



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

BERGSON DA SILVA MATIAS

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE
PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

FORTALEZA

2018

BERGSON DA SILVA MATIAS

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE
PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior,
D.Sc.

.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M38m Matias, Bergson da Silva.
Modelos constitutivos para análise dinâmica não linear de pórticos planos de concreto armado / Bergson da Silva Matias. – 2018.
135 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
Coorientação: Profa. Dra. Tereza Denyse Pereira de Araújo .
1. Implementação computacional. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Teoria da Plasticidade. 4. Mecânica do Dano Contínuo. I. Título.

CDD 624.1

BERGSON DA SILVA MATIAS

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE
PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior,
D.Sc.

Aprovada em: 24/08/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Tereza Denyse Pereira de Araújo (Coorientadora)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Evandro Parente Junior, pela excelente orientação e pelo exemplo de pesquisador e professor que, ineavelmente, foi e ainda é essencial para para a minha carreira profissional.

Aos professores Tereza Denyse Pereira de Araújo, Antônio Macário Cartaxo de Melo, João Batista Marques de Sousa Junior e Marcelo Silva Medeiros Júnior, pelas inúmeras contribuições ao longo de todo o período de Mestrado.

Ao professor Roque Luiz da Silva Pitangueira, pela dedicação na correção e nas contribuições do trabalho.

Aos meus pais, José Matias Sobrinho Filho e Maria Suzana Pereira da Silva Matias, pelo apoio contínuo e pela confiança que sempre tiveram.

Às minhas irmãs Gessica, Naianne, Brenna e Giselle, pelo carinho e união que foram indispensáveis para a conclusão de diversas etapas da minha vida.

À minha namorada, Lara, por sempre estar do meu lado, por ser o meu refúgio e por ser o grande amor da minha vida.

Aos meus colegas de Mestrado Jamires, Elias e Juliana, pelas enormes contribuições para a realização deste trabalho e pelos bons momentos durante os horários de almoço.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O estudo do comportamento das estruturas de concreto armado é objeto de grande importância para a Engenharia Civil. O avanço tecnológico e o avanço dos processos construtivos são responsáveis pela possibilidade de estruturas cada vez mais esbeltas. Junto a estes avanços, a preocupação com os efeitos não lineares físicos e geométricos e com os efeitos dinâmicos nestas estruturas também cresce. Visando contribuir para o estudo do comportamento de estruturas de concreto armado, este trabalho busca desenvolver ferramentas computacionais capazes de modelar de forma adequada os efeitos não lineares e dinâmicos em pórticos planos de concreto armado. Este trabalho tem foco na implementação de modelos constitutivos unidimensionais de concreto baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. Dois modelos constitutivos unidimensionais de concreto são implementados. O primeiro baseado no modelo clássico de dano isotrópico de Mazars e o segundo no modelo de plasticidade com dano acoplado desenvolvido por Lee e Fenves. A implementação do segundo modelo constitutivo é feita através do desenvolvimento de um algoritmo de retorno baseado no Método de Newton-Raphson. Além da contribuição na análise não linear física do concreto armado, também é implementado um algoritmo de integração numérica para análises dinâmicas não lineares, o α -Generalizado. Este algoritmo é capaz de reduzir problemas de instabilidade numérica (comuns em problemas não lineares) através do amortecimento numérico das frequências de vibração mais altas. Com esta característica, o α -Generalizado se torna mais atrativo quando comparado a métodos clássicos, como os Métodos de Newmark, para análises não lineares. Os modelos constitutivos e o algoritmo de integração numérica são implementados no programa acadêmico FAST (*Finite Element Analysis Tool*), desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). O FAST já contempla a análise não linear geométrica de elementos sob grandes deslocamentos através de uma formulação corrotacional, assim como modelos constitutivos não lineares elásticos de concreto e aço. Os exemplos de validação e de verificação mostraram que as ferramentas implementadas são capazes de capturar alguns dos principais efeitos não lineares presentes em estruturas de concreto armado, como a degradação da rigidez e o surgimento de deformações plásticas.

Palavras-chave: Implementação computacional. Método dos Elementos Finitos. Teoria da Plasticidade. Mecânica do Dano Contínuo.

ABSTRACT

The study of the behavior of reinforced concrete structures is of great importance for Civil Engineering. Technological and constructive methods advancements are responsible for the possibility of increasingly slender structures. With these advancements, concern about material and geometric nonlinear effects and about dynamic effects is growing. In order to contribute to the study of the behavior of reinforced concrete structures, this work aims to develop computational tools capable of correct modeling the nonlinear and dynamic effects in 2D reinforced concrete frames. This work focuses on the implementation of one-dimensional constitutive models based on the Theory of Plasticity and the Continuum Damage Mechanics. Two one-dimensional concrete constitutive models are implemented. The first model is based on the classical isotropic Mazars' damage model and the second one is based on the plastic-damage model developed by Lee and Fenves. The implementation of the second constitutive model is done through the development of a return mapping algorithm using a Newton-Raphson method. Furthermore the contribution in the nonlinear material behavior of reinforced concrete, a numerical integration algorithm for nonlinear dynamic analysis is also implemented, the Generalized- α method. This algorithm is able to reduce numerical instability problems (common in nonlinear problems) through the introduction of numerical damping in the higher vibration modes. With this property, the Generalized- α method becomes more attractive for nonlinear analysis than classical methods, as well the Newmark's family of methods. The constitutive models are implemented in the academic software FAST (*Finite Element Analysis Tool*), developed at Laboratory of Computational Mechanics and Visualization (LMCV) from the Federal University of Ceará (UFC). FAST already owns geometrically nonlinear analysis of finite elements under large displacements through a corotational formulation, as well nonlinear elastic constitutive models for concrete and reinforced steel. The validation and verification examples showed that the implemented tools are able to capture some of the main nonlinear effects present in reinforced concrete structures, such as the stiffness degradation and the appearance of plastic strains.

Keywords: Numerical implementation. Finite Element Method. Theory of Plasticity. Continuum Damage Mechanics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curvas carga-deslocamento: (a) sem ponto crítico, (b) com snap-through e (c) com snap-back	20
Figura 2 – Elemento de pórtico plano corrotacional	22
Figura 3 – Método das fatias	24
Figura 4 – Combinação proporcional	38
Figura 5 – Pêndulo simples	39
Figura 6 – Pêndulo simples usando o algoritmo de Newmark	39
Figura 7 – Pêndulo simples usando o algoritmo α -Generalizado	40
Figura 8 – Viga curva	41
Figura 9 – Snap-through presente no carregamento estático usando (a) controle de carga e (b) controle de deslocamento	42
Figura 10 – Aplicação da carga dinâmica	42
Figura 11 – Resposta dinâmica com o algoritmo de Newmark.....	43
Figura 12 – Resposta dinâmica com o algoritmo α -Generalizado	43
Figura 13 – Resposta dinâmica com o algoritmo α -Generalizado (10 elementos)	44
Figura 14 – Tensão-deformação para o aço	45
Figura 15 – Descarregamento após plastificação	46
Figura 16 – Curva de carregamento cíclico para o concreto na compressão	47
Figura 17 – Modelos constitutivos para o concreto na compressão	47
Figura 18 – Lei de fluxo associado.....	49
Figura 19 – Lei de fluxo não-associado.....	50
Figura 20 – Encruamento linear isotrópico	50
Figura 21 – Algoritmo de mapeamento de retorno.....	54
Figura 22 – Efeito Bauschinger	54
Figura 23 – Encruamento linear isotrópico e cinemático	56
Figura 24 – Processo de danificação de um material	58
Figura 25 – Modelo de dano bilinear	59
Figura 26 – (a) Barra homogênea, (b) Curva de tensão-deformação do material, (c) Barra subdividida em N elementos e (d) Curva de tensão-deformação resultante.....	63
Figura 27 – (a) Barra homogênea, (b) Curva de tensão-deformação do material, (c) Curva de tensão-deformação de fissuração e (d) Barra com região de localização	64
Figura 28 – Comportamento do modelo de Mazars em (a) tração e em (b) compressão	68

Figura 29 – Fechamento de fissuras	69
Figura 30 – Plano $\sigma_{33} = 0$, início do dano (linha tracejada) e superfície de falha (linha contínua), comparado com dados experimentais de Kupfer et al. (1973)	71
Figura 31 – Caminho de tensão-deformação mostrando o efeito unilateral.....	72
Figura 32 – Curvas tensão-deformação plástica (a) para tração e (b) para compressão	80
Figura 33 – Função de escoamento para o caso de tensão biaxial (σ_1 - σ_2 , $\sigma_3 = 0$).....	83
Figura 34 – Carregamento cíclico na compressão.....	87
Figura 35 – Efeito unilateral no Modelo de Lee e Fenves.....	88
Figura 36 – Deslocamentos prescritos – Exemplo 1	97
Figura 37 – Curva de carga-deslocamento – Exemplo 1	98
Figura 38 – Evolução das variáveis de dano – Exemplo 1	98
Figura 39 – Deformações prescritas – Exemplo 2.....	100
Figura 40 – Curva de tensão-deformação – Exemplo 2	100
Figura 41 – Malha – Exemplo 3	101
Figura 42 – Resultados para o carregamento cíclico de tração – Exemplo 3.....	102
Figura 43 – Resultados para o carregamento cíclico de compressão – Exemplo 3.....	102
Figura 44 – Barra – Exemplo 4	103
Figura 45 – Malhas utilizados para o Exemplo de 4 – (a) 2 elementos e (b) 4 elementos	103
Figura 46 – Resultados da barra tracionada para $l_t = 0,0826$ m – Exemplo 4.....	104
Figura 47 – Resultados da barra tracionada variando o l_t – Exemplo 4.....	104
Figura 48 – Malhas utilizados no <i>software</i> Abaqus.....	105
Figura 49 – Curvas tensão-deformação para o exemplo de Alfarah (2017).....	106
Figura 50 – Malhas utilizados para o Exemplo de Alfarah (2017) – (a) 1 elementos, (b) 4 elementos e (c) 8 elementos.....	107
Figura 51 – Resultados - Exemplo de Alfarah (2017).....	107
Figura 52 – Geometria e propriedades dos materiais – Pilar com carga excêntrica.....	108
Figura 53 – Curvas tensão-deformação para o pilar com carga excêntrica na (a) compressão e a (b) tração	109
Figura 54 – Curva de carga-deslocamento – Pilar com carga excêntrica.....	110
Figura 55 – Distribuição do dano para o Modelo μ em $w = 0,06$ m (a) D_c e (b) D_t	110
Figura 56 – Distribuição do dano para o Modelo de Lee e Fenves, $w = 0,06$ m (a) D_c e (b) D_t	110
Figura 57 – Distribuição de deformação plástica no Modelo de Lee e Fenves ($w = 0,06$ m)	111

Figura 58 – Geometria e propriedades dos materiais – Pórtico quadrado.....	112
Figura 59 – Variação dos parâmetros de dano do Modelo μ : (a) Variação de B_c com $A_c = 1,00$, (b) variação de A_c com $B_c = 800$, (c) variação de B_t com $A_t = 1,00$ e (d) variação de A_t com $B_t = 25000$	113
Figura 60 – Curvas tensão-deformação para o pórtico quadrado na (a) compressão e na (b) tração.....	114
Figura 61 – Curvas tensão-deformação para as vigas do pórtico quadrado na tração.....	114
Figura 62 – Curva carga-deslocamento – Pórtico quadrado.....	115
Figura 63 – Distribuição do dano para o Modelo μ em $u = 0,09$ m	115
Figura 64 – Distribuição do dano para o Modelo de Lee e Fenves em $u = 0,09$ m.....	116
Figura 65 – Viga biapoiada.....	116
Figura 66 – Resultado experimental para o carregamento completo	117
Figura 67 – Curvas tensão-deformação na compressão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves	118
Figura 68 – Curvas tensão-deformação na tração para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves	118
Figura 69 – Curvas de evolução do dano na compressão o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves e na tração para (c) Modelo μ e para o (d) Modelo de Lee e Fenves.....	119
Figura 70 – Deslocamentos – Viga sob carga cíclica	120
Figura 71 – Curvas carga-deslocamento no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves	120
Figura 72 – Evolução do dano D_t para o Modelo μ	121
Figura 73 – Evolução do dano D_t para o Modelo de Lee e Fenves.....	121
Figura 74 – Carga dinâmica harmônica $\omega = 6$ rad/s – Viga sob carga dinâmica.....	122
Figura 75 – Curvas carga-deslocamento ($\omega = 6,0$ rad/s) dinâmico no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves.....	123
Figura 76 – Carga dinâmica harmônica $\omega = 12,0$ rad/s – Viga sob carga dinâmica.....	123
Figura 77 – Curvas carga-deslocamento ($\omega = 12$ rad/s) dinâmico no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves.....	124
Figura 78 – Resposta dinâmica arregamentos com (a) $\omega = 6,0$ rad/s e (b) $\omega = 12,0$ rad/s.....	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dimensões normalizadas da viga curva	40
Tabela 2 – Propriedades mecânicas da viga curva	41
Tabela 3 – Parâmetros do Modelo μ – Exemplo 1	97
Tabela 4 – Características do material – Exemplo 2	99
Tabela 5 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Exemplo 2.....	99
Tabela 6 – Características do material – Exemplo 3	101
Tabela 7 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Exemplo 3.....	102
Tabela 8 – Características do material – Exemplo de Alfarah (2017)	106
Tabela 9 – Parâmetros do Modelo μ – Pilar com carga excêntrica	108
Tabela 10 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Pilar com carga excêntrica.....	109
Tabela 11 – Parâmetros do Modelo μ – Pilares do pórtico quadrado	113
Tabela 12 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Pilares do pórtico quadrado	113
Tabela 13 – Parâmetros do Modelo μ – Viga sob carga cíclica.....	117
Tabela 14 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Viga sob carga cíclica	117

LISTA DE SÍMBOLOS

\ddot{u}	Aceleração nodal
A	Área da seção transversal do elemento
A_0	Área inicial
α	Constante de proporcionalidade de Rayleigh para a massa
β	Constante de proporcionalidade de Rayleigh para a rigidez
a_0, \dots, a_7	Constantes de integração de Newmark
a_0, \dots, a_{10}	Constantes de integração do Método α -Generalizado
ε_e	Deformação elástica
ε_p	Deformação plástica
ε	Deformação total
ρ	Densidade do elemento
u	Deslocamento nodal
K	Energia cinética
E	Energia mecânica total
τ	Erro de truncamento local
N	Esforço normal
\bar{N}	Esforço normal na seção do elemento
ω	Frequência natural de vibração
N	Funções de forma
Δt	Incremento de tempo
t	Instante de tempo
J	Jacobiano
m	Massa do elemento
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento global
\mathbf{A}	Matriz de amplificação
\mathbf{M}	Matriz de massa global
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez efetiva
Φ	Matriz modal
$\omega_{m\acute{a}x}$	Máxima frequência de vibração

E	Módulo de elasticidade
K	Módulo de rigidez no regime plástico
M	Momento fletor
\bar{M}_2	Momento fletor no nó final do elemento interno
\bar{M}_1	Momento fletor no nó inicial do elemento interno
I	Momento rotacional de inércia do elemento
λ	Multiplicador plástico
γ	Parâmetro de estabilidade de Newmark
α_{HHT}	Parâmetro de estabilidade do Método HHT- α
α_{WBZ}	Parâmetro de estabilidade do Método WBZ- α
α_f	Parâmetro de estabilidade do Método α -Generalizado para forças internas
α_m	Parâmetro de estabilidade do Método α -Generalizado para forças inerciais
β	Parâmetro de precisão de Newmark
δ	Parâmetro de taxa de saturação
G	Potencial de fluxo plástico
ρ	Raio espectral
ξ	Razão de amortecimento
F	Superfície de escoamento
σ_Y	Tensão de escoamento
σ_U	Tensão de saturação
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva
ω	Variável de continuidade
α	Variável interna de encruamento
\dot{u}	Velocidade nodal
\mathbf{X}	Vetor
$\ddot{\mathbf{u}}(\bullet)$	Vetor de acelerações nodais global
$\mathbf{u}(\bullet)$	Vetor de deslocamentos nodais global
$\hat{\mathbf{f}}$	Vetor de forças efetivo
$\mathbf{g}(\bullet)$	Vetor de forças internas global

$\bar{\mathbf{g}}(\bullet)$	Vetor de forças internas local
$\dot{\mathbf{u}}(\bullet)$	Vetor de velocidades nodais global
\mathbf{r}	Vetor que relaciona a variação do comprimento com a variação dos deslocamentos
\mathbf{z}	Vetor que relaciona a variação do comprimento com a variação da inclinação
β	Ângulo de inclinação atualizado do elemento corrotacional
L	Comprimento do elemento
λ	Fator de carga
$\delta\mathbf{u}$	Incremento de deslocamentos
\mathbf{C}_T	Matriz constitutiva tangente do material
\mathbf{K}_E	Matriz de rigidez do material
\mathbf{K}_G	Matriz de rigidez geométrica
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente global
$\bar{\mathbf{K}}_T$	Matriz de rigidez tangente local
\mathbf{T}	Matriz de transformação
\mathbf{B}_L	Matriz de transformação deformação-deslocamento
\mathbf{B}_{NL}	Matriz de transformação deformação-deslocamento não linear
\mathbf{S}	Matriz dependente das tensões de Piola-Kirchhoff II
$\mathbf{q}(\bullet)$	Vetor de cargas de referência
$\mathbf{f}(\bullet)$	Vetor de cargas externas global
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos nodais
$\mathbf{r}(\bullet)$	Vetor de resíduos
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões
D	Variável de dano
H	Módulo de encruamento cinemático
q	Tensão de retorno (<i>back stress</i>)
s	Expoente de dano de Lemaitre
S	Denominador de dano de Lemaitre

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Organização do texto.....	17
2	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR.....	19
2.1	Equação de equilíbrio estático	19
2.2	Solução da equação através do Método de Newton-Raphson	19
2.3	Formulação corrotacional.....	21
2.4	Não linearidade física	23
3	ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR.....	25
3.1	Precisão e estabilidade	26
3.2	Algoritmos de Integração Direta.....	28
3.2.1	<i>Método de Newmark</i>	28
3.2.2	<i>Método α-Generalizado</i>	31
3.2.3	<i>Matrizes de massa e de amortecimento</i>	35
3.3	Exemplos de validação	38
3.3.1	<i>Pêndulo simples</i>	39
3.3.2	<i>Viga curva</i>	40
4	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO ARMADO	45
4.1	Modelos constitutivos elastoplásticos.....	48
4.1.1	<i>Algoritmo de mapeamento de retorno</i>	51
4.2	Mecânica do Dano Contínuo	57
4.3	Modelo de dano de Lemaitre	60
4.4	Localização de deformação e sensibilidade de malha	62
5	MODELO DE DANO DE MAZARS.....	67
5.1	Efeito unilateral e Modelo μ	68
5.2	Redução para o caso unidimensional	71
5.3	Implementação do Modelo μ para o caso unidimensional.....	74
6	MODELO DE DANO DE LEE E FENVES	78
6.1	Relação constitutiva e evolução do dano	79
6.2	Superfície de escoamento e lei de fluxo não associado	82
6.3	Obtenção dos parâmetros do modelo	84
6.4	Redução para o caso unidimensional	86

6.5	Implementação do Modelo de Lee e Fenves para o caso unidimensional	88
6.5.1	<i>Cálculo do corretor plástico</i>	91
6.5.2	<i>Cálculo do módulo tangente consistente</i>	92
7	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	97
7.1	Exemplo 1 - Comportamento uniaxial do Modelo μ	97
7.2	Exemplo 2 - Comportamento uniaxial do Modelo de Lee e Fenves.....	99
7.3	Exemplo 3 – Comportamento cíclico do Modelo de Lee e Fenves	101
7.4	Exemplo 4 – Sensibilidade de malha no Modelo de Lee e Fenves.....	103
7.5	Exemplo 5 - Pilar com carga excêntrica	107
7.6	Exemplo 6 - Pórtico quadrado	111
7.7	Exemplo 7 - Viga sob carga cíclica.....	116
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	125
	REFERÊNCIAS	128
	ANEXO A – ALGORITMOS DOS MODELOS CONSTITUTIVOS	133

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é objeto de grande interesse da sociedade. Pesquisadores, engenheiros e governantes investem cada vez mais na tecnologia deste material. Este interesse está ligado aos grandes avanços tecnológicos na área de construção civil, mais precisamente nas áreas de materiais e de estruturas. À medida que a tecnologia avança, estruturas cada vez mais esbeltas passam a ser viáveis economicamente e, conseqüentemente, surgem novos desafios para a Análise Estrutural.

A simulação computacional do comportamento de estruturas de concreto armado ganha cada vez mais espaço neste contexto. Formulações empíricas, baseadas em observações experimentais adotando-se hipóteses simplificadoras dão espaço a formulações mais robustas e mais próximas da realidade do concreto armado. Este aumento na complexidade das simulações se dá em diversos eixos, sendo os mais comuns a não linearidade do material e a interação entre o concreto e o aço.

A utilização de teorias matemáticas consolidadas para a formulação de modelos constitutivos de concreto e de aço será explorada neste trabalho. A não linearidade geométrica é apresentada primeiramente de forma mais sucinta e, em seguida, será dada maior ênfase à não linearidade física. Estes dois tipos de não linearidade serão inseridos nos contextos estático e dinâmico.

A estratégia utilizada para o desenvolvimento do trabalho se baseia, primordialmente, na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. O objetivo é apresentar modelos constitutivos capazes de simular aspectos fenomenológicos do concreto armado sobre grandes deslocamentos, cargas cíclicas e efeitos dinâmicos. Para tal, se discorre sobre os métodos numéricos que podem ajudar no entendimento destes modelos relativamente mais complexos.

Primeiramente, aborda-se a análise não linear estática por ser uma estratégia de grande uso em problemas estruturais, mesmo em casos de caráter dinâmico. Isto é explicado pelo baixo custo computacional deste tipo de análise. O uso de coeficientes de impacto para a consideração dos efeitos dinâmicos em termos de deslocamentos e esforços internos é uma prática comum na Engenharia Estrutural.

A consideração dos efeitos inerciais e de efeitos de amortecimento passa a ser necessária quando se trata de ações mais complexas ou mais duradouras, como os terremotos ou o colapso progressivo. Em ambos os casos citados, as vibrações presentes na estrutura têm

grande influência no seu comportamento. Sendo assim, análises estáticas não são capazes de representar com fidelidade a distribuição de esforços e os deslocamentos na estrutura.

Apesar dos melhores resultados obtidos através de análises dinâmicas, a incidência de problemas numéricos aumenta. Estes problemas envolvem, principalmente, o surgimento de instabilidade numérica ou a falta de precisão na resposta. Os clássicos algoritmos de Integração Direta desenvolvidos por Newmark no final dos anos 1950 são exemplos de soluções numéricas que podem apresentar problemas de instabilidade em análises não lineares. Mesmo com tais problemas, estes algoritmos ainda são utilizados atualmente na maioria dos programas comerciais de Análise Estrutural.

Diversos métodos de Integração Direta foram desenvolvidos mais recentemente com o intuito de solucionar os problemas de instabilidade apresentados pelos métodos de Newmark. Como exemplo destes métodos, destacam-se os métodos tipo α . Nestes métodos, a estabilidade numérica da solução é obtida através da imposição de um amortecimento numérico. O trabalho apresentado aqui aborda este aspecto e apresenta uma metodologia para a sua mitigação através da implementação do método α -Generalizado.

Tendo sido bem definidas as metodologias de análise global (estática ou dinâmica), a não linearidade física em estruturas de concreto armado passa a ser o objetivo deste trabalho. Sabe-se que a utilização de modelos constitutivos não lineares de concreto armado possui diversas vertentes. Desde modelos baseados em observações experimentais, modelos empíricos até modelos mais rebuscados que envolvem matemática em níveis mais complexos. A escolha destes modelos tem impacto importante no custo computacional das análises numéricas.

Em problemas estruturais onde se tem um grande número de graus de liberdade e se deseja obter respostas incrementais, estáticas ou dinâmicas, o uso de modelos constitutivos extremamente sofisticados pode ser um impedimento. Por outro lado, modelos extremamente simples são incapazes de simular os principais efeitos de fenômenos como o colapso progressivo, por exemplo.

Uma metodologia que garante resultados satisfatórios e que vem sendo utilizada nas últimas décadas é a simplificação de modelos tridimensionais para uma abordagem unidimensional. Modelos de concreto que consideram fenômenos como microfissuração, plasticidade ou histerese, se reduzidos a um caso unidimensional, perdem algumas características importantes. Entretanto, há um ganho em termos de sofisticação quando compara-se estes a modelos fornecidos por normas, por exemplo.

Neste sentido, a Mecânica do Dano Contínuo aliada a Teoria da Plasticidade fornece uma gama de possibilidades a serem exploradas. Desta forma, fenômenos como a danificação

e o surgimento de deformações permanentes podem ser simulados através de simplificações de modelos tridimensionais com o intuito de viabilizar a análise não linear de grandes estruturas.

Como contribuição para o estudo de estruturas de concreto armado em regime não linear, este trabalho tem como objetivo geral a implementação de modelos constitutivos de plasticidade e dano.

Como objetivos específicos têm-se a implementação de modelos constitutivos de aço e de concreto e a implementação de um algoritmo de integração direta capaz de mitigar problemas de instabilidade numérica em análises dinâmicas não lineares.

1.1 Organização do texto

O Capítulo 2 apresenta uma breve discussão a respeito da análise estática não linear de estruturas. Neste capítulo são discutidos alguns aspectos de soluções incrementais iterativas de problemas estruturais não lineares. É apresentado o Método de Newton-Raphson como solução para estes problemas. Neste capítulo também é apresentado o elemento finito corrotacional que será adotado nas análises.

O Capítulo 3 apresenta uma breve discussão a respeito da análise dinâmica não linear de estruturas. A solução de problemas estruturais sob a consideração de forças inerciais e de amortecimento é apresentada. Também são discutidos alguns métodos de integração utilizados para a solução dos problemas estruturais dinâmicos. Dentre estes métodos, o método de integração implícito α -generalizado é apresentado juntamente com as suas vantagens em relação aos métodos clássicos.

O Capítulo 4 apresenta uma revisão dos modelos constitutivos para o concreto armado utilizados neste trabalho. Discute-se a importância da utilização de modelos constitutivos na análise não linear de estruturas de concreto armado. Também são discutidos aspectos relacionados ao problema de sensibilidade de malha e localização de deformação.

O Capítulo 5 apresenta os detalhes do modelo constitutivo de Mazars (1986). É mostrada a formulação do clássico modelo 3D e do modelo 1D e é apresentada uma versão mais atual do modelo 1D. Neste capítulo também é apresentada a implementação do modelo unidimensional.

O Capítulo 6 apresenta os detalhes do modelo constitutivo de Lee e Fenves (1998). São conceituados os principais parâmetros do modelo original 3D proposto pelos autores, assim como é mostrada toda a sua formulação. Neste capítulo também é feita uma redução do modelo

3D para o caso 1D e é apresentado um algoritmo de mapeamento de retorno e a implementação do modelo.

O Capítulo 7 apresenta algumas aplicações numéricas realizadas com os modelos implementados. Neste capítulo são analisados problemas estruturais com o auxílio dos modelos implementados nos capítulos anteriores em análises estáticas e dinâmicas.

O Capítulo 8 apresenta as considerações finais sobre o trabalho e os comentários a respeito dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Também são dadas sugestões para trabalhos futuros que possam complementar o atual trabalho.

2 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

2.1 Equação de equilíbrio estático

Do ponto de vista do Método dos Elementos Finitos, os problemas estruturais podem ser descritos através da equação de equilíbrio dinâmico em um instante de tempo $t + \Delta t$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) - \mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (1)$$

onde $\mathbf{f}^{t+\Delta t}$ é o vetor de forças externas e \mathbf{g} é o vetor de forças internas da estrutura com n graus de liberdade. Para a análise de forças gravitacionais, $\mathbf{f}^{t+\Delta t}$ independe dos deslocamentos da estrutura. O vetor \mathbf{g} depende dos deslocamentos da estrutura.

A Equação (1), dita em equilíbrio estático, deve ser interpretada como uma equação incremental no instante $t + \Delta t$. Neste caso, o tempo $t + \Delta t$ é na verdade um tempo fictício, pois não ocorre de fato. Esta equação pode ser resolvida a partir da definição do vetor de resíduos

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) - \mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Através da linearização da Equação (1), obtém-se os deslocamentos no instante $t + \Delta t$. Sendo o conjunto de equações algébricas da Equação (1) não linear, o procedimento de solução deve ocorrer de forma iterativa. O método mais usado para a solução deste problema é o método de Newton-Raphson (CRISFIELD, 1991).

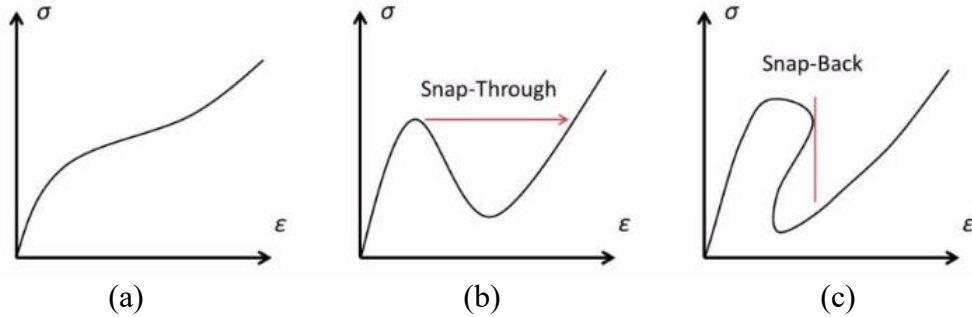
2.2 Solução da equação através do Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson consiste na linearização da Equação (1) e na sua solução por meio de incrementos de carga ou de deslocamento de forma iterativa até que seja atingida a convergência, que se dá quadraticamente neste caso. Se forem dados incrementos de carga conhecidos, o método é conhecido como controle de carga. Este controle de carga pode ser proporcional ($\mathbf{f}^{t+\Delta t} = \lambda \mathbf{q}^{t+\Delta t}$, onde λ é um fator de carga e $\mathbf{q}^{t+\Delta t}$ é uma carga de referência) ou não proporcional ($\mathbf{f}^{t+\Delta t}$ sendo uma função predefinida).

O método do controle de carga é aplicável para estruturas que não apresentam um ponto limite (Figura 1a), onde o carregamento deve decrescer para que haja equilíbrio. Em casos como esse, são usuais os métodos de Newton-Raphson com restrição: método de controle de deslocamento e método de comprimento de arco. Nestes métodos é possível obter caminhos

de carga mais complexos, geralmente com *snap-through* ou *snap-back* (CRISFIELD, 1991; BORST *et al.*, 2012).

Figura 1 – Curvas carga-deslocamento: (a) sem ponto crítico, (b) com *snap-through* e (c) com *snap-back*



Fonte: Melo (2015).

A linearização da Equação (1) resulta em um sistema linear de n equações e $n+1$ incógnitas, que pode ser resolvido com a imposição de $\delta\lambda$ (controle de carga) ou de $\delta\mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t}$ (métodos de Newton-Raphson com restrição):

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t} - \delta\lambda \mathbf{q}_{i+1}^{t+\Delta t} = -\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} \quad (3)$$

onde o índice i indica a iteração anterior. Aqui, também é introduzido o conceito de matriz de rigidez tangente, dada por:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} \quad (4)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T é influenciada pelo grau de não linearidade do problema, tanto geometricamente quando fisicamente. Para demonstrar isto, basta verificar que o vetor de cargas internas $\mathbf{g}_i^{t+\Delta t}$ depende das tensões generalizadas $\boldsymbol{\sigma}$, as quais são relacionadas pelas leis constitutivas do material com as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, que por sua vez dependem dos deslocamentos \mathbf{u} .

Para melhor descrever o processo de atualização das variáveis da Equação (1), toma-se como base a descrição Lagrangiana do movimento dos corpos (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000). Nesta descrição, empregam-se coordenadas de pontos materiais da estrutura em relação a um estado indeformado (formulação Lagrangiana Total) ou a um estado deformado atual (formulação Lagrangiana Atualizada).

Na formulação Lagrangiana Total, são usadas deformações de Green e tensões de Piola-Kirchhoff II, válidas para pequenas deformações e pequenas rotações (BATHE, 1996). O vetor de cargas internas \mathbf{g} e a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T são dados, respectivamente por:

$$\mathbf{g} = \int_{V_0} \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G = \int_{V_0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C}_T \mathbf{B}_L dV + \int_{V_0} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} dV \quad (6)$$

onde \mathbf{B}_L é a matriz de transformação deformação-deslocamento linear, \mathbf{B}_{NL} é a matriz transformação deformação-deslocamento não linear, \mathbf{C}_T é a matriz constitutiva tangente do material, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões de Piola-Kirchhoff II e \mathbf{S} é uma matriz dependente das tensões Piola-Kirchhoff II (BATHE, 1996; BORST *et al.*, 2012). As duas parcelas da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_G são, respectivamente, a matriz de rigidez do material e a matriz de rigidez geométrica.

2.3 Formulação corrotacional

A formulação Lagrangiana Total é usual para a análise de estruturas na prática da Engenharia Civil. Isto se dá, pois, a hipótese de pequenas deformações é aceitável tendo em vista que o aço e, principalmente, o concreto têm limites de deformações baixos. Entretanto, para a análise de fenômenos com grandes deslocamentos, as grandes rotações passam a ser consideravelmente mais importantes também e é necessário um tipo de formulação que contemple isto (OLIVEIRA *et al.*, 2013).

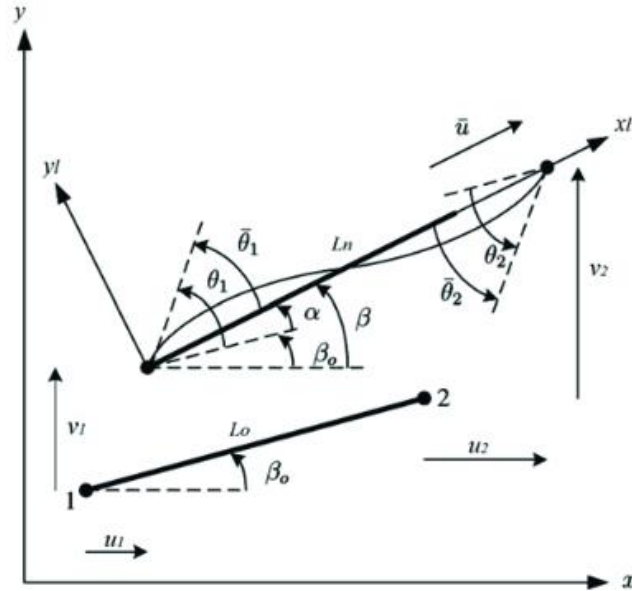
Sendo assim, este trabalho adota a formulação corrotacional. Nesta formulação, adotam-se dois sistemas de coordenadas que objetivam desacoplar as deformações dos deslocamentos de corpo rígido no elemento (CRISFIELD, 1991). Assim, cria-se um elemento local ou interno que é, posteriormente, rotacionado para formar o elemento global ou externo. A Figura 2 apresenta o modelo de um elemento de pórtico corrotacional.

Uma das vantagens desta formulação é que a consideração da não linearidade física se torna bastante simples (PARENTE *et al.*, 2014). Na formulação corrotacional, as deformações são definidas no elemento local, de forma que ficam independentes dos deslocamentos de corpo rígido.

Para um melhor entendimento da formulação corrotacional, a discussão apresentada aqui se baseia no elemento de pórtico plano. O elemento local ou interno é definido

independentemente da transformação local-global, de modo que há liberdade no seu tratamento, sendo possíveis a adoção de diferentes medidas de deformação (PARENTE *et al.*, 2014).

Figura 2 – Elemento de pórtico plano corrotacional



Fonte: Parente *et al.* (2014)

A ligação entre os dois sistemas é feita através da matriz de transformação \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ -\sin \beta/L & \cos \beta/L & 1 & \sin \beta/L & -\cos \beta/L & 0 \\ -\sin \beta/L & \cos \beta/L & 0 & \sin \beta/L & -\cos \beta/L & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde β é o ângulo de inclinação atualizado do elemento. Após serem definidos o vetor de forças internas $\bar{\mathbf{g}}$ e a matriz de rigidez tangente $\bar{\mathbf{K}}_T$ do elemento interno, determinam-se o vetor de forças internas global e a matriz de rigidez tangente global como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_T \mathbf{T} + \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L} + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \quad (9)$$

onde \bar{N} é o esforço normal na seção do elemento, \bar{M}_1 e \bar{M}_2 são, respectivamente, os momentos nos nós inicial e final do elemento interno, \mathbf{r} e \mathbf{z} são vetores que relacionam a variação do comprimento do elemento com a variação dos deslocamentos e com a variação da inclinação, respectivamente. O primeiro termo do lado direito da Equação (9) representa a matriz de rigidez elástica global e os dois últimos termos representam a matriz de rigidez geométrica.

A determinação de $\bar{\mathbf{g}}$ e $\bar{\mathbf{K}}_T$ pode ser feita da forma clássica empregando medidas de deformações de engenharia ou de Green, por exemplo (PARENTE *et al.*, 2014). Neste trabalho, é adotada a medida de deformação de Green para o elemento interno. O cálculo das tensões generalizadas $\bar{\mathbf{g}}$ é feito a partir de integração na seção transversal, de forma que:

$$\bar{\mathbf{g}} = [N \quad M]^T = \left[\int_A \sigma dA \quad - \int_A \sigma y dA \right]^T \quad (10)$$

onde N e M são, respectivamente, o esforço normal e o momento fletor.

2.4 Não linearidade física

Ambas as formulações apresentadas anteriormente necessitam da atualização das tensões a cada incremento de carga (vide Equações (5) e (6)). Por meio de relações constitutivas apropriadas é possível descrever o comportamento das tensões para dadas deformações, que por sua vez dependem dos deslocamentos apresentados pela estrutura, ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad (11)$$

A matriz constitutiva tangente do material, apresentada na Equação (6) é definida como:

$$\mathbf{C}_T = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (12)$$

Considerando o caso onde o material tem comportamento linear elástico, a Equação (11) é a própria Lei de Hooke e a matriz constitutiva tangente do material é sempre constante e, para o caso de pórticos planos é igual a:

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia da seção transversal e S é o momento estático da seção transversal.

Este comportamento linear físico se restringe a condições bastante específicas de carregamentos. Para o caso do concreto armado sob flexão, por exemplo, as leis constitutivas não são lineares e nem elásticas como a Equação (13) apresenta.

Fenômenos como microfissuração, fluência e plastificação fazem com que a relação apresentada na Equação (12) seja além de não linear, dependente do histórico de deformações da estrutura (CRISFIELD, 1991). Em outras palavras, para um mesmo estado de tensões, vários

estados de deformações são possíveis dependendo de como o carregamento foi aplicado. Isto é um tema relevante para casos onde a estrutura sofre carregamentos cíclicos ou quando os efeitos dinâmicos devem ser considerados.

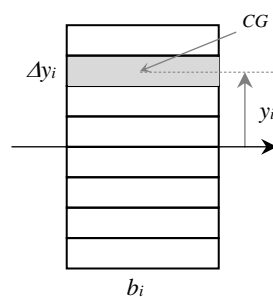
A consideração da não linearidade física exige que os esforços internos (σ) e a matriz constitutiva tangente (C_T) sejam calculados através da integração na seção transversal, como apresentado na Equação (10). Neste trabalho, a integração na seção é feita pelo método das fatias (SPACONE; FILIPPOU; TAUCER, 1996). Este método consiste na discretização da seção do elemento em camadas consideradas homogêneas e na avaliação das tensões e deformações no centroide de cada camada. Assim, cada camada tem a sua própria lei constitutiva unidimensional. A integração dos esforços na seção é então calculada como o somatório das contribuições de cada camada considerando a hipótese de seções planas.

