$. Dado um inteiro $r \geq 1$, seja $N_{\leq r}(u)$ o conjunto dos vértices de G que estão a distância no máximo r de u . Por exemplo, $N_{\leq 1}(u) = N[u]$. Agora, definimos formalmente o conceito de r -código de identificação.

Definição 3.5. *Dado um grafo G e um inteiro $r \geq 1$, um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um r -código de identificação se:*

- (i) *para todo $v \in V(G)$, $N_{\leq r}[v] \cap C \neq \emptyset$, e*
- (ii) *para todo $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, $N_{\leq r}[u] \cap C \neq N_{\leq r}[v] \cap C$.*

Em 2005 provou-se, a grosso modo, que para qualquer k existem grafos que admitem um r -código de identificação de cardinalidade k (CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN, 2005).

Teorema 3.1. (CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN, 2005) *Para todo inteiro $r \geq 1$ e inteiro n suficientemente grande com relação a r , temos que para todo inteiro k no intervalo $[\lceil \log_2(n+1) \rceil, n -$*

1], existe um grafo G com um r -código de identificação de cardinalidade k .

Em seguida, apresentamos um limitante inferior para a cardinalidade de um código de identificação para qualquer grafo que admita um código de identificação.

Teorema 3.2. (KARPOVSKY, CHAKRABARTY, e LEVITIN, 1998) *Se C é um código de identificação de um grafo G , então*

$$|C| \geq \lceil \log_2(|V(G)| + 1) \rceil.$$

Demonstração. Note que o número de subconjuntos de C diferentes de vazio é $2^{|C|} - 1$. Como cada vértice de G precisa ser identificado por um subconjunto não vazio de C , temos que $2^{|C|} - 1 \geq |V(G)|$. \square

Em 2007, provou-se um limitante superior geral para a cardinalidade de um código de identificação mínimo em um grafo conexo.

Teorema 3.3. (CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN, 2007) *Se G é um grafo conexo com n vértices que admite um código de identificação, então G admite um código de identificação de cardinalidade $n - 1$.*

Existem grafos conexos que requerem $n - 1$ vértices para o código, por exemplo, os grafos estrela, que são grafos com conjunto de vértices $\{u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $\{uv_1, uv_2, \dots, uv_{n-1}\}$. Não é difícil checar que qualquer código de identificação neste tipo de grafo requer pelo menos $n - 1$ vértices. Em 2011, todos os grafos cujo código de identificação mínimo tem cardinalidade $n - 1$ foram caracterizados em FOUCAUD *et al.* (2011).

Definição 3.6. *Observe que quando $r = 1$, utilizamos o termo **código de identificação** ao invés de 1-código de identificação. Para qualquer $r > 1$, nos referiremos explicitamente por **r -código de identificação**.*

Quando estudamos grafos infinitos, qualquer código de identificação relacionado a eles é infinito. O problema de otimização associado ao código de identificação de um grafo G é encontrar o código de identificação C de G com menor densidade. A densidade de um código de identificação C em um grafo finito G é $|C|/|V(G)|$. Abaixo apresentamos a definição de densidade de um código de identificação para grafos finitos ou infinitos com grau máximo limitado.

Definição 3.7. *Sejam G um grafo e r um inteiro qualquer não-negativo. Para qualquer código de identificação $C \subseteq V(G)$, a densidade de C em G , denotada por $d(C, G)$, é definida por*

$$d(C, G) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{|C \cap N_r(v_0)|}{|N_r(v_0)|},$$

onde v_0 é um vértice arbitrário em G . A densidade mínima de um código de identificação em G é denotada por $d^(G)$. Quando estamos utilizando o conceito de r -código de identificação e r não é necessariamente igual a 1, então denotamos por $d_r^*(G)$ a densidade mínima de um r -código de identificação em G .*

Observe que se G é finito, então $d^*(G) = |C^*|/|V(G)|$, onde C^* é um código de

identificação de cardinalidade mínima de G . O teorema abaixo fornece um limitante inferior para a densidade de r -códigos de identificação.

Teorema 3.4. (KARPOVSKY, CHAKRABARTY, e LEVITIN, 1998) Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, temos que

$$d_r^*(G) \geq \frac{2}{|N_{\leq r}(v)| + 1}.$$

Em particular, temos que $d_1^*(G) \geq 2/(\Delta(G) + 2)$. Se G é d -regular, ou seja, todos os vértices do grafo possuem grau igual a d , então a densidade de um código de identificação ($r = 1$) deve ser $d^*(G) = d_1^*(G) \geq 2/(d + 2)$. Com isso, aplicando o Teorema 3.4 às grades definidas na Subseção 2.3.1, temos que:

$$d^*(\mathcal{G}_T) \geq \frac{1}{4} = 0.25; \quad d^*(\mathcal{G}_S) \geq \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

$$d^*(\mathcal{G}_H) \geq \frac{2}{5} = 0.4; \quad d^*(\mathcal{G}_K) \geq \frac{1}{5} = 0.2$$

Contudo, apenas o limitante inferior da grade triangular é atingível. Neste artigo, também foi construído um código de densidade $1/4 = 0.25$ mostrando que este limitante é apertado. Veremos mais adiante que $d^*(\mathcal{G}_T) = 1/4 = 0.25$, $d^*(\mathcal{G}_S) = 7/20 = 0.35$, $d^*(\mathcal{G}_H) \geq 5/12 \approx 0.4166$ (conjectura-se que $d^*(\mathcal{G}_H) = 3/7 \approx 0.4286$) e que $d^*(\mathcal{G}_K) = 2/9 \approx 0.2222$. De forma mais geral, foi mostrado em 2004 que $d_r^*(\mathcal{G}_K) = 1/4r$ para todo $r \geq 2$ (CHARON *et al.*, 2004).

3.4 Aspectos computacionais

Nesta seção, vamos fazer comparações entre alguns resultados sobre complexidade computacional existentes na literatura para códigos de identificação e conjuntos dominantes. Apesar de serem problemas semelhantes, veremos que possuem alguns diferenças quanto à complexidade computacional. Vamos definir os problemas de decisão e otimização que são naturalmente associados com códigos de identificação e conjunto dominante.

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO

ENTRADA: Um grafo identificável G e um inteiro k

QUESTÃO: G tem um código de identificação de cardinalidade no máximo k ?

MIN ID-COD

ENTRADA: Um grafo identificável G

SAÍDA: Um código de identificação C de G de cardinalidade mínima

FUNÇÃO OBJETIVO: Minimizar a cardinalidade $|C|$ do código

CONJUNTO DOMINANTE

ENTRADA: Um grafo G e um inteiro k

QUESTÃO: G tem um conjunto dominante de cardinalidade no máximo k ?

MIN DOM

ENTRADA: Um grafo G

SAÍDA: Um conjunto dominante \mathcal{D} de G de cardinalidade mínima

FUNÇÃO OBJETIVO: Minimizar a cardinalidade \mathcal{D} do conjunto

No trabalho de FOUCAUD (2012), existe um estudo comparativo entre as complexidades dos problemas de decisão CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO e CONJUNTO DOMINANTE. Alguns pontos deste estudo estão sintetizados na Tabela 2.

Classe de grafo	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO	CONJUNTO DOMINANTE
Bipartido	NP-Completo CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN (2003)	NP-Completo BERTOSSO (1984) e CHANG e NEMHAUSER (1984)
Cordal bipartido	NP-Completo FOUCAUD (2012)	NP-Completo MÜLLER e BRANDSTÄDT (1987)
Split	NP-Completo FOUCAUD (2012)	NP-Completo BERTOSSO (1984)
Grafo de intervalo	NP-Completo FOUCAUD (2012)	P BOOTH e JOHNSON (1982)
Permutação	NP-Completo FOUCAUD <i>et al.</i> (2017b)	P FARBER e KEIL (1985)

Tabela 2: Comparação das complexidades dos problemas de decisão CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO e CONJUNTO DOMINANTE para algumas classes de grafos. Fonte: FOUCAUD (2012).

Um outro estudo presente no trabalho de FOUCAUD (2012) faz uma comparação das complexidades e fator de aproximação dos problemas de otimização MIN ID-COD e MIN DOM. Alguns pontos deste estudo estão resumidos na Tabela 3.

Classe de grafo	MIN ID-COD		MIN DOM	
	Limitante inferior	Limitante superior	Limitante inferior	Limitante superior
Geral	log-APX-difícil CHAKRABARTY <i>et al.</i> (2002) e LAIFENFELD e TRACHTENBERG (2008) e SUOMELA (2007)	$O(\ln(n))$ DE BONTRIDDER <i>et al.</i> (2003)	log-APX-difícil RAZ e SAFRA (1997)	$O(\ln(n))$ JOHNSON (1974)
Bipartido	log-APX-difícil FOUCAUD (2012)	$O(\ln(n))$ DE BONTRIDDER <i>et al.</i> (2003)	log-APX-difícil RAZ e SAFRA (1997) e CHLEBÍK e CHLEBÍKOVÁ (2008)	$O(\ln(n))$ JOHNSON (1974)
Split (Também: Cordal)	log-APX-difícil FOUCAUD (2012)	$O(\ln(n))$ DE BONTRIDDER <i>et al.</i> (2003)	log-APX-difícil RAZ e SAFRA (1997) e CHLEBÍK e CHLEBÍKOVÁ (2008)	$O(\ln(n))$ JOHNSON (1974)
Planar (*)	NP-difícil AUGER <i>et al.</i> (2010)	7 FOUCAUD (2012)	NP-difícil GARY e JOHNSON (1979)	PTAS BAKER (1983)
Intervalo	NP-difícil FOUCAUD (2012)	$O(\ln(n))$ DE BONTRIDDER <i>et al.</i> (2003)	P BOOTH e JOHNSON (1982)	P BOOTH e JOHNSON (1982)
Permutação	Em aberto	$O(\ln(n))$ DE BONTRIDDER <i>et al.</i> (2003)	P FARBER e KEIL (1985)	P FARBER e KEIL (1985)

Tabela 3: Comparação das complexidades e fator de aproximação dos problemas de otimização MIN ID COD e MIN DOM para algumas classes de grafos. A classe de complexidade precisa do MIN ID-COD não está totalmente determinada para os grafos planares.

Fonte: FOUCAUD (2012).

4 GRADES TRIANGULARES

O objetivo deste capítulo é demonstrar alguns resultados sobre código de identificação em grades triangulares infinitas. Esses resultados foram apresentados no *Bordeaux Graph Workshop* em 2016 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2016) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017a).

4.1 Introdução

Frequentemente usaremos coordenadas do plano cartesiano para definir códigos de identificação. Contudo, usamos um plano ligeiramente diferente do plano cartesiano tradicional: o eixo das ordenadas geralmente é limitado e tem a sua coordenada de maior valor na origem. Assim, a primeira coordenada do eixo das ordenadas a partir da origem é o número de linhas da grade triangular. Uma outra observação é que a primeira coordenada do eixo das abcissas, a partir da origem, nem sempre é 0. Na Figura 12, temos um exemplo de como representaremos as grades triangulares neste capítulo. No exemplo da Figura 12, temos uma grade triangular com k (coordenada de maior valor no eixo das ordenadas) linhas e 12 colunas onde a primeira coordenada do eixo das abcissas a partir da origem é 1.

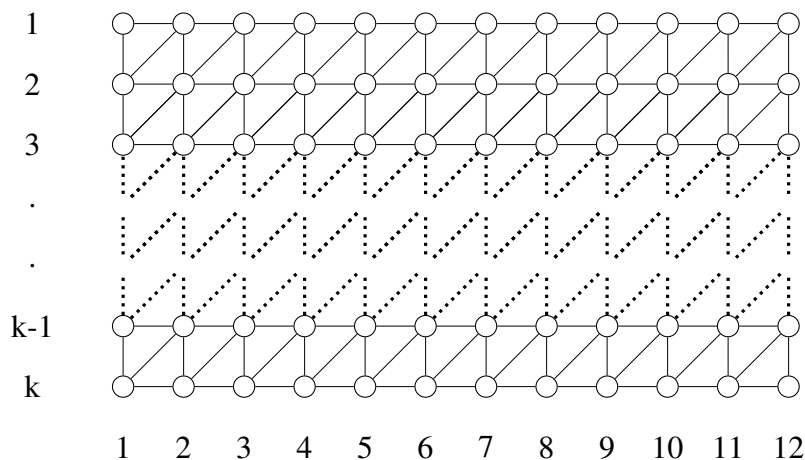


Figura 12: Exemplo de representação de grade triangular.

A *grade infinita triangular* \mathcal{G}_T é o grafo infinito com os vértices em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $N((x,y)) = \{(x,y \pm 1), (x \pm 1, y), (x-1, y+1), (x+1, y-1)\}$. Dado um inteiro $k \geq 2$, sejam $[k] = \{1, \dots, k\}$ e \mathcal{T}_k o subgrafo de \mathcal{G}_T induzido pelo conjunto de vértices $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times [k]\}$. Karповsky *et al.* (KARPOVSKY, CHAKRABARTY, e LEVITIN, 1998) mostraram que $d^*(\mathcal{G}_T) = 1/4 = 0.25$. No Corolário 1.1, vimos que $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{S}_1$ e, portanto, $d^*(\mathcal{T}_1) = 1/2 = 0.5$.

Neste capítulo, provamos vários resultados sobre a densidade de códigos de identificação de \mathcal{T}_k , $k > 1$. Provamos que $d^*(\mathcal{T}_2) = 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) = d^*(\mathcal{T}_4) = 1/3 \approx 0.333$, $d^*(\mathcal{T}_5) = 3/10 = 0.3$, $d^*(\mathcal{T}_6) = 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(4k)$, para todo inteiro $k \geq 7$ ímpar. Além disso, provamos que $1/4 + 1/(4k) \leq d^*(\mathcal{T}_k) \leq 1/4 + 1/(2k)$, para todo inteiro

$k \geq 8$ par. Por fim, conjecturamos que $d^*(\mathcal{T}_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$, para todo inteiro $k \geq 8$ par. Esses resultados estão sintetizados na Tabela 4.

Número k de linhas	Densidade ótima
1	$1/2 = 0.5$ Corolário 1.1
2	$1/2 = 0.5$ Teorema 4.1
3	$1/3 \approx 0.333$ Teorema 4.1
4	$1/3 \approx 0.333$ Teorema 4.2
5	$3/10 = 0.3$ Teorema 4.4
6	$1/3 \approx 0.333$ Teorema 4.1
≥ 7 ímpar	$1/4 + 1/(4k)$ Teorema 4.4
≥ 8 par	$\geq 1/4 + 1/(4k)$ $\leq 1/4 + 1/(2k)$ Teorema 4.4

Tabela 4: Densidades ótimas de Código de Identificação para grades triangulares com número limitado de linhas.

Fonte: Próprio autor.

4.2 A grade triangular infinita com duas, três ou seis linhas

Nessa seção, provaremos o Lema 4.1 e o usaremos para provar o seguinte teorema que é o principal resultado dessa seção.

Teorema 4.1. *Em grades triangulares infinitas com duas, três e seis linhas, temos que $d^*(\mathcal{T}_2) = 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) = 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_6) = 1/3 \approx 0.333$.*

Antes de enunciar o Lema 4.1, definiremos alguns conceitos importantes para demonstrar o referido lema. Considere os conjuntos $D_{2,a}$ e $D_{2,b}$ (ilustrados na Figura 13); $D_{3,a}$ e

$D_{3,b}$ (ilustrados na Figura 14) e D_6 (ilustrado na Figura 15) dados abaixo.

$$\begin{aligned}
D_{2,a} &= \{(x, 1) \mid x \equiv 1, 3 \pmod{5}\} \cup \{(x, 2) \mid x \equiv 1, 2, 4 \pmod{5}\}; \\
D_{2,b} &= \{(x, 1) \mid x \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}\} \cup \{(x, 2) \mid x \equiv 2 \pmod{5}\}; \\
D_{3,a} &= \{(x, 1) \mid x \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(x, 3) \mid x \equiv 1 \pmod{2}\}; \\
D_{3,b} &= \{(x, 1) \mid x \equiv 1 \pmod{3}\} \cup \{(x, 2) \mid x \equiv 2 \pmod{3}\} \cup \{(x, 3) \mid x \equiv 3 \pmod{3}\}; \\
D_6 &= \{(x, 1), (x, 3) \mid x \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(x, 5) \mid x \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que $D_{2,a}$ é um código de identificação de \mathcal{T}_2 com densidade $1/2 = 0.5$. Note que o padrão destacado se repete e possui 5 de seus 10 vértices no código. Assim, a densidade desse código em \mathcal{T}_2 é $5/10 = 0.5$. Observe que $C[(2, 1)] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$, $C[(2, 2)] = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$, $C[(3, 1)] = \{(2, 2), (3, 1)\}$, $C[(3, 2)] = \{(2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$, $C[(4, 1)] = \{(3, 1), (4, 2)\}$, $C[(4, 2)] = \{(4, 2)\}$, $C[(5, 1)] = \{(4, 2), (6, 1)\}$, $C[(5, 2)] = \{(4, 2), (6, 1), (6, 2)\}$, $C[(6, 1)] = \{(6, 1), (6, 2)\}$ e $C[(6, 2)] = \{(6, 1), (6, 2), (7, 2)\}$. Como se trata de um padrão, temos que $C[x] \neq \emptyset$, para todo vértice $x \in \mathcal{T}_2$ e que $C[x] \neq C[y]$, para todo par de vértices distintos $x, y \in \mathcal{T}_2$.

De modo análogo, verifica-se que $D_{2,b}$ é código de identificação de \mathcal{T}_2 com densidade $1/2 = 0.5$, que $D_{3,a}$ e $D_{3,b}$ são códigos de identificação de \mathcal{T}_3 com densidade $1/3$, e que D_6 é um código de identificação de \mathcal{T}_6 com densidade $1/3 \approx 0.333$. Assim, concluímos que $d^*(\mathcal{T}_2) \leq 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) \leq 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_6) \leq 1/3 \approx 0.333$.

Para provar que $d^*(\mathcal{T}_2) \geq 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) \geq 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_6) \geq 1/3 \approx 0.333$, introduzimos a noção de *quase-código de identificação* de \mathcal{T}_3 . A grosso modo, um quase-código de identificação de \mathcal{T}_3 não observa a última linha.

Definição 4.1. Um quase código de identificação C de \mathcal{T}_3 é um subconjunto $C \subseteq V(\mathcal{T}_3)$ tal que

- (i) para todo $v \in V(\mathcal{T}_2)$, $C[v] \neq \emptyset$, e
- (ii) para todos $u, v \in V(\mathcal{T}_2)$ distintos, $C[u] \neq C[v]$.

Agora enunciamos o Lema 4.1 que determina um limitante inferior para todo quase código de identificação em \mathcal{T}_3 .

Lema 4.1. Todo quase código de identificação D' de \mathcal{T}_3 tem densidade $d(D', \mathcal{T}_3)$ pelo menos $1/3 \approx 0.333$.

Para demonstrar esse lema, utilizaremos o mesmo mecanismo do método da descarga. Entretanto como eventualmente precisaremos deslocar uma carga por uma distância infinita, preferimos não utilizar o método da descarga explicitamente.

Prova:Lema 4.1 Seja C um quase código de identificação de \mathcal{T}_3 e seja $U = V(\mathcal{T}_3) \setminus C$. Vamos provar que a densidade de C em $V(\mathcal{T}_3)$ é pelo menos $1/3$. Dado $x \in \mathbb{Z}$, a *quase-coluna* Q_x é o conjunto $\{(x, 1), (x, 2), (x-1, 3)\}$. Se $|Q_x \cap C| \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, então a densidade de C é pelo menos $1/3$. Seja Q_x uma quase-coluna qualquer. Se $|Q_x \cap C| \geq 1$, então dizemos que Q_x está *satisfeita*. Se $|Q_x \cap C| = 0$, então dizemos que Q_x está *vazia e não satisfeita*. Se $|Q_x \cap C| \geq 2$, então dizemos que Q_x pode satisfazer outras $|Q_x \cap C| - 1$ quase-colunas que não

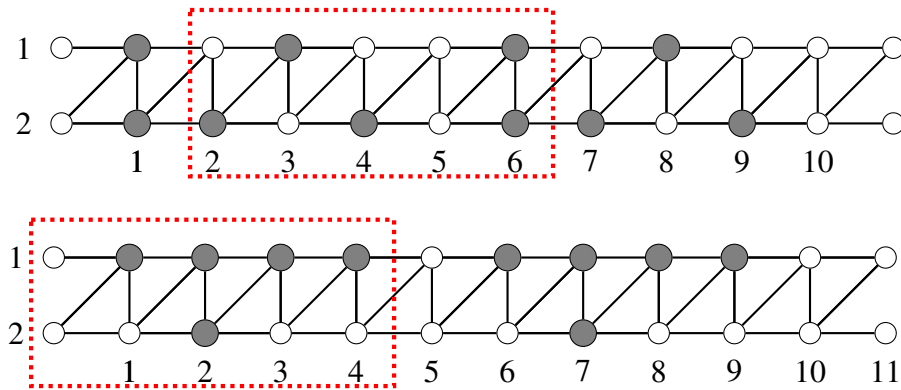


Figura 13: Dois códigos de identificação ótimos de $\mathcal{T}_2 : D_{2,a}$ (cima) e $D_{2,b}$ (baixo). Os vértices cinzas são aqueles no código.

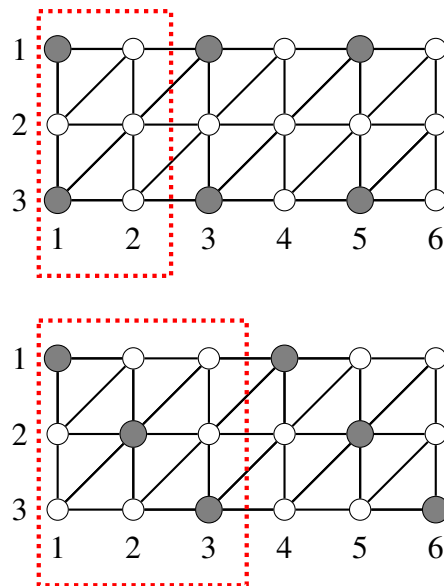


Figura 14: Códigos de identificação $D_{3,a}$ (cima) e $D_{3,b}$ (baixo) de \mathcal{T}_3 com densidade $1/3 \approx 0.333$.

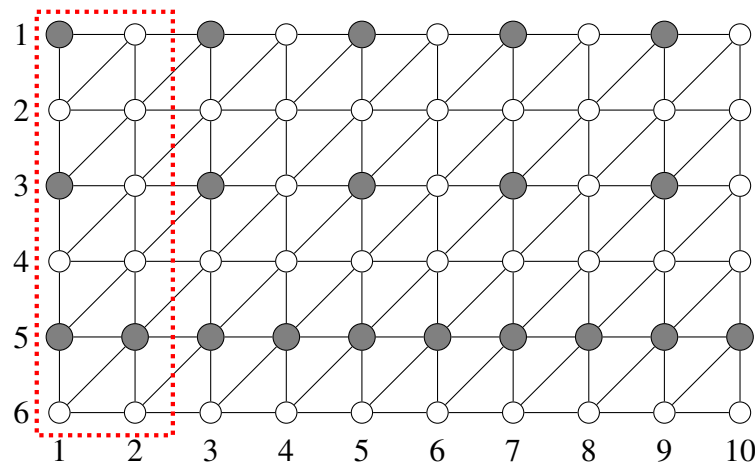


Figura 15: Código de identificação D_6 de \mathcal{T}_6 com densidade $1/3$.

estejam satisfeitas.

Seja Q_x ($x \in \mathbb{Z}$) uma quase-coluna com $Q_x \cap C = \emptyset$. Nosso objetivo é associar à Q_x

uma quase-coluna $Q_{x'}$ com $x' < x$ e $|Q_{x'} \cap C| \geq 2$ que irá satisfazer Q_x . Se $|Q_{x-1} \cap C| \geq 2$, então Q_{x-1} satisfaz Q_x e o nosso objetivo é atingido. Então, considere $|Q_{x-1} \cap C| \leq 1$.

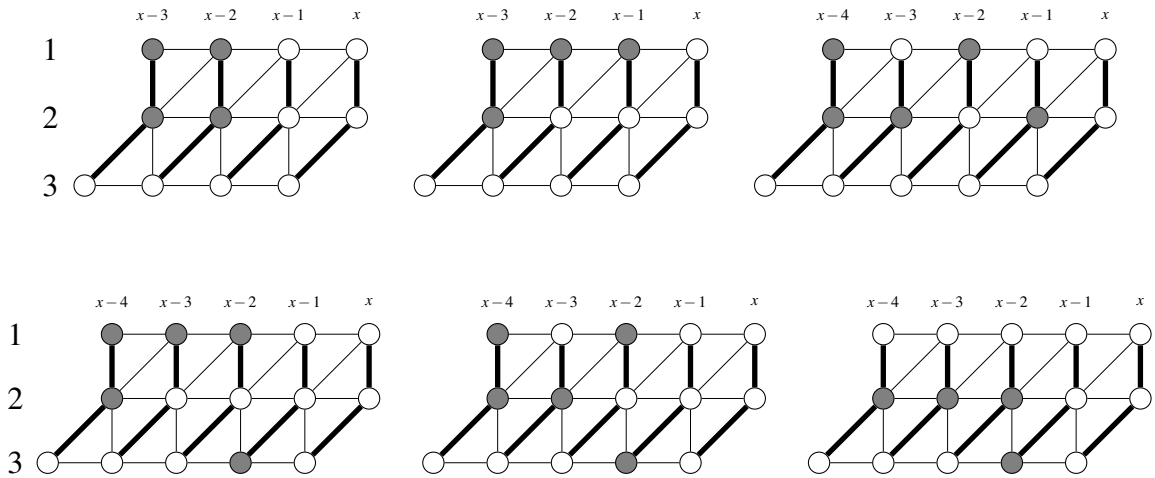


Figura 16: Quase-coluna Q_x com $Q_x \cap C = \emptyset$.

Suponha primeiro que $Q_{x-1} \cap C = \emptyset$ (ilustrada na primeira configuração da Figura 16). Então $(x-2, 2) \in C$ e $(x-2, 1) \in C$, pois $C[(x-1, 2)] \neq \emptyset$ e $C[(x-1, 1)] \neq C[(x-1, 2)]$. Se $(x-2, 3) \in C$, então atinge-se o nosso objetivo, pois a quase-coluna Q_{x-2} satisfaz Q_{x-1} e Q_x . Então, assumamos que $(x-2, 3) \notin C$. Logo, temos que $(x-3, 2) \in C$ e $(x-3, 1) \in C$, pois $C[(x-2, 2)] \neq C[(x-1, 1)]$ e $C[(x-2, 1)] \neq C[(x-2, 2)]$. Com isso, Q_{x-3} e Q_{x-2} satisfazem Q_{x-1} e Q_x e atinge-se o objetivo.

Agora, suponhamos que $|Q_{x-1} \cap C| = 1$. Temos então três possibilidades: $Q_{x-1} \cap C = \{(x-1, 1)\}$ (Caso 1), $Q_{x-1} \cap C = \{(x-1, 2)\}$ (Caso 2) e $Q_{x-1} \cap C = \{(x-2, 3)\}$ (Caso 3).

Caso 1: Suponha que $Q_{x-1} \cap C = \{(x-1, 1)\}$ (ilustrada na segunda configuração da Figura 16). Então, $(x-2, 1) \in C$ independente de $(x-2, 2)$ pertencer a C , pois $C[(x-1, 1)] \neq C[(x-1, 2)]$. Assumamos que $Q_{x-2} \cap C = \{(x-2, 1)\}$, pois, caso contrário, Q_{x-2} satisfaz Q_x e atingimos o nosso objetivo. Dessa forma, $(x-3, 2) \in C$ e $(x-3, 1) \in C$ pois $C[(x-2, 2)] \neq C[(x-1, 1)]$ e $C[(x-2, 1)] \neq C[(x-2, 2)]$. Com isso, Q_{x-3} satisfaz Q_x e atingimos o objetivo.

Caso 2: Suponha que $Q_{x-1} \cap C = \{(x-1, 2)\}$ (ilustrada na terceira configuração da Figura 16). Então $(x-2, 1) \in C$ independente de $(x-2, 2) \in C$, pois $C[(x-1, 1)] \neq C[(x-1, 2)]$. Assumamos que $|Q_{x-2} \cap C| < 2$, pois, caso contrário, Q_{x-2} satisfaz Q_x e atingimos o objetivo. Temos então que $(x-3, 2) \in C$, pois $C[(x-2, 2)] \neq C[(x-1, 1)]$. Assumamos que $|Q_{x-3} \cap C| < 2$, pois, caso contrário, Q_{x-3} satisfaz Q_x e atingimos o objetivo. Finalmente, $(x-4, 2) \in C$ e $(x-4, 1) \in C$, pois $C[(x-3, 2)] \neq C[(x-2, 1)]$ e $C[(x-3, 1)] \neq C[(x-3, 2)]$. Com isso, Q_{x-4} satisfaz Q_x e atingimos o objetivo.

Caso 3: Assumamos que $Q_{x-1} \cap C = \{(x-1, 3)\}$. Como $C[(x-1, 1)] \neq \emptyset$, então ou $(x-2, 1) \in C$ (Subcaso 3.1) ou $(x-2, 2) \in C$ (Subcaso 3.2). Dessa forma, $|Q_{x-2} \cap C| > 0$. Assumamos ainda que $|Q_{x-2} \cap C| < 2$ e que $|Q_{x-3} \cap C| < 2$, pois, se $|Q_{x-2} \cap C| \geq 2$ (respectivamente $|Q_{x-3} \cap C| \geq 2$), então Q_{x-2} (respectivamente Q_{x-3}) satisfaz Q_x e atingimos o objetivo.

Subcaso 3.1: Suponha que $(x-2, 1) \in C$ (ilustrada na quinta configuração da Figura 16). Como $C[(x-2, 1)] \neq C[(x-1, 1)]$, então ou $(x-3, 1) \in C$ ou $(x-3, 2) \in C$. Se $(x-3, 1) \in C$, então $(x-4, 2) \in C$ e $(x-4, 1) \in C$, pois $C[(x-3, 2)] \neq C[(x-2, 1)]$ e $C[(x-3, 1)] \neq C[(x-3, 2)]$ (ilustrada na quarta configuração da Figura 16). Se $(x-3, 2) \in C$, então $(x-4, 2) \in C$ e $(x-4, 1) \in C$, pois $C[(x-3, 2)] \neq C[(x-2, 1)]$ e $C[(x-3, 1)] \neq C[(x-3, 2)]$. Em ambos os casos, Q_{x-4} satisfaz Q_x e atingimos o objetivo.

