UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO ERIVAN BEZERRA FERREIRA

O LÚDICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O NIM, O TANGRAM E OS PENTAMINÓS COMO FERRAMENTAS DE APRENDIZAGEM

FORTALEZA
2019

ANTONIO ERIVAN BEZERRA FERREIRA

O LÚDICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O NIM, O TANGRAM E OS PENTAMINÓS COMO FERRAMENTAS DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F4391 Ferreira, Antonio Erivan Bezerra.
O lúdico no ensino da matemática : o Nim, o Tangram e os Pentaminós como ferramentas de aprendizagem / Antonio Erivan Bezerra Ferreira. – 2019.
62 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes.

1. Jogos. 2. Pentaminó. 3. Tangram. 4. Nim. 5. Teorema de Bouton. I. Título.
CDD 510

ANTONIO ERIVAN BEZERRA FERREIRA

O LÚDICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O NIM, O TANGRAM E OS PENTAMINÓS COMO FERRAMENTAS DE APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, do departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes (orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

.

À minha família

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por mais uma conquista alcançada.

A todos os professores do curso pela dedicação e pela grande contribuição dada em minha formação. Em especial ao meu orientador Prof. Dr José Valter Lopes Nunes pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora José Othon Dantas Lopes e Ângelo Papa Neto pelo tempo disponibilizado e pelas valiosas colaborações e sugestões.

A minha esposa Edilene Lira de Oliveira e meus filhos Lucas Lira de Oliveira e Evylene Lira de Oliveira pela compreensão e incentivo.

À minha mãe Maria Célia Bezerra Ferreira, aos meus irmãos, aos meus colegas de trabalho pelo grande apoio e à todos que torceram por mim.

A todos os colegas de turma pela satisfação proporcionada durante os momentos em que estivemos juntos durante a realização do curso, em especial a Francisco Erilson Freire de Oliveira, Thedy Barbosa Bezerra e Keyson Gondim Gomes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Que todos os nossos esforços estejam sempre focados no desafio à impossibilidade. Todas as grandes conquistas humanas vieram daquilo que parecia impossível”

(CHARLES CHAPLIN).

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar atividades lúdicas como recurso para melhorar a aprendizagem da Matemática, buscando estabelecer a relação existente entre o jogo, o ensino e a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos. Procuramos destacar o papel pedagógico dos jogos quando da exploração e aplicação de conceitos matemáticos através da elaboração de estratégias; e ainda mostrar que, ao utilizarmos os jogos no ensino de Matemática, podemos melhorar a aprendizagem, estimular a concentração, fazer o educando se envolver ainda mais, tornando possível assim o desenvolvimento de habilidades no indivíduo, bem como torná-lo aliado na aquisição de conhecimentos matemáticos. Mostramos também que, ao utilizar jogos no ensino da Matemática, o aluno torna-se motivado, favorecendo a interrelação e fazendo com que o educando passe a protagonizar o seu processo de aprendizagem. Finalmente, procuramos mostrar a estratégia matemática que leva à vitoria do jogo Nim em duas versões, uma utilizando o Algorítmo da divisão e outra utilizando o sistema de numeração binário.

Palavras chave: Jogos. Pentaminó. Tangram. Nim. Teorema de Bouton.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present play activities as a resource to improve the learning of Mathematics, seeking to establish the relationship between the game, teaching and learning new mathematical knowledge. We try to highlight the pedagogical role of games when exploring and applying mathematical concepts through the elaboration of strategies; and to show that by using games in Mathematics teaching, we can improve learning, stimulate concentration, make the learner more involved, thus making it possible to develop skills in the individual as well as make him an ally in the acquisition of mathematical knowledge. We also show that, when using games in Mathematics teaching, the student becomes motivated, favoring the interrelation and causing the learner to take the lead in the learning process. Finally, we try to show the mathematical strategy that leads to the victory of the game Nim in two versions, one using the Algorithm of the division and another using the system of binary numbering.

Keywords: Games. Pentaminó. Tangram. Nim. Bouton's theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pentaminós 22
Figura 2 – Peça do Pentaminó 23
Figura 3 – Retângulo 12 x 5 24
Figura 4 – Retângulo 8 x 5 25
Figura 5 – Desafio “W” e “T” 26
Figura 6 – Quadrados 27
Figura 7 – Tabuleiro do Penta Game 29
Figura 8 – Tangram com dobraduras 31
Figura 9 – Aluno construindo o Tangram 32
Figura 10 – Finalizando a construção 32
Figura 11 – Algumas figuras montadas 34
Figura 12 – Versão simplificada do NIM 37
Figura 13 – Esquema geral do jogo 38
Figura 14 – Estratégia não vitoriosa 41
Figura 15 – Construção da estratégia vitoriosa 42
Figura 16 – Trilha do jogo 44
Figura 17 – Caso geral para o jogo da trilha 45
Figura 18 – Palitos em duas filas 47
Figura 19 – Duas filas iguais 48
Figura 20 – Três filas diferentes 48
Figura 21 – Quantidades em potência de dois (a) 58
Figura 22 – Quantidades em potência de dois (b) 58

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	11
2	**MÉTODOLOGIA DE ENSINO**	12
3	**OS JOGOS NA SALA DE AULA**	15
3.1	**Processo de ensino**	15
3.2.	**Aprendizagem**	18
4	**PENTAMINÓS E A GEOMETRIA**	21
4.1	**Desafios com pentaminós**	22
4.2	**O Penta Game**	28
5	**TANGRAM**	30
5.1	**Confecção com Dobradura**	30
5.2	**Formas Geométricas e Perímetro**	33
5.3	**Montando Figuras**	33
6	**NIM E A MATEMÁTICA DA VITÓRIA**	36
6.1	**Primeira versão do jogo NIM**	36
6.1.1	Experiência em sala de aula	40
6.1.2	Jogo da trilha	43
6.2	**Segunda versão do jogo NIM**	46
6.2.1	Teorema de Bouton	54
6.2.2	Atividade para sala de aula	56
7	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	60
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A preocupação com o ensino da matemática tem levado ao aprimoramento da prática pedagógica, buscando facilitar o processo de aquisição e produção do conhecimento.

Sentimos a necessidade de atividades que despertem a motivação e o interesse dos alunos, e proporcionem momentos de interação entre professor, aluno e saber matemático e ainda que dê significado aos conteúdos. Dentre essas atividades destacam-se os jogos matemáticos, que têm valor educacional e contribuiem positivamente na aquisição do conhecimento. Assim, acredita-se que esse recurso é uma alternativa para o desenvolvimento dos educandos em sala de aula, tornando-os ativos e construtores do conhecimento.

Primeiramente falamos de metodologia e dos método que são utilizados no ensino, bem como a necessidade de mudanças e a importância que é dada aos jogos, através de sua indicação como recurso para o processo de ensino aprendizagem.

Procuramos mostrar o papel pedagógico dos jogos, quando da sua utilização para a exploração de conceitos matemáticos envolvidos nos mesmos. Escolhemos alguns jogos para mostrar a relação existente entre a matemática, a pedagogia e o lúdico, mostrando o histórico dos mesmos e como a matemática está inserida no jogo, seja fisicamente, que é o material para jogar, e logicamente que é a parte do jogo que leva o educando a pensar e raciocinar.

Trataremos do jogo Nim (em duas variações) e da estratégia matemática para vencer o jogo, ressaltando como podemos utilizar esse jogo no ensino da matemática. Apresentamos ainda o uso dos pentaminós como uma ferramenta de ensino, adaptável às atividades propostas para sala de aula e o Tangram que é um material que auxilia na compreensão de vários conceitos da matemática, em particular a geometria e outros aspectos relacionados ao desenvolvimento do aluno. Além disso, apresentamos algumas experiências realizadas em sala de aula e propostas de atividades que podem ser aplicadas com esses materiais.

Assim, o intuito deste trabalho é mostrar a inter-relação do lúdico, da Matemática e da Pedagogia, bem como descrever a forma que a Matemática está presente no jogo em sua estrutura física e lógica.

2 METODOLOGIA DE ENSINO

Metodologia é uma palavra derivada de “método”, do Latim “methodus” cujo significado é “caminho ou a via para a realização de algo”. Método é a maneira de dizer, de fazer, de ensinar uma coisa, segundo certos princípios e em determinada ordem.

A metodologia de ensino é a aplicação de diferentes métodos no processo ensino-aprendizagem. A palavra "Metodologia de Ensino" está voltada para a área de ensino e procura descrever os melhores métodos e técnicas para que o ensino-aprendizagem possa ser desenvolvido com maior qualidade e motivação.

Os métodos de ensino são apenas um meio para conseguir que o aluno aprenda. Por isso, é necessário que o professor use-os de modo crítico e reflexivo. Como conseqüência, ensinar não é derramar conteúdos na mente do aluno. Os momentos de diálogo ou de interação favorecem a efetivação do ensino.

Vale ressaltar que para escolher a metodologia a ser aplicada, é preciso levar em consideração os seguintes aspectos:

- objetivos de ensino;
- natureza do conteúdo;
- o nível do aluno;
- natureza da aprendizagem;
- A realidade sociocultural do aluno, da escola e da comunidade em que todos estão inseridos.

Para Piaget *apud* Grando (2000) o método tradicional tem como base a absorção de conhecimentos prontos, não se preocupando em estabelecer de uma interação com o conceito. O único tipo de relação existente é aquele "que liga um professor, espécie de soberano absoluto, detentor da verdade intelectual e moral, a cada aluno considerado individualmente." (PIAGET *apud* GRANDO 2000). Quanto a esse método, citamos as seguintes características:

- O acúmulo de informações;
- O aluno como sujeito passivo;
- A falta do estabelecimento de relações lógicas com a matemática;

É nesta mesma linha de pensamento, quanto ao ensino da matemática, que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) nos apontam o seguinte:

> tradicionalmente, a prática mais freqüente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem (BRASIL, 1998, p.30).

Precisamos de métodos que tornem o que se quer ensinar mais interessante e atrativo de uma forma que favoreça ao educando ter contato com as coisas do mundo e ainda ser um sujeito ativo no processo.

Para Grando (2000), na escola ativa, os educandos devem ser estimulados a fazer trabalhos tanto individuais quanto coletivos. Uma atividade que promova interação entre os alunos e entre professor-aluno, deve proporcionar o surgimento várias situações que venham garantir a autonomia e o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Portanto, notamos a necessidade de reflexões que permitam a transformação do ato de ensinar e aprender matemática, em algo mais dinâmico. Quanto às mudanças para melhoria do ensino aprendizagem, temos como sugestão o trabalho com jogos:

> a busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem. (Grando 2000, p.15)

Essa autora aponta que os jogos não são uma metodologia nem uma teoria nova, visto que Platão já fazia uso dos jogos educativos para o ensino, como os jogos lógicos, para ensinar seus discípulos.O uso desse recurso vem para enriquecer as diversas situações no ato de ensinar.

Piaget *apud* Grando (2000, p.2) nos fala da “utilização de materiais, simulações (jogos) e situações concretas como fontes enriquecedoras de aprendizagem com facilidade e solidez” como um dos princípios que traz bons resultados, no sentido da aprendizagem efetiva do aluno. Ela nos esclarece ainda que o trabalho com jogos na sala de aula somente começa a ser discutido, quando o aluno deixa de ser um mero assimilador de conhecimentos transmitidos, e passa a ser dinamizador do seu processo.

Os parâmetros curriculares Nacionais (PCN, 1998) têm sido, referência para práticas diferenciadas e, no que se refere à utilização dos jogos como recursos didáticos, concederam-nos instrumentos que ensinam os educandos não apenas a vivenciarem situações que se repetem, mas aprenderem a lidar com símbolos e a pensar por analogia.

A utilização de recursos como os jogos nas aulas de matemática, vem contribuir positivamente quando se fala em mudanças das práticas de ensino, visto que auxilia o desenvolvimento de várias capacidades.

> [...] auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (Smole; Diniz; Milani, 2007, p.9).

Essas mesmas autoras dizem ainda que ao jogar, deve haver estabelecimento de relações entre o jogo e o conceito matemático. Além disso, favorece o desenvolvimento da linguagem, do processo de raciocínio e permite interação entre os indivíduos envolvidos, visto que esta atividade é realizada em duplas ou equipes.

Notamos que utilizar métodos, técnicas de ensino, atividades e os diferentes recursos pedagógicos, vem contribuir positivamente no processo de ensino, visto que a variação na forma de trabalhar "conquista" o educando e torna o conteúdo mais envolvente, compreensível.

3 OS JOGOS NA SALA DE AULA

O pensamento de que "ensinar" era apenas "transmitir", tornava o aluno um agente passivo da aprendizagem e o professor um agente transmissor. O ensino despertado pelo interesse do aluno passou a ser a força que comanda o processo da aprendizagem, suas experiências e descobertas, o motor de seu progresso e o professor aquele que gera situações que estimulam e são eficazes.

É nesse contexto que o jogo ganha um espaço como ferramenta ideal da aprendizagem, na medida em que propõe estímulo ao interesse do aluno, além de transformar o ambiente de ensino. Nesse sentido Smole (2007, p10) afirma: “todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis”.

3.1 Processo de ensino

O jogo transforma o ambiente educacional e gera várias situações que trazem benefícios para o educando, ajuda-o a construir suas novas descobertas, desenvolve e enriquece sua personalidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN, 1998), do Ministério da Educação e Cultura (MEC), ao fazer referência quanto ao trabalho com jogos no ensino de Matemática, nos diz que

> Jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações [...] (BRASIL, 1998, p. 46-47).

Observamos que os PCN lançam como proposta a utilização de jogos para ensinar Matemática, mas não trazem orientações em relação a como deve ser encaminhado o trabalho pedagógico.

Para Smole, Diniz e Milani (2007, p.10) “o jogo na escola foi muitas vezes negligenciado por ser visto como uma atividade de descanso ou apenas como um passatempo”. Notamos que o jogo não era tão valorizado por não se acreditar nas vantagens e nos resultados ao se utilizar esse recurso como apoio no desenvolvimento das capacidades do educando.

Trabalhar com jogos no ensino da matemática tem suas vantagens, mas para isso é necessário que o professor defina também seus objetivos e principalmente, que conceitos matemáticos serão atingidos ao propor uma atividade com essa ferramenta. Compreendemos que as situações vivenciadas durante a partida levam o jogador a planejar as próximas jogadas para que tenha um melhor aproveitamento.

Vale ressaltar que as intervenções pedagógicas por parte do professor não perdem sua importância. Para GRANDO (2004, p.58) durante as situações de jogo se faz necessário essa intervenção afim de “[...] resgatar mediante questionamentos e situações-problema com registros, os processos desencadeados e as estratégias de resolução utilizadas.”

Outros autores também destacam a importância da intervenção, Smole, Diniz e Milani (2007, p.15) afirmam que o uso de jogos como recurso “exige uma série de intervenções do professor para que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem”. Por isso, são propostos sete momentos distintos:

- familiarização com o material do jogo;
- reconhecimento das regras;
- jogarem para garantir regras;
- intervenção pedagógica verbal;
- registro do jogo;
- intervenção escrita;
- jogar com competência.

