UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PERON MARQUES FILHO

OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

FORTALEZA

2019

PERON MARQUES FILHO

OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M32o Marques Filho, Peron.
Operador maximal de Hardy-Littlewood em espaços de Sobolev / Peron Marques Filho. – 2019.
44 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.

1. Espaços de Sobolev. 2. Operador maximal de Hardy-Littlewood. 3. Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener. I. Título.

CDD 510

PERON MARQUES FILHO

OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovoda em: 07 / 02 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes (Suplente)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Raimundo Alves Leitão Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais, Selma e Peron, e a minha tia Sâmia (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo seu infinito amor e misericórdia.
À Nossa Senhora Aparecida, pelo seu auxílio maternal.
À minha família, em especial minha mãe Selma, meu pai Peron, meu irmão Seulon e meus padrinhos Silene e Saulo por todo o apoio e confiança.
A minha namorada Jéssika, pelo apoio.
Ao Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira, pela excelente orientação.
Aos professores participantes da banca examinadora José Ederson Melo Braga e Raimundo Alves Leitão Júnior pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.
A todos os professores do departamento de Matemática da UFC, em especial, Alberto Maia, Fabio Montenegro, Cleon Barroso e Ernani Ribeiro pela sua colaboração na minha formação.
Aos colegas da turma de mestrado, em especial, Erivamberto, Alan, Junior, João Paulo, Rodrigo, Cristina, André, Selene, Tiago, Silvio e Ícaro pelos vários ensinamentos e momentos que compartilhamos.
A Andrea pela paciência e excelência nas soluções de questões burocráticas.
Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"As chagas de Jesus Cristo ferem os corações mais duros e aquecem as almas mais frias."(São Boaventura)

RESUMO

Neste trabalho estudamos a extensão do teorema de Hardy-Littlewood-Wiener da análise harmônica para espaços de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ quando $p > 1$. Este Teorema é devido a Juha Kinnunen.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev. Operador maximal de Hardy-Littlewood. Teorema de Hardy-Litlewood-Wiener.

ABSTRACT

In this work we study the extension of the Hardy-Littlewood-Wiener theorem of harmonic analysis for Sobolev spaces $W^{1,p}(R^n)$ when $p > 1$. This Theorem is due to Juha Kinnunen.

Keywords: Sobolev spaces. Hardy-Littlewood maximal operator. The Hardy-Littlewood-Wiener theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos a extensão do teorema de Hardy-Littlewood-Wiener da análise harmônica para espaços de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ quando $p > 1$. Este Teorema é devido a Juha Kinnunen. Porém, antes de provarmos este resultado, vamos elencar todas as ferramentas necessárias ao nosso objetivo e demonstrar alguns teoremas fundamentais da teoria de espaços de Sobolev e dos espaços L^p que serão utilizados neste trabalho. Nas preliminares definiremos a função maximal de Hardy-Littlewood de uma função f, localmente integrável em R^n, e provaremos algumas de suas propriedades básicas. E por fim, vamos enunciar e demonstrar o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em $L^p(R^n)$ fazendo uso do Lema de recobrimento de Vitali e do resultado conhecido como The layer cake representation.

No capítulo 3 definiremos a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, onde demonstraremos algumas de suas propriedades básicas. Além disso, provaremos que o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ munido de uma certa norma é um espaço de Banach. Prosseguiremos mostrado a definição do mollifier canônico (ou standard mollifier), onde provaremos algumas propriedades importantes. Ainda no capítulo 3 provaremos o Teorema de Meyer-Serrin e enunciaremos, como aplicação deste teorema, a regra da cadeia, que utilizaremos para provar a propriedade de truncação. Também faremos uma breve revisão sobre conceitos e teoremas de análise funcional que serão necessários, como a convergência fraca e o Lema de Mazur, e concluiremos provando a propriedade de compacidade fraca do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ quando $1 < p < \infty$.

No quarto e último capítulo provaremos que se uma função u definida em R^n é lipschitziana então sua função maximal $\mathcal{M}u$ também será. E ainda mostraremos uma caracterização do espaço de Sobolev $W^{1,\infty}(R^n)$ em relação ao espaço de funções Lipschitzianas limitadas $C^{0,1}(R^n)$, que nos possibilitará provar o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em $W^{1,p}(R^n)$ quando $1 < p \leq \infty$.

2 PRELIMINARES

Inicialmente vamos definir a função maximal de Hardy-Littlewood de uma função f. Além disso, demonstraremos algumas de suas principais propriedades, e concluiremos o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener para $L^p(R^n)$, ou seja, que o operador maximal de Hardy-Litlewood é limitado no espaço $L^p(R^n)$ quando $1 < p \leq \infty$. Para o que segue, iremos considerar em $L^p(R^n)$ a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$. E para $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in R^n} |f(x)| = \inf\{N; |f(x)| \leq N \, para \; q.t.p \; x \in R^n\}.$$

2.1 A função maximal de Hardy-Littlewood

Inicialmente, vamos considerar uma função $f : R^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ localmente integrável em R^n, isto é, $f \in L^1_{loc}(R^n)$. A função maximal de Hardy-Littlewood de f é a função $\mathcal{M}f : R^n \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

onde o supremo é tomado para qualquer $r > 0$ e $|B(x,r)|$ denota a medida de Lebesgue de $B(x,r)$. Agora, vamos provar o seguinte resultado básico:

Teorema 2.1 *Sejam f e g localmente integráveis em R^n e c um número real, então*

$$(i)\mathcal{M}(f+g)(x) \leq \mathcal{M}f(x) + \mathcal{M}g(x)$$

e

$$(ii)\mathcal{M}(cf)(x) = |c|\mathcal{M}f(x)$$

para todo x em R^n.

Prova: Com efeito, para qualquer x em R^n, teremos

$$\mathcal{M}(f+g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |(f+g)(y)| dy$$

Ora, pela desigualdade triangular teremos que $|f(y)+g(y)| \leq |f(y)|+|g(y)|$ em $B(x,r)$. Portanto,

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)+g(y)|dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |g(y)|dy.$$

Sabemos que, para todo $r>0$

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy + \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |g(y)|dy \leq \mathcal{M}f(x)+\mathcal{M}g(x).$$

Então,

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |(f+g)(y)|dy \leq \mathcal{M}f(x)+\mathcal{M}g(x)$$

para qualquer $r>0$. Logo,

$$\mathcal{M}(f+g)(x) \leq \mathcal{M}f(x)+\mathcal{M}g(x)$$

para todo $x \in R^n$. Isto concluiu a demonstração de (i). Para (ii), note que $|cf| = |c||f|$. Logo,

$$\mathcal{M}(cf)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |cf(y)|dy = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}|c|\int_{B(x,r)} |f(y)|dy = *.$$

Então,

$$* = |c|\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy$$

daí,

$$\mathcal{M}(cf)(x) = |c|\mathcal{M}f(x)$$

para todo c real. ■

Definição 2.1 *$f : E \longrightarrow [-\infty,\infty]$ é semi-contínua inferiormente em E se, e somente se,$\{x \in E; f(x) > \alpha\}$ é aberto em E para todo α em R.*

Lema 2.1 *Se E é mensurável e $f : E \longrightarrow [-\infty,\infty]$ é (s.c.i) em E, então f é mensurável.*
Prova: Sabendo que f é (s.c.i) em E, então o conjunto $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$ é aberto em E para todo α em R. Portanto, $\{x \in E; f(x) > \alpha\} = E \cap B$, onde B é um aberto de R^n. Como E é mensurável, teremos que $E \cap B$ é mensurável. Logo, $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$ é mensurável para todo α em R, ou seja, f é mensurável. ■

Teorema 2.2 *$\mathcal{M}f : R^n \longrightarrow [0,\infty]$ é semi-contínua inferiormente.*
Prova: Inicialmente, definamos o conjunto $E_\alpha = \{x \in R^n; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}$, onde α é um

número real positivo. Observe que para todo $x \in E_\alpha$ existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \alpha.$$

Agora, note que

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \lim_{\substack{r' \to r \\ r' > r}} \frac{1}{|B(x,r')|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

o que nos permite dizer que existe $r' > r$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r')|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \alpha.$$

Se $|x - x'| < r' - r$, então $B(x,r) \subset B(x',r')$. Com efeito, seja $y \in B(x,r)$, daí $|y - x'| = |y - x + x - x'| \leq |y - x| + |x - x'| < r + (r' - r) = r'$. Logo, $B(x,r) \subset B(x',r')$. Portanto,

$$\alpha < \frac{1}{|B(x,r')|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq \frac{1}{|B(x,r')|}\int_{B(x',r')} |f(y)|dy = \frac{1}{|B(x',r')|}\int_{B(x',r')} |f(y)|dy \leq \mathcal{M}f(x')$$

se $|x - x'| < r' - r$. Logo, $B(x, r' - r) \subset E_\alpha$, daí E_α é aberto. Portanto, $\mathcal{M}f$ é semi-contínua inferiormente. Observe que o **lema 2.1** nos permite concluir que $\mathcal{M}f$ é mensurável. ■

2.2 *Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em* $L^p(R^n)$

Pretendemos, nessa seção, provar que $\mathcal{M}f$ é limitado no espaço $L^p(R^n)$ quando $1 < p \leq \infty$, onde $\|\mathcal{M}f\|_p \leq A_p\|f\|_p$, tal que A_p é uma constante que depende apenas de p e da dimensão n. Para isso faremos uso do Lema de Recobrimento de Vitali, que enunciaremos a seguir e de outro resultado, conhecido como "The layer cake representation".