Subcaso 3.2: Assuma que $(x-2, 2) \in C$ (ilustrada na sexta configuração da Figura 16). Então $(x-3, 2) \in C$ pois $C[(x-2, 2)] \neq C[(x-1, 2)]$. Temos também que $(x-4, 2) \in C$ pois $C[(x-3, 2)] \neq C[(x-2, 1)]$. Se $|Q_{x-4} \cap C| < 2$, então $(x-5, 2) \in C$ pois $C[(x-4, 2)] \neq C[(x-3, 1)]$. Recursivamente, temos que se $|Q_{x'} \cap C| < 2$ para todo $x' \leq x-4$, então $Q_{x'-1} \cap C = \{(x'-1, 2)\}$, pois $C[(x', 2)] \neq C[(x'+1, 1)] = \{(x', 2), (x'+1, 2)\}$. Com isso, temos duas possibilidades: Q_x é a primeira quase-coluna com $Q_x \cap C = \emptyset$ ou não. No primeiro caso, Q_x não tem contribuição para a densidade de C pois é apenas uma quase-coluna (a primeira vazia). No segundo caso, o procedimento recursivo só poderá ser realizado até a quase-coluna vazia Q_y anterior a Q_x . Como $(y, 2) \notin C$, algum outro vértice de uma quase-coluna $Q_{x'}$ à direita de y deverá pertencer a C . Assim, existe $x' < x$ tal que $|Q_{x'} \cap C| \geq 2$ e $|Q_{x''} \cap C| = 1$ para todo $x' < x'' < x$. Então $Q_{x'}$ satisfaz Q_x . Portanto, em ambos os casos, atingimos o objetivo. □

Mostraremos agora que o Lema 4.1 implica o Teorema 4.1.

Prova: Teorema 4.1 Note que todo código de identificação D'_3 de \mathcal{T}_3 é, por definição, um quase código de identificação de \mathcal{T}_3 . Então, do Lema 4.1, $d(D'_3, \mathcal{T}_3) \geq 1/3$.

Observe também que todo código de identificação D'_2 de \mathcal{T}_2 é também um quase código de identificação de \mathcal{T}_3 . Então, do Lema 4.1, $d(D'_2, \mathcal{T}_3) \geq 1/3$. Observe que D'_2 não possui vértices na linha 3 de \mathcal{T}_3 . Assim, o código D'_2 possui densidade $d(D'_2, \mathcal{T}_2)$ nas linhas 1 e 2 de \mathcal{T}_3 e possui densidade 0 na linha 3 de \mathcal{T}_3 . Então $d(D'_2, \mathcal{T}_3) = (2 \cdot d(D'_2, \mathcal{T}_2) + 0)/3$. Como $d(D'_2, \mathcal{T}_3) \geq 1/3$, obtemos $d(D'_2, \mathcal{T}_2) \geq 1/2$.

Finalmente, observe que todo código de identificação D'_6 de \mathcal{T}_6 induz os seguintes quase códigos de identificação de \mathcal{T}_3 :

$$\begin{aligned} D'_{3,a} &= \{(x, y) \mid (x, y) \in D'_6 \text{ e } y \in \{1, 2, 3\}\}; \\ D'_{3,b} &= \{(x, 7-y) \mid (x, y) \in D'_6 \text{ e } y \in \{4, 5, 6\}\}. \end{aligned}$$

Basicamente, dividimos uma \mathcal{T}_6 com um código de identificação em duas metades: as linhas 1, 2 e 3 compõe $D'_{3,a}$ e as linhas 6, 5 e 4 compõe $D'_{3,b}$. Perceba que os vértices das linhas 1 e 2 são identificados pelos vértices das linhas 1, 2 e 3. Analogamente, os vértices das linhas 6 e 5 são identificados pelos vértices das linhas 6, 5 e 4. Os vértices da linha 3 são eventualmente identificados pelos vértices da linha 4 e os vértices da linha 4 são eventualmente identificados pelos vértices da linha 3. Desta maneira, $D'_{3,a}$ é um quase código de identificação de \mathcal{T}_3 e $D'_{3,b}$ é um quase código de identificação de \mathcal{T}_3 . Então $d(D'_6, \mathcal{T}_6) \geq 1/3$, pois, do Lema 4.1,

$$d(D'_{3,a}, \mathcal{T}_3) \geq 1/3 \text{ e } d(D'_{3,b}, \mathcal{T}_3) \geq 1/3. \quad \square$$

4.3 O Método da Descarga

Nas seções seguintes, os limites inferiores de densidade de código de identificação são obtidos pela aplicação explícita do método da descarga. A ideia geral deste método será mostrada a seguir. Considere um código de identificação qualquer C de \mathcal{T}_k . No início, cada vértice u em C recebe um certo valor $\text{chrg}_0(u) = q_k > 0$ de carga e cada vértice $v \notin C$ recebe carga $\text{chrg}_0(v) = 0$. Então aplicamos algumas regras de descarga locais. Nesse contexto, local significa que não existe carga transferida de um vértice para outro a uma distância maior que d_k para alguma constante fixa d_k , e que a carga total enviada por um vértice é limitado por algum valor fixo m_k .

Finalmente, provamos que, após a aplicação de todas as regras (fase de descarregamento), todo vértice v tem carga final $\text{chrg}^*(v)$ pelo menos p_k para algum $p_k > 0$ fixo. Afirmamos que isso implica $d(C, \mathcal{T}_k) \geq p_k/q_k$. Como um vértice envia carga no máximo m_k para vértices a distância no máximo d_k , uma carga de no máximo $2d_k \cdot k \cdot m_k$ entra em $N_r(v_0)$ durante a fase de descarregamento. Então

$$\begin{aligned} |C \cap N_r(v_0)| &= \frac{1}{q_k} \sum_{v \in N_r(v_0)} \text{chrg}_0(v) \geq \frac{1}{q_k} \left(\sum_{v \in N_r(v_0)} \text{chrg}^*(v) - 2d_k \cdot k \cdot m_k \right) \\ &\geq \frac{p_k |N_r(v_0)| - 2d_k \cdot k \cdot m_k}{q_k}. \end{aligned}$$

Como $|N_r(v_0)| \geq 2(k+1) \cdot r - k^2$, então

$$d(C, \mathcal{T}_k) \geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{q_k} \cdot \frac{2d_k \cdot k \cdot m_k}{2(k+1) \cdot r - k^2} \right) = \frac{p_k}{q_k}.$$

Isso prova nossa afirmação. Como a afirmação é garantida para qualquer código de identificação, temos

$$d^*(\mathcal{T}_k) \geq p_k/q_k \quad (1)$$

Observe que \mathcal{T}_k possui muitos isomorfismos. Uma *translação horizontal* é um mapeamento $\tau : (x, y) \mapsto (x + \ell, y)$ para algum $\ell \in \mathbb{Z}$ fixo. Uma *simetria vertical* sobre linha $b \in [k]$ é um mapeamento $\varphi : (x, y) \mapsto (x + y - b, k + 1 - y)$. Uma *simetria horizontal* em $(a, b) \in V(\mathcal{T}_k)$ é um mapeamento $\psi : (x, y) \mapsto (a - (x - a) - (y - b), y)$. Todas as combinações destes mapeamentos são isomorfismos em \mathcal{T}_k . A Figura 17 ilustra as simetrias vertical e horizontal.

Tomemos como exemplo o vértice $p = (1, 4)$ na Figura 17. Aplicar uma translação horizontal de l unidades resultaria em deslocar todos os vértices l unidades para a direita ou para a esquerda. Se tomarmos $l = 3$, deslocaríamos todos os vértices 3 unidades para a direita. No exemplo isolado do vértice $p = (1, 4)$, teríamos uma nova posição $p' = (4, 4)$. Aplicar uma

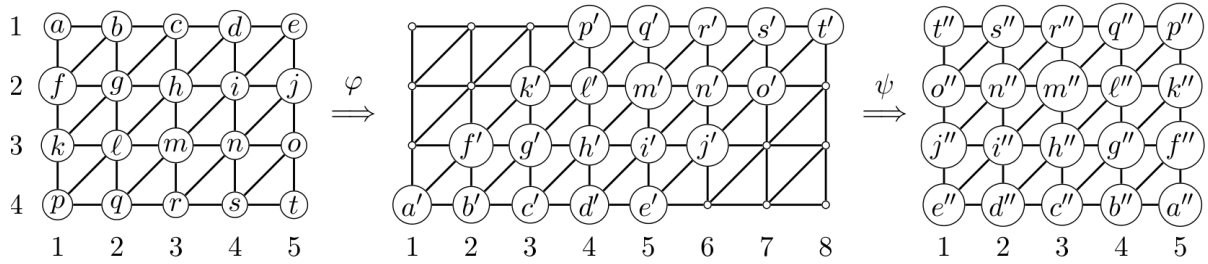


Figura 17: Simetria vertical φ na linha 1 e simetria horizontal ψ em $c' = \varphi(c) = (3,4)$.

simetria vertical ao ponto p sobre a linha 1, por exemplo, resultaria no ponto $p' = (1 + 4 - 1, 4 + 1 - 4) = (4, 1)$, como pode ser visto na segunda configuração da Figura 17. Aplicar uma simetria horizontal ao ponto $p' = (4, 1)$ sobre o ponto $c' = (3, 4)$, por exemplo, resultaria em $p'' = (3 - (4 - 3) - (1 - 4), 1) = (5, 1)$, como pode ser visto na terceira configuração da Figura 17. Note que, na simetria vertical φ na linha b , $\varphi((x, b)) = (x, k + 1 - b)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ e, na simetria horizontal ψ em (a, b) , $\psi((a, b)) = (a, b)$.

Se C é um código de identificação em \mathcal{T}_k e σ é um isomorfismo de \mathcal{T}_k , então $\sigma(C)$ é um código de identificação de C com a mesma densidade de C . De agora em diante, em nossas provas, quando escrevemos sem perda de generalidade significa que não consideraremos $\sigma(C)$, para algum isomorfismo σ de \mathcal{T}_k .

Na próxima seção, estabelecemos a densidade mínima de um código de identificação em um \mathcal{T}_4 utilizando o método da descarga.

4.4 Grades triangulares infinitas com quatro linhas

Nesta seção, vamos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *A densidade ótima de um código de identificação de \mathcal{T}_4 é $d^*(\mathcal{T}_4) = 1/3 \approx 0.333$.*

Prova: Considere os dois códigos de identificação D_4 e D'_4 (ilustrados na Figura 18) definidos por

$$\begin{aligned} D_4 &= \{(x, 2) \mid x \equiv 0, 2 \pmod{3}\} \cup \{(x, 3) \mid x \equiv 0, 1 \pmod{3}\}; \\ D'_4 &= \{(x, 1), (x, 4) \mid x \equiv 1 \pmod{3}\} \cup \{(x, 2) \mid x \equiv 2 \pmod{3}\} \\ &\quad \cup \{(x, 3) \mid x \equiv 0 \pmod{3}\}. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que esses códigos possuem densidade $1/3$. Assim, $d^*(\mathcal{T}_4) \leq 1/3$. Agora vamos mostrar que $d^*(\mathcal{T}_4) \geq 1/3$.

Seja C um código de identificação de \mathcal{T}_4 e seja $U = V(\mathcal{T}_4) \setminus C$. Queremos provar, pelo método da descarga, que a densidade de C em $V(\mathcal{T}_4)$ é pelo menos $1/3$. Seja $q_4 = 3$ e $p_4 = 1$. Todo vértice de C começa com carga q_4 e todo vértice de U começa com carga 0. Dizemos que um vértice v está insatisfeito se $\text{chrg}(v) < p_4$. Provaremos que, após a aplicação de algumas regras de descarga, todo vértice de \mathcal{T}_4 está satisfeito. Isso assegura que $d(C, \mathcal{T}_4) \geq p_4/q_4 = 1/3$ pela Equação 1 da página 50.

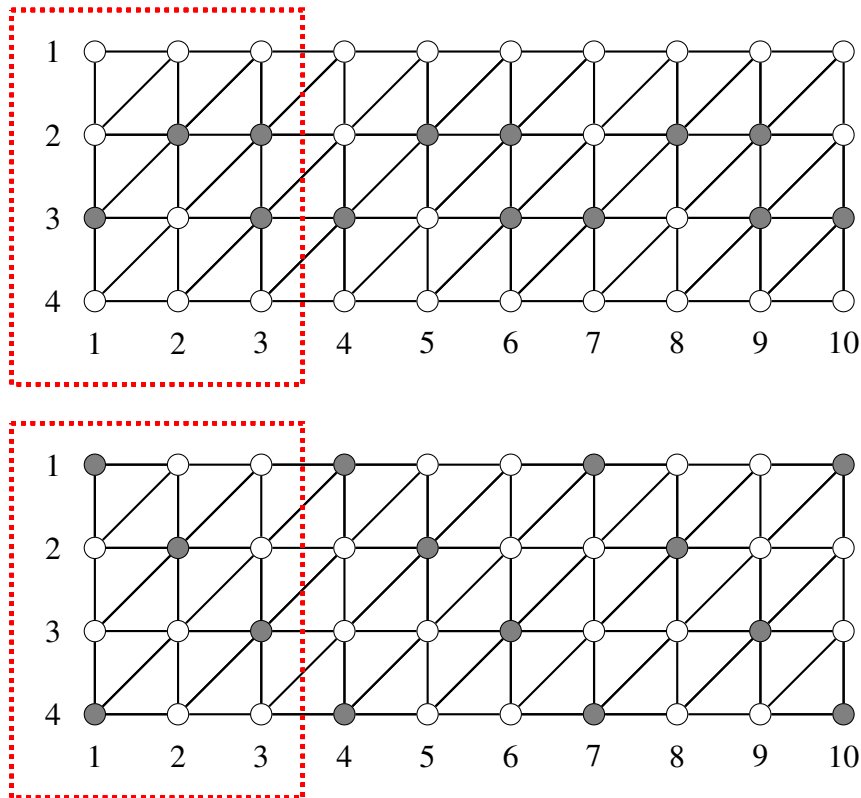


Figura 18: Dois códigos de identificação de \mathcal{T}_4 com densidade mínima $1/3$: D_4 (cima) e D'_4 (baixo).

Dizemos que um vértice $(x, y) \in V(\mathcal{T}_4)$ está na *borda* se $y \in \{1, 4\}$, caso contrário dizemos que ele está no *centro*. Aplicamos as seguintes regras de descarga uma após a outra. É crucial notar que a ordem das regras é importante e que o conjunto de vértices insatisfeitos e o excesso de cada vértice são atualizados após a aplicação de cada regra. A aplicação das regras funciona da seguinte maneira: aplica-se a Regra 1a simultaneamente a todos os vértices que possuem as propriedades descritas na Regra 1a antes da aplicação de sua aplicação. Após a aplicação da Regra 1a, teremos a aplicação da Regra 1b simultaneamente a todos os vértices que possuem as propriedades descritas na Regra 1b depois da aplicação da Regra 1a. E assim sucessivamente até a aplicação da última regra.

Para todo vértice $v \in C$ e todo vizinho insatisfeito $u \in U$ de v :

- Regra 1a: v envia 1 para u , se ou $u \in U_1$ ou $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)$;
- Regra 1b: v envia 1 para u , se $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)$;
- Regra 2a: v envia $1/2$ para u , se v está na borda e $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)/2$;
- Regra 2b: v envia $1/2$ para u , se $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)/2$;
- Regra 2c: v envia $1/2$ para u , se $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)/2$;
- Regra 2d: v envia $1/2$ para u , se $\text{exc}(v) \geq \text{uns}(v)/2$;
- Regra 3: v envia $1/2$ para u , se $u \in U_2$ e v não enviou carga para u nas regras anteriores;
- Regra 4: v envia $1/4$ para u se $u \in U_{\geq 3}$ e v não enviou carga para u nas regras anteriores.

Cada regra é aplicada a cada par (v, u) que satisfaz as condições da regra antes da sua aplicação. Temos que provar que a carga final de cada vértice é pelo menos 1. Para fazer-

mos isso, provamos as Afirmações 4.1, 4.2 e 4.3. Na prova dessas afirmações, nós geralmente usamos as notações $\boxed{A1}$, $\boxed{A2}$, ..., $\boxed{A9}$, que indica a sequência de hipóteses (ou consequências das hipóteses) na prova de cada subcaso. Isso é útil para entender a prova e as imagens relacionadas. Em nossas demonstrações, procuramos analisar o pior caso. Então, quando afirmamos que um determinado vértice x é satisfeito por um vértice y na aplicação de uma Regra z , frequentemente queremos afirmar que isso acontece no pior caso. Em outras palavras, queremos afirmar que o vértice x é satisfeito até a aplicação da Regra z . Eventualmente, esse vértice x pode estar satisfeito antes da aplicação da Regra z .

Afirmção 4.1. *Com relação às regras de descarregamento afirmamos que:*

- (i) *Na Regra 2a, todo vértice da borda em C envia carga $1/2$ para cada um dos seus vizinhos insatisfeitos.*
- (ii) *Se um vértice do centro e em C tem no máximo 3 vizinhos em U , ou 4 vizinhos em U e nenhum deles em U_1 , então, na Regra 2b, ele envia carga $1/2$ para cada um dos seus vizinhos insatisfeitos.*

Prova: (i) Seja v um vértice da borda em C .

Se v tem no máximo dois vizinhos em U , então ele envia 1 para cada vizinho pela Regra 1a e todos os seus vizinhos estão satisfeitos após a Regra 1a. Daqui em diante, assumimos que v tem pelo menos três vizinhos em U . Suponha agora que v tem exatamente um vizinho $u \in U_1$, então seu identificador é $\{v\}$. Portanto, qualquer vértice $w \in N[v] \setminus \{u\}$ é adjacente a um vértice de $C \setminus \{v\}$, pois $C[w] \neq C[u] = \{v\}$. Logo, v tem um vizinho em C , pois $C[v] \neq C[u] = \{v\}$, e exatamente dois vizinhos u_2 e u'_2 em $U_{\geq 2}$. Se u_2 e u'_2 estão insatisfeitos após a aplicação da Regra 1b, então v envia apenas carga 1 para seu vizinho em u_1 pela Regra 1a. Portanto, após a aplicação da Regra 1b, $\text{exc}(v) = 1 = \text{uns}(v)/2$. Logo u_2 e u'_2 recebem $1/2$ pela Regra 2a.

Finalmente, suponha que v não possui vizinhos em U_1 . Então v tem no máximo quatro vizinhos em $U_{\geq 2}$. Se eles estão insatisfeitos após a aplicação da Regra 1b, então o vértice v não enviou nenhuma carga nas Regras 1a e 1b. Portanto, após a aplicação da Regra 1b, $\text{exc}(v) = 2 \geq \text{uns}(v)/2$. Logo, cada vizinho insatisfeito de v recebe $1/2$ na Regra 2a.

(ii) Seja v um vértice em C e no centro. Perceba que a Regra 2a não é aplicável à v por se tratar de um vértice do centro.

Inicialmente, supomos que v possui no máximo 3 vizinhos em U . Se v não possui vizinho em U_1 e ainda possui vizinhos insatisfeitos após a Regra 1b, então o vértice v não enviou carga alguma nas Regras 1a ou 1b. Portanto, após a Regra 1b, $\text{exc}(v) = 2 \geq \text{uns}(v)/2$. Assim, v envia carga $1/2$ para cada vizinho insatisfeito na Regra 2b. Se v possui um vizinho em U_1 , então v envia carga 1 para esse vizinho na Regra 1a. Se v ainda possui vizinhos insatisfeitos após a Regra 1b, então v só enviou carga 1 para o seu vizinho em U_1 na Regra 1a. Logo, após a aplicação da Regra 1b, $\text{exc}(v) = 1 \geq \text{uns}(v)/2$. Assim, v envia carga $1/2$ para cada vizinho insatisfeito na Regra 2b.

Agora, supomos que v possui 4 vizinhos em U e nenhum deles em U_1 . Se eles ainda estão insatisfeitos após aplicação da Regra 1b, então v não enviou carga alguma nas Regras 1a

ou 1b. Portanto, após a aplicação da Regra 1b, $\text{exc}(v) = 2 \geq \text{uns}(v)/2$. Assim, v envia carga $1/2$ para cada vizinho insatisfeito na Regra 2b. □

Afirmção 4.2. *Cada vértice em U tem carga final pelo menos 1.*

Prova: Cada vértice em U_1 recebe carga 1 pela Regra 1a, então eles estão satisfeitos. Cada vértice em U_2 recebe carga pelo menos $1/2$ de cada vizinho em C pela Regra 3 ou por uma regra anterior. Então cada vértice em U_2 recebe carga pelo menos 1 no total. Todo vértice em $U_{\geq 3}$ recebe pelo menos carga $1/4$ de cada vizinho até a Regra 4. Portanto, cada vértice em $U_{\geq 4}$ recebe carga pelo menos 1.

Falta provar que todo vértice $u \in U_3$ tem carga final pelo menos 1. Pela observação acima, é suficiente provar que ele recebe carga pelo menos $1/2$ de um de seus três vizinhos em C . Se um desses vizinhos está na borda, então temos o resultado pela Afirmção 4.1-(i). Portanto, devemos assumir que u não tem nenhum vizinho em C na borda. O vértice u deve estar no centro, uma vez que estando na borda teria pelo menos um vizinho na borda e em C pois $u \in U_3$ e u tem apenas 4 vizinhos (dois deles na borda).

Sem perda de generalidade, vamos assumir $u = (3, 2)$ e que estamos em um dos seguintes casos, isto é, cada uma das 4 possíveis configurações de $C[(3, 2)]$ (escolher 3 vértices dentre $\{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$) é igual ou isomorfa a um dos seguintes casos (ilustrados na Figura 19). Observe que, como assumimos que u não tem vizinhos na borda que estejam em C , os vértices $(3, 1)$ e $(4, 1)$ não pertencem a C .

Caso 1: $C[(3, 2)] = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Como $C[(2, 3)] \neq C[(3, 2)]$, então temos que pelo menos um dos vértices de $\{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ pertence a C . Logo, $(2, 3)$ tem no máximo 3 vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Então $(2, 3)$ envia carga $1/2$ para $u = (3, 2)$ pela Regra 2b (ou envia carga 1 anteriormente).

Caso 2: $C[(3, 2)] = \{(2, 2), (4, 2), (2, 3)\}$.

Se $(2, 1) \in C$, então $(2, 2)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Portanto, pela Afirmção 4.1-(ii), $(2, 2)$ envia carga $1/2$ para $u = (3, 2)$ pela Regra 2b (ou carga 1 anteriormente) e então conseguimos o resultado. De agora em diante, assumimos $\boxed{\text{A1}} (2, 1) \notin C$. Logo, $(3, 1) \in U_1$ e $(2, 2)$ envia carga 1 para $(3, 1)$ pela Regra 1a.

Se $(1, 3) \in C$, então $C[(2, 2)] \neq C[(2, 3)]$ implica que $(2, 2)$ ou $(2, 3)$ possui no máximo três vizinhos em U e conseqüentemente (pela Afirmção 4.1-(ii)) envia $1/2$ para $u = (3, 2)$ pela Regra 2b (ou carga 1 anteriormente). Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A2}} (1, 3) \notin C$. Se $(1, 4) \in C$ ou $(2, 4) \in C$, então $(2, 3)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Portanto, pela Afirmção 4.1-(ii), $(2, 3)$ envia carga $1/2$ para $u = (3, 2)$ pela Regra 2b (ou carga 1 anteriormente). Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A3}} (1, 4) \notin C$ e $\boxed{\text{A3}} (2, 4) \notin C$. Logo, $\boxed{\text{A4}} (1, 2) \in C$, pois $C[(2, 2)] \neq C[(2, 3)] = \{(2, 2), (2, 3)\}$.

Se $(0, 4) \in C$, como $C[(1, 2)] \neq C[(2, 1)]$, $(0, 2) \in C$ ou $(0, 3) \in C$. Se $(0, 2) \in C$, então $(1, 2)$ tem no máximo 4 vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Então, $(1, 3)$ é satisfeito por $(0, 4)$ (pela Afirmção 4.1-(i)) e por $(1, 2)$ (pela Afirmção 4.1-(ii)) na Regra 2b (ou

anteriormente). Se $(0,2) \notin C$, então $(0,3) \in C$. Logo, $(-1,3)$ não pode pertencer a U_1 pois $C[(-1,4)] \neq C[(0,4)]$ e $C[(-1,4)] \supset C[(0,4)]$. Assim, $(0,3)$ possui no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Então $(1,3)$ é satisfeito por $(0,4)$ (pela Afirmação 4.1-(i)) e por $(0,3)$ (pela Afirmação 4.1-(ii)) na Regra 2b (ou anteriormente). Em ambos os casos, se u não foi satisfeito anteriormente na Regra 2c, temos que $\text{exc}((2,2)) = 1 \geq \text{uns}((2,2))/2$, pois $(2,2)$ envia apenas carga 1 para $(3,1)$ antes da Regra 2c. Então $(2,2)$ envia carga $1/2$ para u na Regra 2c. De agora em diante, assumimos que $\boxed{\text{A5}} (0,4) \notin C$.

Temos que $\boxed{\text{A6}} (0,3) \in C$, pois $C[(1,3)] \neq C[(2,2)] = \{(1,2), (2,2), (2,3)\}$. Além disso, $\boxed{\text{A7}} (3,4) \in C$ pois $C[(2,4)] \neq C[(1,4)] = \{(2,3)\}$. Suponha que $(4,3) \in C$. Note que $(4,3)$ não possui vizinho em U_1 , pois $C[(4,4)] \neq C[(3,4)] = \{(3,4), (4,3)\}$ implica que $(5,3) \in C$ ou $(5,4) \in C$. Portanto, pela Afirmação 4.1, $(3,3)$ e $(4,4)$ são satisfeitos por $(3,4)$ e $(4,3)$ na Regra 2b (ou anteriormente), e então $(2,4)$ é satisfeito por $(3,4)$ nas Regras 2b e 2c. Portanto, na Regra 2d, $\text{exc}(2,3) = 1$ (porque ele envia carga 1 para $(1,4)$ na Regra 1a) e $\text{uns}(2,3) \leq 2$ antes da aplicação da Regra 2d. Assim, $\text{exc}(2,3) \geq \text{uns}(2,3)/2$. Portanto, $(2,3)$ envia $1/2$ para $(3,2)$ na Regra 2d. De agora em diante, assumimos que $\boxed{\text{A8}} (4,3) \notin C$.

Temos agora que $\boxed{\text{A9}} (5,2)$ e $\boxed{\text{A9}} (6,1) \in C$, pois $C[(4,2)] \neq C[(4,1)]$ e $C[(5,1)] \neq C[(4,2)]$. Note que $(5,3) \in C$ ou $(6,2) \in C$, pois $C[(5,2)] \neq C[(5,1)]$. Em ambos os casos, $(5,2)$ não possui vizinho em U_1 . Então, na Regra 2b, $(4,3)$ é satisfeito por $(3,4)$ e $(5,2)$ pela Afirmação 4.1, e $(5,1)$ é satisfeito por $(5,2)$ e $(6,1)$ também pela Afirmação 4.1. Consequentemente, após a aplicação da Regra 2b, $\text{uns}(4,2) \leq 3$. Desta maneira, $(4,2)$ envia carga $1/2$ para $(3,2)$ pela Regra 2c.

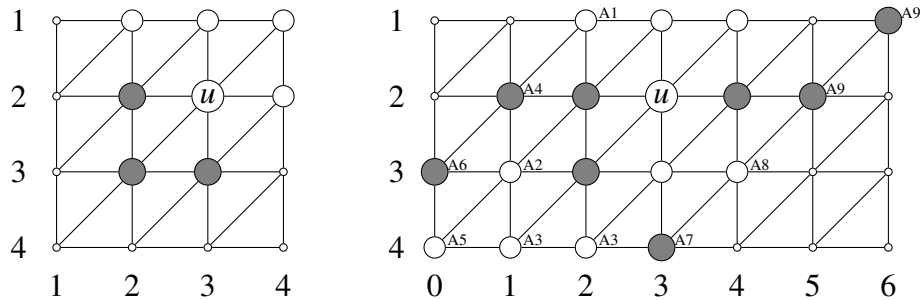


Figura 19: Dois casos suficientes para $u = (3,2) \in U_3$. □

Afirmação 4.3. *Todo vértice em C tem carga final pelo menos 1.*

Prova: Isso é equivalente a provar que todo vértice em C tem um excesso final não-negativo ou que ele envia uma carga de no máximo 2 no total. Seja v um vértice em C . O vértice v tem excesso inicial 2 e no máximo um vizinho em U_1 (tal vizinho tendo identificador $\{v\}$). Então v envia no máximo 1 para vértices em U_1 . Portanto, após a Regra 1a, v tem excesso não-negativo. Assim sendo, ele também tem excesso não-negativo após a Regra 2d, pois ele não pode enviar mais que o seu excesso em nenhuma regra desde a Regra 1b até a Regra 2d. Assim, um vértice pode ter excesso negativo somente se ele envia carga pela Regra 3 ou pela Regra 4.

Se v está na borda, então pela Afirmação 4.1, ele envia carga pelo menos $1/2$ para cada vizinho não-satisfeito na Regra 2a. Portanto, a Regra 3 e a Regra 4 nunca são aplicadas

para v e então sua carga final é pelo menos 1. Logo, assumimos que v está no centro.

Sem perda de generalidade, tomamos $v = (2, 2)$. Além disso, se v envia carga para um vizinho pela Regra 3 ou pela Regra 4, então ele não enviou nenhuma carga desde a Regra 1b até a Regra 2d. Isso porque v sempre envia carga para todos os seus vizinhos insatisfeitos.

Seja $\text{exc}'(v)$ o excesso de v após a Regra 2d. Então, se v envia carga para um vizinho pela Regra 3 ou pela Regra 4, temos $\text{exc}'(v) = 2$ se v não tem vizinho em U_1 ou $\text{exc}'(v) = 1$, caso contrário. Para qualquer j , seja $u_j(v)$ (resp. $u_{\geq j}(v)$) o número de vizinhos de v em U_j (resp. $U_{\geq j}$), e seja $u'_j(v)$ (resp. $u'_{\geq j}(v)$) o número de vizinhos de v em U_j (resp. $U_{\geq j}$) que estão insatisfeitos após a Regra 2d.

Precisamos provar que

$$\frac{1}{2}u'_2(v) + \frac{1}{4}u'_{\geq 3}(v) \leq \text{exc}'(v). \quad (2)$$

Essa equação é trivialmente verdade quando $u_{\geq 2}(v) \leq 2$ e $u_1(v) = 1$, ou $u_{\geq 2}(v) \leq 4$ e $u_1(v) = 0$. Portanto, assumimos que v ou tem um vizinho em U_1 e pelo menos 3 vizinhos em $U_{\geq 2}$, ou nenhum vizinho em U_1 e pelo menos cinco vizinhos em $U_{\geq 2}$. Vamos considerar todas as possibilidades para a vizinhança de v sob essa condição. Distinguimos essas possibilidades em três casos: v tem um vizinho em U_1 que está na borda (Caso 1); v tem um vizinho em U_1 que está no centro (Caso 2); v não possui vizinho em U_1 (Caso 3).

