UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS AUGUSTO DAVID RIBEIRO

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED

FORTALEZA
2019

CARLOS AUGUSTO DAVID RIBEIRO

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R368i Ribeiro, Carlos Augusto David.
Imersões Isométricas em Produtos Warped / Carlos Augusto David Ribeiro. – 2019.
68 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Teorema Fundamental. 2. Equações de Estrututa. 3. Produto Warped. 4. Subvariedades. 5. Variedades Semi-Riemannianas. I. Título.

CDD 510

CARLOS AUGUSTO DAVID RIBEIRO

IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovoda em: __ / __ / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Universidade federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Samuel da Cruz Canevari
Universidade Federal de Sergipe (UFS)

Dedico este trabalho a minha bela e amada esposa, Keivy Lany.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero e devo agradecer ao meu Deus Jeová, pois foi Ele que, tanto de forma direta , como também indiretamente, deu-me forças para perseverar ao longo desse doutorado, chegando assim aqui, a essa tese, e conseguindo concluí-la com sucesso. Sei que sem Ele nada do que fiz teria sido possível.

Agradeço também a meus professores, que me guiaram ao longo da minha graduação, mestrado e doutorado, ensinando-me não só matemática, mas lições de vida, amizade, perseverança, entre outras. Dentre eles devo destacar: o prof. Gregório Pacelli Bessa, que me recebeu calorosamente em meu retorno a UFC neste doutorado e muitas vezes demonstrava acreditar em mim mais do que eu mesmo; o prof. Alexandre, que além do conhecimento transmitido, muitas vezes me lembrava, através de sua empolgação, como é prazeroso resolver um problema de matemática; o prof. Antonio Caminha, que já bem antes de minha graduação, guiava-me pela matemática, passando- me conhecimento e exemplos de inteligência, humildade, bom senso, competência, organização e perseverança; por fim, ao prof. Marcos Melo, que acreditou no meu trabalho, dando-me também a liberdade e orientação necessária para que este doutorado fosse finalizado com sucesso.

Este parágrafo dedico a meus colegas de doutorado, com que sem suas palavras, conselhos e incentivos, tudo teria sido mais difícil. Destaco em especial: ao Emanuel Viana, Léo Ivo, Amilcar Sayago, Janielly Araújo e Diego Rodrigues, colegas com quem muitas disciplinas, ideias e listas de exercícios dividi.

Por fim, não posso esquecer de agradecer minha família, cujo papel fundamental de incentivadora foi, em todos seus aspectos, competentemente cumprido. Em resumo agradeço: a meus pais, Djair e Heleneida, e minha tia, Francisca Clarisse, que sempre deram tudo de si, para que hoje, da melhor maneira possível, eu saiba caminhar sozinho; a meus irmãos Carla e Caio, que fizeram de suas presenças um prazer pra mim; e finalmente, neste âmbito familiar, também incluo especialmente minha querida e amada esposa Keivy Lany, que com seus carinhos, incentivos, palavras doces, e seu enorme apoio foram fundamentais neste processo todo, literalmente sem ela eu não teria conseguido.

Em resumo, obrigado a todos aqueles que em minha vida contribuíram para meu crescimento, seja ele espiritual, intelectual ou emocional.

Agradeço também à Andrea e à Jessyca pela competência e agilidade.

Agradeço à CNPQ, pelo apoio financeiro.

"Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos".

(ISAAC NEWTON)

RESUMO

Nesta tese, nós encontramos condições necessárias e suficientes para uma variedade M^n não-degenerada de índice arbitrário ser realizada como uma subvariedade da vasta classe de variedades produto warped $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, onde $\varepsilon = \pm 1$, $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é o fator escalar e $\mathbb{M}^N_\lambda(c)$ é a forma espacial N-dimensional semi-Riemanniana de índice λ e curvatura constante $c \in \{-1, 1\}$. Também discutimos as condições necessárias e suficientes para uma variedade M^n não-degenerada de índice arbitrário ser realizada como uma subvariedade da classe de variedades produto warped $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$. Para o caso de subvariedades de $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, provamos que se M^n satisfaz as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para uma subvariedade em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, junto com algumas condições adicionais, então M^n pode ser isometricamente imersa em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$. Isso generaliza o caso de hipersuperfícies imersas em produtos warped semi-Riemannianos provado por M.A. Lawn and M. Ortega (ver LAWN and ORTEGA (2015)), que é uma extensão do resultado de imersões isométricas obtido por J. Roth nos produtos Lorentzianos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_1$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}_1$ (ver ROTH (2011)), onde $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são a esfera e o espaço hiperbólico de dimensão n, respectivamente. Essse útimo resultado, por sua vez, é uma expansão para variedades pseudo-Riemannianas do resultado de imersões isométricas provado por B. Daniel em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ (ver DANIEL (2009)), uma das primeiras generalizações do teorema clássico para subvariedades em formas espaciais (ver TENEBLAT (1971)). Já para o caso de subvariedades do produto warped $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$, discutimos as condições necessárias e suficientes, bem como exibimos um resultado para o caso em que a função warping possui Hessiana conforme, o que generaliza não só todos os artigos supra citados, como também em parte o resultado obtido em LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010).

Palavras-chave: Teorema Fundamental. Equações de Estrutura. Produto Warped. Subvariedades. Variedades Semi-Riemannianas.

ABSTRACT

In this work, we find necessary and sufficient conditions for a nondegenerate arbitrary signature manifold M^n to be realized as a submanifold in the large class of warped product manifolds $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, where $\varepsilon = \pm 1$, $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ is the scale factor and $\mathbb{M}^N_\lambda(c)$ is the N-dimensional semi-Riemannian space form of index λ and constant curvature $c \in \{-1, 1\}$. We also discussed the necessary and sufficient conditions for a nondegenerate arbitrary signature manifold M^n to be realized as a submanifold in the class of warped product manifolds $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$. In the case of submanifolds of $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, we prove that if M^n satisfies Gauss, Codazzi and Ricci equations for a submanifold in $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, along with some additional conditions, then M^n can be isometrically immersed into $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$. This comprises the case of hypersurfaces immersed in semi-Riemannian warped products proved by M.A. Lawn and M. Ortega (see LAWN and ORTEGA (2015)), which is an extension of the isometric immersion result obtained by J. Roth in the Lorentzian products $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_1$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}_1$ (see ROTH (2011)), where $\mathbb{S}^n$ and $\mathbb{H}^n$ stand for the sphere and hyperbolic space of dimension n, respectively. This last result, in turn, is an expansion to pseudo-Riemannian manifolds of the isometric immersion result proved by B. Daniel in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ (see DANIEL (2009)), one of the first generalizations of the classical theorem for submanifolds in space forms (see TENEBLAT (1971)). In the case of submanifolds of warped products $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$, we discussed the necessary and sufficient conditions, as well as displaying a result for the case where the warping function has a conformal Hessian, which generalizes not only all the articles mentioned above, but also in part the result obtained in LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010).

Keywords: Fundamental theorem. Structure equations. Warped product. Submanifolds. Semi-Riemannian manifolds.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Produtos warped são naturalmente uma das mais frutíferas generalizações de produtos Cartesianos. Mais precisamente, um produto warped é uma variedade equipada com uma métrica produto warped da forma:

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j}(y) dy^i \otimes dy^j + f(y) \sum_{s,t} g_{s,t}(x) dx^s \otimes dx^t,$$

onde a geometria warped se decompõe num produto da geometria "y" e da geometria "x", exceto que a segunda parte é warped, i.e, é reescalonada por uma função escalar que depende somente da outra coordenada "y". Se substituirmos a variável "y" pela variável tempo t e x pelo espaço de dimensão 3, a primeira parte torna-se o efeito do tempo no espaço curvo de Einstein. Como ele curva o espaço irá definir uma ou outra solução para um modelo de espaço-tempo. Por esta razão, diferentes modelos do espaço-tempo em relatividade geral são frequentemente expressados em termos de geometria warped. Como consequência, a noção de produtos warped desempenha importante papel não só na geometria, mas também em física-matemática, especialmente em relatividade geral.

Discorrido brevemente acerca da importância dos produtos warped e voltando atenção às questões geométricas, um problema fundamental na teoria de subvariedades tem sido saber quando uma variedade (pseudo-) Riemanniana pode ser isometricamente imersa em um dado espaço ambiente. Em seu trabalho em BONNET (1867), ainda no século XIX, O. Bonnet mostrou que uma vez dadas duas formas quadráticas em um aberto do $\mathbb{R}^2$ que satisfazem as equações de Gauss e Codazzi, então existe uma única imersão local $f : V \subset U \to \mathbb{R}^3$ com as prescritas formas fazendo o papel de métrica induzida e segunda forma fundamental. Já em meados do século XX, no caso em que o espaço ambiente é uma forma espacial riemanniana, Keti Teneblat mostrou em seu bem conhecido trabalho TENEBLAT (1971) que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são necessárias e suficientes para se obter a imersão requerida. Esse fato também é verdade para variedades pseudo-Riemannianas, e uma curta prova disso pode ser achada em LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010), onde os autores usaram isso para obter resultados de imersões isométricas em produtos de formas espaciais. Em particular, para imersões de codimensão 1, a equação de Ricci é trivial e as equações de Gauss e Codazzi são equivalentes à existência de uma imersão isométrica local nas formas espaciais desejadas.

Versões do teorema fundamental da teoria de subvariedades foram recentemente obtidas por Bonoît Daniel em DANIEL (2009) e DANIEL (2005), Julien Roth em ROTH (2011) e por Marie-Amélie Lawn e Ortega em LAWN and ORTEGA (2015). Em DANIEL (2009), Daniel considera hipersuperfícies em $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}$ é a esfera $\mathbb{S}^n$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$. Ele observou que para uma hipersuperfície M em $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ as equações de Gauss e Codazzi dependem somente da primeira e segunda forma fundamental, da projeção T do vetor vertical ∂_t sobre o fibrado tangente TM e de sua componente normal ν, e provou que essas duas equações junto com equações diferenciais de primeira ordem adicionais em T e ν dão condições suficientes e necessárias para uma variedade M ser localmente imersa e isometricamente em $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$. Em ROTH (2011), Roth expandiu o resultado de Daniel e provou um teorema fundamental de hipersuperfícies para o caso de produtos Lorentizianos $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_1$. Em LAWN and ORTEGA (2015), Lawn e Ortega generalizaram o resultado de Roth e obtiveram um teorema para hipersuperfícies em produtos warped semi-Riemannianos. É interessante chamar atenção que nenhum desses três resultados citados lida com subvariedades de codimensão maior do que um. Porém, vale destacar que teoremas de subvariedades para o caso de codimensão arbitrária vem sendo provados, demonstrando assim a importância e o interesse nos mesmos (veja, por exemplo, LAWN and ROTH (2017); KOWALCZYK (2011); LI and ZHANG (2014); LIRA and MELO (2012); LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010); REI FILHO and VITÓRIO (2017)).

Nesse trabalho, na Seção 3, nós damos uma prova de um teorema fundamental para subvariedades em produtos warped semi-Riemannianos do tipo $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, onde a subvariedade considerada foi de codimensão arbitrária. Ele estende o resultado de Lawn e Ortega, que havia provado o caso das hipersuperfícies. Como a prova em LAWN and ORTEGA (2015), nós usamos referenciais móveis e distribuições integrais, o método padrão primeiramente usado por Cartan e depois por Tenenblat em TENEBLAT (1971) ou Daniel em DANIEL (2009), por exemplo. É interessante também notar que nossa versão do teorema fundamental de subvariedades também estendeu o recente resultado provado por C. do Rei Filho e F. Vitório em REI FILHO and VITÓRIO (2017). Já na Seção 4, ampliamos a generalização ao discutir as condições necessárias e suficientes para uma variedade M^n não-degenerada de índice arbitrário ser realizada como uma subvariedade da classe de variedades produto warped $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$. Mostramos as potenciais dificuldades de tratar dessa variedade, uma vez que a base é uma variedade mais “complexa”e exibimos um resultado sob as condições da função warping possuir hessiana conforme, resultado este parte de um trabalho em andamento até o momento.

No decorrer desta tese será feita inicialmente uma breve explanação sobre as preliminares requeridas acerca de produtos warped, sendo seguida pelas seções que tratam dos produtos warped $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ e $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$.

2 PRODUTOS WARPED SEMI-RIEMANNIANOS

A noção de produto warped foi definida em 1964 no artigo BISHOP and O'NEILL (1969), porém o conceito de produto warped já aparecia na literatura matemática e física antes disso. Por exemplo, produtos warped foram chamados de espaços semi-redutíveis em KRUCHKOVICH (1957). Como dito na introdução, suas aplicações são inúmeras no campo da Física, aparecendo desde modelos de expansão e contração do universo até modelos que descrevem os estágios finais do colapso gravitacional de buracos negros.

A notação usada nesta seção será basicamente a mesma usada em O'NEILL (1983) e CHEN (2017).

2.1 Produtos Warped

Sejam B e F duas variedades semi-Rimennianas de dimensões positivas equipadas com as métricas semi-Riemanninas g_B e g_F, respectivamente, e seja f uma função suave e positiva definida em B.

Considere o produto $B \times F$ com suas projeções naturais $\pi : B \times F \to B$ e $\eta : B \times F \to F$.

Definição 2.1 *O produto warped $M = B \times_f F$ é a variedade $B \times F$ equipada com a estrutura semi-Riemanniana tal que*

$$\langle X, X\rangle = \langle \pi_*(X), \pi_*(X)\rangle + f^2(\pi(x))\langle \eta_*(X), \eta_*(X)\rangle,$$

para qualquer vetor tangente $X \in TM$. Portanto, tem-se que

$$g = g_B + f^2 g_F$$

A função f é chamada de *função warping* do produto warped. O produto warped é chamado de *trivial* se f é constante. À variedade B chamamos de *base* do produto warped e à F chamamos de *fibra*. As *folhas* $B \times \{q\} = \eta^{-1}(q)$ e as *fibras* $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ são subvariedades semi-Riemanninas de M. Os vetores tangentes às folhas são chamados de *horizontais* e aqueles tangentes às fibras são chamados de *verticais*. Uma notação também conveniente de destacar é $\mathcal{H}$ denotando a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ em seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}(B \times \{q\})$ e $\mathcal{V}$ denotando a projeção ortogonal no susbespaço vertical $T_{(p,q)}(\{p\} \times F)$.

É de importância também o conceito de levantamento de vetores (e campo de vetores). Dado $u \in T_pB$, $p \in B$ e $q \in F$, então o *levantamento* $\bar{u}$ de u a (p, q) é o único vetor em $T_{(p,q)}M$ tal que $\pi_*(\bar{u}) = u$. Para um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(B)$, o levantamento de X a M é o campo de vetores $\bar{X}$ cujo valor em cada (p, q) é o levantamento de X_p para (p,q). O conjunto de todos os levantamentos horizontais é denotado por $\mathfrak{L}(B)$. Similarmente, vamos denotar por $\mathfrak{L}(F)$ o conjunto de todos os levantamentos verticais. É imediato do fato de $\bar{X},\bar{Y}\in\mathfrak{L}(B)$ serem π-relacionados a $X,Y\in B$ e $\bar{V},\bar{W}\in\mathfrak{L}(F)$ serem η-relacionados a $V,W\in F$ que

$$[\bar{X},\bar{Y}] = [X,Y]^{-}\in\mathfrak{L}(B) \tag{1}$$
$$[\bar{V},\bar{W}] = [V,W]^{-}\in\mathfrak{L}(F) \tag{2}$$
$$[\bar{X},\bar{V}] = 0, \tag{3}$$

onde $[X,Y]^{-}$ denota o levantamento de $[X,Y]$. Por abuso de notação, daqui em diante usaremos a mesma notação para um campo de vetores e para seu levantamento.

Um fato importante que mostra que quase sempre a relação de um produto warped com sua base é quase tão simples como o caso de um produto semi-Riemanniano, além de simplificar notação e contas, é o

Lema 2.1 *Se $h\in\mathfrak{F}(B)$, então o gradiente do levantamento $h\circ\pi$ de h a $M=B\times_f F$ é o levantamento a M do gradiente de h sobre B.*

Prova. Devemos mostrar que $\mathrm{grad}(h\circ\pi)$ é horizontal e $\pi-$relacionado ao $\mathrm{grad}(h)$ sobre B. De fato, para a primeira parte, basta notar que se v é um vetor vertical a M, então

$$\langle \mathrm{grad}(h\circ\pi),v\rangle = v(h\circ\pi)=\pi_*(v)h=0,$$

já que $\pi_*(v)=0$. Para o segundo fato, note que se x é horizontal, então

$$\begin{aligned}\langle \pi_*(\mathrm{grad}(h\circ\pi)),\pi_*(x)\rangle &= \langle \pi_*(\mathrm{grad}(h\circ\pi)),\pi_*(x)\rangle = x(h\circ\pi)\\ &= \pi_*(x)h=\langle \mathrm{grad}(h),\pi_*(x)\rangle.\end{aligned}$$

Então, em cada ponto, $\pi_*(\mathrm{grad}(h\circ\pi))=\mathrm{grad}(h)$, como queríamos. □

Salvo alguma exceção que gere confusão, de agora em diante simplificaremos a notação escrevendo h para $h\circ\pi$ e $\mathrm{grad}(h)$ para $\mathrm{grad}(h\circ\pi)$.

2.2 Conexão de produtos warped

A conexão de Levi-Civita D de $M=B\times_f F$ está relacionada com as conexões de Levi-Civita de B e F de acordo com a

Proposição 2.1 *Para $X,Y\in\mathfrak{L}(B)$ e $V,W\in\mathfrak{L}(F)$, nós temos sobre $B\times_f F$ que*

(1) $D_XY\in\mathfrak{L}(B)$ é o levantamento de D_XY sobre B;
(2) $D_XV=D_VX=(\frac{Xf}{f})V$

(3) nor$(D_V W) = \sigma(V, W) = -\dfrac{\langle V, W\rangle}{f}\mathrm{grad}(f)$*;*

(4) tan$(D_V W) \in \mathfrak{L}(F)$ *é o levantamento de* $D^F_V W$ *sobre* F*, onde* D^F *é a conexão de Levi-Civita de* F*.*

Prova. (1) A fórmula de Koszul para $2\langle D_X Y, V\rangle$ se reduz a

$$-V\langle X, Y\rangle + \langle V, [X, Y]\rangle,$$

desde que pelo resultado em (3) temos $[X, V] = [Y, V] = 0$. Como X, Y são levantamentos de B, $\langle X, Y\rangle$ é constante sobre as fibras. Então, $V\langle X, Y\rangle = 0$, pois V é vertical. Também temos $\langle V, [X, Y]\rangle = 0$, pois V é vertical e $[X, Y]$ é horizontal (ver equação (2)). Assim, $\langle D_X Y, V\rangle = 0$ para todo $V \in \mathfrak{L}(F)$, donde $D_X Y$ é horizontal. Desde que $\pi_{|_{B\times q}}$ é uma isometria, o resultado está provado.

(2) Primeiramente note que $D_X V = D_V X$ já que $[X, V] = 0$. Note também que esses campos são verticais, pois $\langle D_X V, Y\rangle = -\langle V, D_X Y\rangle = 0$ e, pela propriedade (1) já provada, tem-se $D_X Y$ horizontal. Novamente vamos usar a fórmula de Koszul, mas agora para calcular $2\langle D_X V, W\rangle$. O único termo não-nulo na expressão de Koszul para $2\langle D_X V, W\rangle$ é $X\langle V, W\rangle$. Para calcular esse termo, veja que

$$X\langle V, W\rangle = X[f^2(\langle V, W\rangle_F) \circ \eta] = 2fXf[\langle V, W\rangle_F \circ \eta] = 2\frac{Xf}{f}\langle V, W\rangle,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ denota a métrica de F. Portanto,

$$D_X V = \frac{Xf}{f}V.$$

(3) Pela propriedade (2), temos

$$\langle D_V W, X\rangle = -\langle W, D_V X\rangle = -\frac{Xf}{f}\langle V, W\rangle.$$

Aplicando o lema 2.1, achamos que $Xf = \langle \mathrm{grad}(f), X\rangle$ tanto sobre M como sobre B. Então,

$$\langle D_V W, X\rangle f = -\langle V, W\rangle\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle,$$

o que implica a propriedade (3).

(4) Desde que V e W são tangentes a todas às fibras, $\tan(D_V W)$ é a derivada covariante da fibra aplicada às restrições de V e W naquela fibra. Isso termina a propriedade (4) e a proposição, pois a η-relação segue desde que as conexões de Levi-Civita são preservadas por homotetias. $\square$

Corolário 2.1 *As folhas de um produto warped são totalmente geodésicas e as fibras são totalmente umbílicas.*

Prova. Da propriedade (1) da Proposição 2.1 concluímos que a segunda forma fundamental de cada folha é zero, portanto as mesmas são totalmente geodésicas. Já o segundo fato do corolário é imediato da propriedade (3) da mesma Proposição 2.1. □

2.3 Curvatura de produtos warped

Antes de mais nada, a convenção adotada para tensor curvatura $\mathcal{R}$ de uma conexão $\mathcal{D}$ será

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \mathcal{D}_X\mathcal{D}_Y Z - \mathcal{D}_Y\mathcal{D}_X Z - \mathcal{D}_{[X,Y]}Z.$$

Considere um produto warped $M = B \times_f F$. O *levantamento* $\tilde{T}$ de um tensor covariante T definido sobre B para M é seu pullback $\pi^*(T)$ via a projeção $\pi : M \to B$. No caso de um $(s,1)-$tensor $T : \mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B) \to \mathfrak{X}(B)$, se $v_1, \ldots, v_s \in T_{(p,q)}M$, defina seu levantamento $\tilde{T}$ como sendo dado por: $\tilde{T}(v_1, \ldots, v_s)$ é o vetor horizontal que é projetado em $T(\pi_*(v_1), \ldots, \pi_*(v_s))$. Sejam R^B e R^F os levantamentos a M dos tensores curvaturas de B e F, respectivamente. Desde que a projeção π é uma isometria sobre cada folha, R^B dá a curvatura Riemanniana de cada folha. O mesmo vale para R^F, já que η é uma homotetia. Por fim, se $h \in \mathfrak{F}(B)$, o levantamento a M da Hessiana de h será denotada por H^h, sendo que esta última coincide com a hessiana do levantamento $h \circ \pi$ geralmente apenas sobre vetores horizontais.