Lema 2.2 (Vitali) *Seja E um subconjunto mensurável de R^n tal que a família de bolas $\{B_j\}$, com diâmetro limitado, é uma cobertura para E. Então, podemos extrair de $\{B_j\}$ uma sequência disjunta $B_1, ..., B_k, ...$(finita ou infinita) tal que*

$$\sum_k |B_k| \geq C|E|$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas da dimensão n ($C = 5^{-n}$).

Prova: Começamos a prova do lema descrevendo a escolha de $B_1, ..., B_k, ...$ .Tomaremos B_1 de modo que seja essencialmente tão grande quanto possível, isto é para que $diam(B_1) \geq \frac{1}{2}\sup_j diam(B_j)$, onde $diam(B)$ denota o diâmetro da bola B. Claramente a escolha de um B_1 satisfazendo essas condições, bem como a posterior escolha de um outro B_k não é única. Porém, esta "não-unucidade" não nos afetará. Vamos supor que $B_1, ..., B_k$

já foram escolhidos. Agora, tomamos B_{k+1} de $\{B_j\}$ tal que B_{k+1} é disjunto de $B_1, ..., B_k$. Novamente, escolhemos uma bola que seja essencialmente tão grande quanto possível, isto é, nós tomamos B_{k+1} para ser disjunto de $B_1, ..., B_k$ e $diam(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\sup_j diam(B_j)$ onde B_j é disjunto de $B_1, ..., B_k$. Dessa forma, obtemos a sequência de bolas $B_1, ..., B_k, ...$Em princípio, esta sequência poderia ser finita e terminar em B_k; este seria o caso se não houvessem bolas em $\{B_j\}$ disjuntas de $B_1, ..., B_k$ .Agora, dois casos se apresentam, dependendo se $\sum_k |B_k| = \infty$ ou $\sum_k |B_k| < \infty$. No primeiro caso, chegamos a nossa conclusão se $|E|$ é infinito ou finito. Portanto, vamos considerar o caso em que $\sum_k |B_k| < \infty$. Para este propósito denotamos por B_k^* a bola tendo o mesmo centro que B_k, mas cujo diâmetro é cinco vezes maior. Afirmamos que

$$\bigcup_k B_k^* \supset E$$

Para provar a afirmação, devemos mostrar que $\bigcup_k B_k^* \supset B_j$ para qualquer B_j fixo na família considerada, que cobre E. Certamente podemos assumir que o nosso B_j fixo não faz parte da sequência $B_1, ..., B_k, ...$ Caso contrário não há o que provar. Desde de que $\sum_k |B_k| < \infty$, então $diam(B_k) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$, e assim tomamos o primeiro k em que vale $diam(B_{k+1}) < \frac{1}{2}diam(B_j)$. Então, a bola B_j deve intersectar uma das k bolas anteriores $B_1, ..., B_k$, ou deveria ter sido escolhida como a $(k+1)^{th}$ bola em vez de B_{k+1}, já que seu diâmetro é mais que o dobro do diâmetro de B_{k+1}. Portanto, B_j intersecta B_{j_0} para algum j_0 em $[1, k]$ e vale que $\frac{1}{2}diam(B_j) \leq diam(B_{j_0})$. De uma consideração geométrica óbvia é então, evidente, que B_j está contido na bola que tem o mesmo centro que B_{j_0}, mas cinco vezes o diâmetro de B_{j_0}, ou seja, $B_j \subset B_{j_0}^*$. Assim, provamos a afirmação e

$$|E| \leq \sum_k |B_k^*| = 5^n \sum_k |B_k|,$$

o que prova o lema. ■

Lema 2.3 (The layer cake representation) *Seja μ uma medida, $E \subset R^n$ um conjunto $\mu-$mensurável e f uma função $\mu-$mensurável, então*

$$\int_E |f|^p = p\int_o^\infty \alpha^{p-1} w(\alpha) d\alpha$$

tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ e w é a função distribuição de f, isto é, $w(\alpha) = \mu(\{x; |f(x)| > \alpha\})$.
Prova: Ver Folland, pág. 198. ■

Teorema 2.3 *Seja f uma função definida em R^n, então:*

1. *Se $f \in L^p(R^n)$ tal que $1 \leq p \leq \infty$. Então, a função $\mathcal{M}f$ é finita em quase todo ponto.*

2. Se $f \in L^1(R^n)$, então para cada $\alpha > 0$

$$|\{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{R^n} |f| dx,$$

onde A é uma constante que depende apenas da dimensão n.

3. Se $f \in L^p(R^n)$ tal que $1 < p \leq \infty$, então $\mathcal{M}f \in L^p(R^n)$ e

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

onde A_p depende apenas de p e da dimensão n. [Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener]

Prova: Considerando a definição de $\mathcal{M}f$ e tomando $E_\alpha = \{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}$, teremos que para cada $x \in E_\alpha$, existe uma bola de centro x, que denotaremos por B_x, tal que

$$(I) \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha |B_x|.$$

Logo,$|B_x| < \dfrac{1}{\alpha} \|f\|_1$ para cada x. Por outro lado, quando x varia no conjunto E_α, a união das bolas B_x correspondentes cobre E_α. Portanto, pelo **Lema 2.2**, podemos extrair uma sequência de bolas, as quais designaremos por $\{B_k\}$, onde tais bolas são mutuamente disjuntas e têm a seguinte propriedade

$$(II) \sum_{k=0}^{\infty} |B_k| \geq C |E_\alpha|$$

onde $C = 5^{-n}$. Aplicando (I) e depois (II) para cada uma das bolas mutuamente disjuntas, obtemos

$$\int_{\bigcup B_k} |f(y)| dy > \alpha \sum_k |B_k| \geq \alpha C |E_\alpha|.$$

Mas, como o primeiro membro da inequação acima é majorado por $\|f\|_1$ e fazendo $A = \dfrac{1}{C}$, teremos o item 2. do nosso teorema, isto é,

$$|\{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{R^n} |f|$$

para cada $\alpha > 0$, tal que $A = 5^n$. Além disso, também provamos o item 1. para $p = 1$. Agora, provaremos simultâneamente, o restante do item 1., e o item 3.. Para o item 3. no caso que que $p = \infty$, observe que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.t.p em R^n então,

$$\int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \int_{B(x,r)} \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty |B(x,r)|,$$

daí
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy \leq \|f\|_{\infty}.$$
Portanto, $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_{\infty}$ q.t.p em R^n, daí $\mathcal{M}f \in L^{\infty}(R^n)$. Além disso, como $\|\mathcal{M}f\|_{\infty}$ é a menor constante tal que $|\mathcal{M}f(x)| \leq \|\mathcal{M}f\|_{\infty}$ q.t.p em R^n, então $\|\mathcal{M}f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$, ou seja, $\|\mathcal{M}f\|_{\infty} \leq A_{\infty}\|f\|_{\infty}$, onde $A_{\infty} = 1$. Agora, suponha que $1 < p < \infty$ e defina f_1 para ser $f_1(x) = f(x)$ se $|f(x)| > \frac{\alpha}{2}$ e $f_1(x) = 0$ caso contrário. Logo, nós temos que $|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$ e $\mathcal{M}f(x) \leq \mathcal{M}f_1(x) + \frac{\alpha}{2}$, daí

$$\{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\} \subset \{x; \mathcal{M}f_1(x) > \frac{\alpha}{2}\}$$

e, finalmente
$$|E_{\alpha}| = |\{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}| \leq \frac{2A}{\alpha}\|f_1\|_1.$$
Ou seja,
$$(III)|E_{\alpha}| = |\{x; \mathcal{M}f(x) > \alpha\}| \leq \frac{2A}{\alpha}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2}}|f|dx.$$
A desigualdade acima é obtida aplicando-se a conclusão do item 2. desde que saibamos, que $f_1 \in L^1$ sempre que $f \in L^p$. Agora, denote por λ a função distribuição de $\mathcal{M}f$. Logo, usando o **Lema 2.3**, teremos que

$$\int_{R^n}(\mathcal{M}f)^p dx = p\int_0^{\infty}\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha.$$

Em particular, por (III)

$$\|\mathcal{M}f\|_p^p = p\int_0^{\infty}\alpha^{p-1}|E_{\alpha}|d\alpha \leq p\int_0^{\infty}\alpha^{p-1}\left(\frac{2A}{\alpha}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2}}|f(x)|dx\right)d\alpha.$$

A integral dupla é avaliada trocando as ordens de integração e integrando primeiro com respeito a α, daí, a integral interior é

$$\int_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-2}d\alpha = \left(\frac{1}{p-1}\right)|2f(x)|^{p-1}$$

desde que p seja > 1. Portanto, a integral dupla vale
$$\frac{2Ap}{p-1}\int_{R^n}|f||2f|^{p-1}dx = (A_p)^p\int_{R^n}|f|^p dx,$$

o que conclui o item 3., onde $A_p = 2\left(\frac{5^n p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$; $1 < p < \infty$. E assim também obtemos o item 1. ■

3 ESPAÇO DE SOBOLEV

Nesta seção desenvolveremos o início da teoria dos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, onde Ω é um aberto de R^n, e apresentaremos algumas de suas propriedades que nos serão úteis ao longo desse trabalho, tais como a reflexividade quando $1 < p < \infty$, e a compacidade fraca.

3.1 Derivadas fracas

A seguir definiremos a α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, onde α é um multi-índice, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Além disso, para $u : U \longrightarrow R$ (U é aberto de R^n) definimos a α-ésima derivada parcial de u por

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Definição 3.1 *Dado um aberto $\Omega \subset R^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções de classe C^∞, em Ω, de suporte compacto.

Lema 3.1 *Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_0^0(\Omega).$$

Então, $u = 0$ q.t.p em Ω.
Prova: Ver H.Brézis, Analise Functionelle, pág. 61.