No momento de familiarização com o material do jogo, os alunos entram em contanto com o material, construindo-o ou experimentando-o mediante simulações de possíveis jogadas. O reconhecimento das regras do jogo pelos alunos pode ocorrer mediante a explicação do professor, a leitura pelos alunos ou pela identificação a partir de várias jogadas entre o professor e um dos alunos, que aprendeu anteriormente o jogo. Os outros alunos tentam identificar as regras.

O jogar para garantir as regras é o momento do “jogo pelo jogo”, momento do jogo espontâneo e de exploração de noções matemáticas contidas no jogo. Neste momento, o professor pode fazer intervenções verbalmente nas jogadas por meio de questionamentos e observações, a fim de instigar os alunos para analisar suas jogadas. Trata-se de ver os procedimentos de resolução de problemas de jogo dos alunos, relacionando-os à formalização matemática.

O registro do jogo pode acontecer dependendo de sua natureza e dos objetivos que se têm com o registro. O registro dos pontos ou dos procedimentos realizados ou dos cálculos utilizados pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização por meio de uma linguagem própria: a linguagem matemática. É importante que o professor crie intervenções que gerem a necessidade do registro escrito do jogo.

No momento de intervenção escrita, a proposta é que existam situações-problema, elaboradas pelo professor e/ou alunos, para que os próprios alunos resolvam. A resolução dos problemas de jogo propicia uma análise mais específica sobre o mesmo, na qual os problemas abordam diferentes aspectos que podem não ter ocorrido durante as partidas.

O registro do jogo também se faz presente neste momento, visto que “os registros sobre a matemática ajudam a aprendizagem dos alunos de muitas formas, encorajando a reflexão, clareando as idéias e agindo como um catalisador para as discussões em grupo”. (SMOLE, DINIZ E MILANI, 2007, p.18). A mesma autora ainda nos coloca que o educador deve tomar alguns cuidados (2007, p.20):

- Saber o limite ao problematizar, para que não haja prejuízo quanto ao prazer, ao jogar e o envolvimento com o jogo;
- Criar um roteiro de observação, visto que devido à quantidade de grupos na sala de aula o mesmo não tem condição de acompanhar todos ao mesmo tempo;
- Escolher o momento certo para problematização. O primeiro contato com o jogo não é o momento para problematizar, ou seja, o processo demanda tempo.

Para finalizar o trabalho pedagógico com jogos, propõe-se o jogar com competência, o retorno à situação real do jogo. É importante que o aluno retorne à ação do jogo para que execute estratégias definidas e analisadas durante a resolução dos problemas. Deve haver durante o processo, uma atmosfera de criatividade, ludicidade e interação entre os jogadores.

O jogo representa uma situação que se traduz sob a forma de um problema, uma vez que o sujeito é desafiado a elaborar estratégias, testá-las e até reformulá-las. Nesse movimento, o jogador percorre o caminho da problematização, visando vencer o jogo, resolvendo o problema.

Podemos notar que o jogo é desencadeador de desafios. Com isso, desestrutura o sujeito e possibilita a este desenvolver a postura de analisar situações e criar estratégias de resolução de problema. Além disso, propicia o desenvolvimento de habilidades como análise de possibilidades, tomada de decisão, trabalhar em grupo, saber ganhar e saber perder.

Estão presentes no jogo, elementos da resolução de problema, colocando os jogadores frente a situações de impacto nas quais o jogo pode estimular a concentração, possibilitando o desenvolvimento de habilidades pessoais como exploração, investigação de um contexto, análise, comparação, interpretação, previsão, síntese e tomada de decisão, elementos essenciais para resolver problemas.

3.2 Aprendizagem

Vimos que ao jogo se aliou a idéia do lúdico, que diverte e dá prazer, o raciocínio, a estratégia, o cálculo e a resolução de problema. Como sabemos essas são competências da matemática. Daí a importância dos jogos para os docentes que procuram utilizar novas estratégias.

Para Smole (2007), os jogos são eficientes para a memorização e ainda sugere vários tipos de jogos que podem ser utilizados para instigar a memorização, habilidade importante na aprendizagem. Além desse fato, os PCN (MEC, 1998) dizem que os jogos são um aspecto que motiva a criança a se interessar, se estimular e a se desenvolver para superar dificuldades ou problemas.

O jogo ocorre naturalmente no desenvolvimento dos processos psicológicos. A articulação entre o conhecido e o imaginado, proporcionado pelo jogo, conduz o educando ao conhecimento de si mesmo e dos outros. Neste sentido

> [...] a interação entre os alunos, a socialização de procedimentos encontrados para solucionar uma questão e a troca de informações são elementos indispensáveis em uma proposta que visa a uma melhor aprendizagem significativa da matemática. [...] o jogo é uma das formas mais adequadas para que a socialização ocorra e permita aprendizagens. (Smole, 2007, p.11).

Grandro (2000) destaca que o jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas na medida em que possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito através da estrutura matemática implícita no jogo e que pode ser vivenciada, pelo aluno, quando ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo. Tais habilidades desenvolvem-se porque ao participar do jogo, o aluno tem a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada, refletir e analisar as regras, relacionando os elementos do jogo e os conceitos matemáticos.

Além disso, "o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática" (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p.9). Na visão dessas autoras

> é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos, uma vez que durante um jogo, cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p.9)

Quanto às formas de utilização dos jogos Smole, Diniz e Milani (2007) sugerem:

- Realizar o mesmo jogo várias vezes, para que o aluno tenha tempo de aprender as regras e obter conhecimentos matemáticos com esse jogo;
- Incentivar os alunos na leitura, interpretação e discussão das regras do jogo;
- Propor o registro das jogadas ou estratégias utilizadas no jogo;
- Propor que os alunos criem novos jogos, utilizando os conteúdos estudados nos jogos que eles participaram.

Neste último ponto, há possibilidade de propor aos alunos que coloquem em prática suas idéias, isso faz com que o educando sinta-se mais valorizado e consciente de que sua opinião é importante no meio em que está inserido. Nota-se que trabalhar com jogos deixa as aulas com mais movimento, divertidas, atraentes e incentiva a participação do educando, tirando-o da passividade e tornando-o mais participativo.

O uso de jogos no ensino da matemática tem como objetivo fazer com que os educandos gostem de aprender essa disciplina, ao despertar o interesse do aluno e provocar uma mudança na rotina da classe. Favorece ainda à redução de bloqueios que são apresentados por nossos alunos.

Para Smole, Diniz e Milane (2007, p.11), ao pensar em utilizar o jogo como recurso no ensino da matemática, deve-se ter em mente o seguinte:

- O jogo é uma atividade de que os alunos realizam juntos;
- No jogo deverá, ao final, ter um vencedor;
- Os jogadores devem perceber que cada um tem sua importância na realização dos objetivos do jogo, ao realizar uma jogada e o jogo só é realizado se cada jogador concordar e cooperar com as regras;
- As regras são preestabelecidas e não podem ser alteradas durante a jogada. Caso haja necessidade de alteração, deverá ser discutido com todo grupo;
- Deve haver possibilidade de usar estratégias, traçar planos executar jogadas e avaliar a eficácia das ações.

Ainda nessa mesma linha, essas autoras dizem que nos jogos deve haver situações interessantes e desafiadoras, permitindo auto-avaliação e participação o tempo todo, tomando conhecimento dos efeitos, de suas decisões e riscos, situação que o jogador deve estar disposto a enfrentar. Vale ressaltar que o jogador não aprende e pensa sobre o jogo quando joga uma só vez. Por isso essa autora sugere que ele seja realizado mais de uma vez para que ocorra aprendizagem por meio do jogo, tomando o cuidado de não tornar o momento prazeroso em algo cansativo.

Podemos notar que trabalhar com esse recurso é estar disposto a mudanças na rotina e que não é somente por escolher trabalhar com esse recurso que haverá a garantia de que tudo ocorrerá como pretendemos. É importante que o professor conheça as dificuldades que pode enfrentar e os benefícios que virão para os educando ao escolher um recurso para sua aula.

Para finalizar o momento com os alunos a proposta é de algumas ações didáticas que é a exploração do jogo: para isso deve-se conversar sobre o jogo que está relacionado e fazer uma discussão coletiva, para que se façam sugestões, coloque as dificuldades encontradas, as descobertas, dar dicas, analisar posturas, tomar decisões diante das possíveis dificuldades entre outras possibilidades; é importante dar oportunidade de se fazer um registro que pode ser um texto ou desenho sobre o jogo manifestando o que cada um aprendeu bem como as dúvidas. Isso deve ser feito livremente para mostrar suas dúvidas e o que sabe; e como última ação é problematizar um jogo.

Assim, podemos observar que o professor deve oferecer um ambiente com diversas atividades ao educando e tem o jogo como um recurso pedagógico valioso ao seu dispor para motivação dos alunos, principalmente aos que têm “resistência” à disciplina. Trabalhando com jogo não estará realizando uma atividade para passar o tempo ou ocupar os alunos, vimos que estará contribuindo para o desenvolvendo de habilidades importantes para facilitar o ensino e efetivar aprendizagem.

4 PENTAMINÓS E A GEOMETRIA

Vamos iniciar falando dos poliminós que é um conjunto de figuras planas formadas pela justaposição de n quadrados iguais, de modo que pelo menos um lado de um quadrado esteja em contato com um lado de outro quadrado.

O termo poliminó foi lançado por Solomon Wolf Golomb, no clube de matemática da universidade de Harvard em 1953 e em seu artigo Tabuleiros de xadrez e poliminós publicado no American Mathematical Monthly de 1954, quando Golomb era um estudante de 22 anos em Harvard. Seu jogo inspirou o Tetriz, um jogo muito conhecido. Mas foi Henry Ernest Dudeney, que publicou o primeiro problema com pentaminós, em 1907 na obra Canterbury Puzzles. Sua divulgação se deu em 1957 com Martin Gardner, em sua coluna no jornal Scientific American.

Gardner (1959) acrescenta: “Modelos assimétricos, que são diferentes quando vistos do outro lado, são considerados como um só tipo.” Esse cuidado é importante no momento da construção para evitar peças repetidas.

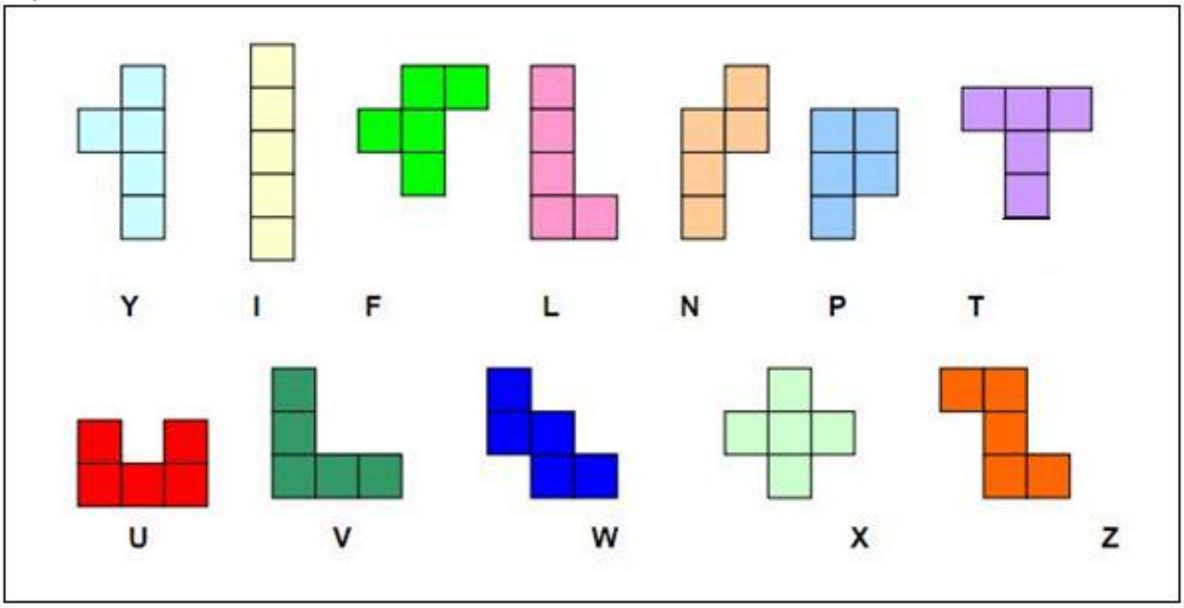
Os poliminós são de vários tipos, o que é formado por um quadrado (monominó), por dois quadrados (dominó), por três quadrados (triminó), por quatro quadrados (tetraminó), por cinco quadrados (pentaminó) e por seis quadrados (hexaminó) são alguns deles.

Vamos falar agora dos Pentaminós que é um conjunto de figuras formadas por cinco quadrados justapostos sem formar “buraco”. Como podemos ver, é um caso particular dos poliminós. Sugerimos utilizar os pentaminós por ser o caso mais interessante para atividades e aplicações em sala de aula, pois podemos formar 12 pentaminós. No caso dos hexaminós, podemos formar 35, isto seria muito complicado e exaustivo. Já os tetraminós são apenas 5, não seria muito interessante pelo pequeno número de peças.

A escolha dos pentaminós como recurso para ajudar na aprendizagem é importante por permitir trabalhar diversos conceitos, pela variação de atividades e ainda é possível confeccioná-los utilizando diversos materiais, o que facilita a aquisição por parte dos alunos. Destacamos que desde o processo de confecção, o aluno estará desenvolvendo seu raciocínio e concentração, bem como se apropriando de conceitos da geometria plana, visto que e seguindo as orientações estabelecidas pelo professor, o aluno é desafiado a encontrar as doze peças diferentes cada uma formada por cinco quadrados.

A figura 1 apresenta as 12 peças que devem ser formadas pelos alunos, note que cada peça foi associada a uma letra.

Figura 1 – Pentaminós



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os pentaminós como recurso didático formam um material excelente para trabalhar conceitos da geometria plana como área, perímetro e razão de semelhança; bem como para explorar simetria e as formas geométricas planas. O trabalho com esse material ainda possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, percepção espacial e a criatividade. Algumas atividades estimulam os processos de classificação, ordenação e descoberta de padrões.

Nesse sentido, apresentamos a seguir sugestões de atividades que podem ser feitas em sala de aula, voltadas à compreensão desses conceitos da geometria. Trata-se de algumas atividades que realizamos com os alunos do 7º ano da escola da prefeitura de Fortaleza Padre Antônio Monteiro da Cruz, localizada no bairro Conjunto Fluminense e ao final apresentamos uma atividade e um jogo que podem ser aplicados em sala de aula.