Caso 1: O vértice v tem um vizinho em U_1 que está na borda. Por simetria, assumimos que esse vizinho é $(3, 1)$. Como $u_{\geq 2}(v) \geq 3$, pelo menos um vértice de $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ está em $U_{\geq 2}$. Além disso, como $C[(v)] \neq C[(3, 1)]$, temos que pelo menos um vértice de $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ está em C . Temos então as possibilidades de ter 1 ou 2 vértices de $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ em C . Dividimos essas possibilidades em cinco subcasos: $(1, 2), (1, 3) \in C$ e $(2, 3) \in U$ (Subcaso 1.1), $(1, 3), (2, 3) \in C$ e $(1, 2) \in U$ (Subcaso 1.2), $(2, 3) \in C$ e $(1, 3) \in U$ (Subcaso 1.3), apenas $(1, 2)$ em C (Subcaso 1.4), apenas $(1, 3)$ em C (Subcaso 1.5). Durante a análise do Subcaso 1.3, avaliamos a possibilidade de $(1, 2)$ pertencer a C , ou seja, a possibilidade de termos $(1, 2) \in C$, $(2, 3) \in C$ e $(1, 3) \in U$.

Subcaso 1.1: $(1, 2), (1, 3) \in C$ e $(2, 3) \in U$ (ilustrado na Figura 20).

Se $(1, 1) \in C$, então $u_1((1, 2)) = 0$ e $u_{\geq 2}((1, 2)) \leq 4$. Logo $(1, 1)$ e $(1, 2)$ enviam carga $1/2$ cada para $(2, 1)$ pela Regra 2b e pela Afirmação 4.1. Logo, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$, Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Assumimos então que $\boxed{\text{A1}} (1, 1) \notin C$. Se $(1, 4) \in C$, então $u_1((1, 3)) = 0$ e $u_{\geq 2}((1, 3)) \leq 3$. Logo $(1, 4)$ e $(1, 3)$ enviam carga $1/2$ cada para $(2, 3)$ pela Regra 2b e pela Afirmação 4.1. Logo, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto v satisfaz Eq. (2) da página 56. Então assumimos que $\boxed{\text{A1}} (1, 4) \notin C$.

Se $(0, 4) \in C$, então $u_1((1, 3)) = 0$ e $u_{\geq 2}((1, 3)) \leq 3$. Consequentemente, $(0, 3)$ e $(1, 4)$ são satisfeitos por $(0, 4)$ e $(1, 3)$ na Regra 2b (ou anteriormente), $(2, 3)$ é satisfeito por $(1, 3)$ pelas Regras 2b e 2c (ou anteriormente), e então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Logo, v satisfaz Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A2}} (0, 4) \notin C$.

Temos que $\boxed{A3}$ $(0, 3) \in C$ (pois $C[(1, 3)] \neq C[(2, 2)] \supseteq \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$) e consequentemente $\boxed{A4}$ $(0, 2) \in C$ (pois $C[(1, 2)] \neq C[(1, 3)] = \{(0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$). Logo, o vértice $(1, 2)$ satisfaz $(2, 1)$ pela Regra 1a e $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz Eq. (2) da página 56.

Subcaso 1.2: $(1, 3), (2, 3) \in C$ e $(1, 2) \in U$ (ilustrado na Figura 20).

Como $C[(2, 1)] \neq C[(3, 1)]$, temos $\boxed{A1}$ $(1, 1) \in C$. Além disso, $C[(1, 3)] \neq C[(2, 2)] = \{(1, 3), (2, 3), (2, 2)\}$. Assim, pelo menos um vértice de $\{(0, 3), (0, 4), (1, 4)\}$ deve pertencer a C . Logo, $(1, 3)$ tem no máximo três vizinhos em U . Então $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(1, 3)$ pela Regra 2b (ou anteriormente) e pela Afirmação 4.1. Assim, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

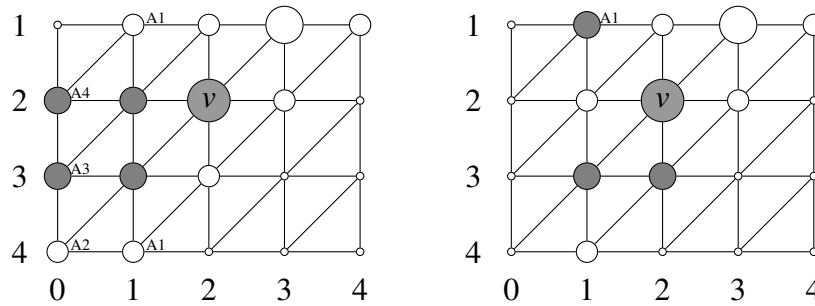


Figura 20: Subcasos 1.1 e 1.2: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$.

Subcaso 1.3: $(2, 3) \in C$ e $(1, 3) \in U$ (ilustrado na Figura 21).

Suponha que $(1, 4) \in C$. Se $(0, 4) \in C$ ou $(2, 4) \in C$, então $(1, 4)$ satisfaz $(1, 3)$ pela Regra 1a, $(2, 4)$ está em C ou $(2, 4)$ é satisfeito por $(1, 4)$ pela Regra 1a, e $(3, 2)$ e $(3, 3)$ são satisfeitos por $(2, 3)$ pela Regra 1b. Consequentemente, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, o vértice v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(0, 4) \notin C$ e $(2, 4) \notin C$, então $(3, 3) \in C$ ou $(3, 4) \in C$ (pois $C[(2, 4)] \neq C[(1, 4)] = \{(1, 4), (2, 3)\}$). Portanto, $(2, 3)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Se $(3, 3) \in C$, então $(1, 3)$ e $(2, 4)$ são satisfeitos por $(1, 4)$ e $(2, 3)$ na Regra 2b (pela Afirmação 4.1), $(3, 2)$ é satisfeito por $(2, 3)$ nas Regras 2b e 2c. Consequentemente $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(3, 4) \in C$, então $(2, 4)$ é satisfeito por $(1, 4)$ e $(3, 4)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1-(i). Nas Regras 2b e 2c, temos que $(1, 3)$ é satisfeito por $(1, 4)$ e $(2, 3)$ (pela Afirmação 4.1), $(3, 3)$ é satisfeito por $(2, 3)$ e $(3, 4)$ (também pela Afirmação 4.1) e temos também que $(3, 2)$ é satisfeito por $(2, 3)$ até a Regra 2d. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Assumimos que $\boxed{A1}$ $(1, 4) \notin C$.

Suponha que $(2, 4) \in C$. Se $(0, 4) \in C$, então $(1, 4)$ é satisfeito por $(0, 4)$ e $(2, 4)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1-(i), $(1, 3)$ é satisfeito por $(0, 4)$ e $(2, 3)$ na Regra 2b (pela Afirmação 4.1), $(3, 3)$ é satisfeito por $(2, 4)$ e $(2, 3)$ (pela Afirmação 4.1) também na Regra 2b e o vértice $(3, 2)$ é satisfeito por $(2, 3)$ nas Regras 2b e 2c. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(0, 4) \notin C$, então $(3, 3) \in C$ ou $(3, 4) \in C$ (pois $C[(2, 4)] \neq C[(1, 4)] = \{(2, 3), (2, 4)\}$). Consequentemente, $(1, 4)$ é satisfeito por $(2, 4)$ na Regra 1a, $(3, 3)$ está em C ou é satisfeito por $(2, 4)$ na Regra 1a, e $(1, 3)$ e $(3, 2)$ são satisfeitos por $(2, 3)$ nas Regras 2b

e 2c. Então, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Assumimos então que $\boxed{\text{A2}} (2,4) \notin C$.

Temos que $\boxed{\text{A3}} (4,2) \in C$, pois $C[(3,2)] \neq C[(2,3)] \supseteq \{(2,2), (2,3)\}$. Se $(1,2) \in C$, então $(1,1) \in U_{\geq 2}$, $(1,3) \in U_{\geq 3}$ e $(3,2) \in U_{\geq 3}$. Assim, $u_2(v) = 1$ e $u_{\geq 3}(v) = 2$ ou $u_2(v) = 0$ e $u_{\geq 3}(v) = 3$. Em ambos os casos, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Logo, assumimos que $\boxed{\text{A4}} (1,2) \notin C$.

Segue que $\boxed{\text{A5}} (1,1) \in C$ pois $C[(2,1)] \neq C[(3,1)] = \{v\}$. Além disso, $(3,3) \in C$ pois $C[(2,3)] \neq C[(2,2)] = \{(2,2), (2,3)\}$. Assim, $(3,2) \in U_{\geq 3}$. Além disso, $(1,2) \in U_{\geq 3}$ e $(1,3) \in U_{\geq 3}$, pois $C[(1,2)] \supset C[(2,1)] = \{(1,1), (2,2)\}$ e $C[(1,3)] \supset C[(2,2)] = \{(2,2), (2,3)\}$. Portanto, $u_2(v) = 1$ e $u_{\geq 3}(v) = 3$.

Se $(0,4) \in C$, então $(1,3)$ é satisfeito por $(0,4)$ e $(2,3)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1. Então, $u'_2(v) \leq 1$ ($(2,1) \in U_2$) e $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A6}} (0,4) \notin C$. Consequentemente, $\boxed{\text{A7}} (0,3) \in C$ pois $C[(1,3)] \neq C[(2,2)]$.

Se $(0,2) \in C$, então $(0,2)$ não possui vizinho em U_1 , pois $C[(0,1)] \neq C[(1,1)]$ implica que $(-1,1) \in C$ ou $(-1,2) \in C$. Consequentemente, $(1,2)$ é satisfeito por $(1,1)$ e $(0,2)$ na Regra 2b (pela Afirmação 4.1). Então $u'_2(v) \leq 1$ e $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$. Assim v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A8}} (0,2) \notin C$.

Temos que $\boxed{\text{A9}} (-1,3) \in C$ pois $C[(0,3)] \neq C[(0,4)]$. Além disso, $(-2,4) \in C$ pois $C[(-1,4)] \neq C[(0,3)]$. Note que $(-1,3)$ possui no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 , pois $C[(0,1)] \neq C[(1,1)]$ implica que $(-1,1) \in C$ ou $(-1,2) \in C$. Assim, $(-1,4)$ é satisfeito por $(-2,4)$ e $(-1,3)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1 e $(0,2)$ é satisfeito por $(-1,3)$ e $(1,1)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1. Consequentemente, $(1,2)$ é satisfeito por $(1,1)$ e $(0,3)$ nas Regras 2b e 2c. Assim, $u'_2(v) \leq 1$ e $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$. Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

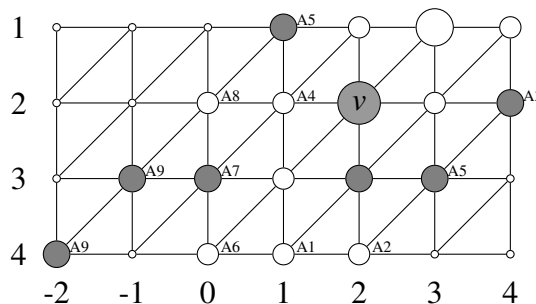


Figura 21: Subcaso 1.3: $v = (2,2)$ com um vizinho $(3,1) \in U_1$.

Subcaso 1.4: $(1,2) \in C$, $(1,3) \notin C$, e $(2,3) \notin C$ (ilustrado na Figura 22).

Como $C[(2,1)] \neq C[(2,2)] = \{(1,2), (2,2)\}$, temos $\boxed{\text{A1}} (1,1) \in C$. Se $(0,2) \in C$, então $(2,1)$ é satisfeito por $(1,1)$ na Regra 1a e $(1,3)$ é satisfeito por $(1,2)$ na Regra 1b. Então, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Desta maneira, assumimos $\boxed{\text{A2}} (0,2) \notin C$.

Como $C[(1,2)] \neq C[(2,1)] = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$, temos $\boxed{\text{A3}} (0,3) \in C$. Assim,

$(0, 2)$ e $(2, 1)$ são satisfeitos por $(1, 1)$ e $(1, 2)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1 e $(1, 3)$ é satisfeito por $(1, 2)$ nas Regras 2b e 2c. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

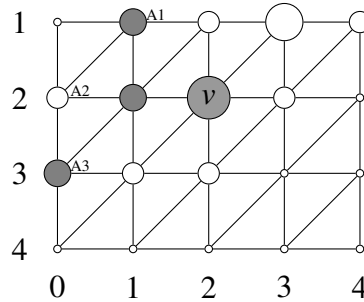


Figura 22: Subcaso 1.4: $v = (2, 2)$ com um vizinho $(3, 1) \in U_1$.

Subcaso 1.5: $(1, 3) \in C$, $(1, 2) \notin C$ e $(2, 3) \notin C$ (ilustrado na Figura 23).

Como $C[(2, 1)] \neq C[(3, 1)] = \{(2, 2)\}$, temos $\boxed{\text{A1}}$ $(1, 1)$ está em C . Suponha que $(1, 4) \in C$. Se $(0, 4) \in C$, então $(2, 3)$ é satisfeito por $(1, 4)$ na Regra 1a e $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 3)$ na Regra 1b. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(0, 4) \notin C$ e $(2, 4) \in C$, então $(0, 4)$ e $(2, 3)$ são satisfeitos por $(1, 4)$ na Regra 1a e $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 3)$ na Regra 1b. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(0, 4), (2, 4) \notin C$, então $(1, 3)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 pois $C[(0, 4)] \neq C[(1, 4)]$ ($C[(0, 4)] \supset C[(1, 4)] = \{(1, 3), (1, 4)\}$) implica que $(-1, 4) \in C$ ou $(0, 3) \in C$. Consequentemente, $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 3)$ e $(1, 1)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1 e $(2, 3)$ é satisfeito por $(1, 3)$ e $(1, 4)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2). Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A2}}$ $(1, 4) \notin C$.

Suponha $(0, 4) \in C$. Se $(2, 4) \in C$, então $(1, 3)$ tem no máximo 4 vizinhos em U e nenhum deles em U_1 . Logo $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 3)$ e $(1, 1)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1, $(2, 3)$ é satisfeito por $(1, 3)$ e $(2, 4)$ até a Regra 2b pela Afirmação 4.1. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(2, 4) \notin C$, então $C[(0, 4)] \neq C[(1, 4)]$ implica que $(-1, 4) \in C$ ou $(0, 3) \in C$. Em ambos os casos, $(1, 4)$ é satisfeito por $(0, 4)$ na Regra 1a, $(0, 3)$ está em C ou é satisfeito por $(0, 4)$ na Regra 1a e $(1, 2)$ e $(2, 3)$ são satisfeitos por $(1, 3)$ na Regra 1b. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A3}}$ $(0, 4) \notin C$.

Temos que $\boxed{\text{A4}}$ $(0, 3) \in C$, pois $C[(1, 3)] \neq C[(2, 2)] = \{(1, 3), (2, 2)\}$. Como $C[(0, 3)] \neq C[(0, 4)]$, então $(-1, 3) \in C$ ou $(0, 2) \in C$.

1. Se $(-1, 3) \in C$, então $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(0, 3)$ até a Regra 2b (pela Afirmação 4.1) pois $(0, 3)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Assim, $(1, 3)$ tem no máximo 3 vizinhos insatisfeitos após a aplicação da Regra 2b. Então, $(1, 3)$ envia carga $1/2$ para $(2, 3)$ até a Regra 2c.
2. Se $(0, 2) \in C$, então $(1, 2)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(0, 2)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1, pois $C[(0, 1)] \neq C[(1, 1)]$ implica que $(-1, 1) \in C$ ou $(-1, 2) \in C$ e consequentemente $(0, 2)$ tem no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Além disso, $(2, 3)$

recebe carga $1/2$ de $(1,3)$ até a Regra $2c$.

Em ambos os casos, $(1,2)$ é satisfeito na Regra $2b$ por $(1,1)$ e ou $(0,3)$ ou $(0,2)$ (ou anteriormente) e $(2,3)$ recebe carga $1/2$ de $(1,3)$ até a aplicação Regra $2c$. Portanto, se nós provarmos que $(2,3)$ recebe carga $1/2$ até a Regra $2d$ de um vértice distinto de $(1,3)$, então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$ e v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Se $(2,4) \in C$, então $(2,3)$ recebe carga $1/2$ de $(2,4)$ e conseguimos o resultado. Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A5}}$ $(2,4) \notin C$. Consequentemente, $\boxed{\text{A6}}$ $(3,3) \in C$, pois $C[(2,3)] \neq C[(2,2)] = \{(1,3), (2,2)\}$.

Se $(4,2) \in C$, então $u_1(v) = 1$, $u_2(v) = 1$ e $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$ pois $(1,2)$ foi satisfeito até a Regra $2b$. Então v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, nós assumimos que $\boxed{\text{A7}}$ $(4,2) \notin C$. Segue que $\boxed{\text{A8}}$ $(5,1) \in C$ pois $C[(4,1)] \neq \emptyset$. Além disso, $\boxed{\text{A8}}$ $(4,3) \in C$ pois $C[(3,3)] \neq C[2,4] = \{(3,3)\}$ e $\boxed{\text{A8}}$ $(4,4) \in C$ pois $C[(3,4)] \neq C[(3,3)] = \{(3,3), (4,3)\}$.

Se $(3,4) \in C$, então $(2,4)$ é satisfeito por $(3,4)$ na Regra $1a$. Assim, $(2,3)$ recebe carga $1/2$ de $(3,3)$ pela Afirmação 4.1 pois $(3,3)$ possui no máximo três vizinhos insatisfeitos após a aplicação da Regra $1a$. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A9}}$ $(3,4) \notin C$.

Como $C[4,3] \neq C[3,4] = \{(3,3), (4,3), (4,4)\}$, então pelo menos um vértice de $\{(5,2), (5,3)\}$ deve estar em C . Assim, o vértice $(4,3)$ tem no máximo 3 vizinhos em U . Assim, $(3,4)$ é satisfeito por $(4,4)$ e $(4,3)$ até a Regra $2b$ pela Afirmação 4.1, $(4,2)$ é satisfeito por $(4,3)$ e $(5,1)$ na Regra $2b$ pela Afirmação 4.1, e $(2,3)$ recebe carga $1/2$ de $(3,3)$ na Regra $2c$ como desejado. Isso acontece pois, após a aplicação da Regra $2b$, o vértice $(3,3)$ tem no máximo dois vizinhos insatisfeitos pertencentes a $U_{\geq 2}$.

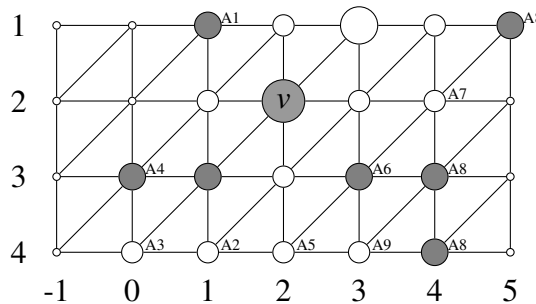


Figura 23: Subcaso 1.5: $v = (2,2)$ com um vizinho $(3,1) \in U_1$.

Caso 2: O vértice $v = (2,2)$ tem um vizinho u em U_1 o qual está no centro. Sem perda de generalidade (relacionado aos isomorfismos), assumimos que $u = (3,2)$ (Subcaso 2.1) ou $u = (2,3)$ (Subcaso 2.2).

Subcaso 2.1: Tome $u = (3,2)$ (ilustrado na Figura 24).

Como $C[(3,1)] \neq C[(3,2)] = \{v\}$, temos que $\boxed{\text{A1}}$ $(2,1)$ está em C . Se $(1,1) \in C$, então $(3,1)$ e $(1,2)$ (caso $(1,2)$ pertença a U) são satisfeitos por $(2,1)$ na Regra $1a$. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A2}}$ $(1,1) \notin C$.

Segue que $\boxed{\text{A3}}$ $(1,2) \in C$, pois $C[(2,1)] \neq C[(3,1)] = \{(2,1), (2,2)\}$. Além disso, $\boxed{\text{A4}}$ $(1,3) \in C$, pois $C[(2,2)] \neq C[(2,1)] = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$. Logo $u_{\geq 2}(v) \leq 2$ e consequentemente $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

Subcaso 2.2: Tome $u = (2, 3)$ (ilustrado na Figura 24).

Necessariamente, temos $\boxed{\text{A1}}$ $(0, 4) \in C$ e $\boxed{\text{A1}}$ $(3, 4) \in C$, pois $C[(1, 4)] \neq \emptyset$ e $C[(2, 4)] \neq \emptyset$. Além disso, $\boxed{\text{A2}}$ $(1, 1) \in C$, pois $C[(2, 1)] \neq C[(2, 2)]$.

Se $(2, 1) \in C$, então $(1, 2)$ (se $(1, 2) \in U$) e $(3, 1)$ são satisfeitos por $(2, 1)$ na Regra 1a. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A3}}$ $(2, 1) \notin C$.

Se $(3, 1) \in C$, então $(2, 1)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(3, 1)$ na Regra 2a pela Afirmação 4.1. Além disso, como $C[(2, 2)] \neq C[(3, 1)]$, então $(4, 1)$ ou $(1, 2)$ devem pertencer a C . Se $(4, 1) \in C$, então $(2, 1)$ e $(3, 2)$ são satisfeitos por $(3, 1)$ na Regra 1a. Perceba que $(2, 1)$ acaba sendo satisfeito antes da Regra 2a neste caso. Se $(1, 2) \in C$, então o vértice v tem apenas 3 vizinhos em U insatisfeitos após a aplicação da Regra 2a, uma vez que $(2, 1)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(3, 1)$ até a Regra 2a. Em ambos os casos, $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$ e v satisfaz Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A4}}$ $(3, 1) \notin C$.

Segue que $\boxed{\text{A5}}$ $(4, 1) \in C$, pois $C[(3, 1)] \neq C[(2, 3)] = \{(2, 2)\}$. Além disso, $\boxed{\text{A6}}$ $(1, 2) \in C$, pois $C[(2, 2)] \neq C[(2, 3)] = \{(2, 2)\}$. Uma vez que $(1, 2)$ tem no máximo 4 vizinhos em U e nenhum deles em U_1 , temos que $(2, 1)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(1, 2)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1 e $(1, 3)$ é satisfeito por $(1, 2)$ e $(0, 4)$ até Regra 2b pela Afirmação 4.1. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

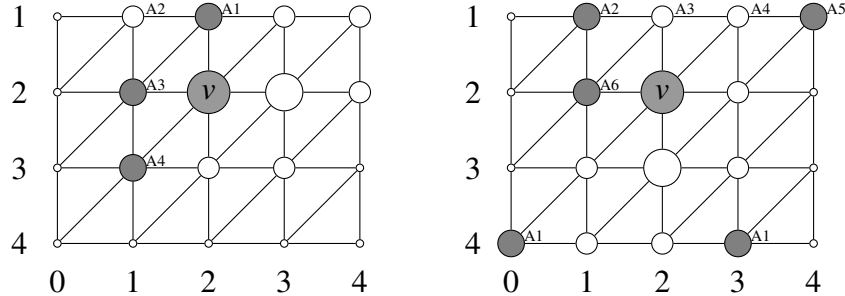


Figura 24: Subcasos 2.1 e 2.2: $v = (2, 2)$ com um vizinho U_1 que não está na borda (ou $(3, 2)$ ou $(2, 3)$).

Caso 3: v não possui vizinho em U_1 .

Como v tem pelo menos 5 vizinhos em U (caso contrário v satisfaz a Eq. (2) da página 56), então v não pode estar na borda. Assim, $\text{exc}(v) = 2$ e $u_{\geq 2}(v) \geq 5$. Em particular, v tem no máximo um vizinho em C . Além disso, se $u_2(v) \leq 2$, então $u'_{\geq 3}(v) \leq 4$ e então v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos também que $u_2(v) \geq 3$. Sem perda de generalidade (relacionado aos isomorfismos), podemos assumir que estamos em um dos seguintes casos: $(2, 1) \in C$ (Subcaso 3.1), $(1, 2) \in C$ (Subcaso 3.2), $(1, 3) \in C$ (Subcaso 3.3) e v possui nenhum vizinho em C (Subcaso 3.4).

Subcaso 3.1: $(2, 1) \in C$ (ilustrado na primeira configuração da Figura 25).

Como $C[(2, 1)] \neq C[(3, 1)] \neq C[v] = \{v, (2, 1)\}$, temos que $\boxed{\text{A1}}$ $(1, 1) \in C$ e $\boxed{\text{A1}}$ $(4, 1) \in C$. Assim, $(3, 1)$ é satisfeito por $(2, 1)$ e $(4, 1)$ até a Regra 2a pela Afirmação 4.1. Então

$u'_{\geq 2}(v) \leq 4$ e $\text{exc}'(v) = 2$. Portanto, v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

Subcaso 3.2: $(1, 2) \in C$ (ilustrado na segunda configuração da Figura 25).

Como $C[(2, 1)] \neq C[(2, 2)] = \{(1, 2), (2, 2)\}$, temos que $\boxed{\text{A1}}(1, 1) \in C$. Além disso, como $C[(1, 2)] \neq C[(2, 1)] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$, então $(1, 2)$ tem no máximo três vizinhos em U . Logo $(2, 1)$ é satisfeito por $(1, 1)$ e $(1, 2)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 4$ e $\text{exc}'(v) = 2$. Portanto v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

Subcaso 3.3: $(1, 3) \in C$ (ilustrado na terceira configuração da Figura 25).

Observe que $\boxed{\text{A1}}(1, 1) \in C$ e $\boxed{\text{A1}}(4, 1) \in C$, pois $(2, 1)$ e $(3, 1)$ estão em $U_{\geq 2}$. Note que $(1, 2) \in U_{\geq 3}$ pois $C[(1, 2)] \supset \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$. Além disso, $(2, 3)$ e $(3, 2)$ estão em $U_{\geq 3}$ pois $C[(2, 3)] \neq C[v] = \{(1, 3), (2, 2)\}$ e $C[(3, 2)] \neq C[(3, 1)] = \{(2, 2), (4, 1)\}$. Isso contradiz a hipótese $u_2(v) \geq 3$.

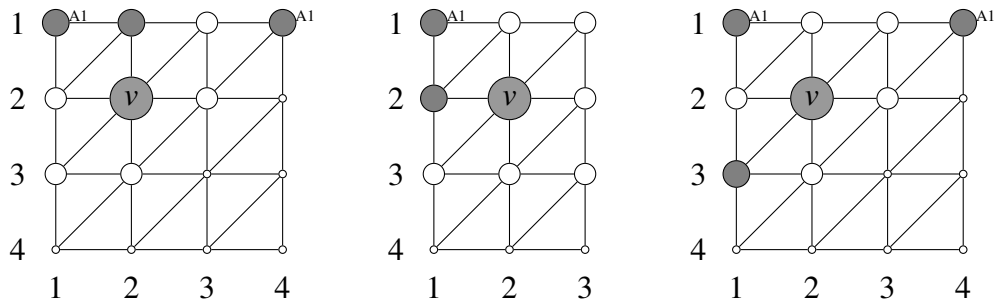


Figura 25: Subcasos 3.1, 3.2 e 3.3: $v = (2, 2)$ com nenhum vizinho em U_1 , com 1 vizinho em C e com 3 vizinhos em U_2 .

Subcaso 3.4: v não possui vizinho em C (ilustrado na Figura 26).

Como $C[(2, 1)] \neq C[(2, 2)] = \{(2, 2)\}$ e $C[(3, 1)] \neq C[(2, 2)] = \{(2, 2)\}$, temos que $\boxed{\text{A1}}(1, 1)$ e $(4, 1)$ estão em C . Temos também que $(1, 2)$ e $(3, 2)$ estão em $U_{\geq 3}$ pois $C[(1, 2)] \neq C[(2, 1)] = \{(1, 1), (2, 2)\}$ e $C[(3, 2)] \neq C[(3, 1)] = \{(2, 2), (4, 1)\}$. Lembre que assumimos que $u_2(v) \geq 3$. Então $(1, 3) \in U_2$ ou $(2, 3) \in U_2$. Sem perda de generalidade (relacionado aos isomorfismos), assumimos que $(1, 3) \in U_2$.

Suponha que $\boxed{*}(0, 3) \notin C$. Então, $\boxed{\text{A2}}(0, 2) \in C$ pois $(1, 2)$ está em $U_{\geq 3}$. Se $(-1, 3) \in C$, então $(0, 2)$ possui no máximo 4 vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Então $(0, 1)$ e $(1, 2)$ são satisfeitos por $(0, 2)$ e $(1, 1)$ na Regra 2b pela Afirmação 4.1. Além disso, $(2, 1)$ é satisfeito por $(1, 1)$ nas Regras 2b e 2c. Logo $u'_{\geq 2}(v) \leq 4$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A3}}(-1, 3) \notin C$. Consequentemente, $(-1, 2) \in C$ pois $C[(0, 2)] \neq C[(1, 1)]$. Se $(0, 3) \notin U_1$, temos que $(0, 2)$ tem no máximo 4 vizinhos em U (nenhum deles em U_1) e, assim, $u'_{\geq 2}(v) \leq 4$ e v satisfaz a Eq. (2) da página 56.

Assumimos então que $(0, 3) \in U_1$ e consequentemente $\boxed{\text{A4}}(-1, 4), (0, 4) \notin C$. Portanto, $\boxed{\text{A5}}(1, 4)$ e $\boxed{\text{A5}}(2, 4) \in C$, pois $C[(0, 4)] \neq \emptyset$ e $C[(1, 4)] \neq C[(0, 4)] = \{(1, 4)\}$. Como $C[(2, 4)] \supset C[(1, 4)] = \{(1, 4), (2, 4)\}$, então $(2, 4) \in C_{\geq 3}$. Assim, $(2, 3)$ é satisfeito por $(2, 4)$ na Regra 1a e $(1, 3)$ é satisfeito por $(1, 4)$ na Regra 1b. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 4$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos que $\boxed{**}(0, 3) \in C$.

Temos que $\boxed{A2} (0,4) \notin C$ e $\boxed{A2} (1,4) \notin C$, pois $(1,3) \in U_2$. Consequentemente, $\boxed{A3} (2,4) \in C$ pois $C[(1,4)] \neq \emptyset$. Se $(3,4)$ está em C , então ele tem um vizinho em $C \setminus \{(2,4)\}$ pois $C[(3,4)] \neq C[(2,4)]$. Logo, $(3,3) \in C$ ou $(3,3)$ é satisfeito por $(3,4)$ na Regra 1a e $(2,3)$ é satisfeito por $(2,4)$ na Regra 1b. Então $u'_{\geq 2}(v) \leq 5$ e $u'_2(v) \leq 3$. Assim, $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$ e v satisfaz a Eq. (2) da página 56. Portanto, assumimos que $\boxed{A4} (3,4) \notin C$.