A Figura 3 mostra a seção retangular dividida em fatias com espessura Δy_i e largura b_i distantes de y_i do centroide. A integração da Equação (10) pode ser substituída por um somatório finito:

$$\bar{\mathbf{g}} = [N \quad M]^T = \left[\sum_i \sigma_i b_i \Delta y_i \quad - \sum_i y_i \sigma_i b_i \Delta y_i \right]^T \quad (14)$$

Onde σ_i é a tensão calculada no centroide da camada i . O mesmo procedimento é aplicado ao cálculo da matriz constitutiva tangente (C_T).

Figura 3 – Método das fatias



Fonte: Elaborada pelo autor.

3 ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR

Estruturas submetidas a excitações dinâmicas são comuns na Engenharia Civil. Um exemplo disto são as vibrações de solo ou abalos sísmicos que ocorrem em muitas regiões do planeta. Especialmente em estruturas de concreto armado, os efeitos gerados por terremotos envolvem, além da presença de forças inerciais e de amortecimento, a deterioração do material por danificação.

Utilizando o Método dos Elementos Finitos, pode-se descrever o equilíbrio dinâmico como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) = \mathbf{f}^{t+\Delta t} \quad (15)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ é o vetor de acelerações nodais, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ é o vetor das velocidades nodais. As matrizes \mathbf{M} e \mathbf{C} podem ser consideradas dependentes (LE; BATTINI; HJIAJ, 2011) ou, na maioria dos casos, independentes dos deslocamentos. Para o caso linear, a simplificação $\mathbf{g}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) = \mathbf{K}\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ pode ser feita.

Neste caso, o instante de tempo $t + \Delta t$ tem significado real de tempo, diferentemente do caso estático mostrado anteriormente na Equação (1). A resolução da Equação (15) é obtida através de uma estratégia incremental-iterativa semelhante ao caso estático.

Além dos aspectos citados, a resolução da Equação (15) implica na obtenção dos deslocamentos \mathbf{u} , das velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ e das acelerações $\ddot{\mathbf{u}}$ em cada instante de tempo $t + \Delta t$. Para tal, Equação (15) pode ser resolvida através da utilização do Método de Integração Direta. Este método consiste na aproximação das leis de deslocamentos, velocidades e acelerações em cada espaçamento de tempo Δt . O Método de Integração Direta é viabilizado a partir do desenvolvimento de algoritmos, os quais podem ser explícitos ou implícitos (SORIANO, 2014).

Os algoritmos ditos explícitos são aqueles em que as variáveis de um instante atual $t + \Delta t$ são determinadas a partir do histórico das variáveis nos instantes passados. Já os algoritmos implícitos também dependem das informações das variáveis no instante atual, sendo o equilíbrio obtido no instante de tempo atualizado.

O uso de algoritmos explícitos não é tão comum em problemas estruturais. Este aspecto se deve a uma característica importante observada nas análises dinâmicas: a estabilidade e a precisão da resposta são dependentes de incrementos de tempo muito pequenos.

Assim, o uso de algoritmos explícitos, além de aumentar o tempo de análise, pode contaminar a resposta com ruídos (COOK *et al.*, 2002). Geralmente, os algoritmos explícitos são utilizados em problemas envolvendo propagação de ondas ou problemas altamente não lineares, como contato e impacto, onde se exige uma resposta para um curto período.

Neste trabalho, serão utilizados algoritmos de Integração Direta implícitos. Esta escolha se dá pela natureza dos problemas dinâmicos a serem analisados aqui.

3.1 Precisão e estabilidade

Dois aspectos importantes devem ser considerados na análise dinâmica utilizando o Método de Integração Direta: precisão e estabilidade. Estas duas características são dependentes dos incrementos de tempo e das aproximações feitas nas equações de equilíbrio.

A precisão diz respeito à acurácia da resposta dada pelo algoritmo de Integração Numérica Direta, ou seja, quanto mais preciso este algoritmo for, mais próximo da resposta real ele vai estar. Um algoritmo é considerado mais preciso do que outro se, para um mesmo incremento de tempo, as respostas obtidas são mais próximas da resposta analítica.

Já a estabilidade tem relação com o comportamento do algoritmo e o acúmulo de erros ao longo dos incrementos de tempo. Um algoritmo pode ser preciso para dado incremento de tempo e mesmo assim apresentar instabilidade numérica. Segundo Bathe (1996), os algoritmos explícitos são condicionalmente estáveis para um incremento de tempo máximo, relacionado à máxima frequência de vibração $\omega_{\text{máx}}$ do problema através da relação:

$$\Delta t < \frac{2}{\omega_{\text{máx}}} \quad (16)$$

Isto inviabiliza o uso destes algoritmos em problemas onde as frequências mais baixas são dominantes, como problemas estruturais, já que o intervalo de tempo máximo seria muito menor do que o necessário para uma boa precisão na integração destes modos.

Os algoritmos implícitos podem ser condicionalmente estáveis, ou incondicionalmente instáveis, em alguns problemas lineares. Entretanto, em problemas não lineares não há garantia da estabilidade (SORIANO, 2014).

A precisão e a estabilidade dos algoritmos de Integração Numérica Direta estão ligadas à matriz de amplificação \mathbf{A} através da transformação da solução no tempo t para o tempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{A}\mathbf{X}^t \quad (17)$$

onde $\mathbf{X}^t = \{u^t, \Delta t \dot{u}^t, \Delta t^2 \ddot{u}^t\}^T$.

Segundo Chung e Hulbert (1993), para problemas lineares, o estudo da precisão e da estabilidade de um algoritmo pode ser feito utilizando a equação de equilíbrio dinâmico transiente para um grau de liberdade

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (18)$$

onde ξ e ω são, respectivamente, a razão de amortecimento e a frequência de vibração.

A precisão τ é determinada através do cálculo do erro de truncamento local:

$$\tau = \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^3 (-1)^i A_i u^{t+\Delta t-i} \quad (19)$$

Onde $A_0 = 1$, A_1 é o traço de \mathbf{A} , A_2 é a soma dos principais menores de \mathbf{A} e A_3 é o determinante de \mathbf{A} . Desta forma, um algoritmo é dito de n-ésima ordem de precisão desde que $\tau = O(\Delta t^n)$.

A estabilidade é verificada através do raio espectral ρ definido como o máximo valor em módulo dos autovalores λ_i da matriz de amplificação \mathbf{A} :

$$\rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (20)$$

Para problema lineares, um algoritmo será incondicionalmente estável se $\rho \leq 1$. Esta condição, entretanto, não é suficiente para problemas não lineares (CHUNG; HULBERT, 1993). O raio espectral também é uma medida de dissipação numérica. Quanto menor for o valor de ρ , maior será a sua dissipação para uma determinada frequência. A dissipação numérica pode ser entendida como um amortecimento algorítmico ou numérico apresentado como solução à instabilidade do algoritmo.

Em problemas estruturais, é desejável que as frequências mais baixas não apresentem muita dissipação numérica. Ao mesmo tempo, as frequências mais altas devem apresentar dissipação numérica para que a instabilidade gerada possa ser reduzida. O ideal então seria um raio espectral próximo ao valor unitário para as frequências mais baixas e que fosse diminuindo suavemente com o crescimento das frequências.

Uma condição suficiente para a garantia de estabilidade é dada a partir da conservação de energia ou do decaimento da energia com o incremento de tempo (KUHLE; CRISFIELD, 1999). Esta condição pode ser expressa por:

$$E^{t+\Delta t} \leq E^t \rightarrow \Delta E = E^{t+\Delta t} - E^t \leq 0 \quad (21)$$

onde E' é a energia mecânica total do sistema no instante de tempo t . A condição expressa anteriormente é satisfeita automaticamente para algoritmos implícitos em problemas lineares.

3.2 Algoritmos de Integração Direta

Os algoritmos de Integração Direta podem ser divididos em três grupos com relação a condição de conservação de energia apresentada na Equação (21): dissipação numérica, conservação forçada de energia e conservação algorítmica de energia. O primeiro grupo garante o decaimento da energia para problemas lineares. Entretanto, para problemas não lineares, não há esta garantia (CRISFIELD *et al.*, 1996). Os principais algoritmos que utilizam a dissipação numérica para a melhoria da estabilidade foram propostos por Newmark (1959), Hilber, Hughes e Taylor. (1977) e Chung e Hulbert (1993).

O segundo grupo, fundado por Hughes, Caughey e Liu (1978), garante a estabilidade através de uma imposição da conservação de energia. O método proposto por Hughes, Caughey e Liu (1978) é uma extensão da Regra do Trapézio com a imposição de conservação de energia através do uso de multiplicadores de Lagrange. Este grupo de algoritmos, apesar de conservar perfeitamente a energia, pode apresentar falha no final das iterações de equilíbrio de Newton-Raphson (KUHL; CRISFIELD, 1999).

O terceiro grupo é atualmente o mais popular entre os métodos de integração numérica por conservar totalmente tanto a energia quanto o momento linear e momento angular, além de possuir precisão de segunda ordem. O método que deu origem a este grupo foi proposto por Simo e Tarnow (1992) através de uma modificação da Regra do Ponto Médio (KUHL; CRISFIELD, 1999).

Neste trabalho, será adotado um algoritmo do primeiro grupo, conhecido como método α -Generalizado. Este algoritmo foi proposto por Chung e Hulbert (1993) e engloba outros métodos como o de Newmark (1959) e Hilber, Hughes e Taylor. (1977) e o de Wood, Bossak e Zienkiewicz (1981).

3.2.1 Método de Newmark

Um algoritmo implícito clássico de Integração Numérica Direta foi proposto por Newmark (1959). No trabalho, o autor define as velocidades e os deslocamentos do sistema a partir das aproximações

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + \left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (22)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \dot{\mathbf{u}}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \beta \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (23)$$

onde os parâmetros γ e β são estabelecidos para controlar a estabilidade numérica e a precisão da solução. Desta forma, Newmark (1959) criou uma família de métodos conhecidos como Métodos β ou Métodos de Newmark. O caso mais simples é obtido assumindo $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$. Para este caso, se obtém uma aceleração constante. Para o caso linear, o método é incondicionalmente estável.

Para a solução do problema, define-se a Equação (15) como o resíduo

$$\mathbf{r}^{t+\Delta t} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) - \mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (24)$$

Utilizando as aproximações de Newmark e rearranjando (22) e (23), obtém-se a aceleração com apenas uma incógnita, os deslocamentos atualizados $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}^t \quad (25)$$

Substituindo (25) em (23), obtém-se a velocidade com apenas uma incógnita, os deslocamentos atualizados $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$:

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{u}}^t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^t \quad (26)$$

Definem-se então as constantes

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \quad a_5 = \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \quad (27)$$

Em cada instante de tempo, a equação de movimento não linear é resolvida através do Método de Newton-Raphson. Linearizando a Equação (24), obtém-se

$$\mathbf{r}_{i+1}^{t+\Delta t} = \mathbf{r}_i^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{r}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (28)$$

ou

$$\hat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} \quad (29)$$

onde $\hat{\mathbf{K}}$ é chamada de matriz de rigidez efetiva.

Sendo os deslocamentos atualizados definidos como

$$\mathbf{u}_{i+1}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}_i^{t+\Delta t} + \delta \mathbf{u} \quad (30)$$

a matriz de rigidez efetiva é dada por

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} + \frac{\partial \mathbf{g}_i^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} \quad (31)$$

Utilizando as Equações (25), (26) e (27) obtemos

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} + \mathbf{K}_i^{t+\Delta t} \quad (32)$$

onde $\mathbf{K}_i^{t+\Delta t}$ é a matriz de rigidez tangente obtida na iteração i .

Da Equação (28), tem-se que

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_i^{t+\Delta t} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^t + (\mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_i^{t+\Delta t} + \mathbf{g}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{t+\Delta t}) \quad (33)$$

Substituindo (32) e (33) em (28) e reescrevendo (28), tem-se

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{M} [a_0 (\mathbf{u}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t] + \mathbf{C} [a_1 (\mathbf{u}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) - a_4 \dot{\mathbf{u}}^t - a_5 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^t] + (\mathbf{g}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{t+\Delta t}) \quad (34)$$

Definindo-se

$$\mathbf{u}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t = \Delta \mathbf{u}_i \quad (35)$$

e substituindo (35) em (34), obtém-se o vetor de resíduos

$$\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{M} (a_0 \Delta \mathbf{u}_i - a_2 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t) + \mathbf{C} (a_1 \Delta \mathbf{u}_i - a_4 \dot{\mathbf{u}}^t - a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t) + (\mathbf{g}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{t+\Delta t}) \quad (36)$$

Uma vez que a convergência é atingida, os vetores de aceleração e velocidade são dados por

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_0 \Delta \mathbf{u}_{i+1} - a_1 \dot{\mathbf{u}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t \quad (37)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_7 \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \quad (38)$$

onde as novas constantes em (37) e (38) são dadas por

$$a_6 = (1 - \gamma) \Delta t \quad (39)$$

$$a_7 = \gamma \Delta t \quad (40)$$

Finalmente, a Equação (29) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \quad (41)$$

onde

$$\hat{\mathbf{f}} = -\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} = \mathbf{M} (-a_0 \Delta \mathbf{u}_i + a_2 \dot{\mathbf{u}}^t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}^t) + \mathbf{C} (-a_1 \Delta \mathbf{u}_i + a_4 \dot{\mathbf{u}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}^t) + (\mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{g}_i^{t+\Delta t}) \quad (42)$$

$\hat{\mathbf{f}}$ é conhecido como o vetor de forças efetivo.

O Quadro 1 a seguir apresenta resumidamente um fluxograma do Método de Newmark dentro da análise dinâmica não linear.

3.2.2 Método α -Generalizado

No caso dos Métodos de Newmark, o decaimento da energia imposta pela dissipação dos modos de frequência mais altos é capaz de reduzir os problemas de estabilidade numérica. Entretanto, os modos de frequência mais baixos também são indesejavelmente afetados por este amortecimento numérico (CHUNG; HUBERT, 1993).

Além do fato de a precisão dos Métodos de Newmark ser de primeira ordem, a dissipação dos modos mais baixos causa imprecisão na solução de problemas estruturais, já que para estes problemas os modos mais baixos são dominantes. Diversos autores propuseram esquemas de integração direta que solucionassem ou ao menos amenizassem problemas de estabilidade numérica através da dissipação dos modos mais altos com pouca dissipação dos modos mais baixos (ERLICHER; BONVENTURA; BURSI, 2002).

Alguns destes métodos também tinham a vantagem de possuírem uma precisão de segunda ordem. Os principais métodos que compõem esta família são o Método θ (WILSON, 1968), o HHT- α (HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977), o WBZ- α (WOOD; BOSSAK; ZIENKIEWICZ, 1981), o Método ρ (BAZZI; ANDERHEGGEN, 1982) e o Método θ_l (HOFF; PAHL, 1988).

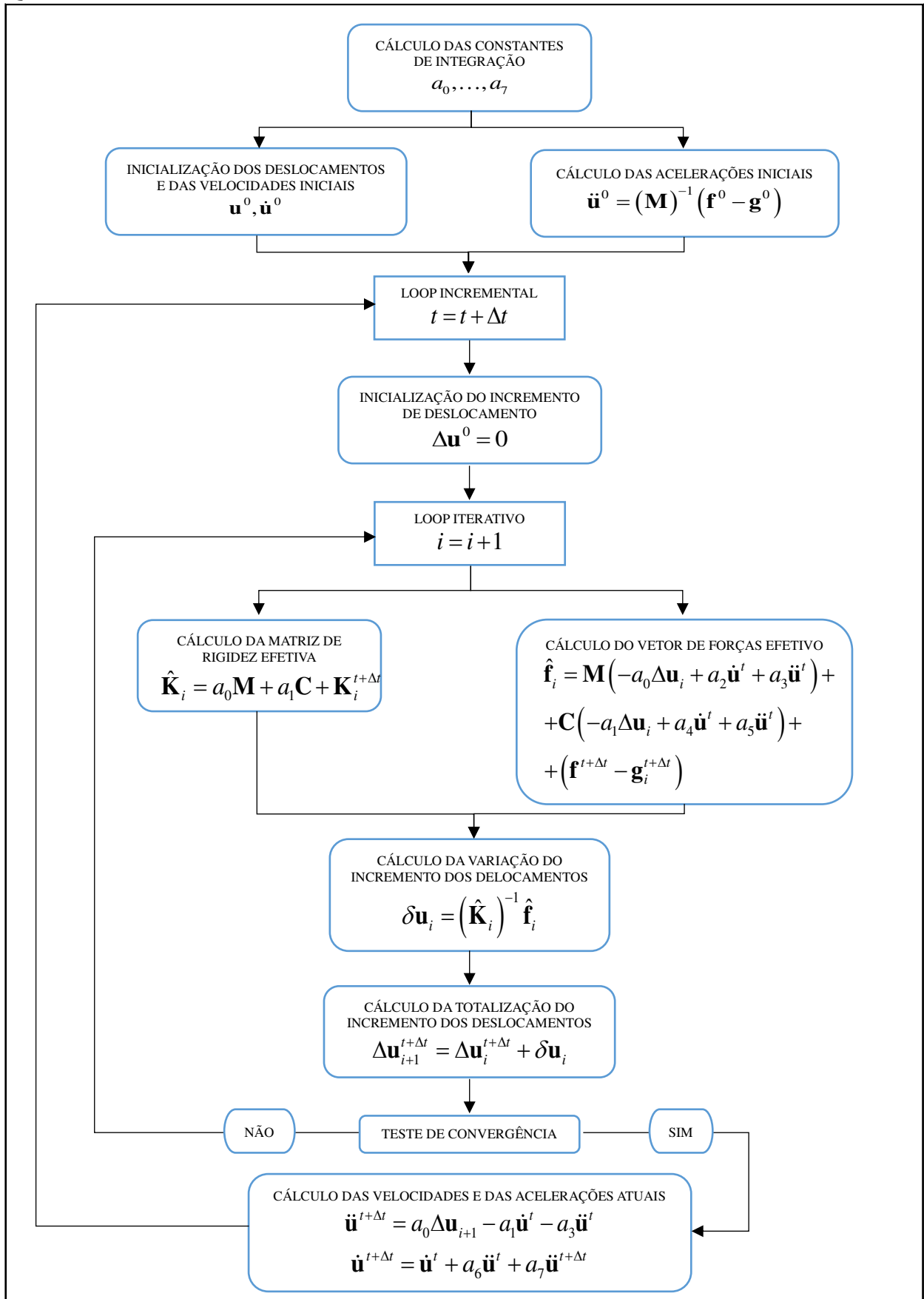
Particularmente, os métodos do tipo α têm destaque pela semelhança com os Métodos de Newmark. A ideia é acrescentar um parâmetro a mais aos algoritmos de Newmark (além de β e γ) para controlar as suas propriedades de amortecimento (WOOD; BOSSAK; ZIENKIEWICZ, 1981). Dentre os algoritmos do tipo α mais conhecidos estão o HHT- α , proposto por Hilber, Hughes e Taylor (1977), e o WBZ- α , proposto por Wood, Bossak e Zienkiewicz (1981).

O HHT- α é obtido através do balanceamento da equação de equilíbrio dinâmico por meio de um parâmetro α_{HHT} . O algoritmo original, proposto por Hilber, Hughes e Taylor (1977), não considerava o amortecimento natural. Portanto, a Equação (15) toma a forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha_{HHT})\mathbf{g}^{t+\Delta t} - \alpha_{HHT}\mathbf{g}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} \quad (43)$$

Hilber, Hughes e Taylor (1977) mostram em seu trabalho que a estabilidade numérica do algoritmo é garantida incondicionalmente para o intervalo $0 \leq -\alpha_{HHT} \leq 1/2$ e $\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4$ em problemas lineares. Além disto, os autores comentam que a dissipação dos modos mais altos torna o algoritmo mais preciso do que os de Newmark e θ . O principal

Quadro 1 – Método de Newmark



Fonte: Elaborado pelo autor.

ganho com o advento dos algoritmos do tipo α foi a possibilidade de tornar a dissipação controlável.

Baseados na ideia de Hilber, Hughes e Taylor (1997), Wood, Bossak e Zienkiewicz (1981) desenvolveram uma outra família de algoritmos do tipo α aplicando um balanceamento nas forças inerciais ao invés das forças internas. Com a adição de um parâmetro α_{WBZ} , a Equação (15) toma a forma

$$(1 - \alpha_{WBZ}) \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \alpha_{WBZ} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} \quad (44)$$

Segundo Erlicher, Bonaventura e Bursi (2002), o WBZ- α é incondicionalmente estável para problemas lineares se foram satisfeitas as condições $\alpha_{WBZ} \leq 0$ e $\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4$.

Chung e Hubert (1993) propuseram uma família de algoritmos do tipo α , a qual era balanceada tanto nas forças inerciais quanto nas forças internas e externas, o Método α -Generalizado. Desta forma, a Equação (15) toma a forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t - \alpha_m} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t - \alpha_f} + \mathbf{g}^{t+\Delta t - \alpha_f} = \mathbf{f}^{t+\Delta t - \alpha_f} \quad (45)$$

Nesta equação, o equilíbrio é imposto em um determinado instante de tempo fictício anterior ao instante final $t + \Delta t$. A partir desta consideração, deseja-se obter os conjuntos de parâmetros α_m e α_f que garantem características desejáveis de dissipação numérica. A nova equação de equilíbrio balanceada é uma combinação dos métodos HHT- α e WBZ- α .

Chung e Hubert (1993) mostram que o algoritmo α -Generalizado é incondicionalmente estável para problemas lineares desde que as condições $0 \leq \alpha_f \leq 1/2$ e $\beta \geq 1/4 + 1/2(\alpha_f - \alpha_m)$. Além disto, o algoritmo é de segunda ordem de precisão inclusive para problemas não lineares se $\gamma = 1/2 - \alpha_m + \alpha_f$ (ERLICHER; BONVENTURA; BURSI, 2002).

As aproximações de velocidades e de deslocamentos são as mesmas adotadas pelo Método de Newmark nas Equações (22) e (23). Os termos da Equação (45) são definidos como

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t - \alpha_m} = (1 - \alpha_m) \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \alpha_m \ddot{\mathbf{u}}^t \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t - \alpha_f} = (1 - \alpha_f) \dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \alpha_f \dot{\mathbf{u}}^t \quad (47)$$

$$\mathbf{f}^{t+\Delta t - \alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{f}^{t+\Delta t} + \alpha_f \mathbf{f}^t \quad (48)$$

Originalmente, o vetor de forças internas $\mathbf{g}^{t+\Delta t-\alpha_f}$ foi proposto como sendo calculado para o tempo fictício $t + \Delta t - \alpha_f$, ou seja

$$\mathbf{g}^{t+\Delta t-\alpha_f} = \mathbf{g}\left((1-\alpha_f)\mathbf{u}^{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{u}^t\right) \quad (49)$$

Outra maneira de obter $\mathbf{g}^{t+\Delta t-\alpha_f}$ é através de uma combinação linear entre os vetores de força interna nos instantes inicial e final (ERLICHER; BONVENTURA; BURSI, 2002), assim como é feito para o vetor de cargas externas:

$$\mathbf{g}^{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{g}^{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{g}^t \quad (50)$$

A solução da Equação (45) é obtida da mesma forma de antes. Definindo a Equação (49) como o resíduo, tem-se

$$\mathbf{r}^{t+\Delta t\alpha} = (1-\alpha_m)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^t + (1-\alpha_f)\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}^{t+\Delta t} - \mathbf{f}^{t+\Delta t}\right) + \alpha_f\left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{g}^t - \mathbf{f}^t\right) = \mathbf{0} \quad (51)$$

onde $\mathbf{r}^{t+\Delta t\alpha}$ representa o resíduo no instante de tempo de equilíbrio da equação balanceada.

Definindo as constantes do método como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1-\alpha_m-2\beta}{\beta}, \\ a_4 &= \frac{(1-\alpha_f)\gamma-\beta}{\beta}, \quad a_5 = \frac{(1-\alpha_f)(\gamma-2\beta)}{2\beta}\Delta t \end{aligned} \quad (52)$$

e linearizando a Equação (51), obtém-se

$$\mathbf{r}_{i+1}^{t+\Delta t\alpha} = \mathbf{r}_i^{t+\Delta t\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i^{t+\Delta t\alpha}}{\partial \mathbf{u}_i^{t+\Delta t}} \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (53)$$

Utilizando a Equação (30), obtém-se a matriz de rigidez efetiva e o vetor de cargas externas efetivo

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + (1-\alpha_f)\mathbf{K}_i^{t+\Delta t} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} = -\mathbf{r}_i^{t+\Delta t} &= \mathbf{M}\left(-a_0\Delta\mathbf{u}_i + a_2\dot{\mathbf{u}}^t + a_3\ddot{\mathbf{u}}^t\right) + \mathbf{C}\left(-a_1\Delta\mathbf{u}_i + a_4\dot{\mathbf{u}}^t + a_5\ddot{\mathbf{u}}^t\right) + (1-\alpha_f)\left(\mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{g}_i^{t+\Delta t}\right) \\ &+ \alpha_f\left(\mathbf{f}^t - \mathbf{g}^t\right) \end{aligned} \quad (55)$$

De onde, a Equação (53) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{K}}\delta\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \quad (56)$$

Uma vez que a convergência é atingida, os vetores de aceleração e velocidade são dados por

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = a_6\Delta\mathbf{u}_{i+1} - a_7\dot{\mathbf{u}}^t - a_8\ddot{\mathbf{u}}^t \quad (57)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + a_9 \ddot{\mathbf{u}}^t + a_{10} \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \quad (58)$$

onde as novas constantes em (57) e (58) são dadas por

$$a_6 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \quad a_7 = \frac{1}{\beta \Delta t}, \quad a_8 = \frac{1}{2\beta} - 1, \quad a_9 = (1 - \gamma) \Delta t, \quad a_{10} = \gamma \Delta t \quad (59)$$

O Quadro 2 apresenta resumidamente um fluxograma do Método α -Generalizado dentro da análise não linear dinâmica. As principais diferenças com relação ao algoritmo de Newmark apresentado no Quadro 1 estão no cálculo da matriz de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}$ e do vetor de forças efetivo $\hat{\mathbf{f}}$. Além disto, notar que as constantes de integração calculadas no início do algoritmo também são diferentes. O procedimento incremental-iterativo para ambos os métodos é semelhante.

3.2.3 Matrizes de massa e de amortecimento

A matriz de massa \mathbf{M} para o elemento de viga no caso 2D pode ser desenvolvida a partir da energia cinética do elemento:

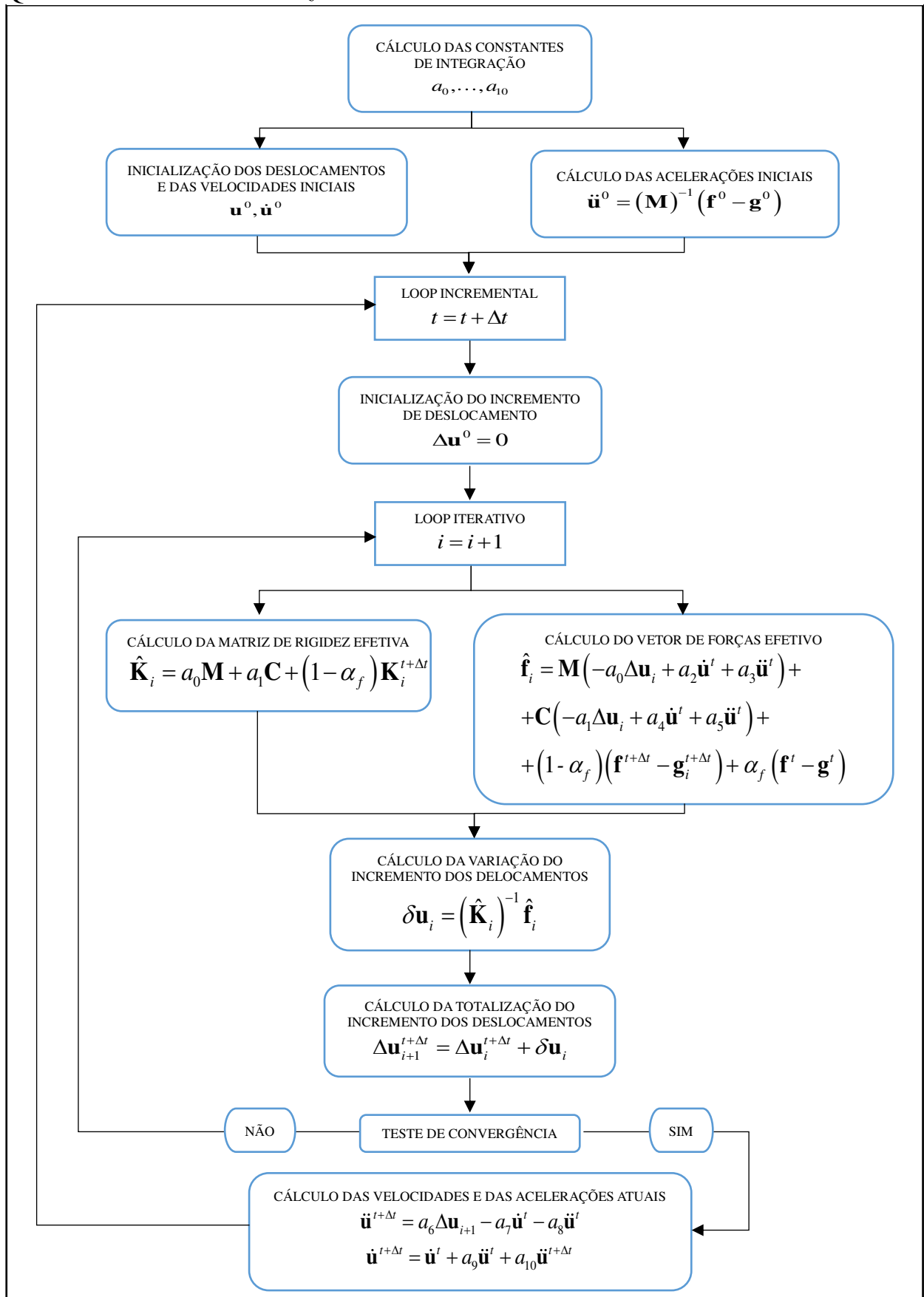
$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{u}(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I [\dot{\theta}(x)]^2 dx \quad (60)$$

onde ρ é a densidade do elemento de comprimento L , A é a área da seção transversal do elemento, I é o momento rotacional de inércia da seção, $u(x)$ é o deslocamento do centro de massa do elemento e $\dot{\theta}(x)$ é a rotação do centro de massa do elemento.

Considerando a energia cinética devida à rotação pequena, o segundo termo da Equação (60) pode ser desprezado. A energia cinética rotacional pode ser considerada desprezível caso não ocorra grandes rotações comparadas aos deslocamentos transversais. Parametrizando o domínio do elemento, adotando as clássicas funções de forma cúbicas para os graus de liberdade transversais e funções de forma lineares para os graus axiais, a matriz de massa \mathbf{M} é obtida como

$$\mathbf{M} = \rho A \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} J dr = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

onde $J = L/2$ e m é a massa do elemento (RAO, 2008).

Quadro 2 – Método α -Generalizado

Fonte: Elaborado pelo autor.

A matriz de massa apresentada na Equação (61) é conhecida na literatura como matriz de massa consistente. Outras formulações de matrizes de massa podem ser encontradas, como a matriz de massa concentrada (RAO, 2008) e a matriz de Timoshenko (COOK *et al.*, 2002). No caso da primeira, assume-se que toda a massa está concentrada nos nós, gerando-se, portanto, uma matriz diagonal. No caso da matriz de Timoshenko, admite-se que a segunda parcela do lado direito da Equação (60) não pode ser desprezada e, utilizando o modelo de viga de Timoshenko, obtém-se uma matriz de massa correspondente.

Em todos os três casos anteriores, se considera que a matriz de massa é independente do tempo. Ou seja, a mesma matriz de massa é adotada para todos os incrementos de tempo do problema. Le, Battini e Hjiatj (2011) formularam uma matriz de massa baseada em uma formulação corrotacional 2D e, portanto, não linear. Esta matriz apresenta maior tempo de processamento, entretanto permite a redução do número de elementos. Neste trabalho, foi adotada a matriz de massa apresentada na Equação (61).

A matriz de amortecimento \mathbf{C} pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa. Esta formulação é conhecida como matriz de amortecimento proporcional de Rayleigh (RAO, 2008).

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_T \quad (62)$$

onde α e β são as constantes de proporcionalidade de Raleigh. A condição de proporcionalidade parte do princípio de que, assim como as matrizes de rigidez e de massa, a matriz de amortecimento também pode ser diagonalizável. Isto é possível quando a estrutura é de um mesmo material, sendo a dissipação de energia uniforme (RAO, 2008).

A obtenção das constantes de proporcionalidade segue do estabelecimento de dois modos naturais de vibração ω_i e de suas respectivas razões de amortecimento ξ_i (Figura 4) e da condição de ortonormalização da matriz \mathbf{C} :

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \Phi^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_T) \Phi = \alpha (\Phi^T \mathbf{M} \Phi) + \beta (\Phi^T \mathbf{K}_T \Phi) \quad (63)$$

onde Φ é a matriz modal.

Para o caso de um modo de vibração, a Equação (63) fornece

$$\varphi_i^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_T) \varphi_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (64)$$

Pela condição de ortonormalidade, o i -ésimo termo da matriz de amortecimento diagonalizada é dado por

$$\varphi_i^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_T) \varphi_i = 2\omega_i \xi_i \quad (65)$$

Igualando as Equações (64) e (65), chega-se à relação

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (66)$$

A partir da especificação das razões de amortecimento ξ_i e de seus respectivos modos de vibração ω_i é possível determinar as constantes de proporcionalidade resolvendo o sistema

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (67)$$

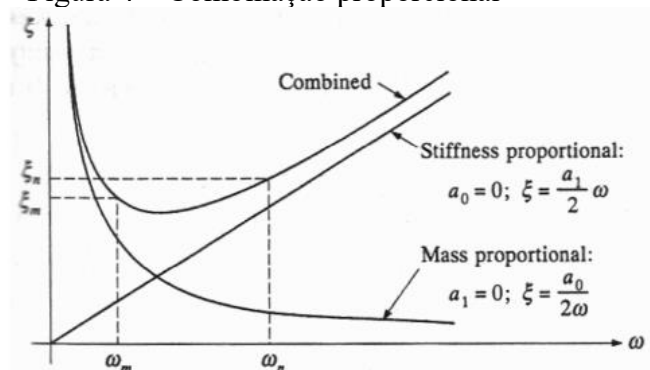
Resolvendo o sistema da Equação (67), tem-se

$$\alpha = 2 \frac{\omega_i^2 \omega_j \xi_j - \omega_i \omega_j^2 \xi_i}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad (68)$$

$$\beta = 2 \frac{\omega_i \xi_i - \omega_j \xi_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad (69)$$

É comum a adoção da mesma razão de proporcionalidade ξ para os diferentes modos de vibração.

Figura 4 – Combinação proporcional



Fonte: Rao (2008).

3.3 Exemplos de validação

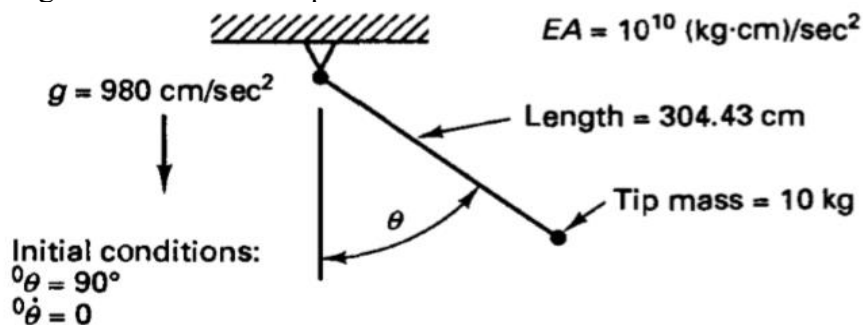
A seguir são apresentados alguns exemplos de validação dos algoritmos discutidos neste capítulo.

3.3.1 Pêndulo simples

O estudo da estabilidade numérica em problemas dinâmicos não lineares é comumente apresentado através de um exemplo simples com um único grau de liberdade. O pêndulo é formado por uma barra de rigidez EA e comprimento l rotulado em uma extremidade e livre na outra. À extremidade livre se adiciona uma massa pontual m . O pêndulo é então submetido às condições iniciais mostradas na Figura 5 (ângulo de rotação inicial é igual a 90°) e liberado sob a ação da gravidade.

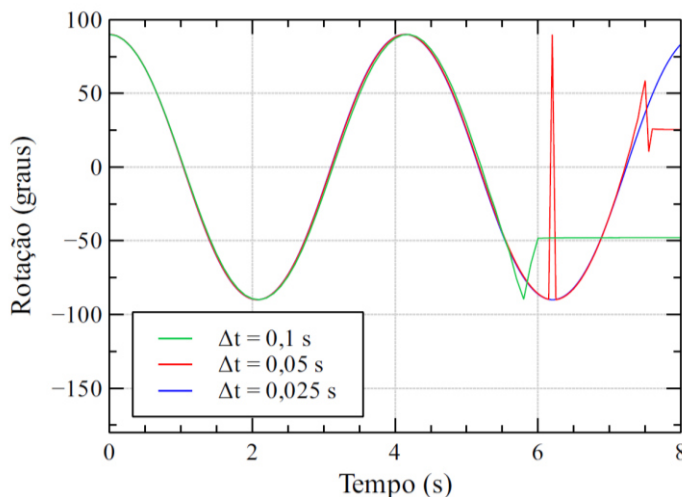
O resultado do pêndulo simples utilizando o algoritmo de Newmark é mostrado na Figura 6. Os resultados para os incrementos de tempo de 0,100 s e 0,050 s apresentam instabilidade numérica a partir de 5,5 s. Para que esta instabilidade desapareça, um incremento de tempo de 0,025 s foi utilizado. Nota-se que, mesmo apresentando instabilidade, as respostas convergem nos períodos iniciais.

Figura 5 – Pêndulo simples



Fonte: Kuhl e Crisfield (1999).

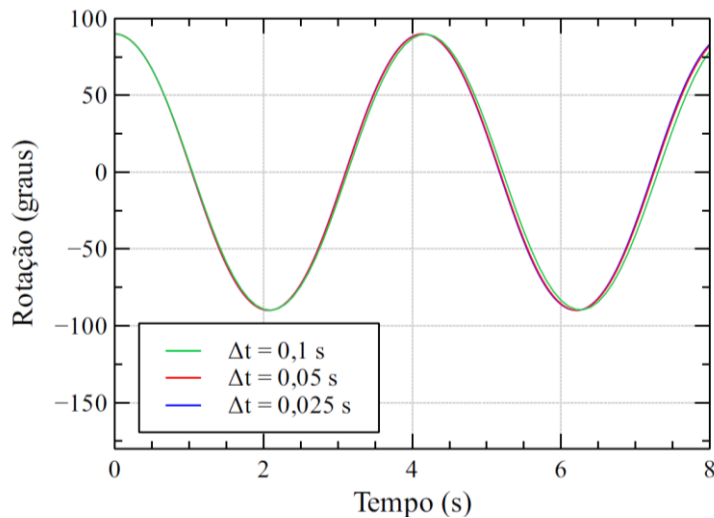
Figura 6 – Pêndulo simples usando o algoritmo de Newmark



Fonte: Elaborada pelo autor.