O resultado a seguir relaciona o tensor curvatura R de $M = B \times_f F$ com os tensores curvatura R^B, R^F de B e F.

Proposição 2.2 *Seja $M = B \times_f F$ um produto warped de duas variedades semi-Riemannianas. Se $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $U, V, W \in \mathfrak{L}(F)$, então*

(1) $R(X,Y)Z \in \mathfrak{L}(B)$ *é o levantamento de* $R^B(X,Y)Z$ *sobre* B;

(2) $R(X,V)Y = \dfrac{H^f(X,Y)}{f}V$;

(3) $R(X,Y)V = R(V,W)X = 0$;

(4) $R(X,V)W = -\dfrac{\langle V,W\rangle}{f} D_X \mathrm{grad}(f)$;

(5) $R(V,W)U = R^F(V,W)U + \dfrac{\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)\rangle}{f^2}\{\langle V,U\rangle W - \langle W,U\rangle V\}$.

Prova. (1) Desde que a projeção $\pi : M \to B$ é isométrica em cada folha, R^B é o tensor curvatura de cada folha. Como as folhas são totalmente geodésicas em M, R^B coincide com o tensor curvatura R de M em vetores horizontais. Isso prova a propriedade (1).

(2) Escrevendo a expressão para $R(X,V)Y$ e lembrando que $[V,X] = 0$, obtemos

$$R(X,V)Y = D_X D_V Y - D_V D_X Y.$$

Mas pela Proposição 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
D_X D_V Y &= D_X((Yf)f^{-1}V)\\
&= X[(Yf)f^{-1}]V + (Yf)f^{-1}D_X V\\
&= \{(XYf)f^{-1} - (Yf)(Xf)f^{-2}\}V + (Yf)f^{-1}D_X V\\
&= \{(XYf)f^{-1} - (Yf)(Xf)f^{-2}\}V + (Xf)(Yf)f^{-2}V\\
&= (XYf)f^{-1}V
\end{aligned}$$

e

$$D_V D_X Y = [(D_X Y)f]f^{-1}V.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
R(X,V)Y &= \{(XYf) - (D_X Y)f\}f^{-1}V\\
&= H^f(X,Y)f^{-1}V,
\end{aligned}$$

o que prova a propriedade (2).

(3) Comecemos calculando $D_V D_W X$.

$$\begin{aligned}
D_V D_W X &= D_V(Xf/fW)\\
&= V(Xf/f)W + (Xf/f)D_V W\\
&= (Xf/f)D_V W,
\end{aligned}$$

uma vez que Xf/f é constante sobre as fibras e portanto $V(Xf/f) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
R(V,W)X &= D_V D_W X - D_W D_V X - D_{[V,W]}X\\
&= (Xf/f)D_V W - (Xf/f)D_W V - (Xf/f)[V,W]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para mostrar que $R(X,Y)V = 0$, observe que pela simetria da curvatura temos $\langle R(X,Y)V, W\rangle = \langle R(V,W)X, Y\rangle = 0$. Por outro lado, $\langle R(X,Y)V, Z\rangle = -\langle R(X,Y)Z, V\rangle = 0$, onde a última igualdade vem do fato de termos provado em (1) que $R(X,Y)Z$ é horizontal. Como essas duas equações valem para todo $W \in \mathfrak{L}(F)$ e todo $Y \in \mathfrak{L}(B)$, temos

$R(X,Y)V=0$.

(4) Primeiro note que $R(X,V)W$ é horizontal, já que $\langle R(X,V)W,U\rangle = \langle R(W,U)X,V\rangle$ e $R(W,U)X=0$ pelo que provamos em (3). Tomando Y um vetor vertical qualquer, temos

$$\begin{aligned}
\langle R(X,V)W,Y\rangle &= -\langle R(X,V)Y,W\rangle \\
&= -\frac{H^f(X,Y)}{f}\langle V,W\rangle \\
&= -\frac{\langle D_X(\mathrm{grad}(f)),Y\rangle}{f}\langle V,W\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\langle V,W\rangle}{f}D_X(\mathrm{grad}(f)),Y\right\rangle,
\end{aligned}$$

o que prova (4).

(5) Primeiro note que $R(V,W)U$ é vertical desde que

$$\langle R(V,W)U,X\rangle = -\langle R(V,W)X,U\rangle = 0,$$

onde a última igualdade é devido a (3). Como $\eta : M \to F$ é uma homotetia sobre as fibras, $R^F(V,W)U \in \mathfrak{L}(F)$ é o tensor curvatura de cada fibra, e, portanto, podemos relacionar $R^F(V,W)U$ e $R(V,W)U$ usando a equação clássica de Gauss. Combinando a equação clássica de Gauss com a propriedade (3) da Proposição 2.1, segue (5). $\square$

2.4 Produtos Warped do tipo $\varepsilon I \times_a P^m$

Produtos warped do tipo $\varepsilon I \times_a P^m$ são objeto de interesse de nosso resultado principal, por isso terminaremos essa seção discorrendo acerca de alguns resultados a serem usados mais a frente. Em tudo que segue, a notação usada será a do artigo RIBEIRO and MELO (2019). Os resultados que seguem também podem ser encontrados em LAWN and ORTEGA (2015).

Seja (P^m, g_P) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $\dim P = m$. Todas as nossas variedades serão conexas e de classe C^∞, a menos que dito o contrário. Considere uma função suave $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, um (sinal) constante $\varepsilon = \pm 1$ e o produto warped

$$\bar{P}^{m+1} = \varepsilon I \times_a P^m, \qquad \langle , \rangle = \varepsilon dt^2 + a(t)^2 g_P$$

Sejam $\bar{R}_P$ e R_P os operadores curvatura de $\bar{P}^{m+1}$ e P^m, respectivamente. Sejam também $\bar{\nabla}$ e ∇^P as conexões de Levi-Civita de $\bar{P}^{m+1}$ e P^m, respectivamente. Comecemos provando o seguinte lema, consequência das propriedades provadas nas proposições 2.1 e 2.2:

Lema 2.2 *Sobre a variedade semi-Riemanniana $\bar{P}^{m+1}$, as seguintes afirmações valem, para quaisquer V, W levantamentos de vetores tangentes a P^m:*

(1) $\bar{\nabla}_{\partial t}\partial t = 0,\ \bar{\nabla}_V \partial t = \frac{a'}{a}V,$

(2) $\mathrm{grad}(a) = \varepsilon a' \partial t,$

(3) $\bar{\nabla}_V W = \nabla^P_V W - \frac{\varepsilon a'}{a}\langle V, W\rangle \partial t,$

(4) $\bar{R}_P(V, \partial t)\partial t = -\frac{a''}{a}V,\ \bar{R}_P(\partial t, V)W = -\frac{\varepsilon a''}{a}\langle V, W\rangle \partial t,\ \bar{R}_P(V, W)\partial t = 0.$

Prova.(1) Ambas as igualdades são consequências imediatas das propriedades (1) e (2) da Proposição 2.1, respectivamente.

(2) Pelo lema 2.1 sabemos que grad(a) é horizontal. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(a) &= \varepsilon\langle \mathrm{grad}(a), \partial_t\rangle \partial_t \\ &= \varepsilon a' \partial t, \end{aligned}$$

o que prova (2).

(3) Segue das propriedades (3) e (5) da Proposição 2.1 e propriedade (2) provada acima.

(4) Usando a propriedade (2) acima e a propriedade (2) da Proposição 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_P(V, \partial t)\partial t &= -\frac{H^a(\partial_t, \partial_t)}{a}V \\ &= -a^{-1}\langle \bar{\nabla}_{\partial_t}(\varepsilon a' \partial_t), \partial_t\rangle V \\ &= \frac{-\varepsilon a''}{a}\langle \partial_t, \partial_t\rangle V \\ &= \frac{-a''}{a}V \end{aligned}$$

As duas outras igualdades são imediatas das propriedades (4) e (3) da Proposição 2.2, respectivamente. □

Considere o espaço Euclideano $\mathbb{R}^{N+1}_\lambda$ de dimensão $N+1 \geq 3$ e índice λ, com sua métrica

$$g_0 = \sum_{i=0}^{N-\lambda} dx_i^2 - \sum_{i=N-\lambda+1}^{N} dx_i^2.$$

Seja $\mathbb{M}^N_\lambda(c)$ a forma espacial semi-Riemanniana de curvatura seccional $c \in \{-1, 1\}$ e índice λ, com métrica g. Defina

$$\mathbb{E}^{N+1}_\lambda = \begin{cases} \mathbb{R}^{N+1}_\lambda, & \text{if } \mathbb{M}^N_\lambda(c) = \mathbb{S}^N_\lambda,\ c = +1, \\ \mathbb{R}^{N+1}_{\lambda+1}, & \text{if } \mathbb{M}^N_\lambda(c) = \mathbb{H}^N_\lambda,\ c = -1, \end{cases}$$

com sua métrica flat pseudo-Riemanniana g_0 e conexão de Levi-Civita ∇^0, onde $\mathbb{S}^N_\lambda$ e $\mathbb{H}^N_\lambda$ são, respectivamente,

$$\mathbb{S}^N_\lambda = \{p \in \mathbb{E}^{N+1}_\lambda;\ g_0(p,p) = +1\}, \quad \mathbb{H}^N_\lambda = \{p \in \mathbb{E}^{N+1}_\lambda;\ g_0(p,p) = -1\}.$$

Seguindo a notação anterior, considere $\bar{P}^{N+1} = \varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ com métrica $\langle , \rangle$, conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ e tensor curvatura $\bar{R}$. Considere também $\tilde{P}^{N+2} = \varepsilon I \times_a \mathbb{E}^{N+1}_\lambda$ com métrica $\langle , \rangle_2$, conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ e tensor curvatura $\tilde{R}$. Assim, temos a

Proposição 2.3 *O tensor curvatura $\tilde{R}$ de $\tilde{P}^{N+2}$ é dado por*

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= \varepsilon\frac{(a')^2}{a}\Big(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle\Big)\\ &+ \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2}\right)\Big(\langle X,Z\rangle\langle Y,\partial t\rangle\langle W,\partial t\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,\partial t\rangle\langle W,\partial t\rangle\\ &- \langle X,W\rangle\langle Y,\partial t\rangle\langle Z,\partial t\rangle + \langle Y,W\rangle\langle X,\partial t\rangle\langle Z,\partial t\rangle\Big),\end{aligned}$$

para quaisquer seções $X,Y,Z,W \in \Gamma(T\tilde{P}^{N+2})$.

Prova. Comecemos escrevendo cada vetor X de $\tilde{P}^{N+2}$ como $X = \tilde{X} + x\partial_t = \tilde{X} + \varepsilon\langle X,\partial_t\rangle\partial_t$, onde $\tilde{X}$ é um vetor tangente a $\mathbb{E}^{N+1}_\lambda$. Vamos usar as propriedades de simetria do tensor curvatura e o Lema 2.2 para calcular $\tilde{R}$. De fato, veja que

$$\langle \tilde{X},\tilde{Y}\rangle = \langle X,Y\rangle - \varepsilon\langle X,\partial_t\rangle\langle Y,\partial_t\rangle, \tag{4}$$

e pela simetria do tensor curvatura, temos

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},w\partial_t) + \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},z\partial_t,\tilde{W})\\ &+ \tilde{R}(\tilde{X},y\partial_t,\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(\tilde{X},y\partial_t,\tilde{Z},w\partial_t) + \tilde{R}(\tilde{X},y\partial_t,z\partial_t,\tilde{W})\\ &+ \tilde{R}(x\partial_t,\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) + \tilde{R}(x\partial_t,\tilde{Y},\tilde{Z},w\partial_t) + \tilde{R}(x\partial_t,\tilde{Y},z\partial_t,\tilde{W}).\end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.2, tem-se

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},z\partial_t,\tilde{W}) = 0, \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},w\partial_t) = -\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},w\partial_t,\tilde{Z}) = 0\\ &\tilde{R}(x\partial_t,\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) = \tilde{R}(\tilde{Z},\tilde{W},x\partial_t,\tilde{Y}) = 0, \tilde{R}(\tilde{X},y\partial_t,\tilde{Z},\tilde{W}) = -\tilde{R}(\tilde{Z},\tilde{W},y\partial_t,\tilde{X}) = 0.\end{aligned}$$

Além disso, usando a propriedade (5) da Proposição 2.2 e o fato do tensor curvatura de $\mathbb{E}^{N+1}_\lambda$ ser nulo, temos

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}) = \varepsilon\frac{(a')^2}{a^2}\Big(\langle\tilde{X},\tilde{Z}\rangle\langle\tilde{Y},\tilde{W}\rangle - \langle\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle\langle\tilde{X},\tilde{W}\rangle\Big).$$

Agora, usando a propriedade (4) da Proposição 2.2, obtemos

$$\tilde{R}(\tilde{X}, y\partial_t, \tilde{Z}, w\partial_t) = -\tilde{R}(y\partial_t, \tilde{X}, \tilde{Z}, w\partial_t) = \frac{a''}{a}\langle Y, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\langle \tilde{X}, \tilde{Z}\rangle.$$

Analogamente, obtemos os termos

$\tilde{R}(\tilde{X}, y\partial_t, z\partial_t, \tilde{W}) = -\frac{a''}{a}\langle Y, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\langle \tilde{X}, \tilde{W}\rangle$, $\tilde{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, \tilde{Z}, w\partial_t) = -\frac{a''}{a}\langle X, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle$ e $\tilde{R}(x\partial_t, \tilde{Y}, z\partial_t, \tilde{W}) = \frac{a''}{a}\langle X, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{W}\rangle$.

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y, Z, W) \;&=\; \varepsilon\frac{(a')^2}{a^2}\Big(\langle \tilde{X}, \tilde{Z}\rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{W}\rangle - \langle \tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle\langle \tilde{X}, \tilde{W}\rangle\Big)\\ &\quad+\frac{a''}{a}\Big(\langle Y, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\langle \tilde{X}, \tilde{Z}\rangle - \langle Y, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\langle \tilde{X}, \tilde{W}\rangle \\ &\quad-\langle X, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{Z}\rangle + \langle X, \partial_t\rangle\langle Z, \partial_t\rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{W}\rangle\Big).\end{aligned} \tag{5}$$

Para eliminar os tensores com til em (5), basta substituir em (5) tais expressões pela expressão (4) e então obtem-se a Proposição 2.3

□

A partir do mergulho totalmente umbílico $\Xi : \mathbb{M}^N_\lambda(c) \to \mathbb{E}^{N+1}_\lambda$ usual, construímos o mergulho isométrico

$$\tilde{\Xi} : (\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c), \langle\,,\,\rangle) \to (\varepsilon I \times_a \mathbb{E}^{N+1}_\lambda, \langle\,,\,\rangle_2), \quad (t, p) \mapsto (t, \Xi(p)).$$

É bem conhecido que $\xi = \Xi/c$ é um campo de vetores satisfazendo $\nabla^o_X \xi = X/c$ para qualquer X tangente a $T_p\mathbb{M}^n_k(c)$. Portanto, podemos considerar o campo de vetores normal de $\tilde{\Xi} : \varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c) \to \varepsilon I \times_a \mathbb{E}^{N+1}_\lambda$ como

$$e_0(t, p) = (0, \xi(p)/a(t)) = (0, p/(ca(t))), \text{ para qualquer } (t, p) \in \varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c).$$

Denotando $\varepsilon_0 = \langle e_0, e_0\rangle = \pm 1$ e desde que $\mathbb{M}^N_\lambda(c)$ está naturalmente em $\mathbb{E}^{N+1}_\lambda$, o campo de vetores ξ satisfaz $g_o(\xi, \xi) = c$. Também, $\varepsilon_0 = \langle e_0, e_0\rangle = \langle (0, p/ac), (0, p/ac)\rangle = a^2 g_o(p, p)/(a^2c^2) = c$. Pelo Lema 2.2,

$$\tilde{\nabla}_{\partial_t} e_0 = -\frac{a'}{a^2}(0, \xi) + \frac{1}{a}\tilde{\nabla}_{\partial_t}(0, \xi) = -\frac{a'}{a^2}(0, \xi) + \frac{1}{a}\frac{a'}{a}(0, \xi) = 0.$$

Além do mais, se $(0, Z) \perp e_0$, então $Z \perp e_0$, e

$$\tilde{\nabla}_{(0,Z)} e_0 = \frac{1}{a} \tilde{\nabla}_{(0,Z)}(0, \xi) = \frac{1}{a}\Big(\nabla^o_Z \xi - \frac{\langle (0, Z), (0, \xi)\rangle}{a} \operatorname{grad}(a)\Big) = \frac{1}{ac}(0, Z),$$

donde o operador de Weingarten S associado com o vetor normal e_0 é dado por

$$SY = -\frac{1}{ac}(Y - \varepsilon\langle Y, \partial_t\rangle)\partial_t \tag{6}$$

Assim, usando a equação clássica de Gauss para imersões isométricas, a Proposição 2.3 e a expressão 6, concluímos a

Proposição 2.4 *O tensor curvatura $\bar{R}$ of $\bar{P}^{N+1}$ é dado por*

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) \;\; = \;\; & \left(\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2}\right) \Big(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle\Big) \\ & + \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right) \Big(\langle X, Z\rangle\langle Y, \partial t\rangle\langle W, \partial t\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, \partial t\rangle\langle W, \partial t\rangle \\ & - \langle X, W\rangle\langle Y, \partial t\rangle\langle Z, \partial t\rangle + \langle Y, W\rangle\langle X, \partial t\rangle\langle Z, \partial t\rangle\Big), \end{aligned}$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $X, Y, Z, W \in T\bar{P}^{N+1}$.

3 IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$

Nesta seção apresentamos nosso resultado principal. Primeiramente achamos as condições necessárias para uma variedade M^n ser realizada como uma subvariedade da classe de subvariedades $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$. Em seguida, mostramos que essas condições também são suficientes.

3.1 Subvariedades de Produtos Warped $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$

Seja M^n uma variedade semi-Riemanniana isometricamente imersa em $\bar{P}^{N+1} = \varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$. Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^n e $\bar{P}^{N+1}$, respectivamente. Denote por R e $R^\perp$ os tensores curvatura dos fibrados tangente e normal TM e $TM^\perp$, respectivamente, por $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM^\perp)$ a segunda forma fundamental da imersão e por $A_\eta \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ seu operador forma na direção normal η, dado por $\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \eta\rangle$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$. Seja $\pi : M \to I$ a restrição a M da projeção natural $\pi_I : \varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c) \to I$ e $\partial t = T + \xi$, onde $T = \varepsilon \cdot \operatorname{grad}(\pi)$. Então, nós temos $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$, já que para qualquer $x_0 \in M$ e $v \in T_{x_0}M$

$$\langle \xi(x_0), v\rangle = \langle \partial t - T(x_0), v\rangle = \langle \partial t, v\rangle - \varepsilon d\pi_{x_0}(v) = 0.$$

Em particular, temos a equação

$$\varepsilon = \langle \partial t, \partial t\rangle = \langle T, T\rangle + \langle \xi, \xi\rangle.$$

No que segue, estamos usando essas decomposições para o fibrado tangente $T\bar{P}^{N+1}$:

$$T_{(t_0,x_0)}\bar{P}^{N+1} = T_{t_0}I \oplus T_{x_0}\mathbb{M}_\lambda^N(c) = T_{(t_0,x_0)}M^n \oplus (T_{(t_0,x_0)}M^n)^\perp, \quad (t_0, x_0) \in \bar{P}^{N+1}.$$

Lema 3.1 *Sob as condições anteriores, as seguintes equações valem para qualquer $X \in TM$:*

1. $\bar{\nabla}_X \partial t = \frac{a'}{a}(X - \varepsilon\langle X, T\rangle \partial t)$.
2. $\nabla_X T = \frac{a'}{a}(X - \varepsilon\langle X, T\rangle T) + A_\xi X$.
3. $\nabla_X^\perp \xi = -\frac{\varepsilon a'}{a}\langle X, T\rangle \xi - \alpha(X, T)$.

Prova. Para qualquer $X \in TM$, existe $X_0 \in T\mathbb{M}_\lambda^N(c)$ tal que $X = \varepsilon\langle X, T\rangle \partial t + X_0$. Usando o Lema 2.2, temos

$$\bar{\nabla}_X \partial t = \bar{\nabla}_{X_0} \partial t = \frac{a'}{a} X_0 = \frac{a'}{a}(X - \varepsilon\langle X, T\rangle \partial t).$$

Finalmente, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X T + \alpha(X,T) &= \bar{\nabla}_X T \\
&= \bar{\nabla}_X \partial t - \bar{\nabla}_X \xi \\
&= \frac{a'}{a}(X - \varepsilon\langle X,T\rangle \partial t) - (-A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi) \\
&= \frac{a'}{a}(X - \varepsilon\langle X,T\rangle T) + A_\xi X - \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\langle X,T\rangle \xi + \nabla^\perp_X \xi\right).
\end{aligned}$$

Agora, as últimas duas equações são apenas as partes tangente e normal de $\bar{\nabla}_X T$. □

Usando a Proposição 2.4 e a equação clássica de Gauss para subvariedades, que afirma que

$$R(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in TM$, obtemos:

Proposição 3.1 *O tensor curvatura R de M em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ é*

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) &= \left(\varepsilon\frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2}\right)\Big(\langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle \langle X,W\rangle \Big) \\
&\quad + \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right)\Big(\langle X,Z\rangle \langle Y,T\rangle \langle W,T\rangle - \langle Y,Z\rangle \langle X,T\rangle \langle W,T\rangle \\
&\quad - \langle X,W\rangle \langle Y,T\rangle \langle Z,T\rangle + \langle Y,W\rangle \langle X,T\rangle \langle Z,T\rangle \Big) \\
&\quad - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle .
\end{aligned}$$

Proposição 3.2 *A equação de Codazzi de M em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ é*

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_Y \alpha)(X,Z,\eta) &- (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y,Z,\eta) = \\
&= \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right) \langle \xi, \eta\rangle \Big(\langle T,X\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle T,Y\rangle \langle X,Z\rangle \Big),
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$.