Lema 3.2 *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula.*
prova: Suponha que existam v e w tais que ambas sejam derivadas fracas de u. Então,

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo,

$$(-1)^{|\alpha|}\left(\int_\Omega (v(x)\varphi(x) - w(x)\varphi(x))dx\right) = 0,$$

daí,

$$\int_\Omega (v(x) - w(x))\varphi(x)dx = 0.$$

Como $v - w \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega (v-w)(x)\varphi(x)dx = 0\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então o **Lema 3.1** nos diz que $v = w$ $q.t.p$ em Ω. ■

Observação: Note que pelo Lema acima podemos impor uma notação para a α-ésima derivada fraca de u. Então, vamos considerar $D^\alpha u = v$. Escolhemos esta notação, pois quando u possui derivada parcial no sentido clássico, ambas são iguais.

Definição 3.2 *Seja Ω um aberto contido em R^n e $1 \leq p \leq \infty$, onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev como $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall|\alpha| \leq k\}$.*

Observação: Note que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Teorema 3.1 *Se u,v pertencem a $W^{k,p}(\Omega)$, então*

$$D^\alpha(\lambda u + \beta v) = \lambda D^\alpha u + \beta D^\alpha(v)$$

para todo α e β pertencentes a $\mathbb{R}$.

Prova: Como u e v pertencem a $W^{k,p}(\Omega)$, existem as derivadas fracas $D^\alpha u$ e $D^\alpha v\ \forall|\alpha| \leq k$ em $L^p(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega (\lambda u(x) + \beta v(x))D^\alpha\varphi(x)dx = \lambda\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx + \beta\int_\Omega v(x)D^\alpha\varphi(x)dx =$$

$$= \lambda(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)dx + \beta(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha v(x)\varphi(x)dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\lambda D^\alpha u(x) + \beta D^\alpha v(x))\varphi(x)dx$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e para todo α e β reais. Portanto, vamos ter que

$$D^\alpha(\lambda u + \beta v) = \lambda D^\alpha u + \beta D^\alpha v$$

para todo λ e β reais. ■

Observação: O teorema acima nos permite dizer que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Teorema 3.2 *Seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *tal que* $|\alpha| \leq k$ *então* $D^\eta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\eta u)$ *para todo multi-índice* α *e* η *tais que* $|\alpha| + |\eta| \leq k$.

Prova: Considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então, $D^\eta\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo,

$$(-1)^{|\eta|} \int_\Omega D^\eta(D^\alpha u)\varphi dx = \int_\Omega D^\alpha u D^\eta \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^{\alpha+\eta}\varphi dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\eta|} \int_\Omega D^{\alpha+\eta} u \varphi dx$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Note que,

$$|\alpha| + |\alpha + \eta| = 2(\alpha_1 + ... + \alpha_n) + \eta_1 + ... + \eta_n = 2|\alpha| + |\eta|.$$

Como $2|\alpha|$ é par, a estimativa acima, juntamente com o **Lema 3.1** e o **Lema 3.2** nos fornecem $D^\eta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\eta u)$. ■

Teorema 3.3 (Fórmula de Leibniz) *Seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *tal que* $|\alpha| \leq k$.*Se* $\mu \in C_0^\infty(\Omega)$, *então* $\mu u \in W^{k,p}(\Omega)$ *e*

$$D^\alpha(\mu u) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \mu D^{\alpha-\gamma} u$$

onde,

$$\binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}; \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$$

e $\gamma \leq \alpha$ *significa que* $\gamma_j \leq \alpha_j$ *para todo* j *em* $\{1, ..., n\}$.

Prova: Primeiramente considere $|\alpha| = 1$. Agora, tome $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo, pela regra de Leibniz para funções diferenciáveis e pela definição de derivada fraca, obtemos

$$\int_\Omega \mu u D^\alpha \varphi dx = \int_\Omega (u D^\alpha(\mu\varphi) - u(D^\alpha \mu)\varphi) dx = -\int_\Omega (\mu D^\alpha u + u D^\alpha \mu)\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. O caso $|\alpha| > 1$ segue por indução. ■

Definição 3.3 *Seja* $u \in W^{k,p}(\Omega)$. *Definimos a norma de* u *em* $W^{k,p}(\Omega)$, *que denotamos por* $\|u\|_{k,p}$, *da seguinte maneira*

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$. *Porém, se* $p = \infty$ *consideramos*

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Teorema 3.4 $\|.\|_{k,p}$ *é uma norma.*

Prova: Se $\|u\|_{k,p} = 0$ então $\|u\|_p = 0$, daí $u = 0$ q.t.p em Ω. Por outro lado se $u = 0$ q.t.p em Ω, então

$$\int_\Omega D^\alpha u \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = 0$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então, pelo **Lema 3.1**, $D^\alpha u = 0$ q.t.p em Ω para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$. Claramente, $\|\lambda u\|_{k,p} = |\lambda| \|u\|_{k,p}$ para todo λ real. Agora, vamos provar a desigualdade triangular. Com efeito, sejam u e v em $W^{k,p}(\Omega)$ e considere $1 \leq p < \infty$. Usando a desigualdade triangular em $L^p(\Omega)$ e o **Teorema 3.1**, obtemos

$$\|u + v\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_p + \|D^\alpha v\|_p)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembremos que se a_i e b_i são números reais, a desigualdade de Minkowski se escreve como

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desse modo, temos que

$$\|u + v\|_{k,p} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{k,p} + \|v\|_{k,p}.$$

Quando $p = \infty$ o resultado segue imediatamente da desigualdade triangular para números reais. ■

Teorema 3.5 $(W^{k,p}(\Omega), \|.\|_{k,p})$ *é um espaço de Banach.*

Prova: Suponha, inicialmente, que $1 \leq p < \infty$ e considere uma sequência de cauchy u_m em $W^{k,p}(\Omega)$. Afirmamos que $D^\alpha u_m$ de $L^p(\Omega)$ é uma sequência de cauchy. De fato, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l, m > n_0 \Rightarrow \|u_l - u_m\|_{k,p} < \varepsilon$$

Além disso, $\forall|\alpha| \leq k$, teremos

$$\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

se $l, m > n_0$. Logo, $D^\alpha u_m$ é de cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo(para $1 \leq p \leq \infty$), veja [1, Teorema 8.14], então existe u_α em $L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_m \longrightarrow u_\alpha$. Ou seja, para cada $|\alpha| \leq k$, existe $u_\alpha \in L^p(\Omega)$; $D^\alpha u_m \longrightarrow u_\alpha$. Ora, fazendo $\alpha = (0, ..., 0)$, teremos que $u_m = D^{(0,\ldots,0)} u_m = D^\alpha u_m \longrightarrow u_\alpha = u_{(0,\ldots,0)}$. Digamos que $u := u_{(0,\ldots,0)}$, ou seja, $u_m \longrightarrow u$. Vamos provar que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha u = u_\alpha$ para todo $|\alpha| \leq k$. Com efeito, fixemos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, daí $D^\alpha\varphi \in L^q(\Omega)$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Portanto, a desigualdade de Hölder nos da

$$0 \leq |\int_\Omega (uD^\alpha\varphi - u_m D^\alpha\varphi)dx| \leq \int_\Omega |u - u_m||D^\alpha\varphi|dx \leq \|u - u_m\|_p \|D^\alpha\varphi\|_q.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, teremos que $|\int_\Omega (uD^\alpha\varphi - u_m D^\alpha\varphi)dx| \to 0$. Então, obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha\varphi dx = \int_\Omega uD^\alpha\varphi dx$$

$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Uma vez que $D^\alpha u_m \longrightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$, podemos proceder como acima e assim obter

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega (D^\alpha u_m)\varphi dx = \int_\Omega u_\alpha\varphi dx$$

$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Portanto, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha\varphi dx = \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u_m)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha\varphi dx.$$

Logo, $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$, daí $u \in W^{k,p}(\Omega)$. De modo similar provamos que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $p = \infty$. Portanto, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. ■

3.2 Aproximação por funções suaves

Nesta subseção apresentaremos a definição de standard mollifier e provaremos algumas de suas propriedades que vão nos ajudar no decorrer deste trabalho.

Definição 3.4 (standard mollifier) *Seja $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ tal que $\phi(x) = ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}$ se $|x| < 1$ e $\phi(x) = 0$ se $|x| \geq 1$, onde c é positivo e escolhido de modo que*

$$\int_{R^n} \phi(x)dx = 1.$$

E para todo $\epsilon > 0$, defina

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$$

A função ϕ_ϵ é chamada de standard mollifier.

Observação I: Note que $\phi_\epsilon \geq 0$, $supp(\phi_\epsilon) = B[0, r]$ e

$$\int_{R^n} \phi_\epsilon(x)dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{R^n} \phi(\frac{x}{\epsilon})dx = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{R^n} \phi(y)\epsilon^n dy = \int_{R^n} \phi(x)dx = 1$$

para todo $\epsilon > 0$. Aqui usamos a mudança de variável $y = \frac{x}{\epsilon}$, $dx = \epsilon^n dy$. Além disso, se $\Omega \subset R^n$ é aberto tal que $\partial\Omega \neq \emptyset$, nós escreveremos

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\},$$

$\epsilon > 0$. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, nós obtemos o standard convolution mollification $f : \Omega_\epsilon \longrightarrow [-\infty, \infty]$, que é dado por

$$f_\epsilon(x) = (f * \phi_\epsilon)(x) = \int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy.$$

Observe para cada $x \in \Omega_\epsilon$,

$$f_\epsilon(x) = \int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy.$$

Pela mudança de variável $z = x - y$ teremos

$$\int_\Omega f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = \int_\Omega f(x-z)\phi_\epsilon(z)dz.$$

Observação II: Para cada $x \in \Omega_\epsilon$,

$$|f_\epsilon(x)| \leq |\int_{B(x,\epsilon)} f(y)\phi_\epsilon(x-y)dy| \leq \|\phi_\epsilon\|_\infty \int_{B(x,\epsilon)} |f(y)|dy < \infty.$$

Além disso, se $f \in C_0(\Omega)$, então $f_\epsilon \in C_0(\Omega_\epsilon)$ sempre que

$$0 < \epsilon < \epsilon_0 = \frac{1}{2} dist(supp(f), \partial\Omega).$$

Com efeito, se $x \in \Omega_\epsilon$ tal que $dist(x, supp(f)) > \epsilon_0$(em particular, para todo $x \in \Omega_\epsilon - \Omega_{\epsilon_0}$), então $B(x,\epsilon) \cap supp(f) = \emptyset$, o que nos da $f_\epsilon(x) = 0$.