Temos que $\boxed{A5} (3,3) \in C$, pois $C[(2,4)] \neq C[(1,4)] = \{(2,4)\}$. Consequentemente, $(2,3)$ e $(3,2)$ estão em $U_{\geq 3}$. Como $C[(3,3)] \neq C[(2,4)] = \{(2,4), (3,3)\}$, temos que $(4,2) \in C$ ou $(4,3) \in C$. Então, $(3,3)$ possui no máximo quatro vizinhos em U , nenhum deles em U_1 . Logo $(2,3)$ é satisfeito por $(2,4)$ e $(3,3)$ nas Regras 2a e 2b pela Afirmação 4.1. Portanto, $u'_2(v) \leq 3$ e $u'_{\geq 3}(v) \leq 2$. Assim, v satisfaz a Eq. (2) da página 56. \square

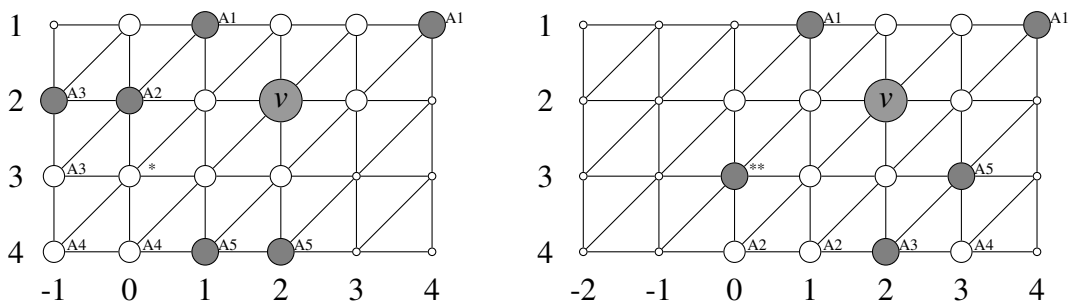


Figura 26: Subcaso 3.4: $v = (2,2)$ com nenhum vizinho em U_1 , nenhum vizinho em C e 3 vizinhos em U_2 .

\square

4.5 Grade triangular infinita com cinco linhas ou mais

Nesta seção, provaremos dois teoremas referentes à densidade mínima de um código de identificação para uma grade triangular com pelo menos 5 linhas.

Teorema 4.3. *Seja $k \geq 5$ um inteiro. Então, $d^*(\mathcal{T}_k) \geq 1/4 + 1/4k$.*

Prova: Seja C um código de identificação de \mathcal{T}_k e $U = V(\mathcal{T}_k) \setminus C$. Queremos provar pelo método da descarga que a densidade de C em $V(\mathcal{T}_k)$ é pelo menos $1/4 + 1/4k$. Para tanto, a cada vértice de C é atribuído uma carga 1 e a cada vértice de U é atribuído uma carga 0.

Dizemos que um vértice $(x,y) \in V(\mathcal{T}_k)$ está na *borda* se $y \in \{1,k\}$; caso contrário, dizemos que o vértice está no *centro*. Se v está no centro, então $\text{exc}(v) = \text{chrg}(v) - 1/4$. Se v está na borda, então $\text{exc}(v) = \text{chrg}(v) - 3/8$. Dizemos que um vértice v está satisfeito se $\text{exc}(v) \geq 0$. Em outras palavras, v é satisfeito se v está no centro e $\text{chrg}(v) \geq 1/4$ ou se v está na borda e $\text{chrg}(v) \geq 3/8$.

Iremos provar, após a aplicação de algumas regras de descarga, que todo vértice de \mathcal{T}_k estará satisfeito. Desta maneira, as duas bordas terão densidade pelo menos $3/8$ e as demais $k-2$ linhas terão densidade pelo menos $1/4$. Assim, a densidade da grade será igual a $((k-2) \cdot (1/4) + 2 \cdot (3/8))/k = 1/4 + 1/4k$ e conseguiremos o resultado.

Dado um vértice v de \mathcal{T}_k , seja $B_1(v)$ o conjunto de vizinhos de v na borda e seja

$B_2(v)$ o conjunto de vértices na borda que estão a uma distância 2 de v . Quando dizemos que v envia *todo-excesso* (resp. *meio-excesso*) para $B_i(v)$ ($i \in \{1, 2\}$), isso significa que v envia $\min\{\text{exc}(v)/b, -\text{exc}(w)\}$ (resp. $\min\{\text{exc}(v)/(2b), -\text{exc}(w)\}$) para todo vértice insatisfeito w de $B_i(v)$, onde b é o número de vértices insatisfeitos de $B_i(v)$. Nesta demonstração, aplicaremos as seguintes regras de descarga uma após a outra.

- Regra 1: Todo vértice em C envia $1/4$ para seu vizinho em U_1 (se existir) e $1/8$ para cada um de seus vizinhos em $U_{\geq 2}$;
- Regra 2: Todo vértice v na borda com excesso positivo envia todo-excesso para $B_1(v)$;
- Regra 3: Todo vértice v na linha 2 ou $k - 1$ com excesso positivo envia todo-excesso para $B_1(v)$;
- Regra 4: Todo vértice v na borda com excesso positivo envia todo-excesso para $B_2(v)$;
- Regra 5: Todo vértice v na linha 2 ou $k - 1$ com excesso positivo envia todo-excesso para $B_2(v)$;
- Regra 6: Todo vértice v na linha 3 ou $k - 2$ com excesso positivo envia meio-excesso para $B_2(v) \cap (\mathbb{Z} \times \{1\})$, se estiver na linha 3, ou envia meio-excesso para $B_2(v) \cap (\mathbb{Z} \times \{k\})$, se estiver na linha $k - 2$.

Uma observação importante a ser feita com relação à Regra 6 é que, quando o $k = 5$, temos que a linha 3 é a mesma linha $k - 2$. Desta maneira, um vértice que esteja nessa linha pode enviar carga para as duas bordas. Por esse motivo, no meio-excesso, o excesso de carga do vértice é dividido por 2. Desta maneira, metade do excesso é destinado para cada borda.

Sejam $\text{chrg}_1(v)$ e $\text{exc}_1(v)$ a carga e o excesso de v após a aplicação da Regra 1. Note que $\text{chrg}_1(v) \geq 1/4$ para todo vértice v pois:

- se $v \in U_1$, então v recebe carga $1/4$;
- se $v \in U_{\geq 2}$, então v recebe carga pelo menos $2 \cdot (1/8) = 1/4$;
- se $v \in C$ e não possui vizinho em U_1 , então $\text{chrg}_1(v) \geq 1 - 6 \cdot (1/8) = 1/4$;
- se $v \in C$ e possui vizinho em U_1 , então $\text{chrg}_1(v) \geq 1 - (1/4) - 4 \cdot (1/8) = 1/4$ (pois ele tem no máximo quatro vizinhos em $U_{\geq 2}$).

Como um vértice v no centro está satisfeito se $\text{chrg}(v) \geq 1/4$, então todos vértices no centro estão satisfeitos após a aplicação da Regra 1. Além disso, alguns deles possuem excesso positivo. Alguns casos de vértices que possuem excesso positivo após a aplicação da Regra 1 são listados a seguir:

- (a) se $v \in C$ está na borda, então $\text{chrg}_1(v) \geq 1 - 4 \cdot (1/8) = 1/2$ e $\text{exc}_1(v) \geq 1/8$;
- (b) se $v \in C_3$ está no centro, então $\text{chrg}_1(v) \geq 1 - (1/4) - 3 \cdot (1/8) = 3/8$ e $\text{exc}_1(v) \geq 1/8$;
- (c) se $v \in C_{\geq 4}$ está no centro, então $\text{chrg}_1(v) \geq 1 - (1/4) - 2 \cdot (1/8) = 1/2$ e $\text{exc}_1(v) \geq 1/4$;
- (d) se $u \in U_{\geq 3}$, então $\text{chrg}_1(u) \geq 3 \cdot (1/8) = 3/8$. Se u está no centro, então $\text{exc}_1(u) \geq 1/8$;
- (e) se $u \in U_{\geq 4}$, então $\text{chrg}_1(u) \geq 4 \cdot (1/8) = 1/2$. Se u está no centro, então $\text{exc}_1(u) \geq 1/4$.

Observe que nas Regras 2 à 6, um vértice com excesso positivo divide seu excesso e o envia para seus vizinhos insatisfeitos. Logo, uma vez que um vértice está satisfeito, ele nunca se torna insatisfeito após a aplicação das regras. Todos os vértices do centro estão satisfeitos

após a aplicação da Regra 1 e, por (a), temos que todo vértice da borda que está em C também está satisfeito após a aplicação da Regra 1. Então, temos apenas que provar que todo vértice u da borda que está em U está satisfeito após a aplicação de alguma regra. Isso é equivalente a mostrar que u recebe pelo menos $1/8$ após a Regra 1, uma vez que u já recebe carga pelo menos $1/4$ pela Regra 1.

Sem perda de generalidade, tome $u = (1, 1)$. Então u tem pelo menos um vizinho em C pois $C[u] \neq \emptyset$. Se ambos $(0, 1)$ e $(2, 1)$ estão em C , então, por (a), $\text{exc}_1((0, 1)) \geq 1/8$ e $\text{exc}_1((2, 1)) \geq 1/8$. Portanto, $(0, 1)$ e $(2, 1)$ enviam carga pelo menos $1/16$ cada para u na Regra 2. Assim, u recebe carga pelo menos $1/8$ na aplicação da Regra 2 e conseguimos o resultado.

Suponha, agora, que exatamente um entre $\{(0, 1), (2, 1)\}$ está em C . Sem perda de generalidade (relacionado aos isomorfismos), assumamos que $(0, 1) \notin C$ e $(2, 1) \in C$. Por (a), $\text{exc}_1((2, 1)) \geq 1/8$. Se $(3, 1) \in C$, então $(1, 1)$ é o único vizinho de $(2, 1)$ que está na borda e não pertence a C . Então, $(2, 1)$ envia carga $1/8$ para $(1, 1)$ pela Regra 2 e conseguimos o resultado. Agora, assumamos que $(3, 1) \notin C$. Como os três conjuntos $C[(1, 1)]$, $C[(2, 1)]$ e $C[(1, 2)]$ são distintos, então $|C[(1, 2)]| \geq 3$. Assim, $(1, 2) \in C_{\geq 3}$ ou $(1, 2) \in U_{\geq 3}$. Se $(1, 2) \in C$, então $\text{exc}_1((2, 1)) \geq 1/8$ por (b). Se $(1, 2) \in U$, então $\text{exc}_1((2, 1)) \geq 1/8$ por (d). Consequentemente, $(1, 2)$ envia $1/8$ para u pela Regra 3 e conseguimos o resultado. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A1}} (0, 1) \notin C$ e $\boxed{\text{A1}} (2, 1) \notin C$.

Como $C[(1, 1)] \neq \emptyset$, então pelo menos um entre $\{(0, 2), (1, 2)\}$ está em C . Se ambos $(0, 2)$ e $(1, 2)$ estão em C , então ambos estão em $C_{\geq 3}$ pois $C[(1, 1)]$, $C[(0, 2)]$ e $C[(1, 2)]$ são todos distintos. Portanto, por (b), $\text{exc}_1((0, 2)) \geq 1/8$ e $\text{exc}_1((1, 2)) \geq 1/8$. Então $(0, 2)$ e $(1, 2)$ enviam carga pelo menos $1/16$ cada para u na Regra 3 e, então, u está satisfeito. Daqui em diante, assumimos que exatamente um vértice entre $(0, 2)$ e $(1, 2)$ está em C . Sem perda de generalidade (relacionado aos isomorfismos), assumimos que $\boxed{\text{A2}} (1, 2) \in C$ e $\boxed{\text{A2}} (0, 2) \notin C$.

Suponha que $(3, 1) \notin C$. Então $(2, 2) \in C$, pois $C[(2, 1)] \neq C[(1, 1)] = \{(1, 2)\}$. Além disso, ambos $(1, 2)$ e $(2, 2)$ estão em $C_{\geq 3}$ pois os três conjuntos $C[(1, 2)]$, $C[(2, 2)]$ e $C[(2, 1)] = \{(1, 2), (2, 2)\}$ devem ser diferentes. Então, de acordo com (b), $\text{exc}_1((1, 2)) \geq 1/8$ e $\text{exc}_1((2, 2)) \geq 1/8$. Portanto, na Regra 3, $(1, 2)$ envia carga $1/16$ para $(1, 1)$ e $(2, 1)$, e $(2, 2)$ envia carga $1/16$ para $(2, 1)$ e $(3, 1)$. Logo, após a Regra 3, $(2, 1)$ recebe carga pelo menos $1/8$. Como $(2, 1)$ recebe carga pelo menos $1/4$ na Regra 1, então $(2, 1)$ está satisfeito. Contudo, note que $(1, 1)$ ainda precisa de carga pelo menos $1/16$ para ficar satisfeito. Os possíveis vértices insatisfeitos de $B_2((1, 3))$ são $(1, 1)$ e $(3, 1)$. Note que $C[(1, 3)]$, $C[(1, 2)]$ e $C[(2, 1)]$ são todos distintos e contém $\{(1, 2), (2, 2)\} = C[(2, 1)]$. Logo, $(1, 3)$ está ou em $C_{\geq 4}$ ou em $U_{\geq 4}$. Em ambos os casos, de acordo com (c) ou (e), temos que $\text{exc}_1((1, 3)) \geq 1/4$. Portanto, $(1, 3)$ envia carga $1/16$ para u (e para $(3, 1)$) na Regra 6 e, então, u está satisfeito. Daqui em diante, assumimos $\boxed{\text{A3}} (3, 1) \in C$.

Assuma agora que $(2, 2) \in C$. Então $(2, 1)$ está em U_3 . Além disso, temos que $(2, 2) \in C_{\geq 4}$ pois $C[(2, 2)] \neq C[(2, 1)] = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$. Assim, pelo menos um entre $\{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ deve pertencer a C . Logo, $(2, 2)$ tem um vizinho na borda em U_3

e no máximo outros dois vizinhos em U , todos no centro e nenhum deles em U_1 . Assim, $\text{chrg}_1((2,2)) \geq 1 - 3 \cdot 1/8 = 5/8$ e $\text{exc}_1((2,2)) \geq 5/8 - 1/4 = 3/8$. Como $(2,1)$ está em U_3 e na borda então, após a aplicação da Regra 1, $(2,1)$ estará satisfeito. Portanto, $B_2((2,2))$ possui, no máximo, $(1,1)$ e $(4,1)$. Então, $(2,2)$ envia carga pelo menos $1/8$ para $(1,1)$ na Regra 5. Dessa maneira, $(1,1)$ está satisfeito. Portanto, assumimos $\boxed{\text{A4}}$ $(2,2) \notin C$.

Como $(2,2) \notin C$ e $C[(2,2)] \neq C[(2,1)] = \{(1,2), (3,1)\}$, então $(2,2) \in U_{\geq 3}$. Assim, por (d), $\text{exc}_1((2,2)) \geq 1/8$. Se $(4,1) \in C$, então $(3,1)$ tem no máximo 3 vizinhos em U e nenhum deles em U_1 . Portanto, após a aplicação da Regra 1, os seus vizinhos do centro estarão satisfeitos e $\text{chrg}_1((3,1)) \geq 1 - 3 \cdot 1/8 = 5/8$ e $\text{exc}_1((3,1)) \geq 5/8 - 3/8 = 1/4$. Assim, na $(2,1)$ está será satisfeito por $(3,1)$ na Regra 2. Logo, antes da Regra 5, o único vértice insatisfeito em $B_2(2,2)$ é $(1,1)$. Então, na Regra 5, $(1,1)$ é satisfeito por $(2,2)$. Portanto, assumimos que $\boxed{\text{A5}}$ $(4,1) \notin C$.

Dado que $C[(1,2)] \neq C[(1,1)] = \{(1,2)\}$, temos que pelo menos um entre $\{(0,3), (1,3)\}$ deve pertencer a C . Assim, $(1,3)$ está ou em $U_{\geq 3}$ ou está em $C_{\geq 3}$ pois $C[(1,3)] \neq C[(1,2)]$. Portanto, $\text{exc}_1((1,3)) \geq 1/8$ por (b) ou por (d). Logo, meio-excesso de $(1,3)$ na Regra 6 é pelo menos $1/16$. Assuma que $(3,2)$ está em C . Então $(3,2)$ tem pelo menos dois vizinhos em C pois $C[(3,2)] \neq C[(3,1)] = \{(3,1), (3,2)\}$. Portanto, $\text{exc}_1((3,2)) \geq 1/8$ por (b). Assim, $(4,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ e $(3,2)$ nas Regras 2 ($(3,1)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 3 ($(3,2)$ envia carga pelo menos $1/16$); $(2,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ e $(2,2)$ nas Regras 2 ($(3,1)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 3 ($(2,2)$ envia carga pelo menos $1/16$); e $(2,2)$ envia $1/16$ para $(1,1)$ na Regra 5 pois, na aplicação da Regra 5, $(1,1)$ será o único vértice insatisfeito de $B_2((2,2))$. Nos resta mostrar que $(1,1)$ recebe carga pelo menos $1/16$ de um outro vértice além de $(2,2)$. Note que no momento da aplicação da Regra 6, o único vértice da linha 1 que pode estar insatisfeito em $B_2((1,3))$ é $(1,1)$, já que $(2,1)$ e $(3,1)$ já estarão satisfeitos até a aplicação Regra 5. Assim, pela Regra 6, $(1,1)$ recebe pelo meio-excesso (ou seja, pelo menos $1/16$) de $(1,3)$. Daqui em diante, assumimos que $\boxed{\text{A6}}$ $(3,2) \notin C$.

Suponha que $(5,1) \in C$. Então $(4,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ ($\text{exc}_1((3,1)) \geq 1/8$ por (a)) e $(5,1)$ ($\text{exc}_1((5,1)) \geq 1/8$ por (a)) na Regra 2 (cada um envia pelo menos $1/16$); $(2,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ e $(2,2)$ ($\text{exc}_1((2,2)) \geq 1/8$ por (d)) nas Regras 2 ($(3,1)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 3 ($(2,2)$ envia carga pelo menos $1/16$); $(1,1)$ é satisfeito por $(2,2)$ e $(1,3)$ ($\text{exc}_1((1,3)) \geq 1/8$ por (b) ou (d)) nas Regra 5 ($(2,2)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 6 ($(1,3)$ envia carga pelo menos $1/16$). Daqui em diante, assumimos $\boxed{\text{A7}}$ $(5,1) \notin C$.

Segue $\boxed{\text{A8}}$ $(4,2) \in C$ pois $C[(4,1)] \neq C[(3,1)] = \{(3,1)\}$. Consequentemente, $(3,2) \in U_{\geq 3}$ pois $C[(3,2)] \neq C[(4,1)] = \{(3,1), (4,2)\}$. Logo, $(4,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ ($\text{exc}_1((3,1)) \geq 1/8$ por (a)) e $(3,2)$ ($\text{exc}_1((3,2)) \geq 1/8$ por (b)) nas Regras 2 ($(3,1)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 3 ($(3,2)$ envia carga pelo menos $1/16$); $(2,1)$ é satisfeito por $(3,1)$ e $(2,2)$ ($\text{exc}_1((2,2)) \geq 1/8$ por (d)) nas Regras 2 ($(3,1)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 3 ($(2,2)$ envia carga pelo menos $1/16$); $(1,1)$ é satisfeito por $(2,2)$ e $(1,3)$ ($\text{exc}_1((1,3)) \geq 1/8$ por (b) ou (d)) nas Regra 5 ($(2,2)$ envia carga pelo menos $1/16$) e 6 ($(1,3)$ envia carga pelo menos $1/16$). \square

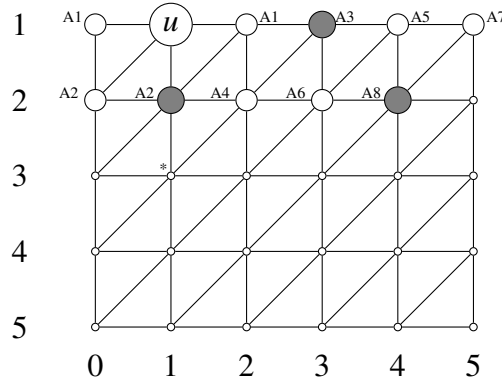


Figura 27: Prova do Teorema 4.3: $u \in U$ na borda de \mathcal{T}_k com $k \geq 5$.

Agora, vamos demonstrar o principal resultado desta subseção.

Teorema 4.4. *Seja $k \geq 5$ um inteiro. Se k é ímpar (Caso 1), então $d^*(\mathcal{T}_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}$. Se k é par (Caso 2), então $\frac{1}{4} + \frac{1}{4k} \leq d^*(\mathcal{T}_k) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$.*

Prova: Caso 1: Assuma primeiro que k é ímpar. Seja $D_k = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in [k], x \text{ e } y \text{ são ímpares}\}$ (veja a Figura 28 como um exemplo com $k = 5$). Note que D_k é um código de identificação para qualquer \mathcal{T}_k com k ímpar. De fato, $C[(x, y)] = \{(x, y)\}$, se x, y são ímpares; $C[(x, y)] = \{(x-1, y), (x+1, y)\}$, se x é par e y ímpar; $C[(x, y)] = \{(x, y-1), (x, y+1)\}$, se x é ímpar e y é par; e $C[(x, y)] = \{(x-1, y+1), (x+1, y-1)\}$, se x, y são pares.

Como D_k tem $(k+1)/2$ linhas com densidade $1/2$ e $(k-1)/2$ linhas com densidade 0 , então $d(D_k, \mathcal{T}_k) = \frac{1}{k} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{2} \right) + \left(0 \cdot \frac{k-1}{2} \right) \right) = 1/4 + 1/(4k)$. Logo, pelo Teorema 4.3, temos $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(4k)$.

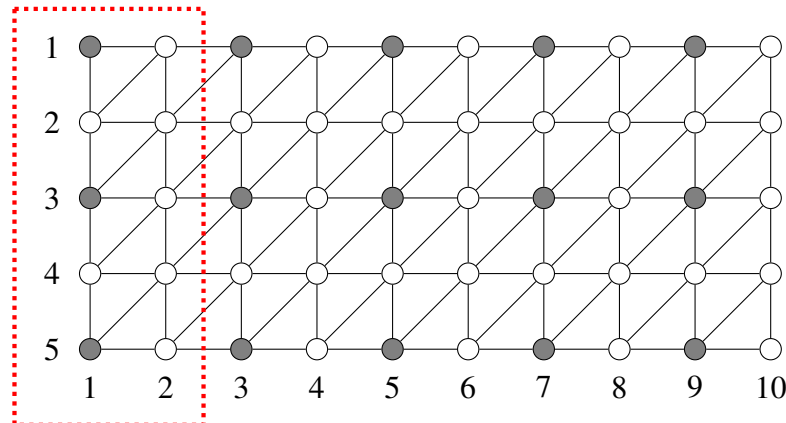


Figura 28: Código de identificação D_5 de \mathcal{T}_5 com densidade $3/10$.

Caso 2: Assuma agora que $k \geq 6$ é par. Seja $D_k = D_{k-3} \cup \{(x, k-1) : x \in \mathbb{Z}\}$ (ilustrado na Figura 29 como um exemplo), onde D_{k-3} é o código definido no Caso 1 acima (ilustrado na Figura 28) quando $k-3 \geq 5$. Se $k-3 = 3$, então $D_{k-3} = \{(x, 1) \mid x \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(x, 3) \mid x \equiv 1 \pmod{2}\}$ (ilustrado na Figura 30). Note que D_k é um código de identificação de \mathcal{T}_k . Como D_k tem $(k-2)/2$ linhas com densidade $1/2$, uma linha com densidade 1 e as outras $k/2$ linhas com densidade 0 , então $d(D_k, \mathcal{T}_k) = \frac{1}{k} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k-2}{2} \right) + 1 + \left(0 \cdot \frac{k}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$. Assim, pelo Teorema 4.3, temos $\frac{1}{4} + \frac{1}{4k} \leq d^*(\mathcal{T}_k) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$. \square

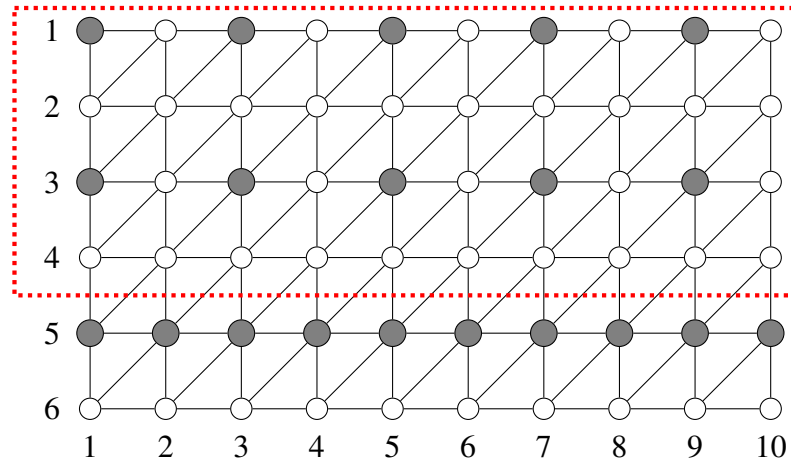


Figura 29: Código de identificação D_6 de \mathcal{T}_6 com densidade $1/3$.

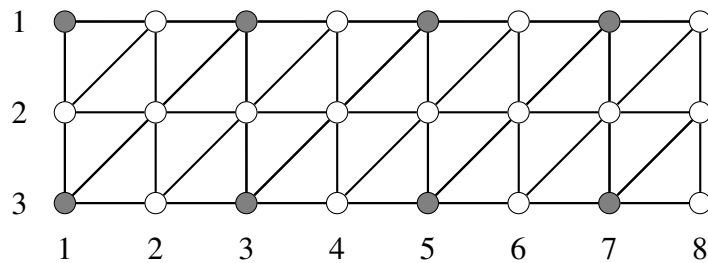


Figura 30: Código de identificação $D_{3,a}$ de \mathcal{T}_3 com densidade $1/3$.

Após muitas tentativas de elaboração de um código de identificação para $k \geq 8$ par, não encontramos código com densidade menor do que o apresentado como exemplo na Figura 29. Além disso, temos o fato de que o código mostrado na Figura 29 utiliza o código de identificação ótimo para um número k ímpar de linhas (veja a Figura 30) nas suas $k - 2$ primeiras linhas. Isso nos leva a conjecturar que, para $k \geq 8$ par, a densidade ótima seja o limite superior.

Conjectura 4.1. *Seja $k \geq 8$ um inteiro par. Então $d^*(\mathcal{T}_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$.*

5 GRADES KING

O objetivo deste capítulo é demonstrar alguns resultados sobre código de identificação em grades *king*. Esses resultados foram apresentados no *IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium - LAGOS* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017b) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2018 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2018).

5.1 Introdução

Nesse capítulo, estudamos as *grades king*, que são o produto forte de dois caminhos. Dado dois grafos G e H , o *produto forte* de G e H , denotado por $G \boxtimes H$, é o grafo com o conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e o conjunto de arestas:

$$\begin{aligned} E(G \boxtimes H) = & \{(a, b)(a, b') : a \in V(G) \text{ e } bb' \in E(H)\} \\ & \cup \{(a, b)(a', b) : aa' \in E(G) \text{ e } b \in V(H)\} \\ & \cup \{(a, b)(a', b') : aa' \in E(G) \text{ e } bb' \in E(H)\}. \end{aligned}$$

O *caminho infinito nos dois sentidos*, denotado por $P_{\mathbb{Z}}$, é o grafo com conjunto de vértices \mathbb{Z} e o conjunto de arestas $\{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{Z}\}$. O *caminho infinito em um sentido*, denotado por $P_{\mathbb{N}}$, é o grafo com o conjunto de vértices \mathbb{N} e o conjunto de arestas $\{\{i, i+1\} : i \in \mathbb{N}\}$. O *caminho* é um subgrafo conexo de $P_{\mathbb{Z}}$. Em particular, para todo inteiro positivo k , o *caminho finito de comprimento $k-1$* , denotado por P_k , é o subgrafo de $P_{\mathbb{Z}}$ induzido por $\{1, 2, \dots, k\}$.

A *grade king* é o produto forte de dois caminhos (finitos ou infinitos). Se uma *grade king* é o resultado do produto forte de dois caminhos infinitos, então temos uma *grade king infinita*. Caso contrário, diremos que temos uma *grade king finita* apesar eventualmente termos uma dimensão infinita. A *grade king plana* é $\mathcal{G}_K = P_{\mathbb{Z}} \boxtimes P_{\mathbb{Z}}$, a *grade king meio-plana* é $\mathcal{H}_K = P_{\mathbb{Z}} \boxtimes P_{\mathbb{N}}$ e a *grade king um quarto-plana* é $\mathcal{Q}_K = P_{\mathbb{N}} \boxtimes P_{\mathbb{N}}$. A *grade king de altura k* ou a *grade king limitada à k linhas* é $\mathcal{K}_k = P_{\mathbb{Z}} \boxtimes P_k$. Note que toda *grade king* é um subgrafo induzido de \mathcal{G}_K .

Em 2002, Charon *et al.* (CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN, 2002b) provaram que $d^*(\mathcal{G}_K)$ é $2/9 \approx 0.222$. Eles elaboraram o recorte de código representado na Figura 31, que gera um código periódico do plano com períodos $(0, 6)$ e $(6, 0)$, produzindo um código de identificação C_{∞} da *grade king* infinita com densidade $2/9 \approx 0.222$.

Neste capítulo, provaremos primeiro que \mathcal{G}_K é a *grade king* com a menor densidade de código de identificação: para toda *grade king* G , $d^*(G) \geq 2/9$ (Teorema 5.1). Nossa prova utiliza o Método da Descarga. A vantagem desse método é que ele nos permite estipular melhores limites inferiores para algumas *grades king*. Um fato interessante é que faremos o uso do Método da Descarga em uma classe de grafo que não é planar.

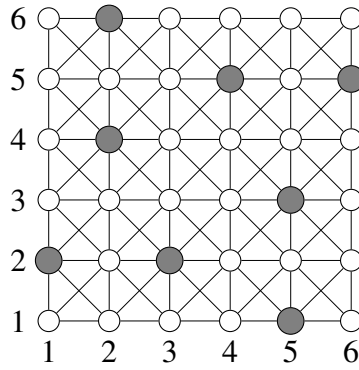


Figura 31: Recorte gerando um código de identificação ótimo da grade *king* infinita. Os vértices pretos são os vértices que pertencem ao código.

Primeiramente, na Seção 5.2, nós provamos que $d^*(G) > 2/9$ para todas as grades *king* G finitas (Teorema 5.2). Em seguida, nós consideramos as grades *king* com um número limitado de linhas. Na Seção 5.3, consideramos grades *king* de altura pelo menos 7. Provamos que $d^*(\mathcal{K}_k) \geq 2/9 + \frac{8}{81k}$ para todo $k \geq 7$ (Teorema 5.3). Além disso, nós provamos que $d^*(\mathcal{K}_k) \leq 2/9 + 6/(18k)$ se $k = 3p$, $d^*(\mathcal{K}_k) \leq 2/9 + 8/(18k)$ se $k = 3p + 1$, e $d^*(\mathcal{K}_k) \leq 2/9 + 7/(18k)$ se $k = 3p + 2$, para $p \in \mathbb{N}$ (Teorema 5.4). Claramente, $d^*(\mathcal{K}_1) = 1/2 = 0.5$ (pois $\mathcal{K}_1 = \mathcal{S}_1 = P_{\mathbb{Z}}$) e \mathcal{K}_2 não possui código de identificação, pois $N[(a, 1)] = N[(a, 2)]$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Na Seção 5.4, mostramos o código de identificação ótimo de grades *king* de altura 3, 4, 5 e 6. Provamos que $d^*(\mathcal{K}_3) = 1/3 \approx 0.333$ (Teorema 5.7), $d^*(\mathcal{K}_4) = 5/16 = 0.3125$ (Teorema 5.8), $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15 \approx 0.2666$ (Teorema 5.5) e $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18 \approx 0.2777$ (Teorema 5.6). Esses resultados estão sintetizados na Tabela 5. Além disso, todos esses resultados implicam que \mathcal{G}_K , \mathcal{H}_K e \mathcal{Q}_K são as únicas grades *king* que possuem um código de identificação com densidade $2/9$, uma vez que pode-se derivar de C_∞ códigos de identificação com densidade $2/9$ para \mathcal{H}_K e para \mathcal{Q}_K .