O mesmo exemplo foi analisado utilizando o algoritmo α -Generalizado. Para este exemplo adotou-se $\alpha_f = 0,05$ e $\alpha_m = 0,00$. A Figura 7 mostra os resultados obtidos para os mesmos incrementos de tempo adotados anteriormente. Neste caso, não se observa instabilidade nos resultados. Um aspecto interessante é que, para o incremento de tempo de 0,100 s, a resposta não apresenta um resultado preciso, como no exemplo anterior.

Figura 7 – Pêndulo simples usando o algoritmo α -Generalizado



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.2 Viga curva

Este segundo exemplo é proposto por Chandra *et al.* (2012). Trata-se de uma viga curva cuja geometria é apresentada na

Figura 8. Neste exemplo, os autores estudam a influência da estabilidade numérica em uma estrutura que apresenta *snap-through*. A viga possui um ângulo $\theta = 5,674^\circ$ nos apoios, um comprimento total de projeção horizontal da viga de $L = 362,204$ mm. A região dos apoios delimitada pela largura L_c é totalmente engastada. A Tabela 1 mostra as dimensões normalizadas da viga e a Tabela 2 mostra as propriedades mecânicas do material.

Tabela 1 – Dimensões normalizadas da viga curva

R/L	L_h/L	L_c/L	d/L	t/L	H/t
5,058	0,8415	0,07925	0,035	0,0014	17,67

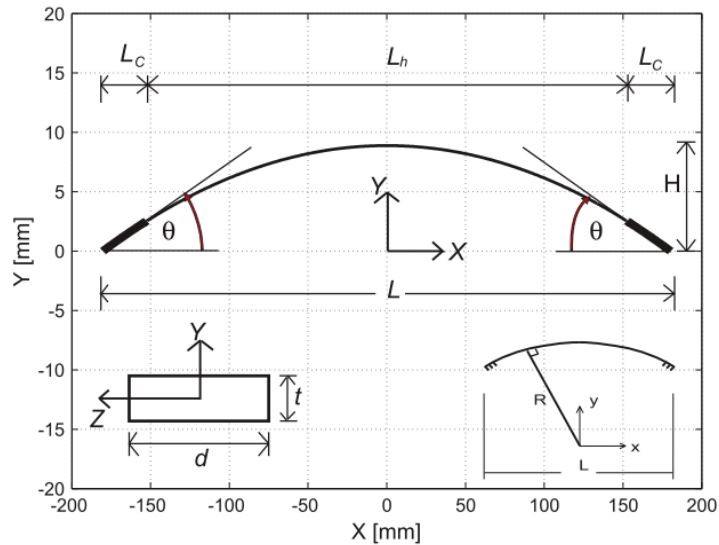
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Propriedades mecânicas da viga curva

E (N/mm ²)	ν	ρ (N s/mm ⁴)
206,843	0,28	$7,83 \times 10^{-9}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 –Viga curva



Fonte: Chandra *et al.* (2012).

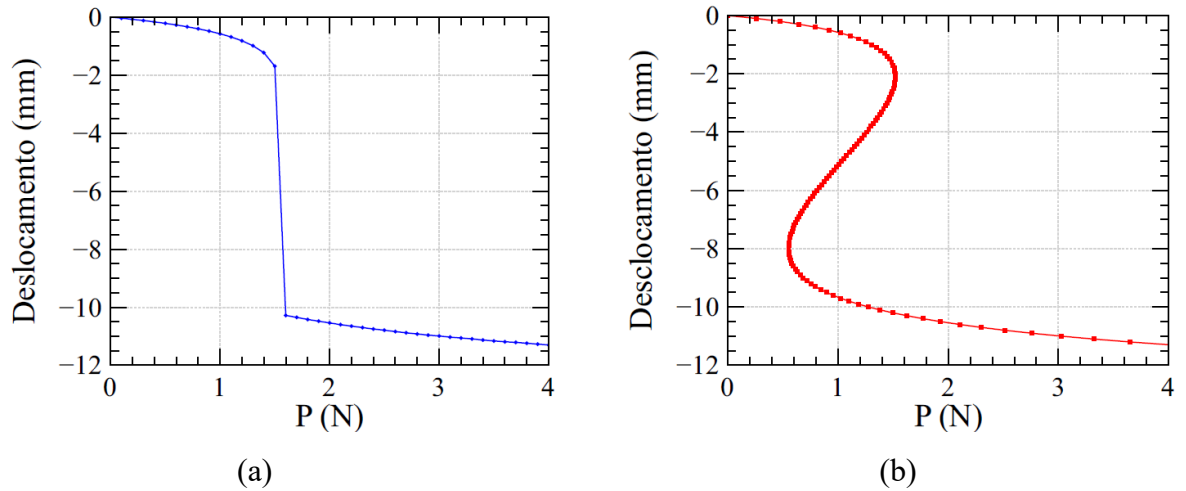
Uma primeira análise estática é realizada com o intuito de mostrar o fenômeno de *snap-through* na estrutura. Para tal, utilizou-se uma malha com 20 elementos corrotacionais e um incremento de carga de $\Delta P = 0,1$ N para a análise com controle de carga. Para uma segunda análise, utilizando o controle de deslocamento, foi adotado um incremento de $\Delta u = 0,1$ mm. Os resultados são mostrados na Figura 9a e na Figura 9b.

A Figura 9 mostra o resultado para a análise com controle de carga. A carga está no eixo horizontal e o deslocamento está no eixo vertical. Nota-se que a partir de um determinado valor da carga de aproximadamente 1,5 N, a viga perde estabilidade e a solução converge para um ponto posterior da solução. Ao analisar a estrutura através do controle de deslocamentos, como mostra a Figura 9b, é possível observar o fenômeno de *snap-through*.

Para o estudo dinâmico do problema, uma carga P é aplicada gradativamente no centro da viga como mostra a Figura 10. A carga cresce até um nível superior à carga crítica de 1,5 N e, em seguida, é mantida constante. Os resultados obtidos para a resposta dinâmica com incrementos de tempo de 0,01s, 0,001s e 0,0001s e utilizando o algoritmo de Newmark são apresentados na Figura 11. O resultado obtido por Chandra *et al.* (2012) é representado nesta

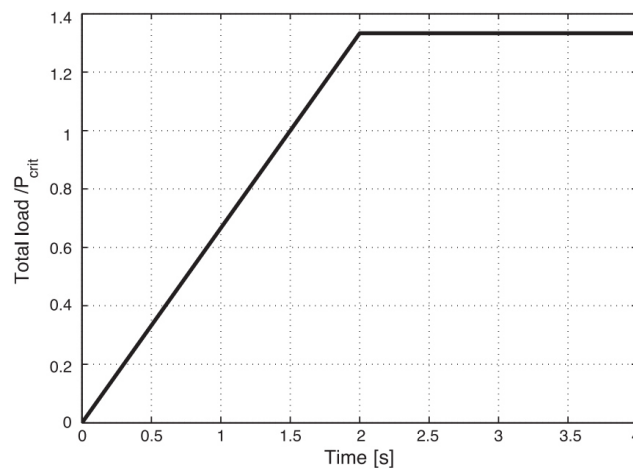
figura por meio de sua envoltória superior (linha cinza). Adotou-se para este caso uma malha de 4 elementos.

Figura 9 – *Snap-through* presente no carregamento estático usando (a) controle de carga e (b) controle de deslocamento



Fonte: Elaborada pelo autor.

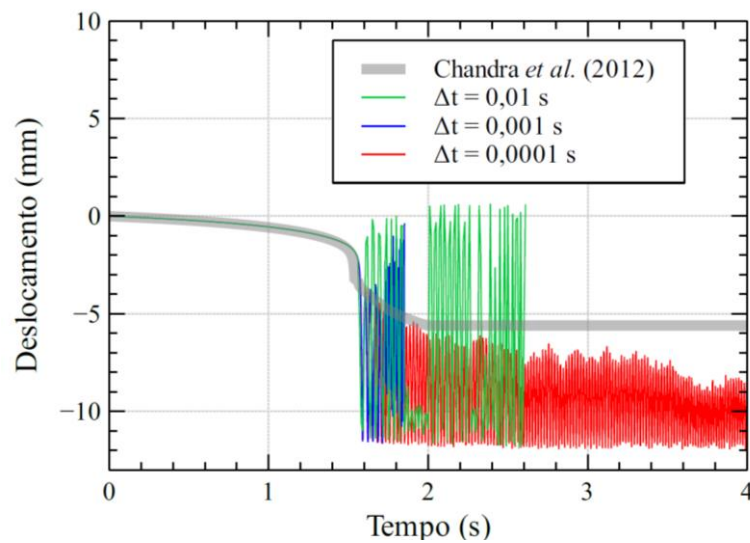
Figura 10 – Aplicação da carga dinâmica



Fonte: Chandra *et al.* (2012).

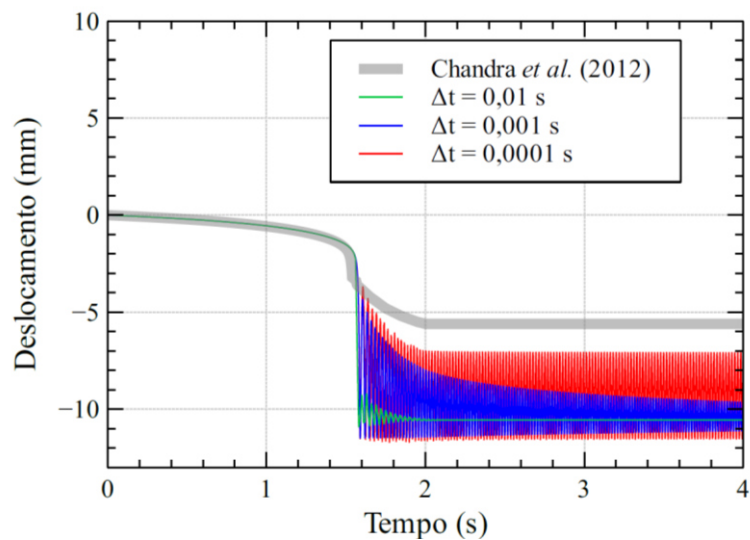
É possível constatar na Figura 11 o problema de instabilidade da resposta logo após a carga P atingir o seu valor máximo para os incrementos de tempo de 0,01s e 0,001s. No caso do incremento de tempo de 0,0001s, a instabilidade não é verificada. O algoritmo α -Generalizado é utilizado para a mesma situação de malha (4 elementos) e incrementos de tempo (0,01s, 0,001s e 0,0001s). Adotou-se como parâmetros do modelo os valores de $\alpha_f = 0,10$ e $\alpha_m = 0,00$.

Figura 11 – Resposta dinâmica com o algoritmo de Newmark



Fonte: Elaborada pelo autor.

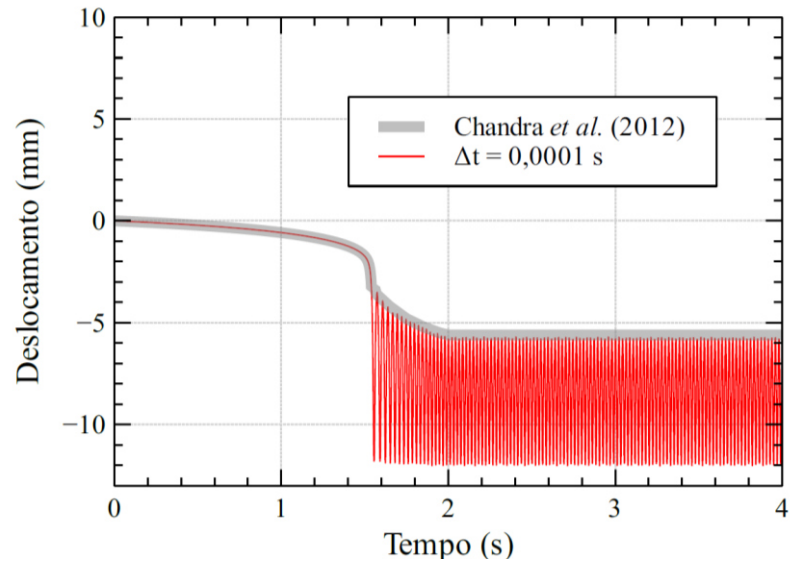
Figura 12 – Resposta dinâmica com o algoritmo α -Generalizado



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 12 mostra que, para os resultados obtidos com a utilização do algoritmo α -Generalizado, os problemas de instabilidade desaparecem. Entretanto, observa-se o surgimento de um amortecimento indesejado para os incrementos de tempo de 0,01s e 0,001s. Recorre-se então à discretização da malha de elementos finitos. A Figura 13 apresenta o resultado para uma malha com 10 elementos. O incremento de tempo adotado foi de 0,001s.

Os resultados apresentados nesta seção mostram que o método α -Generalizado é capaz de retirar o problema de instabilidade em diferentes casos estruturais. Entretanto, deve-se ter em conta que o seu uso pode acarretar no surgimento de amortecimentos numéricos não desejados dependendo do grau de discretização da malha ou do grau de discretização no tempo.

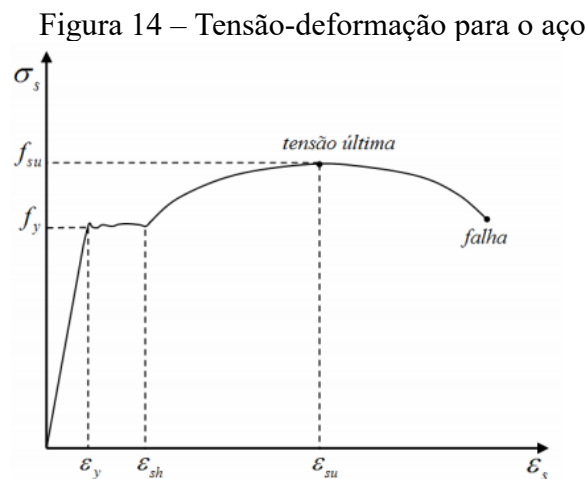
Figura 13 – Resposta dinâmica com o algoritmo α -Generalizado (10 elementos)

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO ARMADO

Em termos gerais, os materiais podem ser divididos entre dúcteis e frágeis. Materiais dúcteis apresentam como principal característica o surgimento de deformações permanentes ou plásticas. Estas deformações se dão por uma mudança na estrutura molecular no material a partir de um determinado nível de tensões, onde se inicia a fase plástica. Já os materiais frágeis não apresentam esta fase plástica e, portanto, não ocorrem deformações permanentes.

Aços são exemplos de materiais dúcteis. Nos aços de armaduras de concreto armado, por exemplo, o comportamento em termos de tensão-deformação é caracterizado por uma primeira fase elástica, uma segunda fase em que ocorre um patamar de escoamento e a uma última fase caracterizada por um endurecimento (ou encruamento), como apresenta a Figura 14.

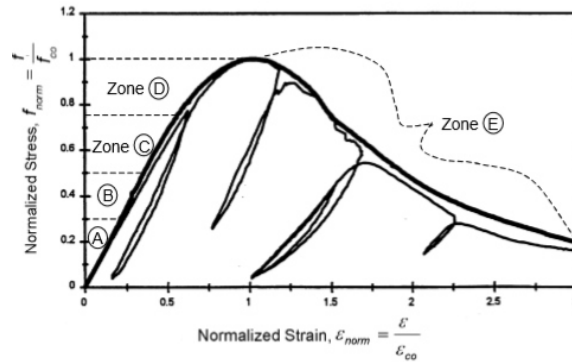


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 15 apresenta um modelo com plasticidade perfeita. Este modelo representa um material que não possui o fenômeno de encruamento. O carregamento inicial AB é todo em regime elástico. No ponto B, o material atinge o limite de escoamento σ_y , onde ao sofrer um descarregamento, o material não mais retorna ao seu estado original. O trecho BC é caracterizado pela evolução da deformação sem o acréscimo de tensão, ou seja, o material escoou.

Devido às mudanças moleculares desenvolvidas, após ser ultrapassado o limite de escoamento, surgem deformações permanentes. Estas deformações permanentes são verificadas através do descarregamento (trecho CD). Este comportamento é dito elastoplástico, pois é basicamente formado por trechos de descarregamentos e recarregamento elásticos e trechos de carregamentos plásticos.

Figura 16 – Curva de carregamento cíclico para o concreto na compressão



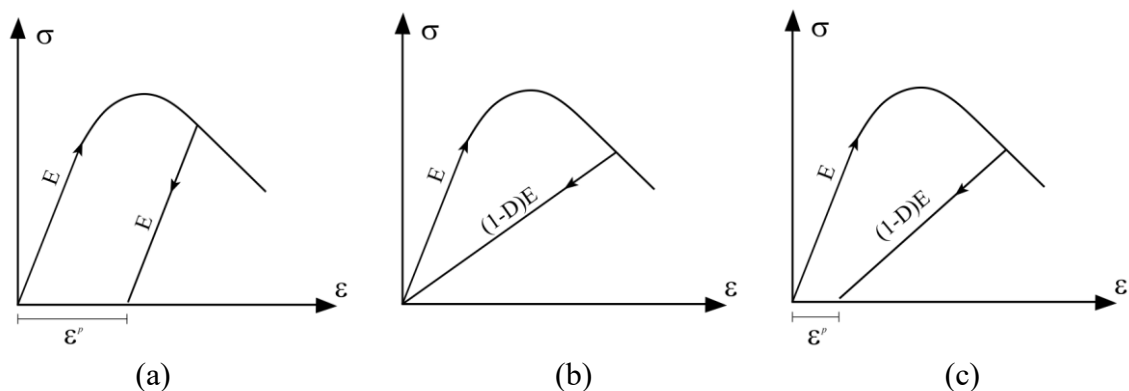
Fonte: Bahn e Hsu (1998).

A segunda curva considera apenas a degradação da rigidez sem o surgimento de deformações permanentes. Trata-se de um modelo de dano puro, onde o descarregamento é dado pelo módulo secante $(1-D)E$ que é função de uma variável de dano D . D varia de 0 a 1, indicando material não danificado para $D=0$ e material totalmente danificado para $D=1$. A evolução desta variável será comentada na Seção 4.2.

Por último, o terceiro modelo considera ambos os efeitos, degradação da rigidez e acúmulo de deformação permanente. Esta curva se assemelha à curva experimental mostrada na Figura 16. Esta característica de efeitos acoplados é encontrada em muitos materiais, incluindo metais e concreto. A dificuldade da sua modelagem consiste em identificar qual parcela da energia dissipada no processo de carregamento é dano e qual parcela é deformação permanente.

O estudo destes dois fenômenos será abordado neste capítulo, dando maior destaque para o concreto armado, tanto o aço quanto o concreto. A partir do desenvolvimento da Teoria da Plasticidade e da Mecânica do Dano Contínuo, podem-se desenvolver modelos constitutivos de concreto que simulem com mais precisão os resultados experimentais.

Figura 17 – Modelos constitutivos para o concreto na compressão



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1 Modelos constitutivos elastoplásticos

Modelos elastoplásticos baseados na Teoria da Plasticidade têm como objetivo simular o surgimento das deformações permanentes no material após ser atingido um limite de escoamento, onde se passa de um regime puramente elástico para um regime plástico (SIMO; HUGHES, 2000). O caso mais simples de modelo elastoplástico considera que as deformações são independentes da taxa de aplicação de carga e que após ser atingido o limite de escoamento σ_Y , o material se deforma sem sofrer nenhum acréscimo de tensão.

Experimentalmente, observa-se o fenômeno de encruamento do aço. Assim, após atingir o limite de escoamento, o aço passa a ganhar resistência à medida que é carregado. Este encruamento pode ser descrito por diversas leis, sendo o caso mais simples um encruamento linear isotópico (YAW, 2012). De forma a simplificar o estudo do comportamento do material, em um modelo 3D, as deformações são divididas em duas parcelas, uma elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e uma plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, de modo que a deformação total é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (70)$$

Assim, a relação tensão-deformação do material pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (71)$$

onde \mathbf{C}_0 é o tensor de elasticidade do material (SIMO; HUGHES, 2000).

A existência de um domínio elástico delimitado por uma determinada tensão de escoamento pode ser expressa através de superfície de escoamento. No caso de plasticidade com encruamento linear isotrópico, esta superfície de escoamento é dada por

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, h) \leq 0 \quad (72)$$

onde h representa uma função escalar de encruamento.

A evolução da deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é definida por uma lei de fluxo plástico. É comum em modelos multidimensionais definir a lei de fluxo plástico a partir de um potencial de fluxo do tipo

$$G = G(\boldsymbol{\sigma}) \quad (73)$$

A evolução da deformação plástica é então definida como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \nabla G_\sigma \quad (74)$$

onde $\dot{\lambda}$ é um multiplicador plástico sempre maior ou igual a zero.

Sendo \mathbf{N} o vetor normal à superfície de escoamento F , nota-se que a direção da deformação plástica não é necessariamente a mesma da superfície de escoamento (dependente da tensão $\boldsymbol{\sigma}$). Entretanto, para a os metais, o potencial de fluxo plástico pode ser adotado como a própria função de escoamento, ou seja

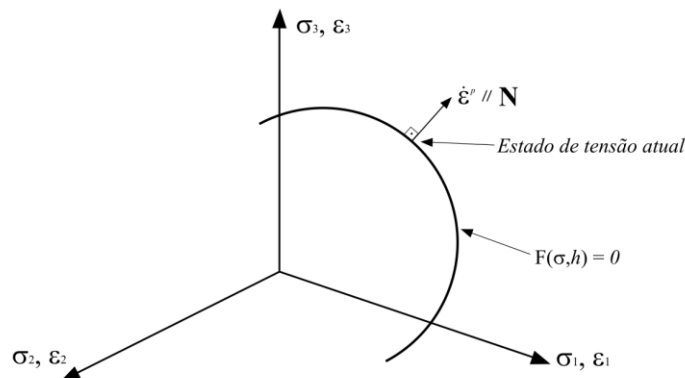
$$G = F \quad (75)$$

Estes modelos são conhecidos como modelos associados. Em modelos multidimensionais, isto significa que a evolução da plasticidade é normal a superfície de escoamento, como apresentado na Figura 18.

Para materiais geotécnicos, o fluxo de deformação plástica geralmente não obedece a esta condição de normalidade, como mostra a Figura 19. Isto significa que a deformação plástica tem uma direção diferente da superfície de escoamento do material. Estes últimos modelos são ditos não-associados. Para muitos materiais de comportamento quase-frágil, como o concreto, considera-se modelos não-associados. No caso de modelos unidimensionais, o conceito de fluxo associado e fluxo não-associado é perdido já que só existe uma direção possível de evolução das variáveis.

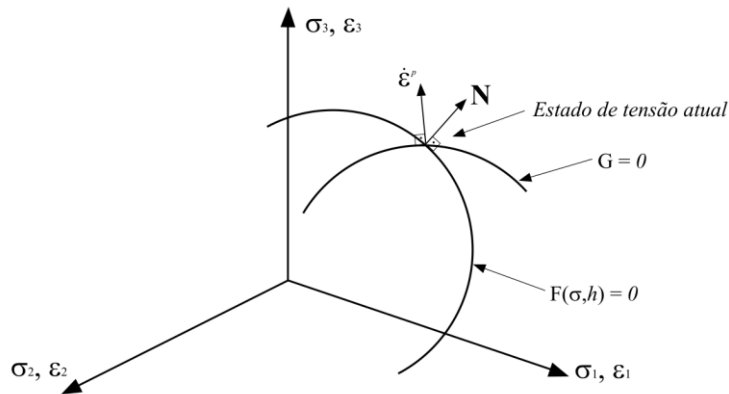
Um modelo clássico de plasticidade é o chamado modelo elastoplástico com encruamento linear isotrópico. A principal característica deste modelo é melhor visualizada no caso 2D. A Figura 20 mostra o comportamento do modelo no plano (σ_1, σ_2) ao lado da curva de tensão-deformação $(\sigma_1, \varepsilon_1)$. Nota-se que a superfície de escoamento cresce de forma isotrópica a medida em que as deformações aumentam. Ao atingir o ponto B, a superfície de escoamento expande e há um rearranjo molecular do material que representa um ganho de resistência. Por isso o termo endurecimento (ou encruamento). Uma nova superfície é gerada a cada acréscimo de deformação e esta expansão é igual para todas as direções.

Figura 18 – Lei de fluxo associado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Lei de fluxo não-associado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o caso 1D, a relação constitutiva, e a superfície de escoamento são definidas como

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (76)$$

$$F(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0 \quad (77)$$

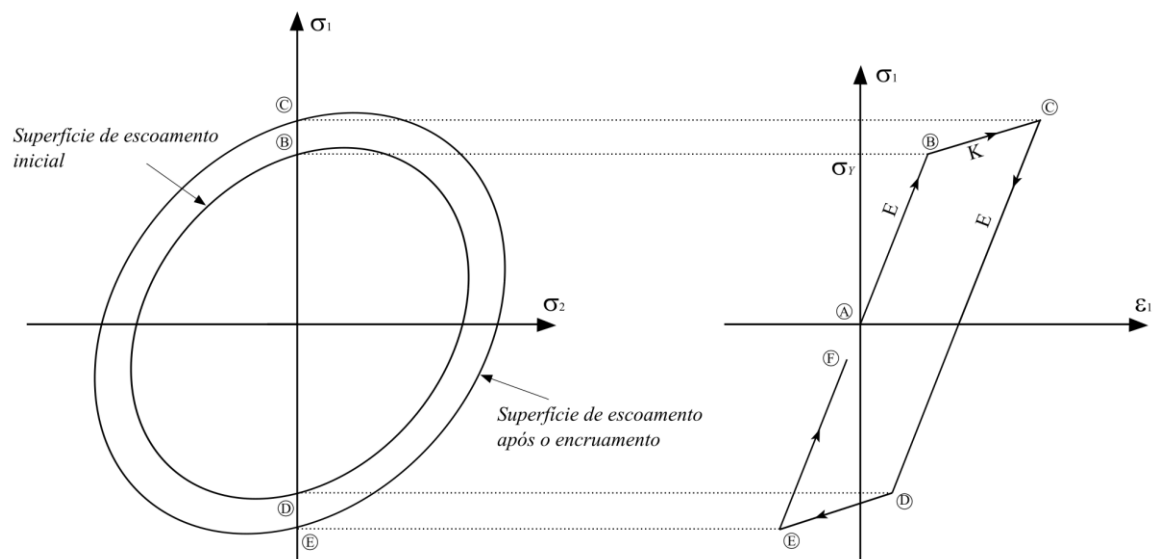
onde α é a variável interna de encruamento e K é o módulo de rigidez no regime plástico.

Sendo um modelo de fluxo associado, a lei de fluxo plástico é dada por

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma) \quad (78)$$

onde $\text{sign}(\bullet)$ representa o sinal da variável \bullet .

Figura 20 – Encruamento linear isotrópico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando que o encruamento é linear e independente do sentido com relação ao fluxo plástico (ou seja, linear em $|\dot{\varepsilon}^p|$), determina-se a evolução da variável α como

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad (79)$$

Para descrever em apenas uma lei os comportamentos no carregamento e no descarregamento do material, algumas condições devem ser satisfeitas. Estas são conhecidas como condições de complementaridade ou de Kuhn-Tucker (SIMO; HUGHES, 2000):

$$\dot{\lambda} > 0, \quad F(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \dot{\lambda}F(\sigma, \alpha) = 0 \quad (80)$$

Uma última condição deve ser satisfeita para que se garanta que a evolução da deformação plástica $\dot{\varepsilon}^p$ mantenha a tensão σ na superfície de escoamento. Esta condição é conhecida como condição de consistência ou de permanência e é dada por

$$\dot{\lambda}\dot{F}(\sigma, \alpha) = 0, \quad \text{se } F(\sigma, \alpha) = 0 \quad (81)$$

A análise pelo MEF abordada neste trabalho é *strain-driven*, ou seja, obtém-se as tensões a partir de deformações dadas. Desta forma, é possível obter um procedimento incremental a partir do conjunto de Equações (71) a (81). Este procedimento é conhecido como algoritmo de mapeamento de retorno (*return mapping*) (SIMO; HUGHES, 2000).

4.1.1 Algoritmo de mapeamento de retorno

O algoritmo de mapeamento de retorno consiste em dividir o problema *strain-driven* da obtenção de tensões em duas etapas, um preditor elástico e um corretor plástico. De forma a solucionar o problema de obtenção das tensões, se utiliza a discretização do problema em incrementos de tempo fictício através do método de Euler implícito (SIMO; HUGHES, 2000). A partir deste ponto, os incrementos de tempo $t + \Delta t$ são identificados com o subscrito $n+1$ a direita da variável.

Na primeira etapa, se considera o regime elástico e se obtém o valor de uma tensão tentativa $\sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ a partir de um incremento dado de deformação ε_{n+1} . Para isto, as variáveis plásticas são mantidas constantes com o valor igual ao do último incremento convergido:

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (82)$$

A partir deste valor, a condição de escoamento é verificada:

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - (\sigma_Y + K\alpha_n) \quad (83)$$

Caso a condição de escoamento seja satisfeita, a deformação está em regime elástico. Desta forma, as variáveis internas não evoluem, ou seja

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n \quad (84)$$

Caso a condição de escoamento não seja satisfeita, passa-se à segunda etapa. Na etapa de correção plástica, as variáveis internas são atualizadas até que as condições de Kuhn-Tucker sejam satisfeitas (Figura 21). Considerando $\Delta\lambda$ o valor incremental do multiplicador plástico, tem-se que a tensão é dada por

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda E \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (85)$$

Assumindo que o valor correto do multiplicador plástico $\Delta\lambda > 0$ pode ser encontrado, todas as variáveis internas podem ser determinadas como

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (86)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda \quad (87)$$

A condição de escoamento deve ser satisfeita para a nova tensão. Assim, tem-se

$$F_{n+1} = \left| \sigma_{n+1} \right| - (\sigma_Y + K \alpha_{n+1}) = 0 \quad (88)$$

Sabendo que $\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}})$ e substituindo as Equações (85) e (87) em (88), tem-se que a superfície de escoamento é dada por

$$F_{n+1}^{\text{trial}} - K \Delta\lambda - \left| \Delta\lambda E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \right| = 0 \quad (89)$$

A partir da Equação (89), pode-se obter o valor incremental do multiplicador plástico:

$$\Delta\lambda = \frac{F_{n+1}^{\text{trial}}}{E + K} \quad (90)$$

Além da obtenção da tensão, é importante se obter o módulo tangente, dado pela Equação (12). Utilizando a metodologia incremental, o módulo tangente algorítmico é dado por

$$E_{T_{n+1}} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (91)$$

onde $n+1$ indica o instante atual de deformação.

Da Equação (82), obtêm-se

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{trial}}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E \quad (92)$$

Assumindo $F_{n+1}^{\text{trial}} > 0$ e usando a Equação (92) para diferenciar a Equação (90),

tem-se

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{E + K} \frac{\partial F_{n+1}^{\text{trial}}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (93)$$

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{E}{E + K} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (94)$$

Rearranjando a Equação (85) e adotando a condição $\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}})$,

tem-se

$$\sigma_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right) \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \quad (95)$$

Diferenciando a relação constitutiva algóritmica apresentada na Equação (95) em relação a ε_{n+1} e utilizando as relações apresentadas nas Equações (92) e (94), obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right) E + \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|^2} \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \quad (96)$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right) E + \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|^2} \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{trial}}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \frac{E}{E + K} \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \quad (97)$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E \left(1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right) + \frac{\Delta \lambda E^2}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|^2} \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) - \frac{E^2}{E + K} \quad (98)$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E \left(1 - \frac{\Delta \lambda E}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|} \right) + \frac{\Delta \lambda E^2}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|^2} - \frac{E^2}{E + K} \quad (99)$$

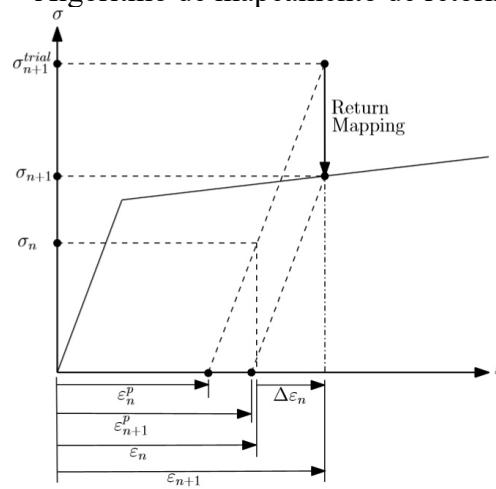
$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{EK}{E + K} \quad (100)$$

Finalmente, sendo $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}$ para $F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$, tem-se que o módulo tangente consistente é dado por

$$E'_{n+1} = \begin{cases} E & \text{se } F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \\ \frac{EK}{E+K} & \text{se } F_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases} \quad (101)$$

O algoritmo de mapeamento de retorno para o modelo de plasticidade com encruamento linear isotrópico é demonstrado no Quadro 3.

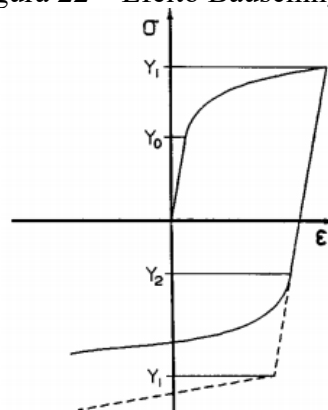
Figura 21 – Algoritmo de mapeamento de retorno



Fonte: Yaw (2012).

Para carregamentos monotônicos, a lei de encruamento linear é uma boa aproximação, entretanto, quando ocorrem carregamentos cíclicos, um fenômeno chamado efeito Bauschinger é observado (SIMO; HUGHES, 2000). Este efeito se dá pela perda de linearidade ao se aproximar do limite de escoamento na direção oposta ao carregamento (WEINMANN *et al.*, 1988, *apud* HAUS, 2011). Como a Figura 22 ilustra, o efeito Bauschinger também pode ser identificado como uma mudança no centro da superfície de escoamento.

Figura 22 – Efeito Bauschinger



Fonte: Weinmann *et al.* (1988) *apud* Haus (2011).

Quadro 3 – Algoritmo do modelo de plasticidade com encruamento isotrópico linear

Dados de entrada:	$\sigma_Y, E, K, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n$
Preditor elástico:	$status = ELASTIC$ $E_{n+1}^t = E$ $\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$ $F_{n+1}^{trial} = \sigma_{n+1}^{trial} - (\sigma_Y + K\alpha_n)$
Se $F_{n+1}^{trial} \leq 0$ # <i>Passo elástico</i>	$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}$ $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$ $\alpha_{n+1} = \alpha_n$
Se $F_{n+1}^{trial} > 0$, corretor plástico:	$status = PLASTIC$ $\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + K}$ $\sigma_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda E}{ \sigma_{n+1}^{trial} }\right) \sigma_{n+1}^{trial}$ $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$ $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda$
Se $status = PLASTIC$	
Módulo tangente consistente:	$E_{Tn+1} = \frac{EK}{E + K}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma maneira de modelar o efeito Bauschinger de forma simplificada a partir do modelo de encruamento linear isotópico é acrescentar uma variável interna adicional, chamada de tensão de retorno (*back stress*) q . Esta variável tem a função de realocar o centro da superfície de escoamento e sua lei de evolução pode ser escrita como

$$\dot{q} = H \text{sign}(\sigma - q) \quad (102)$$

onde H é o módulo de encruamento cinemático. A lei de encruamento cinemático é incorporada ao encruamento isotrópico e a superfície de escoamento dada pela Equação (72) é modificada para:

$$F(\sigma, \alpha, q) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0 \quad (103)$$

A Figura 23 mostra o comportamento do modelo de plasticidade com encruamento linear isotrópico e cinemático. Além do efeito de expansão isotrópica da superfície de escoamento, nota-se que o centro da superfície muda de posição ao longo do carregamento.

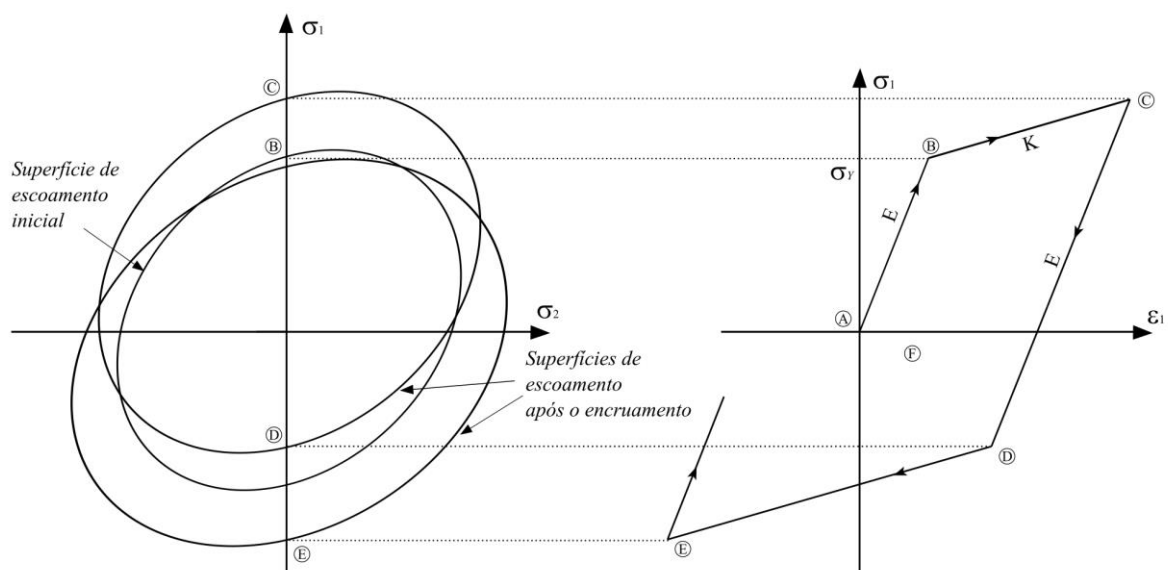
Voce (1955) propõe uma lei de encruamento isotrópico exponencial na qual assume que o encruamento deve alcançar um determinado limite, ou tensão de saturação σ_U . A condição de escoamento é dada por

$$F(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [(\sigma_U - \sigma_Y)(1 - \exp(-\delta\alpha))] \leq 0 \quad (104)$$

onde δ é um parâmetro que regula a velocidade de saturação da tensão última σ_U . A obtenção do multiplicador plástico λ para este caso se dá iterativamente, já que a lei de encruamento é não linear.

Yaw (2012) apresenta um algoritmo de mapeamento de retorno para a solução do modelo de encruamento isotrópico exponencial, onde utiliza o método de Newton-Raphson para o cálculo do multiplicador plástico λ . Os algoritmos para o modelo isotrópico e cinemático linear e para o modelo isotrópico exponencial são apresentados no Anexo A.

Figura 23 – Encruamento linear isotrópico e cinemático



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Mecânica do Dano Contínuo

A Mecânica do Dano Contínuo é um ramo da Mecânica do Contínuo que descreve o comportamento de degradação dos materiais em um nível macroscópico. Em paralelo à Teoria da Plasticidade, também se utiliza de variáveis internas para descrever tal comportamento e, por isto, também depende do histórico das tensões desenvolvidas. Estas variáveis internas definem a presença e a evolução de microfissuras que podem, eventualmente, levar o material à falha (SOUZA NETO *et al.*, 2008).

A previsão de falha de um material era, tradicionalmente, baseada em testes empíricos, realizados em laboratório. Entretanto, o aumento do conhecimento dos mecanismos de evolução das variáveis internas fez com que uma teoria mais rica fosse desenvolvida. Assim, surgiu a Mecânica do Dano Contínuo que, aliada ao recente e rápido desenvolvimento da Mecânica Computacional, se tornou uma alternativa de sucesso para a previsão de falha dos materiais.