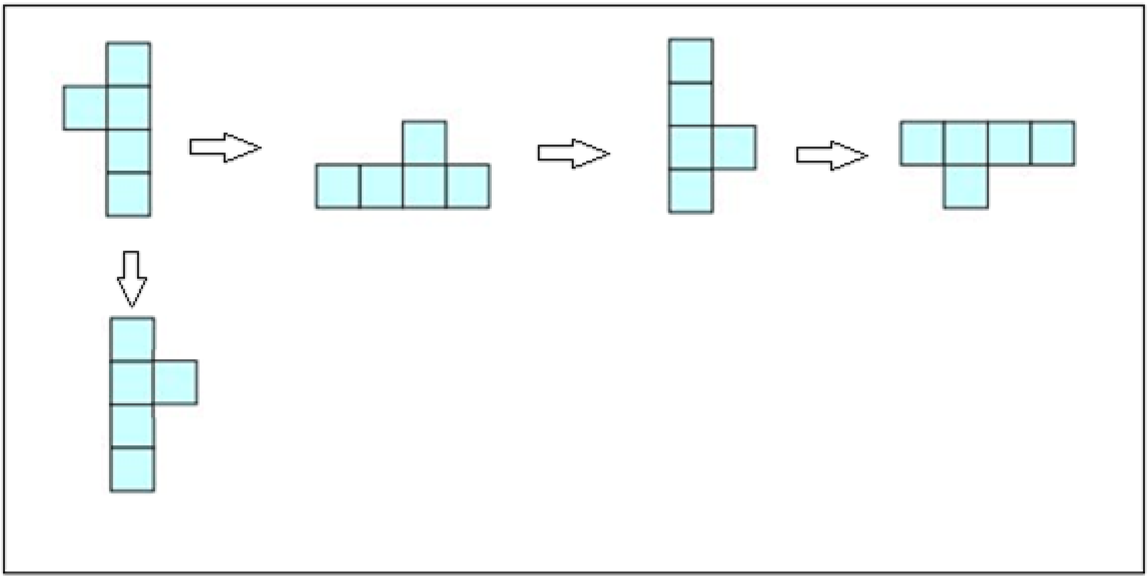
4.1 Desafios com os Pentaminós

Antes de iniciar os trabalhos, fizemos uma sondagem com a turma. Os alunos apresentaram falta de conhecimento em vários assuntos relacionados à geometria, assim fez-se necessário uma aula explicativa, mostrando aos alunos figuras geométricas e seus elementos, como lado, vértice, as diferenças entre quadrado e retângulo bem como o significado dos termos tri, tetra, penta e hexa com objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos. Em seguida, apresentamos o conceito de poliminós, em especial os pentaminós.

Para confecção dos Pentaminós, organizamos a turma em equipes de quatro componentes, e cada equipe recebeu papel cartão branco e folha quadriculada. No primeiro momento apresentamos uma das 12 peças, e com essa peça mostramos por rotação e reflexão como identificar peças repetidas (ver Figura 2). Feito isso, solicitamos às equipes a confecção de outros pentaminós, pintando os quadrados da folha quadriculada. Deixamos os alunos fazer a construção das peças sem fazer nenhuma intervenção.

Depois de um tempo as equipes apresentaram suas peças. Notamos que algumas equipes tinham produzido peças repetidas, bastava fazer uma rotação ou rebatimento para verificar, como mostra a figura 2.

Figura 2 – Peça do pentaminó



Fonte: elaborada pelo autor.

Daí sem indicar as equipes que haviam cometido o erro, solicitamos que procurassem peças repetidas conforme havíamos mostrado. A seguir, apresentamos as 12 formas para que os alunos concluíssem a confecção das peças e em seguida pintar, recortar e colar no papel cartão a fim de se obter peças mais rígidas e facilitar o manuseio.

Para facilitar a identificação das peças, comparamos cada peça a uma letra do nosso alfabeto como mostra a figura 1. Com as peças prontas e considerando que o lado de cada quadrado media 1cm, pedimos para as equipes calcularem o perímetro e a área de cada uma das peças. Nesse momento foi necessário o acompanhamento de perto.

Apenas uma equipe apresentou dificuldade então fizemos uma revisão a fim de reforçar a ideia e assim conseguir que todos os alunos concluíssem a atividade proposta.

Solicitamos que o registro das medidas calculadas fosse feito na própria peça, escrevendo A para área e P para perímetro.

Para calcular a área, orientamos que contassem a quantidade de quadrados de cada peça. Os alunos perceberam que todas as peças tinham a mesma área. Quanto ao perímetro, as equipes perceberam que o resultado deu 12 cm para quase todas para as peças, mas a medida encontrada em “P” foi diferente.

“P” → 10cm

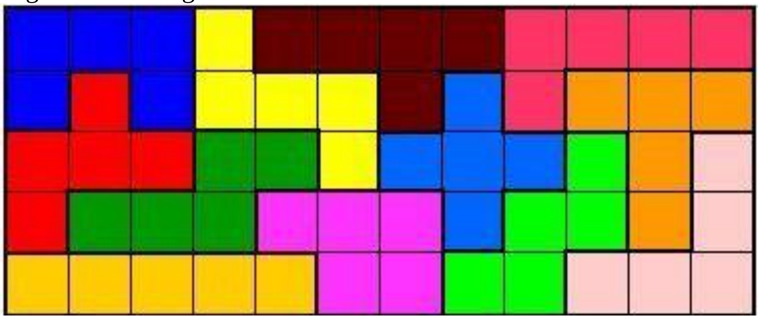
Para uma maior familiarização com o jogo, deixamos as equipes livres para formar figuras à sua escolha, juntando as 12 peças sem sobreposição, e em seguida calcular o perímetro e a área de cada uma delas.

No segundo momento iniciamos os desafios que consistiam na idéia de formar retângulos e quadrados. Note que, como temos um total de 60 quadradinhos, ao juntar todas as peças, então só podemos formar retângulos (por exemplo: 4x15, 5x12 e 6x10), visto que 60 não é um número quadrado perfeito.

1º Desafio

Forme um retângulo de lados 12cm por 5cm em seguida, determine sua área e seu perímetro. Para essa atividade cada equipe recebeu uma folha quadriculada para auxiliar na montagem do retângulo. Após um tempo, verificamos quais equipes conseguiram resolver o desafio. A figura 3 mostra a reprodução de uma solução apontada por duas equipes.

Figura 3 – Retângulo 12 x 5



Fonte: elaborada pelo autor.

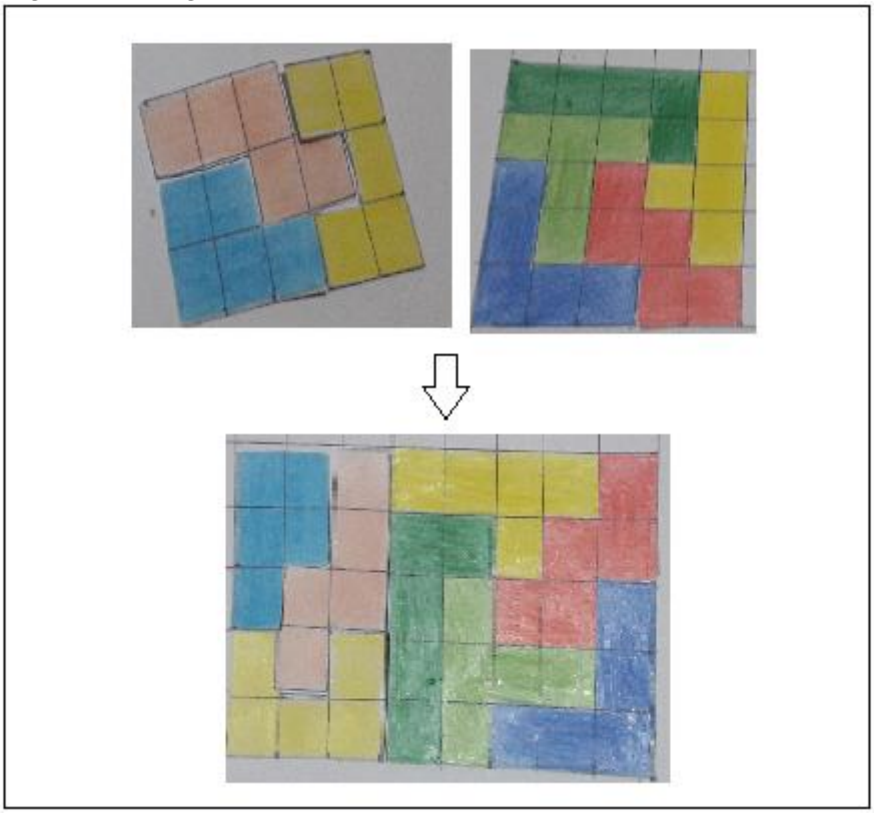
Quanto à intervenção neste primeiro desafio, orientamos aos alunos para realizar o cálculo da área usando multiplicação e em seguida, conferir a resposta encontrada contando os quadradinhos. Nessa atividade os alunos puderam verificar de uma forma lúdica o cálculo da área e do perímetro de um retângulo associando essa experiência ao conteúdo ensinado.

<u>2º Desafio</u>

Montar um retângulo de lados 8cm por 5cm e em seguida, fazer o mesmo que foi solicitado no desafio 1. Neste desafio, os alunos ainda apresentaram muita dificuldade na montagem do retângulo, mesmo assim, não receberam nenhuma orientação quanto à solução do problema. Como tinham feito um caso parecido, ao final todas as equipes conseguiram concluir a atividade proposta. Temos na figura 4 uma solução do problema apresentada por uma das equipes.

Observe que para resolver o problema, os alunos montaram um quadrado 5cm x 5cm, um retângulo 5cm x 3cm. e juntaram essas duas figuras para conseguir o retângulo 5cm x 8cm.

Figura 4 – Retângulo 8 x 5



Fonte: elaborada pelo autor.

Tendo concluído o segundo desafio, os alunos verificaram que não foi possível utilizar todas as peças, visto que no primeiro problema a área era $60cm^2$ e no segundo encontraram $40cm^2$. Daí partimos para o próximo desafio.

<u>3º Desafio</u>

Entregamos uma folha quadriculada para as equipes. Perguntamos se seria possível cobrir um quadrado cujo lado media oito quadradinhos usando os 12 pentaminós.

Todas as equipes tentaram, mas como era de se esperar, depois de um tempo, não conseguiram. Após as tentativas tivemos que intervir: calculamos juntos a área do quadrado (64 quadradinhos), e o total de quadradinhos que tínhamos ao juntar todos os pentaminós (60 quadradinhos); pintamos os quadradinhos da folha e formamos um quadrado 8x8, para mostrar que não seria possível resolver esse desafio sem deixar “furo”, ou seja, faltavam 4 quadradinhos para completar a figura. Notamos que neste desafio as equipes tiveram muita dificuldade de tirar conclusões, daí a necessidade de intervenções.

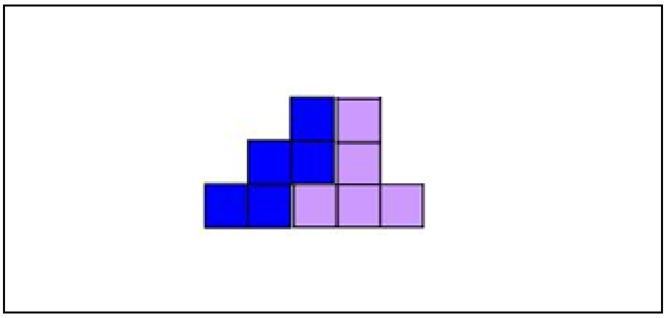
As intervenções foram dicas, uma delas foi para que pintassem um quadrado 8x8 no papel quadriculado a fim de facilitar a visualização, em seguida pedimos para que eles tentassem cobrir esse quadrado com os pentaminós, anotando as observações. Assim, os alunos sentiram-se estimulados a concluir este desafio. Ao final conferimos os resultados e solicitamos a exposição de suas anotações a fim de compararmos as idéias e valorizarmos as observações feitas pelas equipes. Aproveitamos ainda para chamar atenção para o fato de que o número 60 não é um quadrado perfeito, logo não podemos formar um quadrado com 60 quadradinhos.

4º Desafio: sugestão de atividade

Antes de apresentar essa atividade, o professor deve fazer um diagnóstico acerca dos conhecimentos que os alunos precisam ter, tomando como referência o que se pretende ensinar, no caso desta atividade, área, perímetro e razão de semelhança de figuras. Assim, é importante passar atividades que fomente o raciocínio matemático e possibilita a construção significativa desses conceitos. O professor pode esclarecer e tirar dúvidas quanto ao cálculo de áreas e/ou perímetro para melhorar o desempenho do aluno.

Com as figuras em mãos, vamos a outra atividade. Aqui o professor expõe a seguinte figura formada pelos pentaminós W e T.

Figura 5 – Desafio “W” e “T”



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, a turma deve construir uma figura semelhante usando os pentaminós L, U, X, Z, Y, F, V e S. Em seguida, o professor solicita que os alunos determinem o perímetro, a área e junto com a turma estabelece as relações entre essas medidas.

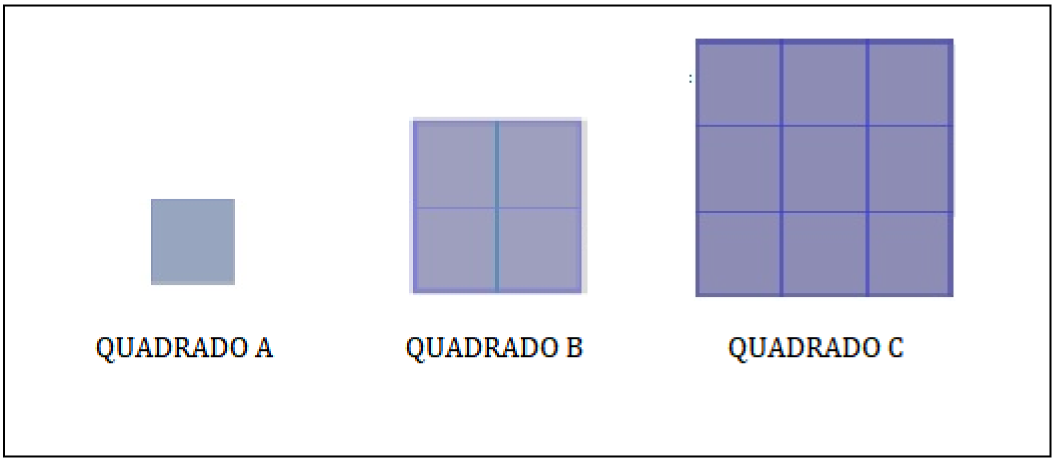
Deve-se orientar que eles façam anotações das medidas encontradas, de preferência numa tabela e em seguida troquem idéias, opiniões e discutam em relação aos modelos propostos com os colegas. Com essa atividade, pretende-se que os alunos compreendam o conceito de figuras semelhantes, determinando a razão de semelhança usando proporcionalidade.

Para reforçar e fixar o conteúdo ensinado na atividade acima, apresentamos outro exercício que envolve o cálculo de área, perímetro e razão de semelhança. Escolhemos utilizar três quadrados nesta atividade, por serem figuras geométricas planas conhecidas pelos alunos.

Consiste em pedir aos alunos para analisar os três quadrados de tamanhos diferentes. A partir dessa análise, calcular a área e o perímetro de cada quadrado. Sugerimos que o professor oriente o registro das medidas encontradas pelos alunos, a fim de facilitar o preenchimento correto das informações no quadro 1.

É importante que haja um momento de interação com a turma e que o professor questione os alunos em relação ao conteúdo que está sendo ensinado. Com isso o professor pode verificar como a turma está calculando o que foi solicitado e observar também se os alunos compreenderam as informações passadas.

Figura 6 – Quadrados



Fonte: elaborada pelo autor.

Ao indagar a turma, o professor pode explorar vários conceitos da geometria plana os quais foram trabalhados: formas; vértices; lados; perímetro; área.

Em seguida pode escolher alguns alunos e pedir que completem a Tabela 1. É conveniente promover mais um momento de aprendizagem: verificar as respostas; fazer as devidas correções; tirar dúvidas.