Teorema 3.6 (Propriedades dos Mollifiers)

1. *$f_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.*
2. *$f_\epsilon \longrightarrow f$ q.t.p quando $\epsilon \longrightarrow 0$.*
3. *Se $f \in C(\Omega)$, então $f_\epsilon \longrightarrow f$ uniformemente para todo $V \Subset \Omega$, (A notação $V \Subset \Omega$ significa que V é aberto, $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset \Omega$). Este resultado também continua válido para qualquer subconjunto compacto de Ω.*
4. *Se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, ou seja, se $f \in L^p(K)$ para todo K compacto contido em Ω, com $1 \leq p < \infty$, então $f_\epsilon \longrightarrow f$ em $L^p(V)$ para todo $V \Subset \Omega$.*

Prova: Iremos provar apenas o item 1. Para o restante das demonstrações ver Evans e Gariepy (?) pag. 123. Seja $x \in \Omega_\epsilon$, $j = 1, ..., n$ e $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, onde o número 1 ocupa a j-ésima coordenada. Escolha $h_0 > 0$ tal que $B(x, h_0) \subset \Omega_\epsilon$ e tome $h \in \mathbb{R}$ de modo que $|h| < h_0$. Então,

$$\frac{f_\epsilon(x + he_j) - f_\epsilon(x)}{h} = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x+he_j,\epsilon)\cup B(x,\epsilon)} \frac{1}{h} \left[\phi\left(\frac{x + he_j - y}{\epsilon}\right) - \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \right] f(y)dy.$$

Definamos $V = B(x, h_0 + \epsilon)$. Agora, $V \Subset \Omega$ e $B(x + he_j, \epsilon) \cup B(x, \epsilon) \subset V$. Afirmamos que

$$\frac{1}{h} \left[\phi\left(\frac{x + he_j - y}{\epsilon}\right) - \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) \right] \longrightarrow \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)$$

para todo $y \in V$ quando $h \longrightarrow 0$. De fato, defina $\psi(x) = \phi(\frac{x-y}{\epsilon})$. Então,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \left(\frac{x-y}{\epsilon}\right), j = 1, ..., n$$

e

$$\psi(x + he_j) - \psi(x) = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t}(\psi(x + te_j))dt = \int_0^h D\psi(x + te_j)e_j dt$$

o que prova a afirmação. Portanto,

$$|\psi(x+he_j) - \psi(x)| \leq \int_0^{|h|} |D\psi(x + te_j)e_j| dt \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{|h|} \left| D\phi\left(\frac{x + te_j - y}{\epsilon}\right) \right| dt \leq \frac{|h|}{\epsilon} \|D\phi\|_{L^\infty(R^n)}.$$

Essa estimativa nos mostra que podemos usar o teorema da convergência dominada de

Lebesgue para obter

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_\epsilon(x+he_j)-f_\epsilon(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\epsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left[\phi\left(\frac{x+he_j-y}{\epsilon}\right)-\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right]f(y)dy = I.$$

Então,

$$I = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) = \int_V \frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial x_j}(x-y)f(y)dy = \left(\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial x_j} * f\right)(x).$$

De modo análogo provamos que $D^\alpha f_\epsilon$ existe e

$$D^\alpha f_\epsilon = D^\alpha\phi_\epsilon * f$$

em Ω_ϵ. ■

Teorema 3.7 *Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que $1 \leq p < \infty$. Então*

1. *$D^\alpha u_\epsilon = D^\alpha u * \phi$ em Ω_ϵ e*
2. *$u_\epsilon \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(V)$ para todo $V \Subset \Omega$.*

Prova: Inicialmente, fixemos x em Ω_ϵ. Então

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = D^\alpha(u*\phi_\epsilon)(x) = (u * D^\alpha\phi_\epsilon)(x) = \int_\Omega D_x^\alpha\phi_\epsilon(x-y)u(y)dy = I.$$

Logo,

$$I = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha(\phi_\epsilon(x-y))u(y)dy.$$

Para o que foi feito acima, usamos a demonstração do **Teorema 3.6 (1)** e o fato de que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\right).$$

Para todo $x \in \Omega_\epsilon$, a função $\varphi(x) = \phi_\epsilon(x-y)$ pertence a C_0^∞. Assim

$$\int_\Omega D_y^\alpha(\phi_\epsilon(x-y))u(y)dy = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u(y)\phi_\epsilon(x-y)dy.$$

Portanto, combinando os fatos acima, obtemos

$$D^\alpha u_\epsilon(x) = (-1)^{|\alpha|+|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u(y)\phi_\epsilon(x-y)dy = (D^\alpha u * \phi_\epsilon)(x).$$

Para provar o item 2., tome $V \Subset \Omega$ e escolha $\epsilon > 0$ tal que $V \subset \Omega_\epsilon$. Sabemos do item 1. que

$$D^\alpha u_\epsilon = D^\alpha u * \phi_\epsilon$$

em V para $|\alpha| \leq k$. Pelo **Teorema 3.6**, teremos que

$$D^\alpha u_\epsilon \longrightarrow D^\alpha u$$

em $L^p(V)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$, $|\alpha| \leq k$. Consequentemente

$$\|u_\epsilon - u\|_{W^{k,p}(V)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

■

3.3 Teorema de Meyer-Serrin e aplicações

Nesta subseção provaremos o Teorema de Meyer-Serrin, enunciaremos a regra da cadeia para funções de Sobolev e a aplicaremos para obter ferramentas que nos serão úteis ao longo deste trabalho.

Teorema 3.8 (Meyer-Serrin) *Se* $u \in W^{k,p}(\Omega)$, *onde* $1 \leq p < \infty$. *Então, existem funções* $u_i \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *tal que* $u_i \longrightarrow u$ *em* $W^{k,p}(\Omega)$.

Prova: Inicialmente, definamos $\Omega_0 = \emptyset$ e

$$\Omega_i = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\} \cap B(0, i); i = 1, 2, ...$$

Então,

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$$

e

$$\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset ... \Subset \Omega.$$

Afirmamos que existe $\eta_i \in C_0^{\infty}(\Omega_{i+2} - \overline{\Omega}_{i-1})$,$i = 1, 2, ...$ tal que $0 \leq \eta_i \leq 1$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(x) = 1$$

para cada $x \in \Omega$. Esta é uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{\Omega_i\}$. Agora, observe que podemos construir uma função β_i de $C_0^{\infty}(\Omega_{i+2} - \overline{\Omega}_{i-1})$ tal que $0 \leq \beta_i \leq 1$ e $\beta_i = 1$ em $\overline{\Omega}_{i+1} - \Omega_i$. Então, definiremos

$$\eta_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(x)}, i = 1, 2, ...$$

Observe que a soma é somente sobre quatro índices em uma vizinhança de um ponto dado. Assim, provamos a afirmação. Agora, pelo **Teorema 3.3**, $\eta_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ e

$$supp(\eta_i u) \subset \Omega_{i+2} - \overline{\Omega}_{i-1}.$$

Tome $\epsilon > 0$. Escolha $\epsilon_i > 0$ tão pequeno que

$$supp(\phi_{\epsilon_i} * (\eta_i u)) \subset \Omega_{i+2} - \overline{\Omega}_{i-1}$$

e

$$\|\phi_{\epsilon_i} * (\eta_i u) - \eta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2^i}, i = 1, 2, ...$$

Pelo teorema **Teorema 3.7 (2)**, isso é possível. Prosseguindo, defina

$$v = \sum_{i}^{\infty} \phi_{\epsilon_i} * (\eta_i u).$$

A função acima pertence a $C^{\infty}(\Omega)$, uma vez que em uma vizinhança de qualquer ponto $x \in \Omega$, há no máximo finitos termos diferentes de zero na soma. Além disso,

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\epsilon_i}*(\eta_i u) - \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i u\|_{W^{k,p}\Omega} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\phi_{\epsilon_i} * (\eta_i u) - \eta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon.$$

O que prova o teorema. ■

Doravante vamos apenas considerar o espaço de Sobolev $W^{1,p}$. Logo, os multi-índices serão do tipo $0, e_1, ..., e_n$, onde $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$, de modo que 1 ocupa a j-ésima coordenada, e 0 é o vetor nulo de R^n. Denotaremos $D^{e_j}u$ por $D_j u$ para todo j em $\{1, ..., n\}$ e, como de costume, $D^0 u = u$. Além disso, diremos que o **gradiente fraco** de u é $(D_1 u, ..., D_n u)$, e o denotaremos por Du.