O trabalho de Kachanov (1958) é considerado o pioneiro no desenvolvimento da Mecânica do Dano Contínuo. Em seu trabalho, introduziu uma variável escalar interna ω chamada *continuidade*. Esta variável recebeu, posteriormente, um significado físico mais claro no trabalho de Rabotnov (1963), que propôs que a variável interna de dano D fosse proporcional a redução da área devido ao surgimento de microfissuras. Neste caso, uma relação entre a variável de continuidade e a variável de dano é

$$D = 1 - \omega \quad (105)$$

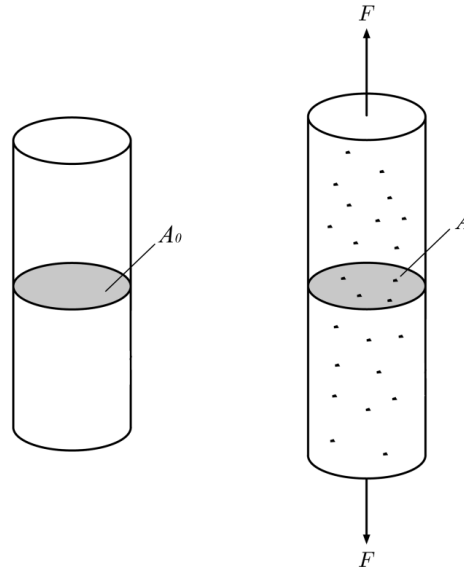
sendo A_0 a área inicial, ainda não danificada, e A a área reduzida ao longo do processo de microfissuração (Figura 24), D é definida como

$$D = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad (106)$$

A Equação (106) sempre produzirá valores não negativos, já que a área A sempre será menor ou igual à área inicial A_0 . Além disso, $D = 0$ corresponde a um material virgem (sem dano) e $D = 1$ a um material totalmente danificado. Em um estado uniaxial de tensões, pode-se definir que a tensão real σ age em um meio equivalente de rigidez reduzida $\bar{E} = (1 - D)E$. Da mesma forma, define-se uma tensão efetiva $\bar{\sigma}$ agindo em um material fictício não danificado com rigidez E . Através do princípio de equivalência de deformações, garantida pela consideração de continuidade do meio, tem-se que as deformações nas duas situações são as mesmas, ou seja

$$\frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (107)$$

Figura 24 – Processo de danificação de um material



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir da Equação (107), deduz-se que a tensão efetiva é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (108)$$

No desenvolvimento de modelos constitutivos é necessário definir uma lei de evolução para a variável de dano D . No caso de materiais dúcteis, pode-se considerar que a variável de dano evolui independentemente do sentido do carregamento (tração ou compressão).

Um modelo de dano simples é apresentado na Figura 25. Neste modelo, o comportamento do material é linear até um determinado valor de deformações limite ε_c (trecho AB). A partir deste valor, a variável de dano começa a evoluir, reduzindo assim a rigidez inicial E do material (trecho BC). No ponto C, a variável de dano atinge o valor $D(C)$. O descarregamento após o início do processo de danificação ocorre pela inclinação de rigidez reduzida $E(1-D)$, com $D = D(C)$.

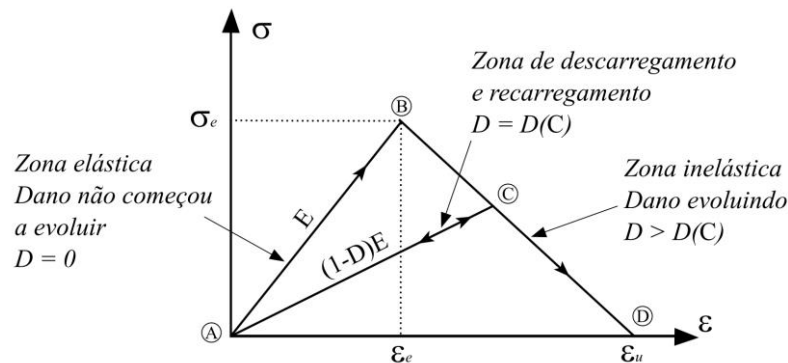
Ao ser novamente carregado, o material continua com a mesma inclinação $E(1-D)$ até atingir novamente o ponto C. A partir deste ponto (cujo valor de dano foi o maior atingido até o momento), a variável de dano recomeça a evoluir (trecho CD). A evolução da variável de dano pode ser obtida geometricamente através da Figura 25 e é dada por:

$$D = \frac{\varepsilon_u (\varepsilon - \varepsilon_e)}{\varepsilon (\varepsilon_u - \varepsilon_e)} \quad (109)$$

onde ε_u é a deformação última. Ao atingir da deformação última, a variável de dano atinge a unidade e seu valor não mais evolui ($D = 1$).

Um aspecto importante na formulação de modelos com dano é a garantia de que o processo de danificação seja irreversível. Em outras palavras, o dano no material não pode ser recuperado ou ser negativo. Um modelo constitutivo de um material é possível se este obedecer à primeira e à segunda leis da Termodinâmica. Uma maneira de combinar as leis da Termodinâmica é através da Inequação de Clausius-Duhem. Esta inequação deve ser obedecida para tornar o modelo termodinamicamente admissível.

Figura 25 – Modelo de dano bilinear



Fonte: Elaborada pelo autor.

A primeira lei da termodinâmica diz respeito à conservação da energia de um sistema. Segundo ela, a energia contida em um sistema não pode ser destruída nem criada. A primeira lei pode ser escrita da seguinte forma:

$$P + Q = \dot{U} + \dot{E}_c \quad (110)$$

onde P é a potência das cargas externas (ou taxa de trabalho mecânico), Q é a taxa de calor introduzida no sistema, \dot{U} é a taxa de variação da energia interna e \dot{E}_c é a taxa de variação da energia cinética.

A segunda lei da Termodinâmica diz que, em qualquer processo de transformação em um sistema, a entropia deve ser maior ou igual à variação da energia provocada pela transferência de calor. Em outras palavras, é impossível que o calor se transforme em outras

fontes de energia, sendo, portanto, uma forma degradada de energia. A segunda lei da Termodinâmica pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta \rho d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{\rho s}{T} d\Omega + \int_{\partial\Omega} -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (111)$$

onde η é a entropia específica por unidade de massa, ρ é a massa específica, T é a temperatura absoluta, s é uma fonte de energia por unidade de massa, t é o instante de tempo, \mathbf{q} é o fluxo de calor, Ω é o domínio, $\partial\Omega$ é o contorno do domínio e \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície.

Combinando a primeira e a segunda leis da Termodinâmica, obtém-se a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\rho T \dot{\eta} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (112)$$

4.3 Modelo de dano de Lemaitre

No caso anterior, o modelo de dano é considerado elástico já que não há acúmulo de deformação residual. Entretanto, o efeito das deformações plásticas pode ser incluído em um modelo de dano. Estes são chamados de modelos de dano acoplado com plasticidade. Um modelo clássico de dano acoplado com plasticidade baseado na Mecânica do Dano Contínuo é o modelo proposto por Lemaitre (1985).

O modelo de Lemaitre é utilizado para materiais dúcteis, para os quais a consideração do comportamento isotrópico tanto em tração quanto em compressão é válida. Neste modelo, a evolução da variável de dano é dada por

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right)^s \quad (113)$$

onde s e S são parâmetros do material a serem identificados a partir de resultados experimentais, e $-Y$ é a chamada taxa de liberação de energia de dano, dada por

$$-Y = \frac{\sigma^2}{2E(1-D)^2} \quad (114)$$

Definida a lei de evolução do dano, a metodologia utilizada para o algoritmo de mapeamento de retorno vista anteriormente pode ser aplicada neste caso. Utilizando uma lei de

encruamento isotrópico linear e lembrando do conceito de tensão efetiva, tem-se que a relação tensão-deformação e o critério de escoamento do material são dados, respectivamente por

$$\sigma = (1-D)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (115)$$

$$F(\sigma, \alpha) = \frac{|\sigma|}{1-D} - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0 \quad (116)$$

Considerando um modelo de plasticidade associada ($G = F$), as evoluções das variáveis internas são dadas, respectivamente, por

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma)}{1-D} \quad (117)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad (118)$$

Lemaitre e Chaboche (1994) mostram que o valor $s = 1$ na Equação (113) apresenta os melhores resultados para o modelo. Assim, a evolução do dano pode ser reescrita como

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{-Y}{S} \right) \quad (119)$$

Admitindo que $F(\sigma, \alpha) > 0$, a partir da condição de consistência, tem-se que

$$\dot{\lambda} = \frac{E \text{sign}(\sigma)}{\frac{E}{1-D} + K} \dot{\varepsilon} \quad (120)$$

A variação da tensão no tempo pode ser então escrita como

$$\dot{\sigma} = \frac{(1-D)E}{\frac{E}{1-D} + K} \left[K - \frac{|\sigma|Y}{S(1-D)^2} \right] \dot{\varepsilon} \quad (121)$$

A partir da Equação (121) pode-se definir o módulo tangente elastoplástico como

$$E^{ep} = \begin{cases} (1-D)E & \text{se } F \leq 0 \\ \frac{(1-D)E}{\frac{E}{1-D} + K} \left[K - \frac{|\sigma|Y}{S(1-D)^2} \right] & \text{se } F > 0 \end{cases} \quad (122)$$

Driemeier e Proença (2005) apresentam a formulação de um algoritmo de mapeamento de retorno do modelo de Lemaitre para treliças sob grandes deformações. Apesar de este modelo não ter sido utilizado no presente trabalho, muitos aspectos conceituais do

algoritmo são essenciais para o entendimento dos modelos utilizados. Alguns destes aspectos são apresentados aqui.

Utilizando o algoritmo de mapeamento de retorno mostrado na Seção 4.1.1, obtém-se a solução incremental do problema da obtenção de tensões em duas etapas: preditor elástico e corretor plástico.

4.4 Localização de deformação e sensibilidade de malha

Quando estruturas são submetidas a carregamentos, podem ocorrer localizações de deformações geradas pela aleatoriedade das propriedades do material que as compõem. Mesmo considerando-se que estes materiais são homogêneos, um determinado ponto pode estar mais fragilizado do que os demais e, dependendo do tipo de carregamento, as deformações podem se concentrar neste ponto.

Este fenômeno de localização é observado principalmente em materiais que possuem curvas tensão-deformação com trechos descendentes, ou com amolecimento (*softening*). A localização de deformação também ocorre em simulações numéricas. Neste caso, é possível explicar matematicamente como se dá o fenômeno com o uso de elementos finitos para discretização da estrutura.

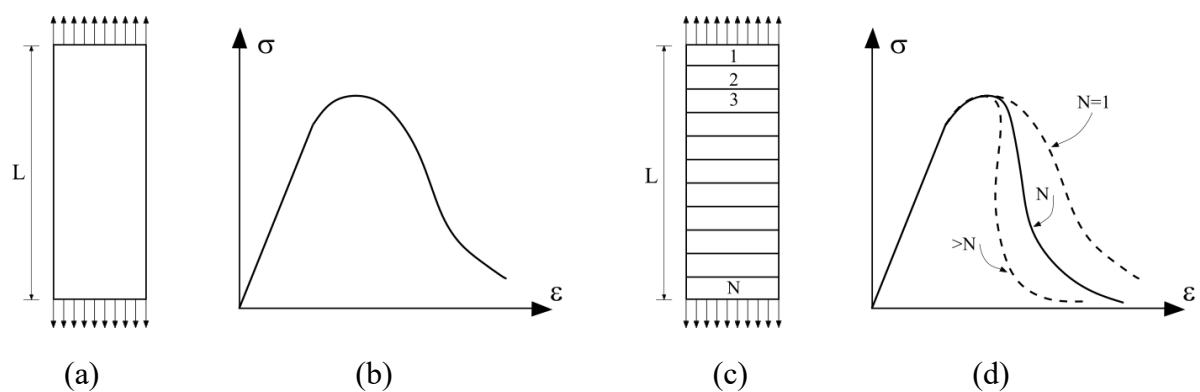
Seja uma barra de comprimento L submetida a um esforço axial de tração cujo material apresenta uma curva de tensão-deformação com *softening* mostrada na Figura 26a. Utilizando uma malha de elementos finitos com um único elemento, é possível obter a curva de tensão-deformação através do histórico de carregamentos e deslocamentos aplicados. Neste caso, como mostra a Figura 26b, a curva obtida deverá ser idêntica à própria curva do material.

Subdividindo esta barra em N elementos, como mostrado na Figura 26c, se deveria obter a mesma curva de tensão-deformação do primeiro caso. Caso todos os N elementos possuam a mesma curva tensão-deformação, isto é verdade. Entretanto, se um destes elementos estiver minimamente fragilizado, o que ocorre é uma redução do trecho descendente (pós-pico) da curva final, como mostrado na Figura 26d.

Bazant e Planas (1998) explicam que este comportamento está associado à discretização da malha e ocorre porque, ao atingir o pico de tensões, a deformação se concentra, ou se localiza, apenas neste elemento fragilizado. Este fenômeno é conhecido como localização de deformação (*strain localization*). Junto a esta característica, nota-se que a redução do trecho descendente é maior para uma malha mais discretizada, tornando a resposta do problema numérico dependente da malha adotada.

Além da dependência da malha na resposta numérica ser um problema, outro aspecto, agora do ponto de vista físico, também é percebido. A resposta do problema físico não deve depender de uma subdivisão adotada. Ou seja, a discretização da malha de elementos finitos tem o papel de melhorar a resposta, tornando-a mais próxima do resultado físico (curva de tensão-deformação). Neste exemplo, a discretização da malha afasta cada vez mais a resposta da solução esperada.

Figura 26 – (a) Barra homogênea, (b) Curva de tensão-deformação do material, (c) Barra subdividida em N elementos e (d) Curva de tensão-deformação resultante



Fonte: Adaptado de Bazant e Planas (1998).

A dependência da resposta do problema à malha de elementos finitos adotada na análise é conhecida na literatura como falta de objetividade de malha (*lack of mesh objectivity*) ou sensibilidade de malha (*mesh sensitivity*) (BAZANT, 1976). Algumas metodologias foram desenvolvidas para evitar a sensibilidade de malha dado que a localização de deformação pode ocorrer em problemas que apresentam *softening*. Neste trabalho, será adotada uma metodologia baseada na imposição de limites de localização de deformação.

Para introduzir a metodologia, considera-se que a barra tracionada apresentada na Figura 27a possui a curva tensão-deformação mostrada na Figura 27b. O modelo é linear elástico até o limite de tensões f_t e, em seguida, apresenta *softening*. A deformação pode ser definida como

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_f \quad (123)$$

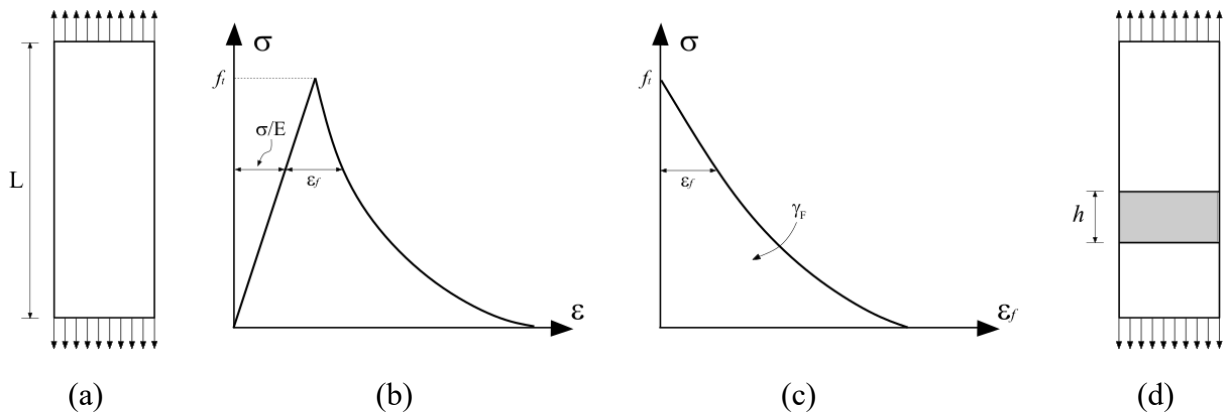
onde ε_f é a deformação de fissuração.

A partir da curva tensão-deformação, pode-se representar uma nova curva de tensão em função da deformação de fissuração. Esta curva é mostrada na Figura 27c. A partir desta

curva, tem-se que o trabalho requerido para a completa fissuração de um volume unitário do material é dado por

$$\gamma_F = \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon_f \quad (124)$$

Figura 27 – (a) Barra homogênea, (b) Curva de tensão-deformação do material, (c) Curva de tensão-deformação de fissuração e (d) Barra com região de localização



Fonte: Adaptado de Bazant e Planas (1998).

De forma similar ao exemplo anterior, considera-se que a localização de deformação pode ocorrer em uma largura de tamanho arbitrário $h \leq L$. Logo após o limite de tensões, a região delimitada por h entra em *softening* e as demais regiões descarregam elasticamente para que o equilíbrio ocorra. Assim, a elongação total da barra é dada por

$$\Delta L = \frac{\sigma}{E}(L-h) + \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_f \right) h = \frac{\sigma}{E}L + \varepsilon_f h \quad (125)$$

Na Equação (125), o valor $\varepsilon_f h$ é definido como a elongação de fissuração. Nota-se que o valor de h leva novamente ao problema de sensibilidade de malha. Para que a resposta seja a esperada, o valor da elongação ΔL deve ser igual ao valor caso não houvesse localização de deformação. Isto ocorre quando $h = 0$. Entretanto, esta solução levaria uma deformação de fissuração igual a zero, o que é fisicamente inaceitável.

Tendo em vista que h existe, mas que não pode ser igual a zero, deve-se determinar um limite para o seu valor. Este limite foi primeiramente proposto por Bazant (1976) na Teoria de Banda de Fissuração (*crack band theory*) como sendo um valor h_c , o qual é tido como uma propriedade do material. A Teoria de Banda de Fissuração sugere que a fissuração

ocorre em uma pequena região característica do material (uma banda de fissuração) de largura h_c . Assim, o valor de h não deve ser menor do que a largura característica h_c .

Bazant e Planas (1998) relacionam a largura de banda característica h_c com outras propriedades mecânicas do material através do conceito de comprimento característico l_{ch} . O comprimento característico é uma propriedade mecânica do material que indica a existência de *softening*. Para que o *softening* ocorra, é necessário que a energia de fratura G_f se dissipe completamente. É possível representar esta dissipação para um caso de *softening* linear através do comprimento crítico máximo l_{cr} :

$$l_{cr} = \frac{2EG_f}{f_t^2} \quad (126)$$

O comprimento característico deve, portanto, ser menor do que o comprimento crítico ($l_{ch} < l_{cr}$). Na prática, adota-se $l_{ch} = l_{cr}/2$, ou seja

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^2} \quad (127)$$

A energia de fratura G_f necessária para a completa fissuração da banda de largura h_c pode ser representada a partir da Equação (124) como

$$G_f = h_c \gamma_F \quad (128)$$

Substituindo a Equação (128) na Equação (127), obtém-se a relação

$$l_{ch} = h_c \frac{E\gamma_F}{f_t^2} \quad (129)$$

O valor da largura de banda h_c sendo uma característica do material, deve ser determinado a partir de experimentos que identifiquem a banda de fissuração. Bazant e Oh (1983) identificaram que este tamanho é da ordem de $2d_a \leq h_c \leq 5d_a$, onde d_a é o tamanho máximo do agregado. Invertendo a relação dada pela Equação (129), é possível obter o valor da largura de banda h_c em função dos demais parâmetros do material:

$$h_c = l_{ch} \frac{f_t^2}{E\gamma_F} \quad (130)$$

De uma forma ou de outra, do ponto de vista do Método dos Elementos Finitos, um modelo discretizado deve ser formado por elementos com lados de tamanho h_c para que se

contorne o problema de sensibilidade de malha. Acontece que em problemas estruturais, muitas vezes pode ser inviável a discretização da malha em elementos de tamanho tão pequeno ($2d_a \leq h_c \leq 5d_a$). A solução para este impasse proposta por Bazant e Planas (1998) é baseada no conceito de que a largura de banda h_c não necessariamente precisa estar explícita na formulação do modelo. O que deve ser garantido é que a dissipação da energia de fratura G_f seja constante.

Os autores propõem então que se faça um escalonamento do trabalho γ_F para o nível do elemento. Mantendo a energia de fratura G_f constante, tem-se que

$$h^e \gamma_F^e = h_c \gamma_F \quad (131)$$

onde h^e é o tamanho do elemento finito e γ_F^e é o trabalho escalonado que mantém a energia de fratura constante. Reordenando a Equação (130), tem-se que

$$\gamma_F^e = \frac{h_c}{h^e} \gamma_F \quad (132)$$

Em termos práticos, o escalonamento do trabalho γ_F é feito a partir da alteração do trecho de *softening* da curva tensão-deformação.

No Modelo de Lee e Fenves apresentado no Capítulo 786, uma metodologia similar é feita para retirar a sensibilidade de malha. Como o comprimento característico é um dos parâmetros do modelo, o escalonamento é feito indiretamente a partir do seu valor e não a partir da largura de banda h_c . Lee e Fenves (1998) utilizam uma formulação proposta por Oliver (1989), onde o comprimento característico é função do tamanho da malha adotada.

5 MODELO DE DANO DE MAZARS

No caso do concreto, a evolução do dano se dá diferentemente quando em compressão e quando em tração. Uma forma de representar este fenômeno é utilizar duas variáveis de dano dependentes, como no modelo de dano proposto por Mazars (1986). Este modelo é utilizado neste trabalho e será apresentado nesta seção.

As principais hipóteses do modelo de dano de Mazars são que a deformação plástica é negligenciada, ou seja, trata-se de um modelo com dano, mas sem plasticidade. Adicionalmente, a variável de dano D é considerada isotrópica e o dano é devido apenas à presença de deformações longitudinais (SANCHES JUNIOR; VENTURINI, 2007).

A relação constitutiva do material sofre a degradação da variável de dano D , a qual possui uma lei de evolução baseada em deformações:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (133)$$

A evolução da variável de dano D proposta por Mazars (1986) é baseada na definição de uma variável de deformação equivalente

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (134)$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 1/2(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)$ é a parte positiva da deformação. O dano inicia quando ε_{eq} atinge o valor de ε_{d0} , valor conhecido como limiar de dano (*damage threshold*) e obtido através de experimentos de tração.

O critério de dano do modelo é dado por

$$f(\varepsilon_{eq}, D) = \varepsilon_{eq} - Y \leq 0 \quad (135)$$

onde Y é uma variável que armazena a máxima deformação equivalente atingida durante o histórico de deformações.

Antes do início do dano, a deformação equivalente é igual a ε_{d0} . Quando $D = 0$, a variável Y assume o máximo valor de ε_{eq} durante o histórico de carregamento, ou seja $Y = \max(\varepsilon_{eq})$. A variável de dano D é dada em termos da deformação equivalente através de uma média das variáveis de dano da tração e na compressão, D_t e D_c . Este dano médio é ponderado com os coeficientes de estado de tensão α_t e α_c :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c \quad (136)$$

$$\alpha_t = \sum H_i \frac{\varepsilon_{t,i} (\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i})}{\varepsilon_{eq}^2} \quad (137)$$

$$\alpha_c = \sum H_i \frac{\varepsilon_{c,i} (\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i})}{\varepsilon_{eq}^2} \quad (138)$$

onde $\varepsilon_{t,i}$ e $\varepsilon_{c,i}$ são as componentes das partes positiva e negativa do tensor de deformações ε nas direções principais $i=1, 2$ e 3 , $H_i=1$ se $\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i} \geq 0$ e $H_i=0$ se $\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i} < 0$.

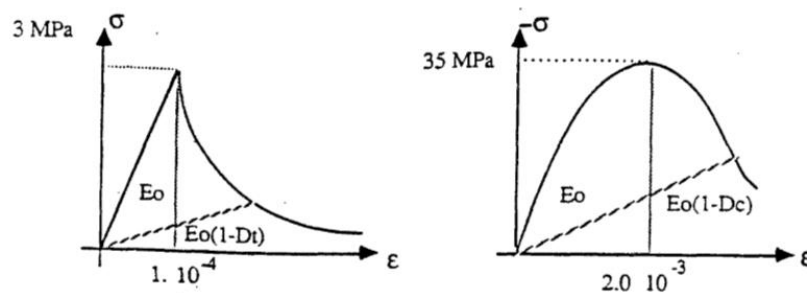
D_t e D_c são dados, respectivamente, por

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}} \quad (139)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{e^{B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}} \quad (140)$$

A Figura 28 apresenta o comportamento da curva tensão-deformação para o modelo de Mazars nos casos de tração pura e compressão pura. Nestes casos, a deformação equivalente ε_{eq} é a própria deformação real ε . As curvas também apresentam o descarregamento após um determinado nível de deformações. Como mostra a Figura 28, o descarregamento possui inclinação $E_0(1 - D_t)$ para a tração e $E_0(1 - D_c)$ para a compressão.

Figura 28 – Comportamento do modelo de Mazars em (a) tração e em (b) compressão



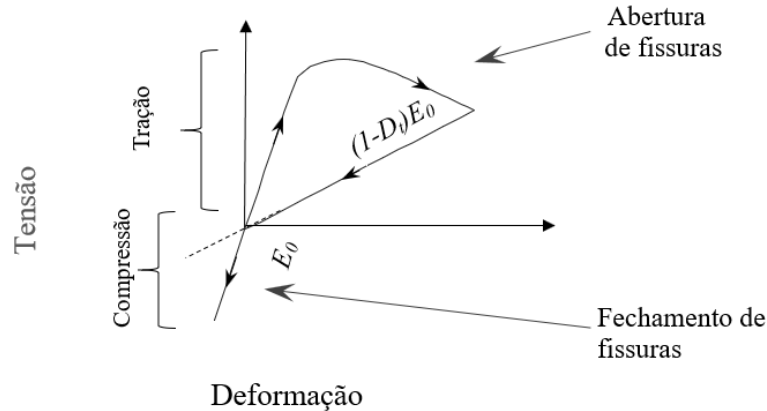
Fonte: Mazars (1984) *apud* Nedjar (1995).

5.1 Efeito unilateral e Modelo μ

O modelo original de Mazars passou por alguns ajustes principalmente em busca de melhorias no comportamento ao cisalhamento e à compressão biaxial. Estes ajustes, ainda assim, não eram capazes de capturar o chamado efeito unilateral. Este fenômeno é caracterizado

por uma recuperação de rigidez ocasionado pelo fechamento das fissuras abertas quando o concreto passa de um estado de tração para um estado de compressão, como mostra a Figura 29.

Figura 29 – Fechamento de fissuras



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para contemplar o efeito unilateral, ao invés do dano médio apresentado na Equação (136), Mazars, Hamon e Grange (2015) propuseram uma distinção entre o dano causado por tração e o dano causado por compressão. Assim, definem-se duas superfícies de carregamento independentes ao invés de apenas uma, como apresentado na Equação (135):

$$\varepsilon_{eq,t} = \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)} \quad (141)$$

$$\varepsilon_{eq,c} = \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)} \quad (142)$$

onde I_ε é o primeiro invariante do tensor das deformações e $J_\varepsilon = 1/2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]$. As variáveis Y_t e Y_c assumem os valores máximos durante o histórico de carregamento. Assim

$$Y_t = \max(\varepsilon_{eq,t}) \quad (143)$$

$$Y_c = \max(\varepsilon_{eq,c}) \quad (144)$$

A evolução de cada variável de dano é iniciada a partir de um respectivo limiar de dano, ε_{t0} para a tração e ε_{c0} para a compressão. Para a obtenção da tensão equivalente,

determina-se uma variável de dano equivalente D correlacionada com a variável Y através da lei de evolução

$$D = 1 - \frac{Y_0(1-A)}{Y} - \frac{A}{\exp[B(Y-Y_0)]} \quad (145)$$

A variável Y é obtida através de uma correlação entre as variáveis Y_t e Y_c , assim como o limiar do dano Y_0 é obtido através de uma correlação entre os limiares ε_{t0} e ε_{c0} :

$$Y = rY_t + (1-r)Y_c \quad (146)$$

$$Y = r\varepsilon_{t0} + (1-r)\varepsilon_{c0} \quad (147)$$

onde r é o coeficiente de triaxialidade que relaciona a deformação tridimensional com o estado puro de tração ($r = 1$) e o estado puro de compressão ($r = 0$). O parâmetro r é proposto por (LEE; FENVES, 1998):

$$r = \frac{\sum \langle \bar{\sigma}_i \rangle_+}{\sum |\bar{\sigma}_i|} \quad (148)$$

Na Equação (148), $\bar{\sigma}_i$ representa as componentes da tensão equivalente nas direções principais $i = 1, 2$ e 3 . Na Equação (145), A e B são funções que dependem de parâmetros do material. Estes parâmetros são obtidos a partir de ensaios uniaxiais de tração e compressão. Mazars *et al.* (2015) propõem os seguintes valores para A e B :

$$A = A_t(2r^2(1-2k) - r(1-4k)) + A_c(2r^2 - 3r + 1) \quad (149)$$

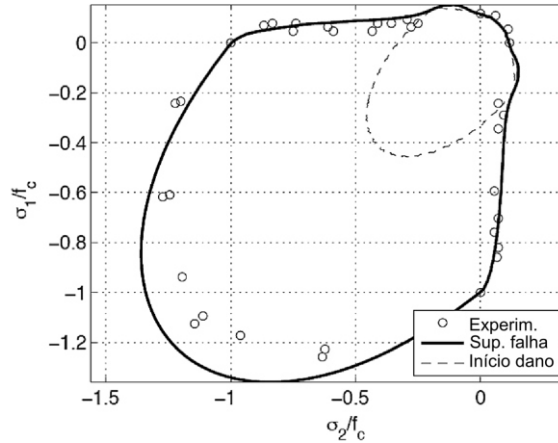
$$B = r^{r^2-2r+2}B_t + (1-r^{r^2-2r+2})B_c \quad (150)$$

O parâmetro k é um coeficiente de calibração para casos onde o cisalhamento é importante (MAZARS; HAMON; GRANGE, 2015). Em casos de carregamento mais complexos, a variação do parâmetro r deve garantir a inequação de Clausius-Duhem. Mazars e Grange (2015) testaram a condição de inequação de Clausius-Duhem por meio de uma série de carregamentos com fortes variações de r e mostraram que para esta série de carregamentos a inequação é satisfeita.

A Figura 30 mostra os resultados obtidos por Mazars, Hamon e Grange (2015) para o caso de estado plano de tensão ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$). Os autores apresentam a superfície de falha plotando diversos conjuntos de resultados (σ_{11} , σ_{22}). Os valores estão normalizados pelo máximo valor de tensão na compressão f_c . Os resultados obtidos são comparados com os

resultados experimentais fornecidos por Kupfer e Gerstle (1973) e mostram-se próximos aos dos autores. Algumas diferenças mais acentuadas surgem na região de bicompressão.

Figura 30 – Plano $\sigma_{33} = 0$, início do dano (linha tracejada) e superfície de falha (linha contínua), comparado com dados experimentais de Kupfer *et al.* (1973)



Fonte: Adaptado de Mazars, Hamon e Grange (2015).

5.2 Redução para o caso unidimensional

Neste trabalho, a não linearidade física será abordada através de discretização da seção dos elementos de pórtico plano pelo Método das Fatias, como apresentado na Seção 3.4. Sendo assim, modelos constitutivos unidimensionais tornam-se interessantes na análise através do Método dos Elementos Finitos, principalmente pelo seu baixo custo computacional.

Na metodologia adotada pelo Método das Fatias, cada fatia (ou fibra) estará sujeita sempre a um estado uniaxial de tensões, ou seja, $(\sigma_{11} = \sigma, \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0)$. No caso do Modelo μ , esta simplificação é facilmente incorporada através do conceito do coeficiente de triaxialidade r .

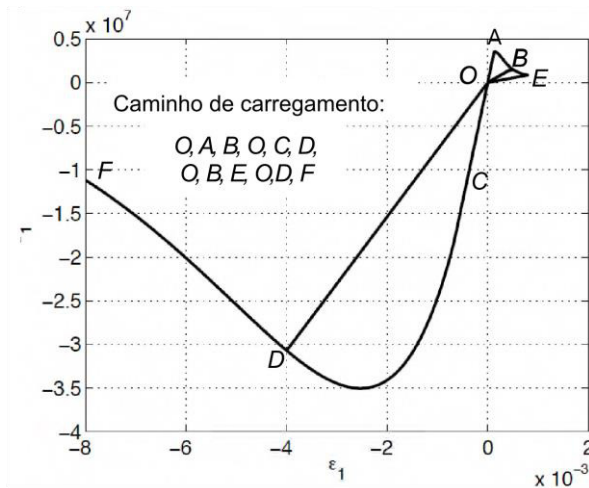
Considerando um modelo unidimensional para o caso do Modelo μ , o coeficiente de triaxialidade r passa a valer 1 para tração e 0 para compressão. As consequências desta consideração trazem simplificações importantes no Modelo μ . Para a tração, $Y = Y_t$, $Y_0 = \varepsilon_{t0}$, $A = A_t$ e $B = B_t$ e, para a compressão, $Y = Y_c$, $Y_0 = \varepsilon_{c0}$, $A = A_c$ e $B = B_c$. Assim, a evolução da variável de dano D pode ser separada em duas partes independentes:

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{t0}(1 - A_t)}{Y_t} - \frac{A_t}{e^{B_t(Y_t - \varepsilon_{t0})}} \quad (151)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{c0}(1 - A_c)}{Y_c} - \frac{A_c}{e^{B_c(Y_c - \varepsilon_{c0})}} \quad (152)$$

onde $Y_t = \sup(\varepsilon_{0t}, \max(\varepsilon))$ e $Y_c = \sup(\varepsilon_{0c}, \max(\varepsilon))$. O comportamento deste modelo uniaxial é mostrado na Figura 31.

Figura 31 – Caminho de tensão-deformação mostrando o efeito unilateral



Fonte: Adaptado de Mazars, Hamon e Grange (2015).

Na Figura 31, o caminho OAB representa um primeiro carregamento de tração. O limiar do dano em tração ε_{0t} é atingido no ponto A e o dano na tração D_t evolui até o ponto B . A partir daí, há o descarregamento BO , onde não há acréscimo de dano. Ao passar da região de tração para região de compressão, há um aumento da rigidez caracterizando o efeito unilateral (fechamento de fissuras).

O dano na compressão D_c começa a evoluir a partir do ponto C , crescendo até o ponto D e parando devido ao descarregamento. Ao voltar para a região de tração, o dano na tração D_t passa a evoluir até o ponto E . Com o descarregamento, o dano D_t não evolui. Ao passar para a região de compressão novamente o dano D_t só passa a evoluir ao atingir o valor $Y_c = \sup(\varepsilon_{0c}, \max(\varepsilon))$, que ocorre no ponto D .

A determinação da tensão é feita de forma explícita através da lei constitutiva do material, respectivamente, para a tração e a compressão:

$$\sigma_t = (1 - D_t) E \varepsilon \quad (153)$$

$$\sigma_c = (1 - D_c) E \varepsilon \quad (154)$$

Além da obtenção da tensão, é necessária a obtenção do módulo tangente do material. De maneira análoga ao cálculo das tensões, o módulo tangente é calculado independentemente nos trechos de tração e de compressão. Para a tração, quando o dano está evoluindo, pode ser obtido através da Equação (153) como:

$$\dot{\sigma}_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial D_t} \dot{D}_t \quad (155)$$

Da Equação (155), tem-se que as derivadas da tensão em relação à deformação e em relação ao dano são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon} = E_s = (1 - D_t) E \quad (156)$$

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial D} = -E \varepsilon \quad (157)$$

onde E_s é o módulo secante do material.

A taxa de evolução do dano na tração é obtida através da diferenciação no tempo da Equação (151):

$$\dot{D}_t = \left[\frac{\varepsilon_{t0}(1 - A_t)}{Y_t^2} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y_t - \varepsilon_{t0})]} \right] \dot{\varepsilon} \quad (158)$$

Substituindo as Equações (156) a (158) na Equação (155), obtém-se o módulo tangente na tração quando o dano evolui, ou seja, quando $\varepsilon \geq 0$ e $\varepsilon < Y_c$. Considerando $\dot{\sigma} = [d\sigma/d\varepsilon] \dot{\varepsilon}$, o módulo tangente é dado por

$$\frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} = (1 - D_t) E - \left[\frac{\varepsilon_{t0}(1 - A_t)}{Y_t^2} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y_t - \varepsilon_{t0})]} \right] E \varepsilon \quad (159)$$

De forma análoga, a partir da Equação (171), se $\varepsilon < 0$ e $\varepsilon < Y_c$, módulo tangente na compressão é dado por

$$\frac{d\sigma_c}{d\varepsilon} = (1 - D_c) E - \left[\frac{\varepsilon_{c0}(1 - A_c)}{Y_c^2} + \frac{A_c B_c}{\exp[B_c(Y_c - \varepsilon_{c0})]} \right] E \varepsilon \quad (160)$$

Caso não haja evolução de dano ($\varepsilon < Y_t$) ou ($\varepsilon < Y_c$), significa que está havendo descarregamento ou recarregamento pelo trecho elástico da curva. Neste caso, o módulo tangente é igual ao módulo secante:

$$E_S = (1 - D_t) E \quad (161)$$

$$E_S = (1 - D_c) E \quad (162)$$

5.3 Implementação do Modelo μ para o caso unidimensional

Por não possuir deformação permanente, o Modelo μ unidimensional pode ser decomposto em um procedimento incremental explícito. Isto se dá, pois para cada ponto de deformação conhecido, sabendo-se o histórico das deformações anteriores, é possível determinar uma tensão conjugada.

Dividindo o problema de deformações em incrementos Δn , pode-se reescrever as Equações (153) e (154) na forma incremental para o caso de tração, como

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}^t) E \varepsilon_{n+1} \quad (163)$$

O primeiro passo, dado um incremento de deformação, é verificar se este é superior (em valor absoluto) ao máximo valor de deformação já atingido anteriormente $\varepsilon_n^{t,\max}$. Caso o valor do incremento seja menor ou igual à $\varepsilon_n^{t,\max}$, a variável interna Y_{n+1}^t e a variável de dano são mantidos:

$$Y_{n+1}^t = \sup(\varepsilon_{t0}, \varepsilon_n^{t,\max}) \quad (164)$$

$$D_{n+1}^t = D_n^t \quad (165)$$

No caso de o incremento de deformação superar o valor da máxima deformação $\varepsilon_n^{t,\max}$, esta variável e a variável de dano devem ser atualizadas:

$$\varepsilon_{n+1}^{t,\max} = \varepsilon_{n+1} \quad (166)$$

$$D_{n+1}^t = 1 - \frac{\varepsilon_{t0}(1 - A_t)}{Y_{n+1}^t} - \frac{A_t}{\exp[B_t(Y_{n+1}^t - \varepsilon_{t0})]}$$

Calcula-se o valor da tensão através da relação mostrada na Equação (163). Ao final, calcula-se o módulo tangente consistente a partir da derivação total da Equação (163):

$$d\sigma_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} d\varepsilon_{n+1} + \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial D_{n+1}^t} dD_{n+1}^t \quad (167)$$

onde as derivadas da tensão em relação à deformação e em relação ao dano são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \sigma'_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E'_{S_{n+1}} = (1 - D'_{n+1}) E \quad (168)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{n+1}}{\partial D'_{n+1}} = -E \varepsilon_{n+1} \quad (169)$$

A derivada de D'_{n+1} na Equação (167) é dada por

$$dD'_{n+1} = \left[\frac{\varepsilon_{i0}(1-A_t)}{Y'^2_{n+1}} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y'^2_{n+1} - \varepsilon_{i0})]} \right] d\varepsilon_{n+1} \quad (170)$$

Substituindo as Equações (168) a (170) na Equação (167), obtém-se o módulo tangente:

$$C'_{n+1} = \frac{d\sigma'_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = (1 - D'_{n+1}) E - \left[\frac{\varepsilon_{i0}(1-A_t)}{Y'^2_{n+1}} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(Y'^2_{n+1} - \varepsilon_{i0})]} \right] E \varepsilon_{n+1} \quad (171)$$

Nota-se que a Equação (171) é semelhante ao módulo tangente obtido pelas Equações (159) e (160). Isto se deve ao fato de o modelo ser unidimensional.