Perceba que temos a participação ativa dos alunos favorecendo assim o seu desenvolvimento e envolvimento na resolução de problemas.

Tabela 1 – Espaço destinado ao registro das medidas encontradas

Comparando os Quadrados	**Razão de semelhança**		
	Lados	**Perímetro**	**Área**
A e B			
A e C			
B e C			

Fonte: elaborada pelo autor.

Com as atividades de confecção dos pentaminós e desafios propostos, os alunos participaram da aula com mais disposição e mostraram-se bem receptivos às informações que estavam sendo passadas.

Além do conteúdo que aprenderam, trabalhamos com eles o raciocínio lógico e espacial, bem como outros aspectos comportamentais apontados nesta pesquisa.

4.2 O Penta Game

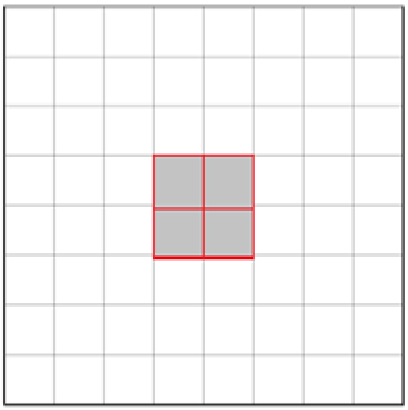
Com a intenção de complementar as atividades propostas, apresentamos neste tópico mais um jogo envolvente e desafiador que pode ser utilizado em sala de aula. Trata-se do Penta Game que pode ser jogado com dois jogadores, mas se o professor achar conveniente pode optar por jogar em dupla, visto que assim fica mais fácil de acompanhar os alunos.

Para jogar vamos precisar de um tabuleiro 8 x 8, de preferência com um quadrado 2 x 2 destacado no centro, para facilitar a visualização das primeiras jogadas (ver figira 7), e os 12 pentaminós dispostos para os jogadores.

Cada quadrado do tabuleiro será considerado uma “casa livre”, sempre que não estiver coberto por um quadrado de uma das peças do pentaminó.

A figura abaixo apresenta um modelo de tabuleiro para realização desse jogo.
Note o destaque do quadrado no centro.

Figura 7 – Tabuleiro do Penta Game



Fonte: elaborada pelo autor

Regras do jogo:

- Cada jogador, na sua vez, deve escolher uma das 12 peças;
- Colocar uma peça no tabuleiro, de modo que seus cinco quadrados se encaixem em “casas livres”;
- A primeira peça a ser colocada, deve cobrir pelo menos uma das quatro casas do quadrado destacado no centro;
- Cada pentaminó colocado depois do primeiro deve tocar pelo menos um dos lados ou ângulos de uma peça já colocada;
- O perdedor é aquele que não conseguir colocar uma nova peça;

Esse jogo pode ser aplicado logo após as atividades de confecção, visto que para jogá-lo não precisamos dos conceitos abordados nos desafios apresentados. Note que a cada jogada o aluno é levado a pensar, de modo que deixe seu adversário sem possibilidade de colocar peça e assim vencer o jogo. Essa postura favorece o desenvolvimento do educando no que diz respeito à concentração e ao raciocínio lógico e espacial. Assim, ao jogar o Penta Game, o educando está sendo capacitado para ter uma postura que favoreça a aprendizagem matemática.

5 TANGRAM

O tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar, no entanto, não se conhece ao certo onde surgiu. É um jogo antigo constituído por sete peças que formam um quadrado, o qual chamaremos de quadrado original. As sete peças são: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, as quais mostraremos mais à frente quando tratarmos da confecção, das formas geométricas e do reconhecimento dessas figuras que o compõem.

O Tangram pode ser usado para consolidar vários conhecimentos dos alunos. Mostraremos nesta pesquisa, atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula visando trabalhar os seguintes conhecimentos: semelhança de figuras, ângulos, classificação e desenho de formas geométricas planas, visualização de figuras planas, exploração de transformações geométricas através de decomposição e composição de figures, etc.

Achamos importante destacar alguns objetivos que devem ser levados em consideração quando utilizamos o Tangram em sala de aula.

- Trabalhar o raciocínio espacial;
- Conseguir construir o quadrado original;
- Familiarizar o aluno com figures e formas geométricas;
- Desenvolver o raciocínio lógico, habilidade e coordenação motora;
- Incentivar os alunos a participar de atividades em equipe.

Assim como os pentaminós, veremos que o envolvimento da matemática nesse jogo se inicia já na confecção das peças. Pode-se incentivar o uso da régua (instrumento de medida), como também a técnica de dobradura (trabalhar a concentração, raciocínio lógico, coordenação motora e memória). Qualquer método de confecção requer um acompanhamento do professor para garantir as devidas proporções das peças.

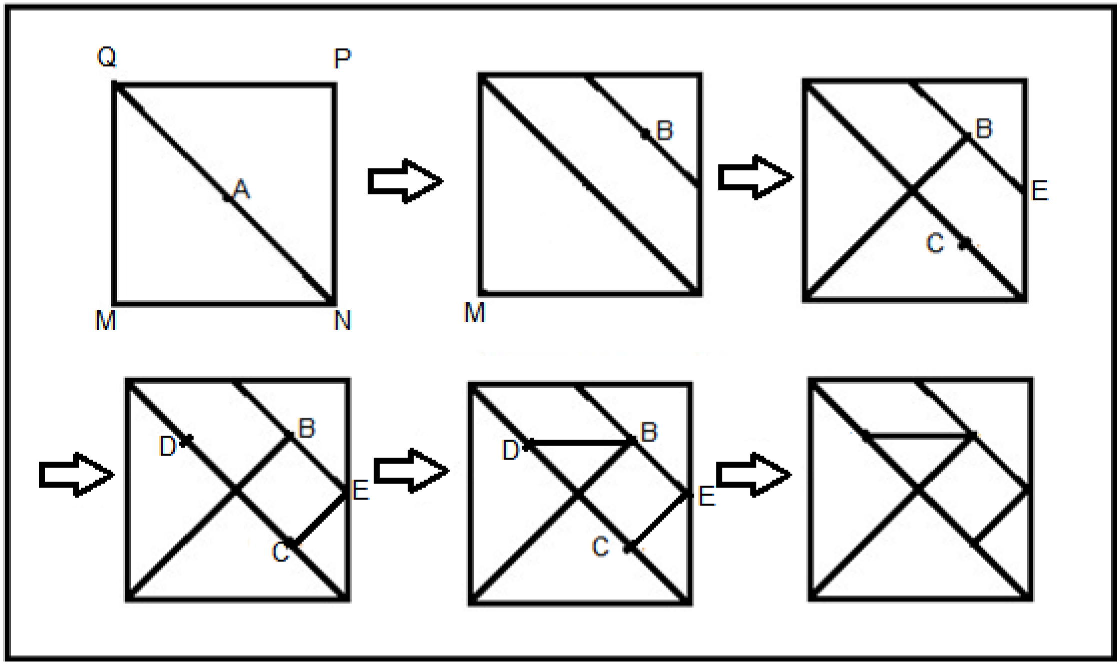
Assim, apresentamos a seguir algumas experiências de sala de aula, realizadas com as turmas de 6º e 7º ano da escola Padre Antônio Monteiro da Cruz. Iniciaremos mostrando como se deu a confecção do jogo com a participação ativa dos alunos, em seguida as atividades que envolvem formas geométricas, cálculo do perímetro e composição de figuras.

5.1 Confecção com Dobradura

Vamos apresentar aqui um modo de confeccionar o Tangram que julgamos importante, pois além de trabalhar memorização, percepção e o raciocínio lógico, é rica em aprendizagens de geometria. Esse modo de confecção é a dobradura.

Primeiro mostramos como obter um quadrado com uma folha A4 e apresentamos aos alunos a sequência de dobras que deveriam ser seguidas, como podemos ver na figura 8. Seguindo esse esquema fizemos o Trangram, mostrando para a turma como deveria ser feita cada dobra e a marcação dos pontos M, N, P, Q, A, B, C e D. As linhas que delimitam cada peça indicam o local onde deve ser feita a dobra e os pontos A, B, C, D e E são pontos médios.

Figura 8 – Tangram com dobradura



Fonte: elaborada pelo autor.

Para dar sequência à construção, cada aluno recebeu uma folha A4 e uma régua. Antes dos alunos tentarem construir o Tangram, solicitamos aos mesmos, que ficassem atentos e repetimos a construção. Com a intenção de treinar a memória do aluno, solicitamos que fizessem as dobras sem nossa intervenção. Notamos que alguns alunos concluíram, mas outros tiveram muita dificuldade, não lembravam como determiner os pontos médios A, B, C, D e E. Daí, buscando uma maior interação entre os alunos, orientamos aos que haviam concluído a ajudar aos colegas que não estavam chegando à figura final.

A figura 9 mostra os alunos fazendo a dobradura, bem como suas anotações afim de acompanhar as orientações do professor. Note que neste momento, os alunos tiveram a oportunidade de utilizar a régua, que é um instrumento de medida o qual a maioria dos alunos não mostrou familiaridade, mas aproveitamos o momento para incentivar o uso correto desse intrumento.

Figura 9 – Aluno construindo o Tangram

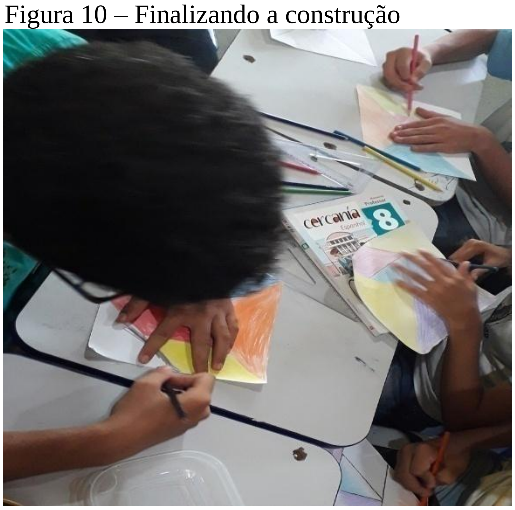
Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que para tornar o momento mais rico em aprendizagem, não nos preocupamos apenas em chegar ao resultado final usando moldes ou figuras prontas. A cada dobra, os alunos foram exigidos a determinar os segmentos e seus repectivos pontos médios indicados na figura 8 pelas letras A, B, C, D e E.

É importante destacar que cada ponto médio foi determinado usando apenas dobradura e em seguida pedimos aos alunos que conferissem a distância desse ponto a cada extremidade do segmento. Neste momento acompanhamos de perto a construção a fim de explicar aos alunos como encontrar os pontos médios, manter as proporções e utilizar a régua corretamente.

Para finalizar esse momento, os alunos pintaram e colaram a folha em um material mais rígido, no nosso caso usamos papelão, e em seguida recortaram, obtendo assim as sete peças. A figura 10 mostra os alunos concluindo aconfecção do Tangram.

Figura 10 – Finalizando a construção



Fonte: elaborada pelo autor.

Notamos durante essa atividade uma mudança positiva no comportamento, todos os alunos mostraram-se concentrados e empenhados em concluir o trabalho proposto.

5.2 Formas Geométricas e Perímetro

Após a confecção das peças do Tangram, aproveitamos o momento e exploramos a forma geométrica de cada peça, reconhecendo e dando nome à essas formas: cinco triângulos isósceles (dois grandes, um médio, e dois pequenos); um quadrado; um paralelogramo. Aqui trabalhamos ainda o conceito de triângulo retângulo e quadriláteros.

Como os alunos apresentaram dificuldade de utilizar instrumentos de medição, aproveitamos o momento para praticar e orientar quanto ao uso correto da régua. Fizemos ainda algumas intervenções no sentido de explicar o significado de congruência.

Depois das orientações formamos equipes e apresentamos algumas questões, de modo os alunos registrassem as respostas encontradas. Solicitamos ainda o registro das dificuldades enfrentadas, a fim de mostrar como estavam compreendendo o conteúdo abordado. As questões são as seguintes:

1. Qual é a medida dos lados de cada peça do Tangram?
2. Há figuras congruentes?
3. Há figura com todos os lados congruentes? Qual?
4. Calcule o perímetro de cada uma dessas peças.

Depois de um tempo, fizemos as correções e vimos que a maioria das equipes conseguiram responder corretamente. A maior dificuldade apresentada foi medir os lados de cada peça e verificar a congruência. Passada essa dificuldade, todos conseguiram calcular o perímetro.

Essa atividade foi muito proveitosa, visto que as experiências vividas pelos alunos favoreceram ao aprendizado e fixação de conceitos de geometria. Além disso, mostraram-se motivados durante toda a aula.

5.3 Montando Figuras

Esta atividade foi realizada na aula seguinte. Solicitamos aos alunos que formassem equipes de no máximo quatro alunos com a intenção de facilitar o acompanhamento. O nosso principal objetivo ao promover essa atividade com os alunos é estimular a criatividade e melhorar a noção espacial.

Com as peças do Tangram é possível formar várias imagens, daí esta atividade será voltada à montagem de figuras.

> Ao contrário de outros quebra-cabeças, ele é formado por apenas sete peças, com as quais é possível criar e montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas e outros. As regras desse jogo consistem em usar as sete peças em qualquer montagem, colocando-as lado a lado sem sobreposição. (DINIZ, 1995, P.60)

Assim, entregamos a cada equipe uma folha com algumas dessas imagens, todas em negrito, a fim de tornar a atividade mais desafiadora. Note que, ao escolher uma das imagens, os alunos teriam que tentar descobrir onde ficaria cada uma das sete peças do Tangram, de modo que formasse a imagem escolhida pela equipe. Para jogar apresentamos as seguintes regras:

- O jogador deve usar as sete peças, sem sobreposição;
- Montar o máximo de imagens em 60 minutos;
- Chamar o professor para conferir cada imagem formada;
- Cada par de figuras formadas vale ponto.

Podemos ver na figura 11 duas soluções apresentadas por duas equipes diferentes e próximo aos alunos, a folha contendo as figuras em negrito.

Figura 11 – algumas figuras montadas

Fonte: minha autoria.

Notamos que, durante a atividade de montagem das imagens, havia clima de competição e os alunos mostraram grande interesse. Outro ponto positivo é que os alunos mostraram atitude e concentração, bem como agilidade ao tentar montar cada figura, visto que as imagens estavam em negrito. E, para compor a figura escolhida, do aluno era exigida ter essa postura.

Mesmo apresentando dificuldade de descobrir como obter algumas imagens, os alunos não desistiram.

Vale ressaltar que não foi necessário fazer intervenções nem dar dicas, mas ficamos atentos e acompanhando se as figuras formadas estavam corretas. Assim concluímos mais uma atividade com o Tangram a qual também contribuiu com o desenvolvimento de habilidades nos educandos.

6 NIM E A MATEMÁTICA DA VITÓRIA

O Nim é um dos jogos mais antigos para dois jogadores. O nome foi dado por Charles Leonard Bouton (Universidade de Harvard), que escreveu um “paper”, analisando o Nim em 1901, em que estuda a teoria matemática do jogo.

É um jogo de lógica e há várias formas de jogar. Possibilita ao educando construir um modelo de representação da solução da situação problema de jogo: a estratégia máxima. Grando (2000, p. 188) afirma que para isso “os educandos necessitam construir habilidades de resolução de problemas, explorar o raciocínio hipotético-dedutivo, generalizar soluções e procedimentos, observar regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático”.