Teorema 3.9 (Regra da cadeia) *Considere* $1 \leq p < \infty$. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *e* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ *e* $f(0) = 0$, *então* $f \circ u \in W^{k,p}(\Omega)$ *e*

$$D_j(f \circ u) = f'(u) D_j u, j = 1, ..., n$$

q.t.p em Ω.
Prova: Ver Trudinger, pág. 151. ■

Teorema 3.10 *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *então* $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$, $D|u| = Du$ *q.t.p em* $\{x; u(x) > 0\}$, $D|u| = 0$ *q.t.p em* $\{x; u(x) = 0\}$ *e* $D|u| = -Du$ *q.t.p em* $\{x; u(x) < 0\}$.
Prova: Seja $\epsilon > 0$ e considere $f_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_\epsilon(t) = \sqrt{t^2 + \epsilon^2} - \epsilon$. Então, $f_\epsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $f_\epsilon(0) = 0$ e

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t) = |t|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, observe que

$$(f_\epsilon)'(t) = \frac{1}{2}(t^2 + \epsilon^2)^{\frac{-1}{2}} 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\|(f_\epsilon)'\|_\infty \leq 1$ para todo $\epsilon > 0$. Pela regra da cadeia, concluímos que $f_\epsilon \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega (f_\epsilon \circ u) D_j \varphi dx = - \int_\Omega (f_\epsilon)'(u) D_j u \varphi dx, j = 1, ..., n.$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Note que $\lim_{\epsilon\to 0}(f_\epsilon)'(t) = 1$ se $t > 0$, $= 0$ se $t = 0$, e $= -1$ se $t < 0$. Logo,

$$\int_\Omega |u| D_j\varphi dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega (f_\epsilon \circ u) D_j\varphi dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega (f_\epsilon)'(u) D_j u\varphi dx = -\int_\Omega D_j|u|\varphi dx, j = 1, ..., n$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, daí $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ e a $D_j|u|$ é como na afirmação do teorema. ■

Observação: Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, então $max\{u, v\} \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $Dmax\{u, v\} = Du$ q.t.p em $\{x; u(x) \geq v(x)\}$ e é $= Dv$ q.t.p em $\{x; u(x) \leq v(x)\}$. Com efeito, basta notar que $max\{u, v\} = \dfrac{u + v + |u - v|}{2}$ e aplicar o teorema acima.

3.4 Reflexividade e compacidade fraca de $W^{1,p}(\Omega)$

Agora, nosso objetivo é demonstrar que o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e fracamente compacto, quando $1 < p < \infty$. Mas, antes disso, vamos recordar algumas definições e propriedades da Análise funcional. Além disso, definiremos a convergência fraca em $L^p(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$.

Definição 3.5

1. *Seja X um espaço vetorial. Chamaremos de conjunto dual de X, ao conjunto X^*, definido por $X^*=\{f : X \longrightarrow \mathbb{K}; f$ é linear e contínua$\}$ onde $\mathbb{K}$ é o corpo de escalares de X.*
2. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Diremos que $T : E \longrightarrow F$ é uma isometria quando $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Além disso, se T é linear, diremos que T é uma isometria linear.*
3. *Se E e F são espaços vetoriais normados, diremos que T é um isomorfismo quando T é linear, bijetiva, contínua e T^{-1} é contínua. Além disso, um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de isomorfismo isométrico. Nesse caso, dizemos que os espaços E e F são isomorfos isometricamente.*

Observação: Ao considerarmos espaços isomorficamente isométricos E e F, é comum identificarmos os dois espaços.

Proposição 3.1 *Para todo espaço vetorial normado E, o operador linear $J_E : E \longrightarrow E^{**} := (E^*)^*$ dada por $J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para todo $x \in E$ e $\varphi \in E^*$, é uma isometria linear, chamada de mergulho canônico de E em E^{**}*

Prova: Ver Botelho e Pellegrino, pág. 89. ■

Definição 3.6 *Diremos que um espaço vetorial E é reflexivo se J_E é sobrejetivo, ou seja, $J_E(E) = E^{**}$. Neste caso J_E é um isomorfismo isométrico.*

Proposição 3.2 *Considere E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então, F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E*

Prova: Ver Botelho e Pellegrino, pág. 2. ■

Proposição 3.3 *Seja E um espaço reflexivo e $F \subset E$ um conjunto fechado. Então, F é reflexivo.*

Prova: Ver Botelho e Pellegrino, pág. 161. ■

Teorema 3.11 *O espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo quando $1 < p < \infty$.*
Prova: Ver Botelho e Pellegrino, pág. 93. ■

Agora, estamos em condições de provar o seguinte teorema:

Teorema 3.12 *$W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo quando $1 < p < \infty$.*
Prova: Inicialmente vamos definir a função $I : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^{n+1}$, onde $(L^p(\Omega))^{n+1} := \prod L^p(\Omega)$, por $I(u) = (u, D_1u, ..., D_nu)$. Além disso, vamos considerar a seguinte norma em $(L^p(\Omega))^{n+1}$

$$\|(v_0, ..., v_n)\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \|v_i\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $v = (v_0, ..., v_n) \in (L^p(\Omega))^{n+1}$. Observe que,

$$\|I(u)\|_{(L^p(\Omega))^{n+1}} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|D_iu\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{1,p}.$$

Portanto, I é uma isometria. Além disso, I é linear e contínua. Note que, sobre $I(W^{1,p}(\Omega))$, I se torna um isomorfismo isométrico. Logo, podemos identificar $I(W^{1,p}(\Omega))$ com $W^{1,p}(\Omega)$. Então, $W^{1,p}(\Omega)$ é subespaço de $(L^p(\Omega))^{n+1}$, que é reflexivo, pois é produto cartesiano de espaços reflexivos. Como $W^{1,p}(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))^{n+1}$ são espaços de Banach, então, pela **Proposição 3.2**, $W^{1,p}(\Omega)$ é fechado. Portanto, pela **Proposição 3.3**, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo. ■

Definição 3.7 *Diremos que uma sequência (x_i) de um espaço vetorial normado E converge pra $x \in E$ quando $\varphi(x_i) \longrightarrow \varphi(x)$ $\forall \varphi \in E^*$. E denotamos por $x_i \rightharpoonup x$.*

Definição 3.8 (Convergência fraca em $L^p(\Omega)$) *Seja (f_i) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$. Diremos que (f_i) converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para a função $f \in L^p(\Omega)$ se*

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega f_i.gdx = \int_\Omega f.gdx$$

para toda função $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$ é o conjugado do expoente p.

Lema 3.3 (Mazur) *Seja X um espaço vetorial normado e uma sequência x_i que converge fracamente para x quando $i \longrightarrow \infty$ em X. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ e uma combinação convexa $\sum_{i=1}^k a_ix_i$ tal que*

$$\|x - \sum_{i=1}^{k} a_ix_i\| < \epsilon$$

isto é, existe uma subsequência de x_i tal que $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \longrightarrow x$ fortemente.
Prova: Ver Brezis, pag. 61. ■

Observação: Lembre-se que em uma combinação convexa $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ nós temos que $a_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$.

Teorema 3.13 *Seja $1 < p < \infty$. Considere uma sequência limitada (f_i) em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (f_{i_k}) e $f \in L^P(\Omega)$ tal que $f_{i_k} \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.*
Prova: Ver Botelho e Pellegrino, pág. 164. ■

Teorema 3.14 *Seja $1 < p < \infty$. Assuma que u_i é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{i_k}) e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{i_k} \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$, $Du_{i_k} \rightharpoonup Du$ em $L^p(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$. Além disso, se $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.*
Prova: Sabendo que u_i é uma sequência limitada de $W^{1,p}(\Omega)$ e que a norma de $L^p(\Omega)$ é controlada pela norma de $W^{1,p}(\Omega)$, então u_i é limitada em $L^p(\Omega)$. Além disso, $D_j u_i$ também será limitada em $L^P(\Omega)$. Logo, pelo teorema anterior, existe u_{i_k} e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_{i_k} \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Analogamente, pelo mesmo teorema, passando por sucessivas subsequências, obteremos $D_j u_{i_k}$ e g_j em $L^p(\Omega)$ tais que $D_j u_{i_k} \rightharpoonup g_j$ em $L^p(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$ para cada $j \in \{1, ...n\}$. Afirmamos que $g_j = D_j u$ para cada $j \in \{1, ...n\}$. De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, daí

$$\int_\Omega u D_j \varphi dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_{i_k} D_j \varphi dx = -\lim_{k \to \infty} \int_\Omega D_j u_{i_k} \varphi dx = -\int_\Omega g_j . \varphi dx.$$

A primeira igualdade decorre da definição de convergência fraca em $L^p(\Omega)$, a segunda da definição de derivada fraca e a última igualdade segue da convergência fraca. Portanto, $D_j u = g_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. E assim $\exists D_j u \in L^p(\Omega)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, daí $u \in W^{1,p}(\Omega)$. E ainda $D_j u_{i_k} \rightharpoonup g_j = D_j u$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$ quando $k \longrightarrow \infty$, logo $Du_{i_k} \rightharpoonup Du$ em $L^p(\Omega)$. Para o que resta usaremos o Lema de Mazur, ou seja, existe uma subsequência u_{i_k}, que denotaremos por u_i, tal que, para combinações convexas tenhamos

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \longrightarrow u$$

e

$$\sum_{i=1}^{k} a_i Du_i \longrightarrow Du$$

em $L^p(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$. Isto mostra que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \longrightarrow u$$

em $W^{1,p}(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$. Desde que $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i Du_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$, a completude de $W_0^{1,p}(\Omega)$(pois é subconjunto fechado de $W^{1,p}(\Omega)$) implica $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
■