Prova. A equação clássica de Codazzi afirma que

$$(\bar{\nabla}_Y \alpha)(X,Z,\eta) - (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y,Z,\eta) = -\bar{R}(X,Y,Z,\eta).$$

A Proposição 2.4 nos dá

$$\bar{R}(X,Y,Z,\eta) = \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right) \langle \xi, \eta \rangle \Big(\langle T, Y \rangle \langle X, Z \rangle - \langle T, X \rangle \langle Y, Z \rangle \Big),$$

e a prova está completa. □

Proposição 3.3 *A equação de Ricci de M em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$ é*

$$R^\perp(X,Y)\eta = \alpha(A_\eta Y, X) - \alpha(A_\eta X, Y),$$

para qualquer $X, Y \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$.

Prova. A equação clássica de Riccipara subvariedades afirma que

$$R^\perp(X,Y)\eta = \bar{R}(X,Y)\eta + \alpha(A_\eta Y, X) - \alpha(A_\eta X, Y).$$

A Proposição 2.4 nos dá $\bar{R}(X,Y)\eta = 0$, e então a prova está completa. □

3.2 Equações de estrutura e o teorema principal

Na seção anterior nós achamos condições necessárias para uma variedade não degenerada M^n de índice arbitrário ser realizada como uma subvariedade na extensa classe de produtos warped $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$, onde $\varepsilon = \pm 1$, $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é o fator escalar e $\mathbb{M}_\lambda^N(c)$ é a forma espacial N-dimensional semi-Riemanniana de índice λ e curvatura seccional constante $c \in \{-1, 1\}$. Agora, queremos provar a recíproca. A saber, nós queremos mostrar que se M^n satisfaz as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para uma subvariedade em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$, junto com algumas condições adcionais que aparecem no Lema 3.1, então M^n pode ser isometricamente imersa em $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$.

Élie Cartan desenvolveu a técnica do referencial móvel. Definições, resultados básicos e outros detalhes podem ser achados em IVEY and LANDSBERG (2003). Vamos usar a seguinte convenção para a lista de índices, a menos de menção contrária:

$$0 \le \alpha, \beta, \gamma, \dots \le N+1; \qquad 1 \le i, j, k, \dots \le n; \qquad n+1 \le u, v, w \dots \le N+1$$

Considere $\tilde{P}^{N+2} = \varepsilon I \times_a \mathbb{E}_\lambda^{N+1}$ com uma conexão $\tilde{\nabla}$ e uma base $(E_0, \dots, E_N, \partial_t)$, onde $(E_0, \dots, E_N)$ é um referencial ortonormal e paralelo de $\mathbb{E}_\lambda^{N+1}$. Defina $\overline{E}_0 = \dfrac{E_0}{ca}, \dots, \overline{E}_N = \dfrac{E_N}{ca}$, $\overline{E}_{N+1} = \partial_t$, e, consequentemente, $\left(\overline{E}_0, \dots, \overline{E}_{N+1}\right)$ é uma base ortonormal de $\varepsilon I \times_a \mathbb{E}_\lambda^{N+1}$. Se necessário, reordene $\left(\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_{N+1}\right)$ de tal forma que $\left\langle \overline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha \right\rangle_{\varepsilon I \times_a \mathbb{E}_\lambda^{N+1}} = \varepsilon_\alpha = \pm 1$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{E}_{N+1} = \partial_t$ e $c = \varepsilon_0$. Também, seja $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\bar{P}^{N+1} = \varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$.

De agora em diante, seja $(M^n, \langle , \rangle_M)$ uma variedade semi-Riemanniana de índice p e $(E, \langle , \rangle_E)$ um fibrado vetorial semi-Riemanniano de índice q e posto $m = N+1-n$ sobre M, com conexão compatível ∇^E e operador curvatura R^E. Seja também dada α^E uma seção simétrica em $\Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$, ξ uma seção em $\Gamma(E)$, números reais $c, \varepsilon \in \{-1, 1\}$ e as funções suaves $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $\pi : M \to I$. Defina o campo de vetores $T \in TM$ por $T = \varepsilon \cdot \mathrm{grad}(\pi)$ e, para cada $\eta \in \Gamma(E)$, defina a seção $A_\eta \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ por $\left\langle \alpha^E(X,Y), \eta \right\rangle = \langle A_\eta(X), Y \rangle$.

Definição 3.1 *Sob as condições anteriores, diremos que M satisfaz as **equações de estrutura** se as seguintes condições valem para quaisquer $X, Y, Z, W \in TM$ e $\eta \in \Gamma(E)$:*

(A) $\langle T, T \rangle + \langle \xi, \xi \rangle = \varepsilon$.

(B) $\nabla_X T = \dfrac{a'}{a} (X - \varepsilon \langle X, T \rangle T) + A_\xi X$.

(C) $\nabla^E_X \xi = \dfrac{-\varepsilon a'}{a} \langle X, T \rangle \xi - \alpha^E(T, X)$.

(D) (Gauss)

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) \;=\; & \left(\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2} \right) \Big(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \Big) \\
& + \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2} \right) \Big(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \\
& - \langle X, W \rangle \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle + \langle Y, W \rangle \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \Big) \\
& - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle .
\end{aligned}
$$

(E) (Codazzi)

$$
\begin{aligned}
(\nabla_Y \alpha^E)(X, Z, \eta) \;-\; & (\nabla_X \alpha^E)(Y, Z, \eta) = \\
= \; & \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2} \right) \langle \xi, \eta \rangle \Big(\langle T, X \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle T, Y \rangle \langle X, Z \rangle \Big) .
\end{aligned}
$$

(F) (Ricci)

$$R^E(X,Y)\eta = \alpha^E(A_\eta Y, X) - \alpha^E(A_\eta X, Y).$$

Por abuso de notação, escrevemos acima $a = a \circ \pi$.

Teorema 3.1 *Assuma que M, sob as as condições anteriores, satisfaz as equações de estrutura. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M, uma única imersão isométrica local $f : \mathcal{U} \to \varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ e uma isometria de fibrados vetoriais $\Phi : E \to Tf(M)^\perp$, tal que:*

1. $\partial_t = df(T) + \Phi(\xi)$.
2. $\pi = \pi_I \circ f$, *onde $\pi_I : \varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c) \to I$ é a projeção.*

3. $\alpha_f = \Phi \circ \alpha^E \circ df^{-1}$, *onde* α_f *é a segunda forma fundamental da imersão* f.
4. *(D), (E) e (F) são as equações de Gauss, Codazzi and Ricci, respectvamente, da imersão encontrada.*
5. $\nabla^{\perp}\Phi = \Phi\nabla^E$.

3.3 O método do referencial móvel

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita sobre TM. Considere a soma de Whitney $F = TM \oplus E$ equipado com a soma ortogonal das métricas em TM e E. Defina

$$\begin{aligned} \nabla^F_X Y &= \nabla_X Y + \alpha^E(X,Y), \;\; X, Y \in \Gamma(TM), \\ \nabla^F_X \eta &= -A_\eta X + \nabla^E_X \eta, \;\; X \in \Gamma(TM), \;\; \eta \in \Gamma(E). \end{aligned}$$

É fácil ver que ∇^F é uma conexão compatível sobre F. Dado um ponto $x \in M$, considere em sua vizinhança um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ para F, com seus sinais $\varepsilon_\alpha = \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \pm 1$, onde $\{e_1, \ldots e_n\}$ é um referencial ortonormal local para TM e $\{e_{n+1}, \ldots e_{n+m}\}$ é um referencial ortonormal local para E. Defina em $\Gamma(F^*)$ as 1-formas

$$\omega_\alpha = e^*_\alpha, \text{ se } \alpha \in \{1, \ldots, n+m\}, \text{ e } \omega_0 = 0.$$

Defina também $\delta \in \Gamma(F^*)$ por $\delta(X) = \langle X, T + \xi \rangle$, para $X \in F$. Com a ajuda do tensor S em $\Gamma(TM^* \otimes F)$ dado por $SX = \dfrac{-1}{ac}\left(X - \varepsilon \langle X, T+\xi \rangle (T+\xi)\right)$, construímos as seguintes 1-formas

$$\omega_{\alpha 0}(X) = -\varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, SX \rangle, \quad \omega_{ij}(X) = \varepsilon_i \left\langle e_i, \nabla^F_X e_j \right\rangle = \varepsilon_i \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle,$$

$$\omega_{iu}(X) = \varepsilon_i \left\langle e_i, \nabla^F_X e_u \right\rangle = -\varepsilon_i \langle e_i, A_{e_u}(X) \rangle, \quad \omega_{uv}(X) = \varepsilon_u \left\langle e_u, \nabla^F_X e_v \right\rangle = \varepsilon_u \langle e_u, \nabla_X e_v \rangle,$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_{\beta\alpha},$$

para quaisquer $X \in TM$, que são conhecidas como as 1-formas de conexão. Agora, defina as funções $T_\alpha = \delta(e_\alpha)$ para $\alpha \in \{1, \ldots, n+m\}$ e $T_0 = 0$. Em seguida, consideramos as matrizes $\mathbf{X}$ e Υ, dadas por

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon a'}{a}\Big\{T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta\Big\}, \quad \Upsilon = \Omega - \mathbf{X},$$

onde $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$. Um cálculo simples mostra que

$$d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = d\Omega - d\mathbf{X} + \Omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \mathbf{X} - \mathbf{X} \wedge \Omega + \mathbf{X} \wedge \mathbf{X}. \tag{7}$$

Nosso objetivo agora é provar que o lado direito de (7) se anula. Tal prova será dividida em alguns lemas.

Lema 3.2 *As seguintes igualdades valem:*

1. $\sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2 = \varepsilon$;
2. $\delta = \sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma$;
3. $dT_\alpha = \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma\alpha} + \frac{a'}{a}\varepsilon_\alpha \omega_\alpha - \frac{\varepsilon a'}{a} T_\alpha \delta$;
4. $d\mathcal{W} = -\Omega \wedge \mathcal{W}$, *where* $\mathcal{W} = (\omega_0, \ldots, \omega_{n+m})^\top$.

Prova. Item (1) vem do item (A) das equações de estrutura, e (2) é imediato das definições de δ, T_γ and ω_γ. Para prova o item (3), veja que se $X \in TM$ e $\alpha \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma\alpha}(X) &= \sum_\gamma \langle e_\gamma, T + \xi \rangle \varepsilon_\gamma \left\langle e_\gamma, \nabla^F_X e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle T + \xi, \nabla^F_X e_\alpha \right\rangle \\
&= X\left(\langle T + \xi, e_\alpha \rangle\right) - \left\langle \nabla^F_X (T + \xi), e_\alpha \right\rangle \\
&= X(T_\alpha) - \left\langle \frac{a'}{a}\left(X - \varepsilon \langle X, T \rangle (T + \xi)\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= dT_\alpha(X) - \frac{a'}{a}\varepsilon \omega_\alpha(X) + \frac{\varepsilon a'}{a} T_\alpha \delta(X),
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade foi obtida dos itens (B) e (C) das equações de estrutura e da definição da conexão ∇^F. Se $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma 0}(X) &= -\sum_{\gamma \geq 1} \langle e_\gamma, T + \xi \rangle \varepsilon_\gamma \langle e_\gamma, SX \rangle \\
&= -\langle T + \xi, SX \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então, $dT_0 = \sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma 0} + \frac{a'}{a}\varepsilon_0 \omega_0 - \frac{\varepsilon a'}{a} T_0 \delta$, já que $dT_0 = T_0 = \omega_0 = 0$.

Finalmente, para provar o item (4), veja que se $\alpha \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
d\omega_\alpha(X,Y) &= X(\omega_\alpha(Y)) - Y(\omega_\alpha(X)) - \omega_\alpha([X,Y]) \\
&= X(\varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, Y\rangle) - Y(\varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, X\rangle) - \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, [X,Y]\rangle) \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\left\langle \nabla^F_X e_\alpha, Y\right\rangle + \left\langle e_\alpha, \nabla^F_X Y\right\rangle\right) \\
&\quad -\varepsilon_\alpha \left(\left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, X\right\rangle + \left\langle e_\alpha, \nabla^F_Y X\right\rangle\right) - \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, [X,Y]\rangle) \\
&= \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_X e_\alpha, Y\right\rangle - \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, X\right\rangle \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\sum_{\gamma\geq 1} \omega_{\gamma\alpha}(X)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma(Y) - \omega_{\gamma\alpha}(Y)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma(X)\right) \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\sum_{\gamma\geq 0} \omega_{\gamma\alpha}(X)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma(Y) - \omega_{\gamma\alpha}(Y)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma(X)\right) \\
&= -\sum_{\gamma\geq 0} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_\gamma(X,Y) \\
&= -(\Omega \wedge \mathcal{W})_\alpha(X,Y).
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, então $d\omega_\alpha = 0$, e

$$\begin{aligned}
(\Omega \wedge \mathcal{W})_0(X,Y) &= \sum_\gamma \omega_{0\gamma}(X)\omega_\gamma(Y) - \omega_{0\gamma}(Y)\omega_\gamma(X) \\
&= \frac{\varepsilon}{a}\delta \wedge \left(\sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma\right)(X,Y) \\
&= \frac{\varepsilon}{a}\delta \wedge \delta(X,Y) = 0.
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova. $\square$

Lema 3.3 *As seguintes igualdades valem:*

1. $(d\boldsymbol{X})_{\alpha\beta} = \varepsilon\left(\dfrac{aa'' - (a')^2}{aa'}\right)\delta \wedge \boldsymbol{X}_{\alpha\beta} + \dfrac{\varepsilon a'}{a}\left(dT_\beta \wedge \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta\right)$
$+ \dfrac{\varepsilon a'}{a}\left(T_\beta d\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha d\omega_\beta\right)$;
2. $(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{X})_{\alpha\beta} = -\left(\dfrac{\varepsilon a'}{a}\right)\delta \wedge \boldsymbol{X}_{\alpha\beta} - \left(\dfrac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha \wedge \omega_\beta$;
3. $(\Omega \wedge \boldsymbol{X})_{\alpha\beta} + (\boldsymbol{X} \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\dfrac{\varepsilon a'}{a}\right)\left(T_\beta d\omega_\alpha - T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta d\omega_\beta\right)$
$-\left(\dfrac{\varepsilon a'}{a}\right)\left(dT_\beta \wedge \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta\right) - \left(\dfrac{\varepsilon a'}{a}\right)\delta \wedge \boldsymbol{X}_{\alpha\beta} - 2\left(\dfrac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha \wedge \omega_\beta$;
4. $(d\Omega)_{\alpha\beta} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\dfrac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \varepsilon\left(\dfrac{aa'' - (a')^2}{aa'}\right)\delta \wedge \boldsymbol{X}_{\alpha\beta}$.

Prova. Primeiro é importante lembrar que $T = \varepsilon \cdot \mathrm{grad}(\pi)$ e que estamos escrevendo

$a = a \circ \pi$. Para (1), temos

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{X})_{\alpha\beta} &= d\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\Big\{T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta\Big\}\right) \\
&= d\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right) \wedge \Big\{T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta\Big\} + \frac{\varepsilon a'}{a} d\left(\Big\{T_\beta \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta\Big\}\right) \\
&= \varepsilon\left(\frac{aa'' - (a')^2}{a^2}\right)\frac{a}{a'}\delta \wedge \mathbf{X}_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon a'}{a}\left(dT_\beta \wedge \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta\right) \\
&\quad + \frac{\varepsilon a'}{a}\left(T_\beta d\omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha d\omega_\beta\right).
\end{aligned}$$

Para (2), temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \mathbf{X}_{\alpha\gamma} \wedge \mathbf{X}_{\gamma\beta} \\
&= \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \sum_\gamma \Big(T_\gamma \omega_\alpha - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma T_\alpha \omega_\gamma\Big) \wedge \Big(T_\beta \omega_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta T_\gamma \omega_\beta\Big) \\
&= \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(T_\beta \omega_\alpha \wedge \sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma\right) - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon_\beta \left(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2\right) \omega_\alpha \wedge \omega_\beta \\
&\quad + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \left(\sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma\right) \wedge \omega_\beta \\
&= \left(\frac{a'}{a}\right)^2 (T_\beta \omega_\alpha \wedge \delta) - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon_\beta \varepsilon \omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \delta \wedge \omega_\beta \\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right) \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \delta - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \varepsilon \varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta.
\end{aligned}$$

Para (3), inicialmente calculamos $(\Omega \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta}$. Temos

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge\mathbf{X})_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\mathbf{X}_{\gamma\beta}\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\Big(T_\beta\omega_\gamma-\varepsilon_\gamma\varepsilon_\beta T_\gamma\omega_\beta\Big)\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\beta\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_\gamma+\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\left(\sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma\alpha}\right)\wedge\omega_\beta\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\beta\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_\gamma+\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\left(dT_\alpha-\frac{a'}{a}\varepsilon_\alpha\omega_\alpha+\frac{\varepsilon a'}{a}T_\alpha\delta\right)\wedge\omega_\beta\\
&= -\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\beta d\omega_\alpha+\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha\wedge\omega_\beta-\left(\frac{a'}{a}\right)^2\varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha\wedge\omega_\beta\\
&\quad+\left(\frac{a'}{a}\right)^2\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\delta\wedge\omega_\beta.
\end{aligned}$$

Agora, calculando $(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{\alpha\beta}$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \mathbf{X}_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\sum_\gamma\Big(T_\gamma\omega_\alpha-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma T_\alpha\omega_\gamma\Big)\wedge\omega_{\gamma\beta}\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\omega_\alpha\wedge\left(\sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma\beta}\right)-\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\left(\sum_\gamma\omega_{\beta\gamma}\wedge\omega_\gamma\right)\\
&= \left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\omega_\alpha\wedge\left(dT_\beta-\frac{a'}{a}\varepsilon_\beta\omega_\beta+\frac{\varepsilon a'}{a}T_\beta\delta\right)-\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\left(\sum_\gamma\omega_{\beta\gamma}\wedge\omega_\gamma\right)\\
&= -\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)dT_\beta\wedge\omega_\alpha-\left(\frac{a'}{a}\right)^2\varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha\wedge\omega_\beta-\left(\frac{a'}{a}\right)^2T_\beta\delta\wedge\omega_\alpha\\
&\quad+\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta d\omega_\beta.
\end{aligned}$$

Então,

$$(\Omega\wedge\mathbf{X})_{\alpha\beta}+(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{\alpha\beta}=-\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)(T_\beta d\omega_\alpha-T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta d\omega_\beta)$$
$$-\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)(dT_\beta\wedge\omega_\alpha-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha\wedge\omega_\beta)-\left(\frac{\varepsilon a'}{a}\right)\delta\wedge\mathbf{X}_{\alpha\beta}-2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\varepsilon\varepsilon_\beta\omega_\alpha\wedge\omega_\beta.$$

Para (4), se $\alpha,\beta\geq 1$, um cálculo direto dá que

$$(d\Omega)_{\alpha\beta}+(\Omega\wedge\Omega)_{\alpha\beta}=\varepsilon_\alpha\left\langle R^F(X,Y)e_\beta,e_\alpha\right\rangle+\omega_{\alpha 0}\wedge\omega_{0\beta}(X,Y).$$

Primeiro, vamos calcular $\left\langle R^F(X,Y)e_\beta,e_\alpha\right\rangle$ em casos:

Caso 1: $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$.

$$
\begin{aligned}
&\left\langle R^F(X,Y)e_\beta, e_\alpha\right\rangle = \\
&= \left\langle \nabla^F_X \nabla^F_Y e_\beta - \nabla^F_Y \nabla^F_X e_\beta - \nabla^F_{[X,Y]} e_\beta, e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^F_X \left(\nabla_Y e_\beta + \alpha^E(e_\beta, Y)\right) - \nabla^F_Y \left(\nabla_X e_\beta + \alpha^E(e_\beta, X)\right) - \left(\nabla_{[X,Y]} e_\beta + \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right)\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^F_X \nabla_Y e_\beta + \nabla^F_X \alpha^E(e_\beta, Y) - \nabla^F_Y \nabla_X e_\beta - \nabla^F_Y \alpha^E(e_\beta, X) - \nabla_{[X,Y]} e_\beta - \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X \nabla_Y e_\beta, e_\alpha \right\rangle + \left\langle \alpha^E\left(X, \nabla_Y e_\beta\right), e_\alpha \right\rangle - \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, Y\right)} X, e_\alpha \right\rangle + \left\langle \nabla^E_X \alpha^E(e_\beta, Y), e_\alpha \right\rangle \\
&- \left\langle \nabla_Y \nabla_X e_\beta, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \alpha^E\left(Y, \nabla_X e_\beta\right), e_\alpha \right\rangle + \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, X\right)} Y, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \nabla^E_Y \alpha^E(e_\beta, X), e_\alpha \right\rangle \\
&- \left\langle \nabla_{[X,Y]} e_\beta, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle R(X,Y)e_\beta, e_\alpha \right\rangle + \left\langle \left(\nabla_X \alpha\right)\left(e_\beta, Y\right) - \left(\nabla_X \alpha\right)\left(e_\beta, Y\right), e_\alpha \right\rangle - \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, Y\right)} X - A_{\alpha^E\left(e_\beta, X\right)} Y, e_\alpha \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Desde que $e_\alpha \in TM$,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle R^F(X,Y)e_\beta, e_\alpha\right\rangle = \\
&= \left\langle R(X,Y)e_\beta, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, Y\right), \alpha^E\left(e_\alpha, X\right)\right\rangle + \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, X\right), \alpha^E\left(e_\alpha, Y\right)\right\rangle \\
&= \left(\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2}\right)\Big(\left\langle X, e_\beta\right\rangle \left\langle Y, e_\alpha\right\rangle - \left\langle Y, e_\beta\right\rangle \left\langle X, e_\alpha\right\rangle \Big) \\
&+ \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right)\Big(\left\langle X, e_\beta\right\rangle \delta(Y) T_\alpha - \left\langle Y, e_\beta\right\rangle \delta(X) T_\alpha - \left\langle X, e_\alpha\right\rangle \delta(Y) T_\beta + \left\langle Y, e_\alpha\right\rangle \delta(X) T_\beta \Big) \\
&= -\left(\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta(X,Y) \\
&- \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right) \varepsilon_\alpha \left(T_\beta \omega_\alpha - T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_\alpha\right) \wedge \delta(X,Y) \\
&= -\left(\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} - \frac{c}{a^2}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta(X,Y) - \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{\varepsilon c}{a^2}\right) \frac{a}{a'} \varepsilon_\alpha \varepsilon \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \delta(X,Y).
\end{aligned}
$$