5.2 Limites inferiores gerais para grades *king*

Nesta seção, provaremos primeiro que $d^*(G) \geq 2/9 \approx 0.222$, se G é uma grade *king* finita ou infinita (Teorema 5.1) e, por fim, provaremos que $d^*(G) > \frac{2}{9}$, se G é uma grade *king* finita (Teorema 5.2).

Teorema 5.1. *Se G é uma grade *king* finita ou infinita, então $d^*(G) \geq 2/9$.*

Prova: Seja G uma grade *king* e C um código de identificação de G . Definimos $U = V(G) \setminus C$. Devemos provar que $d(C, G) \geq 2/9$. Usamos o Método da Descarga para tal. A carga inicial de um vértice v é 1 se $v \in C$ e 0 caso contrário. Nós então aplicamos algumas regras de descarga locais. Devemos provar que a carga final de todo vértice em G é pelo menos $2/9$. Isso implica o resultado.

Seja G uma grade *king* finita. Um *vértice cheio* é um vértice tal que seus oito vizinhos em \mathcal{G}_K estão em G , caso contrário ele é um *vértice da borda*. Observe que todo vértice

Número k de linhas	Densidade ótima
Grade <i>king</i> finita	$> 2/9 \approx 0.222$ Teorema 5.2
1	$1/2 = 0.5$ Corolário 1.1
2	Não existe.
3	$1/3 \approx 0.333$ Teorema 5.7
4	$5/16 = 0.3125$ Teorema 5.8
5	$4/15 \approx 0.2666$ Teorema 5.5
6	$5/18 \approx 0.2777$ Teorema 5.6
$k \geq 7$ e $k = 3p$	$\geq 2/9 + 8/(81k)$ Teorema 5.3 $\leq 2/9 + 6/(18k)$ Teorema 5.4
$k \geq 7$ e $k = 3p + 1$	$\geq 2/9 + 8/(81k)$ Teorema 5.3 $\leq 2/9 + 8/(18k)$ Teorema 5.4
$k \geq 7$ e $k = 3p + 2$	$\geq 2/9 + 8/(81k)$ Teorema 5.3 $\leq 2/9 + 7/(18k)$ Teorema 5.4

Tabela 5: Densidades ótimas de Código de Identificação para grades *king* com número limitado de linhas.

Fonte: Próprio autor.

da borda tem no máximo cinco vizinhos em G . As próximas Afirmações nos auxiliarão a provar o Teorema 5.2.

Afirmação 5.1. *Sejam u e v dois vértices em C_2 . Então u e v não são adjacentes.*

Prova. Suponha, por contradição, que dois vértices u e v em C_2 são adjacentes. Então $C[u] = C[v] = \{u, v\}$. Uma contradição. Portanto, dois vértices em C_2 não podem ser vizinhos. \diamond

Afirmção 5.2. Se $(a, b) \in C$, $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\} \subseteq U$ e $(a+1, b) \notin U_1$, então pelo menos um vértice de $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\}$ está em $U_{\geq 3}$.

Prova. Suponha que $(a, b) \in C$ e que $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\} \subseteq U$. Se $(a+1, b) \in U_2$, então seu identificador está contido ou no identificador de $(a+1, b-1)$ ou no identificador de $(a+1, b+1)$. Portanto, um desses dois vértices está em $U_{\geq 3}$. \diamond

Afirmção 5.3. As seguintes propriedades são verdadeiras:

- (i) Todo vértice em C tem no máximo um vizinho em U_1 .
- (ii) Todo vértice cheio que pertence a C_2 tem pelo menos três vizinhos em $U_{\geq 3}$.
- (iii) Todo vértice cheio que pertence a C_3 tem um vizinho em $U_{\geq 3}$.

Prova. (i) Todos os vizinhos de um vértice v em C têm v em seus identificadores. Como todos os identificadores são distintos, então no máximo um deles é $\{v\}$.

(ii) Seja $v = (a, b)$ um vértice cheio que pertence a C_2 e seja w seu vizinho que pertence a C . Então v e w possuem dois vizinhos x e y em comum cujos identificadores contêm $\{v, w\}$. Como $\{v, w\}$ é o identificador de v , ele não pode ser o identificador de x ou de y os quais, conseqüentemente, devem estar em $U_{\geq 3}$. Ademais, por simetria, assumimos que $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\} \cap \{w, x, y\} = \emptyset$ e $(a+1, b) \notin U_1$. Então, pela Afirmção 5.2, existe um vértice, distinto de x e y , pertencente a $U_{\geq 3}$ em $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\}$.

(iii) Seja $v = (a, b)$ um vértice cheio pertencente a C_3 e sejam u_1 e u_2 seus dois vizinhos em C . Se um vértice w vizinho de v e pertencente a U é adjacente a u_1 e u_2 , então w está em $U_{\geq 3}$ e nós temos o resultado. caso contrário, então u_1 e u_2 devem ser diagonalmente simétricos com respeito a v , isto é, ou $\{u_1, u_2\} = \{(a-1, b-1), (a+1, b+1)\}$ ou $\{u_1, u_2\} = \{(a-1, b+1), (a+1, b-1)\}$. Por simetria, assumimos que estamos no primeiro caso. Assim, $\{u_1, v\}$ pertence aos identificadores de $(a, b-1)$ e $(a-1, b)$. Portanto um deles deve estar em $U_{\geq 3}$. \diamond

Afirmção 5.4. Todo vértice (a, b) em C_1 não possui vizinhos em U_1 e possui no máximo seis vizinhos em U_2 . Ademais, se ele tem seis vizinhos em U_2 , então ou $\{(a-1, b-2), (a-2, b-1), (a+2, b+1), (a+1, b+2)\} \subseteq C$ ou $\{(a+1, b-2), (a+2, b-1), (a-2, b+1), (a-1, b+2)\} \subseteq C$.

Prova. Seja $v = (a, b)$ um vértice em C_1 . Seu identificador é $\{v\}$. Além disso, todos os seus vizinhos possuem um identificador contendo v mas distinto de $\{v\}$. Portanto, eles não pertencem a U_1 .

Agora vamos provar que v tem no máximo seis vizinhos U_2 . Se v é um vértice da borda, então isso é trivialmente verdadeiro pois v possui cinco vizinhos. Então assumimos que v é um vértice cheio.

Pela Afirmção 5.2 e por simetria, existe um vértice que pertence a $U_{\geq 3}$ em cada um dos quatro conjuntos a seguir: $\{(a+1, b-1), (a+1, b), (a+1, b+1)\}$, $\{(a-1, b-1), (a-1, b), (a-1, b+1)\}$, $\{(a-1, b-1), (a, b-1), (a+1, b-1)\}$ e $\{(a-1, b+1), (a, b+1), (a+1, b+1)\}$. Daqui em diante, se v tem seis vizinhos em U_2 e somente dois em $U_{\geq 3}$, então

esses dois vizinhos em $U_{\geq 3}$ são ou $(a-1, b-1)$ e $(a+1, b+1)$ ou $(a-1, b+1)$ e $(a+1, b-1)$.

Assumimos que $(a-1, b-1)$ e $(a+1, b+1)$ são os dois únicos vizinhos de v em $U_{\geq 3}$. Então $(a-1, b)$ e $(a-1, b+1)$ estão em U_2 e possuem identificadores distintos. Então, além de v , $(a-1, b)$ e $(a-1, b+1)$ devem possuir um único vizinho w em C . Note que o vizinho w de $(a-1, b)$ não pode pertencer à vizinhança $(a-1, b+1)$ pois, caso contrário, ou $C[(a-1, b)] = C[(a-1, b+1)]$ ou pelo menos um vértice entre $(a-1, b)$ e $(a-1, b+1)$ pertence a $U_{\geq 3}$.

Desta maneira, a única forma de termos $(a-1, b) \in U_2$, $(a-1, b+1) \in U_2$ e $C[(a-1, b)] \neq C[(a-1, b+1)]$ é termos $(a-2, b-1)$ pertencendo C . Assim, o identificador de $(a-1, b)$ é $\{v, (a-2, b-1)\}$. Similarmente, como $(a, b-1) \in U_2$, $(a+1, b-1) \in U_2$ e $C[(a, b-1)] \neq C[(a+1, b-1)]$, temos que $(a-1, b+2) \in C$. Também de forma similar, como $(a-1, b+1) \in U_2$, $(a, b+1) \in U_2$ e $C[(a-1, b+1)] \neq C[(a, b+1)]$, temos que $(a+1, b+1) \in C$. Por fim, como $(a+1, b-1) \in U_2$, $(a+1, b) \in U_2$ e $C[(a+1, b-1)] \neq C[(a+1, b)]$, temos que $(a+2, b+1) \in C$. Analogamente, se $(a-1, b+1)$ e $(a+1, b-1)$ são os únicos vizinhos de v em $U_{\geq 3}$, temos que $\{(a+1, b-2), (a+2, b-1), (a-2, b+1), (a-1, b+2)\} \subseteq C$. \diamond

Um *vértice defeutivo* é um vértice em C_1 com seis vizinhos em U_2 . Seja $v = (a, b)$ um vértice defeutivo. A *equipe* de v é um dos dois conjuntos $\{(a-1, b-2), (a-2, b-1), (a+2, b+1), (a+1, b+2)\}$ e $\{(a+1, b-2), (a+2, b-1), (a-2, b+1), (a-1, b+2)\}$ que estão incluídos em C . Pela Afirmação 5.4, essas equipes existem. Além disso, pela Afirmação 5.1, pelo menos dois vértices da equipe estão em $C_{\geq 3}$. Esses vértices são os *parceiros* de v , isto é, os vértices da equipe que estão em $C_{\geq 3}$.

Observe que um vértice cheio que pertence a C é parceiro de no máximo dois vértices defectivos e que um vértice da borda que pertence a C é parceiro de no máximo um vértice defeutivo. Isso ocorre por conta da configuração de um vértice defeutivo. Veja a Figura 32 e lembre que vértice parceiro está em $C_{\geq 3}$.

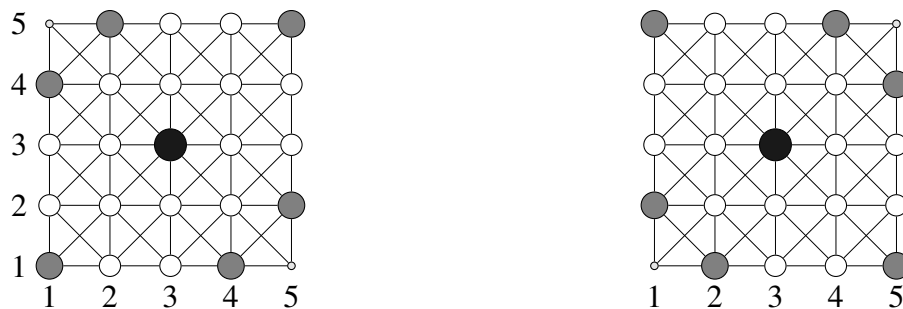


Figura 32: As configurações de um vértice defeutivo: $v = (a, b) = (3, 3)$.

Agora, devemos aplicar as seguintes regras de descarga. Aplicamos as regras de descarga uma após a outra.

(R1) Todo vértice em C envia carga $\frac{2}{9i}$ para cada vizinho em U_i .

(R2) Todo vértice defeutivo recebe carga $\frac{1}{54}$ de cada um dos seus parceiros.

Devemos provar que a carga final $\text{chrg}(v)$ de todo vértice v é pelo menos $2/9$. Distinguímos os casos dependendo do conjunto ao qual v pertence.

- Assuma primeiro que $v \in U$. Existe algum i tal que $v \in U_i$. Então v recebe $\frac{2}{9i}$ de cada um dos seus i vizinhos em C por (R1). Logo $\text{chrg}(v) = 2/9$ após a aplicação das regras de descarga.
- Assuma que v é um vértice da borda que pertence a C . Pelas Afirmções 5.4 e 5.3(i), ou ele está em C_1 e tem cinco vizinhos em $U_{\geq 2}$ (já que não pode possuir vizinho em U_1), ou ele possui quatro vizinhos em U com no máximo um em U_1 . No primeiro caso, v envia no máximo carga $5 \times \frac{2}{9 \times 2} = 5/9$ quando v possui cinco vizinhos em U_2 . No segundo caso, v envia no máximo carga $\frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9 \times 2} = 5/9$ quando v possui um vizinho em U_1 e três vizinhos em U_2 . Em ambos os casos, v envia no máximo $\frac{5}{9}$ por (R1). Além disso, lembre que v é parceiro de no máximo um vértice. Assim, v envia no máximo carga $\frac{1}{54}$ por (R2). Portanto $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{54} = \frac{23}{54} > \frac{2}{9}$.
- Assuma que v é um vértice cheio que pertence a $C_{\geq 4}$. Ele tem no máximo cinco vizinhos em U com no máximo um em U_1 pela Afirmção 5.3(i). De agora em diante, ele envia no máximo $\frac{2}{9} (1 + 4 \times \frac{1}{2}) = 2/3$ por (R1). Além disso, v é parceiro de no máximo dois vértices defectivos. Logo ele envia no máximo $\frac{1}{27}$ por (R2). Portanto $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27} > \frac{2}{9}$.
- Assuma que v é um vértice cheio que pertence a C_3 . Então v tem seis vizinhos em U com no máximo um em U_1 e pelo menos um em $U_{\geq 3}$ pelas Afirmções 5.3(i) e 5.3(iii). Sejam u e w os dois vizinhos de v em C . Note que u e v identificam dois vértices (a e b) vizinhos de v e pelo menos um dos dois deve pertencer a $U_{\geq 3}$. Note também que w e v identificam dois vértices (c e d) vizinhos de v e pelo menos um dos dois deve pertencer a $U_{\geq 3}$. Temos dois casos: a, b, c e d todos distintos ou não.
 - Se a, b, c e d forem todos distintos, temos que v possui pelo menos dois vizinhos em $U_{\geq 3}$. Nesse caso, v envia carga no máximo $\frac{2}{9} (1 + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}) = \frac{19}{27}$. Além disso, v é parceiro de no máximo dois vértices defectivos. Portanto, ele envia no máximo $\frac{1}{27}$ por (R2). Assim, $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{19}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} > \frac{2}{9}$ após a aplicação de (R2).
 - Caso contrário, sem perda de generalidade, assumamos $b = d$. Nessa configuração, temos que b pertence a $U_{\geq 4}$ (pois $C[v] \neq C[b]$). Nesse caso, v envia carga no máximo $\frac{2}{9} (1 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$. Observe que v não pode ser parceiro de nenhum vértice defectivo por conta da configuração de um vértice defectivo. Assim, $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18} > \frac{7}{27} > \frac{2}{9}$ após a aplicação de (R2).

Em ambos os casos, temos $\text{chrg}(v) \geq 7/27$ após a aplicação de (R2).

- Assuma que v é um vértice cheio que pertence a C_2 . Ele tem sete vizinhos em U com no máximo um em U_1 e pelo menos três em $U_{\geq 3}$ pelas Afirmções 5.3(i) e 5.3(ii). Logo, ele envia no máximo $\frac{2}{9} (1 + 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$. Além disso, ele nada envia por (R2), porque parceiros devem estar em $C_{\geq 3}$ por definição. Portanto, $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.
- Assuma que v é um vértice cheio que pertence a C_1 . Sendo v um vértice que pertence

a C_1 , v pode ser defectivo ou não. Se v não é um vértice defectivo então v possui no máximo cinco vizinhos em U_2 . Além disso, pela Afirmação 5.4, v não possui vizinho em U_1 . Assim, v envia no máximo $\frac{2}{9} (5 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$ por (R1). Ademais, ele não envia carga por (R2) porque parceiros devem estar em $C_{\geq 3}$ por definição. Portanto, $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

Se v é defectivo, então v não possui vizinho em U_1 e possui no máximo seis vizinhos em U_2 . Então v envia no máximo $\frac{2}{9} (6 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}) = \frac{22}{27}$ por (R1). Além disso, por (R2), v recebe carga $\frac{1}{54}$ de cada um dos seus parceiros. Assim, v recebe pelo menos $\frac{1}{27}$ no total porque v tem pelo menos dois parceiros. Portanto $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{22}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{9}$. \square

Em 2002, Charon *et al.* (CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN, 2002b) provaram que $d^*(\mathcal{G}_K)$ é $2/9$. Portanto, o limite $2/9$ do Teorema 5.1 é o melhor possível. A partir de C_∞ pode-se derivar códigos de identificação de \mathcal{H}_K e \mathcal{Q}_K com densidade $2/9$. Contudo, para outras grades *king*, pode-se provar que a densidade é maior que $2/9$.

A ideia é provar que existem vértices cuja carga final é maior que $2/9$. Para todo vértice v , seu *excesso* é $\text{exc}(v) = \text{chrg}(v) - 2/9$. Para um conjunto X de vértices, temos que $\text{exc}(X) = \sum_{x \in X} \text{exc}(x)$ onde $\text{exc}(X)$ denota o *excesso* de carga do conjunto X . Devemos provar que alguns vértices possuem excesso positivo. Isso será feito pelo teorema a seguir.

Teorema 5.2. *Se G é uma grade king finita, então $d^*(G) > \frac{2}{9}$.*

Prova: Seja $G = P_\ell \boxtimes P_k$ uma grade *king* finita. Se $k = 1$ ou $\ell = 1$, então temos que $d^*(G) \geq \frac{1}{2}$ pois $G = \mathcal{S}_1 = P_{\mathbb{Z}}$. Se $k = 2$ ou $\ell = 2$, então G não possui código de identificação pois $N[(a, 1)] = N[(a, 2)]$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ e, assim, $d^*(G) = +\infty$.

Suponha agora que $k, \ell \geq 3$. Procederemos como na prova do Teorema 5.1. Seja C um código de identificação de G . Começamos com a mesma carga inicial e aplicamos as mesmas regras de descarga. Após aplicá-las, todo vértice v tem uma carga $\text{chrg}(v)$ que é pelo menos $2/9$. É suficiente provar que um vértice tem excesso positivo pelo menos ε para algum ε fixo. Isso implica $d^*(G) \geq \frac{2}{9} + \frac{\varepsilon}{k \cdot \ell}$.

Para tanto, devemos provar que existe um vértice da borda que pertence a C ou que existe um vértice que pertence a $C_{\geq 3}$. Tal vértice tem excesso pelo menos $\frac{1}{27}$ como mostrado na prova do Teorema 5.1.

Suponha, por contradição, que não existe tal vértice. Então $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ e $(2, 1)$ não estão em C . Logo $(2, 2)$ está em C porque $C[(1, 1)] \neq \emptyset$. Além disso, $(2, 2)$ não possui vizinho w em C porque $C[(1, 1)] \neq C[(2, 2)]$. Agora, pela Afirmação 5.1, um vértice entre $(2, 2)$ e w está em $C_{\geq 3}$. Uma contradição. \square

5.3 Grades *king* com pelo menos sete linhas

O principal objetivo dessa seção é estabelecer um limite inferior melhor que $2/9$ para a densidade dos códigos de identificação em grades *king* de grande altura. Para tanto,

precisamos de algumas definições.

A b -ésima linha de \mathcal{K}_k é $R_b = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}\}$. A a -ésima coluna de \mathcal{K}_k é $Q_a^k = \{(a, b) : 1 \leq b \leq k\}$. De agora em diante, nós sempre omitimos k e escrevemos apenas Q_a para a a -ésima coluna pois k é sempre fixo e não existe risco de confusão. A base de \mathcal{K}_k é $B = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ e o seu topo é $T = R_k \cup R_{k-1} \cup R_{k-2}$. Para todo inteiro a , denotamos $B[a] = B \cap (Q_{a-1} \cup Q_a \cup Q_{a+1})$ e $T[a] = T \cap (Q_{a-1} \cup Q_a \cup Q_{a+1})$. O teorema a seguir é o principal resultado dessa seção.

Teorema 5.3. *Para todo $k \geq 7$, $d^*(\mathcal{K}_k) \geq \frac{2}{9} + \frac{8}{81k}$.*

Prova: Procederemos como na prova do Teorema 5.1. Fixe $k \geq 7$. Seja C um código de identificação de \mathcal{K}_k . Começamos com a mesma carga inicial e aplicamos as mesmas regras de descarga. Após a aplicação das regras de descarga, todo vértice v tem uma carga $\text{chrg}(v)$ que é pelo menos $2/9$ e então ele tem excesso não-negativo. Devemos provar que alguns vértices na base e no topo de \mathcal{K}_k possuem excesso positivo. As afirmações a seguir nos auxiliarão na demonstração deste teorema.

Afirmção 5.5. *Todo vértice em R_2 tem um vizinho em C que está em R_3 .*

Prova. A vizinhança fechada do vértice $(a, 1)$ está incluída na vizinhança fechada do vértice $(a, 2)$. Os identificadores desses dois vértices são distintos, então existe um vértice em $C[(a, 2)] \setminus C[(a, 1)]$ que pertence a C e que está necessariamente em R_3 . \diamond

A seguinte afirmação segue diretamente da Afirmção 5.5. Relembre a configuração de um vértice defectivo na Figura 32.

Afirmção 5.6. *Um vértice em B é parceiro de no máximo um vértice defectivo.*

A afirmação implica que o limite inferior do excesso de vértices em $C_{\geq 3}$ estabelecido no Teorema 5.1 pode ser aumentado por $\frac{1}{54}$ para tais vértices em B porque esses limites estavam considerando que um vértice enviaria $\frac{1}{27}$ por (R2), ou seja, estavam considerando que tais vértices poderiam ser parceiros de dois vértices. Por conta da Afirmção 5.6, sabemos que um vértice de B envia no máximo $\frac{1}{54}$ por (R2). Consequentemente, nós obtemos o seguinte.

Afirmção 5.7. *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

- (i) *Todo vértice em B que pertence a C_3 tem excesso pelo menos $\frac{1}{18}$.*
- (ii) *Todo vértice em B que pertence a C_4 tem excesso pelo menos $\frac{5}{54}$.*

Na demonstração do Teorema 5.1, vimos que um vértice v em C_3 tem, após a aplicação de (R1), carga $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27}$. Como v envia carga no máximo $1/54$ por (R2), então $\text{chrg}(v) \geq \frac{7}{27} - \frac{1}{54} = \frac{13}{54}$. Assim, $\text{exc}(v) \geq \frac{13}{54} - \frac{2}{9} = \frac{1}{54}$.

Também na demonstração do Teorema 5.1, vimos que um vértice v em C_4 tem, após a aplicação de (R1), carga $\text{chrg}(v) \geq 1 - \frac{2}{9} - 4 \times \frac{2}{9 \times 2} = 3/9$. Como v envia carga no máximo $1/54$ por (R2), então $\text{chrg}(v) \geq \frac{3}{9} - \frac{1}{54} = \frac{17}{54}$. Assim, $\text{exc}(v) \geq \frac{17}{54} - \frac{2}{9} = \frac{5}{54}$.

Afirmção 5.8. *Se v é um vértice da borda que pertence a C , então $\text{exc}(v) \geq \frac{2}{9}$.*

Prova. Seja $v = (a, 1)$ um vértice da borda. Se v está em C_1 , então ele tem cinco vizinhos em U e nenhum deles está em U_1 pela Afirmção 5.4. Portanto, v envia no máximo $5 \times \frac{2}{9 \times 2} = \frac{5}{9}$ por

(R1). Então $\text{exc}(v) \geq \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$.

Se v está em $C_{\geq 3}$, então ele tem no máximo três vizinhos em U e no máximo um em U_1 pela Afirmação 5.3(i). Portanto ele envia no máximo $\frac{2}{9} + 2 \times \frac{2}{9 \times 2} = \frac{4}{9}$ por (R1). Além disso, v é parceiro de no máximo um vértice, então ele envia no máximo $\frac{1}{54}$ por (R2). Logo $\text{exc}(v) \geq \frac{7}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{54} > \frac{2}{9}$.

Se v está em C_2 , então ele tem pelo menos dois vizinhos em U adjacentes ao seu vizinho em C os quais, conseqüentemente, estão em $U_{\geq 3}$. Assim, v envia no máximo $\frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27}$. Como $v \in C_2$, v não pode ser parceiro de nenhum vértice por definição. Logo, $\text{exc}(v) \geq \frac{7}{9} - \frac{13}{27} = \frac{8}{27} > \frac{2}{9}$. \diamond

Afirmação 5.9. Se $(a+j, 1) \in U$ para todo $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, então $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{4}{27}$.

Prova. Seja a tal que $(a+j, 1) \in U$ para todo $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Em relação à $(a, 2)$, temos duas possibilidades: $(a, 2) \in C$ (Caso 1) ou $(a, 2) \notin C$ (Caso 2).

Caso 1: Assumindo que $(a, 2) \in C$ temos, pela Afirmação 5.5, que $(a-1, 2)$, $(a, 2)$ e $(a+1, 2)$ possuem vizinho em R_3 que pertence a C . Além disso, como $C[(a, 1)] \neq C[(a-1, 1)]$, $(a-2, 2)$ está em C ou $(a+1, 2)$ está em C . Se $(a-1, 2) \in C$, então um vértice em $\{(a-1, 2), (a, 2)\}$ está em $C_{\geq 4}$ e o outro está em $C_{\geq 3}$. Então, pela Afirmação 5.7, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{5}{54} + \frac{1}{18} = \frac{4}{27}$. De agora em diante, podemos supor que $(a-1, 2) \notin C$. Por simetria, devemos supor também que $(a+1, 2) \notin C$. Portanto, como os identificadores de $(a-1, 1)$ e $(a+1, 1)$ são diferentes de $C[(a, 1)] = \{(a, 2)\}$, necessariamente $(a-2, 2)$ e $(a+2, 2)$ estão em C .

Lembre que $(a, 2)$ precisa ter um vizinho em R_3 que pertença a C . Suponha que $(a-1, 3) \in C$ é esse vizinho. Esse vértice tem um vizinho em R_4 que pertence a C pois o seu identificador é diferente do identificador de $(a-1, 2)$. Ademais, $(a-1, 2) \in U_{\geq 3}$ e $(a, 3)$ está ou em C ou em $U_{\geq 3}$ porque ele tem um vizinho em R_4 que está em C , pois o seu identificador é distinto do identificador de $(a, 2)$. Além disso, pela configuração de um vértice defectivo (Figura 32), $(a-1, 3)$ é parceiro de no máximo um vértice, então ele envia no máximo $\frac{1}{54}$ por (R2). Então $\text{exc}(B[a]) \geq \text{exc}((a-1, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{54} = \frac{1}{6}$. De agora em diante, supomos que $(a-1, 3) \notin C$ e, por simetria, $(a+1, 3) \notin C$. Então, pela Afirmação 5.5, $(a, 3) \in C$.

Observe que $(a-1, 3)$, $(a, 3)$ e $(a+1, 3)$ possuem um vizinho em R_4 porque seus identificadores são diferentes dos identificadores de $(a-1, 2)$, $(a, 2)$ e $(a+1, 2)$ respectivamente. Em particular, $(a-1, 3)$ e $(a+1, 3)$ estão em $U_{\geq 4}$ pois $C[(a-1, 3)] \supset \{(a-2, 2), (a, 2), (a, 3)\}$ e $C[(a+1, 3)] \supset \{(a+2, 2), (a, 2), (a, 3)\}$. Então $(a, 3)$ está em $C_{\geq 3}$, possui dois vizinhos em $U_{\geq 3}$ ($(a-1, 2)$ e $(a+1, 2)$) e dois vizinhos em $U_{\geq 4}$ ($(a-1, 3)$ e $(a+1, 3)$) e ele é parceiro de no máximo um vértice pela configuração de um vértice defectivo (Figura 32). Portanto, $\text{exc}(B[a]) \geq \text{exc}((a, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{54} = \frac{1}{6}$.

Caso 2: Assuma agora que $(a, 2) \notin C$. Como $(a, 1)$ é adjacente a pelo menos um vértice em C , então temos que pelo menos um entre $\{(a-1, 2), (a+1, 2)\}$ pertence a C . Assumimos por simetria que $(a-1, 2) \in C$. O vértice $(a+1, 2)$ está em C ou não. Nós distinguimos essas

possibilidades em dois subcasos: $(a+1, 2) \in C$ (Subcaso 2.1) e $(a+1, 2) \notin C$ (Subcaso 2.2).

Subcaso 2.1: Suponha que $(a+1, 2) \in C$.

Note que $(a, 3)$ deve ter um vizinho em R_4 que pertence a C , pois o seu identificador é diferente do identificador de $(a, 2)$. O vértice $(a, 3)$ pode estar em C ou não.

- Assuma primeiro que $(a, 3) \in C$. Então $(a, 3) \in C_{\geq 4}$ e, assim, $\text{exc}((a, 3)) \geq \frac{5}{54}$ pela Afirmação 5.7(ii). Se um vértice entre $\{(a-1, 2), (a+1, 2)\}$ está em $C_{\geq 3}$, então esse vértice tem excesso pelo menos $\frac{1}{18}$ pela Afirmação 5.7(i) e, assim, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{5}{54} + \frac{1}{18} = \frac{4}{27}$. De agora em diante, supomos que ambos $(a-1, 2)$ e $(a+1, 2)$ estão em C_2 , uma vez que, pela Afirmação 5.5, ambos devem ter pelo menos um vizinho que pertence a C em R_3 . Isso implica que $(a-1, 3)$ e $(a+1, 3)$ estão $U_{\geq 3}$ pois os seus identificadores são distintos de $C[(a-1, 2)] = \{(a-1, 2), (a, 3)\}$ e $C[(a+1, 2)] = \{(a, 3), (a+1, 2)\}$. Portanto, $\text{exc}((a, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{54} = \frac{11}{54} > \frac{4}{27}$.
- Se $(a, 3) \notin C$, então pelo menos um vértice entre $\{(a-1, 3), (a+1, 3)\}$ deve pertencer a C pois $C[(a, 2)] \neq C[(a, 1)] = \{(a-1, 2), (a+1, 2)\}$. Sem perda de generalidade, assumamos que $(a-1, 3) \in C$. Como $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 2)] \supseteq \{(a-1, 3), (a-1, 2)\}$, então $(a-1, 3)$ possui um vizinho que pertence a C em R_4 . Assim, temos que pelo menos um vértice de $\{(a-2, 4), (a-1, 4), (a, 4)\}$ deve pertencer a C (por conta de $C[(a-1, 3)]$) e que pelo menos um vértice entre $\{(a-1, 4), (a, 4), (a+1, 4)\}$ deve pertencer a C (por conta de $C[(a, 3)]$).