Teorema 3.15 (Compacidade fraca) *Seja* $1 < p < \infty$. *Assuma que* (u_i) *é uma sequência limitada em* $W^{1,p}(\Omega)$ *e que* $u_i \longrightarrow u$ *q.t.p em* Ω. *Então* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_i \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\Omega)$ *e* $Du_i \rightharpoonup Du$ *em* $L^p(\Omega)$. *E se* $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$, *teremos que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Nós passaremos a subsequências varias vezes neste argumento e denotaremos todas as subsequências por u_i. Pelo **Teorema 3.14**, existe uma subsequência (u_i) e uma função v em $L^p(\Omega)$ tais que $u_i \rightharpoonup v$ em $L^p(\Omega)$ e $Du_i \rightharpoonup Dv$ em $L^p(\Omega)$ quando $i \longrightarrow \infty$. Pelo lema de Mazur, existe uma subsequência u_i tal que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \longrightarrow v$$

e

$$\sum_{i=1}^{k} a_i Du_i \longrightarrow Dv$$

em $L^p(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$. Sabendo que a convergência em $L^p(\Omega)$ nos da uma subsequência que converge q.t.p em Ω, e que $u_i \longrightarrow u$ q.t.p em Ω, obteremos

$$\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \longrightarrow u$$

em quase todo ponto de Ω quando $k \longrightarrow \infty$. Assim, concluímos que $v = u$ e $Dv = Du$ em quase todo ponto de Ω. Isto nos mostra que po limite fraco é independente da escolha da subsequência, o que nos fornece $u_i \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$ e $Du_i \rightharpoonup Du$ em $L^p(\Omega)$. ■

4 TEOREMA DE HARDY-LITTLEWOOD-WIENER EM $W^{1,p}(R^n)$

Agora, nosso objetivo é provar que o operador maximal de Hardy-Littlewood é limitado no espaço de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ quando $p > 1$. Doravante iremos considerar, para $1 \leq p \leq \infty$, a seguinte norma em $W^{1,p}(R^n)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}(R^n)} = \|u\|_{L^p(R^n)} + \|Du\|_{L^p(R^n;R^n)}$$

onde $L^p(R^n; R^n)$ é o espaço de funções $u = (u_1, ..., u_n)$ tais que $u_i \in L^p(R^n)$ para todo i em $\{1, ..., n\}$. E ainda,

$$\|Du\|_{L^p(R^n;R^n)} = \left(\int_{R^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$, onde Du denota o gradiente fraco de u e $|Du|$ a sua norma euclidiana.

4.1 Funções Lipschitzianas e $W^{1,\infty}(R^n)$

Se $u : R^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$, $h \in R^n$ e $h \neq 0$, iremos definir $u_h : R^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ por $u_h(x) = u(x + h)$. Além disso, diremos que uma função $u : R^n \longrightarrow R$ é Lipschitziana quando existe $L > 0$ tal que

$$|u_h(x) - u(x)| \leq L|h|$$

para todo $x, h \in R^n$, onde $h \neq 0$. Observe que se considerarmos um y arbitrário em R^n de modo que $y \neq x$ e fizermos $h = y - x$, obtemos $|u(y) - u(x)| = |u_h(x) - u(x)| \leq L|h| = L|y - x|$. Quando $y = x$, $|u(y) - u(x)| = 0 = L|y - x|$. E assim reobtemos a definição clássica de função lipschitziana. Além disso, diremos que u definida em R^n é localmente lipschitziana quando para todo compacto $K \subset R^n$ existe uma constante $L_k > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq L_k|x - y|$$

para todo $x, y \in K$.

Para o que segue, iremos denotar o espaço das funções Lipschitzianas limitadas por $C^{0,1}(R^n)$, que estará munido da seguinte norma

$$\|u\|_{C^{0,1}(R^n)} = \sup_{x \in R^n} |u(x)| + [u]_{Lip}$$

onde $[u]_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}$. Observe que $[u]_{Lip}$ é a menor constante tal que $|u(y) - u(x)| \leq [u]_{Lip}|y - x|$ ou ainda, $|u_h(x) - u(x)| \leq [u]_{Lip}|h|$. Como as funções Lipschitzianas são contínuas e a medida de Lebesgue de R^n é positiva, teremos que $\sup_{x \in R^n} |u(x)| = \|u\|_\infty$, o que nos possibilita escrever $\|u\|_{C^{0,1}(R^n)} = \|u\|_\infty + [u]_{Lip}$. Agora, vamos provar a seguinte propriedade:

Proposição 4.1 $|\mathcal{M}(u_h) - \mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}(u_h - u)$.
Prova: Pelo **Teorema 2.1**, teremos $\mathcal{M}(u_h) \leq \mathcal{M}(u_h - u) + \mathcal{M}u$. Observe que

$$\mathcal{M}(u_h - u) = \mathcal{M}(-(u - u_h)) = |-1|\mathcal{M}(u - u_h) = \mathcal{M}(u - u_h).$$

Logo, pelo mesmo teorema, $\mathcal{M}(u_h) + \mathcal{M}(u - u_h) \geq \mathcal{M}u$. Então, obtemos

$$\mathcal{M}(u_h) \geq \mathcal{M}u - \mathcal{M}(u - u_h) = \mathcal{M}u - \mathcal{M}(u_h - u).$$

Portanto,

$$\mathcal{M}u - \mathcal{M}(u_h - u) \leq \mathcal{M}(u_h) \leq \mathcal{M}(u_h - u) + \mathcal{M}u$$

daí,

$$-\mathcal{M}(u_h - u) \leq \mathcal{M}(u_h) - \mathcal{M}u \leq \mathcal{M}(u_h - u).$$

Ou seja, $|\mathcal{M}(u_h) - \mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}(u_h - u)$. ■

Teorema 4.1 *Se* $u : R^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *é Lipschitziana. Então,* $\mathcal{M}u$ *também será.*
Prova: Inicialmente, note que $(\mathcal{M}u)_h = \mathcal{M}u_h$. De fato, observe que

$$\mathcal{M}u_h(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u_h(y)|dy = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(y+h)|dy = *.$$

Fazendo a mudança de variável $z = y + h$, obtemos

$$* = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x+h,r)} |u(z)|dz = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x+h,r)|} \int_{B(x+h,r)} |u(z)|dz = (\mathcal{M}u)_h(x).$$

Logo, $(\mathcal{M}u)_h = \mathcal{M}u_h$. Portanto, pelo que provamos acima e utilizando a **Propriedade 4.1**, teremos

$$|(\mathcal{M}u)_h(x) - \mathcal{M}u(x)| = |\mathcal{M}(u_h)(x) - \mathcal{M}u(x)| \leq \mathcal{M}(u_h - u)(x) = \bullet.$$

Logo,

$$\bullet = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u_h(y) - u(y)|dy \leq L|h|.$$

Ou seja, $\mathcal{M}u$ é lipschitziana. ■

Definição 4.1 *Seja* $u : U \longrightarrow R$ *pertencente a* $L^1_{loc}(U)$ *e* $V \subset\subset U$*, isto é,* $\overline{V}$ *é compacto e está contido em* U*. Diremos que o i-ésimo quociente diferencial de* u *é*

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}$$

para todo $x \in V$ e $h \in R$, de modo que $0 < |h| < dist(V, \partial U)$. Além disso, denotaremos esse quociente por $D_i^h(x)$ para todo $i \in I_n$.

Observação: Note que a definição acima faz sentido para cada $x \in U$ sempre que $0 < |h| < dist(x, \partial U)$. Se $U = R^n$, então a definição faz sentido para cada $h \neq 0$.

Teorema 4.2 (Caracterização de $W^{1,\infty}(R^n)$) *Uma função u definida em R^n é Lipschitziana se, e somente se, $u \in W^{1,\infty}(R^n)$. Ou seja, $C^{0,1}(R^n) = W^{1,\infty}(R^n)$. Além disso, $\|u\|_{C^{0,1}(R^n)} = \|u\|_{W^{1,\infty}(R^n)}$.*

Prova: Suponha que $u \in W^{1,\infty}(R^n)$, onde u possui suporte compacto. Note que u é limitada, pois $u \in L^\infty(R^n)$. Agora, considere $u_\epsilon = \eta_\epsilon * u$, onde η_ϵ é o standard mollifier. Logo, pelo **Teorema 3.6**, itens **(1)** e **(3)**, teremos que $u_\epsilon \in C^\infty(R^n)$ e $u_\epsilon \longrightarrow u$ uniformemente quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Além disso, $\|Du_\epsilon\|_\infty \leq \|Du\|_\infty$. De fato,

$$|D_i u_\epsilon| = |\int_{R^n} \eta_\epsilon(x-y) D_i u(y) dy| \leq \int_{R^n} |\eta_\epsilon(x-y) D_i u(y)| dy \leq \|Du\|_\infty \int_{R^n} \eta_\epsilon(x-y) dy = \|Du\|_\infty.$$

Portanto, $|D_i u_\epsilon(x)| \leq \|Du\|_\infty$ para todo i em I_n. Logo, $|Du_\epsilon(x)| \leq \|Du\|_\infty$, daí $\|Du_\epsilon\|_\infty \leq \|Du\|_\infty$. Agora, sejam $x, y \in R^n$, onde $x \neq y$. Então, pela regularidade de u_ϵ, teremos

$$u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y) = \int_0^1 Du_\epsilon(tx + (1-t)y) dt (x - y)$$

daí,

$$|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y)| \leq \int_0^1 |Du_\epsilon(tx + (1-t)y)| dt |x - y| \leq \|Du\|_\infty |x - y|.$$

Então, fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_\infty |x - y|.$$

Portanto, u é uma função lipschitziana e limitada, isto é, $u \in C^{0,1}(R^n)$ Agora, suponha que $u \in C^{0,1}(R^n)$, daí $|u(x) - u(y)| \leq [u]_{Lip} |x - y|$. Então, teremos

$$|D_i^{-h} u(x)| = \left| \frac{u(x - he_i) - u(x)}{h} \right| \leq \frac{[u]_{Lip} |h| |e_i|}{|h|} = [u]_{Lip}$$

para todo $x \in R^n$ e $h \neq 0$. Logo, $\|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(R^n)} \leq [u]_{Lip}$ para todo $h \neq 0$. Portanto, se considerarmos $\Omega \subset R^n$ aberto e limitado, teremos

$$\|D_i^{-h} u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |D_i^{-h} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \|D_i^{-h} u(x)\|^2_{L^\infty(R^n)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(R^n)} . |\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

daí, $\|D_i^{-h} u\|_{L^2(\Omega)} \leq [u]_{Lip} . |\Omega|^{\frac{1}{2}}$ para todo $h \neq 0$. Logo, para cada $i \in I_n$, temos que