Mas, é fácil ver que

$$
\omega_{\alpha 0} \wedge \omega_{0\beta} = \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_\beta}{a^2} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \frac{\varepsilon_0}{aa'} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \delta,
$$

e, neste caso, concluímos que

$$
(d\Omega)_{\alpha\beta} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2} \varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2}\right) \frac{\varepsilon a}{a'} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \delta.
$$

Para os outros casos, usamos uma conta similar, notando que $\omega_\alpha(TM) = 0$ if $\alpha \in \{n+1, \ldots, n+m\}$. Agora, para α ou β iguais a zero, temos, considerando $\beta = 0$ por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
(d\Omega)_{\alpha 0} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha 0} &= -\varepsilon_\alpha X \langle e_\alpha, SY \rangle + \varepsilon_\alpha Y \langle e_\alpha, SX \rangle + \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, S[X,Y] \rangle \\
&+ \sum_{\gamma \geq 1} -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma \left\langle e_\alpha, \nabla^F_X e_\gamma \right\rangle \langle e_\gamma, SY \rangle - \sum_{\gamma \geq 1} -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma \left\langle e_\alpha, \nabla^F_Y e_\gamma \right\rangle \langle e_\gamma, SX \rangle \\
&= -\varepsilon_\alpha X \langle e_\alpha, SY \rangle + \varepsilon_\alpha Y \langle e_\alpha, SX \rangle + \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, S[X,Y] \rangle \\
&+ \varepsilon_\alpha \sum_{\gamma \geq 1} \varepsilon_\gamma \left\langle \nabla^F_X e_\alpha, e_\gamma \right\rangle \langle e_\gamma, SY \rangle - \varepsilon_\alpha \sum_{\gamma \geq 1} \varepsilon_\gamma \left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, e_\gamma \right\rangle \langle e_\gamma, SX \rangle \\
&= -\varepsilon_\alpha X \langle e_\alpha, SY \rangle + \varepsilon_\alpha Y \langle e_\alpha, SX \rangle \\
&\quad + \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, S[X,Y] \rangle + \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_X e_\alpha, SY \right\rangle - \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, SX \right\rangle \\
&= -\varepsilon_\alpha \left\langle e_\alpha, \nabla^F_X SY \right\rangle + \varepsilon_\alpha \left\langle e_\alpha, \nabla^F_Y SX \right\rangle + \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, S[X,Y] \rangle \\
&= \varepsilon_\alpha \left\langle e_\alpha, -\nabla^F_X SY + \nabla^F_Y SX + S[X,Y] \right\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, precisamos calcular $-\nabla^F_X SY + \nabla^F_Y SX + S[X,Y]$. Primeiro, note que para qualquer $U \in \Gamma(F)$ vale $\nabla^F_X \left(\frac{-1}{ac} U \right) = \frac{\varepsilon a'}{ca^2} \delta(X) U - \frac{1}{a\varepsilon_0} \nabla^F_X U$ e $\nabla^F_X (T + \xi) = -ca'SX$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla^F_X SY &= \nabla^F_X \left(\frac{-1}{ac} \left(Y - \varepsilon\delta(Y)(T+\xi) \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon a'}{ca^2} \delta(X) \left(Y - \varepsilon\delta(Y)(T+\xi) \right) - \frac{1}{ac} \nabla^F_X \left(Y - \varepsilon\delta(Y)(T+\xi) \right) \\
&= \frac{\varepsilon a'}{ca^2} \delta(X) Y - \frac{a'}{ca^2} \delta(X)\delta(Y)(T+\xi) - \frac{1}{ac} \nabla^F_X Y + \frac{\varepsilon}{ac} X(\delta(Y))(T+\xi) - \frac{\varepsilon a'}{a} \delta(Y) SX.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla^F_Y SX = \frac{\varepsilon a'}{ca^2} \delta(Y) X - \frac{a'}{c} \delta(Y)\delta(X)(T+\xi) - \frac{1}{ac} \nabla^F_Y X + \frac{\varepsilon}{ac} Y(\delta(X))(T+\xi) - \frac{\varepsilon a'}{a} \delta(X) SY.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\nabla^F_Y SX - \nabla^F_X SY + S[X,Y] &= \frac{\varepsilon a'}{ca^2}(\delta(Y)X - \delta(X)Y) + \frac{1}{ac}[X,Y] \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{ac}(Y(\delta(X)) - X(\delta(Y))(T+\xi) \\
&\quad - \frac{\varepsilon a'}{a}(\delta(X)SY - \delta(Y)SX) + S[X,Y] \\
&= \frac{\varepsilon a'}{ca^2}(\delta(Y)X - \delta(X)Y) + \frac{1}{ac}[X,Y] - \frac{\varepsilon}{ac}\delta([X,Y])(T+\xi) \\
&\quad - \frac{\varepsilon a'}{a}(\delta(X)SY - \delta(Y)SX) + S[X,Y] \\
&= \frac{\varepsilon a'}{ca^2}(\delta(Y)X - \delta(X)Y) - \frac{\varepsilon a'}{a}(\delta(X)SY - \delta(Y)SX) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que $(d\Omega)_{\alpha 0} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha 0} = 0$. Desde que

$$
-\varepsilon \frac{(a')^2}{a^2}\varepsilon_\beta \omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \left(\frac{a''}{a} - \frac{(a')^2}{a^2}\right)\frac{\varepsilon a}{a'}\mathbf{X}_{\alpha\beta} \wedge \delta
$$

se anula quando $\beta = 0$, o item (4) está provado. Isso conclui a prova. $\square$

Lema 3.4 $d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = 0$.

Prova. Os itens do Lema 4.5 mostram que o lado direito da equação (7) se anulam, e isso finaliza a prova. $\square$

Para o que segue, faça $N = m + n - 1$, $\lambda = p + q + \dfrac{|c-1|}{2}$ e defina

$$
\mathcal{S} = \{Z \in \mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R}); Z^t G Z = G\},
$$

onde $G_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$.

Também defina a aplicação $s : \mathcal{S} \to \mathbb{S}\left(\mathbb{E}^{N+2}_\lambda\right) = \{X \in \mathbb{E}^{N+2}_\lambda; \langle X, X\rangle = \varepsilon\}$ dada por

$$
Z \mapsto \left(Z_{(N+1)0}, \ldots, Z_{N+1N+1}\right)^t.
$$

Proposição 3.4 *A aplicação s definida acima é uma submersão.*

Prova. Primeiro, note que $W \in T_Z\mathcal{S}$ se e somente se $Z^{-1}W \in T_I\mathcal{S}$. Se

$$
\mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k+1^{th}}, 0, \ldots, 0, 0)^t,
$$

então é claro que $s(U) = U^t \mathbf{e}_{N+1}$. Temos que mostrar que $(ds)_Z : T_Z\mathcal{S} \to T_{s(Z)}\mathbb{S}\left(\mathbb{E}^{N+2}_\lambda\right)$

é sobrejetiva. De fato, $(ds)_Z(W) = s(W) = W^t\mathbf{e}_{N+1}$. Portanto, para um dado $V \in T_{s(Z)}\mathbb{S}\left(\mathbb{E}_\lambda^{N+2}\right)$, queremos encontrar $W \in T_Z\mathcal{S}$ tal que $W^t\mathbf{e}_{N+1} = V$, que é equivalente a $(Z^{-1}W)^t(Z^t\mathbf{e}_{N+1}) = V$. Então queremos encontrar $H \in T_I\mathcal{S} = \mathfrak{s} = \{H \in M_{N+2}(\mathbb{R}); H^tG + GH = 0\}$ tal que $H(Z^t\mathbf{e}_{N+1})$. Desde que $\{Z^t\mathbf{e}_0 \dots, Z^t\mathbf{e}_{N+1}\}$ é uma base para $\mathbb{E}_k^{N+2}$ e $\langle V, Z^t\mathbf{e}_{N+1}\rangle = \langle V, s(Z)\rangle = 0$, isso é possível (para ver esse fato, mude para base $\{Z^t\mathbf{e}_\alpha\}$, e defina a última coluna de H como sendo V e o restante de H usando que $H_{\alpha\beta} = -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta H_{\beta\alpha}$). Isso termina a prova. □

Agora, provamos a seguinte

Proposição 3.5 *Seja $(M, \langle,\rangle)$ uma variedade semi-Riemanniana satisfazendo as equações de estrutura. Defina $\mathcal{Z}(x) = \{Z \in \mathcal{S} | Z_{n+1\beta} = T_\beta(x), \beta = 0, 1, \dots, N+1\}$. Então para cada $x_0 \in M$ e $B_0 \in \mathcal{Z}(x_0)$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 em M e uma única aplicação $B : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$, tal que*

$$B^{-1}dB = \Omega - \boldsymbol{X}, \;\; B(x_0) = B_0,$$

e $B(x) \in \mathcal{Z}(x)$, para todo $x \in \mathcal{U}$.

Prova. Para uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de $x_0 \in M$, defina o conjunto

$$\mathcal{F} = \{(x, Z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S} | Z \in \mathcal{Z}(x)\}.$$

Visto que s é uma submersão pela Proposição 3.4, a dimensão da variedade $\mathcal{F}$ é

$$\dim \mathcal{F} = n + \frac{(N+1)(N+2)}{2} - (N+1) = n + \frac{N(N+1)}{2}$$

e seu espaço tangente é

$$T_{(x,Z)}\mathcal{F} = \{(U, V) \in T_x\mathcal{U} \oplus T_Z\mathcal{S} | (dT_\beta)_x(U) = V_{N+1\beta}, \beta = 0, \dots, N+1\}.$$

Considere sobre $\mathcal{F}$ a distribuição $\mathcal{D}(x, Z) = \ker\, \Theta_{(x,Z)}$, onde $\Theta = \Upsilon - Z^{-1}dZ =$

$\Omega - \mathbf{X} - Z^{-1}dZ$. Também considere $\mathcal{H} = \{H \in \mathfrak{s} | ZH \in \ker(ds)_Z\}$. É fácil ver que

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{H} &= \dim \ker(ds)_Z \\
&= \dim \ker(ds)_{I_{N+2}} \\
&= \dim \mathfrak{s} - (N+1) \\
&= \frac{(N+1)(N+2)}{2} - (N+1) \\
&= \frac{N(N+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, observamos as equivalências

$$\begin{aligned}
\Theta(U,V) \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \Omega(U) - \mathbf{X}(U) - Z^{-1}V \in \mathcal{H} \\
&\Leftrightarrow Z\Omega(U) - Z\mathbf{X}(U) - V \in \ker\,(ds)_Z \\
&\Leftrightarrow (Z\Omega(U))_{N+1\beta} - (Z\mathbf{X}(U))_{N+1\beta} - V_{N+1\beta} = 0, \text{ for } \beta = 0, \ldots, N+1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
& (Z\Omega(U))_{N+1\beta} - (Z\mathbf{X}(U))_{N+1\beta} - (dT_\beta)_x(U) = \\
= \quad & \sum_\gamma Z_{N+1\gamma}\Omega(U)_{\gamma\beta} - \sum_\gamma Z_{N+1\gamma}\mathbf{X}(U)_{\gamma\beta} - (dT_\beta)_x(U) \\
= \quad & \sum_\gamma T_\gamma(x)\omega_{\gamma\beta}(U) - \sum_\gamma T_\gamma(x)\mathbf{X}(U)_{\gamma\beta} - (dT_{N+1\beta})_x(U) \\
= \quad & (dT_\beta)_x(U) - \frac{a'}{a}\varepsilon_\beta(\omega_\beta)_x(U) + \frac{\varepsilon a'}{a}T_\beta(x)\delta_x(U) \\
& -\frac{\varepsilon a'}{a}\sum_\gamma T_\gamma(x)\left(T_\beta(x)(\omega_\gamma)_x(U) - \varepsilon_\gamma\varepsilon_\beta T_\gamma(x)(\omega_\beta)_x(U)\right) \\
& -(dT_\beta)_x(U) \\
& = 0,
\end{aligned}$$

para $\beta = 0, \ldots, N+1$. Portanto, Im $\Theta \subset \mathcal{H}$. Agora, se $H \in \mathcal{H}$, então $(0, -ZH) \in T_{(x,Z)}\mathcal{F}$, que significa que $\Theta(0, -ZH) = H$, e segue que Θ é sobrejetiva, isto é, Im $\Theta = \mathcal{H}$. Então, concluímos que dim $\mathcal{D}(x,Z) = \dim T_{(x,Z)}\mathcal{F} - \dim \text{Im } \Theta = n$. Agora, queremos provar que $\mathcal{D}$ é integrável. Desde que $d\Upsilon + \Upsilon \wedge \Upsilon = 0$, temos

$$d\Theta = d\Upsilon + Z^{-1}dZ \wedge Z^{-1}dZ = d\Upsilon + (\Upsilon - \Theta) \wedge (\Upsilon - \Theta) = \Upsilon \wedge \Theta - \Theta \wedge \Upsilon + \Theta \wedge \Theta.$$

Logo, se $U, V \in \mathcal{D}$, obtemos $d\Theta(U,V) = (\Upsilon \wedge \Theta - \Theta \wedge \Upsilon + \Theta \wedge \Theta)(U,V) = 0$. Por outro lado, temos $d\Theta(U,V) = U(\Theta(V)) - V(\Theta(U)) - \Theta([U,V]) = -\Theta([U,V])$, e concluímos que $[U,V] \in \mathcal{D}$.

Para o que está faltando, seja L uma variedade integral passando por (x_0, B_0).

Para cada $(0, V) \in \mathcal{D}_{(x_0,B_0)}$, temos $\Theta_{(x_0,B_0)}(0, V) = B_0^{-1}V = 0$, que dá $V = 0$. Isso significa que L intersecta $\{x_0\} \times \mathcal{S}$ transversalmente em (x_0, B_0). Diminuindo $\mathcal{U}$, se necessário, e usando a Caracterização Local de Gráficos, concluímos L é o gráfico de uma única função $B : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$. Desde que $L \subset \mathcal{F}$, para cada $x \in \mathcal{U}$ temos $B(x) \in Z(x)$. Finalmente, desde que $\Theta \equiv 0$ sobre L, B satisfaz a equação $B^{-1}dB = \Omega - \mathbf{X}$. $\square$

3.4 Prova do teorema principal

Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança em M de um ponto dado $x_0 \in M$ e $B : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$ a aplicação encontrada na Proposição 4.3. Defina $f : \mathcal{U} \to \varepsilon I \times_a \mathbb{E}_\lambda^{N+1}$ por

$$f_0 = cB_{00}, \ \ldots \ , \ f_N = \varepsilon_N B_{N0}, \ f_{N+1} = \pi.$$

Um cálculo direto nos dá que Im $f \subset \varepsilon I \times_a \mathbb{M}_\lambda^N(c)$. Para ver que f é uma imersão isométrica, calculamos

$$\begin{aligned}
df(e_i) &= \sum_{\gamma} df_\gamma(e_i)E_\gamma \\
&= \sum_{\gamma\leq N} df_\gamma(e_i)E_\gamma + d\pi(e_i)E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \varepsilon_\gamma dB_{\gamma 0}(e_i)E_\gamma + \varepsilon T_i E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \varepsilon_\gamma \left(B\Omega(e_i) - B\mathbf{X}(e_i)\right)_{\gamma 0} E_\gamma + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \left(\sum_{\substack{\gamma\leq N\\ \theta}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\theta}\omega_{\theta 0}(e_i)E_\gamma\right) + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \left(\sum_{\substack{\gamma\leq N\\ \theta}} -\varepsilon_\gamma B_{\gamma\theta}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_\theta T_i T_\theta - \delta_{\theta i}}{ac}\right) E_\gamma\right) + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \frac{-\varepsilon_\gamma}{ac}\left(\varepsilon T_i\left(\sum_\theta \varepsilon_\theta T_\theta B_{\gamma\theta}\right) - B_{\gamma i}\right) E_\gamma + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \frac{-\varepsilon_\gamma}{ac}\left(\varepsilon T_i\left(\sum_\theta \varepsilon_\theta B_{\gamma\theta}B_{N+1\theta}\right) - B_{\gamma i}\right) E_\gamma + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \frac{-\varepsilon_\gamma}{ac}\left(\varepsilon T_i \varepsilon_\gamma \delta_{\gamma N+1} - B_{\gamma i}\right) E_\gamma + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \sum_{\gamma\leq N} \frac{\varepsilon_\gamma}{ac} B_{\gamma i}E_\gamma + \varepsilon_{N+1}B_{N+1i}E_{N+1} \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}\overline{E}_\gamma.
\end{aligned}$$

Desde que $B \in \mathcal{S}$, temos

$$\langle df(e_i), df(e_j)\rangle = \left\langle \sum_\alpha \varepsilon_\gamma B_{\alpha i}\overline{E}_\alpha, \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma j}\overline{E}_\gamma \right\rangle = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}B_{\gamma j} = \varepsilon_i \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle\,,$$

que implica que f é uma imersão isométrica. Agora, seja $\tilde{E}_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha\gamma}\overline{E}_\alpha$. Temos que $\tilde{E}_i = df(e_i)$ é tangente à $f(\mathcal{U})$ e $\tilde{E}_u$ é normal à $f(\mathcal{U})$. De fato, para cada i, temos

$$\left\langle \tilde{E}_u, \tilde{E}_i \right\rangle = \left\langle \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha u}\overline{E}_\alpha, \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}\overline{E}_\gamma \right\rangle = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma u}B_{\gamma i} = \varepsilon_i \delta_{ui} = \langle e_u, e_i\rangle = 0,$$

desde que $i \neq u$. Então, $Tf(\mathcal{U})^\perp = \text{span}\,\{\tilde{E}_u\}$. Seja Φ uma extensão da imersão f definida como segue:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : T\mathcal{U} \oplus \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \oplus E & \to & Tf(\mathcal{U}) \oplus Tf(\mathcal{U})^\perp \\ \left(p, \sum_\gamma \lambda_\gamma e_\gamma\right) & \to & \left(f(p), \sum_\gamma \lambda_\gamma \tilde{E}_\gamma\right), \end{array}$$

onde $\sigma : E \to M$ é a projeção. É fácil ver que Φ é um isomofismo entre os fibrados $T\mathcal{U} \oplus \sigma^{-1}(\mathcal{U})$ e $Tf(\mathcal{U}) \oplus Tf(\mathcal{U})^\perp$. Além do mais, a métrica induzida por Φ também coincide com a métrica do fibrado dado desde que $\Phi(e_\gamma) = \tilde{E}_\gamma$. Se $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$, então

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \nabla^\perp_{\Phi(e_i)}\Phi(e_u), \Phi(e_v)\right\rangle & = & \left\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_i}\tilde{E}_u, \tilde{E}_v \right\rangle \\ & = & \left\langle \tilde{\nabla}_{\sum_\rho \varepsilon_\rho B_{\rho i}\overline{E}_\rho} \sum_\theta \varepsilon_\theta B_{\theta u}\overline{E}_\theta, \sum_\lambda \varepsilon_\lambda B_{\lambda v}\overline{E}_\lambda \right\rangle \\ & = & \sum_\theta \varepsilon_\theta B_{\theta v} dB_{\theta u}(e_i) + \sum_{\theta,\lambda,\rho} \varepsilon_\theta\varepsilon_\lambda\varepsilon_\rho B_{\rho i}B_{\lambda v}B_{\theta u}\left\langle \tilde{\nabla}_{\overline{E}_\rho}\overline{E}_\theta, \overline{E}_\lambda \right\rangle \\ & = & \varepsilon_v (B^{-1}dB(e_i))_{vu} + \sum_{\theta,\lambda,\rho} \varepsilon_\theta\varepsilon_\lambda\varepsilon_\rho B_{\rho i}B_{\lambda v}B_{\theta u}\left\langle \tilde{\nabla}_{\overline{E}_\rho}\overline{E}_\theta, \overline{E}_\lambda \right\rangle \\ & = & \varepsilon_v \omega_{vu}(e_i) + \dfrac{\varepsilon a'}{a} B_{N+1u}\sum_{\theta \leq N} \varepsilon_\theta B_{\theta i}B_{\theta v} - \dfrac{\varepsilon a'}{a} B_{N+1v}\sum_{\theta\leq N} \varepsilon_\theta B_{\theta i}B_{\theta u} \\ & = & \left\langle e_v, \nabla^E_{e_i} e_u \right\rangle = \left\langle \Phi(e_v), \Phi(\nabla^E_{e_i} e_u)\right\rangle. \end{array}$$

Se chamarmos, por abuso de notação, o isomorfismo $\Phi_{|_{\sigma^{-1}(\mathcal{U})}} : \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \subset E \to Tf(\mathcal{U})^\perp$ de Φ também, então concluímos que

$$\Phi\nabla^E = \nabla^\perp\Phi.$$

Um cálculo análogo dá que $\alpha_f = \Phi \circ \alpha^E \circ df^{-1}$, onde α_f é a segunda forma fundamental de f. Também note que

$$\begin{aligned}
\partial_t &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \left\langle \tilde{E}_\gamma, \partial_t \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \left\langle \sum_\theta \varepsilon_\theta B_{\theta\gamma} \overline{E}_\theta, \partial_t \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{N+1\gamma} \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \langle e_\gamma, T + \xi \rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \langle \Phi(e_\gamma), \Phi(T + \xi) \rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \left\langle \tilde{E}_\gamma, \Phi(T + \xi) \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \Phi(T) + \Phi(\xi).
\end{aligned}$$

Desde que $\Phi(T) = df(T)$, isso finaliza a prova do Teorema 3.1. $\square$

4 IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED $\mathbb{M}^{n_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{n_2}_{k_2}(c_2)$

Nesta seção vamos considerar o caso em que a base do produto warped é também uma forma espacial, podendo assim traçar as diferenças para o caso $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$ e ver quais as dificuldades de se encontrar um teorema fundamental para o caso do produto warped $\mathbb{M}^{n_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{n_2}_{k_2}(c_2)$. Esta seção de baseia num trabalho em andamento feito por mim e por Marcos F. de Melo, cujo objetivo é uma generalização do caso tratado por LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010) e LAWN and ROTH (2017), como também do caso tratado na Seção 3 (ver RIBEIRO and MELO (2019)).