Em relação aos conceitos envolvidos nesse jogo, podemos observar o cálculo da divisão e o valor do resto na divisão não exata; a relação (dividendo = divisor . quociente + resto) que é o Algoritmo de Euclides; as ideias associadas à divisibilidade, multiplicidade, cálculo mental e pensamento algébrico.

Jogos de estratégia como esse, apresentam vários aspectos.

> [...] um dos aspectos que caracterizam particularmente os jogos estratégicos, segundo a teoria dos jogos matemáticos, é a existência de uma “estratégia máxima” no jogo, ou seja, o interesse se volta para a investigação da estratégia que garante a um jogador sempre vencer. O conceito matemático está presente nesta estratégia máxima, a ser construída pelos sujeitos. (Grando, 2000, p.187).

Na tentativa de formular esta estratégia são identificados vários conceitos matemáticos, os quais precisam ser construídos e/ou aplicados pelos jogadores, pois os jogadores precisam efetuar a divisão e raciocinar o seguinte: como utilizar o resto e ainda seguir o “roteiro” para garantir a vitória.

A estratégia máxima consiste em, a cada jogada, retirar sempre a quantidade adequada de palitos, de tal forma que o adversário não tenha como vencer o jogo.

Vamos apresentar duas versões desse jogo, que segundo Hefez (2013) são atividades lúdicas as quais tem uma teoria matemática bem interessante para garantir a vitória.

6.1 Primeira versão do jogo NIM

Vamos iniciar falando sobre essa versão que segundo Grando (2000, p. 17) é original e a mais simplificada. Essa autora sugere o jogo com vinte e sete palitos.

Objetivo do jogo: perde o jogo o jogador que retirar o último palito.

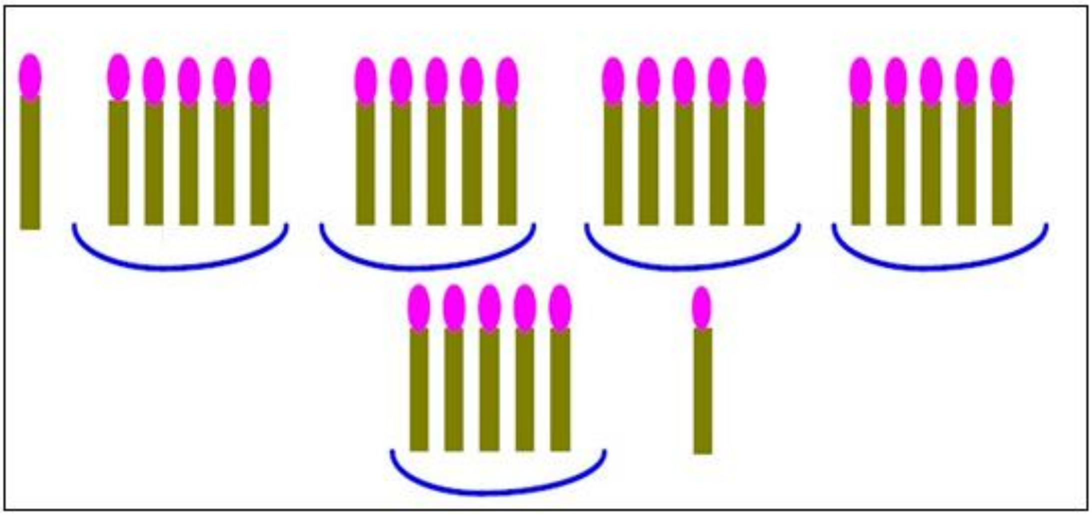
Regras:

- Os 27 palitos são dispostos na mesa, um ao lado do outro;
- Os jogadores jogam alternadamente;
- Cada jogador, na sua vez, retira uma determinada quantidade de palitos, sendo que deve retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, 4;
- Quem retirar o último palito perde o jogo.

De acordo com essa autora, a estratégia máxima do jogo pode ser definida da seguinte forma:

- O primeiro jogador estabelece, mentalmente, cinco grupos de cinco palitos em cada grupo, restando dois. Note que aqui o jogador é exigido a efetuar divisão e determinar o resto. Vejamos:

Figura 12 – versão simplificada do NIM



Fonte: Grando (2000, p. 18).

- Separa-se um palito para a última jogada que deve ser do adversário. O outro palito é para a sua 1ª jogada, com isso terá um palito para ser retirado pelo adversário. Para compreendermos melhor como funciona, considere os jogadores A (conhecedor da estratégia) e B (não conhecedor da estratégia) e veja o que ocorre durante o jogo.

- Primeira jogada - jogador A retira um palito.
  Temos $(5 . 5 + 2) – 1 = 5 . 5 + 1$.
- Após a retirada do jogador A, vamos analisar no Quadro 2 a seguir, a segunda e terceira jogadas, e veremos como funciona a construção da estratégia da vitória.

Quadro 1 – Estratégia vencedora

SEGUNDA JOGADA		TERCEIRA JOGADA	
	JOGADOR B		JOGADOR A
RETIRADA	PALITOS RESTANTES	RETIRADA	PALITOS RESTANTES
1	5 . 5	4	5 . 4 + 1
2	5 . 4 + 4	3	5 . 4 + 1
3	5 . 4 + 3	2	5 . 4 + 1
4	5 . 4 + 2	1	5 . 4 + 1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que as retiradas do jogador A completam grupos de cinco palitos. Seguindo esse raciocínio, após cada jogada de A, restará uma quantidade de palitos que é múltiplo de cinco mais um. Assim, no final do jogo, o jogador A completa o último grupo de cinco e sobrará um palito que será retirado por B. Logo B perderá o jogo.

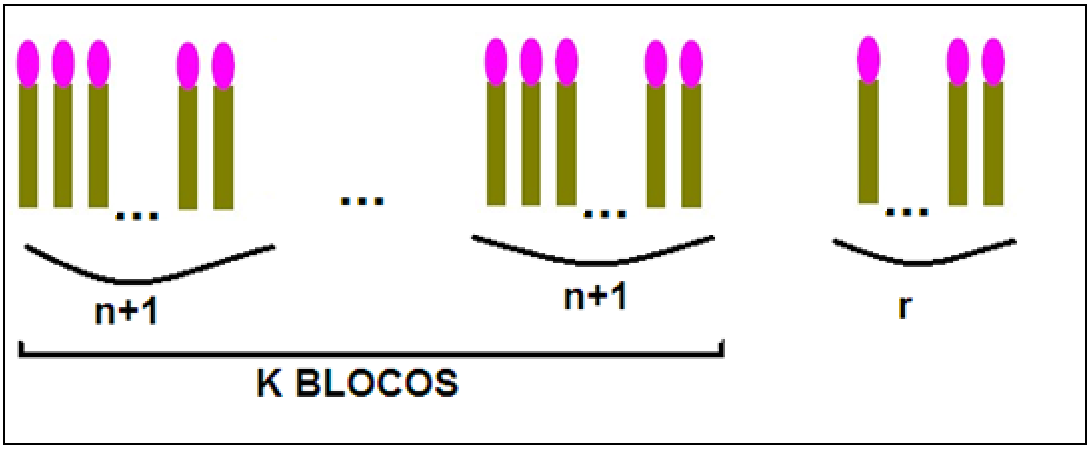
Apresentamos agora uma análise matemática para o caso geral desse jogo:

- Considere que temos M palitos;
- Efetuamos a divisão de M por (n + 1);
- Obtemos K blocos de n + 1 palitos em cada bloco;
- r é resto dessa divisão.

Pelo Algoritmo de Euclides, se a, b ∈ N, com b > 0, então existem dois naturais q e r únicos, tais que $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$. Assim, para o caso geral com M palitos, podemos escrever:

- $M = K \cdot (n+1) + r$, com $0 \leq r < (n + 1)$.

Figura 13 – Esquema geral do jogo



Fonte: elaborada pelo autor.

Cada bloco contém (n+1) palitos, lembre-se de que apenas o conhecedor da estratégia vencedora faz a divisão acima. Em seguida, anuncia a quantidade máxima que deve ser retirada a cada jogada, que é n palitos. Com isso, este jogador poderá controlar e vencer o jogo, como veremos mais adiante.

Como já vimos, cada jogador deve retirar uma quantidade máxima de palitos alternadamente. Como em cada bloco há (n + 1) palitos, então a quantidade retirada por cada jogador não pode ser maior que n. A análise é feita observando o resto. Vamos analisar alguns casos.

1º CASO: r = 1.

O adversário começa. A partir dai, o jogador A deve retirar uma quantidade tal que somando com o que B retirou, totaliza n + 1. Eliminando assim um dos K blocos. Vejamos.

B : retira $n - t$ palitos, $0 \leq t < n$.

Restam em um dos blocos $(n + 1) - (n - t) = t + 1$.

A : retira $t + 1$ palitos, $0 \leq t < n$.

Note que $(n - t) + (t + 1) = n + 1$.

Note que agora temos $K - 1$ blocos de $(n + 1)$ palitos. Seguindo o raciocínio acima, o jogador A sempre poderá completar a quantidade de $n + 1$ palitos após cada jogada de B. Ou seja, a cada duas jogadas, eliminamos um dos blocos de $n + 1$ palitos.

Assim, após várias jogadas, teremos em algum momento, apenas um dos K blocos. Assim teremos $(n + 1) + 1$ palitos.

Analisemos agora as retiradas neste último bloco de palitos:

B : retira $n - t$ palitos com $0 \leq t < n$;

A : retira $t + 1$ palitos, $0 \leq t < n$.

Após essas retiradas, restará apenas um palito. Veja:

$(n + 1) + 1 - (n - t) - (t + 1) = 1$.

Logo, sobrou um palito e como é a vez de B jogar, ele e perde o jogo.

2º CASO: Se $1 < r < n+1$

O jogador conhecedor da estratégia deve começar. Observe que, em qualquer um desses casos, a quantidade de palitos a ser retirada pelo conhecedor da estratégia vencedora deverá ser $(r - 1)$. Vejamos:

$$r - (r - 1) = 1.$$

Isso garante que o adversário receba o jogo com resto um, assim como no primeiro caso. Daí segue o mesmo raciocínio.

3º Caso: $r = 0$

Temos $M = k \cdot (n + 1)$ palitos. O conhecedor da estratégia começa retirando n palitos e novamente o adversário recebe o jogo com resto um. Vejamos.

$M = (k - 1) \cdot (n + 1) + (n + 1).$

A: retira n palitos.

$M - n = [(k - 1) \cdot (n + 1) + (n + 1)] - n.$

$M - n = (k - 1) \cdot (n + 1) + 1.$

O jogador B recebe o jogo com resto 1 recaindo novamente no primeiro caso.

6.1.1 Experiência em sala de aula

A realização desta atividade ocorreu em dois momentos: no primeiro, foi apresentado o jogo aos alunos, com situações simples no quadro branco, deixando-os jogar livremente. Aqui o jogo ocorreu com 11 palitos, e em cada jogada podiam retirar no máximo dois; no segundo momento, os alunos foram organizados para jogar em dupla, agora com 27 palitos. Neste caso, cada jogador deveria retirar no máximo 4. A partir desse momento, foi solicitado que fizessem anotações das descobertas, durante e ao final de cada partida.

Depois da segunda partida, observamos alunos realizando jogadas que levavam ao fracasso e alguns mostraram perceber isso. Não intervimos, os alunos jogaram e aproveitaram suas descobertas, visto que ao tentar corrigir essas jogadas, a dupla passou a se organizar e tentar manter o controle do jogo.

Depois de um tempo, fizemos algumas observações em relação ao jogo, visto que alguns alunos não conseguiam elaborar uma estratégia. Para estimular os alunos a pensar, colocamos para turma, uma lista de cuidados a serem tomados:

- Ler atentamente às regras;
- Observar as anotações feitas e fazer levantamento de dados;
- Formular uma hipótese;

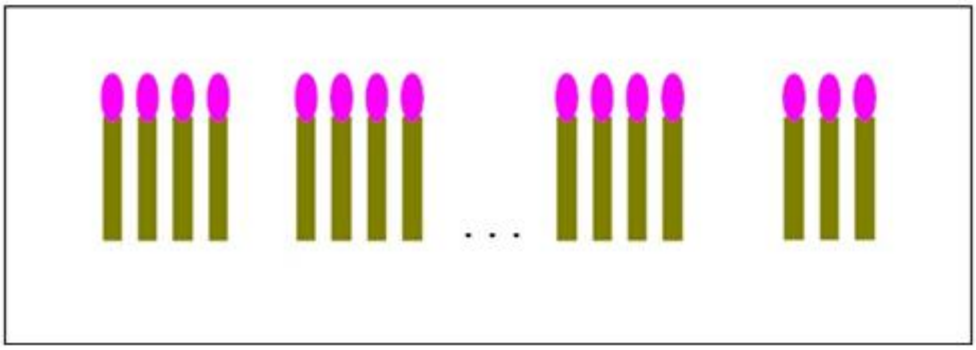
- Executar uma estratégia a partir da hipótese inicial;
- Verificar a eficiência da jogada para chegar à vitória.

Depois de várias partidas, encerramos o momento do jogo e passamos para as apresentações.

Apareceram várias estratégias durante o jogo, mas algumas não garantiam a vitória. Quatro duplas apresentaram estratégias que levava à vitoria.

Vamos analisar uma dupla que chegou próximo da estratégia vencedora. Mesmo com erro, aproveitamos para reforçar alguns conceitos. Essa dupla usou adição: descobriu que formando blocos com a mesma quantidade de palitos (quatro), ao final sobraria três para dupla adversária. Como vimos na figura 13, para garantir a vitoria os blocos deveriam ser formados por cinco palitos, deixando assim o último palito para o seu adversário. A figura 14 mostra como ficou o esquema apresentado por essa dupla.

Figura 14 – Estratégia não vitoriosa



Fonte: elaborada pelo autor.

Aproveitamos o momento para fazer uma intervenção, chamando atenção para o fato de que essas quantidades, quando somadas formavam múltiplos de 4 e portanto, e cada um desses números é divisível por 4. Assim apresentamos para a turma o seguinte esquema:

$4 \cdot 1 = 4$;

$4 + 4 = 4 \cdot 2 = 8$;

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 6 = 24$.

Mostramos essa construção com a intenção de passar para o aluno a ideia de múltiplos de um número a fim de perceberem que podemos simplificar a soma de parcelas iguais usando uma multiplicação.