Em caso de não evolução do dano, o módulo secante é dado por

$$E^s_{n+1} = (1 - D'_{n+1}) E \quad (172)$$

De maneira similar, com atenção aos sinais, deduz-se o equacionamento para o caso de compressão. A forma incremental do Modelo μ é apresentada no algoritmo mostrado no Quadro 4.

Quadro 4 – Algoritmo do caso unidimensional do Modelo μ

Dados de entrada:	
$E, A_t, B_t, A_c, B_c, \varepsilon_{i0}, \varepsilon_{c0}, \varepsilon_{n+1}, D'_n, D^c_n, Y^t_n, Y^c_n, \varepsilon_n^{t,\max}, \varepsilon_n^{c,\max}$	
Evolução do dano:	
Se $\varepsilon_{n+1} \geq 0$ # <i>Tração</i>	
Se $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n^{t,\max}$	$Y'_{n+1} = \sup(\varepsilon_{i0}, \varepsilon_n^{t,\max})$
Senão, se $\varepsilon_{n+1} \geq \varepsilon_n^{t,\max}$	$\varepsilon_{n+1}^{t,\max} = \varepsilon_{n+1}$
$Y'_{n+1} = \sup(\varepsilon_{i0}, \varepsilon_n^{t,\max})$	

Se $\varepsilon_{n+1} < Y_{n+1}^t$

$status = ELASTIC_TENSION$

$$D_{n+1}^t = D_n^t$$

Senão, se $\varepsilon_{n+1} \geq Y_{n+1}^t$

$status = DAMAGE_TENSION$

$$D_{n+1}^t = 1 - \frac{\varepsilon_{t0}(1 - A_t)}{Y_{n+1}^t} - \frac{A_t}{e^{B_t(Y_{n+1}^t - \varepsilon_{t0})}}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{t,max} = \varepsilon_{n+1}$$

Senão, se $\varepsilon_{n+1} < 0$ # *Compressão*

Se $\varepsilon_{n+1} > \varepsilon_n^{c,max}$

$$Y_{n+1}^c = \inf(\varepsilon_{c0}, \varepsilon_n^{c,max})$$

Senão, se $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^{c,max}$

$$\varepsilon_{n+1}^{c,max} = \varepsilon_{n+1}$$

$$Y_{n+1}^c = \inf(\varepsilon_{c0}, \varepsilon_n^{c,max})$$

Se $\varepsilon_{n+1} > Y_{n+1}^c$

$status = ELASTIC_COMPRESSION$

$$D_{n+1}^c = D_n^c$$

Senão, se $\varepsilon_{n+1} \leq Y_{n+1}^c$

$status = DAMAGE_COMPRESSION$

$$D_{n+1}^c = 1 - \frac{\varepsilon_{c0}(1 - A_c)}{Y_{n+1}^c} - \frac{A_c}{e^{B_c(Y_{n+1}^c - \varepsilon_{c0})}}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{c,max} = \varepsilon_{n+1}$$

Cálculo da tensão:

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}) E \varepsilon_{n+1}$$

Cálculo do módulo tangente:

Se $status = ELASTIC_TENSION$

$$E_{n+1}^t = (1 - D_{n+1}^t) E$$

Senão, se $status = ELASTIC_COMPRESSION$

$$E_{n+1}^t = (1 - D_{n+1}^c) E$$

Senão, se $status = DAMAGE_TENSION$

$$E_{n+1}^t = (1 - D_{n+1}^t) E - \left[\frac{\varepsilon_{t0} (1 - A_t)}{Y_{n+1}^t} + \frac{A_t B_t}{e^{B_t(Y_{n+1}^t - \varepsilon_{t0})}} \right] E \varepsilon_{n+1}$$

Senão, se *status* = *DAMAGE_COMPRESSION*

$$E_{n+1}^t = (1 - D_{n+1}^c) E - \left[\frac{\varepsilon_{c0} (1 - A_c)}{Y_{n+1}^c} + \frac{A_c B_c}{e^{B_c(Y_{n+1}^c - \varepsilon_{c0})}} \right] E \varepsilon_{n+1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

6 MODELO DE DANO DE LEE E FENVES

O uso de modelos de dano sem a consideração de plasticidade, como é o caso do Modelo de Mazars e de outros autores como Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) e Cervera, Oliver e Faria (1995), tem a desvantagem de não possuírem controle da dilatação (LEE; FENVES, 1998). A dilatação, ou expansão volumétrica durante o cisalhamento, é um fenômeno importante em casos de estruturas de concreto submetidas a cargas multiaxiais.

A incorporação do conceito de tensão efetiva da Mecânica do Dano Contínuo em modelos elastoplásticos baseados na Teoria da Plasticidade se tornou uma solução interessante. Esta estratégia possui a vantagem de desacoplar a degradação da rigidez das leis constitutivas do material. Em outras palavras, o dano pode ser obtido através da linearização de equações de evolução similares as da Teoria da Plasticidade ao invés de ser uma função direta das tensões.

O desacoplamento entre degradação da rigidez e plasticidade, entretanto, traz algumas dificuldades na obtenção dos parâmetros de dano. Esta dificuldade vem do fato de os dados experimentais serem normalmente obtidos em função das tensões. Uma vez que não se tem uma relação direta ou explícita entre o dano e as tensões, a calibração dos parâmetros não é trivial.

Alguns trabalhos foram propostos com esta abordagem de dano acoplado à plasticidade através do conceito de tensão efetiva. Dentre os quais se destacam os trabalhos de Simo e Ju (1987) e Ju (1989). Lubliner *et al.* (1989) sugeriram uma outra estratégia para a consideração da degradação da rigidez. Nesta estratégia, as variáveis de dano são acopladas às deformações plásticas nas relações constitutivas. Assim, a obtenção dos parâmetros poderia ser feita de maneira mais adequada a partir de resultados experimentais.

Lee e Fenves (1994) mostraram que o algoritmo do modelo proposto por Lubliner *et al.* (1989) apresentava problemas de estabilidade numérica, gerando deformações espúrias durante o descarregamento. Apesar de este modelo não ter obtido sucesso, um de seus principais aspectos, o conceito de dano baseado na energia de fratura, foi adotado por Lee e Fenves (1998) para a formulação de um modelo de plasticidade com dano acoplado.

O modelo proposto por Lee e Fenves (1998) incorpora outros fenômenos observados no concreto em carregamento cíclico, como a recuperação da rigidez quando há reversão de deformações. Este aspecto também é incorporado nos modelos de dano de Mazars (1986) e Mazars, Hamon e Grange (2015). Outros autores como Ortiz (1985), Ju (1989) e Cervera, Oliver e Faria (1995) também sugerem formas de considerar a recuperação da rigidez.

Um último aspecto a respeito de carregamentos cíclicos em concreto é a variedade de estados de danificação possíveis, advindo de distintos fenômenos. Como no modelo proposto por Mazars, Hamon e Grange (2015), Lee e Fenves (1998) utilizam uma abordagem simples, que é a consideração de duas variáveis de dano. Estas duas variáveis de dano evoluem independentemente uma da outra, sendo uma relacionada à fissuração e outra relacionada ao esmagamento. Basicamente, uma variável de dano da tração e uma de dano na compressão.

6.1 Relação constitutiva e evolução do dano

A definição da relação constitutiva proposta por Lee e Fenves (1998) apresenta consistência termodinâmica apesar de não ser um modelo com plasticidade associada. Os modelos associados são preferíveis para a formulação de relações constitutivas baseadas em funções potenciais. Entretanto, o fenômeno de dilatância observado no concreto é melhor representado por modelos não associados.

Apresenta-se nesta seção, a formulação do Modelo de Lee e Fenves (1998) no seu formato original. Nesta formulação, o modelo constitutivo 3D é dado pela Equação (71). A partir da consideração de tensão efetiva dada pela Mecânica do Dano Contínuo, pode-se reescrever a na Equação (71) como

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D) \mathbf{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (173)$$

De forma similar à Equação (79), a taxa de evolução das deformações plásticas pode ser obtida através da lei de fluxo baseada no potencial plástico G :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \nabla_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} G \quad (174)$$

A fim de representar a danificação do material, uma nova variável interna além da deformação plástica é necessária. A variável interna $\boldsymbol{\kappa}$ definida por Lubliner *et al.* (1989) é adotada. A taxa de evolução desta variável pode ser definida então como

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (175)$$

onde a função \mathbf{H} é definida através da consideração de dissipação plástica.

Para incorporar os comportamentos distintos do dano na tração e na compressão, a variável $\boldsymbol{\kappa}$ é definida como um vetor contendo dois valores escalares

$$\boldsymbol{\kappa} = \{ \kappa_t \quad \kappa_c \} \quad (176)$$

No modelo, a superfície de escoamento depende, além da tensão, de funções de resistência uniaxiais f_t e f_c . Estas funções representam a resistência do material sob carregamentos uniaxiais e são definidas em termos das variáveis internas κ_t e κ_c :

$$f_\chi = f_\chi(\kappa_\chi) \quad (177)$$

onde $\chi = t, c$ são índices que representam tração e compressão, respectivamente.

Assumindo que a Equação (177) é uma fatoração da degradação do dano e das tensões efetivas, tem-se que

$$f_\chi = [1 - D_\chi(\kappa_\chi)] \bar{f}_\chi(\kappa_\chi) \quad (178)$$

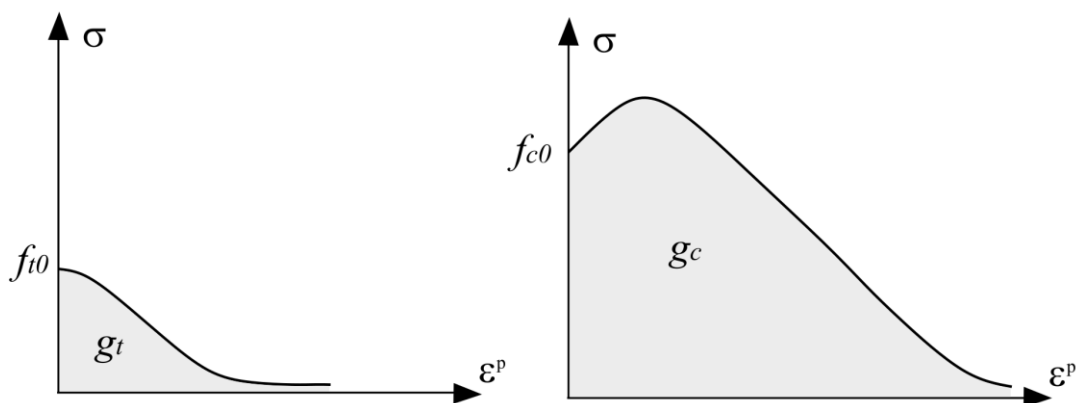
onde $\bar{f}_\chi(\kappa_\chi)$ representa as funções uniaxiais em termos de tensão efetiva para tração e compressão.

A relação constitutiva uniaxial em termos de deformação adotada por Lee e Fenves (1998) é a apresentada por Lubliner *et al.* (1989):

$$\sigma_\chi = f_{\chi 0} \left[(1 + a_\chi) \exp(-b_\chi \varepsilon^p) - a_\chi \exp(-2b_\chi \varepsilon^p) \right] \quad (179)$$

onde $f_{\chi 0}$ representa a tensão de escoamento (ou o início da degradação do material). As constantes a_χ e b_χ são determinadas para caracterizar as duas curvas tensão-deformação plástica, como mostrado na Figura 32.

Figura 32 – Curvas tensão-deformação plástica (a) para tração e (b) para compressão



Fonte: Adaptado de Lubliner *et al.* (1989).

As áreas sob as curvas apresentadas na Figura 32 representam a energia necessária para a total danificação do material. Os valores de g_t e g_c podem ser definidos através de

uma relação entre a energia de fratura G_t e a energia de esmagamento G_c e os respectivos comprimentos característicos l_t e l_c :

$$g_\chi = \frac{G_\chi}{l_\chi} \quad (180)$$

A definição destes valores é importante, pois tem influência no fenômeno de sensibilidade de malha (BAZANT; PLANAS, 1998).

Assume-se que as variáveis internas κ_t e κ_c podem ser obtidas das curvas apresentadas na Figura 32 através de

$$\kappa_\chi = \frac{1}{g_\chi} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma_\chi d\varepsilon^p \quad (181)$$

onde

$$g_\chi = \int_0^\infty \sigma_\chi d\varepsilon^p \quad (182)$$

Assumindo também que a degradação da rigidez tem a forma exponencial

$$1 - D_\chi = \exp(-d_\chi \varepsilon^p) \quad (183)$$

onde d_χ é um parâmetro de ajuste da evolução do dano, pode-se definir a relação constitutiva em termos de tensão efetiva como

$$\bar{\sigma}_\chi = f_{\chi 0} \left[(1 + a_\chi) \left(\exp(-b_\chi \varepsilon^p) \right)^{1-d_\chi/b_\chi} - a_\chi \left(\exp(-2b_\chi \varepsilon^p) \right)^{1-d_\chi/b_\chi} \right] \quad (184)$$

Combinando as Equações (181) e (184), obtém-se a tensão em função da variável interna κ_χ :

$$\sigma_\chi = f_\chi(\kappa_\chi) = \frac{f_{\chi 0}}{a_\chi} \left[(1 + a_\chi) \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)} - \phi_\chi(\kappa_\chi) \right] \quad (185)$$

onde $\phi_\chi(\kappa_\chi) = 1 + a_\chi (2 + a_\chi) \kappa_\chi$.

Da mesma forma, a tensão efetiva e a variável de dano em termos da variável interna κ_χ são dadas por

$$\bar{\sigma}_\chi = \bar{f}_\chi(\kappa_\chi) = f_{\chi 0} \left[\left(\frac{1}{a_\chi} \right) \left(1 + a_\chi - \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)} \right) \right]^{1-d_\chi/b_\chi} \sqrt{\phi_\chi(\kappa_\chi)} \quad (186)$$

$$D_{\chi} = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_{\chi}} \right) \left(1 + a_{\chi} - \sqrt{\phi_{\chi}(\kappa_{\chi})} \right) \right]^{1-d_{\chi}/b_{\chi}} \quad (187)$$

A partir da Equação (181), a evolução da variável interna pode ser reescrita como

$$\dot{\kappa}_{\chi} = \frac{1}{g_{\chi}} f_{\chi}(\kappa_{\chi}) \dot{\varepsilon}^p \quad (188)$$

6.2 Superfície de escoamento e lei de fluxo não associado

A superfície de escoamento proposta por Lee e Fenves (1998) é uma adaptação da superfície de escoamento proposta por Lubliner *et al.* (1989). Esta superfície de escoamento é do tipo utilizado para materiais friccionais, como rocha e concreto:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad (189)$$

onde c representa a coesão do material.

A superfície apresentada por Lubliner *et al.* (1989) é dada por

$$F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2} + \beta \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\max} \rangle \right] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (190)$$

onde \bar{I}_1 é o primeiro invariante do tensor das tensões, \bar{J}_2 é o segundo invariante do tensor desviador, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\max}$ é a tensão principal máxima. A barra sobre os termos indica que estes são referentes às tensões efetivas; c_c representa a coesão em termos da variável interna $\boldsymbol{\kappa}$; α e β são parâmetros constantes baseados nas tensões iniciais de escoamento em carregamentos uniaxiais e biaxiais:

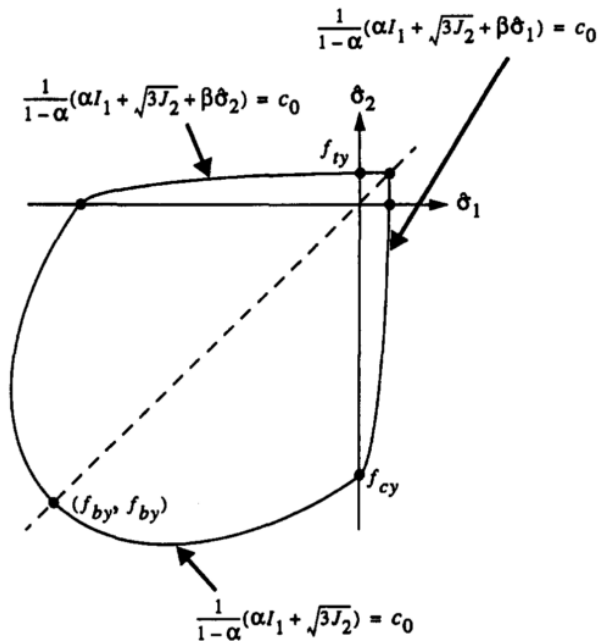
$$\alpha = \frac{f_{b0}/f_{c0} - 1}{2(f_{b0}/f_{c0}) - 1} \quad (191)$$

$$\beta = \frac{f_{c0}}{f_{t0}} (\alpha - 1) - (1 + \alpha) \quad (192)$$

Nas Equações (191) e (192), os parâmetros f_{t0} , f_{c0} e f_{b0} são referentes à tensão de escoamento do concreto na tração uniaxial, na compressão uniaxial e na compressão biaxial, respectivamente. Estes valores são obtidos através de ensaios. Uma relação usada na literatura entre a tensão de escoamento na compressão uniaxial e biaxial é dada por $f_{b0}/f_{c0} = 1,16$.

A Figura 33 mostra a superfície de escoamento no plano $\sigma_1 - \sigma_2$. Este corte mostra pontos de singularidade nas mudanças de compressão para tração e quadrante de tração pura. A singularidade pode causar problemas numéricos em casos de tensões biaxiais ou triaxiais. Entretanto, para casos uniaxiais, o problema não existe.

Figura 33 – Função de escoamento para o caso de tensão biaxial ($\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_3 = 0$)



Fonte: Lee e Fenves (1998).

As mudanças propostas por Lee e Fenves (1998) tiveram o intuito de expandir o modelo apresentado por Lubliner *et al.* (1989), o qual apresentava bons resultados para carregamentos monotônicos. Já para carregamentos cíclicos, os resultados não eram satisfatórios. Para tal, a Equação (192) foi substituída por uma função que leva em consideração tanto a coesão na compressão quanto a coesão na tração

$$\beta(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{c_c(\boldsymbol{\kappa}^c)}{c_t(\boldsymbol{\kappa}^t)}(1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (193)$$

onde

$$c_c(\boldsymbol{\kappa}^c) = -\bar{f}_c(\boldsymbol{\kappa}^c) \quad (194)$$

$$c_t(\boldsymbol{\kappa}^t) = \bar{f}_t(\boldsymbol{\kappa}^t) \quad (195)$$

Assim, a superfície de escoamento toma a forma

$$F(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2} + \beta(\boldsymbol{\kappa}) \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\max} \rangle \right] - c_c(\boldsymbol{\kappa}) \quad (196)$$

O potencial plástico é dado por uma função do tipo Drucker-Prager:

$$G(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{2\bar{J}_2} + \alpha_p I_1 \quad (197)$$

onde α_p é um parâmetro de dilatância do modelo.

A determinação das tensões reais pode ser feita em duas etapas. Em uma primeira etapa se determinam as tensões efetivas $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e a partir do estado de danificação do material se determinam, em uma segunda etapa, as tensões reais $\boldsymbol{\sigma}$. A relação mostrada na Equação (108) pode ser reescrita aqui para o caso 3D como

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-D)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (198)$$

onde a variável de dano D é definida pela combinação

$$D = 1 - (1-D_t)(1-D_c) \quad (199)$$

O efeito unilateral, ou fechamento de fissuras, assim como no Modelo μ , pode ser considerado no Modelo de Lee e Fenves. Esta consideração é feita através de um parâmetro s que quantifica a recuperação da rigidez. Para tal, a variável de dano na Equação (199) é substituída por

$$D = 1 - (1-s(\bar{\boldsymbol{\sigma}})D_t)(1-D_c) \quad (200)$$

onde

$$s(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = s_0 + (1-s_0)r(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (201)$$

Na Equação (201), s_0 é um valor que determina a mínima recuperação de rigidez do material. Quando $s_0 = 0$, a recuperação da rigidez é total, ou seja, as fissuras abertas são totalmente fechadas. Quando $s_0 = 1$, não há recuperação de rigidez. $r(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ é o coeficiente de triaxialidade definido pela Equação (148).

6.3 Obtenção dos parâmetros do modelo

Uma etapa importante da modelagem da lei constitutiva, seja ela de qualquer natureza, é a obtenção dos parâmetros que ditam o seu comportamento. Baseando esta obtenção através de experimentos, pode-se obter por meio de calibração os parâmetros desejados. No

caso do Modelo de Lee e Fenves, estes parâmetros são os que definem o comportamento das curvas de tensão real (Equação (185)) e de tensão efetiva (Equação (186)) em função da variável interna κ_λ .

Lublinter *et al.* (1989) demonstram que é possível obter o parâmetro a_c da curva de compressão a partir da tensão máxima de compressão f'_c , que é um parâmetro de fácil obtenção por meio de ensaios. Seja a curva de tensão na compressão dada pela Equação (185), se $a_c > 1$, então o máximo valor de σ_c (definido como f'_c) é dado por

$$f'_c = \frac{f_{c0}(1+a_c)^2}{4a_c} \quad (202)$$

Desta forma, pode-se definir o valor de a_c como

$$a_c = 2 \frac{f'_c}{f_{c0}} - 1 + \sqrt{\left(\frac{f'_c}{f_{c0}}\right)^2 - \frac{f'_c}{f_{c0}}} \quad (203)$$

Lee e Fenves (1998) mostram que a obtenção da razão d_c/b_c é feita admitindo-se conhecido o valor do dano \tilde{D}_c correspondente à máxima tensão de compressão f'_c . Este valor pode ser obtido através de experimentos de carregamento e descarregamento. Encontrando o valor máximo da curva de tensão na compressão, para o qual κ'_c é o valor correspondente da variável interna de dano, tem-se que

$$\sqrt{\phi(\kappa'_c)} = \frac{1+a_c}{2} \quad (204)$$

Substituindo o valor obtido na Equação (204) dentro da Equação (187), tem-se que

$$\tilde{D}_c = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_c} \right) \left(1 + a_c - \frac{1+a_c}{2} \right) \right]^{d_c/b_c} \quad (205)$$

cuja relação entre d_c/b_c e \tilde{D}_c pode ser reescrita como

$$\frac{d_c}{b_c} = \frac{\log(1-\tilde{D}_c)}{\log\left(\frac{1+a_c}{2a_c}\right)} \quad (206)$$

Para o caso dos parâmetros de tração a_t e d_t/b_t uma abordagem diferente é proposta por Lee e Fenves (1998), já que a degradação do material correspondente à máxima tensão é tido como zero. Ou seja, f'_t a máxima tensão de tração, tem-se que $f'_t = f_{t0}$. Neste

caso, adota-se um valor conhecido de dano \tilde{D}_t correspondente ao valor de tensão $\sigma_t = f'_t/2$. Assim, para a variável de dano correspondente κ'_t , encontra-se a relação

$$\sqrt{\phi(\kappa'_t)} = \frac{1 + a_t + \sqrt{1 + a_t^2}}{2} \quad (207)$$

Substituindo o valor obtido na Equação (207) dentro da Equação (187) e reorganizando a relação, tem-se que

$$\frac{d_t}{b_t} = \frac{\log(1 - \tilde{D}_t)}{\log\left[(1 + a_t) - \sqrt{1 + a_t^2} - \log(2a_t)\right]} \quad (208)$$

Lee e Fenves (1998) recomendam que a obtenção dos parâmetros de tração apresentado na Equação (208) seja feita de forma inversa, ou seja, é preferível obter a_t em função de d_t/b_t e \tilde{D}_t . Isto porque o parâmetro a_t não tem sentido físico. Assim, reescreve-se a Equação (208) como

$$a_t = \frac{\left[2(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} - 1\right]}{2(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} \left[(1 - \tilde{D}_t)^{b_t/d_t} - 1\right]} \quad (209)$$

6.4 Redução para o caso unidimensional

Da mesma forma que foi feita no caso do Modelo μ anteriormente, será feita a redução do Modelo de Lee e Fenves para o modelo unidimensional. Neste caso, uma primeira etapa é identificar quais termos da superfície de escoamento podem ser reduzidos para o caso unidimensional. Fazendo as tensões efetivas principais $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$ e $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0$, tem-se as seguintes reduções:

$$\bar{I}_1 = \bar{\sigma} \quad (210)$$

$$\sqrt{3\bar{J}_2} = |\bar{\sigma}| \quad (211)$$

$$\langle \hat{\sigma}_{\max} \rangle = \langle \bar{\sigma} \rangle \quad (212)$$

Desta forma, a superfície de escoamento e o potencial plástico podem ser reescritos como

$$F(\bar{\sigma}, \kappa) = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha \bar{\sigma} + |\bar{\sigma}| + \beta(\kappa) \langle \bar{\sigma} \rangle] - c_c(\kappa) \quad (213)$$

$$G(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{2}{3}} |\bar{\sigma}| + \alpha_p \bar{\sigma} \quad (214)$$

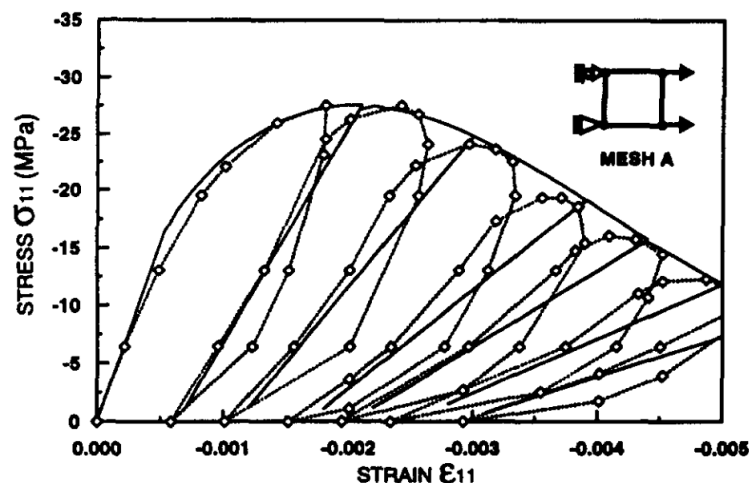
Da mesma forma, a lei de fluxo não associada para o caso unidimensional é dada por

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \nabla_{\bar{\sigma}} G = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\bar{\sigma}) + \alpha_p \right) \quad (215)$$

O comportamento unidimensional pode ser avaliado de forma mais simples, pois as tensões obtidas devem seguir exatamente o comportamento das curvas de tensão unidimensionais adotadas. A Figura 34 mostra o comportamento cíclico na compressão do Modelo de Lee e Fenves em sua versão 3D, mas para um caso unidimensional. Observa-se o acúmulo de deformações residuais e a perda de rigidez através da redução da inclinação das retas de descarregamento.

A curva de tensão-deformação apresentada na Figura 34 foi obtida com as seguintes propriedades do material: $E = 3,17 \times 10^4$ MPa , $f'_c = -27,6$ MPa , $G_c = 5690$ N/m , $l_c = 82,6$ mm , $\alpha_p = 0,2$ e $\tilde{D}_c = 0,4$. Os resultados obtidos (linha contínua sem pontos) são comparados com os resultados de ensaios experimentais fornecidos por Karsan e Jirsa (1969) (linha contínua com pontos). Neste exemplo, Lee e Fenves (1998) adotaram uma malha com um único elemento quadrado de dimensões $82,6 \times 82,6$ mm.

Figura 34 – Carregamento cíclico na compressão



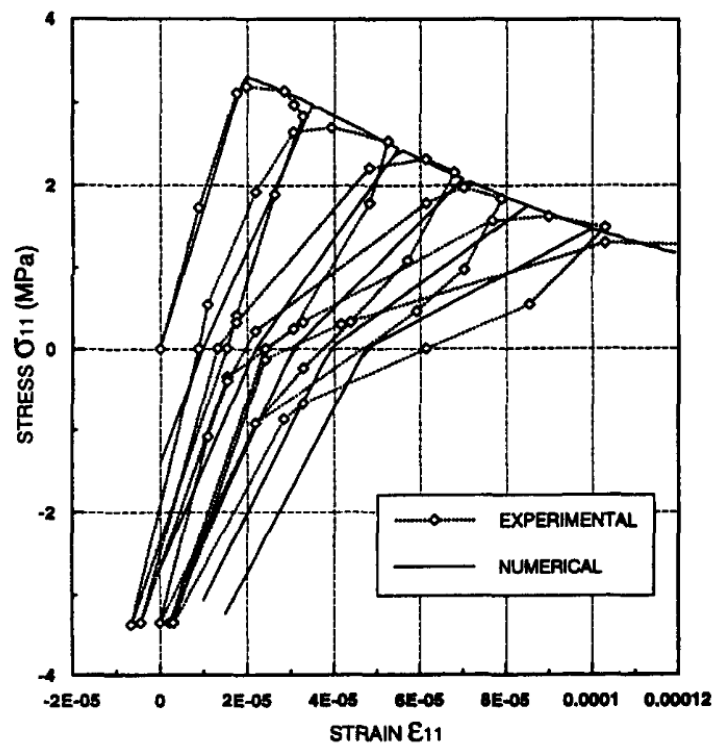
Fonte: Lee e Fenves (1998).

O efeito unilateral pode ser observado na Figura 35, no qual é adotado um valor de $s_0 = 0,5$. Os autores utilizaram como comparação os resultados experimentais apresentados por Reinhart (1984) com as seguintes propriedades do material: $E = 3,9 \times 10^4$ MPa, $f'_t = 3,2$ MPa, $f'_c = -40$ MPa, $G_t = 45$ N/m, $G_c = 450$ N/m, $l_t = l_c = 50$ mm, $\alpha_p = 0,2$, $\tilde{D}_t = 0,8$ e $\tilde{D}_c = 0,5$.

6.5 Implementação do Modelo de Lee e Fenves para o caso unidimensional

A partir do desenvolvimento incremental do modelo unidimensional apresentado, pode-se definir um algoritmo de mapeamento de retorno em três passos: (1) Preditor elástico, (2) Corretor plástico e (3) Corretor de dano. As duas primeiras etapas são feitas no domínio das tensões efetivas. Isto pode ser feito porque a variável de dano D é função apenas da tensão efetiva $\bar{\sigma}$ e da variável interna κ^z . Desta forma, D pode ser determinado em uma etapa posterior ao corretor plástico. A terceira etapa consiste então na determinação da variável de dano D e da tensão real σ .

Figura 35 – Efeito unilateral no Modelo de Lee e Fenves



Fonte: Lee e Fenves (1998).

Na etapa de preditor elástico, obtêm-se o valor de uma tensão efetiva tentativa $\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$ através da relação constitutiva

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (216)$$

A partir do valor da tensão efetiva tentativa $\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}$, a condição de escoamento é verificada:

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} + |\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}| + \beta(\kappa_n^c, \kappa_n^t) \langle \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \rangle \right] - c_c(\kappa_n^c) \leq 0 \quad (217)$$

Caso a condição seja satisfeita, as variáveis internas, as variáveis de dano e a tensão efetiva permanecem com os seus valores do incremento anterior:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad \kappa_{n+1}^\chi = \kappa_n^\chi, \quad D_{n+1} = D_n, \quad \bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n \quad (218)$$

Caso a condição não seja satisfeita, passa-se à fase de corretor plástico. Nesta fase, deseja-se encontrar um conjunto de variáveis $(\bar{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1}^\chi, \Delta\lambda)$ que satisfaça as seguintes equações:

$$F_{n+1}(\bar{\sigma}_{n+1}) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \bar{\sigma}_{n+1} + |\bar{\sigma}_{n+1}| + \beta(\kappa_{n+1}^c, \kappa_{n+1}^t) \langle \bar{\sigma}_{n+1} \rangle \right] - c_c(\kappa_{n+1}^c) = 0 \quad (219)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - E\Delta\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) + \alpha_p \right) \quad (220)$$

$$\kappa_{n+1}^\chi = \kappa_n^\chi + \frac{1}{g_\chi} f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi) \Delta\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) + \alpha_p \right) \quad (221)$$

O sistema não linear formado pelas Equações (219) a (221) pode ser resolvido através do Método de Newton-Raphson (SIMO; HUGHES, 2000) onde as três variáveis são encontradas de uma única vez. Entretanto, esta metodologia apresenta alguns problemas numéricos de mal condicionamento.

Estes problemas de mal condicionamento vêm da diferença entre as ordens de grandezas das variáveis e podem gerar problemas de convergência. Enquanto o valor incremental do multiplicador plástico e a deformação plástica possuem valores inferiores à unidade, a tensão efetiva possui valores usuais da ordem de 10^6 .

Uma outra metodologia para encontrar os valores atualizados das variáveis do sistema de Equações (219) a (221) é apresentado mais à frente.

Uma vez convergidas as variáveis ($\bar{\sigma}_{n+1}$, κ_{n+1}^z , $\Delta\lambda$), passa-se à última etapa do algoritmo, a correção de dano. Esta etapa consiste no cálculo da variável de dano e na tensão real:

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \bar{\sigma}_{n+1} \quad (222)$$

Para incorporar o efeito de fechamento e abertura de fissuras, a variável de dano no instante de tempo atualizado D_{n+1} é dada através de

$$D_{n+1} = 1 - (1 - D_{n+1}^c) (1 - s_{n+1} D_{n+1}^t) \quad (223)$$

onde

$$s_{n+1} = s_0 + (1 - s_0) \frac{\langle \bar{\sigma}_{n+1} \rangle}{|\bar{\sigma}_{n+1}|} \quad (224)$$

Saritas e Filippou (2009) apresentam uma formulação do modelo 3D de Lee e Fenves utilizando uma estratégia semelhante. Utilizando o algoritmo de mapeamento de retorno e através da discretização do tempo em um método de Euler implícito, os autores chegam ao problema não linear equivalente ao apresentado nas Equações (219) a (221). Para o caso 3D, a solução do problema é dada pelo conjunto de variáveis ($\bar{\sigma}_{n+1}$, κ_{n+1} , $\Delta\lambda$) que satisfaça as equações

$$F(\bar{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = 0 \quad (225)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta\lambda \mathbf{C}_0 \nabla_{\bar{\sigma}} G \quad (226)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda \mathbf{H}(\bar{\sigma}, \kappa_{n+1}) \quad (227)$$

Para reduzir o custo computacional, tendo em vista a utilização do modelo em problemas estruturais, Saritas e Filippou (2009) propõem a redução da dimensão das Equações (225) a (227). Esta redução é feita através de uma metodologia de condensação da relação constitutiva do material de um estado tridimensional de tensões para um estado plano de tensões. Uma estratégia similar pode ser encontrada em Klinkel e Govindjee (2002).

Com relação ao modelo proposto neste trabalho, a estratégia apresentada por Saritas e Filippou (2009) se diferencia na dimensão do problema. Enquanto os autores citados consideram um estado plano de tensões, o modelo proposto neste trabalho considera um estado unidimensional. Para o caso de elementos de barras, algumas desvantagens do modelo unidimensional podem ser encontradas em estruturas com seção transversal grande em relação ao comprimento. Nestes casos, o cisalhamento no plano não deve ser desprezado.

6.5.1 Cálculo do corretor plástico

O sistema de equações não lineares (219) a (221) pode ser resolvido em duas etapas através do desacoplamento da evolução das variáveis internas da superfície de escoamento $F_{n+1}(\bar{\sigma}_{n+1})$ (SIMO; HUGHES, 2000). Para identificar um passo iterativo, é adotado o superescrito $(k+1)$ a direita da variável. Definem-se o resíduo e a condição de escoamento do passo iterativo inicial como

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon_{n+1}^{p(k)} + \varepsilon_n^p \\ -\kappa_{n+1}^{\chi(k)} + \kappa_n^\chi \end{Bmatrix} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\bar{\sigma}} G \\ \frac{f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi)}{g_\chi} \partial_{\bar{\sigma}} G \end{Bmatrix} \quad (228)$$

$$F_{n+1}^{(k)} = F_{n+1}^{(k)}(\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \kappa_{n+1}^{\chi(k)}) = 0 \quad (229)$$

onde o superescrito (k) representa a iteração inicial.

A relação constitutiva da iteração inicial na sua forma incremental é dada por

$$\varepsilon_{n+1}^{p(k)} = \varepsilon_{n+1}^{(k)} - \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{E} \quad (230)$$

A solução do sistema de Equações (228) e (229) é dada através da sua linearização. Desta forma, substituindo a Equação (230) na Equação (228), o sistema linearizado é dado por

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \nabla \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\bar{\sigma}_{n+1}^{p(k)} \\ \delta\kappa_{n+1}^{\chi(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial_{\bar{\sigma}} G \\ \frac{f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi)}{g_\chi} \partial_{\bar{\sigma}} G \end{Bmatrix}^{(k)} \delta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (231)$$

$$F_{n+1}^{(k)} + \partial_{\bar{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} \delta\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \partial_{\kappa^\chi} F_{n+1}^{(k)} \delta\kappa_{n+1}^{\chi(k)} = 0 \quad (232)$$

Na Equação (231), faz-se o termo $\nabla \mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$. Além disto, reordenando a Equação (232) em um formato vetorial, têm-se as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \delta\bar{\sigma}_{n+1}^{p(k)} \\ \delta\kappa_{n+1}^{\chi(k)} \end{Bmatrix} = -\mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\bar{\sigma}} G \\ \frac{f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi)}{g_\chi} \partial_{\bar{\sigma}} G \end{Bmatrix}^{(k)} \delta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \quad (233)$$

$$F_{n+1}^{(k)} + \left\{ \partial_{\bar{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} \quad \partial_{\kappa^\chi} F_{n+1}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \delta\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} \\ \delta\kappa_{n+1}^{\chi(k)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (234)$$

Por fim, substituindo a Equação (233) na Equação (234), obtém-se uma relação direta para o cálculo do multiplicador plástico:

$$\delta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} = \frac{F_{n+1}^{(k)} - \left\{ \partial_{\bar{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} \quad \partial_{\kappa^\chi} F_{n+1}^{(k)} \right\} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\left\{ \partial_{\bar{\sigma}} F_{n+1}^{(k)} \quad \partial_{\kappa^\chi} F_{n+1}^{(k)} \right\} \mathbf{A}_{n+1}^{(k)} \left\{ \begin{array}{c} \partial_{\bar{\sigma}} G \\ \frac{f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi)}{g_\chi} \partial_{\bar{\sigma}} G \end{array} \right\}^{(k)}} \quad (235)$$

Após o cálculo do incremento do multiplicador plástico $\delta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)}$, obtém-se os incrementos de tensão efetiva e de variável interna utilizando as Equações (230) e (233). As variáveis são então atualizadas para a nova iteração:

$$\delta\varepsilon_{n+1}^{p(k)} = -\frac{\delta\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{E} \quad (236)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p(k+1)} = \varepsilon_{n+1}^{p(k)} + \delta\varepsilon_{n+1}^{p(k)} \quad (237)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \delta\bar{\sigma}_{n+1}^{(k)} \quad (238)$$

$$\kappa_{n+1}^{\chi(k+1)} = \kappa_{n+1}^{\chi(k)} + \delta\kappa_{n+1}^{\chi(k)} \quad (239)$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} + \delta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \quad (240)$$

O procedimento iterativo é refeito até que se atinja um nível aceitável de tolerância ou até que um limite de iterações seja atingido. Neste último caso, não há convergência.