4.1 Subvariedades do Produto Warped $\mathbb{M}^{n_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{n_2}_{k_2}(c_2)$

Seja $M_i := \left(M^{n_i}_{k_i}(c_i), g_i, \nabla^i\right)$ denotando uma variedade semi-Riemanniana de curvatura constante $c_i \in \{-1, 1\}$ e índice k_i, $i \in \{1, 2\}$. Para um produto warped $\bar{M} = \left(M_1 \times_h M_2, \bar{g}, \bar{\nabla}\right)$, seja $h > 0$ sua função warping, e $\bar{g} = (\pi_1)^* g_1 + (h \circ \pi_1)^2 (\pi_2)^* g_2$ sua métrica, onde denotamos por π_i a projeção em M_i e, por abuso de notação, denotamos também por π_i sua derivada, vista como uma seção de $T\bar{M} \otimes TM_i$. Identificamos TM_i com um subfibrado de $T\bar{M}$, em que π_i é visto como uma seção de $T\bar{M} \otimes T\bar{M}$.

Agora, seja $\phi : (M^n_k, g, \nabla) \to \bar{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade semi-Riemanniana de índice k. Denote por $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^\perp$ os tensores curvatura dos fibrados tangente e normal TM e $TM^\perp$, respectivamente, por $\alpha = \alpha_\phi \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes TM^\perp)$ a segunda forma fundamental de ϕ e por $A_\eta = A^\phi_\eta \in \Gamma(TM^* \otimes TM)$ seu operador forma na direção normal η, dado por $\bar{g}(A_\eta X, Y) = \bar{g}(\alpha(X, Y), \eta)$ para $X, Y \in \Gamma(TM)$. Para quaisquer $i \in \{1, 2\}$, a projeção π_i induz a existência dos seguintes quatro operadores $R_i : TM \to TM, S_i : TM \to TM^\perp, U_i : TM^\perp \to TM$, e $V_i : TM^\perp \to TM^\perp$ tais que

$$\pi_i X = R_i X + S_i X \;\text{ e }\; \pi_i \eta = U_i \eta + V_i \eta, \tag{8}$$

para quaisquer $X \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$. Da simetria de π_i obtemos a simetria de R_i e V_i, além do fato

$$\bar{g}(S_i X, \eta) = \bar{g}(X, U_i \eta). \tag{9}$$

A partir de $\pi_1 + \pi_2 = Id_{T\bar{M}}$, temos as seguintes identidades

$$R_1 + R_2 = Id_{TM}, \quad V_1 + V_2 = Id_{TM^\perp}, \quad S_1 + S_2 = 0, \quad \text{e} \quad U_1 + U_2 = 0. \tag{10}$$

Além do mais, temos as seguintes relações entre esses operadores vindas do fato que $\pi_i \circ \pi_j = \delta_{ij} \pi_j$

$$R_iR_j + U_iS_j = \delta_{ij}R_j, \tag{11}$$

$$V_iV_j + S_iU_j = \delta_{ij}V_j, \tag{12}$$

$$S_iR_j + V_iS_j = \delta_{ij}S_j, \tag{13}$$

$$R_iU_j + U_iV_j = \delta_{ij}U_j, \tag{14}$$

onde δ_{ij} é o símbolo clássico de Kronecker.

Diferentemente do que acontece no caso do produto de duas (ou mais) formas espaciais semi-Riemannianas (ver, por exemplo, LIRA, TOJEIRO, and VITÓRIO (2010) e/ou LAWN and ROTH (2017), onde o caso $h \equiv 1$ é tratado), não temos que π_i é paralelo. De fato, deduzimos a seguinte

Proposição 4.1 *Para quaisquer $Z, W \in \Gamma(\bar{M})$ vale*

$$(\bar{\nabla}_Z \pi_i)W = \frac{\bar{g}(\zeta, \pi_1 W)}{(-1)^{i-1}h}\pi_2 Z + \frac{\bar{g}(\pi_2 Z, \pi_2 W)}{(-1)^{i-1}h}\zeta, \tag{15}$$

onde $\zeta := grad(h)$.

Prova.

Se $T \in \Gamma(\bar{M})$, debote por $\pi_1(T) = T_H$ e $\pi_2(T) = T_V$. Agora, usando a Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_Z \pi_1)W &= \bar{\nabla}_Z \pi_1 W - \pi_1 \bar{\nabla}_Z W \\
&= \bar{\nabla}_{Z_H + Z_V} W_H - \pi_1(\bar{\nabla}_{Z_H + Z_V}(W_H + W_V)) \\
&= \bar{\nabla}_{Z_H} W_H + \bar{\nabla}_{Z_V} W_H - \pi_1(\bar{\nabla}_{Z_H} W_H + \bar{\nabla}_{Z_V} W_H + \bar{\nabla}_{Z_H} W_V + \bar{\nabla}_{Z_V} W_V) \\
&= \bar{\nabla}_{Z_V} W_H + \frac{\bar{g}(\pi_2 Z, \pi_2 W)}{h}\zeta \\
&= \frac{(\pi_1 W)h}{h}\pi_2 Z + \frac{\bar{g}(\pi_2 Z, \pi_2 W)}{h}\zeta.
\end{aligned}$$

Como $(\bar{\nabla}_Z \pi_1)W + (\bar{\nabla}_Z \pi_2)W = 0$, isto prova a proposição. □

Usando as definições dos operadores em (8) e as definições de A e α, temos

$$(\nabla_X \pi_i)Y = \underbrace{(\nabla_X R_i)Y - A_{S_i Y}X - U_i\alpha(X,Y)}_{\in TM} + \underbrace{(\nabla^{\perp}_X S_i)Y + \alpha(X, R_i Y) - V_i\alpha(X,Y)}_{\in TM^{\perp}} \tag{16}$$

e

$$(\nabla_X \pi_i)\eta = \underbrace{(\nabla_X U_i)\eta - A_{V_i\eta}X + R_i A_\eta X}_{\in TM} + \underbrace{(\nabla^{\perp}_X V_i)\eta + \alpha(X, U_i\eta) + S_i A_\eta X}_{TM^{\perp}}, \tag{17}$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(TM), \eta \in \Gamma(TM^{\perp})$.

Agora, comparando as expressões (15), (16) e (17), obtemos

$$(\nabla_X R_i)Y - A_{S_iY}X - U_i\alpha(X,Y) = \frac{\bar{g}(Y,T)}{(-1)^{i-1}h}R_2X + \frac{\bar{g}(X,R_2Y)}{(-1)^{i-1}h}T \tag{18}$$

$$(\nabla^{\perp}_X S_i)Y + \alpha(X,R_iY) - V_i\alpha(X,Y) = \frac{\bar{g}(Y,T)}{(-1)^{i-1}h}S_2X + \frac{\bar{g}(X,R_2Y)}{(-1)^{i-1}h}N \tag{19}$$

$$(\nabla_X U_i)\eta - A_{V_i\eta}X + R_iA_\eta X = \frac{\bar{g}(\eta,N)}{(-1)^{i-1}h}R_2X + \frac{\bar{g}(X,U_2\eta)}{(-1)^{i-1}h}T \tag{20}$$

$$(\nabla^{\perp}_X V_i)\eta + \alpha(X,U_i\eta) + S_iA_\eta X = \frac{\bar{g}(\eta,N)}{(-1)^{i-1}h}S_2X + \frac{\bar{g}(X,U_2\eta)}{(-1)^{i-1}h}N, \tag{21}$$

onde $T \in TM$ é a parte tangente de ζ e $N \in TM^{\perp}$ é a parte normal de ζ. Além disso, é imediato que $T = \operatorname{grad}(h_{|M})$

Por causa do Lema 2.1, podemos escrever $\pi_1(T+N) = T+N$ e $\pi_2(T+N) = 0$, donde obtemos que

$$\begin{aligned} R_1T + U_1N &= T && (22)\\ S_1T + V_1N &= N && (23)\\ R_2T + U_2N &= 0 && (24)\\ S_2T + V_2N &= 0 && (25) \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.2, a expressão do tensor curvatura e o fato que M_1 e M_2 têm curvatura seccional constante, temos que

$$\bar{R}(X,Y)Z = c_1(\pi_1X \wedge \pi_1Y)\pi_1Z + \frac{c_2}{h^2}(\pi_2X \wedge \pi_2Y)\pi_2Z + \Gamma(X,Y)Z, \tag{26}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in T\bar{M}$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma(X,Y)Z = \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h^2}(\pi_2Y \wedge \pi_2X)\pi_2Z &+ \frac{H^h(\pi_1X,\pi_1Z)}{h}\pi_2Y - \frac{H^h(\pi_1Y,\pi_1Z)}{h}\pi_2X \\ &+ h^{-1}\bar{g}(\pi_2X,\pi_2Z)\bar{\nabla}_{\pi_1Y}\zeta - h^{-1}\bar{g}(\pi_2Y,\pi_2Z)\bar{\nabla}_{\pi_1X}\zeta, \end{aligned}$$

H^h é o levantamento a $\bar{M}$ da Hessiana de $h : M_1 \to \mathbb{R}^+$ e $(X \wedge Y)Z := \bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y$. A fim de simplificar mais a equação (26), vamos provar o

Lema 4.1 *Para todo $X, Z \in T\bar{M}$ vale:*

$$H^h(\pi_1 X, \pi_1 Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta, Z) - \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}\bar{g}(\pi_2 X, \pi_2 Z)$$

Prova. Como estamos calculando o levantamento da hessiana sobre vetores horizontais, então vale que

$$\begin{aligned}
H^h(\pi_1 X, \pi_1 Z) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi_1 X}\zeta, \pi_1 Z) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta - \bar{\nabla}_{\pi_2 X}\zeta, Z) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta, Z) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\pi_2 X}\zeta, Z) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta, Z) - \frac{\zeta(h)}{h}\bar{g}(\pi_2 X, Z) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta, Z) - \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}\bar{g}(\pi_2 X, \pi_2 Z),
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a propriedade (2) da Proposição 2.2. □

Aplicando o Lema 4.1 a Γ e substituindo em (26) temos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= c_1(\pi_1 X \wedge \pi_1 Y)\pi_1 Z + \frac{c_2}{h^2}(\pi_2 X \wedge \pi_2 Y)\pi_2 Z + \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_X \zeta, Z)}{h}\pi_2 Y - \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_Y \zeta, Z)}{h}\pi_2 X \\
&\quad + \frac{\bar{g}(\pi_2 X, \pi_2 Z)}{h}\bar{\nabla}_{\pi_1 Y}\zeta - \frac{\bar{g}(\pi_2 Y, \pi_2 Z)}{h}\bar{\nabla}_{\pi_1 X}\zeta, \qquad (27)
\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in T\bar{M}$.

Logo, para quaisquer $X, Y, Z \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$, temos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente:

(Gauss)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y)Z = c_1&\big\{\bar{g}(R_1 Y, Z)R_1 X - \bar{g}(R_1 X, Z)R_1 Y\big\} \\
&+ \Big(\frac{c_2 + \bar{g}(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar{g}(R_2 Y, Z)R_2 X - \bar{g}(R_2 X, Z)R_2 Y\big\} \\
&+ \frac{1}{h}\{\bar{g}(R_2 X, Z)(\nabla_Y T - A_N Y) - \bar{g}(\nabla_Y T - A_N Y, Z)R_2 X\} \qquad (28) \\
&- \frac{1}{h}\{\bar{g}(R_2 Y, Z)(\nabla_X T - A_N X) - \bar{g}(\nabla_X T - A_N X, Z)R_2 Y\} \\
&+ A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,
\end{aligned}$$

(Codazzi)

$$\begin{aligned}(\nabla_X\alpha)(Y,Z)-(\nabla_Y\alpha)(X,Z) &= c_1\big\{\bar g(R_1Y,Z)S_1X-\bar g(R_1X,Z)S_1Y\big\} \\ &+\Big(\frac{c_2+\bar g(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar g(R_2Y,Z)S_2X-\bar g(R_2X,Z)R_2Y\big\} \\ &+\frac{1}{h}\{\bar g(R_2X,Z)(\alpha(Y,T)+\nabla^\perp_YN)-\bar g(\nabla_YT-A_NY,Z)S_2X\} \\ &-\frac{1}{h}\{\bar g(R_2Y,Z)(\alpha(X,T)+\nabla^\perp_XN)-\bar g(\nabla_XT-A_NX,Z)S_2Y\}\end{aligned} \tag{29}$$

(Ricci)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\perp(X,Y)\eta &= c_1\big\{\bar g(S_1Y,\eta)S_1X-\bar g(S_1X,\eta)S_1Y\big\} \\ &+\Big(\frac{c_2+\bar g(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar g(S_2Y,\eta)S_2X-\bar g(S_2X,\eta)S_2Y\big\} \\ &+\frac{1}{h}\{\bar g(S_2X,\eta)(\alpha(Y,T)+\nabla^\perp_YN)-\bar g(\alpha(Y,T)+\nabla^\perp_YN,\eta)S_2X\} \\ &-\frac{1}{h}\{\bar g(S_2Y,\eta)(\alpha(X,T)+\nabla^\perp_XN)-\bar g(\alpha(X,T)+\nabla^\perp_XN,\eta)S_2Y\} \\ &+\alpha(A_\eta Y,X)-\alpha(A_\eta X,Y).\end{aligned} \tag{30}$$

Logo, as equações (9)-(14), (18)-(25) e (28)-(30) são condições necessárias para M ser realizada como uma subvariedade do produto warped $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1)\times_h\mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$, e portanto candidatas naturais a serem as equações de compatibilidade. Comparando porem com o produto warped $\varepsilon I\times_a\mathbb{M}^N_\lambda(c)$, o fato de o novo espaço base ser mais "complicado"causa o aparecimento nas equações de Gauss, Codazzi e Ricci dos termos $\alpha(X,T)+\nabla^\perp_XN$ e ∇_XT-A_NX, o que neste ponto, requer que coloquemos condições adicionais sobre a função warping. Mas antes, dediquemos uma seção ao método do referencial móvel neste caso também.

4.2 O método do referencial móvel

Para o que segue seja

$$\mathbb{E}_i=\begin{cases}\mathbb{R}^{n_i+1}_{k_i}, & \text{se } \mathbb{M}^{n_i}_{k_i}(c_i)=\mathbb{S}^{n_i}_{k_i},\ c_i=1,\\ \mathbb{R}^{n_i+1}_{k_i+1}, & \text{se } \mathbb{M}^{n_i}_{k_i}(c_i)=\mathbb{H}^{n_i}_{k_i},\ c_i=-1,\end{cases}$$

Considere os mergulhos (totalmente umbílicos) usuais $\Phi_i: M_i\to\mathbb{E}_i$. Dada uma carta slice (U,ϕ) para M_1, podemos tomar $V=M_1\cap U$ vizinhança em M_1 com coordenadas $(x_1,\ldots,x_{n_1,},0)$, sendo $(x_1,\ldots,x_{n_1,},t)$ as coordenadas de $U\subset\mathbb{E}_1$. Nestes termos, queremos encontrar $u:U\to\mathbb{R}^*_+$ tal que

$$\begin{cases}\langle \mathrm{grad}(u)_p,p\rangle_p=0\\ u_{|V}=h,\end{cases}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{i=1}^n \dfrac{x_i}{t}(\partial_i u) = 0 \quad \text{para} \quad t \neq 0. \\ u = h, \quad \text{para} \quad t = 0, \end{cases}$$

cuja solução (suave e positiva) é garantida via teoria de EDP's. Assim, em termos locais, podemos estender a função h definida originalmente em M_1 a uma função $\tilde{h}$ suave definida (localmente) em $\mathbb{E}_1$ tal que $\tilde{h}$ também é positiva e $\langle \mathrm{grad}(\tilde{h}), p\rangle_p = 0$, o que implica que sobre M_1 teremos $\tilde{\zeta} := \mathrm{grad}(\tilde{h}) = \mathrm{grad}(h)$.

Para facilitar o trabalho com índices, denote por $\tilde{H}$ os índices α que representam vetores horizontais e $\tilde{V}$ aqueles que representam vetores verticais. Além do mais, usaremos letras gregas minúsculas para nos referir aos índices $\{0, \dots, n_1 + n_2 + 1\}$, as letras $i, j, k, \dots$ para representar vetores tangentes a M e $u, v, w, \dots$ para representar vetores normais a M em $\overline{M}$.

Seja $(e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n_1+n_2}, e_{n_1+n_2+1})$ um referencial móvel adaptado sobre M de tal forma que $e_1, \dots, e_n$ são tangentes à M, $e_{n+1}, \dots, e_{n_1+n_2}$ são normais à M em $\bar{M}$, $\varepsilon_\alpha = \langle e_\alpha, e_\alpha\rangle = \pm 1$. Então, como antes, podemos trabalhar com o levantamento de $\tilde{h}$ e considerar o mergulho isométrico via (Φ_1, Φ_2) de $(U_1 \cap M_1) \times_h (U_2 \cap M_2) \subset \overline{M}$ em $\tilde{M}^{n_1+n_2+2} = U_1 \times_{\tilde{h}} U_2$, $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$ em que $\tilde{h}$ está definida na vizinhança U_1, com uma conexão $\tilde{\nabla}$ e uma base $\left(E_0^1, \dots, E_{n_1}^1, E_0^2, \dots, E_{n_2}^2\right)$, onde $\left(E_0^i, \dots, E_{n_i}^i\right)$ é um referencial ortonormal e paralelo de $U_i \subset \mathbb{E}_i$. Defina $\overline{E}_0 = E_0^1, \dots, \overline{E}_{n_1} = E_{n_1}^1, \overline{E}_{n_1+1} = \dfrac{E_0^2}{\tilde{h}}, \dots, \overline{E}_{n_1+n_2+1} = \dfrac{E_{n_1}^2}{\tilde{h}}$, e, consequentemente, $\left(\overline{E}_0, \dots, \overline{E}_{n_1+n_2+1}\right)$ é uma base ortonormal de $\tilde{M}$. Por fim, se necessário, reordene $\left(\overline{E}_0, \dots, \overline{E}_{n_1+n_2+1}\right)$ de tal forma que $\left\langle \overline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha \right\rangle_{\tilde{M}} = \varepsilon_\alpha$.

Sejam G a matriz $G := (\varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta})$, $(w_0, \dots, w_{n_1+n_2+1})$ a base dual de e_α, onde $w_r|_{TM} = 0, r \in \{0, n+1, \dots, n_1 + n_2 + 1\}$. Defina as funções $B_{\alpha\beta} := \langle \overline{E}_\alpha, e_\beta\rangle$ e a matriz $B = (B_{\alpha\beta})$. Assim, é imediato que

$$\sum_\mu \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\mu\beta} = \sum_\mu \varepsilon_\mu \langle \overline{E}_\mu, e_\alpha\rangle \langle \overline{E}_\mu, e_\beta\rangle = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Esta equação se reduz a $B^t G B = G$, o que implica que $B^{-1} = G B^t G$, onde B^t é a transposta de B e B^{-1} é a inversa de B.