$D_i^{-h}u$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Portanto, a propriedade de compacidade fraca de $L^2(\Omega)$ (**Teorema 3.13**) nos permite dizer que existe uma subsequência h_j e $g_i \in L^2(\Omega)$ para cada $i \in I_n$ tal que $D_i^{-h_j}u \rightharpoonup g_i$ para cada $i \in I_n$. Agora, seja $\phi \in C_0^\infty \Omega$ tomada de modo arbitrário, daí

$$\int_\Omega uD_i\phi dx = \int_\Omega u(x)(\lim_{h_j \to 0} D_i^{h_j}\phi(x))dx = \lim_{h_j \to 0}\int_\Omega uD_i^{h_j}\phi dx = -\lim_{h_{h_j} \to 0}\int_{R^n} D_i^{-h_{h_j}}u\phi dx = -\int_\Omega g_i\phi dx.$$

Portanto, $g_i = D_iu$ para todo $i \in I_n$. Afirmamos que $D_iu \in L^\infty(\Omega)$ para todo $i \in I_n$. De fato, considere $f_j = D_i^{-h_j}u$, onde $j \in \mathbb{N}$. Então, $f_j \rightharpoonup D_iu$ em $L^2(\Omega)$. Logo, pelo Lema de Mazur, existe uma subsequência f_{j_t} tal que

$$\sum_{t=1}^{k} a_{j_t} f_{j_t} \longrightarrow D_iu$$

em $L^P(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$, onde $\sum_{t=1}^{k} a_{j_t} = 1$. Além disso,

$$\|\sum_{t=1}^{k} a_{j_t} f_{j_t}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{t=1}^{k} a_{j_t}\|D_i^{-h_{j_t}}u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq [u]_{Lip}.$$

Portanto, $|D_iu(x)| \leq [u]_{Lip}$ $\forall i \in I_n$ q.t.p em Ω. Isto nos mostra que $Du \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq [u]_{Lip}$.Como u é limitada, então $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ para todo Ω aberto e limitado de R^n. Como a norma não depende de Ω, concluímos que $u \in W^{1,\infty}(R^n)$. Além disso, $\|Du\|_{L^\infty(R^n)} \leq [u]_{Lip}$. Logo, $C^{0,1}(R^n) = W^{1,\infty}(R^n)$. Então, para $u \in C^{0,1}(R^n) = W^{1,\infty}(R^n)$, teremos que $[u]_{Lip} = \|Du\|_{L^\infty(R^n)}$. Portanto,

$$\|u\|_{C^{0,1}(R^n)} = \|u\|_{L^\infty(R^n)} + [u]_{Lip} = \|u\|_{L^\infty(R^n)} + \|Du\|_{L^\infty(R^n)} = \|u\|_{W^{1,\infty}(R^n)}.$$

■

4.2 Limitação do operador maximal em $W^{1,p}(R^n)$

Novamente iremos considerar, para $1 \leq p \leq \infty$, a seguinte norma em $W^{1,p}(R^n)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}(R^n)} = \|u\|_{L^p(R^n)} + \|Du\|_{L^p(R^n;R^n)}$$

onde $L^p(R^n; R^n)$ é o espaço de funções $u = (u_1, ..., u_n)$ tais que $u_i \in L^p(R^n)$ para todo i em $\{1, ..., n\}$. Além disso,

$$\|Du\|_{L^p(R^n;R^n)} = \left(\int_{R^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $1 \leq p < \infty$, onde Du denota o gradiente fraco de u e $|Du|$ a sua norma euclidiana.

Teorema 4.3 *Seja $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(R^n)$, então $\mathcal{M}u \in W^{1,p}(R^n)$ e*

$$|D_i \mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}D_i u$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$ em quase todo ponto de R^n.

Prova: Inicialmente, vamos considerar a função característica de $B(0, r)$ e definir a função $\chi_r : R^n \longrightarrow R$ por

$$\chi_r = \frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0, r)|}.$$

Agora, note que

$$(|u|*\chi_r)(x) = (\chi_r*|u|)(x) = \int_{R^n} |u(y)|\chi_r(x-y)dy = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{R^n} |u(y)|\chi_{B(0,r)}(x-y)dy = \bullet$$

daí,

$$\bullet = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{R^n - B(x,r)} |u(y)|\chi_{B(0,r)}(x - y)dy + \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x,r)} |u(y)|\chi_{B(0,r)}(x - y)dy = \bullet$$

Se $y \in R^n - B(x, r)$, então $|y - x| \geq r$, isto é, $|x - y| \geq r$, daí $x - y \notin B(0, r)$. Portanto, $\chi_{B(0,r)}(x - y) = 0$ quando $y \in R^n - B(x, r)$. Analogamente, se $y \in B(x, r)$, teremos $|y - x| < r$, daí $x - y \in B(0, r)$. Logo, $\chi_{B(0,r)}(x - y) = 1$ quando $y \in B(x, r)$. Então, concluímos que

$$\bullet = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(x,r)} |u(y)|dy = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |u(y)|dy.$$

Ora, $u \in W^{1,p}(R^n)$, então, pelo **Teorema 3.10**, $|u| \in W^{1,p}(R^n)$. Como $|u| * \chi_r \in W^{1,p}(R^n)$, o **Teorema 3.7(1)** nos fornece

$$D_i(u * \chi_r) = \chi_r * D_i|u|$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$ q.t.p em R^n. Agora, considere o conjunto $\{r_j \in \mathbb{Q}_+^*; j \in \mathbb{N}\}$. Como $u \in L^1_{loc}(R^n)$, então podemos escrever

$$\mathcal{M}u(x) = \sup_j \frac{1}{|B(x, r_j)|} \int_{B(x,r_j)} |u(y)|dy.$$

Sabendo que $\dfrac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(y)|dy = (|u| * \chi_r)(x)$, então

$$\mathcal{M}u(x) = \sup_j (|u| * \chi_r)(x).$$

Agora, tome a sequência de funções $v_k : R^n \longrightarrow R$, onde $k \in \mathbb{N}$, por

$$v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} (|u| * \chi_{r_j})(x).$$

Como $|u| * \chi_{r_j} \in W^{1,p}(R^n)$ para todo $j \in \{1, ...n\}$, a observação do **Teorema 3.10** nos permite dizer que $\max_{1 \leq j \leq k}(|u| * \chi_{r_j}) \in W^{1,p}(R^n)$. Além disso, note que, para $x \in R^n$ $v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k}(|u| * \chi_{r_j})(x) \leq \max_{1 \leq j \leq k+1}(|u| * \chi_{r_j})(x) = v_{k+1}(x)$, ou seja, v_k é uma sequência monótona não decrescente. Logo, $v_k \longrightarrow \mathcal{M}u$ pontualmente em R^n. Novamente, pela observação do **Teorema 3.10**, teremos que $Dv_k = D(|u| * \chi_{r_l})$ q.t.p em $\{x \in R^n; |u| * \chi_{r_l} \geq |u| * \chi_{r_j} \forall j \in I_k\}$, onde $I_k = \{1, ..., k\}$ e l é tomado de modo arbitrário em I_k. Portanto,

$$|D_i v_k| = |D_i \max_{1 \leq j \leq k} |u| * \chi_{r_j}| = |D_i(|u| * \chi_{r_l})| \leq \max_{1 \leq j \leq k} |D_i(|u| * \chi_{r_j})| = \bullet.$$

Sabemos que $D_i(u * \chi_{r_j}) = \chi_{r_j} * D_i|u|$ q.t.p em R^n . Logo,

$$\bullet = \max_{1 \leq j \leq k} |\chi_{r_j} * D_i|u|| = \max_{1 \leq j \leq k} |D_i|u| * \chi_{r_j}| \leq \sup_j |D_i|u|| * \chi_{r_j} = \mathcal{M}D_i|u|.$$

O **Teorema 3.10** nos garante que $|D_i|u|| = |D_i u|$ $\forall i \in I_n$ q.t.p em R^n. Logo,

$$\mathcal{M}D_i|u|(x) = \sup_j (|D_i|u|| * \chi_{r_j})(x) = \sup_j (|D_i u| * \chi_{r_j})(x) = \mathcal{M}D_i u(x)$$

daí,

$$|D_i v_k| \leq \mathcal{M}D_i u$$

para todo $i \in I_n$ q.t.p em R^n. Agora, observe que $|Dv_k| \leq \sum_{i=1}^n |D_i v_k|$, então $|Dv_k|^p \leq (\sum_{i=1}^n |D_i v_k|)^p$, daí

$$\|Dv_k\|_p = \left(\int_{R^n} |Dv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^n} \left(\sum_{i=1}^n |D_i v_k|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{R^n} |\sum_{i=1}^n |D_i v_k||^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ora,

$$\left(\int_{R^n} |\sum_{i=1}^n |D_i v_k||^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|\sum_{i=1}^n |D_i v_k|\|_p.$$

Logo, a desigualdade generalizada de Minkowski nos fornece

$$\|\sum_{i=1}^n |D_i v_k|\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p.$$