A forma incremental do modelo unidimensional do Modelo de Lee e Fenves é resumida no Quadro 5.

6.5.2 Cálculo do módulo tangente consistente

O módulo tangente consistente $E_{n+1}^t = d\sigma_{n+1}/d\varepsilon_{n+1}$ pode ser obtido uma vez que condição de escoamento e a relação constitutiva do material são obedecidas. Além destas duas funções, a evolução da variável interna também deve ser constatada. Chamando de Q_{n+1} o resíduo da evolução da variável interna, tem-se as seguintes relações:

$$Q_{n+1} = -\kappa_{n+1}^\chi + \kappa_n^\chi + \Delta\lambda \frac{f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi)}{g_\chi} \partial_{\bar{\sigma}} G = 0 \quad (241)$$

$$F_{n+1}(\bar{\sigma}_{n+1}, \kappa_{n+1}^\chi) = 0 \quad (242)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p\right) \quad (243)$$

O conjunto de Equações (241) a (243) é verdadeiro já que o algoritmo de mapeamento de retorno foi executado. Para simplificar a obtenção do módulo tangente consistente, é adotada aqui uma metodologia similar à utilizada por Lee e Fenves (2001) e por Omid e Lofti (2010).

Diferenciando a Equação (241), obtém-se a relação

$$dQ_{n+1} = \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} d\bar{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda} d\kappa_{n+1}^\lambda + \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \Delta\lambda_{n+1}} d\Delta\lambda_{n+1} = 0 \quad (244)$$

Rearranjando a Equação (244), tem-se

$$d\kappa_{n+1}^\lambda = T_{\kappa\bar{\sigma}} d\bar{\sigma}_{n+1} + T_{\kappa\Delta\lambda} d\Delta\lambda_{n+1} = 0 \quad (245)$$

onde

$$T_{\kappa\bar{\sigma}} = -\left[\frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda}\right]^{-1} \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} \quad (246)$$

$$T_{\kappa\Delta\lambda} = -\left[\frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda}\right]^{-1} \frac{\partial Q_{n+1}}{\partial \Delta\lambda_{n+1}} \quad (247)$$

Diferenciando a Equação (242), obtém-se a relação

$$dF_{n+1} = \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} d\bar{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda} d\kappa_{n+1}^\lambda = 0 \quad (248)$$

Substituindo a Equação (245) na Equação (248), obtém-se uma relação similar à obtida na Equação (245):

$$T_{F\bar{\sigma}} d\bar{\sigma}_{n+1} + T_{F\Delta\lambda} d\Delta\lambda_{n+1} = 0 \quad (249)$$

onde

$$T_{F\bar{\sigma}} = \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda} T_{\kappa\bar{\sigma}} \quad (250)$$

$$T_{F\Delta\lambda} = \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda} T_{\kappa\Delta\lambda} \quad (251)$$

A obtenção do módulo tangente consistente da tensão efetiva é feita diferenciando a Equação (243):

$$d\bar{\sigma}_{n+1} = E(d\varepsilon_{n+1} - d\varepsilon_{n+1}^p) \quad (252)$$

que em termos da deformação plástica diferencial é dada por

$$d\varepsilon_{n+1}^p = \partial_{\bar{\sigma}} G d\Delta\lambda_{n+1} + \Delta\lambda_{n+1} \partial_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} G d\bar{\sigma}_{n+1} \quad (253)$$

Na Equação (253), chamando $S = [E^{-1} + \Delta\lambda_{n+1} \partial_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} G]^{-1}$, substitui-se este valor na Equação (249) e obtém-se a relação

$$\frac{d\Delta\lambda_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = \frac{T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \quad (254)$$

Finalmente, a obtenção do módulo tangente consistente da tensão efetiva é obtido substituindo-se a Equação (254) na Equação (252):

$$\frac{d\bar{\sigma}_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = S - \frac{S \partial_{\bar{\sigma}} G T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \quad (255)$$

O módulo tangente consistente mostrado na Equação (255) se assemelha aos módulos consistentes de alguns modelos clássicos de plasticidade, como o modelo de Von Mises. O termo $S = [E^{-1} + \Delta\lambda_{n+1} \partial_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} G]^{-1}$ é equivalente ao chamado módulo algorítmico (SIMO; HUGHES, 2000).

Entretanto, deseja-se obter o módulo tangente da tensão real σ_{n+1} . Para tal, obtém-se o diferencial total da relação entre as tensões real e efetiva dada pela Equação (222):

$$d\sigma_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} dD_{n+1} + (1 - D_{n+1}) d\bar{\sigma}_{n+1} \quad (256)$$

onde

$$dD_{n+1} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^{\chi}} d\kappa_{n+1}^{\chi} + \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} d\bar{\sigma}_{n+1} \quad (257)$$

Lembrando que a variável de dano D_{n+1} é dada pela combinação das variáveis de dano na tração D_{n+1}^t e de dano na compressão D_{n+1}^c , como mostrado na Equação (223).

Da Equação (257), tem-se que

$$dD_{n+1} = T_{D\bar{\sigma}} d\bar{\sigma}_{n+1} + T_{D\Delta\lambda} d\Delta\lambda_{n+1} \quad (258)$$

onde

$$T_{D\bar{\sigma}} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \bar{\sigma}_{n+1}} + \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^{\chi}} T_{\kappa\bar{\sigma}} \quad (259)$$

$$T_{D\Delta\lambda} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \kappa_{n+1}^\lambda} T_{\kappa\Delta\lambda} \quad (260)$$

Substituindo a Equação (258) na Equação (256), obtém-se a relação

$$\frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = \left[(1 - D_{n+1}) - \bar{\sigma}_{n+1} T_{D\bar{\sigma}} \right] \frac{\partial \bar{\sigma}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - T_{D\Delta\lambda} \bar{\sigma}_{n+1} \frac{\partial \Delta\lambda_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (261)$$

Por fim, substituindo as Equações (254) e (255) na Equação (261), obtém-se o modulo tangente consistente:

$$E_{n+1}^t = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = \left[(1 - D_{n+1}) - \bar{\sigma}_{n+1} T_{D\bar{\sigma}} \right] \left[S - \frac{S \partial_{\bar{\sigma}} G T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \right] - T_{D\Delta\lambda} \left[\frac{\bar{\sigma}_{n+1} T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \right] \quad (262)$$

Quadro 5 – Algoritmo do caso unidimensional do Modelo de dano de Lee e Fenves

Dados de entrada:

$$E, f_{b0}, f_{i0}, f_{c0}, a_c, b_c, d_c, a_t, b_t, d_t, G_t, G_c, l_t, l_c, \alpha_p \\ \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \kappa_n^t, \kappa_n^c, D_n^t, D_n^c$$

Preditor elástico:

status = ELASTIC

$$C_t = (1 - D_n) E$$

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\alpha \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} + \left| \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \right| + \beta (\kappa_n^c, \kappa_n^t) \langle \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \rangle \right] - c_c (\kappa_n^c)$$

Com

$$\beta (\kappa_n^t, \kappa_n^c) = \frac{c_c (\kappa_n^c)}{c_t (\kappa_n^t)} (1 - \alpha) - (1 + \alpha)$$

$$c_c (\kappa_n^c) = -\bar{f}_{c0} \left[\left(\frac{1}{a_c} \right) \left(1 + a_c - \sqrt{\phi (\kappa_n^c)} \right) \right]^{1 - \frac{d_c}{b_c}} \sqrt{\phi (\kappa_n^c)}$$

$$c_t (\kappa_n^t) = \bar{f}_{i0} \left[\left(\frac{1}{a_t} \right) \left(1 + a_t - \sqrt{\phi (\kappa_n^t)} \right) \right]^{1 - \frac{d_t}{b_t}} \sqrt{\phi (\kappa_n^t)}$$

$$f_\lambda (\kappa_n^\lambda) = \frac{f_{\lambda 0}}{a_\lambda} \left[(1 + a_\lambda) \sqrt{\phi (\kappa_n^\lambda)} - \phi (\kappa_n^\lambda) \right]$$

$$\phi (\kappa_n^\lambda) = 1 + a_\lambda (2 + a_\lambda) \kappa_n^\lambda$$

Se $F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$ # Passo elástico

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \quad \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad \kappa_{n+1}^\lambda = \kappa_n^\lambda, \quad D_{n+1}^\lambda = D_n^\lambda$$

Se $F_{n+1}^{\text{trial}} > 0$, corretor plástico:

$$status = PLASTIC$$

Resolver o sistema de equações não lineares:

$$F_{n+1}(\bar{\sigma}_{n+1}) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\alpha \bar{\sigma}_{n+1} + |\bar{\sigma}_{n+1}| + \beta(\kappa_{n+1}^c, \kappa_{n+1}^t) \langle \bar{\sigma}_{n+1} \rangle \right] - c_c(\kappa_{n+1}^c) = 0$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - E\Delta\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) + \alpha_p \right)$$

$$\kappa_{n+1}^\chi = \kappa_n^\chi + \frac{1}{g_\chi} f_\chi(\kappa_{n+1}^\chi) \Delta\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \text{sign}(\bar{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}) + \alpha_p \right)$$

Corretor de dano:

$$s_{n+1} = s_0 + (1-s_0) \frac{\langle \bar{\sigma}_{n+1} \rangle}{|\bar{\sigma}_{n+1}|}$$

$$D_{n+1}^\chi = 1 - \left[\left(\frac{1}{a_\chi} \right) \left(1 + a_\chi - \sqrt{\phi(\kappa_{n+1}^\chi)} \right) \right]^{\frac{d_\chi}{b_\chi}}$$

$$D_{n+1} = 1 - (1 - D_{n+1}^c) (1 - s_{n+1} D_{n+1}^t)$$

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \bar{\sigma}_{n+1}$$

Módulo tangente consistente:

$$E'_{n+1} = \left[(1 - D_{n+1}) - \bar{\sigma}_{n+1} T_{D\bar{\sigma}} \right] \left[S - \frac{S \partial_{\bar{\sigma}} G T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \right] - T_{D\Delta\lambda} \left[\frac{\bar{\sigma}_{n+1} T_{F\bar{\sigma}} S}{T_{F\bar{\sigma}} S \partial_{\bar{\sigma}} G - T_{F\Delta\lambda}} \right]$$

onde $T_{F\bar{\sigma}}$, $T_{F\Delta\lambda}$ e $T_{D\bar{\sigma}}$ são calculados a partir das Equações (250), (251) e (259).

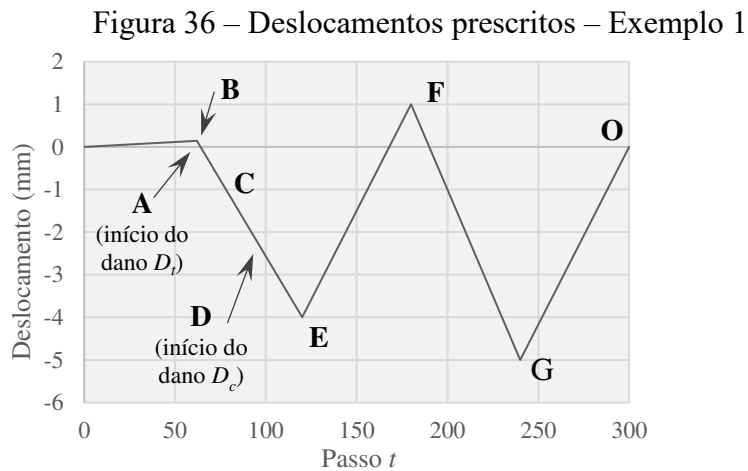
Fonte: Elaborado pelo autor.

7 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão apresentados quatro exemplos de validação nível do material dos modelos e três aplicações a nível estrutural analisadas com os modelos constitutivos implementados neste trabalho.

7.1 Exemplo 1 - Comportamento uniaxial do Modelo μ

Neste exemplo, um único elemento é submetido a deslocamentos uniaxiais prescritos com o intuito de validação da versão do Modelo μ . O elemento contém apenas uma faixa na seção transversal, sendo a área da seção e o comprimento unitários. Os parâmetros utilizados para o modelo são apresentados na Tabela 3. Este exemplo pode ser encontrado nos tutoriais do programa de análise Code Aster (FLÉJOU, 2015). O controle de deslocamento foi feito de acordo com a Figura 36.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Parâmetros do Modelo μ – Exemplo 1

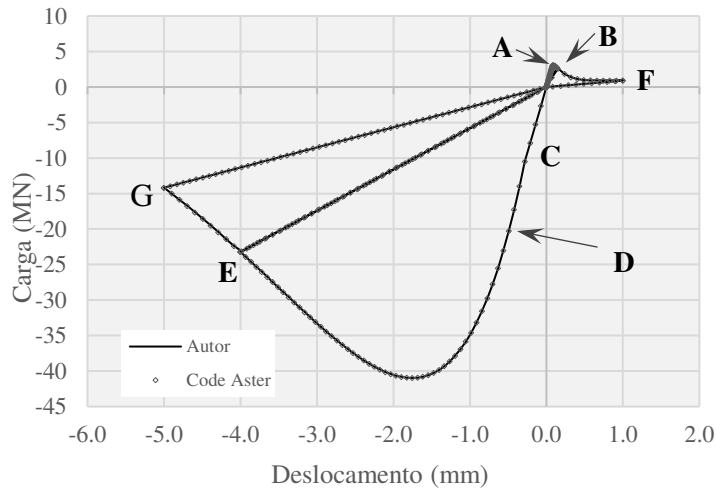
E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t
37,3	2,0e-4	8,2e-5	1,71	2011,64	0,70	12189,24

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os deslocamentos foram prescritos através do método de controle de deslocamentos de um dos nós do elemento. Como é apresentado na Figura 36, os deslocamentos são formados por trechos crescentes e decrescentes. Desta forma, é possível simular o comportamento cíclico do carregamento e avaliar a resposta do material através da sua curva carga-deslocamento.

A Figura 37 apresenta os resultados obtidos com o modelo implementado e os resultados obtidos pelo Code Aster (FLÉJOU, 2015).

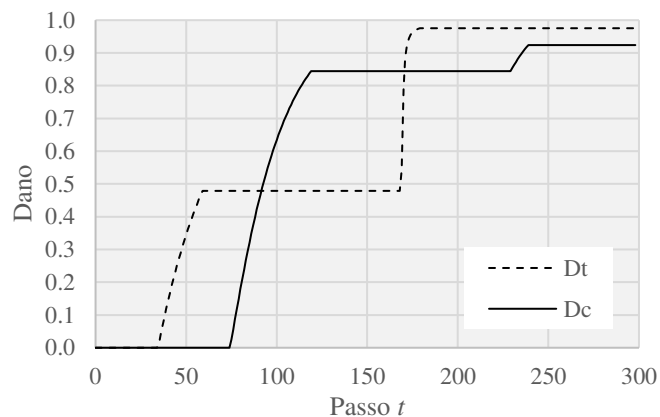
Figura 37 – Curva de carga-deslocamento – Exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Também é possível avaliar a evolução das duas variáveis de dano ao longo dos deslocamentos prescritos. Este resultado é apresentado na Figura 38. A evolução do dano de tração D_t tem início pouco antes do passo de carga $t = 50$, enquanto o dano de compressão D_c continua nulo. A partir do início do primeiro descarregamento (ponto B), o dano de tração D_t se mantém constante e, instantes depois, o dano de compressão D_c começa a evoluir (ponto D). Os danos D_t e D_c nunca evoluem juntos neste caso, isto pelo fato de o modelo ser uniaxial.

Figura 38 – Evolução das variáveis de dano – Exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro aspecto importante apresentado na Figura 38 é que as variáveis de dano nunca diminuem. Este aspecto tem ligação com as leis da termodinâmica, já que a energia dissipada na degradação do material não pode ser recuperada. Esse resultado mostra que a implementação computacional realizada representa de forma correta a evolução do dano (irreversibilidade).

7.2 Exemplo 2 - Comportamento uniaxial do Modelo de Lee e Fenves

Este exemplo é similar ao anterior no sentido de se verificar o comportamento uniaxial monotônico do Modelo de Lee e Fenves. O exemplo pode ser encontrado em Lee e Fenves (1998). Trata-se de um único elemento com comprimento igual a 82,6 mm e seção transversal com área de (82,6 x 82,6 mm) sob um carregamento cíclico. As características do material são mostradas na Tabela 4.

Tabela 4 – Características do material – Exemplo 2

E (GPa)	f_{cm} (MPa)	f_t (MPa)	G_c (N/m)	G_t (N/m)	l_c (mm)	l_t (mm)
30,1	30,0	3,3	6000	60	82,6	82,6

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das características dadas na Tabela 4 é possível obter os parâmetros do Modelo de Lee e Fenves usando as relações apresentadas na Seção 6.3. Para tal, também é necessário determinar os valores de \tilde{D}_c e \tilde{D}_t . Lee e Fenves (1998) adotam $\tilde{D}_c = 0,4$ e $\tilde{D}_t = 0,7$. O valor de α_p é de 0,2. A Tabela 5 apresenta os valores dos parâmetros obtidos.

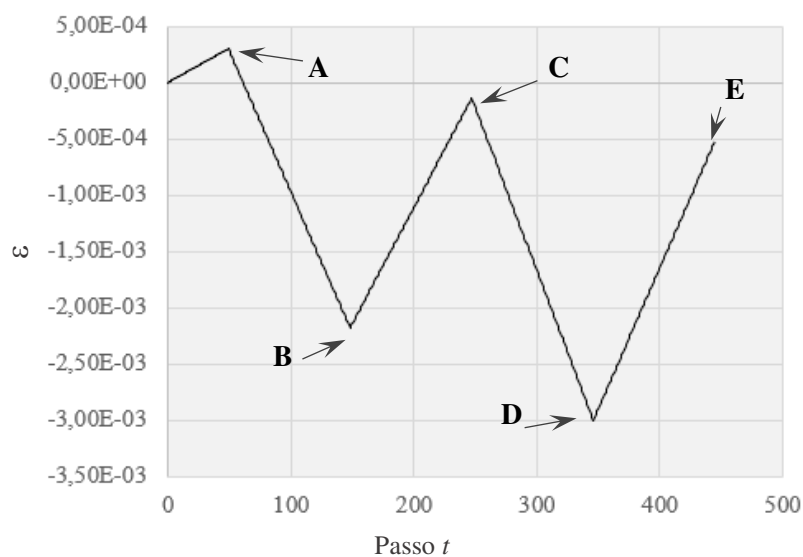
Tabela 5 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Exemplo 2

f_{c0}	s_0	a_c	b_c	d_c	a_t	b_t	d_t
19,0	0,00	4,07	1,00	1,08	0,57	1,00	1,20

Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor de $s_0 = 0,00$ na segunda coluna da Tabela 5 indica que o fechamento de fissuras é completo. A curva de deformação pelo tempo passo de carga (tempo fictício) é mostrada na Figura 39.

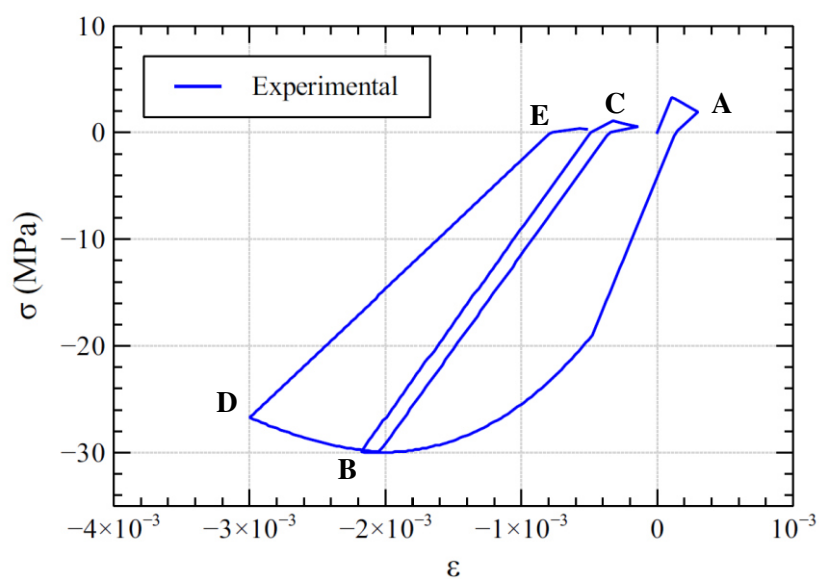
Figura 39 – Deformações prescritas – Exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 40 apresenta a curva tensão-deformação obtida através da aplicação deste carregamento cíclico. Esta curva se assemelha (em alguns aspectos, como a baixa resistência a tração) à curva de carga-deslocamento do Exemplo 1, mostrada na Figura 37. Entretanto, a principal diferença verificada está no descarregamento de ambos os exemplos. No caso do Exemplo 2, há acúmulo de deformações permanentes, o que não ocorre no Exemplo 1.

Figura 40 – Curva de tensão-deformação – Exemplo 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

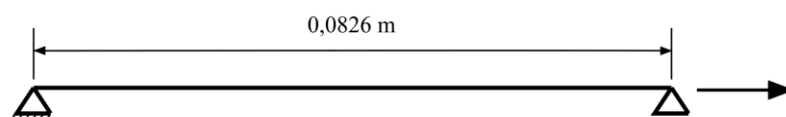
Outra diferença está no retorno da curva para um trecho de tração após ter sofrido aumento de dano de compressão. Na curva mostrada na Figura 37, o trecho EBF mostra que, quando a curva passa de um trecho de tração para um trecho de compressão, se verifica a recuperação instantânea da rigidez. Já no caso do Exemplo 2, verifica-se na Figura 40 que não há recuperação da rigidez no retorno da curva para um trecho de tração após ter sofrido aumento do dano de compressão (trecho BC).

O que acontece com a curva do Exemplo 1 (Figura 37) quando esta passa de um trecho de compressão para um trecho de tração é que a rigidez volta ao seu valor do último instante de tração. Isto é verificado pois no Modelo μ , o dano na tração é tratado como independente do dano na compressão. Já no Modelo de Lee e Fenves (Figura 40), as variáveis de dano evoluem e se acumulam. Desta forma, gera-se um dano total na estrutura que é formado por uma combinação dos danos de tração e de compressão.

7.3 Exemplo 3 – Comportamento cíclico do Modelo de Lee e Fenves

Este exemplo trata do comportamento de um único elemento finito com área da seção transversal de (82,6 x 82,6 mm) sob carregamentos cíclicos de tração e de compressão (Figura 41). Os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais de Gopalaratnam e Shan (1985) para o caso de tração e Karsan e Jirsa (1969). As características do material para ambos os casos são mostradas na Tabela 6. Os parâmetros do modelo calculados a partir das características do material são mostrados na Tabela 7. Adotou-se $\tilde{D}_c = 0,4$ e $\tilde{D}_t = 0,5$ e $\alpha_p = 0,2$.

Figura 41 –Malha – Exemplo 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Características do material – Exemplo 3

E (GPa)	f_{cm} (MPa)	f_t (MPa)	G_c (N/m)	G_t (N/m)	l_c (mm)	l_t (mm)
31,7	27,6	3,48	5690	40	82,6	82,6

Fonte: Elaborada pelo autor.

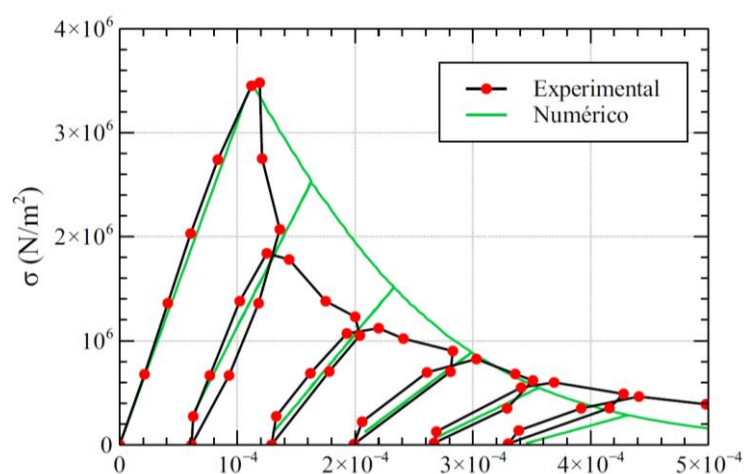
Tabela 7 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Exemplo 3

f_{c0}	s_0	a_c	b_c	d_c	a_t	b_t	d_t
16,50	0,00	4,47	1,00	1,04	0,233	1,00	0,85

Fonte: Elaborada pelo autor.

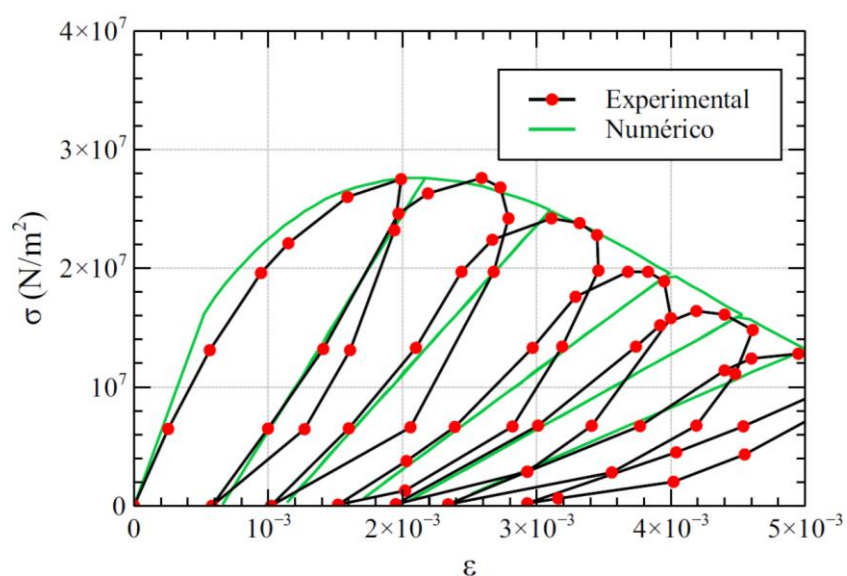
Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 42 e 43. Tanto para o caso de tração quanto para o caso de compressão, verifica-se que o modelo é capaz de representar bem os efeitos de plasticidade acoplada ao dano. Resultados numéricos similares podem ser encontrados em Lee e Fenves (1998).

Figura 42 – Resultados para o carregamento cíclico de tração – Exemplo 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 43 – Resultados para o carregamento cíclico de compressão – Exemplo 3

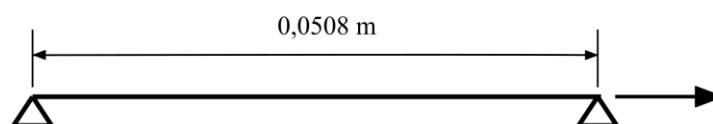


Fonte: Elaborada pelo autor.

7.4 Exemplo 4 – Sensibilidade de malha no Modelo de Lee e Fenves

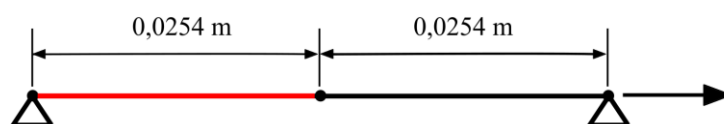
Neste exemplo, é estudada a influência da discretização da malha de elementos finitos na resposta da barra mostrada na Figura 44. As propriedades do material são as mesmas adotadas no Exemplo 3. Entretanto, tem-se três malhas de elementos finitos distintas: 1 elemento, 2 elementos e 4 elementos. Nas malhas de 2 e 4 elementos se fragilizou a resistência à tração dos elementos de extremidade. A Figura 45 mostra as malhas com as respectivas fragilizações em vermelho. Adotou-se $f_t = 3,38$ MPa para estes elementos.

Figura 44 – Barra – Exemplo 4

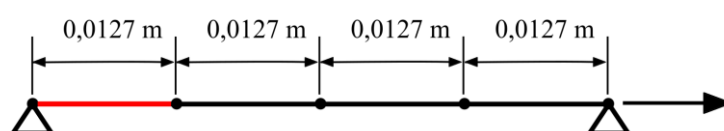


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Malhas utilizados para o Exemplo de 4 – (a) 2 elementos e (b) 4 elementos



(a)



(b)

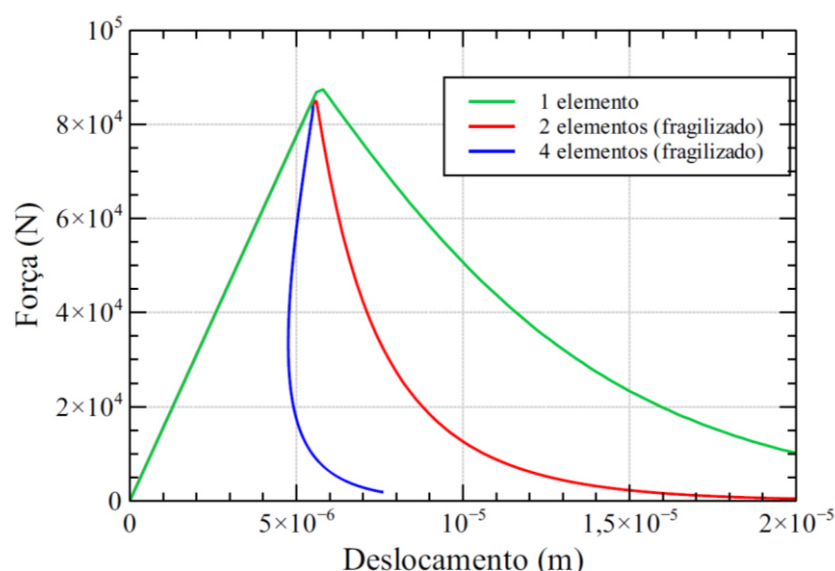
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados são apresentados na Figura 46. Nota-se que o refinamento da malha faz a solução convergir para resultados cada vez mais distantes da solução com 1 elemento. Com 4 elementos, se verifica o fenômeno de *snap-back*. Estes resultados revelam a sensibilidade de malha no problema acarretado por localização de deformação nos elementos fragilizados.

Adotando a metodologia apresentada na Seção 4.4, chega-se a valores de comprimentos característicos diferentes para cada malha. Desta forma, tem-se para as malhas

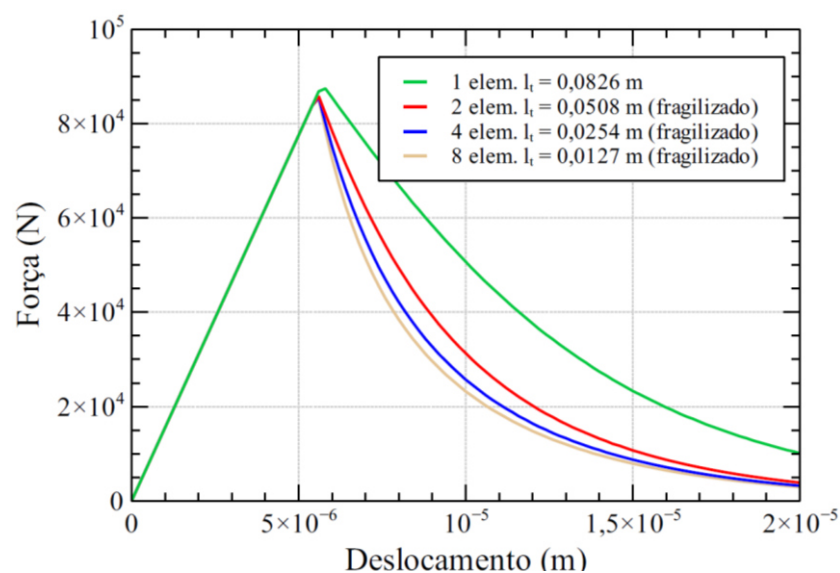
de 2 elementos e 4 elementos os comprimentos característicos de 0,0508 m e 0,0254 m, respectivamente. Acrescentou-se ainda uma nova malha com 8 elementos e comprimento característico de 0,0127 m. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 47.

Figura 46 – Resultados da barra tracionada para $l_t = 0,0826$ m – Exemplo 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Resultados da barra tracionada variando o l_t – Exemplo 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

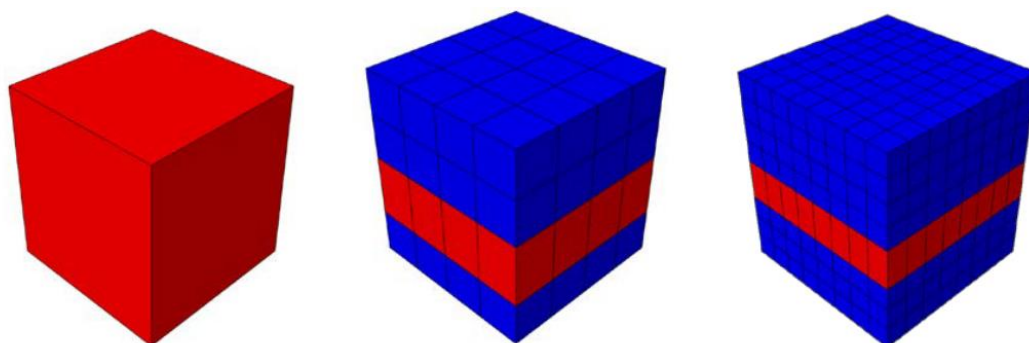
Observa-se na Figura 47 que a sensibilidade de malha foi parcialmente retirada. As curvas de 2 elementos, 4 elementos e 8 elementos estão bem próximas, mas não coincidem.

Além disto, a curva de 1 elemento está mais distante das demais. Com relação a esse distanciamento, vale lembrar que no final das contas as barras não são exatamente iguais. A fragilização de um elemento as torna distintas e por isto as respostas não convergem exatamente.

Mesmo com a não convergência de maneira exata das malhas, se verifica o importante fato de que a sensibilidade de malha foi reduzida significativamente. Não se verifica mais localização de deformação no elemento fragilizado. Um exemplo similar a este po de ser encontrado em Lee e Fenves (1998).

Alfarah (2017) examina um exemplo parecido utilizando o *software* Abaqus. Um dos modelos constitutivos para o concreto disponível no *software* Abaqus é baseado no Modelo de Lee e Fenves, o *Concrete Damage Plasticity (CDP)*. O exemplo estudado pelo autor é mostrado na Figura 48. Este exemplo consiste em um elemento quadrado com lado de 200 mm sob um carregamento uniaxial de tração. Os elementos vermelhos indicam regiões fragilizadas para que se induza a localização de deformação.

Figura 48 – Malhas utilizados no *software* Abaqus



Fonte: Alfarah (2017).

Alfarah (2017) utiliza uma metodologia baseada nas curvas exponenciais para a evolução da tensão em função da deformação plástica propostas por Lubliner (1989) para calibrar os parâmetros de entrada do CDP. Esta metodologia é feita de forma a dar objetividade à malha de elementos finitos. Os resultados apresentados pelo autor mostram-se eficazes neste propósito.

De forma a verificar a objetividade da malha também com este exemplo, foi obtida uma curva de tensão-deformação pelo Modelo de Lee e Fenves semelhante a curva apresentada por Alfarah (2017). A Figura 49 mostra a curva de tensão-deformação usada por Alfarah (2017) e a curva aproximada. Os parâmetros utilizados para esta curva foram $a_t = 1,00$, $b_t = 1,20$ e

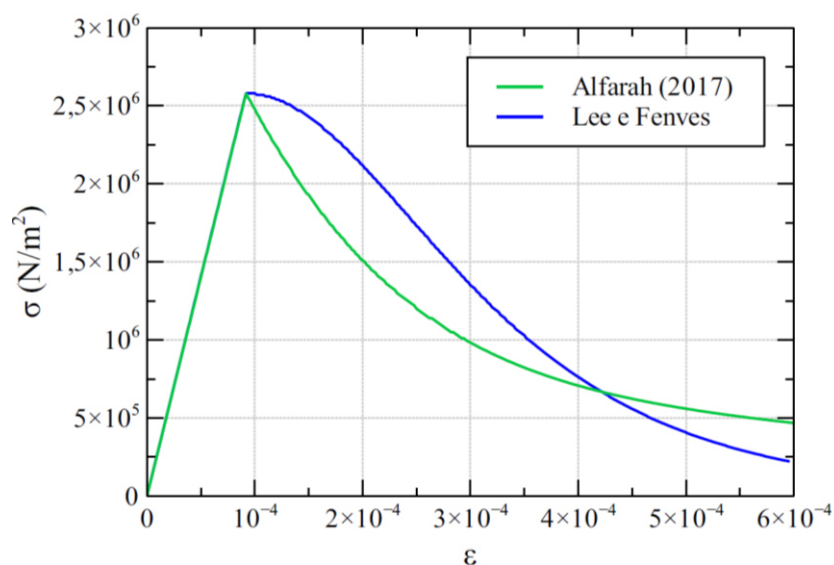
$d_t = 0,85$. Estes parâmetros foram obtidos através das características do material apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Características do material – Exemplo de Alfarah (2017)

E (GPa)	f_{cm} (MPa)	f_t (MPa)	G_c (N/m)	G_t (N/m)	l_c (mm)	l_t (mm)
28,0	33,0	2,58	22430	137	200	200

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Curvas tensão-deformação para o exemplo de Alfarah (2017)

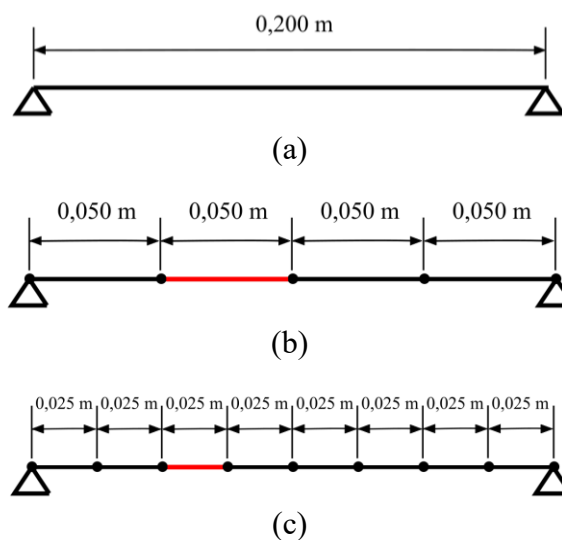


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 50 mostra as malhas adotadas e os elementos fragilizados destacados em vermelho. A fragilização foi feita adotando-se $f_t = 2,48$ MPa para estes elementos. Para cada malha se adota um comprimento característico referente ao tamanho da malha. Os comprimentos adotados são 200 mm, 50 mm e 25 mm, respectivamente.

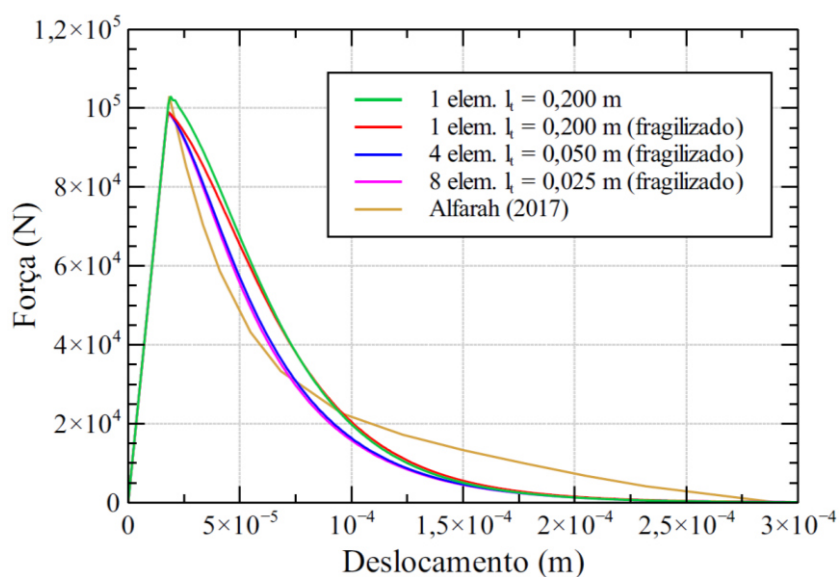
A Figura 51 apresenta os resultados obtidos juntamente com o resultado obtido por Alfarah (2017). Percebe-se que a sensibilidade de malha não ocorre. Portanto não há localização de deformação. Os resultados de Alfarah (2017) se distinguem um pouco dos resultados obtidos pelo Modelo de Lee e Fenves. Isto se deve ao fato de as curvas tensão-deformação serem diferentes.