Definimos também as 1-formas de conexão $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$ por

$$\omega_{\alpha\beta}(X) = \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \tilde{\nabla}_X e_\beta\rangle, \text{ para qualquer } X \in TM.$$

A matriz Ω satisfaz $\Omega^t G + G\Omega = 0$, i.e, $\omega_{\beta\alpha} = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_{\alpha\beta}$. Em particular, $\tilde{\nabla} e_\alpha = \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} e_\gamma$. Usando o fato que $e_\beta = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \overline{E}_\gamma$, calculamos $\tilde{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta$ de duas formas:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta &= \sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) e_\mu \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma \Big(\sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) B_{\gamma\mu} \Big) \overline{E}_\gamma. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta &= \tilde{\nabla}_{e_\alpha} \Big(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \overline{E}_\gamma \Big) \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \overline{E}_\gamma + \sum_{\mu,\gamma} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \tilde{\nabla}_{\overline{E}_\mu} \overline{E}_\gamma. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 2.1 para calcular $\tilde{\nabla}_{\overline{E}_\mu} \overline{E}_\gamma$ temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\overline{E}_\alpha} \overline{E}_\beta &= 0 \text{ para } \alpha \in \tilde{H} \text{ e } \beta \in \tilde{H} \cup \tilde{V}, \\
\tilde{\nabla}_{\overline{E}_\alpha} \overline{E}_\beta &= \frac{\langle \overline{E}_\beta, \tilde{\zeta} \rangle}{\tilde{h}} \overline{E}_\alpha \text{ para } \alpha \in \tilde{V} \text{ e } \beta \in \tilde{H}, \\
\tilde{\nabla}_{\overline{E}_\alpha} \overline{E}_\beta &= \frac{-\varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}}{\tilde{h}} \tilde{\zeta} \quad \text{para } \alpha, \beta \in \tilde{V}.
\end{aligned}
$$

Substituindo essas expressões em (32) e escrevendo $\tilde{\zeta} = \sum_{\gamma \in \tilde{H}} \varepsilon_\gamma \langle \overline{E}_\gamma, \zeta \rangle \overline{E}_\gamma$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_\alpha} e_\beta &= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \overline{E}_\gamma + \sum_{\substack{\mu \in \tilde{V} \\ \gamma \in \tilde{H}}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \tilde{\nabla}_{\overline{E}_\mu} \overline{E}_\gamma + \sum_{\substack{\mu \in \tilde{V} \\ \gamma \in \tilde{V}}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \tilde{\nabla}_{\overline{E}_\mu} \overline{E}_\gamma \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \overline{E}_\gamma + \sum_{\substack{\mu \in \tilde{V} \\ \gamma \in \tilde{H}}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \frac{\langle \overline{E}_\gamma, \tilde{\zeta} \rangle}{\tilde{h}} \overline{E}_\mu - \sum_{\substack{\mu \in \tilde{V} \\ \gamma \in \tilde{V}}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\gamma\beta} \frac{\varepsilon_\mu \delta_{\mu\gamma}}{\tilde{h}} \tilde{\zeta} \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \overline{E}_\gamma + \tilde{h}^{-1} \sum_{\gamma \in \tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\beta} \langle \overline{E}_\gamma, \tilde{\zeta} \rangle \sum_{\mu \in \tilde{V}} \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} \overline{E}_\mu - \tilde{h}^{-1} \Big(\sum_{\mu \in \tilde{V}} \varepsilon_\mu B_{\mu\alpha} B_{\mu\beta} \Big) \tilde{\zeta} \\
&= \sum_\gamma \varepsilon_\gamma dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) \overline{E}_\gamma + \tilde{h}^{-1} \langle e_\beta, \tilde{\zeta} \rangle \sum_{\gamma \in \tilde{V}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\alpha} \overline{E}_\gamma - \tilde{h}^{-1} \langle \pi_2 e_\alpha, e_\beta \rangle \sum_{\gamma \in \tilde{H}} \varepsilon_\gamma \langle \overline{E}_\gamma, \tilde{\zeta} \rangle \overline{E}_\gamma.
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Logo, comparando (31) e (33), obtemos

$$
\sum_\mu \omega_{\mu\beta}(e_\alpha) B_{\gamma\mu} = \begin{cases} dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) - \tilde{h}^{-1} \langle \pi_2 e_\alpha, e_\beta \rangle \langle \overline{E}_\gamma, \tilde{\zeta} \rangle, & \text{se } \gamma \in \tilde{H}, \\ dB_{\gamma\beta}(e_\alpha) + \tilde{h}^{-1} \langle e_\beta, \tilde{\zeta} \rangle B_{\gamma\alpha}, & \text{se } \gamma \in \tilde{V} \end{cases}
$$

Portanto, em $p \in \overline{M}$ podemos trocar $\tilde{h}$ por h, $\tilde{\zeta}$ por ζ e finalmente obter:

$$(\Omega - B^{-1}dB)_{\alpha\beta} = h^{-1}\langle e_\beta, \zeta\rangle\omega_\alpha\pi_2 - \frac{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}{h}\langle e_\alpha, \zeta\rangle\omega_\beta\pi_2.$$

Faça $T_\alpha = \langle e_\alpha, \zeta\rangle$ e defina a matriz X como

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{h}\Big(T_\beta\omega_\alpha\pi_2 - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta\pi_2\Big).$$

obtendo assim que

$$\Omega - X = B^{-1}dB.$$

Mostremos agora que as 1-formas de conexão podem ser recuperadas só com elementos que nos são conhecidos:

Como citado antes, a partir dos mergulhos totalmente umbílicos $\Phi_i : M_i \to \mathbb{E}_i$ usuais, construímos o mergulho isométrico

$$\tilde{\Xi} : ((U_1 \cap M_1) \times_h (U_2 \cap M_2), \langle\,,\ \rangle) \to (U_1 \times_{\tilde{h}} U_2, \langle\,,\ \rangle_2), \quad (p, q) \mapsto (\Phi_1(p), \Phi_2(q)).$$

É bem conhecido que $\xi_i = \Phi_i/c_i$ é um campo de vetores satisfazendo $\nabla^o_X\xi_i = X/c_i$ para qualquer X tangente a T_pM_i. Portanto, podemos considerar os campos de vetores normais de $\tilde{\Xi}$ como

$$\tilde{\xi_1}(p, q) = (0, \xi_1(q)/h(p)) = (0, q/(c_2h(p))) \text{ e } \tilde{\xi_2}(p, q) = (\xi_2(p), 0) = (p/c_1, 0),$$

para qualquer $(p, q) \in (U_1 \cap M_1) \times_h (U_2 \cap M_2)$.

Assim, usando o Lema 2.2, temos para $X \in T\overline{M}$

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi_1} = \frac{1}{c_2h}\{R_2X_T + U_2X_N\} + \frac{1}{c_2h}\{S_2X_T + V_2X_N\}$$

e

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi_2} = \frac{1}{c_1}\{R_1X_T + U_1X_N\} + \frac{1}{c_1}\{S_1X_T + V_1X_N\},$$

onde $X_T \in TM$ é parte tangente de X e $X_N \in (TM)^\perp$ á a parte normal de X. Logo, para $X \in TM$, podemos recuperar as 1-formas de conexão como

$$\begin{aligned}
\omega_{00}(X) &= 0 \\
\omega_{(n_1+n_2+1)0}(X) &= 0 \\
\omega_{i0}(X) &= \frac{\varepsilon_i}{c_2 h}\langle e_i, R_1 X\rangle \\
\omega_{u0}(X) &= \frac{\varepsilon_u}{c_2 h}\langle e_u, S_1 X\rangle \\
\omega_{i(n_1+n_2+1)}(X) &= \frac{\varepsilon_i}{c_1}\langle e_i, R_2 X\rangle \\
\omega_{u(n_1+n_2+1)}(X) &= \frac{\varepsilon_u}{c_1}\langle e_u, S_2 X\rangle \\
\omega_{iu}(X) &= -\varepsilon_i\langle e_i, A_{e_u} X\rangle \\
\omega_{ij}(X) &= \varepsilon_i\langle e_i, \nabla_X e_j\rangle \\
\omega_{uv}(X) &= \varepsilon_u\langle e_u, \nabla^{\perp}_X e_v\rangle \\
\omega_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

4.3 O caso em que a Hessiana da função warping é conforme

A partir de agora, vamos considerar a Hessiana de h conforme, i.e, $Hess_{M_1} h = f g_1$, onde $f : M_1 \to \mathbb{R}$ é uma função suave dada. É imediato que tal condição nos dá que $\bar{\nabla}_{\pi_1 X}\zeta = f\pi_1 X$. Parecido com o Lema 3.1, provamos agora o seguinte

Lema 4.2 *Para $X \in TM$ vale*

(1) $\bar{\nabla}_X\zeta = \Big(f\cdot R_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}R_2X\Big) + \Big(f\cdot S_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}S_2X\Big).$

(2) $\nabla_X T - A_N X = f\cdot R_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}R_2X.$

(3) $\nabla^{\perp}_X N + \alpha(X,T) = f\cdot S_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}S_2X.$

Prova. Para (1) veja que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X\zeta &= \bar{\nabla}_{\pi_1 X}\zeta + \bar{\nabla}_{\pi_2 X}\zeta \\
&= f\pi_1 X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}\pi_2 X \\
&= f\{R_1X + S_1X\} + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}\{R_2X + S_2X\} \\
&= \Big(f\cdot R_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}R_2X\Big) + \Big(f\cdot S_1X + \frac{\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h}S_2X\Big).
\end{aligned}$$

Para o que falta, basta notar que as partes tangente e normal de $\bar{\nabla}_X\zeta$ são, respectivamente, $\nabla_X T - A_N X$ e $\nabla^{\perp}_X N + \alpha(X,T)$, logo, comparando com (1), segue (2) e (3). □

Usando o Lema 4.2 nas equações (28)-(30), temos que

(Gauss)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)Z &= c_1\big\{\bar{g}(R_1Y,Z)R_1X - \bar{g}(R_1X,Z)R_1Y\big\}\\ &+ \Big(\frac{c_2-\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar{g}(R_2Y,Z)R_2X - \bar{g}(R_2X,Z)R_2Y\big\}\\ &+ \frac{f}{h}\Big\{\bar{g}(R_2X,Z)R_1Y - \bar{g}(R_1Y,Z)R_2X\\ &- \bar{g}(R_2Y,Z)R_1X + \bar{g}(R_1X,Z)R_2Y\Big\}\\ &+ A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,\end{aligned} \tag{34}$$

(Codazzi)

$$\begin{aligned}(\nabla_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y\alpha)(X,Z) &= c_1\big\{\bar{g}(R_1Y,Z)S_1X - \bar{g}(R_1X,Z)S_1Y\big\}\\ &+\Big(\frac{c_2-\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar{g}(R_2Y,Z)S_2X - \bar{g}(R_2X,Z)R_2Y\big\}\\ &+\frac{f}{h}\Big\{\bar{g}(R_2X,Z)S_1Y - \bar{g}(R_1Y,Z)S_2X\\ &-\bar{g}(R_2Y,Z)S_1X + \bar{g}(R_1X,Z)S_2Y\Big\}\end{aligned} \tag{35}$$

(Ricci)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\perp}(X,Y)\eta &= c_1\big\{\bar{g}(S_1Y,\eta)S_1X - \bar{g}(S_1X,\eta)S_1Y\big\}\\ &+\Big(\frac{c_2-\bar{g}(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar{g}(S_2Y,\eta)S_2X - \bar{g}(S_2X,\eta)S_2Y\big\}\\ &+\frac{f}{h}\Big\{\bar{g}(S_2X,\eta)S_1Y - \bar{g}(S_1Y,\eta)S_2X\\ &-\bar{g}(S_2Y,\eta)S_1X + \bar{g}(S_1X,\eta)S_2Y\Big\}\\ &+\alpha(A_\eta Y,X) - \alpha(A_\eta X,Y).\end{aligned} \tag{36}$$

4.4 Resultado Principal

De agora em diante, seja $(M^n, \langle,\rangle_M)$ uma variedade semi-Riemanniana de índice p e $(E, \langle,\rangle_E)$ um fibrado vetorial semi-Riemanniano de índice q e posto $m = n_1 + n_2 - n$ sobre M, com conexão compatível ∇^E e operador curvatura R^E. Seja também dados α^E uma seção simétrica em $\Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$, N uma seção em $\Gamma(E)$, números reais $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$, $h : M_1 \to \mathbb{R}^+$ uma função suave positiva com hessiana conforme (i.e, $H^h(X,Y) = f\langle X,Y\rangle_{M_1}$, para alguma $f : M_1 \to \mathbb{R}$ suave) com $\varepsilon := \langle \mathrm{grad}(h), \mathrm{grad}(h)\rangle_{M_1}$, $\pi_I : M \to M_1$ suave, $R_i : TM \to TM$, $S_i : TM \to E$, $U_i : E \to TM$ e $V_i : E \to E$ tensores do tipo $(1,1)$. Defina o campo de vetores $T \in TM$ por $T = \mathrm{grad}(h \circ \pi_I)$ e, para cada $\eta \in \Gamma(E)$, defina a seção $A_\eta \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ por $\big\langle \alpha^E(X,Y), \eta\big\rangle = \langle A_\eta(X), Y\rangle$.

Definição 4.1 *Diremos que* $(M, g, E, g_E, \nabla^E, \alpha^E, A_\eta, T, N, R_i, S_i, U_i, V_i)$ *satisfaz as equações* *de estrutura para o produto warped $\bar{M}$ se*

(A) R_i e V_i são simétricos e U_i é dual de S_i (com relação a métrica $\langle , \rangle_{TM\oplus E}$),

(B) $\bar{\nabla}_{\pi_I X}(\pi_I Y) = \pi_I(\nabla_X Y) + \dfrac{\langle R_2 X, Y\rangle}{h\circ \pi_I}\mathrm{grad}(h), \forall X, Y \in TM$,

(C) As equações (9)-(14), (18)-(21) são satisfeitas, i.e,

$$R_1 + R_2 = Id_{TM}, \quad V_1 + V_2 = Id_E, \quad S_1 + S_2 = 0, \quad \text{e} \quad U_1 + U_2 = 0$$

$$R_iR_j + U_iS_j = \delta_{ij}R_j,$$

$$V_iV_j + S_iU_j = \delta_{ij}V_j,$$

$$S_iR_j + V_iS_j = \delta_{ij}S_j,$$

$$R_iU_j + U_iV_j = \delta_{ij}U_j,$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R_i)Y - A_{S_iY}X - U_i\alpha^E(X,Y) &= \frac{\bar{g}(Y,T)}{(-1)^{i-1}h}R_2X + \frac{\bar{g}(X,R_2Y)}{(-1)^{i-1}h}T,\\
(\nabla^{\perp}_X S_i)Y + \alpha^E(X,R_iY) - V_i\alpha^E(X,Y) &= \frac{\bar{g}(Y,T)}{(-1)^{i-1}h}S_2X + \frac{\bar{g}(X,R_2Y)}{(-1)^{i-1}h}N,\\
(\nabla_X U_i)\eta - A_{V_i\eta}X + R_iA_\eta X &= \frac{\bar{g}(\eta,N)}{(-1)^{i-1}h}R_2X + \frac{\bar{g}(X,U_2\eta)}{(-1)^{i-1}h}T,\\
(\nabla^{\perp}_X V_i)\eta + \alpha^E(X,U_i\eta) + S_iA_\eta X &= \frac{\bar{g}(\eta,N)}{(-1)^{i-1}h}S_2X + \frac{\bar{g}(X,U_2\eta)}{(-1)^{i-1}h}N,
\end{aligned}$$

(D) T e N satisfazem as equações

$$\langle T,T\rangle_M + \langle N,N\rangle_E = \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
R_1T + U_1N &= T,\\
S_1T + V_1N &= N,\\
R_2T + U_2N &= 0,\\
S_2T + V_2N &= 0,
\end{aligned}$$

$$\nabla_X T - A_N X = f\cdot R_1X + \frac{\varepsilon}{h}R_2X,$$

$$\nabla^E_X N + \alpha^E(X,T) = f\cdot S_1X + \frac{\varepsilon}{h}S_2X,$$

(E) Para quaisquer $X, Y, Z \in TM$ e $\eta \in E$, temos as equações (de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)Z = c_1\big\{&\bar g(R_1Y,Z)R_1X - \bar g(R_1X,Z)R_1Y\big\}\\ &+\Big(\frac{c_2-\bar g(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar g(R_2Y,Z)R_2X - \bar g(R_2X,Z)R_2Y\big\}\\ &+\frac{f}{h}\Big\{\bar g(R_2X,Z)R_1Y - \bar g(R_1Y,Z)R_2X\\ &-\bar g(R_2Y,Z)R_1X + \bar g(R_1X,Z)R_2Y\Big\}\\ &+A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X\alpha)(Y,Z)-(\nabla_Y\alpha)(X,Z) \;=\;& c_1\big\{\bar g(R_1Y,Z)S_1X - \bar g(R_1X,Z)S_1Y\big\}\\ &+\Big(\frac{c_2-\bar g(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar g(R_2Y,Z)S_2X - \bar g(R_2X,Z)R_2Y\big\}\\ &+\frac{f}{h}\Big\{\bar g(R_2X,Z)S_1Y - \bar g(R_1Y,Z)S_2X\\ &-\bar g(R_2Y,Z)S_1X + \bar g(R_1X,Z)S_2Y\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\perp(X,Y)\eta \;=\;& c_1\big\{\bar g(S_1Y,Z)S_1\eta - \bar g(S_1X,\eta)S_1Y\big\}\\ &+\Big(\frac{c_2-\bar g(\zeta,\zeta)}{h^2}\Big)\big\{\bar g(S_2Y,\eta)S_2X - \bar g(S_2X,\eta)S_2Y\big\}\\ &+\frac{f}{h}\Big\{\bar g(S_2X,\eta)S_1Y - \bar g(S_1Y,\eta)S_2X\\ &-\bar g(S_2Y,\eta)S_1X + \bar g(S_1X,\eta)S_2Y\Big\}\\ &+\alpha(A_\eta Y,X) - \alpha(A_\eta X,Y).\end{aligned}$$

Com base nisso, podemos enunciar o

Teorema 4.1 *Assuma que M, sob as as condições anteriores, satisfaz as equações de estrutura. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M, uma única imersão isométrica local $g : \mathcal{U} \to \overline{M}$ e uma isometria de fibrados vetoriais $\Phi : E \to Tf(M)^\perp$, tal que:*

1. $\mathrm{grad}(h) = dg(T) + \Phi(N)$, *onde, por abuso de notação, escrevemos h ao invés de $h \circ \pi_1$, sendo $\pi_i : \overline{M} \to M_i$ a projeção.*
2. $\pi_I = \pi_1 \circ g$.
3. $\pi_i(dg(X)) = dg(R_iX) + \Phi(S_iX)$ *e* $\pi_i(\Phi(\eta)) = dg(U_iX) + \Phi(V_iX)$.
4. $\alpha_g = \Phi\alpha^E dg^{-1}$, *onde α_g é a segunda forma fundamental da imersão g.*
5. *As equações em (D) são as equações de Gauss, Codazzi and Ricci, respectivamente,*

da imersão encontrada.

6. $\nabla^{\perp}\Phi = \Phi\nabla^{E}$.

Prova.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita sobre TM. Considere a soma de Whitney $F = TM \oplus E$ equipado com a soma ortogonal das métricas em TM e E. Defina

$$\begin{array}{rcl} \nabla^F_X Y & = & \nabla_X Y + \alpha^E(X,Y), \;\; X,Y \in \Gamma(TM), \\ \nabla^F_X \eta & = & -A_\eta X + \nabla^E_X \eta, \;\; X \in \Gamma(TM), \;\; \eta \in \Gamma(E). \end{array}$$

É fácil ver que ∇^F é uma conexão compatível sobre F. Defina também $\bar{\pi}_i : F \to F$ por

$$\bar{\pi}_i X = R_i X + S_i X, \text{ se } X \in TM,$$

$$\bar{\pi}_i \eta = U_i \eta + V_i \eta \text{ se } \eta \in E.$$

Lema 4.3 *A aplicação $\bar{\pi}_i$ é simétrica com respeito $\langle , \rangle_F$ e vale as identidades:*

1. $\bar{\pi}_i \circ \bar{\pi}_j = \delta_{ij}\pi_j$,
2. $\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = Id_F$,
3. $\bar{\pi}_1(T+N) = T+N$ *e* $\bar{\pi}_2(T+N) = 0$,
4. $(\nabla^F_Z \bar{\pi}_i)W = \dfrac{\langle T+N, W\rangle_F}{(-1)^{i-1}h}\bar{\pi}_2 Z + \dfrac{\langle \bar{\pi}_2 Z, W\rangle_F}{(-1)^{i-1}h}(T+N)$, *para $Z \in TM$ e $W \in F$, onde, por abuso de notação, usamos h ao invés de $h \circ \pi_I$.*

Prova. A simetria de $\bar{\pi}_i$ é imediata de (A) e (B). Para o item 1, veja que

$$\begin{array}{rcl} \bar{\pi}_i \circ \bar{\pi}_j(X+\eta) & = & \bar{\pi}_i(R_j X + S_j X + U_j \eta + V_j \eta) \\ & = & R_i R_j X + S_i R_j X + U_i S_j X + V_i S_j X + R_i U_j \eta + S_i U_j \eta + U_i V_j \eta + V_i V_j \eta \\ & = & \delta_{ij} R_j X + \delta_{ij} V_j X + \delta_{ij} U_j \eta + \delta_{ij} V_j \eta \\ & = & \delta_{ij}\bar{\pi}_j(X+\eta), \end{array}$$

onde a penúltima igualdade vem das identidades em (B). O item 2 também é imediato das identidades em (B). Já o item 3 segue de (C). Por fim, o item 4 é consequência imediata das quatro últimas equações em (B) . □

Para o que segue, dado um ponto $x \in M$, considere em sua vizinhança um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n_1+n_2}\}$ para F, com seus sinais $\varepsilon_\alpha = \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \pm 1$, onde $\{e_1, \dots e_n\}$ é um referencial ortonormal local para TM e $\{e_{n+1}, \dots e_{n_1+n_2}\}$ é um referencial ortonormal local para E. Defina em $\Gamma(F^*)$ as 1-formas

$$\omega_\alpha = e^*_\alpha, \text{ se } \alpha \in \{1, \dots, n_1+n_2\}, \;\; \omega_0 = 0 \text{ e } \omega_{n_1+n_2+1} = 0.$$

Defina também $\delta \in \Gamma(F^*)$ por $\delta(X) = \langle X, T + N\rangle$, para $X \in F$. Vamos agora construir as 1-formas:

$$\begin{aligned}
\omega_{00}(X) &= 0\\
\omega_{(n_1+n_2+1)0}(X) &= 0\\
\omega_{i0}(X) &= \frac{\varepsilon_i}{c_1}\langle e_i, R_1X\rangle\\
\omega_{u0}(X) &= \frac{\varepsilon_u}{c_1}\langle e_u, S_1X\rangle\\
\omega_{i(n_1+n_2+1)}(X) &= \frac{\varepsilon_i}{c_2h}\langle e_i, R_2X\rangle\\
\omega_{u(n_1+n_2+1)}(X) &= \frac{\varepsilon_u}{c_2h}\langle e_u, S_2X\rangle\\
\omega_{iu}(X) &= -\varepsilon_i\langle e_i, A_{e_u}X\rangle\\
\omega_{ij}(X) &= \varepsilon_i\langle e_i, \nabla_X e_j\rangle = \varepsilon_i\langle e_i, \nabla^F_X e_j\rangle\\
\omega_{uv}(X) &= \varepsilon_u\langle e_u, \nabla^E_X e_v\rangle = \varepsilon_u\langle e_u, \nabla^F_X e_v\rangle\\
\omega_{\alpha\beta} &= -\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\omega_{\beta\alpha},
\end{aligned}$$

para quaisquer $X \in TM$, que são conhecidas como as 1-formas de conexão. Agora, defina as funções $T_\alpha = \delta(e_\alpha)$ para $\alpha \in \{1, \ldots, n_1 + n_2\}$, $T_0 = 0$ e $T_{n_1+n_2+1} = 0$. Seja também $\varepsilon = \delta(T + N)$. Em seguida, consideramos as matrizes $\mathbf{X}$ e Υ, dadas por

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \frac{1}{h}\Big\{T_\beta\omega_\alpha\bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha\omega_\beta\bar{\pi}_2\Big\}, \quad \Upsilon = \Omega - \mathbf{X},$$

onde $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$. Um cálculo simples mostra que

$$d\Upsilon + \Upsilon\wedge\Upsilon = d\Omega - d\mathbf{X} + \Omega\wedge\Omega - \Omega\wedge\mathbf{X} - \mathbf{X}\wedge\Omega + \mathbf{X}\wedge\mathbf{X}. \tag{37}$$

Nosso objetivo agora é provar que o lado direito de (37) se anula. Tal prova será dividida em alguns lemas.