A partir daí, fizemos uma nova intervenção, agora referente ao Algoritmo da Divisão, da seguinte forma:

- Para 27 palitos → $27 = 6 \cdot 4 + 3$;

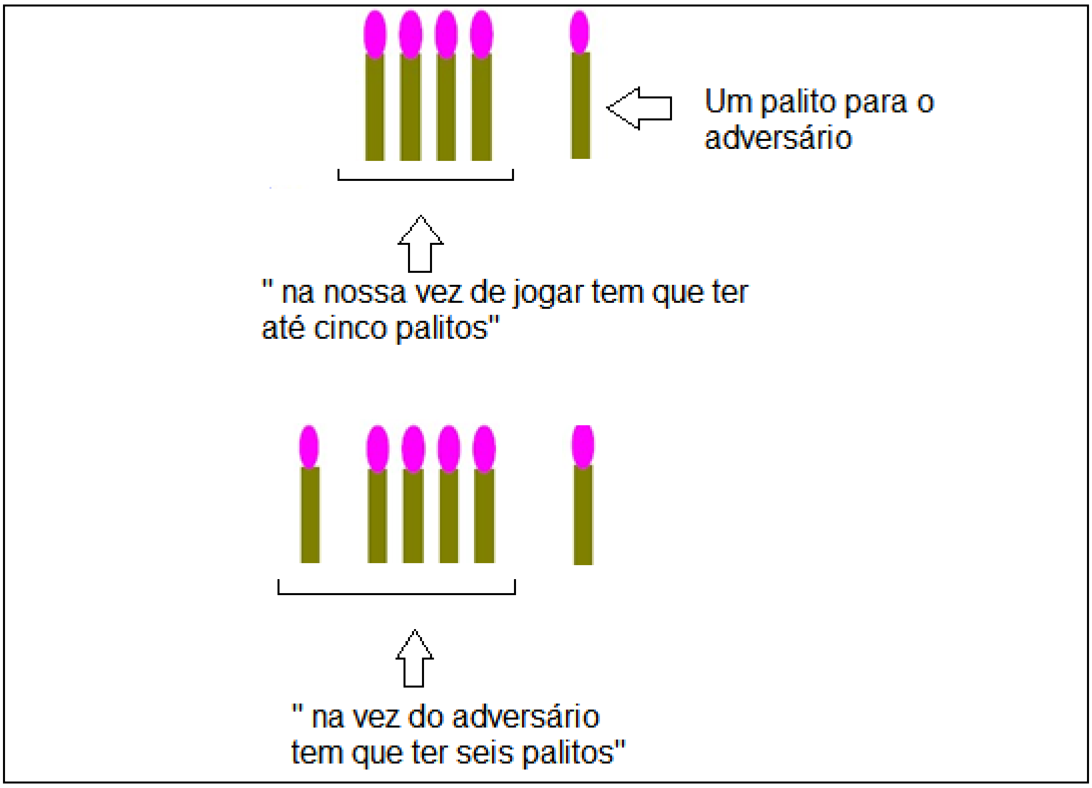
- Para 23 palitos → 23 = 5 . 4 + 3, ou seja, subtraindo 4 palitos do número anterior;
- Fizemos isso até 7 palitos → 7 = 4 . 1 + 3;
- Identificamos o dividendo, o divisor, o quociente e o resto nas expressões;
- Os alunos observaram que o resto era constante: “sobra sempre três”.

A conclusão feita pela turma foi que ao sobrar três, bastava que o próximo jogador retirasse dois para ganhar. Logo deixar resto 3 não era uma estratégia vencedora.

Quanto às duplas que conseguiram uma estratégia vencedora, vale destacar uma que para bolar uma estratégia, imaginou jogando invertido: deixou um palito para o adversário e depois analisaram cada jogada, fazendo anotações. Vejamos o raciocínio:

- Um palito para o adversário;
- Para nós poderia ter um total de dois, três, quatro ou cinco palitos;
- Na vez do adversário, deveria ter seis;
- Fazendo essa construção chegamos a 26 palitos;
- Como sobrou um então começamos retirando um;
- Com as anotações, os alunos sabiam quantos palitos deveriam retirar;

Figura 15 – Construção de uma estratégia vencedora



Fonte: elaborada pelo autor.

Esta estratégia que eles encontraram está correta, pois faz com que o adversário pegue o último palito levando o conhecedor da estratégia à vitória.

Logo fizemos intervenções assim como na apresentação da dupla anterior, para construir junto com a turma um modo prático de descobrir a estratégia vencedora e trabalhar os conceitos de múltiplos, divisores e o Algoritmo da Divisão, bem como desenvolver o raciocínio lógico.

De acordo com o que foi apresentado, notamos que não ter chegado à estratégia máxima, não significa não ter aprendido algo. A participação ativa no jogo, (tentativas e erros) bem como a apresentação dos colegas, foi uma oportunidade que favoreceu ao desenvolvimento cognitivo do educando. A experiência de aprender alguns conteúdos de um modo diferente conquista o educando e retira bloqueios em relação à matemática. Vale ressaltar que os alunos estavam bem mais participativos e mostraram um grau de interesse maior que em aulas expositiva.

6.1.2 Jogo da trilha

Por ser muito interessante e semelhante ao jogo com palitos, apresentamos esta variação do jogo como sugestão de atividade a ser aplicada em sala de aula. Trata-se de uma variação da 1ª versão do Nim.

Propomos que seja jogado por apenas dois jogadores. Mas se o professor achar conveniente pode optar por trabalhar com equipes.

Destacamos ainda a importância de promover o jogo repetidas vezes, visto que a repetição dá ao educando a oportunidade de fazer descobertas e de elaborar estratégias.

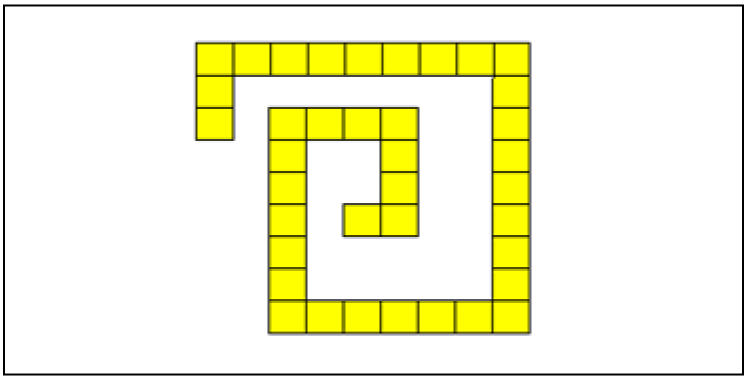
Vejamos como jogar:

- Uma trilha formada por quadradinhos (casas);
- Uma peça para percorrer a trilha;
- Dois jogadores que Jogam alternadamente;
- Cada jogador pode avançar um determinado número de casas;
- O jogador que colocar a peça na última casa ganha.

Observemos no exemplo seguinte, como o jogador V (conhecedor da estratégia vencedora) faz para controlar e vencer o jogador D (não conhecedor da estratégia vencedora).

Exemplo 6.1.2.1 Tomemos uma trilha com 38 “casas”.

Figura 16 – Trilha do jogo



Fonte: elaborada pelo autor.

Para este exemplo, considere que cada jogador, na sua vez, deve percorrer no mínimo uma e no máximo três casas.

Analisemos como V constrói a estratégia vencedora.

V: faz a divisão de 38 por 4 e obtém $38 = 9 \cdot 4 + 2$.

V: percorre duas casas (1ª jogada).

Restam 36 casas. Note que $36 = 9 \cdot 4 + 0$.

Agora vamos analisar as possíveis jogadas de D e V.

Quadro 1 – Estratégia vencedora

SEGUNDA JOGADA		TERCEIRA JOGADA	
JOGADOR D		JOGADOR V	
CASAS PERCORRIDAS	CASAS RESTANTES	CASAS PERCORRIDAS	CASAS RESTANTES
1	$4 \cdot 8 + 3$	3	$4 \cdot 8$
2	$4 \cdot 8 + 2$	2	$4 \cdot 8$
3	$4 \cdot 8 + 1$	1	$4 \cdot 8$

Fonte: elaborada pelo autor.

Perceba que somando o número de casas percorridas por D e por V obtemos quatro casas e que mantendo esse padrão, V sempre deixará o jogo com um número de casas que é múltiplo de quatro. Assim, D receberá o jogo com 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8 e 4 casas restantes para realizar sua jogada.

Perceba que a última jogada de D será quando restarem quatro casas. Logo, para qualquer quantidade de casas percorridas por D, o jogador V poderá chegar à última casa e vencer o jogo.

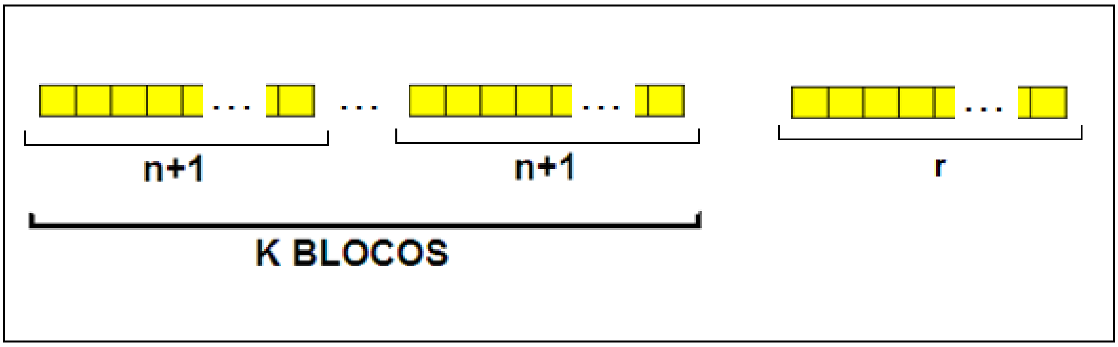
Quanto à analise do jogo, notamos que a estratégia da vitória utilizada nesta variação é análoga à que apresentamos anteriormente com os palitos alinhados.

Vamos analisar como um jogador pode dominar o jogo da trilha e chegar à vitória, independente da quantidade de quadradinhos (casas) da trilha.

Para iniciar, suponha uma trilha com M casas e que cada jogador pode percorrer, na sua vez, no máximo n casas.

Seja $M = k \cdot (n + 1) + r$, com $0 \leq r \leq n$.

Figura 17 – caso geral para o jogo da trilha.



Fonte: elaborada pelo autor.

.

Como D pode percorrer no máximo n casas então, após sua jogada, o jogador V deve jogar, de modo que a soma do número de casas percorridas pelos dois jogadores resulte em $(n + 1)$ casas.

Portanto, a construção da estratégia da vitória está em controlar o resto da divisão do número restante de casas por $(n + 1)$. Logo, para controlar o jogo ao realizar sua jogada, V deixa sempre o resto igual a zero.

Vamos analisar dois casos:

I - Quando $r \neq 0$.

V: começa percorrendo r casas;

D: recebe o jogo com $K \cdot (n + 1)$ casas;

D: percorre x casas, com $x \leq n$;

Daí temos $K \cdot (n + 1) - x$ casas restantes.

V: percorre $(n + 1) - x$ casas;

Ficamos com $K \cdot (n + 1) - x - [(n + 1) - x] = (k - 1) \cdot (n + 1)$ casas.

Assim V consegue deixar um número de casas que é múltiplo de $(n + 1)$.

II - Se $r = 0$

Neste caso, o jogador D deve realizar a primeira jogada. Daí, segue o raciocínio do caso anterior.

Note que em qualquer dos casos, V fará com que D realize sua jogada sempre quando restarem exatamente y **.** (n + 1) casas, com $0 \leq y \leq k$.

Logo, quando tivermos y = 0, será a vez de D jogar, ou seja, não haverá mais casas para percorrer. Portanto o jogador V ganhará o jogo.

6.2 Segunda versão do jogo NIM

Por ser uma versão é bem mais complexa que à anterior, vamos apresentar o jogo, expor exemplos e explicar a teoria matemática que há nele. Mostraremos ainda como essa teoria pode ser utilizada na construção da estratégia da vitória.

Dispõem-se numa mesa n filas de palitos, onde cada uma das filas pode conter a mesma quantidade ou quantidades diferentes de palitos.

Regras do jogo:

- Dois jogadores ou duas equipes jogam alternadamente.
- Cada jogador ou equipe pode retirar no mínimo um e no máximo o total de palitos que há em uma das filas.
- Não se podem retirar palitos em mais de uma fila na mesma jogada.
- Perde aquele que não puder retirar mais palitos.

Para entendermos o jogo, vamos ver alguns exemplos simples nos quais é possível descobrir a estratégia máxima.

Para facilitar a compreensão, nos exemplos que seguem, considere o jogadores A e o jogador B.

1º CASO: n = 1.

Aqui é imediato ver que se o jogador A começar, basta retirar todos os palitos da única fileira. Este caso é favorável para quem começa e assim o segundo jogador perderá.

2º CASO: n = 2.

Agora temos duas fileiras. Não é difícil conseguir a estratégia máxima. Podemos analisar duas situações.

I - Considere uma fileira com x palitos e outra fileira com x + k palitos. Com x, k $\in$ N.

Este caso também é favorável para quem começa, vejamos:

- O jogador A começa retirando k palitos.

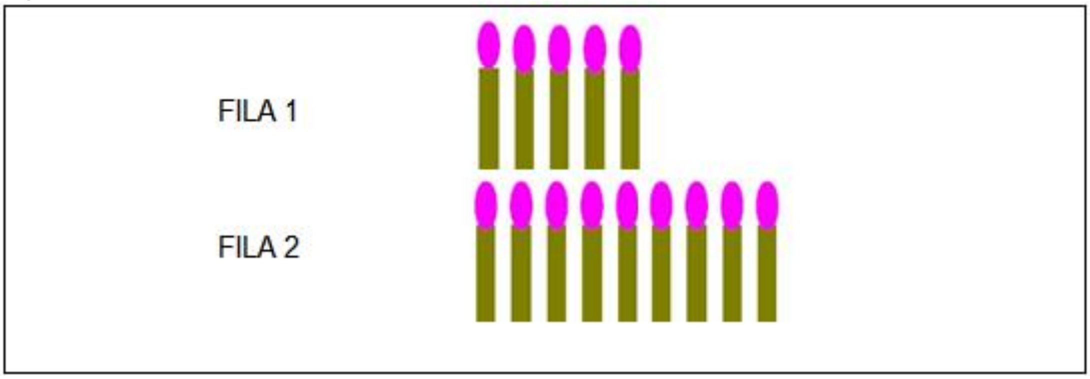
Agora temos duas filas com a mesma quantidade de palitos. É fácil ver que após retirada de B, o jogador A poderá controlar o jogo.

- A partir daí basta que A retire a mesma quantidade de B.

Analisemos a seguir um exemplo em que isso ocorre.

Exemplo 6.2.1 Uma fila com cinco palitos e outra com nove palitos.

Figura 18 – Palitos em duas filas



Fonte: elaborada pelo autor.

Vejamos como seriam algumas jogadas, iniciando no quadro abaixo.

Quadro 2 – Representação da primeira jogada

Pilha de palitos	Número de palitos	Retirada de A
1	5	
2	9	4

Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, observe como fica o jogo após a primeira jogada realizada por A.

Quadro 3 – Representação após a primeira jogada

Pilha de palitos	Número de palitos	Retirada de A
1	5	
2	5	

Fonte: elaborado pelo autor.