Figura 50 – Malhas utilizados para o Exemplo de Alfarah (2017) – (a) 1 elementos, (b) 4 elementos e (c) 8 elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 51 – Resultados - Exemplo de Alfarah (2017)



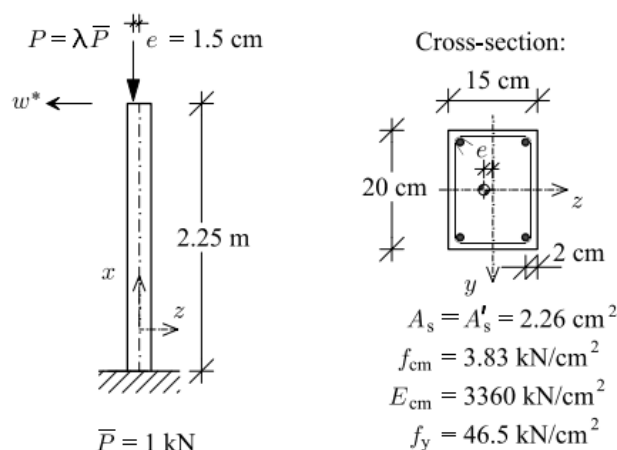
Fonte: Elaborada pelo autor.

7.5 Exemplo 5 - Pilar com carga excêntrica

Nesta primeira aplicação, um pilar de concreto armado é submetido a um carregamento excêntrico P aplicado no seu topo. Este pilar foi testado experimentalmente por Espion (1993) e é um dos exemplos conhecidos na literatura como um *benchmark* para testes de modelos numéricos de concreto armado, como o trabalho de Bratina, Saje e Planinc (2004).

Parente *et al.* (2014) usaram uma formulação corrotacional com método das fatias na integração da seção para validar a implementação de modelos constitutivos não lineares elásticos de concreto. Os modelos implementados são fornecidos por normas como o Eurocode 2:2014 e a NBR 6118:2014.

Figura 52 – Geometria e propriedades dos materiais – Pilar com carga excêntrica



Fonte: Bratina, Saje e Planinc (2004).

Um dos modelos implementados por Parente *et al.* (2014) é encontrado no Eurocode 2:2014. A tração é considerada utilizando um modelo sugerido pelo CEB FIP 1990, o qual captura o efeito de *tension stiffening*. A obtenção destas curvas é simples, pois requerem dados experimentais de fácil acesso. Para efeito de comparação, os parâmetros do Modelo μ e do Modelo de Lee e Fenves foram ajustados até se conseguir uma curva parecida com a apresentada por Parente *et al.* (2014).

Adotou-se como largura de banda o valor de $h_c = 0,033 \text{ m}$. A este valor, corresponde um comprimento característico $l_{ch} = 0,45 \text{ m}$. A energias de fratura G_c e G_t foram calculadas a partir da área sob as curvas tensão-deformação. Os valores adotados foram $G_c = 22000 \text{ N/m}$ e $G_t = 1700 \text{ N/m}$. Adotou-se $\tilde{D}_c = 0,40$ e $\tilde{D}_t = 0,70$. As Tabela 9 e Tabela 10 apresentam os parâmetros para cada um dos modelos e a Figura 53 apresenta as curvas tensão-deformação obtidas.

Tabela 9 – Parâmetros do Modelo μ – Pilar com carga excêntrica

E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t
33,6	1,5e-4	7,5e-5	1,20	452	0,45	5320

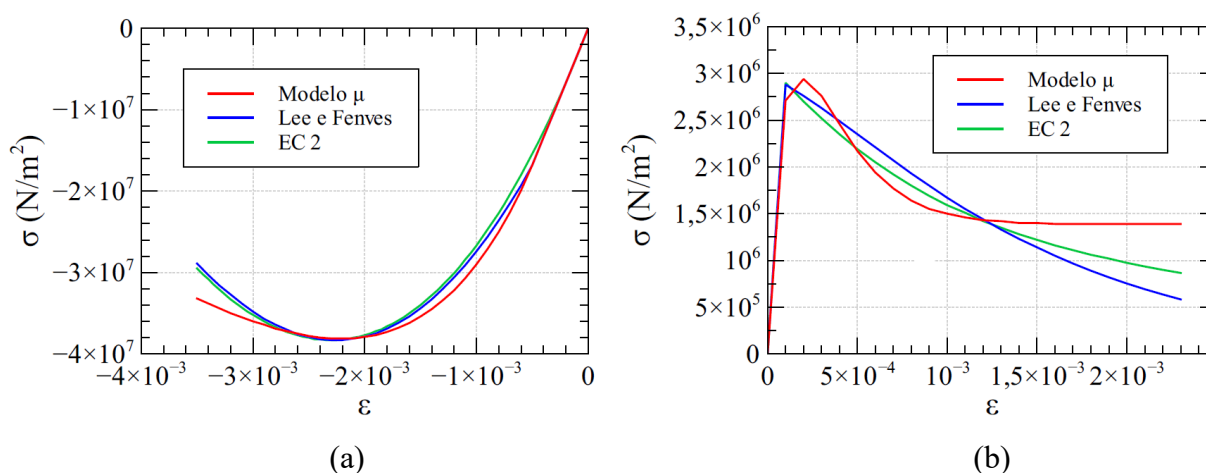
Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 10 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Pilar com carga excêntrica

f_{c0}	s_0	a_c	b_c	d_c	a_t	b_t	d_t
17,00	0,00	6,87	1,00	0,92	0,574	1,00	1,20

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 53 – Curvas tensão-deformação para o pilar com carga excêntrica na (a) compressão e a (b) tração



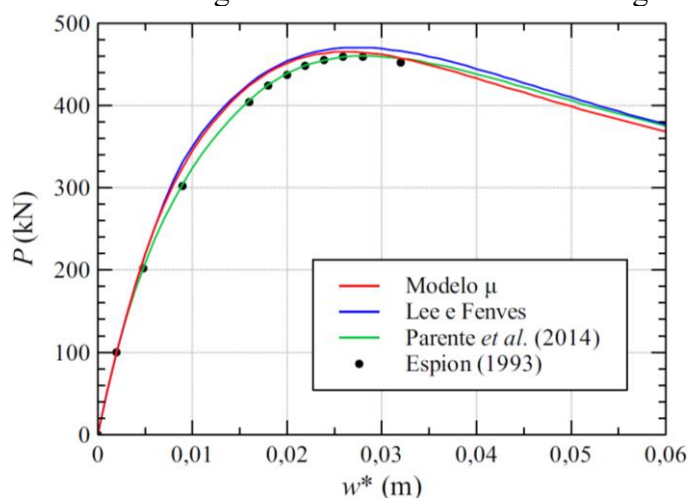
Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas tensão-deformação apresentadas na Figura 53 têm parâmetros em comum, como o módulo de elasticidade E e os valores de resistência máxima f_{cm} e f_t . A obtenção dos demais parâmetros para cada uma das curvas estudadas, Modelo μ e Modelo de Lee e Fenves, tem certa complexidade pelo fato de serem curvas naturalmente distintas. Isto é, as curvas tensão-deformação do Modelo μ são exponenciais governadas por um conjunto de quatro parâmetros adimensionais enquanto as curvas do Modelo de Lee e Fenves são curvas governadas por seis parâmetros adimensionais.

O fato de as curvas do Modelo de Lee e Fenves terem um maior número de parâmetros facilita o ajuste desta curva a resultados experimentais. Isto se verifica como uma vantagem sobre o Modelo μ . A Figura 53b mostra que os resultados obtidos para este ajuste são realmente melhores para o Modelo de Lee e Fenves.

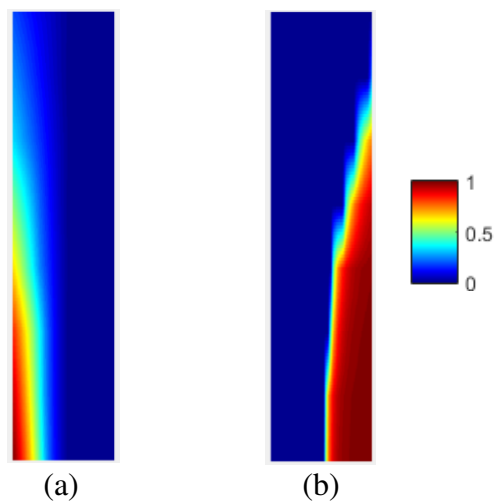
Para esta aplicação foi adotada uma malha de elementos finitos com quatro elementos corrotacionais de tamanho 0,5625 m. A discretização da seção foi feita com 100 fatias. Parente *et al.* (2014) utilizam uma malha com as mesmas características. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 54. Também são apresentados os resultados numéricos obtidos por Parente *et al.* (2014) e os resultados experimentais obtidos por Espion (1993).

Figura 54 – Curva de carga-deslocamento – Pilar com carga excêntrica



Fonte: Elaborada pelo autor.

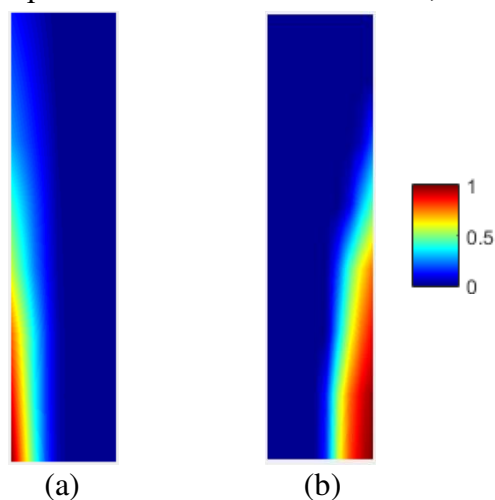
A distribuição dos danos na compressão e na tração para o deslocamento final de 0,06 m é mostrada na Figura 55 para o Modelo μ e na para o Modelo de Lee e Fenves. Estas distribuições de dano foram obtidas para cada ponto de Gauss de cada elemento e em cada uma das faixas de discretização transversal. Desta forma, foi possível representar de forma aproximada a distribuição de dano na estrutura.

Figura 55 – Distribuição do dano para o Modelo μ em $w = 0,06$ m (a) D_c e (b) D_t 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando as Figuras 55 e 56, nota-se que a quantidade de dano no caso do Modelo de Lee e Fenves é menor. Isto se deve ao fato de a degradação do material neste modelo envolver também a plasticidade. Enquanto no Modelo μ o aumento das tensões gera apenas dano no material, no Modelo de Lee e Fenves também há o acúmulo de deformação permanente.

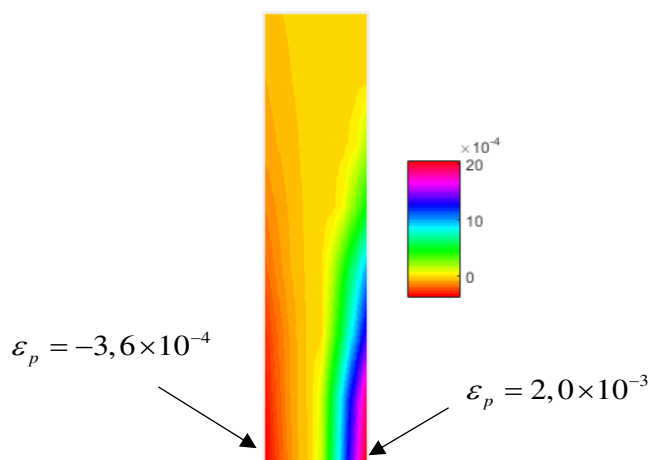
Figura 56 – Distribuição do dano para o Modelo de Lee e Fenves, $w = 0,06$ m (a) D_c e (b) D_t



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 57 mostra a distribuição de deformações permanentes para o deslocamento de 0,06 m.

Figura 57 – Distribuição de deformação plástica no Modelo de Lee e Fenves ($w = 0,06$ m)

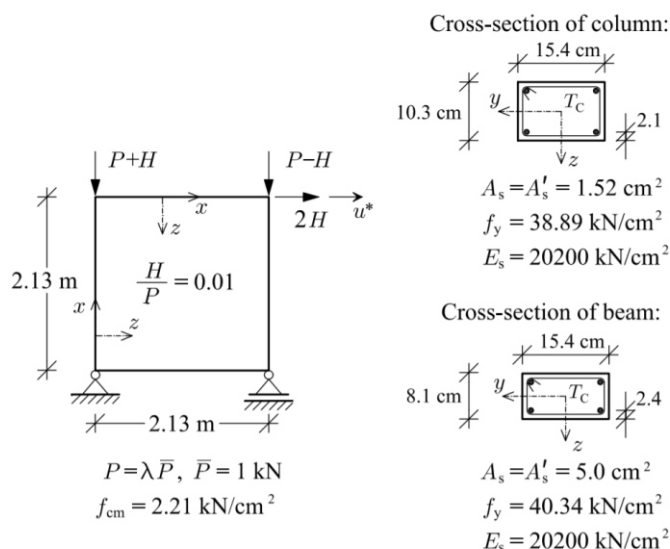


Fonte: Elaborada pelo autor.

7.6 Exemplo 6 - Pórtico quadrado

Nesta aplicação, um pórtico quadrado de concreto armado é submetido a um carregamento formado por um conjunto de forças como mostra a Figura 58. Este pórtico foi testado experimentalmente por Ferguson e Brenn (1966). Bratina *et al.* (2004) e Parente *et al.* (2014) estudam o comportamento deste pórtico adotando curvas tensão-deformação elásticas baseadas em normas.

Figura 58 – Geometria e propriedades dos materiais – Pórtico quadrado



Fonte: Bratina *et al.* (2004).

Como ponto de partida desta aplicação, pretende-se aproximar as curvas tensão deformação do concreto propostas por Parente *et al.* (2014) a fim de comparar os resultados obtidos com os dos autores. Para o Modelo de Lee e Fenves, as metodologias apresentadas nas Seções 6.3 e 4.4 já são suficientes para este propósito. Já no caso do Modelo μ , dispondo apenas das propriedades geométricas mostradas na Figura 58, faz-se necessário um estudo dos parâmetros das curvas.

As Figuras 59a e 59b mostram, respectivamente, o comportamento dos parâmetros de compressão B_c e A_c . Nota-se que o parâmetro B_c possui uma variação mais influente no formato global da curva de compressão. Neste aspecto, uma metodologia interessante é determinar primeiramente o valor de B_c , tendo em vista um crescimento esperado da tensão de compressão. Logo após, pode ser feito um refinamento da curva com a variação do parâmetro A_c .

A mesma situação é esperada para a curva de tração, já que ambas são funções exponenciais com o mesmo aspecto. Observando as Figuras 69c e 59d, percebe-se que a variação é realmente similar. Entretanto, deve-se atentar para o fato de que alguns valores de B_t podem ser inviáveis. Neste caso específico, valores de B_t menores do que 15000 levam a curvas tensão-deformação de tração com *hardening*.

Os ajustes dos parâmetros foram realizados para os modelos e os resultados são apresentados nas Tabelas 11 e 12. Para o Modelo de Lee e Fenves, $h_c = 0,033 \text{ m}$ e

$l_{ch} = 0,15$ m . As energias de fratura G_c e G_t , calculadas a partir da área sob as curvas tensão-deformação foram $G_c = 7000$ N/m e $G_t = 70$ N/m . Adotou-se $\tilde{D}_c = 0,40$ e $\tilde{D}_t = 0,70$. A Figura 60 mostra as curvas obtidas.

Tabela 11 – Parâmetros do Modelo μ – Pilares do pórtico quadrado

E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t
27,9	2,5e-4	6,3e-5	1,30	650	0,50	15000

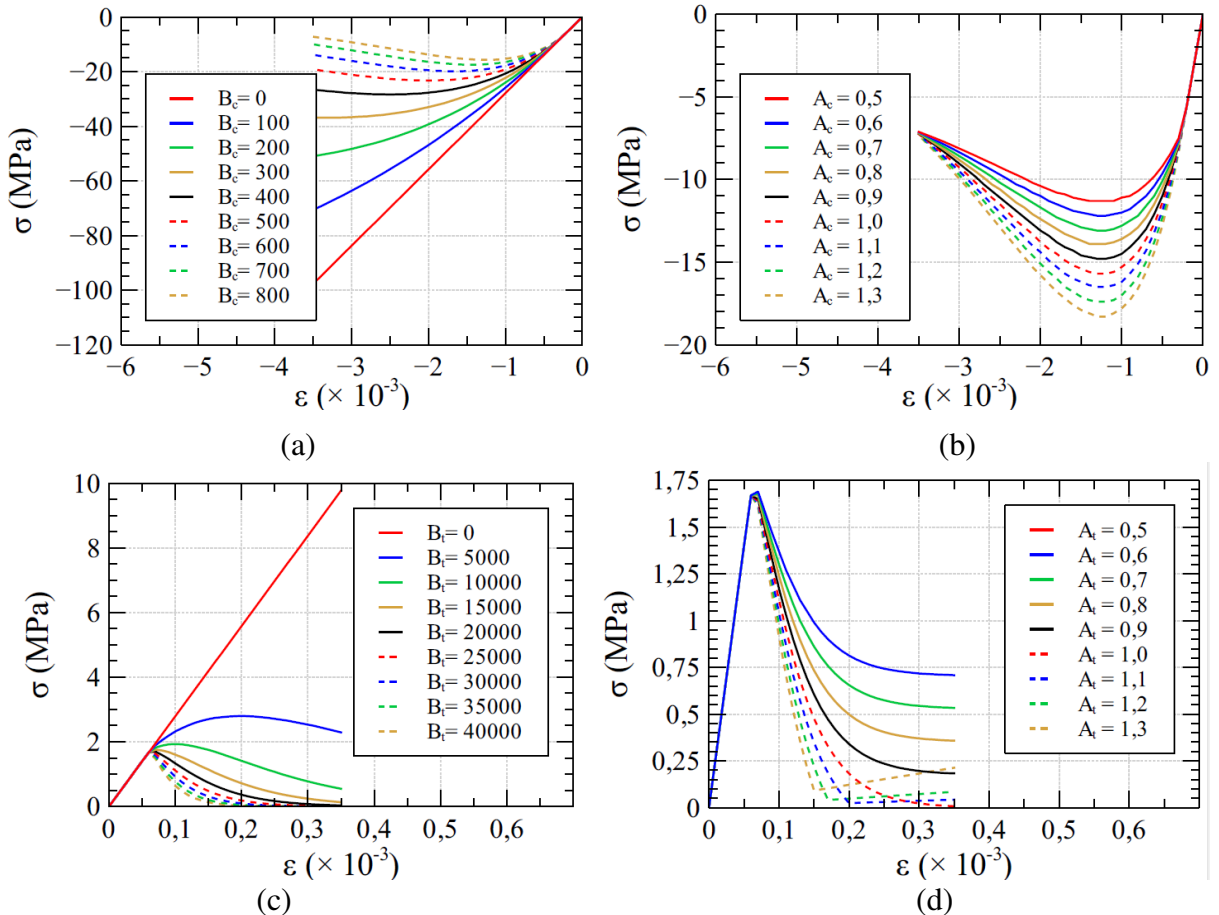
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Pilares do pórtico quadrado

f_{c0}	s_0	a_c	b_c	d_c	a_t	b_t	d_t
7,00	0,00	10,53	1,00	0,85	0,574	1,00	1,20

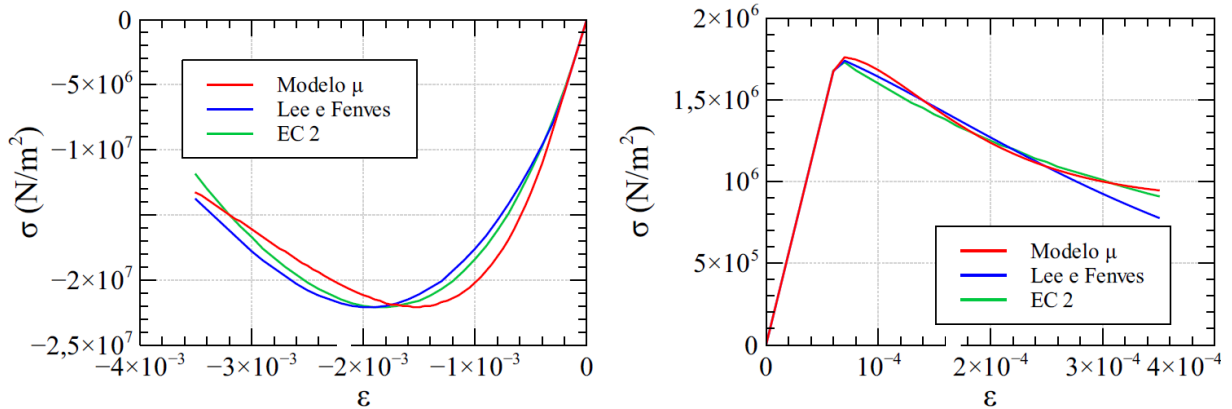
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 59 – Variação dos parâmetros de dano do Modelo μ : (a) Variação de B_c com $A_c = 1,00$, (b) variação de A_c com $B_c = 800$, (c) variação de B_t com $A_t = 1,00$ e (d) variação de A_t com $B_t = 25000$



Fonte: Elaborada pelo autor.

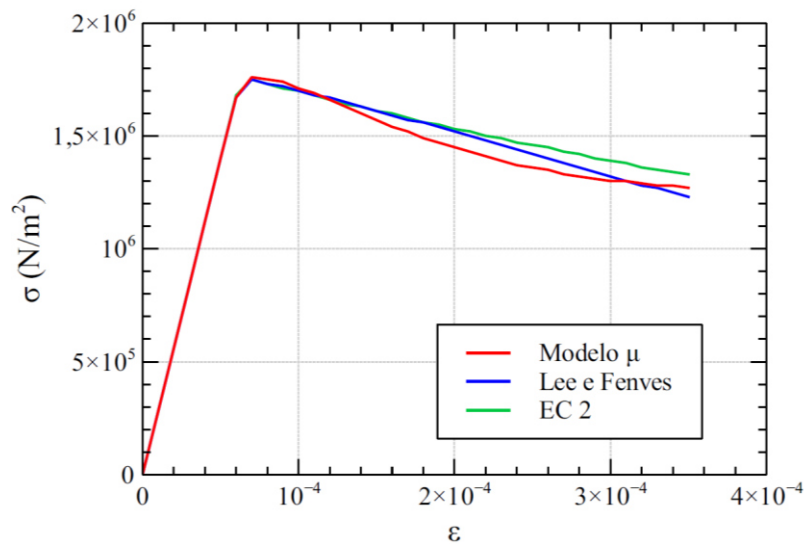
Figura 60 – Curvas tensão-deformação para o pórtico quadrado na (a) compressão e na (b) tração



Fonte: Elaborada pelo autor.

No pórtico estudado, o concreto que compõe as vigas possui uma curva de tensão distinta dos pilares para o caso de tração. Esta curva específica foi ajustada como mostra a Figura 61. O ajuste foi feito através da alteração da energia de fratura. Adotou-se $G_f = 150 \text{ N/m}$.

Figura 61 – Curvas tensão-deformação para as vigas do pórtico quadrado na tração

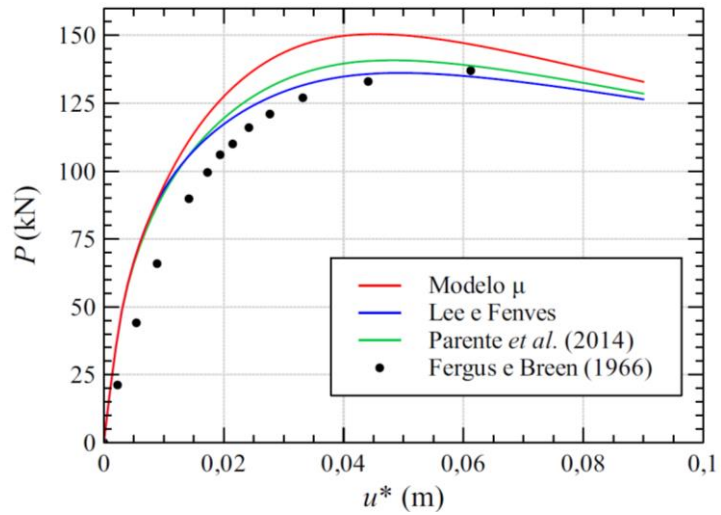


Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas carga-deslocamento obtidas são mostradas na Figura 62. O comportamento global de ambos os modelos foi satisfatório, sendo o Modelo de Lee e Fenves mais próximo ao resultado obtido por Parente *et al.* (2014).

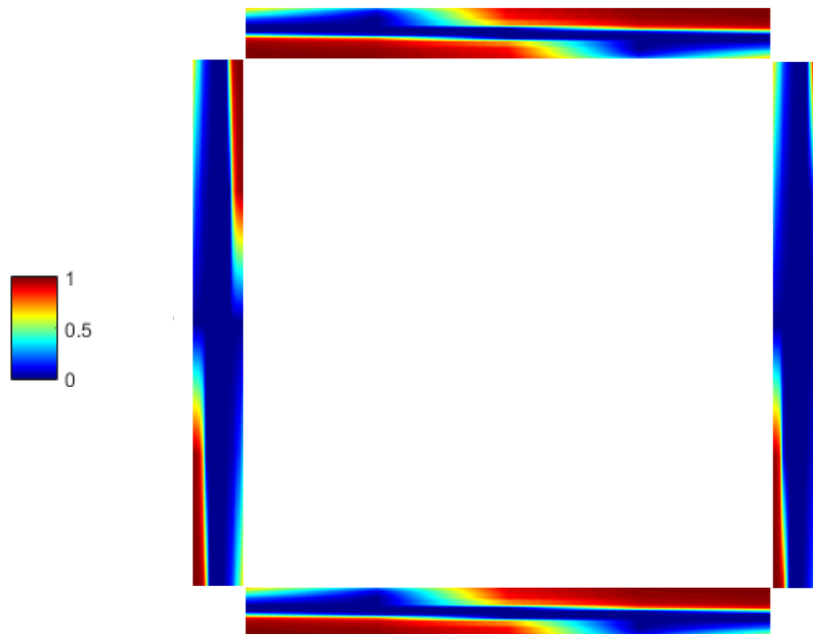
As Figuras 63 e 64 mostram a distribuição do dano total dado pela Equação (223) no deslocamento $u = 0,09$ m para o Modelo μ e para o Modelo de Lee e Fenves, respectivamente.

Figura 62 – Curva carga-deslocamento – Pórtico quadrado



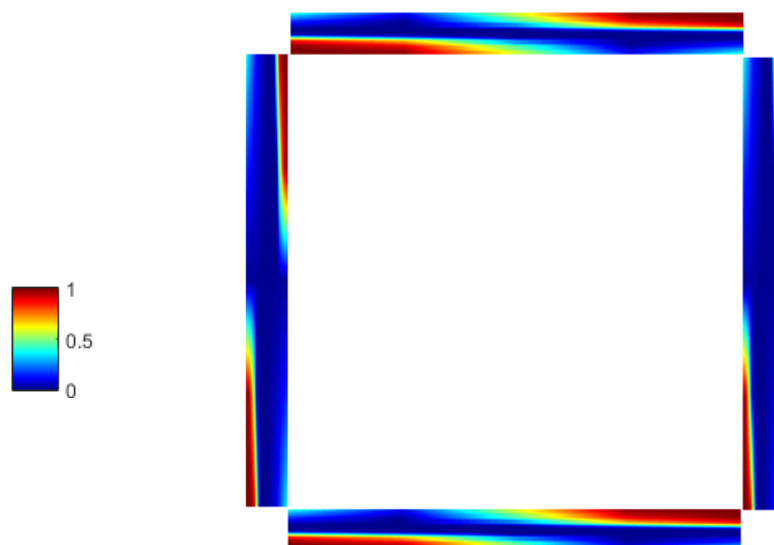
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Distribuição do dano para o Modelo μ em $u = 0,09$ m



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Distribuição do dano para o Modelo de Lee e Fenves em $u = 0,09$ m



Fonte: Elaborada pelo autor.

7.7 Exemplo 7 - Viga sob carga cíclica

Nesta última aplicação, uma viga de concreto armado biapoiada é submetida a um deslocamento prescrito vertical no centro do seu vão. Ensaios experimentais de carga cíclica desta viga podem ser encontrados em Ragueneau, Lebon e Delaplace (2010). No trabalho de Mazars, Hamon e Grange (2015), os autores apresentam uma validação do Modelo μ em sua versão 2D e simplificam o modelo para fins estruturais utilizando uma formulação uniaxial (método das fatias).

Além da validação, Mazars, Hamon e Grange (2015) propõem melhorias para incluir efeitos de deformações permanentes, amortecimento e deslizamento de armadura.

A viga tem vão de 1,5 m, seção transversal de 0,15 m por 0,22 m com armadura longitudinal 12 mm de diâmetro e está submetida a uma carga P no centro do vão (Figura 65). O aço foi modelado através de um modelo de plasticidade perfeita com patamar de escoamento $f_y = 500$ MPa e módulo de elasticidade $E = 205$ GPa. Os parâmetros utilizados para o Modelo μ são apresentados na Tabela 13. Estes valores foram adotados por Mazars, Hamon e Grange (2015).

Figura 65 – Viga biapoiada



Fonte: Elaborada pelo autor.

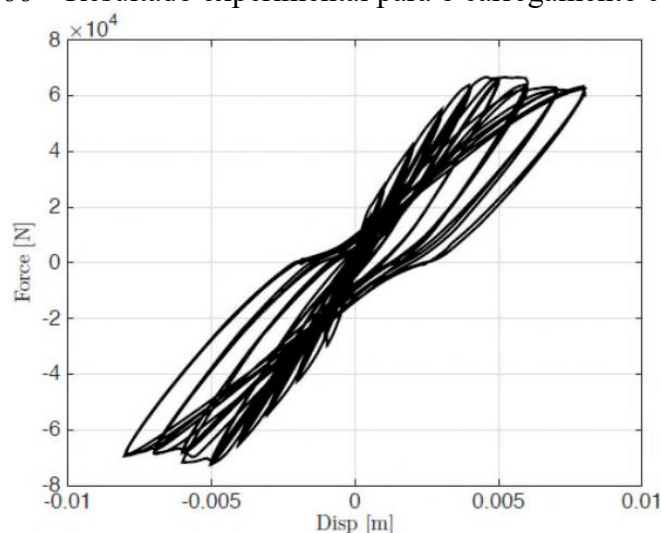
Tabela 13 – Parâmetros do Modelo μ – Viga sob carga cíclica

E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t
28,0	1,0e-4	3,6e-5	1,25	395	1,00	8000

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 66 mostra o resultado da curva de carga-deslocamento obtida por Ragueneau, Lebon e Delaplace (2010). O ensaio era controlado pelo deslocamento no centro do vão, sendo os ciclos de deslocamento gradualmente crescentes de $\pm 0,5$ mm a $\pm 8,0$ mm.

Figura 66 – Resultado experimental para o carregamento completo



Fonte: Mazars, Hamon e Grange (2015).

A obtenção das curvas tensão-deformação e de evolução do dano de Lee e Fenves foi feita a partir do ajuste dos seus parâmetros tendo como base as curvas do Modelo μ . Desta forma, adotando $h_c = 0,033$ m. As energias de fratura G_c e G_t , calculadas a partir da área sob as curvas tensão-deformação foram $G_c = 10000$ N/m e $G_t = 77$ N/m e o comprimento característico foi $l_{ch} = 0,10$ m. Adotou-se $\tilde{D}_c = 0,47$ e $\tilde{D}_t = 0,70$. Os parâmetros obtidos são apresentados na Tabela 14. As Figuras 67 e 68 mostram as curvas obtidas.

Tabela 14 – Parâmetros do Modelo de Lee e Fenves – Viga sob carga cíclica

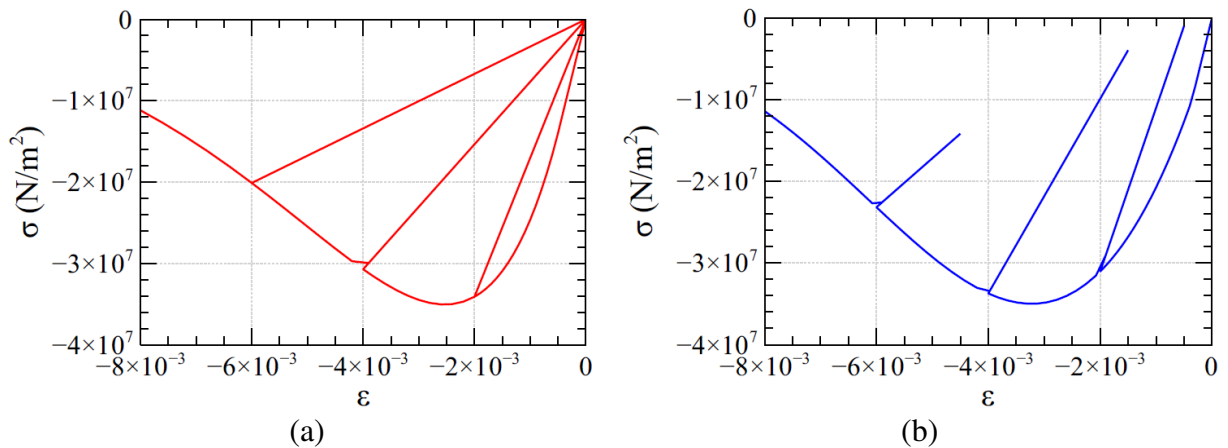
f_{c0}	s_0	a_c	b_c	d_c	a_t	b_t	d_t
10,08	0,90	10,80	1,00	1,04	0,574	1,20	1,20

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como um valor usual para o efeito do fechamento de fissuras, adotou-se o valor de $s_0 = 0,90$. Em termos práticos, este valor indica que ao passar de uma região de tração para uma região de compressão, 90% das fissuras abertas são fechadas.

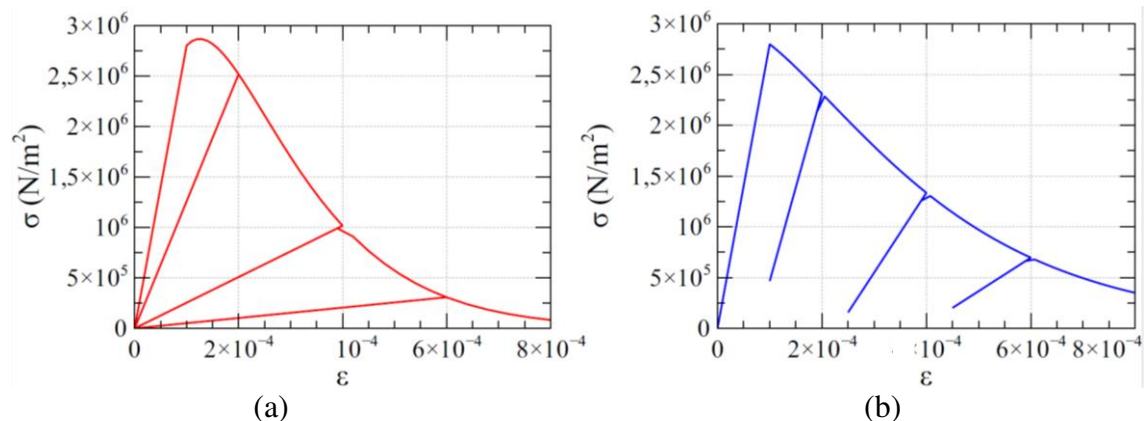
As curvas tensão-deformação do Modelo μ e do Modelo de Lee e Fenves na Figura 67 e na Figura 68 mostram bem as diferenças entre os dois modelos. O Modelo μ , sendo um modelo de dano puro, não apresenta deformações permanentes ao ser descarregado. Já no Modelo de Lee e Fenves, o descarregamento mostra visivelmente o surgimento de deformações plásticas.

Figura 67 – Curvas tensão-deformação na compressão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 68 – Curvas tensão-deformação na tração para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves



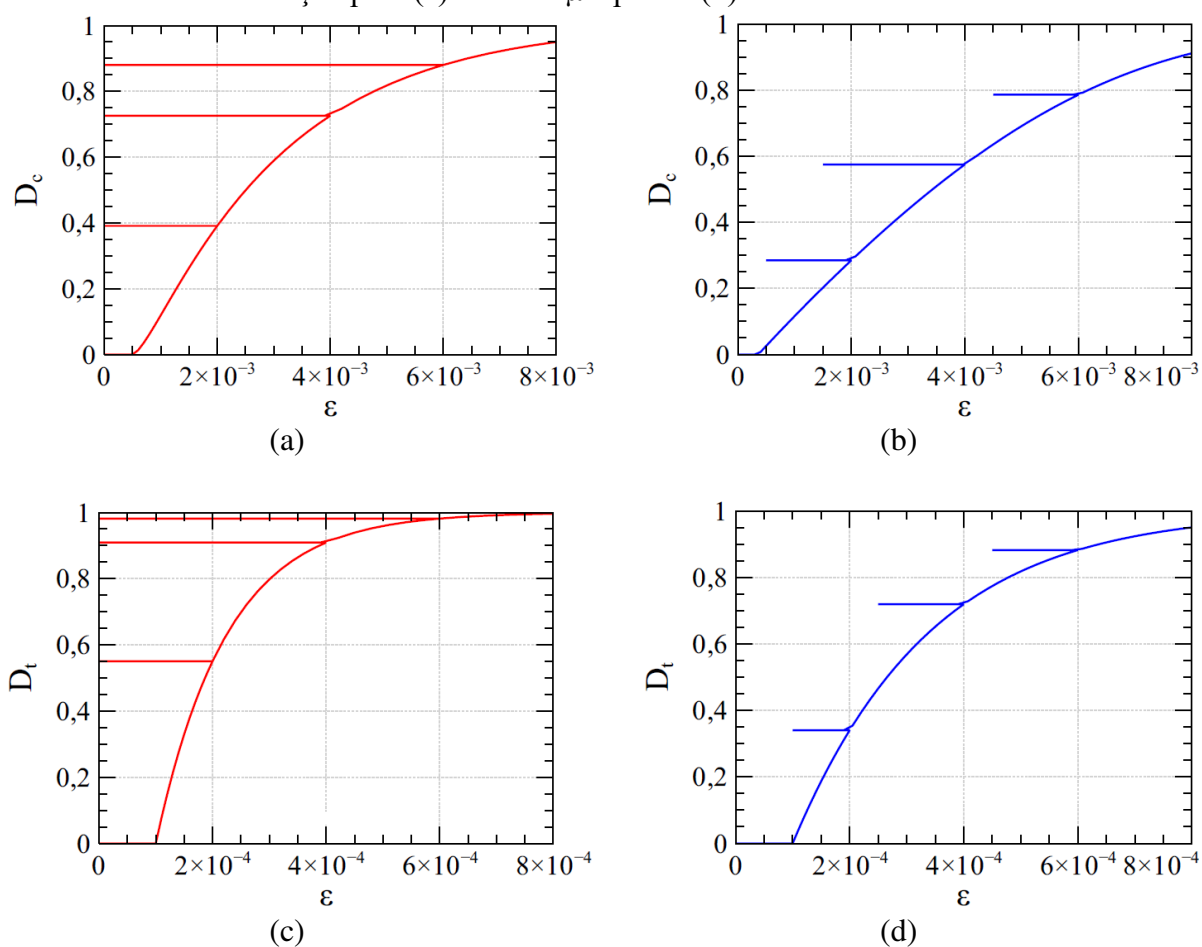
Fonte: Elaborada pelo autor.