Com relação a esses dois conjuntos, se os vértices que pertencem a C não estiverem na interseção, então temos que $(a-2, 4) \in C$ e $(a+1, 4) \in C$. Nesse caso, note que $(a-1, 3)$ não possui vizinhos em U_1 e possui no máximo dois vizinhos em U_2 ($(a-1, 4)$ e $(a, 4)$). Assim, $\text{exc}((a-1, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27} > \frac{4}{27}$.

Se tivermos algum vértice na interseção que pertence a C , então temos que, no pior caso, apenas um vértice entre $\{(a-2, 4), (a-1, 4), (a, 4), (a+1, 4)\}$ pertence a C e, por estar na interseção, $(a-1, 4) \in C$ ou $(a, 4) \in C$.

Se $(a-1, 4) \in C$, então $(a, 3)$ não possui vizinho em U_1 , possui pelo menos dois vizinhos em $U_{\geq 3}$ ($(a-2, 3)$ e $(a-2, 2)$) e possui pelo menos um vizinho em $U_{\geq 4}$ ($(a, 3)$). Assim, $\text{exc}((a-1, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{54} > \frac{4}{27}$.

Se $(a, 4) \in C$, então $(a, 4)$ tem pelo menos dois vizinhos em $U_{\geq 3}$ ($(a-2, 3)$ e $(a, 2)$) e pelo menos dois vizinhos em $(U_{\geq 4})$ ($(a-2, 2)$ e $(a, 3)$). Assim, $\text{exc}((a-1, 3)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{27} > \frac{4}{27}$.

Subcaso 2.2: Suponha que $(a+1, 2) \notin C$.

Então $(a+2, 2) \in C$ porque $(a+1, 1)$ tem um vizinho em C e $(a-2, 2) \in C$ porque $C[(a-1, 1)] \neq C[(a, 1)]$. Em particular, $(a-1, 2) \in C_{\geq 3}$ pois $(a-1, 2)$ tem um vizinho que pertence a C em R_3 pela Afirmação 5.5. Assim, temos que pelo menos um vértice entre $\{(a-2, 3), (a-1, 3), (a, 3)\}$ está em C .

- Se $(a-1, 3) \in C$, então $(a-1, 3)$ está em $C_{\geq 4}$ porque $(a-1, 3)$ tem um vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a-1, 2)$. Logo, pela Afirmação 5.7,

$\text{exc}(B[a]) \geq \frac{5}{54} + \frac{1}{18} = \frac{4}{27}$ pois $(a-1,3) \in C_{\geq 4}$ e $(a-1,2) \in C_{\geq 3}$. De agora em diante, supomos que $(a-1,3) \notin C$. Observe que $(a,1) \in U_1$, $(a-1,1) \in U_2$ e $(a-2,1) \in U_{\geq 3}$ pois o seu identificador é diferente de $\{(a-2,2,a-1,2)\} = C[(a-1,1)]$.

- Se $(a,3) \in C$, então $(a,2) \in U_{\geq 2}$, $(a-1,3) \in U_{\geq 4}$ pois ele tem um vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a-1,2)$ e $(a-2,3) \in U_{\geq 3} \cup C$ pois seu identificador é diferente de $\{(a-2,2,a-1,2)\} = C[(a-1,1)]$. Assim, $\text{exc}((a-1,2)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{54} = \frac{1}{9}$. Além disso, $(a,3)$ tem vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a,2)$. Portanto, $(a,3) \in C_{\geq 3}$ e então o seu excesso é pelo menos $\frac{1}{18}$ pela Afirmção 5.7(i). Logo, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} > \frac{4}{27}$. De agora em diante, assumimos que $(a,3) \notin U$.

Consequentemente, temos que $(a-2,3) \in C$. Necessariamente, $(a+1,3) \in C$ porque $C[(a,2)] \neq C[(a,1)]$. Ademais, $(a+1,3)$ tem um vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a+1,2)$. Então $(a+1,3) \in C_{\geq 3}$ e seu excesso é pelo menos $\frac{1}{18}$ pela Afirmção 5.7(i). Temos também que $(a-1,3) \in U_{\geq 4}$ porque ele tem um vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a-1,2)$ e $(a,3) \in U_{\geq 3}$ porque ele tem um vizinho em R_4 para ter o seu identificador diferente do identificador de $(a,2)$. Além disso, $(a-2,1) \in U_{\geq 3}$ pois ele tem um identificador diferente do identificador de $(a-1,1)$. Assim, $\text{exc}((a-1,2)) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{54} = \frac{1}{9}$. Portanto, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} > \frac{4}{27}$. \diamond

Afirmção 5.10. *Se $(a-1,1)$, $(a,1)$ e $(a+1,1)$ estão em U , então $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{2}{27}$.*

Prova. Assuma que $(a-1,1)$, $(a,1)$ e $(a+1,1)$ estão em U . Se $B[a]$ contém um vértice de $C_{\geq 4}$, então, pela Afirmção 5.7, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{5}{54} > \frac{2}{27}$. Portanto, nós assumimos que todos os vértices de $B[a]$ que estão em C estão em $C_{\leq 3}$. Se $B[a]$ contém dois vértices de C_3 , então pela Afirmção 5.7, $\text{exc}(B[a]) \geq 2 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{9} > \frac{2}{27}$. Então nós assumimos que $B[a]$ tem no máximo um vértice em C_3 .

Como $C[(a,1)] \neq \emptyset$, temos que pelo menos um vértice entre $\{(a-1,2), (a,2), (a+1,2)\}$ está em C . Assuma primeiro que $(a,2) \in C$. Pela Afirmção 5.5, $(a,2)$ tem um vizinho w em C que está em R_3 . Por simetria, assumimos que $w \in \{(a-1,3), (a,3)\}$. Pela Afirmção 5.5, existe um vértice em $\{(a,3), (a+1,3), (a+2,3)\}$ que pertence a C por causa de $C[(a+1,2)] \neq C[(a+1,1)]$ e existe um vértice em $\{(a-1,4), (a,4), (a+1,4)\}$ que pertence a C pois $C[(a,3)] \neq C[(a,2)]$. Consequentemente, w e $(a,2)$ não podem ser parceiros de algum vértice por conta da configuração de um vértice defectivo (Figura 32). Como $C[w] \neq C[(a,2)]$, então pelo menos um dos dois vértices tem que estar em $C_{\geq 3}$. Pela Afirmção 5.7(i), esse vértice tem excesso pelo menos $\frac{1}{18}$. Mas como esse vértice não pode ser parceiro de um outro vértice, então o seu excesso é $\frac{1}{18} + \frac{1}{54} = \frac{2}{27}$. De agora em diante, assumimos que $(a,2) \notin C$. Portanto, $(a+1,2)$ ou $(a-1,2)$ está em C .

Por simetria, assumimos que $(a+1,2) \in C$. Então $(a,3)$ tem um vizinho em R_4 que pertence a C pois $C[(a,3)] \neq C[(a,2)]$. Se $(a,3)$ está em C , então ele está em C_3 . Logo,

$(a+1,2) \in C_2$ pois $B[a]$ tem no máximo um vértice em C_3 . Assim, $(a-1,2)$, $(a+2,1)$ e $(a+2,2)$ estão em U . Logo, $C[(a,1)] = C[(a+1,1)] = \{(a+1,2)\}$, uma contradição. Portanto $(a,3) \notin C$.

Assuma então que $(a+1,3)$ está em C . Como $B[a]$ contém no máximo um vértice em C_3 , então $(a+2,2)$ e $(a+2,3)$ estão em U . Além disso, um vértice entre $\{(a+1,2), (a+1,3)\}$, denotado t , está em C_3 e o outro está em C_2 e tem identificador $\{(a+1,2), (a+1,3)\}$. Logo, os vértices $(a,2)$, $(a,3)$, $(a+2,2)$ e $(a+2,3)$ estão em $U_{\geq 3}$ pois os seus identificadores contém e são diferentes de $\{(a+1,2), (a+1,3)\}$. Portanto, $\text{exc}(B[a]) \geq \text{exc}(t) \geq \frac{7}{9} - \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{54} = \frac{7}{54} > \frac{2}{27}$. De agora em diante, assumimos que $(a+1,3) \notin C$. Assim, assumimos que $(a-1,3) \in C$, uma vez que $C[(a,2)] \neq C[(a,1)]$.

Se $(a-1,2) \in C$, então analogamente ao argumento anterior, um vértice t em $\{(a-1,2), (a-1,3)\}$ está em C_3 e $\text{exc}(B[a]) \geq \text{exc}(t) \geq \frac{7}{54} > \frac{2}{27}$. De agora em diante, assumimos que $(a-1,2) \notin C$. Agora, $(a+2,1)$ ou $(a+2,2)$ está em C pois $C[(a+1,1)] \neq C[(a,1)]$ e $(a+2,3)$ está em C porque $C[(a+1,2)] \neq C[(a+1,1)]$. Logo $(a+1,2)$ está em C_3 e, pela Afirmação 5.7(i), esse vértice tem excesso pelo menos $\frac{1}{18}$. Ademais, ele não é parceiro de vértice algum pois $(a-1,3)$ e $(a+2,3)$ estão em C (veja a configuração de um vértice defectivo na Figura 32). Então, $\text{exc}(B[a]) \geq \text{exc}((a+1,2)) \geq \frac{1}{18} + \frac{1}{54} = \frac{2}{27}$. \diamond

Para finalizar a demonstração do Teorema 5.3, nós primeiro aplicamos a seguinte regra de descarga.

(R3) Todo vértice da borda que está em C envia carga $\frac{2}{27}$ para cada um de seus dois vizinhos na borda.

Vamos denotar por exc_3 o excesso de carga após a aplicação de (R3). Sobre o $\text{exc}_3(B[a])$, faremos uma afirmação a seguir.

Afirmação 5.11. $\text{exc}_3(B[a]) \geq \frac{4}{27}$ para todo inteiro a .

Prova. Se $(a,1) \in C$, então $\text{exc}((a,1)) \geq \frac{2}{9}$ pela Afirmação 5.8. Como os dois vizinhos de $(a,1)$ na borda pertencem a $B[(a)]$, então $\text{exc}_3(B[a]) \geq \text{exc}((a,1)) \geq \frac{2}{9}$. Suponha então que $(a,1) \notin C$. Suponha então que $(a-1,1) \in C$. Note que $(a-1,1)$ possui um vizinho na borda que pertence a $B[(a)]$ e um outro vizinho na borda que não pertence a $B[(a)]$. Assim, $\text{exc}_3(B[a]) \geq \text{exc}_3((a-1,1)) + \text{exc}_3((a,1)) \geq \text{exc}((a-1,1)) - 2 \times \frac{2}{27} + \frac{2}{27} \geq \frac{4}{27}$ pela Afirmação 5.8. Suponha então que $(a-1,1) \notin C$. Analogamente, se $(a+1,1) \in C$ então $\text{exc}_3(B[a]) \geq \frac{4}{27}$. De agora em diante, assumimos que $(a-1,1), (a,1), (a+1,1)$ estão em U .

Se $(a-2,1)$ e $(a+2,1)$ estão também em U , então $\text{exc}_3(B[a]) = \text{exc}(B[a]) \geq \frac{4}{27}$ pela Afirmação 5.9. Caso contrário, dizemos, sem perda de generalidade, que $(a-2,1) \in C$. Então $\text{exc}_3(B[a]) \geq \text{exc}(B[a]) + \frac{2}{27}$ pois $(a-1,1)$ recebe $\frac{2}{27}$ de $(a-2,1)$ por (R3). Além disso, $\text{exc}(B[a]) \geq \frac{2}{27}$ pela Afirmação 5.10. Então $\text{exc}_3(B[a]) \geq \frac{4}{27}$. \diamond

Por fim, nós então aplicamos a seguinte regra de descarga:

(R4) Para todo inteiro a , todo vértice v em $B[a]$ envia $\frac{1}{3k} \text{exc}_3(v)$ para cada vértice em Q_a e todo vértice em $T[a]$ envia carga $\frac{1}{3k} \text{exc}_3(v)$ para cada vértice em Q_a .

Seja $\text{exc}_4(v)$ o excesso de todo vértice v após a aplicação da (R4). Como $k \geq 7$, um vértice $v = (a, b)$ não pode estar na base e no topo. Além disso, ele pertence somente a $B[a']$ para $a' \in \{a-1, a, a+1\}$. Assim, v envia carga para no máximo três colunas por (R4). Portanto, cada vértice v envia no máximo $\text{exc}_3(v)$. Além disso, todo vértice v recebe $\frac{1}{3k}(\text{exc}_3(B[a]) + \text{exc}_3(T[a]))$. Pela Afirmação 5.11 e por simetria, $\text{exc}_3(B[a]) \geq \frac{4}{27}$ e $\text{exc}_3(T[a]) \geq \frac{4}{27}$. Portanto, $\text{exc}_4(v) \geq \text{exc}_3(v) - \text{exc}_3(v) + \frac{1}{3k} \cdot \left(\frac{4}{27} + \frac{4}{27}\right) = \frac{8}{81k}$.

Concluimos então que $d(C, \mathcal{K}_k) \geq \frac{2}{9} + \frac{8}{81k}$. \square

A seguir, apresentamos um limite superior para as grades *king* com pelo menos 7 linhas.

Teorema 5.4. Para todo $k \geq 7$,

$$d^*(\mathcal{K}_k) \leq \begin{cases} \frac{2}{9} + \frac{6}{18k}, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{2}{9} + \frac{8}{18k}, & \text{se } k \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{2}{9} + \frac{7}{18k}, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Prova: Lembre o código de identificação C_∞ de uma grade *king* infinita na Figura 31:

$$C_\infty = \left\{ (6a+2, 6b+1), (6a+4, 6b+2), (6a+6, 6b+2), (6a+2, 6b+3), \right. \\ \left. (6a+5, 6b+4), (6a+1, 6b+5), (6a+3, 6b+5), (6a+5, 6b+6) : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Seja $k \geq 7$ um inteiro. Se $k \equiv 0 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$, seja

$$C'_k = \left(C_\infty \cap \mathbb{Z} \times [k] \right) \cup \\ \left\{ (6a+2, 3), (6a+5, 3), (6a+2, k-2), (6a+5, k-2) : a \in \mathbb{Z} \right\};$$

se $k \equiv 1 \pmod{3}$, seja

$$C'_k = \left(C_\infty \cap \mathbb{Z} \times \{2, \dots, k+1\} \right) \cup \\ \left\{ (6a+2, 4), (6a+5, 4), (6a+2, k-1), (6a+5, k-1) : a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pode-se verificar que C'_k é um código de identificação de \mathcal{K}_k quando $k \equiv 0 \pmod{3}$ ou $k \equiv 2 \pmod{3}$, e que C'_k é um código de identificação da grade *king* de altura limitada induzida pelas linhas de 2 a $k+1$ (que é isomórfica a \mathcal{K}_k). Como um exemplo, C'_5 e C'_6 são os segundos códigos de identificação das Figuras 38 e 39 respectivamente (novos vértices estão em preto). Ainda como exemplo, temos C'_7 , C'_8 e C'_9 na Figura 33, na Figura 34 e na Figura 35 respectivamente.

Neste caso, os novos vértices também estão em preto. Não é difícil verificar que:

$$d(C'_k, \mathcal{K}_k) = \begin{cases} \frac{2}{9} + \frac{6}{18k}, & \text{se } k \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{2}{9} + \frac{8}{18k}, & \text{se } k \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{2}{9} + \frac{7}{18k}, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

□

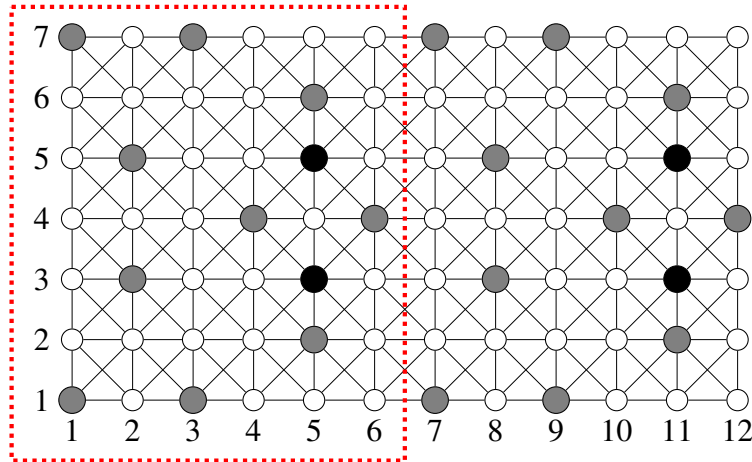


Figura 33: Código de identificação para \mathcal{K}_7 .

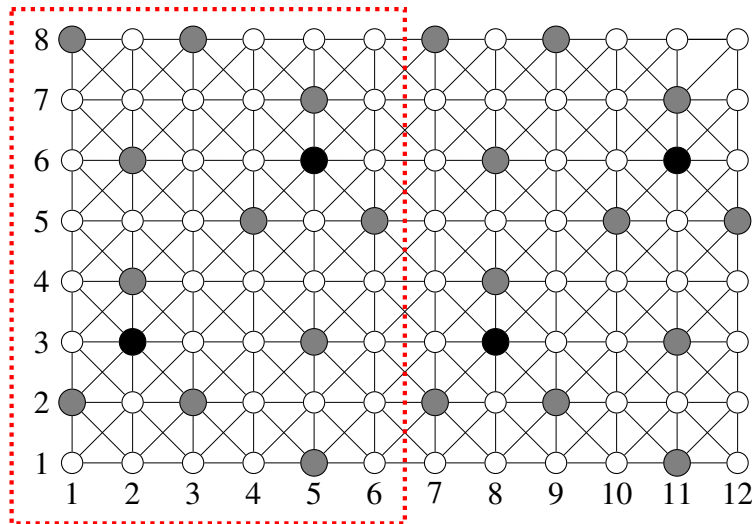


Figura 34: Código de identificação de \mathcal{K}_8 .

Na próxima seção, demonstraremos que $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15 \approx 0.2666$, $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18 \approx 0.2777$, $d^*(\mathcal{K}_3) = 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{K}_4) = 5/16 = 0.3125$.

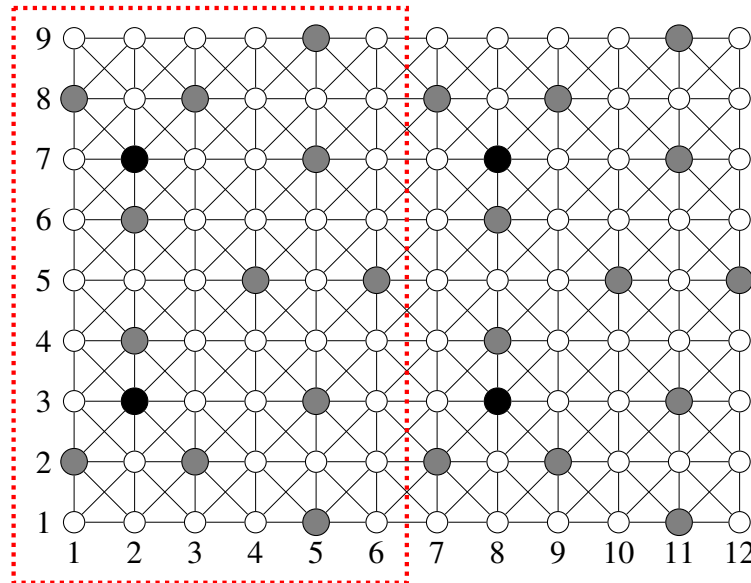


Figura 35: Código de identificação de \mathcal{K}_9 .

5.4 Grades *king* com três, quatro, cinco ou seis linhas

Dado um inteiro $k \geq 3$ e um código de identificação C de \mathcal{K}_k , seja $d(C, R_i)$ a densidade de C na linha i :

$$d(C, R_i) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) \cdot \left| C \cap \{(a, i) : a \in \mathbb{Z}, |a| \leq n\} \right|.$$

Note que $d(C, \mathcal{K}_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d(C, R_i)$. Para provar os limites inferiores, nós primeiro provaremos o seguinte lema auxiliar. Para demonstrar esse lema, utilizaremos o mesmo mecanismo do método da descarga. Entretanto optamos por não mencioná-lo explicitamente.

Lema 5.1. *Seja $k \geq 3$ um inteiro e seja C um código de identificação de \mathcal{K}_k . Então $d(C, R_1) + d(C, R_2) \geq 1/2$, $d(C, R_k) + d(C, R_{k-1}) \geq 1/2$, $d(C, R_3) \geq 1/3$ e $d(C, R_{k-2}) \geq 1/3$.*

Prova: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $C \cap \{(a-1, 3), (a, 3), (a+1, 3)\} \neq \emptyset$, pois, caso contrário, $(a, 1)$ e $(a, 2)$ possuem o mesmo identificador, uma contradição (situação ilustrada na Figura 36). Então, $d(C, R_3) \geq 1/3$. Simetricamente, temos $d(C, R_{k-2}) \geq 1/3$.

Considere agora $R_1 \cup R_2$. Seja $A = \{a \in \mathbb{Z} : C \cap \{(a, 1), (a, 2)\} = \emptyset\}$ e $B = \mathbb{Z} \setminus A$. Para cada $a \in A$, seja $s(a)$ definido como a seguir. Se $a-1 \in B$, então $s(a) = a-1$, caso contrário $s(a) = a-3$. Provamos agora que s é um mapeamento injetivo de A em B . Se $s(a) = a-1$, então $s(a) \in B$ por definição. Se não, então $C \cap \{(a-1, 1), (a-1, 2)\} = \emptyset$. Logo, $(a-2, 1) \in C$ ou $(a-2, 2) \in C$ porque $C[(a-1, 1)] \neq \emptyset$, o que implica que $a-2 \in B$. Ademais, como $C[(a-2, 1)] \neq C[(a-1, 1)]$, então $(a-3, 1) \in C$ ou $(a-3, 2) \in C$, então $s(a) = a-3$ está em B (situação ilustrada na Figura 37). Logo s é injetivo. Portanto $d(C, R_1) + d(C, R_2) \geq 1/2$. Simetricamente, temos $d(C, R_k) + d(C, R_{k-1}) \geq 1/2$. \square

Teorema 5.5. $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15 \approx 0.2666$.

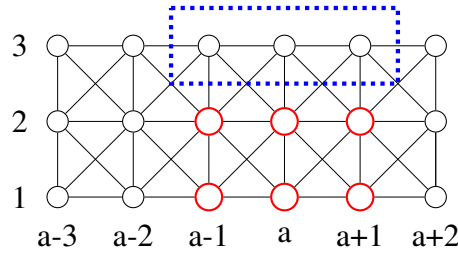


Figura 36: Demonstração do Lema 5.1.

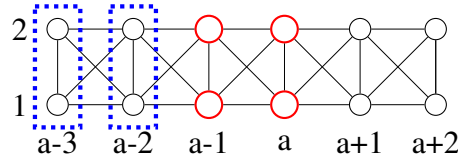


Figura 37: Demonstração do Lema 5.1.

Prova: Seja C um código de identificação de \mathcal{K}_5 . Do Lema 5.1, temos $d(C, R_1) + d(C, R_2) \geq 1/2$, $d(C, R_4) + d(C, R_5) \geq 1/2$ e $d(C, R_3) \geq 1/3$. Então $d(C, \mathcal{K}_5) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 d(C, R_i) \geq \frac{1}{5} (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 4/15$. Os dois códigos de identificação periódicos de \mathcal{K}_5 gerados pelo recortes retratados na Figura 38 possuem densidade $4/15$. Assim, $d^*(\mathcal{K}_5) \leq 4/15$. Portanto, $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15$. \square

Figura 38: Dois recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_5 (densidade $4/15$).

Teorema 5.6. $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18 \approx 0.2777$.

Prova: Seja C um código de identificação de \mathcal{K}_6 . Do Lema 5.1, temos $d(C, R_1) + d(C, R_2) \geq 1/2$, $d(C, R_5) + d(C, R_6) \geq 1/2$, $d(C, R_3) \geq 1/3$ e $d(C, R_4) \geq 1/3$. Então, $d(C, \mathcal{K}_6) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 d(C, R_i) \geq \frac{1}{6} (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 5/18$. Os dois códigos de identificação periódicos de \mathcal{K}_6 gerados pelos recortes representados na Figura 39 possuem densidade $5/18$. Assim, $d^*(\mathcal{K}_6) \leq 5/18$. Portanto, $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18$. \square

As provas dos próximos lemas dessa seção usam o Método da Descarga nas colunas. Lembre que, com k fixo, Q_a é a a -ésima coluna de \mathcal{K}_k para todo $a \in \mathbb{Z}$. A ideia geral é considerar qualquer código de identificação C de \mathcal{K}_k e associar para todo $a \in \mathbb{Z}$ a carga inicial $\text{chrg}_0(a) = |Q_a \cap C|$. Iremos dizer que $a \in \mathbb{Z}$ está *insatisfeito* se $\text{chrg}(a)$ é menor que um dado valor q , e diremos que $a \in \mathbb{Z}$ está *satisfeito* caso contrário. Então aplicamos algumas regras de descarregamento locais (envio de carga de a 's satisfeitos para a 's insatisfeitos). Aqui, local significa que não existe carga transferida de um $a' \in \mathbb{Z}$ satisfeito para um $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito com $|a' - a|$ maior que uma dada constante. Finalmente, provamos que, após o descarregamento, todo inteiro $a \in \mathbb{Z}$ está satisfeito. Com isso, obtemos que a densidade de C é pelo menos q/k .



Figura 39: Dois recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_6 (densidade $5/18$).

Teorema 5.7. $d^*(\mathcal{K}_3) = 1/3 \approx 0.333$.

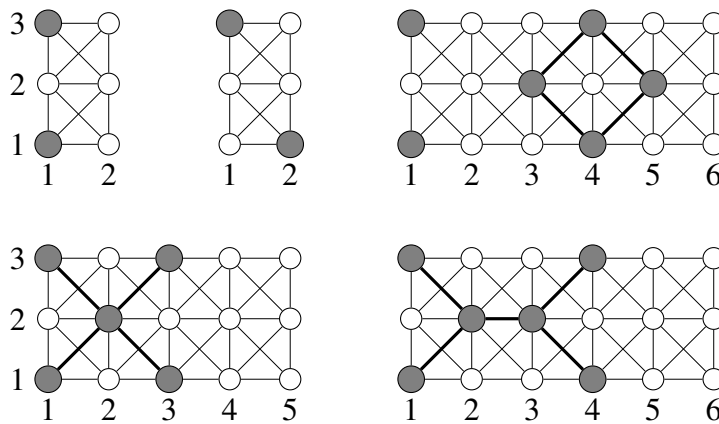


Figura 40: Cinco recortes gerando códigos de identificação ótimos de \mathcal{K}_3 (densidade $1/3$).

Prova: Os cinco códigos de identificação periódicos de \mathcal{K}_3 gerados pelos recortes representados na Figura 40 possuem densidade $1/3$. Então, $d^*(\mathcal{K}_3) \leq 1/3$.

Vamos provar agora que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$. Seja C um código de identificação de \mathcal{K}_3 . Para todo $a \in \mathbb{Z}$, seja a carga inicial $\text{chrg}_0(a)$ igual a $|Q_a \cap C|$. Dizemos que $a \in \mathbb{Z}$ está *satisfeito* se sua carga atual é pelo menos 1, e dizemos que $a \in \mathbb{Z}$ está *insatisfeito* caso contrário. Aplicamos as seguintes cinco regras de descarga, Regra i de $i = 1$ a 5, uma após outra. Denotamos por $\text{chrg}_i(a)$ a carga de a após a aplicação da Regra i .

[Regra 1]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe carga 1 de $a - 1$, se $\text{chrg}_0(a - 1) \geq 2$.

[Regra 2]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe carga 1 de $a - 2$, se $\text{chrg}_1(a - 2) \geq 2$.

[Regra 3]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe carga 1 de $a - 3$, se $\text{chrg}_2(a - 3) \geq 2$.

[Regra 4]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe carga 1 de $a - 4$, se $\text{chrg}_3(a - 4) \geq 2$.

[Regra 5]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe carga 1 de $a - 5$, se $\text{chrg}_4(a - 5) \geq 2$.

Devemos provar que após a aplicação das regras de descarga, todo $a \in \mathbb{Z}$ estará satisfeito. Isso garante que $d(C, \mathcal{K}_3) \geq 1/3$, uma vez que $q = 1$ e $k = 3$. Observe, pelas regras, que uma vez que um inteiro se torna satisfeito, então ele permanece satisfeito.

Considere um inteiro inicialmente insatisfeito a . Então, $Q_a \cap C = \emptyset$. Assuma, por contradição, que a está insatisfeito após a aplicação das cinco regras de descarga. Então, $|Q_{a-1} \cap C| < 2$, caso contrário ele está satisfeito após a aplicação da Regra 1. Assim, por

simetria, assumimos que estamos em um dos seguintes casos: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2)\}$ (Caso 1), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (Caso 2) e $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (Caso 3).

Caso 1: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2)\}$ (ilustrado na Figura 41). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ e $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 2)]$, então $(a-2, 1) \in C$ e $(a-2, 3) \in C$. Portanto, a recebe 1 de $a-2$ pela Regra 2 e está satisfeito, uma contradição.

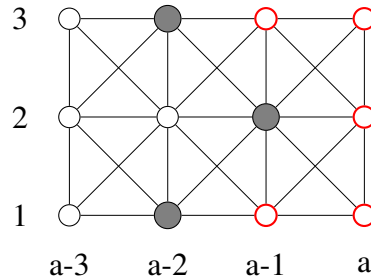


Figura 41: Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 1.

Caso 2: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (ilustrado na Figura 42). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$, então $(a-2, 3) \in C$. $|Q_{a-2} \cap C| \leq 1$, caso contrário a receberia 1 de $a-2$ pela Regra 2 e estaria satisfeito. Então $(a-2, 1) \notin C$ e $(a-2, 2) \notin C$. Como $C[(a-2, 1)] \neq C[(a-1, 1)] = \{(a-1, 1)\}$, então $C \cap \{(a-3, 1), (a-3, 2)\} \neq \emptyset$. Ademais, como $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-1, 3)] = \{(a-2, 3)\}$, então $C \cap \{(a-3, 3), (a-3, 2)\} \neq \emptyset$. Além disso, $|Q_{a-3} \cap C| \leq 1$, caso contrário a receberia 1 de $a-3$ pela Regra 3 e estaria satisfeito. Assim, $Q_{a-3} \cap C = \{(a-3, 2)\}$. Logo $(a-4, 1) \in C$, pois $C[(a-3, 2)] \neq C[(a-3, 3)]$. Ademais, $\{(a-4, 2), (a-4, 3)\} \cap C \neq \emptyset$, pois $C[(a-3, 3)] \neq C[(a-2, 3)] = \{(a-2, 3), (a-3, 2)\}$. Então $|Q_{a-4} \cap C| \geq 2$. Portanto, a recebe 1 de $a-4$ pela Regra 4 e está satisfeito, uma contradição.