Note que:

- Se B retirar todos de uma fila, A retira todos da outra;
- Se A retirar sempre a mesma quantidade de B, A vai retirar o último palito, visto que ele é o segundo a jogar;

- Quando B zerar uma das filas A também vai zerar a outra fila;
- Logo o jogador A vence o jogo;

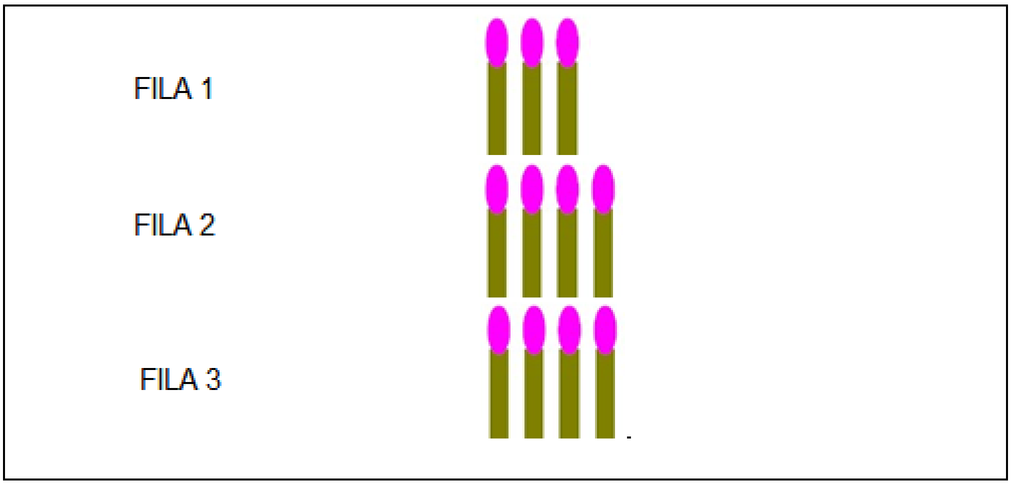
3º CASO: n ≥ 3.

Vamos analisar casos em que aparecem três ou mais filas. Geralmente com três filas não é tão simples se comparado com os anteriores.

Vejamos um desses casos simples como é fácil encontrar a estratégia vitoriosa.

Exemplo 6.2.2 Três filas com quantidades iguais de palitos em duas delas.

Figura 19 – Duas filas iguais

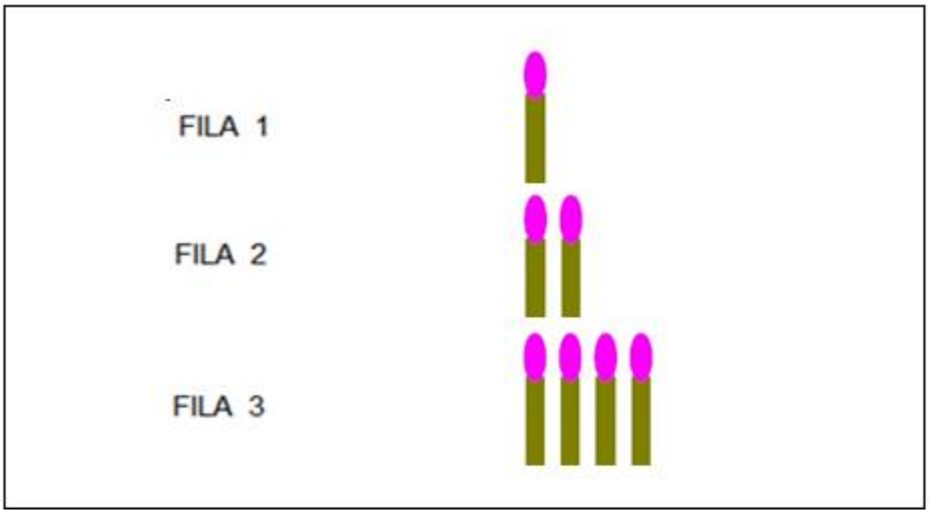


Fonte: elaborada pelo autor.

O jogador A começa retirando toda fila 1. Restando duas filas com a mesma quantidade. Agora segue análise do caso 1. Logo o jogo é favorável ao jogador que inicia.

Exemplo 6.2.3 Três filas com quantidades diferentes de palitos.

Figura 20 – Três filas diferentes



Fonte: elaborada pelo autor.

Neste caso, se o jogador A retirar um palito da fila três, ele poderá controlar o jogo. Note que para jogada de B, em qualquer das filas, o jogador A terá a possibilidade de transformar o jogo na situação do caso 1 e assim vencer.

Como vimos, com uma quantidade pequena de palitos, não é difícil chegar à estratégia máxima para garantir a vitoria apesar de exigir um pouco de raciocínio.

Esta versão pode apresentar configurações simples, mas há configurações bastante complexas, com uma quantidade maior de palitos e filas, as quais exigem bem mais que o raciocínio lógico dedutivo, exige que utilizemos uma teoria matemática muito interessante.

Estamos falando da Teoria de Bouton, que apresenta um método prático para determinar a estratégia máxima. Esse método exige a transformação de cada quantidade de palitos presentes nos grupos, que está na base decimal, para base binária. Além disso, devemos saber efetuar uma operação com números naturais: a Soma Nim. Para compreender essa operação, devemos ter o conhecimento do sistema binário. Vejamos como realizar essa operação e em seguida sua aplicação na construção da estratégia da vitória.

Para representar um número natural x na base binária, utilizamos apenas os algarismos 0 e 1. Considere x e n números naturais e $x_i \in \{0, 1\}$ com $i = 0, 1, ..., n$. Vejamos como escrever x na base binária.

$x = x_n \cdot 2^n + x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot 2 + x_0 \cdot 2^0$, em seguida, tomamos apenas os x_i e denotamos $x = (x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0)_2$.

Exemplo 6.2.4 O número 7 na base binária.

$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Logo, escrevemos que $7 = (111)_2$.

Exemplo 6.2.5 O número 22 na base binária.

$22 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Logo, $22 = (10110)_2$.

Para determinar os coeficientes das potências de 2, usamos o processo da divisão por dois. Os coeficientes das potências são os restos obtidos. Pelo Algorítmo da Divisão de Euclides, temos no exemplo 6.2.5 o seguinte:

$22 = 2 \cdot 11 + 0$

$11 = 2 \cdot 5 + 1$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\Longrightarrow$ Tomando os restos debaixo para cima temos $(10110)_2$.

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$1 = 2 \cdot 0 + 1$

Agora vejamos como realizar a Soma Nim entre dois ou mais números naturais.

Seja $k_i \in N$ com $i \in \{ 1, 2, ... n - 1, n \}$. O símbolo $\oplus$ representa a soma Nim entre números naturais. Denotamos assim:

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n \qquad (1)$$

Para facilitar a compreensão dessa operação, vamos mostrar com um exemplo, como calcular a soma Nim.

Exemplo 6.2.6 Efetuar a soma Nim com os números 7, 9 e 13.

- Escrever a representação binária de cada K_i organizando uma abaixo da outra e alinhando da direita para esquerda;

Vejamos como fica o exemplo 6.2.6:

$7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$ e $13 = (1101)_2$.

Alinhando essas representações temos:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- Efetuar a soma usual dos algarismos que estão alinhados em cada coluna;

$$7 \oplus 9 \oplus 13 = 2213$$

- Se a soma de uma coluna resultar em um número par, escreva 0 na posição dessa soma. Se resultar em um número ímpar, escreva 1 na posição.

Retomando o exemplo 6.2.6 e efetuando esses cálculos obtemos:

$$7 \oplus 9 \oplus 13 = 2213 \implies 7 \oplus 9 \oplus 13 = 0011.$$

Agora podemos usar essa teoria (soma de Nim) para conseguir a estratégia máxima do jogo para qualquer quantidade de filas.

Para iniciar esse estudo, considere o seguinte:

- Chamaremos de chave do jogo o número binário formado pela soma Nim;

Note que no exemplo 6.2.6, a configuração $(0011)_2$ é a chave do jogo.

- A soma Nim será nula quando todos os algarismos da chave for zero. Neste caso, a chave obtida será chamada de posição segura;
- Se pelo menos um dos algarismos da chave for um, será chamada posição insegura.

Começaremos analisando o caso em que temos três filas de palitos.

Considere que G_1, G_2 e G_3 sejam as quantidades de palitos organizados em três filas sobre uma mesa. Fazendo a representação binária de cada uma dessas quantidades e efetuando a soma Nim temos:

$$\begin{aligned} (G_1)_{10} &= (M_{1,r}\ M_{1,r-1} \ldots M_{1,0})_2 \\ (G_2)_{10} &= (M_{2,r}\ M_{2,r-1} \ldots M_{2,0})_2 \\ (G_3)_{10} &= (M_{3,r}\ M_{3,r-1} \ldots M_{3,0})_2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = (C_r\, C_{r-1} \ldots C_0)_2 = C \tag{3}$$

Note que $(C_r\, C_{r-1} \ldots C_0)_2$ é a chave do jogo.

Vamos mostrar que se pelo menos um dos algarismos dessa chave for 1, o primeiro jogador poderá transformar cada um deles em algarismo 0, obtendo assim a soma Nim nula; E que na vez do outro jogador, qualquer quantidade retirada, fará com que apareça na chave pelo menos um algarismo 1, ou seja, posição insegura.

Daí o processo começa a se repetir: o primeiro jogador pode escolher uma fila e retirar uma quantidade adequada de palitos, passando a chave para uma posição segura. Assim este jogador poderá manter o controle do jogo e chegar sempre à soma Nim nula. Ou seja, quando não houver palitos para serem retirados é porque jogador conhecedor da estratégia foi o último a jogar, visto que neste caso, a soma Nim será nula. Logo o adversário não poderá retirar palitos.

Vejamos o procedimento para obter uma posição segura a partir de uma posição insegura. Retomemos o caso acima em que aparecem três filas de palitos.

Considere que $(C_r\, C_{r-1} \ldots C_0)_2$ é uma posição insegura.

Devemos escolher uma das filas contendo G_i elementos, com $1 \leq i \leq 3$, para que se faça a retirada de palitos. Para essa escolha, note que existe algum $C_j = 1$ com $0 \leq j \leq r$, mais à esquerda possível.

A partir da escolha, comparamos a configuração binária de G_i com a chave C.

Tome G_i de modo que sua representação binária, contenha 1 na coluna correspondente ao $C_j = 1$.

$$G_i = (M_r\ M_{r-1} \ldots M_1\ M_0)_2 \tag{4}$$

$$C = (C_r\, C_{r-1} \ldots C_1\, C_0)_2 \tag{5}$$

Escolhida a fila, mantemos ou trocamos os algarismos de G_i, por zero se for um ou por um se for zero, a partir da coluna correspondente à posição de $C_j = 1$, observando o seguinte:

- O algarismo de G_i correspondente ao $C_j = 1$ será substituído por zero;
- Se $C_k = 0$, mantemos o mesmo algarismo de G_i, $\forall\ k < j$;
- Se $C_k = 1$, trocamos o algarismo de G_i, $\forall\ k < j$.

Considere que G_i' é a quantidade de palitos dessa fila após a jogada.

Note que seguindo as orientações acima obtemos a representação binária de G_i'. Transformando para base dez, descobrimos quantos palitos devem restar nessa fila depois da jogada. Portanto fica fácil descobrir quantos devemos retirar.

É fácil ver que G_i' irá tornar a chave C segura, visto que há apenas duas opções para escolha dos algarismos que ira compor a nova configuração de G_i'.

Perceba que, se a soma da coluna resultava em 1, ao trocar o algarismo da representação binária de G_i para zero ou um, a soma nessa coluna diminui ou aumenta em uma unidade, tornando-a par.

Assim, o jogador conhecedor da estratégia devolve sempre uma chave segura para o outro jogador.

Quanto ao adversário, ao retirar qualquer quantidade de palitos, mudará a configuração binária do número de palitos da fila escolhida, a qual tornará pelo menos um dos algarismos de C igual a um. Essa afirmação será justificada com o teorema de Bouton o qual falaremos na próxima seção.

Portanto, mantendo o controle, o jogador conhecedor da estratégia chegará à última chave par, que ocorre quando não houver palitos no jogo.

Para compreendermos o processo de construção da estratégia vitoriosa, vamos tomar um exemplo, apresentado no Quadro 3, e realizar os procedimentos indicados acima a fim de chegar ao controle do jogo e vencer a partida.

Observe que escolhendo a 1ª pilha, podemos alterar a primeira e a segunda coluna sem alterar as outras e obtermos uma posição segura. Essa escolha se deve ao fato de que, na chave do jogo, o algarismo 1 que se encontra mais à esquerda está na 1ª coluna.

Quadro 3 – Início de uma partida

Pilha de palitos	Número de palitos na base 10	Número de palitos na base 2	Soma NIM
1 2 3	13 6 7	1101 110 111	1101 0110 0111 $\overline{1100}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, devemos alterar adequadamente o número binário que contém o algarismo 1 nessa coluna. Vejamos:

- $13 = (1\ 1\ 0\ 1)_2 \quad \leftarrow \quad M_i = M_1 = 1101$;
- Comparando com a chave C = 1100 ;
- Chegamos à configuração $M_1' = 0001$. Alteramos apenas a 1ª e a 2ª coluna.

Assim temos:

Quadro 4 – Construção da posição segura

Pilha de palitos	Número de palitos na base 10	Número de palitos na base 2	Soma NIM
1 2 3	1 6 7	1 110 111	1 0110 0111 $\overline{0000}$

Fonte: elaborado pelo autor.

Agora a soma Nim nos deixa numa posição segura, pois obtivemos a chave 0000.

Observe que a partir dessa escolha, qualquer quantidade retirada de qualquer um dos três grupos, tornará pelo menos um dos algarismos de C ímpar. Favorecendo ao conhecedor da estratégia para novamente jogar e passar a vez para seu adversário com todos os algarismos da chave par. Isso garante que ao final passará a configuração do zero para seu adversário, ou seja, não haverá mais palitos na mesa. Na seção seguinte vamos mostrar que a teoria utilizada até aqui para conseguir a estratégia da vitória, funciona para qualquer quantidade de palitos e filas.

6.2.1 Teorema de Bouton

Com a finalidade de mostrar que a estratégia apresentada na seção 6.2 é válida para n filas, apresentamos o teorema de Bouton. Antes de enunciar esse teorema, vamos demonstrar dois lemas que nos farão compreender a matemática que há por trás do jogo e faz o jogador conhecedor da estratégia controlar e vencer o jogo.

Lema 1. Seja $P_1, P_2, \ldots P_n$ as quantidades de palitos com $P_i \neq 0$ e $i \in \{0, 1, \ldots n\}$, tal que $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n = 0$, então qualquer jogada nessa configuração, origina uma configuração onde a soma Nim é não nula.

Demonstração:

Temos $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n = 0$ com $(P_1, P_2, \ldots P_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Considere que após uma jogada na i-ésima fila, ficamos com a seguinte configuração: $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$. Note que $\forall\, j \neq i$, $P_j = M_j$ e $P_i \neq M_i$.

Assim, $P_1 = M_1$, $P_2 = M_2, \ldots, P_i \neq M_i, \ldots, P_n = M_n$.

Logo, $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_{n-1} \oplus M_n = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus M_i \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n$.

Como $P_i \oplus P_i = 0$, $\forall\; i \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$, temos que

$$P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus M_i \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n. = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus (M_i \oplus P_i \oplus P_i) \ldots \oplus P_n$$

$$= P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus (M_i \oplus P_i) \oplus P_i \ldots \oplus P_n$$

$$= 0 \oplus (M_i \oplus P_i) = M_i \oplus P_i \neq 0, \text{ visto que } M_i$$

tem pelo menos um algarismo alterado em relação à P_i.

Portanto $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \neq 0$.

Lema 2.