A evolução das variáveis de dano para este exemplo tem um caráter de maior importância devido ao carregamento cíclico. A partir dos parâmetros utilizados nos dois

modelos, é possível traçar a curva de dano por deformação total. Esta evolução é mostrada na Figura 69.

Na Figura 69, os trechos de descarregamento correspondem às linhas horizontais presentes dos gráficos. Através destes gráficos, é possível saber se a evolução do dano é coerente com os resultados experimentais. Além disto, pode-se identificar que o dano na tração evolui de maneira mais rápida do que o dano na compressão no início dos carregamentos para ambos os modelos. Esta é uma característica observada experimentalmente.

Figura 69 – Curvas de evolução do dano na compressão o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves e na tração para (c) Modelo μ e para o (d) Modelo de Lee e Fenves

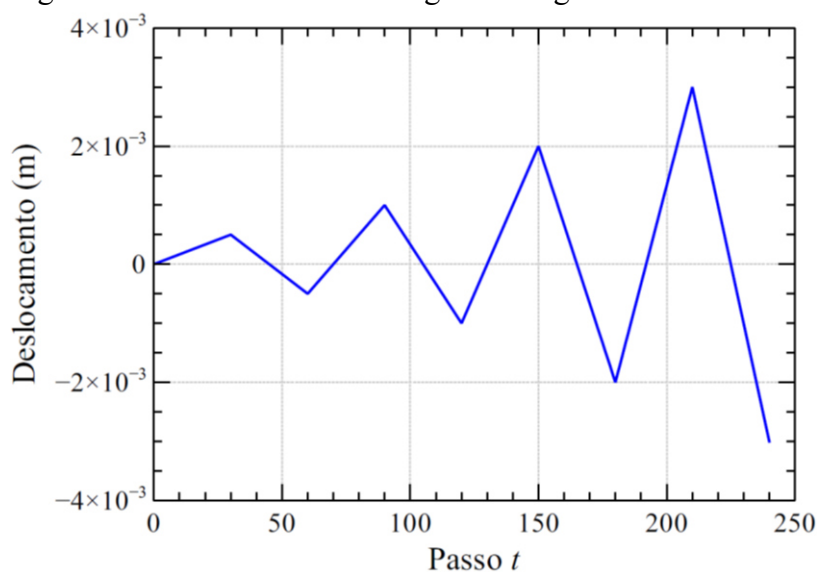


Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo de elementos finitos utilizado para esta análise é formado por 20 elementos corrotacionais discretizados na seção em 50 fatias. A Figura 70 mostra como o controle de deslocamento foi utilizado. Foram feitos 3 ciclos de deslocamentos variando de +0,5 mm até -3,0 mm.

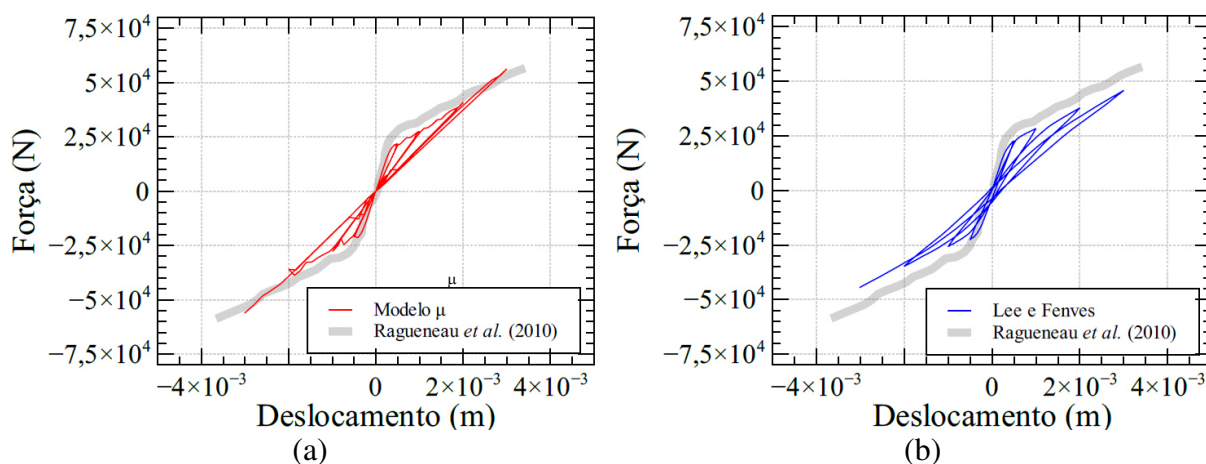
Os incrementos de deslocamentos foram de 0,0165 mm. Adotou-se uma tolerância de 10^{-5} . Os resultados obtidos para ambos os modelos são apresentados na Figura 71. A linha cinza indica a envoltória do resultado experimental obtido por Ragueneau, Lebon e Delaplace (2010). Os resultados mostram que os dois modelos foram capazes de representar o comportamento cíclico.

Figura 70 – Deslocamentos – Viga sob carga cíclica



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 71 – Curvas carga-deslocamento no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves



Fonte: Elaborada pelo autor.

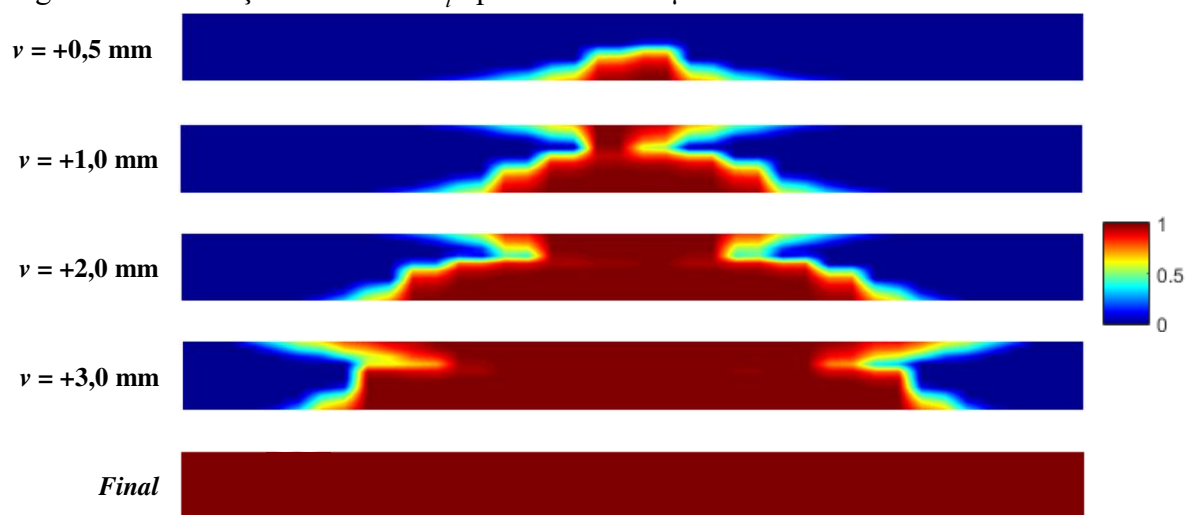
Na Figura 71, observa-se que o Modelo de Lee e Fenves se adequou ligeiramente melhor à curva experimental. Esta melhor adaptação pode ser decorrência da capacidade do modelo de captar deformações plásticas no concreto. Todavia, como as curvas tensão-

deformação de ambos os modelos são bastantes similares, não é possível indicar que os resultados do Modelo de Lee e Fenves são melhores.

Um ponto interessante nestes resultados é que, mesmo o Modelo de Lee e Fenves apresentando curvas tensão-deformação mais rígidas (como mostram as Figuras 67a e 67b), o resultado na viga foi menos rígido do que no Modelo μ . Mais uma vez, pode-se aferir que este comportamento se deu ao surgimento de deformações permanentes na estrutura.

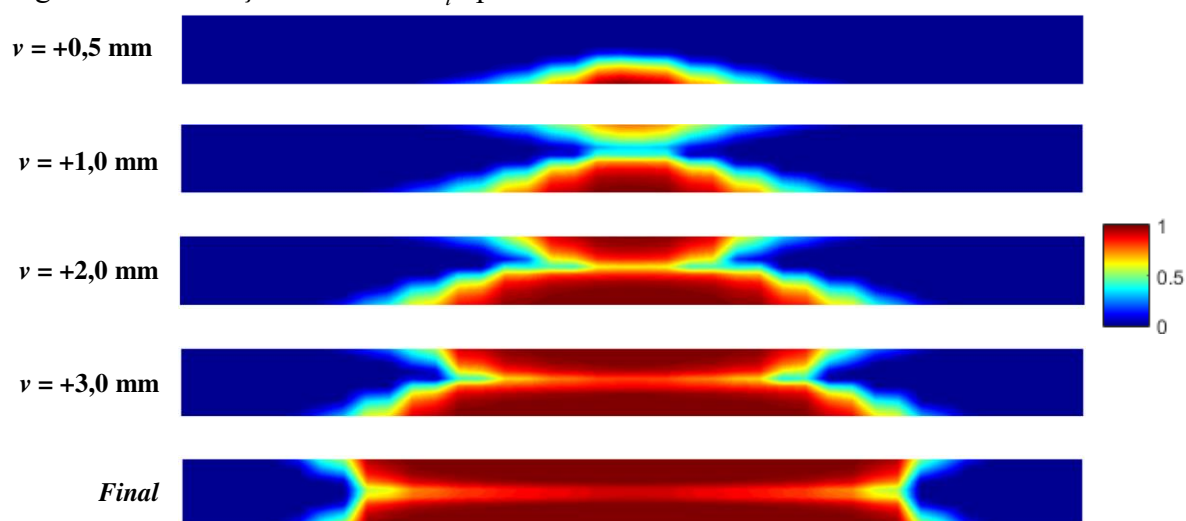
A evolução do dano na tração na viga para os dois modelos é apresentada nas Figuras 72 e 73. Como nas aplicações anteriores (Seções 7.5 e 7.6), o dano obtido através do Modelo μ é sempre superior ao dano obtido através do Modelo de Lee e Fenves.

Figura 72 – Evolução do dano D_t para o Modelo μ



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 73 – Evolução do dano D_t para o Modelo de Lee e Fenves

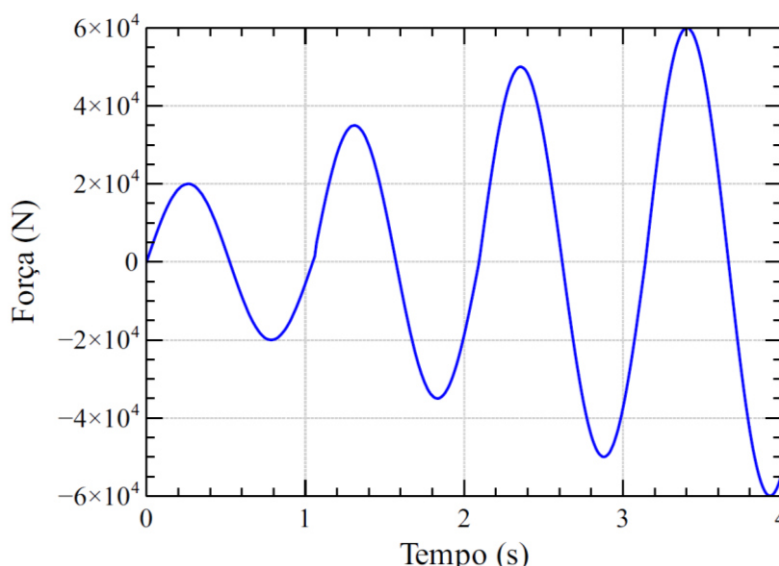


Fonte: Elaborada pelo autor.

De forma a analisar a influência dos efeitos inerciais neste exemplo, foram feitas mais duas análises dinâmicas. Para tal, foi aplicada no centro do vão da viga, uma carga cíclica de formato senoidal do tipo $P(t) = P_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$. A cada ciclo completo a carga P_0 é aumentada. Desta forma, busca-se obter um carregamento similar ao carregamento estático mostrado na Figura 70. Em ambas as análises, adotou-se o método α -Generalizado.

O primeiro carregamento foi feito com uma frequência angular $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e carga P_0 crescendo de $2,0 \times 10^4 \text{ N}$ a $6,0 \times 10^4 \text{ N}$. Este carregamento é mostrado na Figura 74. O tempo total de aplicação dos ciclos de carga até $6,0 \times 10^4 \text{ N}$ foi de $4,0 \text{ s}$.

Figura 74 – Carga dinâmica harmônica $\omega = 6 \text{ rad/s}$ – Viga sob carga dinâmica

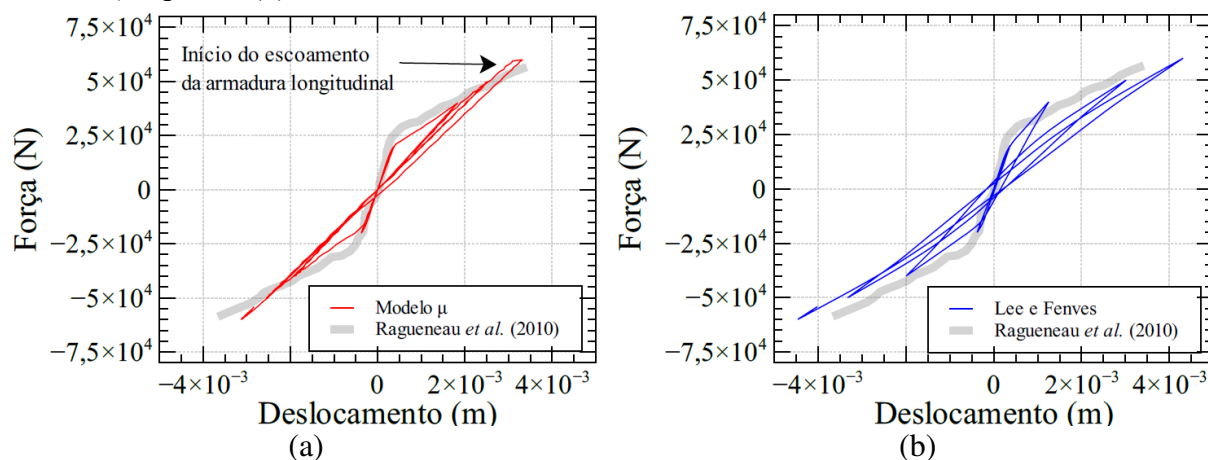


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos para o primeiro carregamento dinâmico são mostrados na Figura 75. Uma pequena variação das curvas carga-deslocamento é percebida em ambos os modelos. No caso do Modelo μ , ao final do último ciclo, nota-se o surgimento de uma pequena deformação plástica proveniente do início do escoamento da armadura da viga.

Ambos os modelos apresentam maiores deslocamentos para os mesmos níveis de carga comparados ao resultado estático. Ou seja, ao final de 4 ciclos, os deslocamentos obtidos foram superiores a $\pm 4,0 \text{ mm}$. O resultado para o carregamento estático foi de deslocamentos de $\pm 3,0 \text{ mm}$ ao final de 4 ciclos. Estes resultados são esperados devido à influência das forças de inércia na análise.

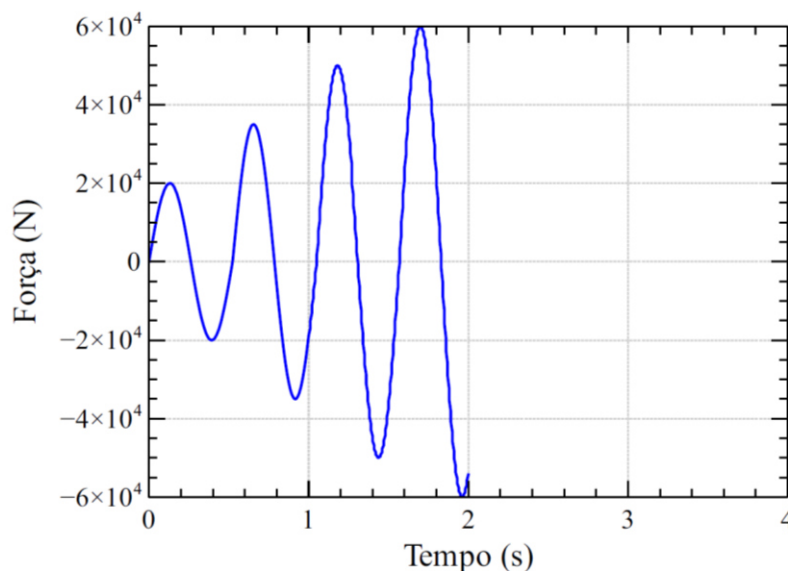
Figura 75 – Curvas carga-deslocamento ($\omega = 6,0$ rad/s) dinâmico no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves



Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo carregamento cíclico é mostrado na Figura 76. Adotou-se o dobro da frequência angular anterior, $\omega = 12$ rad/s. A carga P_0 é a mesma do carregamento anterior. Para este carregamento, o tempo total dos ciclos foi de 2,0 s.

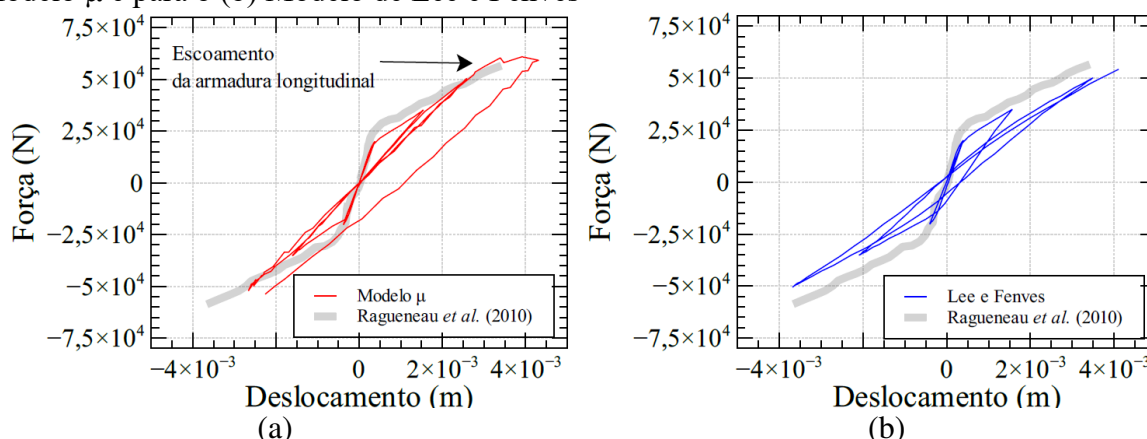
Figura 76 – Carga dinâmica harmônica $\omega = 12,0$ rad/s – Viga sob carga dinâmica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos para o primeiro carregamento dinâmico são mostrados na Figura 77. Neste caso, como observado nas curvas carga-deslocamento, os modelos atingiram os mesmos níveis de deslocamentos do carregamento anterior ao final de apenas 3 ciclos. O início do escoamento da armadura longitudinal verificado no carregamento anterior está novamente presente no resultado do Modelo μ .

Figura 77 – Curvas carga-deslocamento ($\omega = 12 \text{ rad/s}$) dinâmico no meio do vão para o (a) Modelo μ e para o (b) Modelo de Lee e Fenves

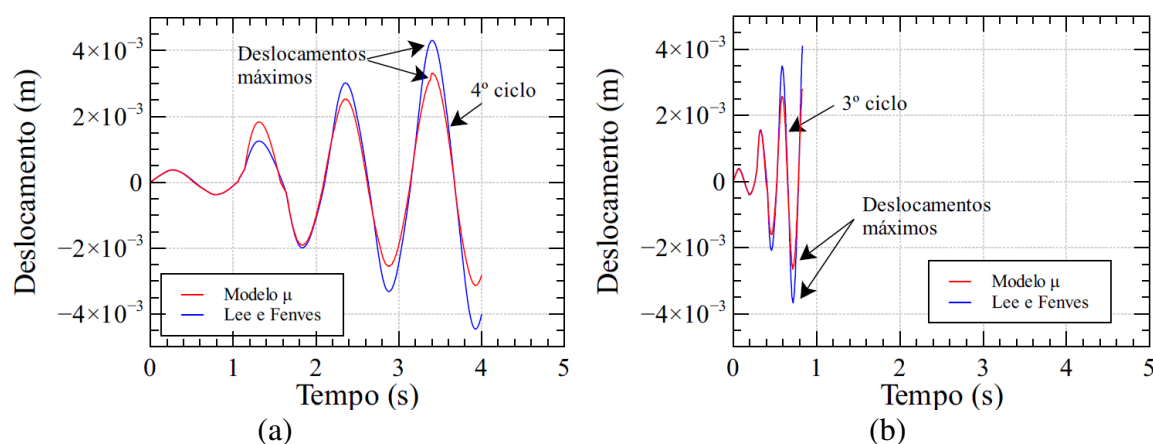


Fonte: Elaborada pelo autor.

As respostas de vibração da viga devido aos dois carregamentos harmônicos ($\omega = 6,0 \text{ rad/s}$ e $\omega = 12,0 \text{ rad/s}$) são mostradas na Figura 78. Nesta figura é possível ver que os deslocamentos da ordem de $\pm 3,0 \text{ mm}$ foram obtidos no 4º ciclo para o primeiro carregamento ($\omega = 6,0 \text{ rad/s}$) e no 3º ciclo para o segundo carregamento ($\omega = 12,0 \text{ rad/s}$).

Também é possível notar que em ambos os carregamentos, Modelo de Lee e Fenves apresentou maiores valores de deslocamentos, pelo menos a partir do 2º ciclo. Estes resultados mostram a importância do conhecimento do tempo de aplicação de cargas em estruturas de concreto armado, como por exemplo no caso do estudo do colapso progressivo.

Figura 78 – Resposta dinâmica carregamentos com (a) $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$ e (b) $\omega = 12,0 \text{ rad/s}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As contribuições propostas por este trabalho tiveram como foco a análise não linear física de estruturas de concreto armado. Além disto, também se propôs a utilização de um algoritmo de integração direta capaz de contornar problemas de instabilidade numérica, típicos de problemas não lineares.

A primeira parte do trabalho deve como foco, a implementação do algoritmo de integração numérica α -Generalizado. Este algoritmo possui similaridades com os algoritmos clássicos de Newmark. Entretanto, como verificado nos exemplos estudados na Seção 3.3, o algoritmo α -Generalizado apresentou melhor performance do que o algoritmo de Newmark em problemas onde a instabilidade numérica estava presente.

O algoritmo α -Generalizado se mostrou eficiente na eliminação da instabilidade numérica, como mostrado nos exemplos estudados. Entretanto, a introdução de amortecimento numérico na estrutura deve ser feita de maneira cuidadosa, tendo em vista que o excesso de amortecimento pode influenciar também a precisão do algoritmo. Caso os parâmetros não estejam bem calibrados, esta influência pode ser negativa.

Na segunda parte do trabalho, buscou-se o desenvolvimento de modelos constitutivos de concreto baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. O uso destas teorias dá à análise não linear de estruturas de concreto armado uma sofisticação necessária ao seu estudo.

A modelagem estrutural de pórticos de concreto armado neste trabalho foi feita através do Método dos Elementos Finitos. Adotou-se elementos lineares baseados na Teoria de Euler-Bernoulli e capazes de representar grandes deslocamentos devido à formulação corrotacional utilizada. Além disto, a integração numérica da seção transversal foi feita utilizando-se o Método das Fatias. Para cada fatia, uma lei constitutiva unidimensional pode ser associada.

Dentro desta abordagem, este trabalho propôs a implementação de modelos constitutivos unidimensionais capazes de se adaptar bem a carregamentos cíclicos, sejam estes estáticos ou dinâmicos. Os modelos constitutivos implementados neste trabalho mostraram-se eficazes no objetivo de capturar os efeitos provenientes destes tipos de carregamentos em estruturas de concreto armado.

O primeiro modelo implementado, Modelo μ , é baseado no modelo clássico de dano de Mazars (1986). Este modelo considera a evolução de dano através da Mecânica do Dano

Contínuo sem considerar o surgimento de deformações permanentes. O Modelo μ apresentou resultados satisfatórios para carregamentos monotônicos e cíclicos, além de ser de fácil entendimento e implementação.

Uma das vantagens encontradas no uso do Modelo μ foi o fácil ajuste das curvas tensão-deformação a curvas experimentais. Esta característica do modelo foi verificada na segunda aplicação feita na Seção 7.6. A principal desvantagem do modelo é que ele superestima o acúmulo de dano presente nas estruturas ao desconsiderar os efeitos de plasticidade do concreto, principalmente em carregamentos cíclicos.

O segundo modelo constitutivo implementado foi baseado no modelo criado por Lubliner *et al.* (1989) e, posteriormente, desenvolvido por Lee e Fenves (1998). Este modelo é baseado na Teoria da Plasticidade e incorpora dentro da sua formulação a definição de tensão equivalente da Teoria do Dano Contínuo. Desta forma, o modelo é capaz de representar a evolução da plasticidade acoplada à evolução do dano.

Este modelo de plasticidade acoplada ao dano, chamado aqui de Modelo de Lee e Fenves, foi implementado através do desenvolvimento de um algoritmo de mapeamento de retorno baseado no Método de Newton-Raphson. Adotou-se uma formulação consistente para o módulo algorítmico tangente do modelo.

Dentre as principais vantagens observadas no Modelo de Lee e Fenves implementado estão a sua facilidade de ajuste de curvas tensão-deformação baseado em características físicas do material, como energia de fratura, resistência característica e a própria evolução do dano.

Outra importante vantagem do modelo está na incorporação dentro da sua própria formulação da redução do problema de sensibilidade de malha apresentado em modelos com *softening*. O Modelo de Lee e Fenves garante a objetividade de malha através do conceito de bandas de fissuração (BAZANT, 1976), reduzindo assim a probabilidade de ocorrência de localização de deformação.

Os resultados apresentados no Capítulo 7 mostram que a implementação do Modelo de Lee e Fenves, assim como do Modelo μ , estão corretas. As aplicações no nível de estrutura mostraram que os modelos implementados estão aptos a serem utilizados como ferramenta para a análise não linear de estruturas de concreto armado.

Como sugestões para trabalhos futuros, os modelos implementados podem ser utilizados no estudo de pórticos planos sob a ação de sismos e colapso progressivo. Além deste tipo de estudo, o aspecto 3D pode ser incorporado através da implementação do Método das

Fatias que considere os efeitos de torção. Efeitos de cisalhamento podem também ser incorporados com o uso de teorias de viga que considerem tais efeitos.

Outros trabalhos futuros podem focar no desenvolvimento de modelos constitutivos para a armadura longitudinal e para a armadura transversal de estruturas de concreto. Considerando além de fenômenos como histerese e relaxação do aço, o deslizamento entre a armadura e o concreto.

REFERÊNCIAS

- ALFARAH, B. **Advanced Computationally Efficient Modeling of RC Structures Nonlinear Cyclic Behavior**. 196 f. Tese (Doctoral Degree in Earthquake Engineering and Structural Dynamics), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2017.
- BAHN, B.Y.; HSU, T. T. C. Stress-strain behavior of concrete under cyclic loading. **ACI. Mat. Jour**, v. .95, N.2, p.178-193, 1998.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 1996.
- BAZANT, Z. P. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. **J. of the Engineering Mechanics**, Division ASCE, v. 102, No. EM2, p. 331-344, 1976.
- BAZANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle structures**. CRC Press, 1998.
- BAZZI, G.; ANDERHEGGEN, E. The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 10, p. 537-55, 1982.
- BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, p. 7181-7207, 2004.
- CERVERA, M.; OLIVER, J.; FARIA, R. Seismic evaluation of concrete dams via continuum damage models. **Earthquake Engineering Structural Dynamics**. v. 24, n. 9, p. 1225-1245, 1995.
- CHANDRA, Y.; STANCIULESCU, I.; EASON, T.; SPOTTSWOOD, M. Numerical pathologies in snap-through simulations. **Engineering Structures**, v. 34, p. 495-504, 2012.
- CHUNG, J.; HUBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371, 1993.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4. ed. John Wiley & Sons, 2002.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. England: Jhon Wiley & Sons, v. 1, 1991.
- CRISFIELD, M. A.; JELENĆ, G.; ZHONG, H-G.; FAN, Z. Static and dynamic non-linear analysis of structures, In: Désidéri, J-A, Hirsch C, LeTallec P, Oñate E, Pandolfi M, Périaux J, Stein E, Editors. **Computational Methods in Applied Sciences**. 1996, Invited Lectures and Special Technological Sessions of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference and 2nd ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering, p. 9-21, Paris, 9/13 Set., 1996.

BORST, R. DE; CRISFIELD, M. A; REMMERS, J. C; VERHOOSSEL, C. V. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. United Kingdom: Wiley, 2012.

DRIEMEIER, L.; PROENÇA, S. P. B. Estudo da localização de deformações associada ao emprego de modelo constitutivo de dano. **Cadernos de Engenharia de Estrutura**, São Carlos, v. 10, n. 46, p. 127-155, 2008.

ERLICHER, S.; BONAVENTURA, L.; BURSI, O. L. The analysis of the Generalized- α method for non-linear dynamic problems. **Computational Mechanics**, v. 28, n. 2, p. 83-104, 2002.

ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, Creep and shrinkage of concrete. TC 114 RILEM. **E&FN Spon**, 1993.

FERGUSON, P. M. ; BREEN, J. E. Investigation of the long concrete column in a frame subjected to lateral loads. Symposium on Reinforced Concrete Columns. American Concrete Structures, **American Concrete Institute**, SP-13, 1966.

FLÉJOU, J. L. **Relations de comportement non linéaires 1D**. CODE-ASTER, 2015.

GOPALARATNAM, V. S.; SHAH, S. P. Softening response of plain concrete in direct tension. **ACI J.**, v. 82, n. 3, p. 310-323, 1985.

HAUS, S. A. **Influência do efeito *Bauschinger* no retorno elástico em aços avançados de elevada resistência. 92 f.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, 2011.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**. v. 5, p.283-292, 1977.

HOFF, C.; PAHL, P. J. Practical Performance of the θ_1 Method and Comparison with Other Dissipative Algorithms in Structural Dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 67, p. 87-110, 1988.

HUGHES, T. J. R.; CAUGHEY, T. K.; LIU, W. K. Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the ASME, v. 45, p. 366-370, 1978.

JU, J. W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. **Int. J. Solids and Struct.**, v. 25, n. 7, p. 803-833, 1989.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk*, v. 8, p. 26-31. Rússia, 1958.

KARSAN, I. D.; JIRSA, J. O. Behavior of concrete under compressive loadings. **J. Struct. Div.**, ASCE, v. 95, n. 12, p. 2535-2563, 1969.

KLINKEL, S.; GOVINDJEE, S. Govindjee, S. Using finite strain 3d-material models in beam and shell elements. **Eng. Computation**. v. 19, p. 902-921, 2002.

KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. Energy-Conserving and Decaying Algorithms in Non-Linear Structural Dynamics. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v. 45, p. 569-599, 1999.

KUPFER H. B.; GERSTLE, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. **J Eng Mech Div**, v. 99, n. 4, p. 853-866, 1973.

LE, T. N.; BATTINI, J. M.; HJIAJ, M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. **Computational Mechanics**, v. 48, n. 2, p. 153-161, 2011.

LEE, J.; FENVES, G. L. Numerical implementation of plastic-damage model for concrete under cyclic loading: Application to concrete dam. **Rep. No. UCB/SEMM-94/03**, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, Calif, 1994.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 8, p. 892-900, 1998.

LEMAITRE, J. Coupled Elasto-plasticity and damage constitutive equations. **Com. Meth. Appl. Mech. Engng**, v. 51, p. 31-49, 1985.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J-L. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge University Press, 1994.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; ONATE, E. A plastic-damage model for concrete. **Int. J. Solids and Struct.**, v. 25, n. 3, p. 299-326, 1989.

MAZARS, J. A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 25, n. 5, p. 729-737, 1986.

MAZARS, J.; HAMON, F.; GRANGE, S. A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. **Materials and Structures**, v. 48, p. 3779-3793, 2015.

MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory - application to concrete. **J Eng Mech**, ASCE v. 115, n. 2, p. 345-365, 1989.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**. 2. ed. Faculty Books, 2000.

MELO, C. D. R. **Estudo do colapso progressivo de pórticos planos de concreto armado via análise não linear**. 112 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

NEDJAR, B. **Mecanique de l'endommagement. Theorie du premier gradient et application au beton**. 131 f. Tese (Doutorado). Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, França, 1995.

NEWMARK, N. N. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanic Division**, Proceedings of the ASCE, 8 v. 85 (EM3), p. 67–94, 1959.

- OLIVEIRA, C. E. M.; BERKE, P. Z.; SILVEIRA, R. A. M.; MASSART, T. J. **Computational assessment of the progressive collapse of a five storey structure considering two different building codes**. In: 4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering. Kos Island, jun. 2013.
- OMIDI, O.; LOTFI, V. Finite Element Analysis of Concrete Structures Using Plastic-Damage Model in 3-D Implementation. **International Journal of Civil Engineering**. v. 8, n. 3, september, 2010.
- ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. **Mech. of Mat.**, v. 4, p. 67-93, 1985.
- PARENTE, E; NOGUEIRA, G. V; MEIRELES NETO, M. MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 5, São Paulo: 2014.
- RABOTNOV, Y. N. On the equations of state for creep. **Progress in Applied Mechanics** (Prager Anniversary Volume), New York: MacMillan, 1963.
- RAGUENEAU, F.; LEBON, G.; DELAPLACE, A. Analyse expérimentale du comportement cyclique de poutres en béton armé, **LMT Internal report**, October, 2010.
- RAO, S. **Mechanical Vibrations**. 5. ed., University of Miami, Pearson, 2008.
- REINHARDT, H. W. Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. **Heron**, v. 29, n. 2, p. 1-42, 1984.
- SANCHES JUNIOR, F.; VENTURINI, W. S. Damage modelling of reinforced concrete beams. **Advances in Engineering Software**, v. 38, p. 538-546, 2007.
- SARITAS, A.; FILIPPOU, F. C. Numerical integration of a class of 3d plastic-damage concrete models and condensation of 3d stress-strain relations for use in beam finite elements. **Engineering Structures**, v. 31, n. 10, p. 2327-2336, 2009.
- SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational inelasticity**, v. 7, New York: Springer, 2000.
- SIMO, J.; JU, J. Strain- and stress-based continuum damage models-I formulation. **Int J Solid Struct**, v. 23, p. 82-840, 1987.
- SIMO, J.; TARNOW, N. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, **Springer Verlag**, v. 43, n. 5, p. 757-792, 1992.
- SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- SOUZA NETO, E. A, PERIC, D; OWEN, D. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. United Kingdom: Wiley, 2008.

SPACONE, E; FILIPPOU, F. C; TAUCER, F. F. Fibre beam–column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. **Earthquake Engng. Struct. Dyn.**, v. 25, p. 711-725, 1996.

VOCE, E. A practical strain hardening function. **Metallurgia**, v. 51, n. 307, p. 219-226, 1955.

WILSON, E. L. A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures, SESM Report No. 68-1, **Division of Structural Engineering and Structural Mechanics**, University of California, Berkeley, CA, 1968.

WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. An alpha modification of Newmark's method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1562-1566, 1981.

YAW, L. L. Nonlinear static – 1d plasticity – various forms of isotropic hardening. **NOTAS DE AULA**, Walla Walla University, Washington DC, 2012.

ANEXO A – ALGORITMOS DOS MODELOS CONSTITUTIVOS

Plasticidade com Encruamento Isotrópico e Cinemático Linear

Dados de entrada:

$$\sigma_Y, E, K, H, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n, q_n$$

Preditor elástico:

$$status = ELASTIC$$

$$C_t = E$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$\xi_{n+1}^{trial} = \sigma_{n+1}^{trial} - q_n$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\xi_{n+1}^{trial}| - (\sigma_Y + K\alpha_n)$$

Se $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n$$

$$q_{n+1} = q_n$$

Se $f_{n+1}^{trial} > 0$

Corretor plástico:

$$status = PLASTIC$$

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + K + H}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E \text{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\gamma H \text{sign}(\xi_{n+1}^{trial})$$

Se $status = PLASTIC$

Módulo tangente:

$$C_t = \frac{E(K + H)}{E + K + H}$$

Plasticidade com Encruamento Isotrópico Exponencial

Dados de entrada:

$$\sigma_Y, \sigma_U, E, \delta, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n$$

Preditor elástico:

$$status = ELASTIC$$

$$C_t = E$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + (\sigma_U - \sigma_Y)(1 - e^{-\delta\alpha_n})]$$

Se $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n$$

Se $f_{n+1}^{trial} > 0$

Corretor plástico:

$$status = PLASTIC$$

Resolver o sistema não linear usando o Método de Newton-Raphson para achar $\Delta\gamma$ e σ_{n+1} :

$$\begin{cases} |\sigma_{n+1}| - [\sigma_Y + (\sigma_U - \sigma_Y)(1 - e^{-\delta(\alpha_n + \Delta\gamma)})] = 0 \\ \sigma_{n+1} - E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) + E\Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) = 0 \end{cases}$$

Ou resolver a equação não linear usando o Método de Newton-Raphson para achar $\Delta\gamma$:

$$f_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma E - [\sigma_Y + (\sigma_U - \sigma_Y)(1 - e^{-\delta(\alpha_n + \Delta\gamma)})] + [\sigma_Y + (\sigma_U - \sigma_Y)(1 - e^{-\delta\alpha_n})] = 0$$

$$\sigma_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta\gamma E}{|\sigma_{n+1}^{trial}|}\right) \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

Se $status = PLASTIC$

Módulo tangente:

$$C_t = \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \Delta\gamma} = \frac{E(\sigma_U - \sigma_Y)\delta e^{-\delta\alpha_{n+1}}}{E + (\sigma_U - \sigma_Y)\delta e^{-\delta\alpha_{n+1}}}$$

Plasticidade com Encruamento Isotrópico Linear e Dano acoplado

Dados de entrada:

$$\sigma_Y, E, K, S, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n^p, \alpha_n, D_n$$

Preditor elástico:

$$status = ELASTIC$$

$$C_t = (1 - D_n)E$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(1 - D_n)(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

$$f_{n+1}^{trial} = \frac{|\sigma_{n+1}^{trial}|}{1 - D_n} - (\sigma_Y + K\alpha_n)$$

Se $f_{n+1}^{trial} \leq 0$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n$$

$$D_{n+1} = D_n$$

$$Y = \frac{\sigma_{n+1}^2}{2E(1 - D_{n+1})^2}$$

Se $f_{n+1}^{trial} > 0$

Corretor plástico:

$$status = PLASTIC$$

Resolver o sistema não linear usando o Método de Newton-Raphson para achar D_{n+1} e σ_{n+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\sigma_{n+1}|}{1 - D_{n+1}} - (\sigma_Y + K(\alpha_n + \Delta\gamma)) = 0 \\ \left(\frac{2ES(D_{n+1} - D_n)(1 - D_{n+1})^2}{\sigma_{n+1}^2} - \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \right) \sigma_{n+1} = 0 \\ \sigma_{n+1} - E(1 - D_{n+1})(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) + E\Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \frac{\Delta\gamma}{1 - D_{n+1}} \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

Se $status = PLASTIC$

Módulo tangente:

$$C_t = \frac{(1 - D_{n+1})E}{E/(1 - D_{n+1}) + K} \left(K - |\sigma_{n+1}| \frac{Y}{S(1 - D_{n+1})^2} \right)$$