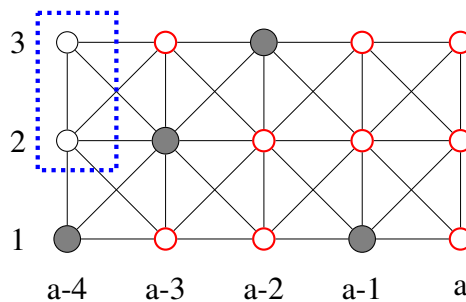


Figura 42: Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 2.

Caso 3: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (ilustrado na Figura 43). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ e $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 2)]$, então $(a-2, 1) \in C$ e $(a-2, 3) \in C$. Logo, $a-1$ recebe 1 de $a-2$ pela Regra 1 e está satisfeito. Agora, $(a-2, 2) \notin C$, caso contrário a receberia 1 de $a-2$ pela Regra 2 e estaria satisfeito. Como $C[(a-2, 1)] \neq C[(a-1, 1)] = \{(a-2, 1)\}$, então $C \cap \{(a-3, 1), (a-3, 2)\} \neq \emptyset$. Ademais, como $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-1, 3)] = \{(a-2, 3)\}$, então $C \cap \{(a-3, 3), (a-3, 2)\} \neq \emptyset$. Além disso, $|Q_{a-3} \cap C| \leq 1$, caso contrário a receberia 1 de $a-3$ pela Regra 3 e estaria satisfeito. Logo, $Q_{a-3} \cap C = \{(a-3, 2)\}$. Como $C[(a-3, 1)] \neq$

$C[(a-2,1)] = \{(a-3,2), (a-2,1)\}$, então $C \cap \{(a-4,1), (a-4,2)\} \neq \emptyset$. Ademais, como $C[(a-3,3)] \neq C[(a-2,3)] = \{(a-3,2), (a-2,3)\}$, então $C \cap \{(a-4,3), (a-4,2)\} \neq \emptyset$. Além disso, $|Q_{a-4} \cap C| \leq 1$, caso contrário a receberia 1 de $a-4$ pela Regra 4 e estaria satisfeito. Logo, $Q_{a-4} \cap C = \{(a-4,2)\}$. Como $C[(a-4,1)] \neq C[(a-4,2)]$ e $C[(a-4,3)] \neq C[(a-4,2)]$, então $(a-5,1) \in C$ e $(a-5,3) \in C$. Portanto, a recebe 1 de $a-5$ pela Regra 5 e está satisfeito, uma contradição. \square

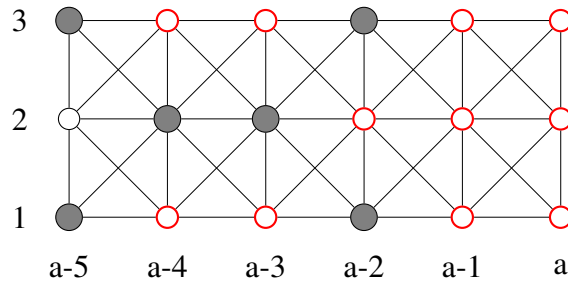


Figura 43: Demonstrando que $d^*(\mathcal{K}_3) \geq 1/3$ - Caso 3.

Apresentamos, agora, o último resultado deste capítulo.

Teorema 5.8. $d^*(\mathcal{K}_4) = 5/16$.

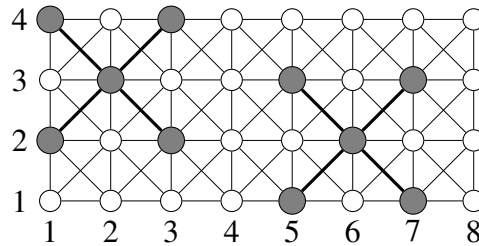


Figura 44: Recorte gerando um código de identificação ótimo de \mathcal{K}_4 (densidade $5/16$).

Prova:

O código de identificação periódico de \mathcal{K}_4 gerado pelos recortes representados na Figura 44 possuem densidade $5/16$. Então, $d^*(\mathcal{K}_4) \leq 5/16$. Vamos provar agora que $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16 = 0.3125$.

Seja C um código de identificação de \mathcal{K}_4 . Para todo $a \in \mathbb{Z}$, seja a carga inicial $\text{chrg}_0(a) = |Q_a \cap C|$. Dizemos que um inteiro a está *satisfeito* se sua carga é pelo menos $5/4$, e dizemos que um inteiro a está *insatisfeito* caso contrário. Aplicamos as três regras de descarga, Regra i de $i = 1$ a 3 uma após a outra. Denotamos por $\text{chrg}_i(a)$ a carga de a após a aplicação da Regra i e definimos $\text{exc}_i(a) = \text{chrg}_i(a) - 5/4$ (observe que um inteiro a está satisfeito se e somente se $\text{exc}(a) \geq 0$).

[Regra 1]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe $\min\{\text{exc}_0(a-1), -\text{exc}_0(a)\}$ de $a-1$, se $a-1$ está satisfeito.

[Regra 2]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe $\min\{\text{exc}_1(a-2), -\text{exc}_1(a)\}$ de $a-2$, se $a-2$ está satisfeito.

[Regra 3]: todo $a \in \mathbb{Z}$ insatisfeito recebe $\min\{\text{exc}_2(a-3), -\text{exc}_2(a)\}$ de $a-3$, se $a-3$ está satisfeito.

Devemos provar que, após a aplicação das regras de descarga, todo $a \in \mathbb{Z}$ está satisfeito. Isso garante que $d(C, \mathcal{K}_4) \geq 5/16$, uma vez que $q = 5/4$ e $k = 4$. Observe, pelas regras de descarga, que uma vez que um inteiro se torna satisfeito, então ele permanece satisfeito.

Assuma, por contradição, que um inteiro a está insatisfeito após a aplicação das três regras de descarga. Como a estava inicialmente insatisfeito, então $|Q_a \cap C| \leq 1$. Por simetria, assumimos que estamos em um dos seguintes casos: $Q_a \cap C = \emptyset$ (Caso 1), $Q_a \cap C = \{(a, 1)\}$ (Caso 2) e $Q_a \cap C = \{(a, 2)\}$ (Caso 3).

Caso 1: $Q_a \cap C = \emptyset$. Nesse caso, $\text{exc}_0(a) = -5/4$. Primeiro, note que $(a-3, 1) \in C$ ou $(a-3, 2) \in C$, pois $C[(a-2, 1)] \neq C[(a-1, 1)]$, e $(a-3, 3) \in C$ ou $(a-3, 4) \in C$, porque $C[(a-2, 4)] \neq C[(a-1, 4)]$. Em particular, $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$ pois, tendo pelo menos dois vértices em C , $\text{chrg}_0(a-3) \geq 2$.

Temos então que $|Q_{a-1} \cap C| \leq 2$, caso contrário a recebe $5/4$ de $a-1$ pela Regra 1 e está satisfeito. Portanto, por simetria, estamos em um dos seguintes sete subcasos: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (Subcaso 1.1), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (Subcaso 1.2), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2)\}$ (Subcaso 1.3), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1), (a-1, 2)\}$ (Subcaso 1.4), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1), (a-1, 3)\}$ (Subcaso 1.5), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1), (a-1, 4)\}$ (Subcaso 1.6), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2), (a-1, 3)\}$ (Subcaso 1.7). Em todos esses subcasos, lembre que $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$.

Subcaso 1.1: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (ilustrado na Figura 45). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ e $C[(a-1, 4)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 2) \in C$ e $(a-2, 3) \in C$. Como $C[(a-1, 2)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 1) \in C$ ou $(a-2, 4) \in C$. Além disso, $|Q_{a-2} \cap C| < 4$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) = 11/4$, então $a-2$ envia $5/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e $5/4$ para a pela Regra 2, e a está satisfeito. Por simetria, assumimos que $(a-2, 1) \in C$ e $(a-2, 4) \notin C$. Logo $\text{exc}_0(a-2) = 7/4$ e então $a-2$ envia $5/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia $1/2$ para a pela Regra 2. Ademais, $a-3$ envia carga $3/4$ para a pela Regra 3, e então a está satisfeito, uma contradição.

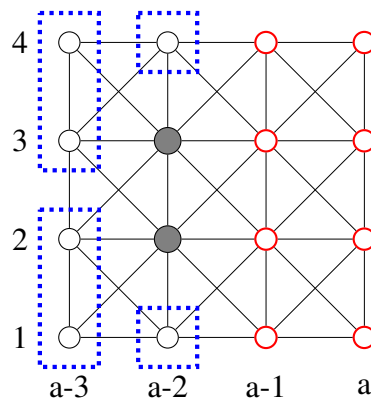


Figura 45: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.1.

Subcaso 1.2: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (ilustrado na Figura 46). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ e $C[(a-1, 4)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 2) \in C$ e $(a-2, 3) \in C$. Além disso, $|Q_{a-2} \cap$

$|C| \leq 2$ caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq \frac{7}{4}$, então $a-2$ envia $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1, e $5/4$ para a pela Regra 2 e a está satisfeito. Portanto, $(a-2,1) \notin C$ e $(a-2,4) \notin C$. Consequentemente, $a-2$ envia $1/4$ para $a-1$ (pela Regra 1) o satisfazendo e envia $1/2$ para a pela Regra 2. Finalmente, $a-3$ envia carga $3/4$ para a pela Regra 3 e então a está satisfeito, uma contradição.

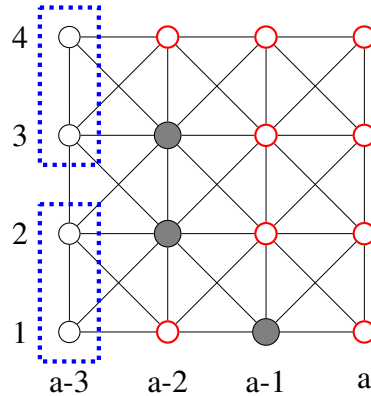


Figura 46: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.2.

Subcaso 1.3: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,2)\}$ (ilustrado na Figura 47). Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, então $(a-2,3) \in C$. Como $C[(a-1,2)] \neq C[(a-1,3)]$, então $(a-2,1) \in C$ ou $(a-2,4) \in C$. Se $(a-2,2) \in C$, então $(a-2)$ possui pelo menos três vértices em C e $\text{exc}_0(a-2) \geq 7/4$. Assim, $a-2$ envia $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e $5/4$ para a pela Regra 2. Então a está satisfeito e temos uma contradição. Logo, assumimos que $(a-2,2) \notin C$. Agora, $a-2$ tem no máximo dois vértices em C e, assim, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$. Então, $a-2$ envia $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e $1/2$ para a pela Regra 2. Ademais, $a-3$ envia carga $3/4$ para a pela Regra 3. Então a está satisfeito e temos uma contradição.

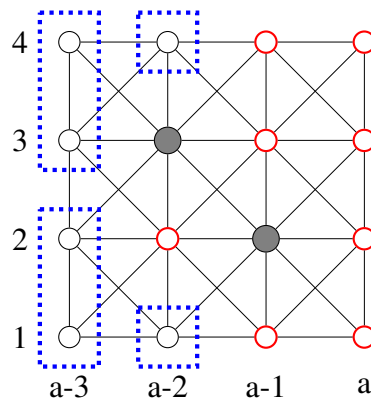


Figura 47: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.3.

Subcaso 1.4: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,1), (a-1,2)\}$ (ilustrado na Figura 48). Observe que $\text{exc}_0(a-1) \geq 3/4$ e, assim, $(a-1)$ envia pelo menos $3/4$ para a pela Regra 1. Então, $\text{exc}_1(a) = -1/2$. Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, nós temos que $(a-2,3) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $(a-2)$ envia $1/2$ para a pela Regra 2 e a está satisfeito. Então, $(a-2,1) \notin C, (a-2,2) \notin C$ e $(a-2,4) \notin C$. Logo, $\text{exc}_0(a-2) = -1/4$. Assim, $a-3$

envia $1/4$ para $a-2$ pela Regra 1 e envia $1/2$ para a pela Regra 3. Então a está satisfeito e temos uma contradição.

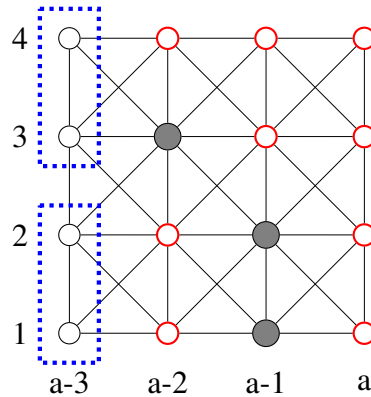


Figura 48: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.4.

Subcaso 1.5: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1), (a-1, 3)\}$ (ilustrado na Figura 49). Então, $\text{exc}(a-1) \geq 3/4$. Assim, $(a-1)$ envia $3/4$ para a pela Regra 1. Então, $\text{exc}_1(a) = -1/2$. Como $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 4)]$, então $(a-2, 2) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia $1/2$ para a pela Regra 2 e a está satisfeito. Portanto, assumimos que $(a-2, 1) \notin C, (a-2, 3) \notin C$ e $(a-2, 4) \notin C$. Logo, $\text{exc}_0(a-2) = -1/4$. Assim, $a-3$ envia $1/4$ para $a-2$ pela Regra 1 e envia carga $1/2$ para a pela Regra 3. Então a está satisfeito e temos uma contradição.

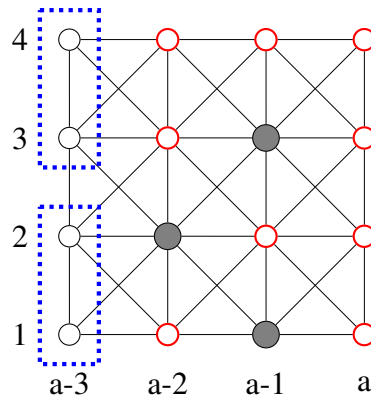


Figura 49: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.5.

Subcaso 1.6: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1), (a-1, 4)\}$ (ilustrado na Figura 50). Então, $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ implica $(a-2, 3) \in C$. Ademais, $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 4)]$. Então, $(a-2, 2) \in C$. Assim, $\text{exc}_0(a-1) = 3/4$ e $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$. Logo, $a-1$ envia $3/4$ para a pela Regra 1 e $a-2$ envia $1/2$ para a pela Regra 2. Portanto a está satisfeito e temos uma contradição.

Subcaso 1.7: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2), (a-1, 3)\}$ (ilustrado na Figura 51). Então $\text{exc}(a-1) = 3/4$ e, assim, $a-1$ envia carga $3/4$ para a pela Regra 1. Então, $\text{exc}_1(a) = -1/2$. Ademais, $C[(a-1, 2)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 1) \in C$ ou $(a-2, 4) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $1/2$ para a pela Regra 2 e, assim, a está

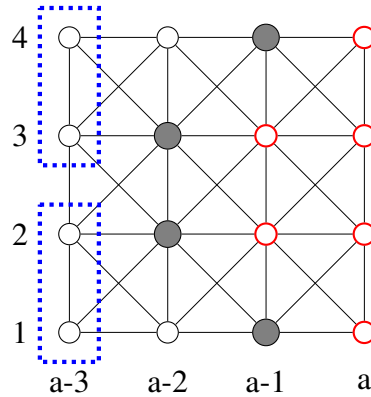


Figura 50: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.6.

satisfeito. Portanto, por simetria, nós assumimos que $(a-2, 4) \in C$, $(a-2, 1) \notin C$, $(a-2, 2) \notin C$ e $(a-2, 3) \notin C$. Assim, $\text{exc}_0(a-2) = -1/4$. Agora, $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$ pela Regra 1 e envia $1/2$ para a pela Regra 3. Então a está satisfeito e temos uma contradição.

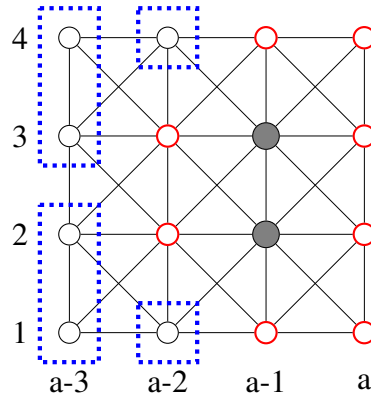


Figura 51: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 1.7.

Caso 2: $Q_a \cap C = \{(a, 1)\}$. Primeiro, note que ou $(a-3, 3) \in C$ ou $(a-3, 4) \in C$, pois $C[(a-2, 4)] \neq C[(a-1, 4)]$. Ademais, $|Q_{a-1} \cap C| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-1) \geq 3/4$ e, assim, $a-1$ envia carga $1/4$ para a pela Regra 1 e a está satisfeito. Portanto, nós estamos em um dos seguintes cinco subcasos: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (Subcaso 2.1), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (Subcaso 2.2), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2)\}$ (Subcaso 2.3), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 3)\}$ (Subcaso 2.4), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 4)\}$ (Subcaso 2.5).

Subcaso 2.1: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (ilustrado na Figura 52). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$ e $C[(a-1, 4)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 2) \in C$ e $(a-2, 3) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 2$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 7/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $5/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Assim, a está satisfeito. Assumimos então que $(a-2, 1) \notin C$ e $(a-2, 4) \notin C$. Em particular, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia $3/4$ para $a-1$ pela Regra 1. Então, $\text{exc}_1(a-1) = -1/2$. Ademais, $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$ e, assim, $a-3$ envia carga $1/2$ para $a-1$ pela Regra 2 e $1/4$ para a pela Regra 3 e, assim, a está satisfeito. Em particular, $(a-3, 1) \notin C$ e $(a-3, 2) \notin C$. Como $C[(a-2, 2)] \neq C[(a-1, 3)] = \{(a-2, 2), (a-2, 3)\}$, temos então que $(a-3, 3) \in C$. Como $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-2, 2)] =$

$\{(a-2,2), (a-2,3), (a-3,3)\}$, temos então que $(a-3,4) \in C$. Isso contradiz $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$.

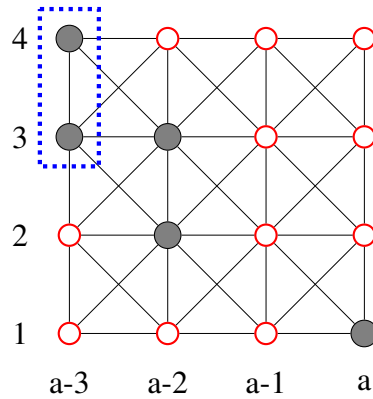


Figura 52: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.1.

Subcaso 2.2: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,1)\}$ (ilustrado na Figura 53). Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, então $(a-2,3) \in C$. Ademais $C[(a-1,3)] \neq C[(a-1,4)]$, então $(a-2,2) \in C$. Logo, $\text{exc}(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

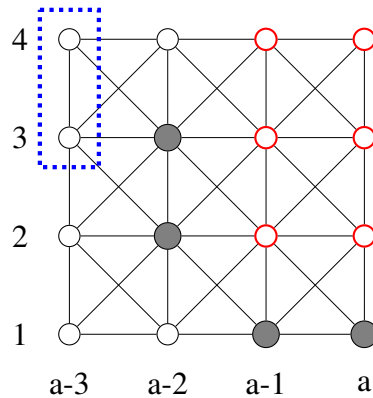


Figura 53: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.2.

Subcaso 2.3: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,2)\}$ (ilustrado na Figura 54). Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, então $(a-2,3) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2 e, dessa maneira, a está satisfeito. Portanto, assumimos que $(a-2,1) \notin C$, $(a-2,2) \notin C$ e $(a-2,4) \notin C$. Ademais, $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$ e, dessa maneira, $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$, $1/4$ para $a-1$, e $1/3$ para a pelas Regras 1, 2 e 3 respectivamente. Dessa forma, a está satisfeito. Portanto, assumimos que $(a-3,1) \notin C$ e $(a-3,2) \notin C$. Agora, $(a-3,3) \in C$ porque $C[(a-2,2)] \neq C[(a-1,3)] = \{(a-1,2), (a-2,3)\}$. Além disso, $(a-3,4) \in C$ pois $C[(a-2,3)] \neq C[(a-2,2)] = \{(a-1,2), (a-2,3), (a-3,3)\}$. Isso contradiz $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$.

Subcaso 2.4: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,3)\}$ (ilustrado na Figura 55). Como $C[(a-1,4)] \neq C[(a-1,3)]$, então $(a-2,2) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, dessa forma, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Assim, a

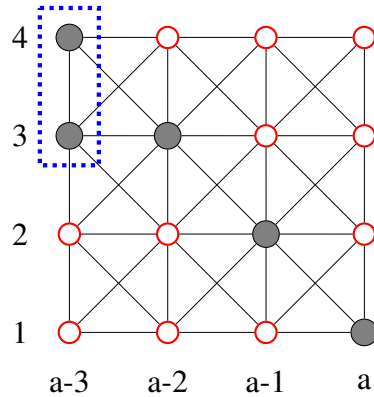


Figura 54: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.3.

está satisfeito. Então, assumimos que $(a-2, 1) \notin C$, $(a-2, 3) \notin C$ e $(a-2, 4) \notin C$. Ademais, $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$ e, dessa maneira, $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$, envia carga $1/4$ para $a-1$ e envia carga $1/4$ para a pelas Regras 1, 2 e 3 respectivamente. Assim, a está satisfeito. Em particular, assumimos que $(a-3, 1) \notin C$ e $(a-3, 2) \notin C$. Agora, $(a-3, 3) \in C$ pois $C[(a-2, 2)] \neq C[(a-1, 3)] = \{(a-1, 3), (a-2, 2)\}$. Além disso, temos que $(a-3, 4) \in C$ porque $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-2, 2)] = \{(a-1, 3), (a-2, 2), (a-3, 3)\}$. Isso contradiz $|C \cap Q_{a-3}| \leq 1$.

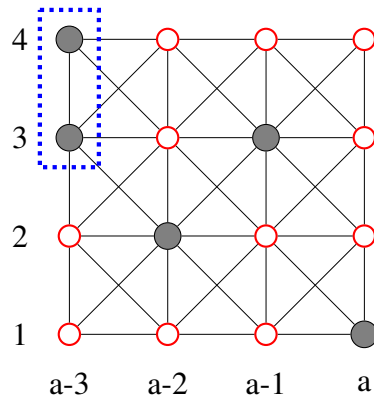


Figura 55: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.4.

Subcaso 2.5: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 4)\}$ (ilustrado na Figura 56). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$, então $(a-2, 3) \in C$. Como $C[(a-1, 3)] \neq C[(a-1, 4)]$, então $(a-2, 2) \in C$. Assim, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$. Logo, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

Caso 3: $Q_a \cap C = \{(a, 2)\}$. Primeiro, note que $(a-3, 3) \in C$ ou $(a-3, 4) \in C$ pois $C[(a-2, 4)] \neq C[(a-1, 4)]$. Ademais, $|Q_{a-1} \cap C| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-1) \geq 3/4$ e, dessa forma, $a-1$ envia carga $1/4$ para a pela Regra 1 e a está satisfeito. Portanto, estamos em um dos seguintes cinco subcasos: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (Subcaso 3.1), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 1)\}$ (Subcaso 3.2), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 2)\}$ (Subcaso 3.3), $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 3)\}$ (Subcaso 3.4) e $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 4)\}$ (Subcaso 3.5). Lembre que $(a-3, 3) \in C$ ou $(a-3, 4) \in C$ em todos os subcasos.

Subcaso 3.1: $Q_{a-1} \cap C = \emptyset$ (ilustrado na Figura 57). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$, então

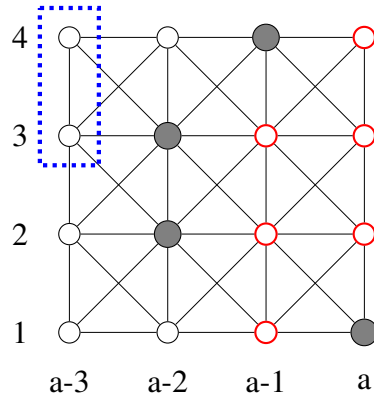


Figura 56: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 2.5.

$(a-2,3) \in C$. Como $C[(a-1,2)] \neq C[(a-1,3)]$, então $(a-2,1) \in C$ ou $(a-2,4) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 2$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 7/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $5/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e $1/4$ para a pela Regra 2 e, dessa maneira, a está satisfeito. Assuma então que $|C \cap Q_{a-2}| = 2$. Assim, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, dessa maneira, $a-2$ envia $3/4$ para $a-1$ pela Regra 1. Então $\text{exc}_1(a-1) = -1/2$. Além disso, $(a-2,2) \notin C$. Agora, $C[(a-2,3)] \neq C[(a-2,4)]$, então $(a-3,2) \in C$. Logo, $|C \cap Q_{a-3}| \geq 2$. Consequentemente, $\text{exc}(a-3) \geq 3/4$ e, assim, $a-3$ envia carga $1/2$ para $a-1$ pela Regra 2 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 3. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

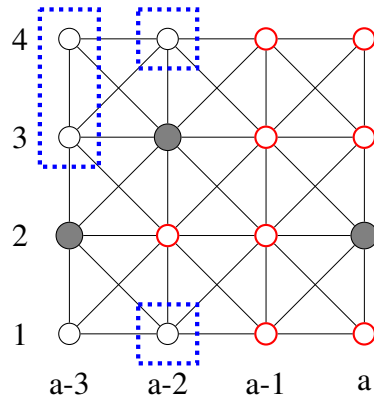


Figura 57: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.1.

Subcaso 3.2: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,1)\}$ (ilustrado na Figura 58). Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, então $(a-2,3) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, dessa forma, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Assim, a está satisfeito. Logo, assumimos que $(a-2,1) \notin C$, $(a-2,2) \notin C$ e $(a-2,4) \notin C$. Agora, $C[(a-2,3)] \neq C[(a-2,4)]$, então $(a-3,2) \in C$. Portanto, $|C \cap Q_{a-3}| \geq 2$ e, dessa forma, $\text{exc}_0(a-3) \geq 3/4$. Logo $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$, envia carga $1/4$ para $a-1$ e envia carga $1/4$ para a pelas Regras 1, 2 e 3 respectivamente. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

Subcaso 3.3: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1,2)\}$ (ilustrado na Figura 59). Como $C[(a-1,1)] \neq C[(a-1,2)]$, então $(a-2,3) \in C$. Como $C[(a-1,2)] \neq C[(a-1,3)]$, então $(a-2,1) \in C$ ou $(a-2,4) \in C$

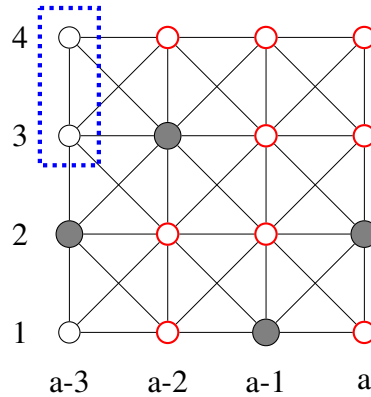


Figura 58: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.2.

C . Com isso, $\text{exc}_0(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

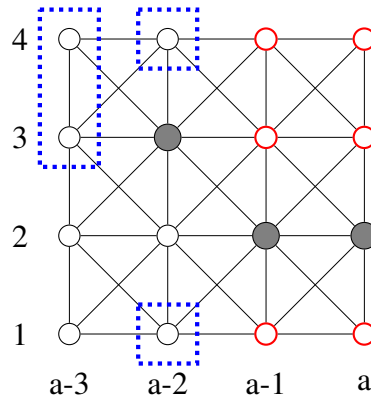


Figura 59: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.3.

Subcaso 3.4: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 3)\}$ (ilustrado na Figura 60). Como $C[(a-1, 2)] \neq C[(a-1, 3)]$, então $(a-2, 1) \in C$ ou $(a-2, 4) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}(a-2) \geq 3/4$ e, assim, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2. Dessa forma, a está satisfeito. Logo, assumimos que $(a-2, 2) \notin C$ e $(a-2, 3) \notin C$. Agora, $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-2, 4)]$, então $(a-3, 2) \in C$. Portanto, $|C \cap Q_{a-3}| \geq 2$. Logo, $\text{exc}(a-3) \geq 3/4$ e, assim, $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$, envia carga $1/4$ para $a-1$ e envia carga $1/4$ para a pelas Regras 1, 2 e 3 respectivamente. Portanto, a está satisfeito e temos uma contradição.

Subcaso 3.5: $Q_{a-1} \cap C = \{(a-1, 4)\}$ (ilustrado na Figura 61). Como $C[(a-1, 1)] \neq C[(a-1, 2)]$, então $(a-2, 3) \in C$. Mas $|C \cap Q_{a-2}| \leq 1$, caso contrário $\text{exc}(a-2) \geq 3/4$ e, dessa maneira, $a-2$ envia carga $1/4$ para $a-1$ pela Regra 1 e envia carga $1/4$ para a pela Regra 2 tornando, assim, a satisfeito. Assumimos então que $(a-2, 1) \notin C$, $(a-2, 2) \notin C$ e $(a-2, 4) \notin C$. Agora, $C[(a-2, 3)] \neq C[(a-2, 4)]$, então $(a-3, 2) \in C$. Portanto, $|C \cap Q_{a-3}| \geq 2$. Dessa forma, $\text{exc}(a-3) \geq 3/4$. Logo $a-3$ envia carga $1/4$ para $a-2$, envia carga $1/4$ para $a-1$ e envia carga $1/4$ para a pelas Regras 1, 2 e 3 respectivamente. Portanto a está satisfeito e temos uma contradição. \square

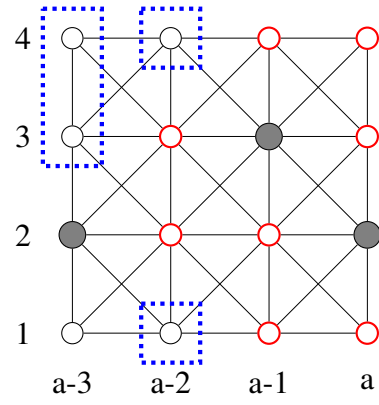


Figura 60: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.4.

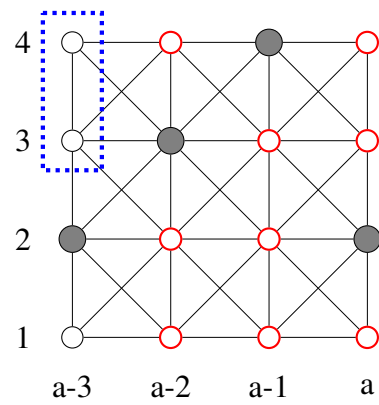


Figura 61: Demonstração - $d^*(\mathcal{K}_4) \geq 5/16$ - Subcaso 3.5.