Seja $P_1, P_2, \ldots P_n$ as quantidades de palitos com $P_i \neq 0$ e $i \in \{0, 1, \ldots n\}$, tal que $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n \neq 0$, então existe, pelo menos, uma jogada nessa configuração, origina uma configuração onde a soma Nim é nula.

Demonstração:

Temos $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n \neq 0$ com $(P_1, P_2, \ldots P_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Considere $C = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n \neq 0$. Suponha que $C = (M_1\ M, \ldots, M_n)_2$. Tomemos $M_d = 1$ de modo que se existir $M_k = 1$, então $k > d$.

Logo, $C = (M_1 M_2 \ldots M_{d-1}\ 1\ M_{d+1} \ldots M_n)_2$, $0 < d < n$.

Agora tomemos uma fila P_j, tal que o d-ésimo dígito desse número na base binária seja 1.

Seja $P_j = (P_{j1}\ P_{j2} \ldots P_{j(d-1)}\ 1\ P_{j(d+1)} \ldots P_{jn})_2$

Esse P_{jd} existe, uma vez que M_d é a soma Nim dos dígitos que compõem a d-ésima coluna de Cada P_i.

Conservando P_{jt} temos $M_t = 0$, $0 < t < d$.

Como $P_{jd} = 1$, trocamos por 0, assim temos $M_d - 1 = 0$.

Note que trocando o algarismo P_{js} com $s > d$ tal que $M_s = 1$, teremos uma configuração nula. Vejamos:

Se $P_{js} = 1$, trocamos por $P'_{js} = 0$, então $M_s - 1 = 0$.

Se $P_{js} = 0$, trocamos por $P'_{js} = 1$, então $M_s + 1 = 0$.

Portanto, se $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n = C$ e $C \neq 0$, realizando uma jogada em uma pilha P_j, podemos chegar à soma Nim nula.

TEOREMA (Teorema de Bouton)

A configuração (P1, P2, ..., P_n) é uma posição vitoriosa se, e somente se, $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{n-1} \oplus P_n = 0$.

Demonstração:

A demonstração desse teorema segue dos lemas 1 e 2, do fato que qualquer posição pode ser considerada como inicial e que quando não houver mais palitos para retirar, a soma Nim será zero,

Como foi mostrado, o jogador conhecedor da estratégia vencedora poderá manter o controle das quantidades de palitos, de modo que sua configuração resulte em soma Nim soma Nim é nula e, portanto vencer o jogo.

6.2.2 Atividade para sala de aula

Vimos que nesta versão do jogo, para se ter o controle e realizar jogadas que levem à vitória, é preciso ter o conhecimento do sistema de numeração binária. Ou seja, para conseguir a estratégia máxima, o jogador será mais exigido. Apresentaremos nesta seção, duas propostas de trabalho com o Nim, sendo a primeira, usando a teoria de Bouton e a segunda um modo em que o professor evita usar o sistema de numeração binária. Assim, teremos mais uma opção de encontrar a estratégia máxima.

1ª proposta

Ao optar trabalhar com o sistema binário, o professor pode dar orientações e solicitar a turma que construa uma tabela com os números de 1 até 13 com sua representação no sistema binário. Assim, as filas não poderiam ter mais de 13 palitos. Ao fazer a tabela, os alunos estão trabalhando o conteúdo Divisão por dois. Com a tabela em mãos o trabalho para conseguir a estratégia máxima será facilitado.

A turma pode ser dividida em equipes ou duplas, e em seguida o professor solicitar que joguem um contra o outro com quantidades pequenas de palitos e até quatro filas. Neste momento a turma estará se familiarizando com o jogo. É importante que tentem descobrir uma forma de jogar de modo que as jogadas garantam a vitória. O professor pode reforçar a importância das anotações, pois ajuda nas tomadas de decisão nas próximas jogadas e ainda ajuda na construção da estratégia vitoriosa em uma nova partida.

Após algumas partidas, é hora de formalizar a estratégia vencedora, não deixando de observar as tentativas. Isso valoriza e incentiva o alunos à novas descobertas. Para isso, o professor realiza partidas contra os alunos, mostrando como conseguir tal estratégia. Basta pedir que observem em cada jogada, se a soma Nim é 0 ou 1, coluna por coluna. Note que essa tarefa não é simples, é preciso que o professor seja criativo e paciente. Para facilitar, indicamos o uso da tabela de números escritos na base binária, construída pelos alunos, e o registro das quantidades de palitos na base binária como mostrou os exemplos da seção anterior. Daí basta contar, a cada jogada, a quantidade de algarismos 1 que aparecem nas colunas, observando o seguinte:

- Se tiver uma quantidade par, colocamos 0.
- Se tiver uma quantidade ímpar, colocamos 1.

Deve-se pedir aos alunos que tentem deixar uma quantidade de palitos tal que em cada coluna tenha um quantidade par de algarismos 1. Dadas essas orientações, os alunos devem voltar a jogar, dessa vez o professor determina a quantidade de palitos e de filas. Assim fica mais fácil acompanhar as jogadas das equipes e fazer as devidas intervenções.

2ª PROPOSTA

Por ser muito complexo o método com números binários, apresentamos uma forma mais fácil de compreender e construir a estratégia da vitória. Para construir a estratégia vencedora, vamos utilizar apenas as potências de dois.

Assim, sugerimos que o professor inicie pedindo aos alunos que escrevam algumas potências de dois, em ordem crescente. Inicialmente propomos utilizar até 13 palitos em cada fila.

Em seguida, solicitar aos alunos que escrevam todos os números de 1 a 13 como soma das potências calculadas acima e registrar em uma tabela todas as somas obtidas.

Exemplo 6.2.2.1
$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$.

Exemplo 6.2.2.2
$13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$.

Com a tabela pronta, passamos para o momento de colocar os alunos para jogar, fazendo registro das jogadas. Inicialmente eles devem jogar algumas partidas sem interferência do professor, com o intuito de oferecer ao aluno momentos de interação e de descobertas. Neste momento o professor tem o papel de observador.

Após deixar os alunos jogarem algumas partidas, o professor deve verificar as estratégias que surgiram e daí, incentivar os alunos a tentar usar as potências para construir uma estratégia que os faça dominar e vencer o jogo.

Agora vamos tomar o exemplo da seção anterior que apresentava 13, 6 e 7 palitos para explicar esse método. Vamos iniciar organizando o jogo da seguinte forma:

- Escreva cada quantidade de palitos como soma de potência de dois;

Para isso, os alunos devem utilizar as anotações feitas anteriormente.

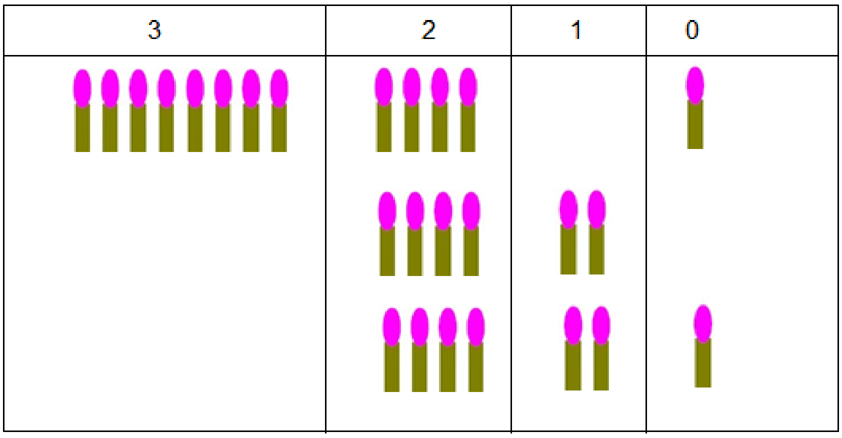
- Forme colunas com o número de palitos correspondente à potência de dois;

(ver figura 20)

- Tentar manter uma quantidade par de potências de dois em cada coluna.

Para compreendermos como jogar, vamos observar as figuras 21, 22 e notar como utilizar as informações acima no sentido de organizar o jogo e realizar a primeira jogada. Veremos que seguindo essas orientações, chegaremos à estratégia da vitória. Observe que esse método de conseguir a estratégia vencedora é semelhante à apresentada na primeira proposta, mas com uma maior facilidade de organizar os palitos e as jogadas.

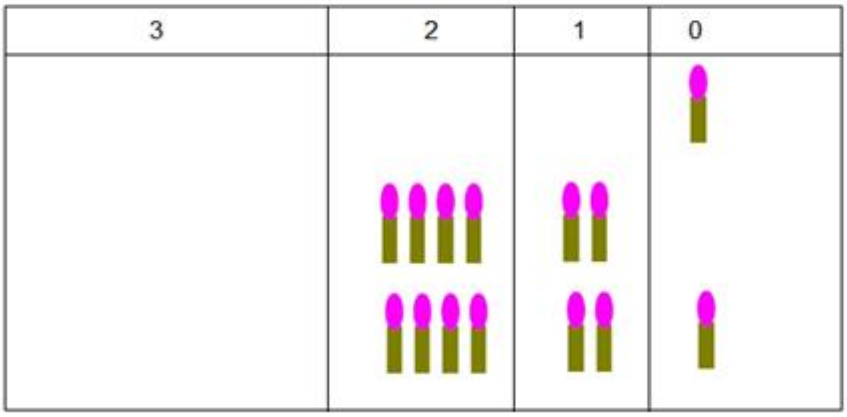
Figura 21 – Quantidades em potência de dois (a)



Fonte: elaborada pelo autor.

A figura 22 mostra que após a jogada, as colunas dois, um e zero ficaram com uma quantidade par de potências de dois.

Figura 22 – Quantidade em potências de dois (b)



Fonte: elaborada pelo autor.

Após a jogada anterior, o próximo jogador terá novamente a chance de retirar palitos de uma das filas e manter uma quantidade par de potências de dois. Mantendo esse padrão esse jogador irá controlar o jogo. Logo, é fácil perceber, que o adversário receberá o jogo para penúltima jogada com duas filas, que terá a mesma quantidade de palitos. Visto que o conhecedor da estratégia sempre passa uma quantidade par de potências de dois para o adversário. Assim, este jogador será o último a retirar palitos e será o ganhador.

Após a explicação de como chegar à estratégia vencedora, os alunos devem ser incentivados para jogar novamente, mas dessa vez utilizando esse método.

Sugerimos que as partidas tenham variações das quantidades de palitos dispostas inicialmente. Assim o aluno será exigido reorganizar os palitos como soma das potências de dois e elaborar novas jogadas.

Pode-se ainda aumentar o número de palitos, não ficando limitado a 13. Com isso os alunos serão desafiados a escrever novas somas de potências a fim de organizar novas jogadas e vencer o jogo.

Espera-se que os alunos tenham interesse de participar e assim vivencie um momento de aprendizagem diferenciada. Acreditamos que o interesse em descobrir se o domínio dessa estratégia leva sempre à vitória, desperte nos educandos interesse pela matemática, compreensão do Algoritmo de Euclides, cálculo de potências e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

7 CONSIDERAÇÔES FINAIS

Tomando como base os conceitos apresentados, bem como as referências, presentes nesse trabalho, percebemos a importância dos jogos e como podemos utilizá-los para ajudar a atingir o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Além disso, pode ajudar ao educando na compreensão de suas experiências na vida real.

Este trabalho de pesquisa permite-nos concluir que a utilização dos jogos no ensino de Matemática é uma prática que deveria ser comum por parte dos educadores matemáticos, pois esse recurso traz muitos benefícios, tanto para os alunos como para os professores.

O jogo é uma atividade que oferece ao educando, a possibilidade de desenvolver a formação de atitudes sociais, como respeito mútuo, responsabilidade e obediência de regras, pois durante essas atividades diferenciadas, o ambiente se torna favorável por estar em constante interação. Ensinar fazendo uso do lúdico, permite criar ambientes atraentes servindo como estímulo para o desenvolvimento integral dos alunos.

Esses benefícios podem ser notados quando falamos do papel pedagógico dos jogos, que devem ter objetivos claros e com o cuidado de apresentar uma metodologia que corresponda à faixa etária a qual os alunos estão. Isso permite que eles possam desenvolver um trabalho de exploração, aplicação de conceitos matemáticos e ainda torná-los capacitados para elaborar estratégias de resolução de problemas.

Quanto ao processo de ensino-aprendizagem, os jogos podem ser vistos como uma perspectiva para a resolução de problemas, tanto em relação ao ensino de Matemática como na solução de problemas do cotidiano, pois o contato com esse recurso leva os alunos a pensar e questionar, tornando-se assim indivíduos críticos e os leva a atingir um nível maior de desenvolvimento pessoal.

A motivação é outro ponto a ser colocado, fato que deve ser explorado para que os conhecimentos matemáticos presentes nos mesmos possam ser usados diante das diversas situações em sala de aula, estabelecendo assim uma relação entre as situações de jogos e os problemas propostos no cotidiano.

Salientamos que o acompanhamento é indispensável e isso deve ser feito por alguém que analise o jogo e o jogador para que o momento não se torne em uma mera brincadeira, deixando ser instrutiva. A intervenção pedagógica é fundamental na sistematização dos conceitos matemáticos trabalhados nas situações de jogo. Isso favorece o resgate das situações de aplicação dos conceitos já construídos pelos sujeitos.

Destacamos ainda que o professor não deva permitir que o educando use o jogo sem entender nem aprender nada e que o aluno se desvie do objetivo educacional.

Os Pentaminós e o Tangram nos permitem explorar conceitos matemáticos sobre geometria, como áreas e perímetros. Fração é um conteúdo que pode ser trabalhado com qualquer um desses recursos, como vimos no caso dos pentaminós, o estudo de razão de semelhança. Com eles podemos ainda trabalhar a concentração, a imaginação, a criatividade e a atenção, o que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

O jogo Nim é um jogo com regras simples que desenvolve o raciocínio lógico, concentração, cálculo e coordenação motora. O Nim é um jogo que pode ter muitas variações tornando-o mais dinâmico e desenvolve no educando a capacidade de efetuar cálculo mental, o qual nossos alunos apresentam tanta deficiência, como adição, Subtração, multiplicação, Divisão e Potenciação, bem como o conhecimento do sistema de numeração binária.

Diante dessa pesquisa, esperamos que os professores sintam-se motivados a utilizar os jogos com mais freqüência no ensino de Matemática, com a certeza de que este recurso pode contribuir para melhoria do ensino facilitando compreensão de alguns conceitos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 de janeiro de 2019.

BOUTON, C. L.. **Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. Math.** 3 (1902). Disponível em: < https://paradise.caltech.edu/ist4/lectures/Bouton1901.pdf>. Acesso em: 01 de abril de 2019.

DINIZ, Maria Ignez de S. V.; et al. A **Matemática das sete peças do tangram.** CAEM: São Paulo, 1995.

ESTRELA, R. A. P. **Jogos combinatórios e jogos de soma nula.** 112 f. Dissertação (mestrado em matemática) Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal . 2012.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 219 f.Tese (Doutorado em educação). Universidade de Campinas (UNICAMP). Campinas-SP. 2000.

________, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.** São Paulo: Paulus, 2004. 2ª Ed.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2ª edição. SBM, Rio de Janeiro, 2011.

GARDNER, Martin**. Mathematical Puzzles & Diversions.** New York: Simon and Shuster, 1959.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; MILANI, E. **Jogos de matemática do 6° ao 9° ano.** Cadernos do Mathema. Porto Alegre: Artmed, 2007. v.2.