Lema 4.4 *As seguintes igualdades valem:*

1. $\displaystyle\sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2 = \varepsilon$;
2. $\displaystyle\delta = \sum_\gamma T_\gamma\omega_\gamma$;
3. $\displaystyle dT_\alpha = \sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma\alpha} + \varepsilon_\alpha f\omega_\alpha\bar{\pi}_1 + \frac{\varepsilon}{h}\varepsilon_\alpha\omega_\alpha\bar{\pi}_2$ *se* $1 \le \alpha \le n_1 + n_2 + 1$, $\displaystyle\sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma 0} = c_1\delta$;
4. $\displaystyle d(\mathcal{W}\circ\bar{\pi}_2) = \frac{1}{h}\delta\wedge(\mathcal{W}\circ\bar{\pi}_2) - \Omega\wedge(\mathcal{W}\circ\bar{\pi}_2)$, *onde* $\mathcal{W}\circ\bar{\pi}_2 = (\omega_0\bar{\pi}_2, \ldots, \omega_{n_1+n_2+1}\bar{\pi}_2)^\top$.

Prova. Item (1) vem do item (C) das equações de estrutura, e (2) é imediato das definições de δ, T_γ and ω_γ. Para prova o item (3), veja que se $X \in TM$ e $n_1 + n_2 \geq \alpha \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma\alpha}(X) &= \sum_\gamma \langle e_\gamma, T+N \rangle \varepsilon_\gamma \left\langle e_\gamma, \nabla^F_X e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle T+N, \nabla^F_X e_\alpha \right\rangle \\
&= X \langle T+N, e_\alpha \rangle - \left\langle \nabla^F_X (T+N), e_\alpha \right\rangle \\
&= X(T_\alpha) - \varepsilon_\alpha f \omega_\alpha \bar{\pi}_1(X) - \frac{\varepsilon}{h} \varepsilon_\alpha \omega_\alpha \bar{\pi}_2(X) \\
&= dT_\alpha(X) - \varepsilon_\alpha f \omega_\alpha \bar{\pi}_1(X) - \frac{\varepsilon}{h} \varepsilon_\alpha \omega_\alpha \bar{\pi}_2(X),
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade foi obtida do item (C) das equações de estrutura e da definição da conexão ∇^F. Se $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma 0}(X) &= \sum_{1 \leq \gamma \leq n_1 + n_1} \frac{\varepsilon_\gamma}{c_1} \langle e_\gamma, T+N \rangle \langle e_\gamma, \bar{\pi}_1 X \rangle \\
&= \frac{1}{c_1} \langle T+N, \bar{\pi}_1 X \rangle \\
&= \frac{1}{c_1} \langle T+N, X \rangle \\
&= \frac{1}{c_1} \delta(X)
\end{aligned}$$

Se $\alpha = n_1 + n_2 + 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma(n_1+n_2+1)}(X) &= \sum_{1 \leq \gamma \leq n_1 + n_1} \frac{\varepsilon_\gamma}{c_2 h} \langle e_\gamma, T+N \rangle \langle e_\gamma, \bar{\pi}_2 X \rangle \\
&= \frac{1}{c_2 h} \langle T+N, \bar{\pi}_2 X \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que por sua vez é igual $dT_{n_1+n_2+1}(X) - \varepsilon_{n_1+n_2+1} f \omega_{n_1+n_2+1} \bar{\pi}_1(X) - \frac{\varepsilon}{h} \varepsilon_{n_1+n_2+1} \omega_{n_1+n_2+1} \bar{\pi}_2(X)$, já que o mesmo se anula.

Finalmente, para provar o item (4), veja que se $n_1 + n_2 \geq \alpha \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
d\omega_\alpha\bar{\pi}_2(X,Y) &= X(\omega_\alpha\bar{\pi}_2(Y)) - Y(\omega_\alpha\bar{\pi}_2(X)) - \omega_\alpha\bar{\pi}_2([X,Y]) \\
&= X(\varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \bar{\pi}_2 Y\rangle) - Y(\varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \bar{\pi}_2 X\rangle) - \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \bar{\pi}_2[X,Y]\rangle) \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\left\langle \nabla^F_X e_\alpha, \bar{\pi}_2 Y\right\rangle + \left\langle e_\alpha, \nabla^F_X \bar{\pi}_2 Y\right\rangle\right) \\
&\quad -\varepsilon_\alpha \left(\left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, \bar{\pi}_2 X\right\rangle + \left\langle e_\alpha, \nabla^F_Y \bar{\pi}_2 X\right\rangle\right) - \varepsilon_\alpha \langle e_\alpha, \bar{\pi}_2[X,Y]\rangle) \\
&= \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_X e_\alpha, \bar{\pi}_2 Y\right\rangle - \varepsilon_\alpha \left\langle \nabla^F_Y e_\alpha, \bar{\pi}_2 X\right\rangle + \varepsilon_\alpha\langle e_\alpha, (\nabla^F_X\bar{\pi}_2)Y\rangle - \varepsilon_\alpha\langle e_\alpha, (\nabla^F_X\bar{\pi}_2)Y\rangle \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\sum_{n_1+n_2\geq\gamma\geq 1} \omega_{\gamma\alpha}(X)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma\bar{\pi}_2(Y) - \omega_{\gamma\alpha}(X)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma\bar{\pi}_2(Y)\right) \\
&\quad -\varepsilon_\alpha\langle e_\alpha, \frac{\delta(Y)}{h}\bar{\pi}_2 X + \frac{1}{h}\langle\bar{\pi}_2 X, Y\rangle(T+N)\rangle \\
&\quad +\varepsilon_\alpha\langle e_\alpha, \frac{\delta(X)}{h}\bar{\pi}_2 Y + \frac{1}{h}\langle\bar{\pi}_2 Y, X\rangle(T+N)\rangle \\
&= \varepsilon_\alpha \left(\sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha}(X)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma\bar{\pi}_2(Y) - \omega_{\gamma\alpha}(Y)\varepsilon_\gamma\omega_\gamma\bar{\pi}_2(X)\right) + \frac{1}{h}\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2(X,Y) \\
&= -\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\bar{\pi}_2\omega_\gamma(X,Y) + \frac{1}{h}\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2(X,Y) \\
&= +\frac{1}{h}\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2(X,Y) - (\Omega\wedge\mathcal{W}\bar{\pi}_2)_\alpha(X,Y).
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, então $d\omega_\alpha = 0$, e

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge\mathcal{W})_0\bar{\pi}_2(X,Y) &= \sum_\gamma \omega_{0\gamma}\bar{\pi}_2(X)\omega_\gamma(Y) - \omega_{0\gamma}(Y)\omega_\gamma\bar{\pi}_2(X) \\
&= \frac{\varepsilon_0}{c_1}\sum_\gamma \varepsilon_\gamma\langle e_\gamma, \bar{\pi}_1 X\rangle\langle e_\gamma, \bar{\pi}_2 Y\rangle - \varepsilon_\gamma\langle e_\gamma, \bar{\pi}_1 Y\rangle\langle e_\gamma, \bar{\pi}_2 X\rangle \\
&= \frac{\varepsilon_0}{c_1}(\langle\bar{\pi}_2 Y, \bar{\pi}_1 X\rangle - \langle\bar{\pi}_2 X, \bar{\pi}_1 Y\rangle) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem da simetria de $\bar{\pi}_1$. O caso $\alpha = n_1 + n_2 + 1$ é análogo. Isso conclui a prova. $\square$

Lema 4.5 *As seguintes igualdades valem:*

1. $(d\boldsymbol{X})_{\alpha\beta} = \left(-\frac{1}{h}\right)\delta\wedge\boldsymbol{X}_{\alpha\beta} + \frac{1}{h}\left(dT_\beta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta dT_\alpha\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2\right)$
$+ \frac{1}{h}\left(T_\beta d(\omega_\alpha\bar{\pi}_2) - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta T_\alpha d(\omega_\beta\bar{\pi}_2)\right)$;
2. $(\boldsymbol{X}\wedge\boldsymbol{X})_{\alpha\beta} = -\left(\frac{1}{h}\right)^2 \varepsilon\varepsilon_\beta(\omega_\alpha\bar{\pi}_2)\wedge(\omega_\beta\bar{\pi}_2)$;
3. $(\Omega\wedge\boldsymbol{X})_{\alpha\beta} + (\boldsymbol{X}\wedge\Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\frac{1}{h}\right)\left(T_\beta d(\omega_\alpha\bar{\pi}_2) - T_\alpha\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta d(\omega_\beta\bar{\pi}_2)\right)$

$$- \left(\frac{1}{h}\right)(dT_\beta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2) + \left(\frac{1}{h}\right)\delta \wedge \boldsymbol{X}_{\alpha\beta} - 2\left(\frac{1}{h^2}\right)\varepsilon\varepsilon_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2$$
$$- \frac{f\varepsilon_\beta}{h}(\omega_\alpha \bar{\pi}_1 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 + \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_1),\ \textit{se}\ \beta \neq 0;$$
$$(\Omega \wedge \boldsymbol{X})_{\alpha 0} + (\boldsymbol{X} \wedge \Omega)_{\alpha 0} = -\frac{c_1}{h}(\delta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2)\ \textit{se}\ \alpha \notin \{0, n_1 + n_2 + 1\};$$
$$(\Omega \wedge \boldsymbol{X})_{0\beta} + (\boldsymbol{X} \wedge \Omega)_{0\beta} = \frac{\varepsilon_\beta}{h}(\delta \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2)\ \textit{se}\ \beta \notin \{0, n_1 + n_2 + 1\};$$

4. $(d\Omega)_{\alpha\beta} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_\beta}{h^2}\right)(\omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2) - \frac{f\varepsilon_\beta}{h}(\omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_1) - \frac{f\varepsilon_\beta}{h}(\omega_\alpha \bar{\pi}_1 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2),$ *se* $\beta \neq 0$;
$$(d\Omega)_{\alpha 0} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha 0} = -\frac{c_1}{h}(\delta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2),\ \textit{se}\ \alpha \notin \{0, n_1 + n_2 + 1\};$$
$$(d\Omega)_{0\beta} + (\Omega \wedge \Omega)_{0\beta} = \frac{\varepsilon_\beta}{h}(\delta \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2),\ \textit{se}\ \beta \notin \{0, n_1 + n_2 + 1\}.$$

Prova. Primeiro é importante lembrar que $T = \mathrm{grad}(h)$ e que estamos escrevendo $h = h \circ \pi_I$. Para (1), temos

$$\begin{aligned}
(d\mathbf{X})_{\alpha\beta} &= d\left(\frac{1}{h}\Big\{T_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta \bar{\pi}_2\Big\}\right) \\
&= d\left(\frac{1}{h}\right) \wedge \Big\{T_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta \bar{\pi}_2\Big\} + \frac{1}{h} d\left(\Big\{T_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \omega_\beta \bar{\pi}_2\Big\}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{h}\right)\delta \wedge \mathbf{X}_{\alpha\beta} + \frac{1}{h}(dT_\beta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2) \\
&\quad + \frac{1}{h}(T_\beta d(\omega_\alpha \bar{\pi}_2) - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha d(\omega_\beta \bar{\pi}_2)).
\end{aligned}$$

Para (2), temos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X} \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \mathbf{X}_{\alpha\gamma} \wedge \mathbf{X}_{\gamma\beta} \\
&= \frac{1}{h^2}\sum_\gamma \Big(T_\gamma \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma T_\alpha \omega_\gamma \bar{\pi}_2\Big) \wedge \Big(T_\beta \omega_\gamma \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta T_\gamma \omega_\beta \bar{\pi}_2\Big) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(T_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma \bar{\pi}_2\right) - \frac{1}{h^2}\varepsilon_\beta \left(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma T_\gamma^2\right)\omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&\quad + \frac{1}{h^2}\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \left(\sum_\gamma T_\gamma \omega_\gamma \bar{\pi}_2\right) \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&= \frac{1}{h^2}(T_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \delta \bar{\pi}_2) - \frac{1}{h^2}\varepsilon_\beta \varepsilon \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 + \frac{1}{h^2}\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta T_\alpha \delta \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&= -\frac{1}{h^2}\varepsilon\varepsilon_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2.
\end{aligned}$$

Para (3), inicialmente calculamos $(\Omega \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta}$. Temos, no caso de $1 \leq \alpha, \beta \leq n_1 + n_2$, que

$$
\begin{aligned}
(\Omega \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \mathbf{X}_{\gamma\beta} \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \Big(T_\beta \omega_\gamma \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta T_\gamma \omega_\beta \bar{\pi}_2\Big) \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) T_\beta \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_\gamma \bar{\pi}_2 + \left(\frac{1}{h}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma\alpha}\right) \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) T_\beta \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_\gamma \bar{\pi}_2 + \left(\frac{1}{h}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(dT_\alpha - f \varepsilon_\alpha \omega_\alpha \bar{\pi}_1 - \frac{\varepsilon \varepsilon_\alpha}{h} \omega_a \bar{\pi}_2\right) \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) T_\beta \left(\frac{1}{h} \delta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - d(\omega_\alpha \bar{\pi}_2)\right) + \left(\frac{1}{h}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(dT_\alpha - f \varepsilon_\alpha \omega_\alpha \bar{\pi}_1 - \frac{\varepsilon \varepsilon_\alpha}{h} \omega_a \bar{\pi}_2\right) \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&= \left(\frac{1}{h}\right)^2 T_\beta (\delta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2) - \left(\frac{1}{h}\right) T_\beta d(\omega_\alpha \bar{\pi}_2) + \left(\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta}{h}\right) (dT_\alpha \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2) \\
&\quad - \left(\frac{f \varepsilon_\beta}{h}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_1 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 - \frac{\varepsilon \varepsilon_\beta}{h^2} (\omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{X} \wedge \Omega)_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \mathbf{X}_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) \sum_\gamma \Big(T_\gamma \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma T_\alpha \omega_\gamma \bar{\pi}_2\Big) \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \left(\sum_\gamma T_\gamma \omega_{\gamma\beta}\right) - \left(\frac{1}{h}\right) T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(\sum_\gamma \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_\gamma \bar{\pi}_2\right) \\
&= \left(\frac{1}{h}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \left(dT_\beta - \varepsilon_\beta f \omega_\beta \bar{\pi}_1 - \frac{\varepsilon \varepsilon_\beta}{h} \omega_\beta \bar{\pi}_2\right) - \left(\frac{1}{h}\right) T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(\sum_\gamma \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_\gamma \bar{\pi}_2\right) \\
&= -\left(\frac{1}{h}\right) dT_\beta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \left(\frac{\varepsilon_\beta f}{h}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_1 - \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_\beta}{h^2}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&\quad - \left(\frac{1}{h}\right) T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \left(\frac{1}{h} \delta \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 - d(\omega_\beta \bar{\pi}_2)\right) \\
&= -\left(\frac{1}{h}\right) dT_\beta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \left(\frac{\varepsilon_\beta f}{h}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_1 - \left(\frac{\varepsilon \varepsilon_\beta}{h^2}\right) \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2 \\
&\quad - \left(\frac{1}{h^2}\right) \delta \wedge (T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \omega_\beta \bar{\pi}_2) + \left(\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta}{h}\right) T_\alpha d(\omega_\beta \bar{\pi}_2)
\end{aligned}
$$

Então,

$$
(\Omega \wedge \mathbf{X})_{\alpha\beta} + (\mathbf{X} \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\frac{1}{h}\right) (T_\beta d(\omega_\alpha \bar{\pi}_2) - T_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta d(\omega_\beta \bar{\pi}_2))
$$

$$
-\left(\frac{1}{h}\right) (dT_\beta \wedge \omega_\alpha \bar{\pi}_2 - \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta dT_\alpha \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2) + \left(\frac{1}{h}\right) \delta \wedge \mathbf{X}_{\alpha\beta} + 2\left(\frac{1}{h^2}\right) \varepsilon \varepsilon_\beta \omega_\alpha \bar{\pi}_2 \wedge \omega_\beta \bar{\pi}_2
$$

$$-\frac{f\varepsilon_\beta}{h}\left(\omega_\alpha\bar{\pi}_1\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2+\omega_\alpha\bar{\pi}_2\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_1\right).$$

Para o caso $\beta=0$ e $\alpha\notin\{0,n_1+n_2+1\}$, temos $(\Omega\wedge\mathbf{X})_{\alpha 0}=\sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma}\wedge\mathbf{X}_{\gamma 0}=0$ e

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{\alpha 0} &= \sum_\gamma \mathbf{X}_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma 0}\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)\sum_\gamma\Big(T_\gamma\omega_\alpha\bar{\pi}_2-\varepsilon_\alpha\varepsilon_\gamma T_\alpha\omega_\gamma\bar{\pi}_2\Big)\wedge\omega_{\gamma 0}\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)\omega_\alpha\bar{\pi}_2\wedge\left(\sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma 0}\right)-\left(\frac{1}{h}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha c_1\left(\sum_\gamma\omega_{0\gamma}\wedge\omega_\gamma\bar{\pi}_2\right)\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)\omega_\alpha\bar{\pi}_2\wedge(c_1\delta)-\left(\frac{1}{h}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha c_1\left(\sum_\gamma\omega_{0\gamma}\wedge\omega_\gamma\bar{\pi}_2\right)\\
&= -\left(\frac{c_1}{h}\right)\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2-\left(\frac{1}{h}\right)T_\alpha\varepsilon_\alpha c_1\left(\frac{1}{h}\delta\wedge\omega_0\bar{\pi}_2-d(\omega_0\bar{\pi}_2)\right)\\
&= -\left(\frac{c_1}{h}\right)\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2
\end{aligned}$$

Segue que $(\Omega\wedge\mathbf{X})_{\alpha 0}+(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{\alpha 0}=-\left(\frac{c_1}{h}\right)\delta\wedge\omega_\alpha\bar{\pi}_2$.

Para o caso $\alpha=0$ e $\beta\notin\{0,n_1+n_2+1\}$, temos $(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{0\beta}=\sum_\gamma\mathbf{X}_{0\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}=0$ e

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge\mathbf{X})_{0\beta} &= \sum_\gamma\omega_{0\gamma}\wedge\mathbf{X}_{\gamma\beta}\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\Big(T_\beta\omega_\gamma\bar{\pi}_2-\varepsilon_\gamma\varepsilon_\beta T_\gamma\omega_\beta\bar{\pi}_2\Big)\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)T_\beta\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_\gamma\bar{\pi}_2+\left(\frac{1}{h}\right)c_1\varepsilon_\beta\left(\sum_\gamma T_\gamma\omega_{\gamma 0}\right)\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2\\
&= \left(\frac{1}{h}\right)T_\beta\sum_\gamma\omega_{0\gamma}\wedge\omega_\gamma\bar{\pi}_2+\left(\frac{1}{h}\right)c_1\varepsilon_\beta\,(c_1\delta)\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2\\
&= \left(\frac{\varepsilon_\beta}{h}\right)\delta\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Omega\wedge\mathbf{X})_{0\beta}+(\mathbf{X}\wedge\Omega)_{0\beta}=\left(\frac{\varepsilon_\beta}{h}\right)\delta\wedge\omega_\beta\bar{\pi}_2$. Para os demais casos, é fácil ver que os mesmos se anulam e portanto já estão contemplados em alguma das expressões achadas.