6 CONCLUSÃO

Nesta tese, apresentamos resultados para o Problema do Código de Identificação em grades triangulares e em grades *king* quando essas possuem um número limitado de linhas obtidos durante 2014 e 2018.

Nós provamos que $d^*(\mathcal{T}_1) = d^*(\mathcal{T}_2) = 1/2 = 0.5$, $d^*(\mathcal{T}_3) = d^*(\mathcal{T}_4) = 1/3 \approx 0.3333$, $d^*(\mathcal{T}_5) = 3/10 = 0.3$, $d^*(\mathcal{T}_6) = 1/3 \approx 0.333$ e $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(4k)$ para todo $k \geq 7$ ímpar. Além disso, provamos que $1/4 + 1/(4k) \leq d^*(\mathcal{T}_k) \leq 1/4 + 1/(2k)$ para todo $k \geq 8$ par e conjecturamos que $d^*(\mathcal{T}_k) = 1/4 + 1/(2k)$ para todo $k \geq 8$ par. Esses resultados foram apresentados no *Bordeaux Graph Workshop* em 2016 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2016) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017a).

Mostramos também que para toda grade *king* G , $d^*(G) \geq 2/9 \approx 0.222$. Além disso, mostramos que esse limite é alcançado somente para grades *king* que são produtos forte de dois caminhos infinitos. Provamos que $d^*(\mathcal{K}_3) = 1/3 \approx 0.333$, $d^*(\mathcal{K}_4) = 5/16 = 0.3125$, $d^*(\mathcal{K}_5) = 4/15 \approx 0.267$ e $d^*(\mathcal{K}_6) = 5/18 \approx 0.278$. Nós também provamos que $\frac{2}{9} + \frac{8}{81k} \leq d^*(\mathcal{K}_k) \leq \frac{2}{9} + \frac{4}{9k}$ para todo $k \geq 7$. Esses resultados foram apresentados no *IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium - LAGOS* em 2017 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2017b) e foram publicados no periódico *Discrete Mathematics* em 2018 (DANTAS, HAVET, e SAMPAIO, 2018).

6.1 Questões em aberto

Existem alguns resultados do nosso trabalho que podem ser aperfeiçoados. Também existem algumas perguntas na literatura que permanecem sem resposta.

- Qual a densidade ótima de códigos de identificação para grades hexagonais infinitas? Como foi mostrado anteriormente, o último resultado obtido em relação a isso foi em (CUKIERMAN e YU, 2013).
- No Capítulo 4, conjecturamos que para $k \geq 8$ par, $d^*(\mathcal{T}_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2k}$. Existe um código de identificação com densidade menor do que a mostrada na Figura 29 para esse tipo de grade? É possível obter um limite inferior mais apertado que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4k}$ para esse tipo de grade?
- No Capítulo 5, determinamos que a densidade ótima de códigos de identificação para grades *king* com $k \geq 7$ linhas é limitado por $\frac{2}{9} + \frac{8}{81k} \leq d^*(\mathcal{K}_k) \leq \frac{2}{9} + \frac{8}{18k}$. Determinamos também que, para alguns casos, esse limite superior pode ser mais apertado: quando $k \equiv 0 \pmod{3}$, temos que $d^*(\mathcal{K}_k) \leq \frac{2}{9} + \frac{6}{18k}$; e quando $k \equiv 2 \pmod{3}$, temos que $d^*(\mathcal{K}_k) \leq \frac{2}{9} + \frac{7}{18k}$. É possível tornar esses limites (tanto inferior quanto superior) mais apertados?

6.2 Trabalhos futuros

Como vimos no Capítulo 3, o problema de Código de Identificação e suas variantes vêm sendo amplamente estudados em uma grande variedade de classes de grafos. Dessa maneira, existem muitas direções para onde o nosso estudo pode se estender. Alguns problemas que pretendemos explorar são:

- Estudar o problema do código de identificação para grades hexagonais com linhas limitadas.

Como visto na Seção 2.3.1, o conjunto de vértices de grades infinitas é o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. As grades hexagonais infinitas e as grades *king* infinitas têm os seus conjunto de arestas definidos da seguinte forma (ver exemplos na Figura 2):

- (i) $E(\mathcal{G}_H) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, (-1)^{i+j+1}), (\pm 1, 0)\}, \text{ onde } (i, j) = u\}$
- (ii) $E(\mathcal{G}_K) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, -1)\}$

Existem muitos resultados na literatura para a densidade ótima de grades com linhas limitadas. No Seção 3.3, apresentamos os resultados relacionados à grades retangulares com linhas limitadas. No Capítulo 4, apresentamos os resultados que obtivemos para grades triangulares com linhas limitadas. No Capítulo 5, apresentamos os nossos resultados para grades *king* com linhas limitadas. Assim, naturalmente, as grades hexagonais com linhas limitadas (ver o recorte da Figura 63) despertam o nosso interesse.

- Estudar o problema do Código de Identificação para grafos direcionados

O conceito do Problema do Código de Identificação foi introduzido para grafos não direcionado mas foi naturalmente estendido para grafos direcionados e orientados. Citamos, a seguir, alguns dos estudos do Problema de Código de Identificação para grafos direcionados. Em CHARON, HUDRY, e LOBSTEIN (2002a), foi provado que o Problema do Código de Identificação é NP-Completo para alguns grafos direcionados como, por exemplo, grafos bipartidos sem ciclos direcionados. Em FOUCAUD, NASERASR, e PARREAU (2013), foi caracterizado o conjunto de grafos direcionados (finitos e infinitos) cujo único código de identificação possível é todo o conjunto de vértices do grafo. Já em CHARON *et al.* (2006), foi descrito um algoritmo de tempo linear para encontrar o código de identificação mínimo de qualquer árvore orientada. Esses trabalhos demonstram ter potencial para serem estendidos.

Em SKAGGS (2009), Skaggs mostrou que a orientação de arestas pode reduzir drasticamente a densidade do código de identificação para grafos completos e grafos bipartidos completos. Por outro lado, foi demonstrado que a orientação também pode aumentar o número de vértices necessários para identificar um grafo. Na Figura , temos um exemplo de como o código de identificação de um grafo pode mudar quando as arestas desse grafo são orientadas.

Ainda em SKAGGS (2009), Skaags deixou uma pergunta em aberto: sobre que condições o código de identificação de um grafo G orientado é menos denso do que o código de identificação de G não orientado? Além disso, podemos investigar, para cada classe de grafos orientados, qual a orientação que produz um código de identificação de densidade mínima.

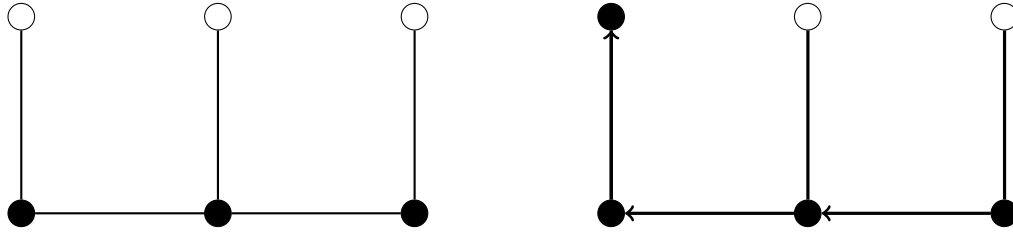


Figura 62: Exemplo de código de identificação para grafo G não direcionado e para o grafo G orientado.

Fonte: SKAGGS (2009).

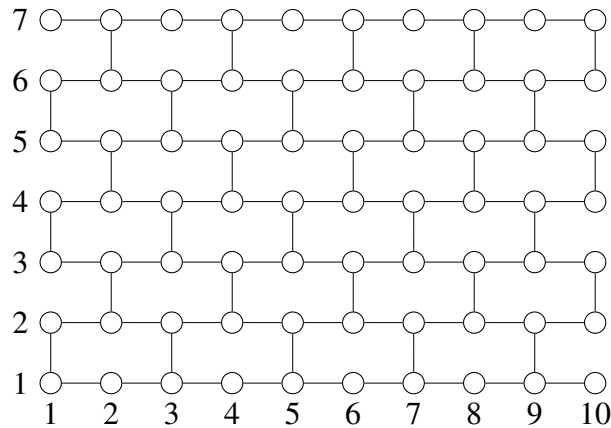


Figura 63: Recorte de grade hexagonal.

- Estudar o problema do código de identificação para grades cilíndricas.

Durante os nossos estudos sobre grades com linhas limitadas, percebemos que, frequentemente, as bordas dessas grades retêm mais carga que as demais linhas. Dessa maneira, pensamos em uma estrutura de grades onde os vértices da borda superior são adjacentes aos vértices da borda inferior. Essas novas arestas seguirão o padrão de cada tipo de grade e serão denominadas *grades cilíndricas*. Por exemplo, para grades *king*, o conjunto de arestas da grade *cilíndrica* ($\mathcal{C}\mathcal{H}_K$) é definido da seguinte maneira (ver Figura 64):

$$E(\mathcal{C}\mathcal{H}_K) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, -1)\} \cup \{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm(k-1)), (\pm 1, \pm(k-1))\}\}$$

- Estudar o Problema do Sistema de Observação (definido na Seção 3.2) para grades retangulares, hexagonais e triangulares.

Como visto na Seção 3.2, o Problema de Sistema de Observação generaliza o Problema do Código de Identificação. Em algumas situações, por conta da generalização, pode ser mais plausível investigar o Problema de Sistema de Observação ao invés do Problema do Código de Identificação. No exemplo de detecção de falha em sistemas multiprocessadores, podemos ter processadores que simplesmente não estão conectados, com a finalidade de fazer reporte de falhas, à alguns dos processadores em sua adjacência.

Em AUGER *et al.* (2013), o referido problema foi estudado para grades *king*. Como o problema é semelhante ao problema do Código de Identificação e as grades citadas possuem uma estrutura semelhante a estrutura da grade *king*, abordar o Problema dos Sistemas de Obser-

vação para as grades que estudamos para o Problema do Código de Identificação atrai a nossa atenção.

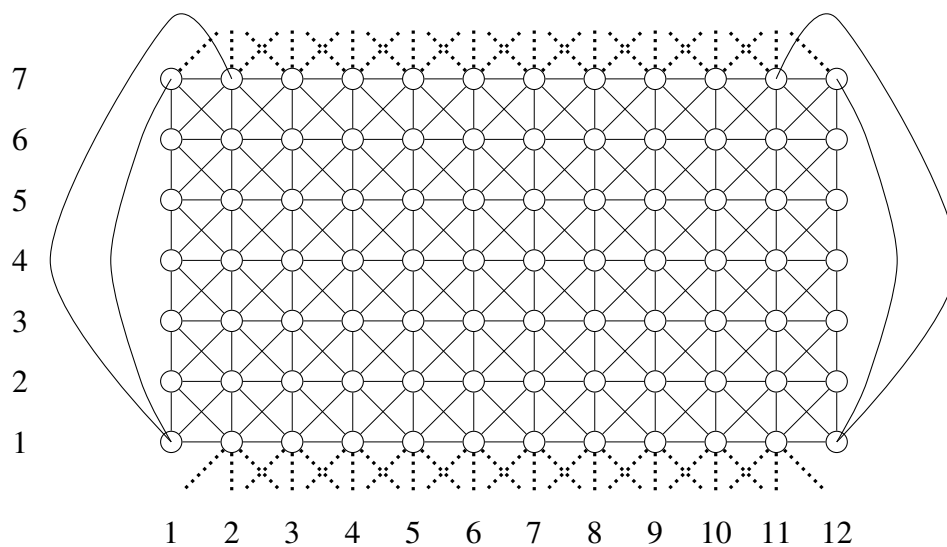


Figura 64: Exemplo de grade *king* cilíndrica.

REFERÊNCIAS

- AÏDER, Méziane; GRAVIER, Sylvain; SLIMANI, Souad. Relaxed locally identifying coloring of graphs. *Graphs and Combinatorics*, v. 32, n. 5, p. 1651–1665, 2016.
- APPEL, Kenneth; HAKEN, Wolfgang. Every planar map is four colorable. *Bulletin of the American mathematical Society*, v. 82, n. 5, p. 711–712, 1976.
- ARORA, Sanjeev; BARAK, Boaz. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
- AUGER, David; CHARON, Irène; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Complexity results for identifying codes in planar graphs. *International Transactions in Operational Research*, v. 17, n. 6, p. 691–710, 2010.
- AUGER, David; CHARON, Irène; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Watching systems in graphs: an extension of identifying codes. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, n. 12, p. 1674–1685, 2013.
- AUGER, David; CHARON, Irène; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Maximum size of a minimum watching system and the graphs achieving the bound. *Discrete Applied Mathematics*, v. 164, p. 20–33, 2014.
- AUSIELLO, Giorgio; CRESCENZI, Pierluigi; GAMBOSI, Giorgio; KANN, Viggo; MARCHETTI-SPACCAMELA, Alberto; PROTASI, Marco. *Complexity and approximation: Combinatorial optimization problems and their approximability properties*. Springer Science & Business Media, 2012.
- BAKER, Brenda S. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1983)*. IEEE, 1983, p. 265–273.
- BEAUDOU, Laurent; DANKELMANN, Peter; FOUCAUD, Florent; HENNING, Michael A; MARY, Arnaud; PARREAU, Aline. Bounding the order of a graph using its diameter and metric dimension: a study through tree decompositions and vc dimension. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 32, n. 2, p. 902–918, 2018.
- BEN-HAIM, Yael; LITSYN, Simon. Exact minimum density of codes identifying vertices in the square grid. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 19, n. 1, p. 69–82, 2005.
- BERTOSSI, Alan A. Dominating sets for split and bipartite graphs. *Information processing letters*, v. 19, n. 1, p. 37–40, 1984.
- BONDY, JA; MURTY, USR. Graph theory (2008). *Grad. Texts in Math*, 2008.

BOOTH, Kellogg S; JOHNSON, J Howard. Dominating sets in chordal graphs. *SIAM Journal on Computing*, v. 11, n. 1, p. 191–199, 1982.

BOUZNIF, Marwane; HAVET, Frédéric; PREISSMANN, Myriam. Minimum-density identifying codes in square grids. *International Conference on Algorithmic Applications in Management*. Springer, 2016, p. 77–88.

CHAKRABARTY, Krishnendu; IYENGAR, S Sitharama; QI, Hairong; CHO, Eungchun. Grid coverage for surveillance and target location in distributed sensor networks. *IEEE transactions on computers*, v. 51, n. 12, p. 1448–1453, 2002.

CHANG, Gerard J; NEMHAUSER, George L. The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, v. 5, n. 3, p. 332–345, 1984.

CHARBIT, Emmanuel; CHARON, Irène; COHEN, Gérard D; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Discriminating codes in bipartite graphs: bounds, extremal cardinalities, complexity. *Adv. in Math. of Comm.*, v. 2, n. 4, p. 403–420, 2008.

CHARON, Irène; COHEN, Gérard; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. New identifying codes in the binary Hamming space. *European Journal of Combinatorics*, v. 31, n. 2, p. 491–501, 2010.

CHARON, Irène; GRAVIER, Sylvain; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine; MOLLARD, Michel; MONCEL, Julien. A linear algorithm for minimum 1-identifying codes in oriented trees. *Discrete Applied Mathematics*, v. 154, n. 8, p. 1246–1253, 2006.

CHARON, Irene; HONKALA, Iiro; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. General bounds for identifying codes in some infinite regular graphs. *the electronic journal of combinatorics*, v. 8, n. 1, p. 39, 2001.

CHARON, Irene; HONKALA, Iiro; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. The minimum density of an identifying code in the king lattice. *Discrete Mathematics*, v. 276, n. 1-3, p. 95–109, 2004.

CHARON, Irene; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Identifying and locating-dominating codes: NP-completeness results for directed graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 48, n. 8, p. 2192–2200, 2002a.

CHARON, Irene; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs. *the electronic journal of combinatorics*, v. 9, n. 1, p. R11, 2002b.

CHARON, Irène; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard. *Theoretical Computer Science*,

v. 290, n. 3, p. 2109–2120, 2003.

CHARON, Irene; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Possible cardinalities for identifying codes in graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, v. 32, p. 177–195, 2005.

CHARON, Irène; HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs. *Discrete mathematics*, v. 307, n. 3-5, p. 356–366, 2007.

CHARTRAND, G; ERWIN, D; HENNING, MA; SLATER, PJ; ZHANG, P. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, v. 36, p. 89–101, 2002.

CHARTRAND, Gary; EROH, Linda; JOHNSON, Mark A; OELLERMANN, Ortrud R. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, v. 105, n. 1-3, p. 99–113, 2000.

CHLEBÍK, Miroslav; CHLEBÍKOVÁ, Janka. Approximation hardness of dominating set problems in bounded degree graphs. *Information and Computation*, v. 206, n. 11, p. 1264–1275, 2008.

COHEN, Gérard; GRAVIER, Sylvain; HONKALA, Iiro; LOBSTEIN, Antoine; MOLLARD, Michel; PAYAN, Charles; ZÉMOR, Gilles. Improved identifying codes for the grid. *Electronic Journal of Combinatorics*, v. 6, n. 1, p. R19, 1999.

COHEN, Gérard D; HONKALA, Iiro; LOBSTEIN, Antoine; ZÉMOR, Gilles. Bounds for codes identifying vertices in the hexagonal grid. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 13, n. 4, p. 492–504, 2000.

COHEN, Gérard D; HONKALA, L; LOBSTEIN, Antoine. On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals. *IEEE Transactions on Computers*, v. 50, n. 2, p. 174–176, 2001.

COHEN, Nathann; HAVET, Frédéric. On the minimum size of an identifying code over all orientations of a graph. *the electronic journal of combinatorics*, v. 25, n. 1, p. 1–49, 2018.

COLBOURN, Charles J; SLATER, Peter J; STEWART, Lorna K. Locating dominating sets in series parallel networks. *Congr. Numer.*, v. 56, p. 135–162, 1987.

COOK, Stephen A. The complexity of theorem-proving procedures. *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM, 1971, p. 151–158.

CORMEN, Thomas H; LEISERSON, Charles E; RIVEST, Ronald L; STEIN, Clifford. *Introduction to algorithms*. MIT press, 2009.

CRANSTON, Daniel W; YU, Gexin. A new lower bound on the density of vertex identifying

codes for the infinite hexagonal grid. *the electronic journal of combinatorics*, v. 16, n. 1, p. 113, 2009.

CUKIERMAN, Ari; YU, Gexin. New bounds on the minimum density of an identifying code for the infinite hexagonal grid. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, n. 18, p. 2910–2924, 2013.

DANIEL, Marc; GRAVIER, Sylvain; MONCEL, Julien. Identifying codes in some subgraphs of the square lattice. *Theoretical Computer Science*, v. 319, n. 1-3, p. 411–421, 2004.

DANTAS, Rennan; HAVET, Frédéric; SAMPAIO, Rudini M. Identifying codes for infinite triangular grids with a finite number of rows. *Bordeaux Graph Workshop*. Bordeaux, France, 2016.

DANTAS, Rennan; HAVET, Frédéric; SAMPAIO, Rudini M. Identifying codes for infinite triangular grids with a finite number of rows. *Discrete Mathematics*, v. 340, n. 7, p. 1584–1597, 2017a.

DANTAS, Rennan; HAVET, Frédéric; SAMPAIO, Rudini M. Minimum density of identifying codes of king grids. *IX Latin and American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium*. Marseille, France, 2017b.

DANTAS, Rennan; HAVET, Frédéric; SAMPAIO, Rudini M. Minimum density of identifying codes of king grids. *Discrete Mathematics*, v. 341, n. 10, p. 2708–2719, 2018.

DE BONTRIDDER, Koen MJ; HALLDÓRSSON, Bjarni V; HALLDÓRSSON, Magnús M; HURKENS, Cor AJ; LENSTRA, Jan Karel; RAVI, Ramamoorthi; STOUGIE, Leen. Approximation algorithms for the test cover problem. *Mathematical Programming*, v. 98, n. 1-3, p. 477–491, 2003.

DIRAC, Gabriel Andrew. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. Springer, 1961, v. 25, p. 71–76.

ESPERET, Louis; GRAVIER, Sylvain; MONTASSIER, Mickaël; OCHEM, Pascal; PARREAU, Aline; *et al.* Locally identifying coloring of graphs. *the electronic journal of combinatorics*, v. 19, n. 2, p. P40, 2012.

EULER, Leonhard. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, p. 140–160, 1758.

FARBER, Martin; KEIL, J Mark. Domination in permutation graphs. *Journal of algorithms*, v. 6, n. 3, p. 309–321, 1985.

FAZIL, Muhammad; JAVAID, Imran; SALMAN, Muhammad; ALI, Usman.

Locating-dominating sets in hypergraphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, v. 72, n. 2, p. 224–234, 2016.

FINBOW, A; HARTNELL, BL. On locating dominating sets and well-covered graphs. *Congr. Numer.*, v. 65, p. 191–200, 1988.

FOLDES, Stéphane; HAMMER, Peter L. *Split graphs*. Universität Bonn. Institut für Ökonometrie und Operations Research, 1976.

FOUCAUD, Florent. *Combinatorial and algorithmic aspects of identifying codes in graphs*. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012.

FOUCAUD, Florent; GRAVIER, Sylvain; NASERASR, Reza; PARREAU, Aline; VALICOV, Petru. Identifying codes in line graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 73, n. 4, p. 425–448, 2013.

FOUCAUD, Florent; GUERRINI, Eleonora; KOVŠE, Matjaž; NASERASR, Reza; PARREAU, Aline; VALICOV, Petru. Extremal graphs for the identifying code problem. *European Journal of Combinatorics*, v. 32, n. 4, p. 628–638, 2011.

FOUCAUD, Florent; HENNING, Michael A; LÖWENSTEIN, Christian; SASSE, Thomas. Locating–dominating sets in twin-free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 200, p. 52–58, 2016.

FOUCAUD, Florent; HONKALA, Iiro; LAIHONEN, Tero; PARREAU, Aline; PERARNAU, Guillem. Locally identifying colourings for graphs with given maximum degree. *Discrete Mathematics*, v. 312, n. 10, p. 1832–1837, 2012.

FOUCAUD, Florent; MERTZIOS, George B; NASERASR, Reza; PARREAU, Aline; VALICOV, Petru. Identification, location–domination and metric dimension on interval and permutation graphs. I. Bounds. *Theoretical Computer Science*, v. 668, p. 43–58, 2017a.

FOUCAUD, Florent; MERTZIOS, George B; NASERASR, Reza; PARREAU, Aline; VALICOV, Petru. Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. II. Algorithms and complexity. *Algorithmica*, v. 78, n. 3, p. 914–944, 2017b.

FOUCAUD, Florent; NASERASR, Reza; PARREAU, Aline. Characterizing extremal digraphs for identifying codes and extremal cases of Bondy’s theorem on induced subsets. *Graphs and Combinatorics*, v. 29, n. 3, p. 463–473, 2013.

FRIEZE, Alan; MARTIN, Ryan; MONCEL, Julien; RUSZINKÓ, Miklós; SMYTH, Cliff. Codes identifying sets of vertices in random networks. *Discrete Mathematics*, v. 307, n. 9-10, p. 1094–1107, 2007.

GARY, Michael R; JOHNSON, David S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory*

of NP-completeness. 1979.

GILMORE, Paul C; HOFFMAN, Alan J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 16, p. 539–548, 1964.

GOLUMBIC, Martin Charles. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, v. 57. Elsevier, 2004.

HAJÓS, Gy. Über eine art von graphen, Internat. *Math. Nachr.*, v. 11, 1957.

HAKANEN, Anni; LAIHONEN, Tero. On $\{1\}$ -metric dimensions in graphs. *Fundamenta Informaticae*, v. 162, n. 2-3, p. 143–160, 2018.

HARARY, Frank; MELTER, Robert A. On the metric dimension of a graph. *Ars Combin*, v. 2, n. 191-195, p. 1, 1976.

HAYNES, Teresa; KNISLEY, Debra; SEIER, Edith; ZOU, Yue. A quantitative analysis of secondary RNA structure using domination based parameters on trees. *BMC bioinformatics*, v. 7, n. 1, p. 108, 2006.

HAYNES, Teresa W; HEDETNIEMI, Stephen; SLATER, Peter. *Fundamentals of domination in graphs*. CRC press, 1998.

HAYNES, Teresa W. *Domination in Graphs: Volume 2: Advanced Topics*. Routledge, 2017.

HENNING, MA; YEO, A. Identifying open codes in cubic graphs. *Graphs Combin*, 2012a.

HENNING, Michael A; YEO, Anders. Identifying vertex covers in graphs. *the electronic journal of combinatorics*, v. 19, n. 4, p. 32, 2012b.

HONKALA, Iiro; LAIHONEN, Tero; RANTO, Sanna. On codes identifying sets of vertices in Hamming spaces. *Designs, Codes and Cryptography*, v. 24, n. 2, p. 193–204, 2001.

HONKALA, Iiro; LAIHONEN, Tero; RANTO, Sanna. On strongly identifying codes. *Discrete Mathematics*, v. 254, n. 1-3, p. 191–205, 2002.

HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Some results about a conjecture on identifying codes in complete suns. *International Transactions in Operational Research*, v. 26, n. 2, p. 732–746, 2019a.

HUDRY, Olivier; LOBSTEIN, Antoine. Unique (optimal) solutions: Complexity results for identifying and locating–dominating codes. *Theoretical Computer Science*, v. 767, p. 83–102, 2019b.

JIANG, Minghui. Periodicity of identifying codes in strips. *Information Processing Letters*, v.

135, p. 77–84, 2018.

JOHNSON, David S. Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of computer and system sciences*, v. 9, n. 3, p. 256–278, 1974.

Junnila, VILLE; Laihonon, TERO; Lehtila, TUOMO. On regular and new types of codes for location-domination. *Discrete Applied Mathematics*, v. 247, p. 225–241, 2018. URL <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.050>.

KARP, Richard M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of computer computations*, Springer, p. 85–103. 1972.

KARPOVSKY, Mark G; CHAKRABARTY, Krishnendu; LEVITIN, Lev B. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 2, p. 599–611, 1998.

KÖNIG, Dénes. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, v. 16. Akademische Verlagsgesellschaft mbh, 1936.

LAIFENFELD, Moshe; TRACHTENBERG, Ari. Identifying codes and covering problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 54, n. 9, p. 3929–3950, 2008.

LAIFENFELD, Moshe; TRACHTENBERG, Ari; COHEN, Reuven; STAROBINSKI, David. Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes. p. 197–206, 2007.

LAIFENFELD, Moshe; TRACHTENBERG, Ari; COHEN, Reuven; STAROBINSKI, David. Joint monitoring and routing in wireless sensor networks using robust identifying codes. *Mobile Networks and Applications*, v. 14, n. 4, p. 415–432, 2009.

LEKKEIKERKER, C; BOLAND, J. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, v. 51, n. 1, p. 45–64, 1962.

LU, Mei; XU, Jiale; ZHANG, Yi. Identifying codes in the direct product of a complete graph and some special graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 254, p. 175–182, 2019.

MARTINS, Nicolas; SAMPAIO, Rudini. Locally identifying coloring of graphs with few p4s. *Theoretical Computer Science*, v. 707, p. 69–76, 2018.

MONCEL, Julien. *Codes identifiants dans les graphes*. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2005.

MORET, Bernard ME; SHAPIRO, Henry D. On minimizing a set of tests. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 6, n. 4, p. 983–1003, 1985.

MÜLLER, Haiko; BRANDSTÄDT, Andreas. The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, v. 53, n. 2-3, p. 257–265, 1987.

NING, Wenjie; LU, Mei; GUO, Jia. Locating and differentiating-total dominating sets in unicyclic graphs. *Ars Combinatoria*, v. 132, p. 241–255, 2017.

PAPADIMITRIOU, Christos H. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.

RAY, Saikat; STAROBINSKI, David; TRACHTENBERG, Ari; UNGRANGSI, Rachanee. Robust location detection with sensor networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 22, n. 6, p. 1016–1025, 2004.

RAY, Saikat; UNGRANGSI, Rachanee; PELLEGRINI, De; TRACHTENBERG, Ari; STAROBINSKI, David. Robust location detection in emergency sensor networks. *INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies*. IEEE, 2003, v. 2, p. 1044–1053.

RAZ, Ran; SAFRA, Shmuel. A sub-constant error-probability low-degree test, and a sub-constant error-probability PCP characterization of NP. *STOC*. Citeseer, 1997, v. 97, p. 475–484.

RISIUS, Marten; SPOHRER, Kai. A blockchain research framework. *Business & Information Systems Engineering*, v. 59, n. 6, p. 385–409, 2017.

ROOZBAYANI, Maryam; MAIMANI, Hamid Reza. Identifying codes and watching systems in Kneser graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, v. 9, n. 01, p. 1750007, 2017.

SALAVATIPOUR, Mohammad Reza. *Graph colouring via the discharging method*. University of Toronto, 2003.

SAVICA, Aleksandar Lj; MAKSIMOVICB, Zoran Lj; BOGDANOVICC, Milena S. The Open-Locating-Dominating Number of Some Convex Polytopes. *Filomat*, v. 32, n. 2, p. 635–642, 2018.

SCHEINERMAN, Edward R; WEST, Douglas B. The interval number of a planar graph: Three intervals suffice. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 35, n. 3, p. 224–239, 1983.

SEO, Suk J; SLATER, Peter J. Open neighborhood locating–dominating in trees. *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, n. 6, p. 484–489, 2011.

SEO, Suk J; SLATER, Peter J. Open-independent, open-locating-dominating sets. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, v. 5, n. 2, p. 179–193, 2017.

SIPSER, Michael. *Introduction to the Theory of Computation*. Cengage Learning, 2012.

SKAGGS, Robert Duane. *Identifying vertices in graphs and digraphs*. 2009.

SLATER, Peter J. Leaves of trees. *Congr. Numer*, v. 14, n. 549-559, p. 37, 1975.

SLATER, Peter J. Domination and location in acyclic graphs. *Networks*, v. 17, n. 1, p. 55–64, 1987.

SLATER, Peter J. Locating dominating sets and locating-dominating sets. *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the Seventh Quadrennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*. 1995, v. 2, p. 1073–1079.

STANTON, Brendon. On vertex identifying codes for infinite lattices. *arXiv preprint arXiv:1102.2643*, 2011.

SUOMELA, Jukka. Approximability of identifying codes and locating–dominating codes. *Information Processing Letters*, v. 103, n. 1, p. 28–33, 2007.

SWEIGART, Blair; KINCAID, Rex. Maximum Covering Formulation for Open Locating Dominating Sets. *Operations Research Proceedings 2016*, Springer, p. 259–264. 2018.

UNGRANGSI, Rachanee; TRACHTENBERG, Ari; STAROBINSKI, David. An implementation of indoor location detection systems based on identifying codes. *International Conference on Intelligence in Communication Systems*. Springer, 2004, p. 175–189.

WEST, D.B. *Introduction to Graph Theory*. Featured Titles for Graph Theory Series. Prentice Hall, 2001. URL <https://books.google.com.br/books?id=TuvuAAAAMAAJ>.