Para (4), se $n_1+n_2\geq\alpha,\beta\geq 1$, um cálculo direto dá que

$$(d\Omega)_{\alpha\beta}+(\Omega\wedge\Omega)_{\alpha\beta}=\varepsilon_\alpha\left\langle R^F(X,Y)e_\beta,e_\alpha\right\rangle+\omega_{\alpha 0}\wedge\omega_{0\beta}(X,Y)+\omega_{\alpha(n_1+n_2+1)}\wedge\omega_{(n_1+n_2+1)\beta}(X,Y).$$

Primeiro, vamos calcular $\left\langle R^F(X,Y)e_\beta, e_\alpha\right\rangle$ em casos:

Caso 1: $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$.

$$
\begin{aligned}
&\left\langle R^F(X,Y)e_\beta, e_\alpha\right\rangle = \\
&= \left\langle \nabla^F_X \nabla^F_Y e_\beta - \nabla^F_Y \nabla^F_X e_\beta - \nabla^F_{[X,Y]} e_\beta, e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^F_X \left(\nabla_Y e_\beta + \alpha^E(e_\beta, Y)\right) - \nabla^F_Y \left(\nabla_X e_\beta + \alpha^E(e_\beta, X)\right) - \left(\nabla_{[X,Y]} e_\beta + \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right)\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^F_X \nabla_Y e_\beta + \nabla^F_X \alpha^E(e_\beta, Y) - \nabla^F_Y \nabla_X e_\beta - \nabla^F_Y \alpha^E(e_\beta, X) - \nabla_{[X,Y]} e_\beta - \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right), e_\alpha \right\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_\beta, e_\alpha\rangle + \left\langle \alpha^E\left(X, \nabla_Y e_\beta\right), e_\alpha\right\rangle - \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, Y\right)} X, e_\alpha \right\rangle + \left\langle \nabla^E_X \alpha^E(e_\beta, Y), e_\alpha\right\rangle \\
&- \langle \nabla_Y \nabla_X e_\beta, e_\alpha\rangle - \left\langle \alpha^E\left(Y, \nabla_X e_\beta\right), e_\alpha\right\rangle + \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, X\right)} Y, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \nabla^E_Y \alpha^E(e_\beta, X), e_\alpha\right\rangle \\
&- \left\langle \nabla_{[X,Y]} e_\beta, e_\alpha \right\rangle - \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, [X,Y]\right), e_\alpha\right\rangle \\
&= \langle R(X,Y)e_\beta, e_\alpha\rangle + \langle \left(\nabla_X \alpha\right)(e_\beta, Y) - \left(\nabla_X \alpha\right)(e_\beta, Y), e_\alpha\rangle - \left\langle A_{\alpha^E\left(e_\beta, Y\right)} X - A_{\alpha^E\left(e_\beta, X\right)} Y, e_\alpha \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Desde que $e_\alpha \in TM$,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle R^F(X,Y)e_\beta, e_\alpha\right\rangle = \\
&= \langle R(X,Y)e_\beta, e_\alpha\rangle - \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, Y\right), \alpha^E\left(e_\alpha, X\right)\right\rangle + \left\langle \alpha^E\left(e_\beta, X\right), \alpha^E\left(e_\alpha, Y\right)\right\rangle \\
&= c_1 \left(\langle \bar\pi_1 Y, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_1 X, e_\alpha\rangle - \langle \bar\pi_1 X, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_1 Y, e_\alpha\rangle\right) \\
&+ \left(\frac{c_2 - \varepsilon}{h^2}\right) \left(\langle \bar\pi_2 Y, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_2 X, e_\alpha\rangle - \langle \bar\pi_2 X, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_2 Y, e_\alpha\rangle\right) \\
&+ \frac{f}{h} \left(\langle \bar\pi_2 X, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_1 Y, e_\alpha\rangle - \langle \bar\pi_1 Y, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_2 X, e_\alpha\rangle - \langle \bar\pi_2 Y, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_1 X, e_\alpha\rangle + \langle \bar\pi_1 X, e_\beta\rangle \langle \bar\pi_2 Y, e_\alpha\rangle\right) \\
&= c_1 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (\omega_\alpha \bar\pi_1 \wedge \omega_\beta \bar\pi_1)(X,Y) + \left(\frac{c_2 - \varepsilon}{h^2}\right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (\omega_\alpha \bar\pi_2 \wedge \omega_\beta \bar\pi_2)(X,Y) \\
&- \frac{f}{h} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (\omega_\alpha \bar\pi_2 \wedge \omega_\beta \bar\pi_1)(X,Y) - \frac{f}{h} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (\omega_\alpha \bar\pi_1 \wedge \omega_\beta \bar\pi_2)(X,Y).
\end{aligned}
$$

Mas, é fácil ver que

$$
\omega_{\alpha 0} \wedge \omega_{0\beta} = -(c_1 \varepsilon_\beta) \omega_\alpha \bar\pi_1 \wedge \omega_\beta \bar\pi_1 \text{ e } \omega_{\alpha (n_1+n_2+1)} \wedge \omega_{(n_1+n_2+1)\beta} = -\frac{c_2 \varepsilon_\beta}{h^2} \omega_\alpha \bar\pi_2 \wedge \omega_\beta \bar\pi_2
$$

e, neste caso, concluímos que

$$
(d\Omega)_{\alpha\beta} + (\Omega \wedge \Omega)_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\varepsilon \varepsilon_\beta}{h^2}\right) (\omega_\alpha \bar\pi_2 \wedge \omega_\beta \bar\pi_2) - \frac{f \varepsilon_\beta}{h} (\omega_\alpha \bar\pi_2 \wedge \omega_\beta \bar\pi_1) - \frac{f \varepsilon_\beta}{h} (\omega_\alpha \bar\pi_1 \wedge \omega_\beta \bar\pi_2).
$$

Para os outros casos, usamos uma conta similar, notando que $\omega_\alpha(TM) = 0$ se $\alpha \in \{n+1, \dots, n+m\}$. Agora, para β igual a zero e $\alpha \notin \{0, n_1 + n_2 + 1\}$, temos

$$
\begin{aligned}
(d\Omega)_{\alpha 0}+(\Omega\wedge\Omega)_{\alpha 0} &= d\omega_{\alpha 0}(X,Y)+\sum_{1\le\gamma\le n_1+n_2}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma 0}(X,Y)\\
&= X\omega_{\alpha 0}(Y)-Y\omega_{\alpha 0}(X)-\omega_{\alpha 0}(\nabla^F_X Y-\nabla^F_Y X)\\
&\quad+\sum_{1\le\gamma\le n_1+n_2}\omega_{\alpha\gamma}(X)\omega_{\gamma 0}(Y)-\omega_{\alpha\gamma}(Y)\omega_{\gamma 0}(X)\\
&= X(\varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,\bar\pi_1 Y\rangle)-Y(\varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,\bar\pi_1 X\rangle)-\varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,\bar\pi_1(\nabla^F_X Y-\nabla^F_Y X)\rangle\\
&\quad-\varepsilon_\alpha c_1\sum_{1\le\gamma\le n_1+n_2}\varepsilon_\gamma\langle e_\gamma,\nabla^F_X e_\alpha\rangle\langle e_\gamma,\bar\pi_1 Y\rangle-\varepsilon_\gamma\langle e_\gamma,\nabla^F_Y e_\alpha\rangle\langle e_\gamma,\bar\pi_1 X\rangle\\
&= \varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,(\nabla^F_X\bar\pi_1)Y\rangle-\varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,(\nabla^F_Y\bar\pi_1)X\rangle\\
&= \varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,\frac{\delta(Y)}{h}\bar\pi_2 X+\frac{\langle\bar\pi_2 X,Y\rangle}{h}(T+N)\rangle\\
&\quad-\varepsilon_\alpha c_1\langle e_\alpha,\frac{\delta(X)}{h}\bar\pi_2 Y+\frac{\langle\bar\pi_2 Y,X\rangle}{h}(T+N)\rangle\\
&= -\frac{c_1}{h}(\delta\wedge\omega_\alpha\bar\pi_2)(X,Y).
\end{aligned}
$$

Uma conta similar fornece que $(d\Omega)_{0\beta}+(\Omega\wedge\Omega)_{0\beta}=\dfrac{c_1}{h}(\delta\wedge\omega_\beta\bar\pi_2)$ para $\beta\notin\{0,n_1+n_2+1\}$. Novamente, para os caso restantes, é fácil ver que os mesmos se anulam, e portanto se encaixam nas expressões citadas. Assim, item (4) está provado. Isso conclui a prova. $\square$

Lema 4.6 $d\Upsilon+\Upsilon\wedge\Upsilon=0$.

Prova. Os itens do Lema 4.5 mostram que o lado direito da equação (7) se anulam, e isso finaliza a prova. $\square$

Para o que segue, faça $N=m+n$, $\lambda=p+q+\dfrac{|c_1-1|}{2}+\dfrac{|c_2-1|}{2}$ e defina

$$\mathcal{S}=\{Z\in\mathcal{M}_{N+2}(\mathbb{R});Z^tGZ=G\},$$

onde $G_{\alpha\beta}=\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}$ e

$$\tilde{\mathcal{S}}=\{Z\in\mathcal{S}|\sum_{\gamma\in\tilde H}\varepsilon_\gamma Z_{\gamma\alpha}Z_{\gamma\beta}=\langle e_\alpha,\bar\pi_1 e_\beta\rangle \text{ e } \sum_{\gamma\in\tilde V}\varepsilon_\gamma Z_{\gamma\alpha}Z_{\gamma\beta}=\langle e_\alpha,\bar\pi_2 e_\beta\rangle\}.$$

Também defina, para cada μ, as aplicações $s_\mu:\mathcal{S}\to\mathbb{S}_\mu\left(\mathbb{E}^{N+2}_\lambda\right)=\{X\in\mathbb{E}^{N+2}_\lambda;\langle X,X\rangle=\varepsilon_\mu\}$ dadas por

$$Z\mapsto(Z_{\mu 0},\ldots,Z_{\mu N+1})^t.$$

Proposição 4.2 *Cada aplicação s_μ definida acima é uma submersão.*

Prova. Análogo a Proposição 3.4. □

Agora, para a proposição que segue, lembre que como h está definida originalmente em M_1, podemos tomar (localmente) uma extensão sua $\tilde{h}$ definida em um aberto do $\mathbb{E}_1$, mas que $\langle \mathrm{grad}(\tilde{h}), p\rangle_p = 0$, donde, sobre M_1 vale que $\mathrm{grad}(\tilde{h}) = \mathrm{grad}(h)$. Assim, faz sentido tomarmos $\partial_\mu(\tilde{h})$ e por abuso de notação escrever $\partial_\mu(h)$ também. Logo, similar a Proposição 4.3, temos a

Proposição 4.3 *Seja* $(M, \langle , \rangle)$ *uma variedade semi-Riemanniana satisfazendo as equações de estrutura. Defina* $\mathcal{Z}(x) = \{Z \in \tilde{\mathcal{S}} | \sum_\mu \varepsilon_\mu T_\mu(x) Z_{\gamma\mu} = \partial_\gamma h(x)$, *se* $\gamma \in \tilde{H}$, *ou* $\sum_\mu \varepsilon_\mu T_\mu(x) Z_{\gamma\mu} = 0$, *se* $\gamma \in \tilde{V}\}$. *Então para cada* $x_0 \in M$ *e* $B_0 \in \mathcal{Z}(x_0)$, *existe uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* x_0 *em* M *e uma única aplicação* $B : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$, *tal que*

$$B^{-1}dB = \Omega - \boldsymbol{X}, \;\; B(x_0) = B_0,$$

e $B(x) \in \mathcal{Z}(x)$, *para todo* $x \in \mathcal{U}$.

4.5 Prova do teorema principal

Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança em M de um ponto dado $x_0 \in M$ e $B : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$ a aplicação encontrada na Proposição 4.3. Para fins de notação, seja $\tilde{V} = \{j_0 < \cdots < j_{n_2}\}$ os índices verticais. Defina $g : \mathcal{U} \to \mathbb{E}_1 \times_h \mathbb{E}_2$ por

$$\begin{aligned} g_0 &= \pi_I, \\ g_1 &= \varepsilon_{j_0} B_{j_0(N+1)}, \\ \vdots & \quad \vdots \\ g_{n_2+1} &= \varepsilon_{j_{n_2}} B_{j_{n_2}(N+1)}, \end{aligned}$$

Um cálculo direto nos dá que Im $g \subset \bar{M}$. Para ver que g é uma imersão isométrica, calculamos

$$\begin{aligned}
dg(e_i) &= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma \langle \pi_I(e_i), E_\gamma\rangle E_\gamma + \sum_{\gamma\in\tilde{V}} dg_\gamma(e_i)E_\gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma \langle \pi_I(e_i), E_\gamma\rangle E_\gamma + \sum_{\gamma\in\tilde{V}} dg_\gamma(e_i)E_\gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma \langle \pi_I(e_i), E_\gamma\rangle E_\gamma + \sum_{l} \varepsilon_{j_l} dB_{j_l(N+1)}(e_i)E_{j_l} \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} E_\gamma + \sum_{l} \varepsilon_{j_l} \left(B\Omega(e_i) - B\mathbf{X}(e_i)\right)_{j_l(N+1)} E_{j_l} \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} E_\gamma + \left(\sum_{l,\theta} \varepsilon_{j_l} B_{j_l\theta}\omega_{\theta(N+1)}(e_i)E_{j_l}\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} E_\gamma + \left(\sum_{l,\theta} \varepsilon_{j_l} B_{j_l\theta}c_2\varepsilon_\theta\langle e_\theta, \bar{\pi}_2 e_i\rangle \frac{1}{h} E_{j_l}\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} E_\gamma + \left(\sum_{\substack{\gamma,\mu\in\tilde{V}\\ \theta}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma\theta}\varepsilon_\theta\varepsilon_\mu B_{\mu\theta}B_{\mu i}\frac{c_2}{h} E_\gamma\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} E_\gamma + \left(\sum_{\gamma,\mu\in\tilde{V}} \varepsilon_\gamma(\varepsilon_\gamma\delta_{\gamma\mu})\varepsilon_\mu B_{\mu i}\frac{c_2}{h} E_\gamma\right) \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}\overline{E}_\gamma.
\end{aligned}$$

Desde que $B \in \mathcal{S}$, temos

$$\langle dg(e_i), dg(e_j)\rangle = \left\langle \sum_\alpha \varepsilon_\gamma B_{\alpha i}\overline{E}_\alpha, \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma j}\overline{E}_\gamma \right\rangle = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}B_{\gamma j} = \varepsilon_i\delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle,$$

que implica que g é uma imersão isométrica. Agora, seja $\tilde{E}_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha\gamma}\overline{E}_\alpha$. Temos que $\tilde{E}_i = dg(e_i)$ é tangente à $g(\mathcal{U})$ e $\tilde{E}_u$ é normal à $g(\mathcal{U})$. De fato, para cada i, temos

$$\left\langle \tilde{E}_u, \tilde{E}_i \right\rangle = \left\langle \sum_\alpha \varepsilon_\alpha B_{\alpha u}\overline{E}_\alpha, \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma i}\overline{E}_\gamma \right\rangle = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma B_{\gamma u}B_{\gamma i} = \varepsilon_i\delta_{ui} = \langle e_u, e_i\rangle = 0,$$

desde que $i \neq u$. Então, $Tg(\mathcal{U})^\perp = \text{span } \{\tilde{E}_u\}$. Seja Φ uma extensão da imersão g definida como segue:

$$\begin{aligned}\Phi : T\mathcal{U} \oplus \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \oplus E &\rightarrow Tg(\mathcal{U}) \oplus Tg(\mathcal{U})^{\perp} \\ \left(p, \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} e_{\gamma}\right) &\rightarrow \left(g(p), \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} \tilde{E}_{\gamma}\right),\end{aligned}$$

onde $\sigma : E \rightarrow M$ é a projeção. É fácil ver que Φ é um isomofismo entre os fibrados $T\mathcal{U} \oplus \sigma^{-1}(\mathcal{U})$ e $Tg(\mathcal{U}) \oplus Tg(\mathcal{U})^{\perp}$. Além do mais, a métrica induzida por Φ também coincide com a métrica do fibrado dado desde que $\Phi(e_{\gamma}) = \tilde{E}_{\gamma}$. Se $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$, então

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^{\perp}_{\Phi(e_i)} \Phi(e_u), \Phi(e_v) \right\rangle &= \left\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_i} \tilde{E}_u, \tilde{E}_v \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\nabla}_{\sum_{\rho} \varepsilon_{\rho} B_{\rho i} \overline{E}_{\rho}} \sum_{\theta} \varepsilon_{\theta} B_{\theta u} \overline{E}_{\theta}, \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} B_{\lambda v} \overline{E}_{\lambda} \right\rangle \\ &= \sum_{\theta} \varepsilon_{\theta} B_{\theta v} dB_{\theta u}(e_i) + \sum_{\theta,\lambda,\rho} \varepsilon_{\theta} \varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\rho} B_{\rho i} B_{\lambda v} B_{\theta u} \left\langle \tilde{\nabla}_{\overline{E}_{\rho}} \overline{E}_{\theta}, \overline{E}_{\lambda} \right\rangle \\ &= \varepsilon_v (B^{-1} dB(e_i))_{vu} + \sum_{\theta,\lambda,\rho} \varepsilon_{\theta} \varepsilon_{\lambda} \varepsilon_{\rho} B_{\rho i} B_{\lambda v} B_{\theta u} \left\langle \tilde{\nabla}_{\overline{E}_{\rho}} \overline{E}_{\theta}, \overline{E}_{\lambda} \right\rangle \\ &= \varepsilon_v \omega_{vu}(e_i) \\ &= \left\langle e_v, \nabla^{E}_{e_i} e_u \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi(e_v), \Phi(\nabla^{E}_{e_i} e_u) \right\rangle.\end{aligned}$$

Se chamarmos, por abuso de notação, o isomorfismo $\Phi|_{\sigma^{-1}(\mathcal{U})} : \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \subset E \rightarrow Tg(\mathcal{U})^{\perp}$ de Φ também, então concluímos que

$$\Phi \nabla^{E} = \nabla^{\perp} \Phi.$$

Um cálculo análogo dá que $\alpha_g = \Phi \circ \alpha^{E} \circ dg^{-1}$, onde α_g é a segunda forma fundamental de g. Também note que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(h) &= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \left\langle \tilde{E}_\gamma, \operatorname{grad}(h) \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \left\langle \sum_{\theta} \varepsilon_\theta B_{\theta\gamma} \overline{E}_\theta, \operatorname{grad}(h) \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \left\langle \sum_{\theta \in \tilde{H}} \varepsilon_\theta B_{\theta\gamma} \overline{E}_\theta, \operatorname{grad}(h) \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \Big(\sum_{\theta \in \tilde{H}} \varepsilon_\theta B_{\theta\gamma} \partial_\theta(h) \Big) \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma T_\gamma \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \langle e_\gamma, T + N \rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \langle \Phi(e_\gamma), \Phi(T + N) \rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \left\langle \tilde{E}_\gamma, \Phi(T + N) \right\rangle \tilde{E}_\gamma \\
&= \Phi(T) + \Phi(N).
\end{aligned}
$$

Desde que $\Phi(T) = dg(T)$, isso finaliza a prova do item 1 do Teorema 4.1. Por fim, para o item 2, calculemos $\pi_1(dg(e_i))$, já que os outros casos são calculados de maneira análoga.

$$
\begin{aligned}
\pi_1(dg(e_i)) &= \pi_1 \Big(\sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} \bar{E}_\gamma \Big) \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} \pi_1(\bar{E}_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma \in \tilde{H}} \varepsilon_\gamma B_{\gamma i} \bar{E}_\gamma.
\end{aligned}
$$

Po outro lado,

$$
\begin{aligned}
dg(R_1e_i) + \Phi(S_1e_i) &= \Phi(\bar{\pi}_1 e_i) \\
&= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma \langle \bar{\pi}_1 e_i, e_\gamma \rangle \Phi(e_\gamma) \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\tilde{H} \\ \gamma}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\theta B_{\theta i} B_{\theta\gamma} \Phi(e_\gamma) \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\tilde{H} \\ \gamma,\mu}} \varepsilon_\gamma \varepsilon_\theta B_{\theta i} B_{\theta\gamma} \varepsilon_\mu B_{\mu\gamma} \bar{E}_\mu \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\tilde{H} \\ \mu}} \varepsilon_\theta \varepsilon_\mu B_{\theta i} \Big(\sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma B_{\theta\gamma} B_{\mu\gamma} \Big) \bar{E}_\mu \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\tilde{H} \\ \mu}} \varepsilon_\theta \varepsilon_\mu B_{\theta i} (\varepsilon_\theta \delta_{\theta\mu}) \bar{E}_\mu \\
&= \sum_{\substack{\theta\in\tilde{H} \\ \mu}} \varepsilon_\theta \varepsilon_\mu B_{\theta i} (\varepsilon_\theta \delta_{\theta\mu}) \bar{E}_\mu \\
&= \sum_{\theta\in\tilde{H}} \varepsilon_\theta B_{\theta i} \bar{E}_\theta .
\end{aligned}
$$

Logo, $dg(R_1e_i) + \Phi(S_1e_i) = \pi_1(dg(e_i))$, o que finaliza a prova do teorema 4.1.

$\square$

5 CONCLUSÃO

Há mais de um século que teoremas fundamentais de subvariedades são objetos de estudo da Geometria Diferencial. Com o surgimento do conceito de produtos warped na metade do século passado, que generalizam produtos Cartesianos, nada mais natural que resultados acerca de teoremas fundamentais de subvariedades destes novos objetos começassem a aparecer, principalmente nos últimos dez anos. Neste tocante, o presente trabalho não só acrescentou mais um resultado deste tipo na importante classe de produtos warped $\varepsilon I \times_a \mathbb{M}^N_\lambda(c)$, como também abriu caminho para resultados semelhantes no caso $\mathbb{M}^{N_1}_{k_1}(c_1) \times_h \mathbb{M}^{N_2}_{k_2}(c_2)$, mostrando assim que tal área ainda tem muito o que se explorar.

REFERÊNCIAS

BISHOP, R. L.; O'NEILL, B. **Manifolds of negative curvature**. Trans. Amer. Math. Soc, v. 145, p. 1–49, 1969.

BONNET, Ossian. **Mémorie sur la Théorie des Surfaces Applicables Sur Une Surface Donnée**. Journal de l'École polytechnique, v. 42, p. 31–151, 1867.

CHEN, Bang-Yen. **Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds**. 2017.

DANIEL, Benoît. **Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds**. arXiv preprint math/0503500, 2005.

DANIEL, Benoît. **Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces**. Transactions of the American Mathematical Society, v. 361, n. 12, p. 6255–6282, 2009.

IVEY, Thomas Andrew; LANDSBERG, Joseph M. **Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems**. v. 61, 2003.

KOWALCZYK, Daniel. **Isometric immersions into products of space forms**. Geometriae Dedicata, v. 151, n. 1, p. 1–8, 2011.

KRUCHKOVICH, GI. **On semireducible Riemannian spaces**. Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences, 1957, v. 115, p. 862–865.

LAWN, Marie-Amélie; ORTEGA, Miguel. **A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-Riemannian warped products**. Journal of Geometry and Physics, v. 90, p. 55–70, 2015.

LAWN, Marie-Amélie; ROTH, Julien. **A fundamental theorem for submanifolds of multiproducts of real space forms**. Advances in Geometry, v. 17, n. 3, p. 323–337, 2017.

LI, Xing Xiao; ZHANG, Tian Qun. **Isometric immersions of higher codimension into the product $\mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n+p-k}$**. Acta Mathematica Sinica, English Series, v. 30, n. 12, p. 2146–2160, 2014.

LIRA, J. H.; MELO, M. F. **Existence of isometric immersions into nilpotent Lie groups**. Geometriae Dedicata, v. 157, n. 1, p. 339–365, 2012.

LIRA, J.H.; TOJEIRO, Ruy; VITÓRIO, F. **A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms**. Archiv der Mathematik, v. 95, n. 5, p.

469–479, 2010.

O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. v. 103, 1983.

REI FILHO, Carlos do; VITÓRIO, Feliciano. **A Bonnet Theorem for Submanifolds into Rotational Hypersurfaces**. Results in Mathematics, v. 71, n. 1-2, p. 283–294, 2017.

RIBEIRO, C. A. D.; MELO, M. F. **fundamental theorem for submanifolds in semi-Riemannian warped products**. Journal of Geometry and Physics, 2019.

ROTH, Julien. **Isometric immersions into Lorentzian products**. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, v. 8, n. 06, p. 1269–1290, 2011.

TENEBLAT, Keti. **On isometric immersions of riemannian manifolds**. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, v. 2, n. 2, p. 23–36, 1971.