Portanto,

$$\|Dv_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p.$$

Sabemos que $|D_i v_k| \leq \mathcal{M} D_i u$ $\forall i \in I_n$ q.t.p em R^n, daí $|D_i v_k| \leq \mathcal{M} D_i u \leq |\mathcal{M} D_i u|$ $\forall i \in I_n$ q.t.p em R^n. Então

$$\|D_i v_k\|_p = \left(\int_{R^n} |D_i v_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^n} |\mathcal{M} D_i u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathcal{M} D_i u\|_p$$

daí,

$$\sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|\mathcal{M} D_i u\|_p$$

então,

$$\|Dv_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|\mathcal{M} D_i u\|_p$$

para todo $i \in I_n$. Além disso, pelo **Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener** em $L^p(R^n)$ **(Teorema2.3(3))**, vamos obter

$$\|v_k\|_{1,p} = \|v_k\|_p + \|Dv_k\|_p \leq \|\mathcal{M} u\|_p + \sum_{i=1}^n \|\mathcal{M} D_i u\|_p \leq A_p \|u\|_p + A_p \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p \leq c < \infty$$

onde A_p é uma constante positiva que depende de p e da dimensão n. Logo, v_k é uma sequência limitada em $W^{1,p}(R^n)$ tal que $v_k \longrightarrow \mathcal{M} u$ pontualmente em R^n. Pelo **Teorema 3.15 (Compacidade fraca)**, $\mathcal{M} u \in W^{1,p}(R^n)$, $v_k \rightharpoonup \mathcal{M} u$ em $L^p(R^n)$ e $D_i v_k \rightharpoonup D_i \mathcal{M} u$ em $L^p(R^n)$ $\forall i \in I_n$. Pelo **lema de Mazur**, existe uma subsequência de v_k, que também denotaremos por v_k, tal que

$$w_l := \sum_{k=1}^{l} a_k D_i v_k \longrightarrow D_i\mathcal{M}u$$

em $L^p(R^n)$ para todo $i \in I_n$, onde $a_k \geq 0$ $\forall k \in \{1,...,l\}$ e $\sum_{k=1}^{l} a_k = 1$. Logo, $w_l \longrightarrow D_i\mathcal{M}u$ em medida para todo $i \in I_n$, daí existe uma subsequência, que também denotaremos por w_l, tal que $w_l \longrightarrow D_i\mathcal{M}u$ q.t.p em R^n $\forall i \in I_n$. Como $|D_i v_k| \leq \mathcal{M}D_i u$, teremos que

$$|w_l| = |\sum_{k=1}^{l} a_k D_i v_k| \leq \sum_{k=1}^{l} a_k |D_i v_k| \leq \sum_{k=1}^{l} a_k \mathcal{M}D_i u = \mathcal{M}D_i u \sum_{k=1}^{l} a_k = \mathcal{M}D_i u.$$

Logo,

$$|D_i\mathcal{M}u| = \lim_{l\to\infty} |w_l| \leq \mathcal{M}D_i u$$

para todo $i \in I_n$ q.t.p em R^n. ■

Teorema 4.4 (Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em $W^{1,p}(R^n)$) *Seja* $1 < p \leq \infty$. *Se* $u \in W^{1,p}(R^n)$, *então* $\mathcal{M}u \in W^{1,p}(R^n)$ *e*

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,p} \leq A_p \|u\|_{1,p}$$

onde A_p *é uma constante positiva que depende de* p *e da dimensão* n.

Prova: Vamos começar considerando o caso $1 < p < \infty$. Afirmamos que $|D\mathcal{M}u(x)| \leq \mathcal{M}|Du|(x)$ q.t.p em R^n. Com efeito, seja $x \in R^n$. Se $|D\mathcal{M}u(x)| = 0$ a afirmação está provada. Logo, podemos assumir que $|D\mathcal{M}u(x)| \neq 0$. Agora, defina $D_h u := \langle Du, h\rangle$ para todo h em R^n tal que $|h| = 1$, onde D_h denota a derivada na direção h. Portanto, podemos considerar $h = D\mathcal{M}u(x)/|D\mathcal{M}u(x)|$. Além disso, rotacionando os eixos coordenados de modo que h coincida com algum dos vetores unitários e_i, vamos obter

$$|D\mathcal{M}u(x)| = |D_h\mathcal{M}u(x)| = |\langle D\mathcal{M}u(x), h\rangle| = |D_i\mathcal{M}u(x)| = \bullet.$$

Sabemos, do teorema anterior, que $|D_i\mathcal{M}u| \leq \mathcal{M}D_i u$ q.t.p em R^n, daí

$$\bullet = \mathcal{M}D_i u(x) = \mathcal{M}\langle Du(x), h\rangle = \mathcal{M}D_h u(x).$$

Agora, note que, fixando arbitrariamente x em R^n

$$\mathcal{M}D_h u(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |D_h u(y)| dy = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |\langle Du(y), h\rangle| dy.$$

Ora, $|\langle Du(y), h\rangle| \leq |Du(y)||h| = |Du(y)|$. Logo,

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |\langle Du(y), h\rangle| dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |Du(y)|dy \leq \mathcal{M}|Du|(x).$$

Portanto, $\mathcal{M}D_h u(x) \leq \mathcal{M}|Du|(x)$, daí

$$|D\mathcal{M}u(x)| \leq \mathcal{M}|Du|(x)$$

em quase todo ponto de R^n. Logo, pelo Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener para $L^p(R^n)$, obtemos

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,p} = \|\mathcal{M}u\|_p + \|D\mathcal{M}u\|_p \leq A_p\|u\|_p + \|\mathcal{M}|Du|\|_p \leq A_p\|u\|_p + A_p\|Du\|_p = A_p\|u\|_{1,p}$$

daí,

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,p} \leq A_p\|u\|_{1,p}.$$

O que conclui o caso em que $1 < p < \infty$. Agora, suponha que $p = \infty$ e tome u em $W^{1,\infty}(R^n)$. Então, o **Teorema 4.2** nos diz que u é lipschitziana, daí, pelo **Teorema 4.1**, $\mathcal{M}u$ também será lipschitziana. Portanto, $\mathcal{M}u \in W^{1,\infty}(R^n)$. Sabendo que $\|.\|_{C^{0,1}(R^n)} = \|.\|_{W^{1,\infty}(R^n)}$ obteremos,

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,\infty} = \|\mathcal{M}u\|_{C^{0,1}(R^n)} = \|\mathcal{M}u\|_\infty + [\mathcal{M}u]_{Lip} = \bullet.$$

Ora, sabemos que u é lipschitziana. Então, podemos escrever $|u_h(x) - u(x)| \leq [u]_{Lip}|h|$ para todo $x, h \in R^n$ tal que $h \neq 0$. Logo, a demonstração do **Teorema 4.1**, nos permite concluir que $|(\mathcal{M}u)_h(x) - \mathcal{M}u(x)| \leq [u]_{Lip}|h|$. Logo, $[\mathcal{M}u]_{Lip} \leq [u]_{Lip}$. Portanto,

$$\bullet \leq \|\mathcal{M}u\|_\infty + [u]_{Lip}.$$

Ora, o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em $L^P(R^n)$, quando $p = \infty$, nos fornece $\|\mathcal{M}u\|_\infty \leq A_\infty\|u\|_\infty$ onde $A_\infty = 1$. Então,

$$\|\mathcal{M}u\|_\infty + [u]_{Lip} \leq \|u\|_\infty + [u]_{Lip} = \|u\|_{1,\infty}$$

isto é,

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,\infty} \leq \|u\|_{1,\infty}.$$

Ou seja,

$$\|\mathcal{M}u\|_{1,\infty} \leq A_\infty\|u\|_{1,\infty}$$

onde $A_\infty = 1$. Então, podemos concluir que o operador maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M} : W^{1,\infty}(R^n) \longrightarrow W^{1,\infty}(R^n)$ é limitado quando $1 < p \leq \infty$. ■

5 CONCLUSÃO

Comprovamos a validade do Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener em espaços de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ quando $1 < p \leq \infty$. Neste resultado usamos como ingredientes principais em sua demonstração o próprio Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener, em $L^p(R^n)$, e a caracterização do espaço de Sobolev $W^{1,\infty}(R^n)$, que nos fornece $W^{1,\infty}(R^n) = C^{0,1}(R^n)$.

Para chegarmos ao primeiro destes ingredientes, usamos o Lema de recobrimento de Vitali e o "The layer cake representation". E para o segundo utilizamos a noção de quociente diferencial e os teoremas básicos da teoria de espaços de Sobolev. Além disso, mostramos aqui a propriedade de compacidade fraca do espaço de Sobolev $W^{1,p}(R^n)$ quando $1 < p < \infty$, o que nos permitiu provar o nosso principal teorema e também mostramos as propriedades fundamentais da função maximal de Hardy-Littlewood de uma função u e provamos que $\mathcal{M}u$ é lipschitziana sempre que u também o é. Apesar de ser um teorema simples, nos deu a peça fundamental para provarmos a igualdade entre as normas dos espaços $W^{1,\infty}(R^n)$ e $C^{0,1}(R^n)$, o que nos possibilitou provar o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener quando $p = \infty$.

REFERÊNCIAS

EVANS, L.C.; GARIEPY, R.F.Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton, FL: CRC press, 1992.

FOLLAND, Gerald B. Real analysis: modern techniques and their applications. New york, NY: John Wiley e Sons, 1999.

LEONI, G. A first course in Sobolev spaces. Providence, RI: American Mathematical Soc., 2009.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

WHEEDEN, R.L.; ZYGMUND, A. Measure and integration. 1.ed. Boca Raton, FL: CRC press, 1977.

BREZIS, Haïm. Analyse Fonctionnelle: théorie et applications. Paris: Masson, 1983. (Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise)

EVANS, Lawrence C. Partial differential equations. 1ª .ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 1998. (Grauate Studies in Mathematics, 19)

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. Fundamentos de análise funcional. Coleçao Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

BREZIS, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New york, NY: Springer Science e Business Media, 2010.

TRUDINGER, N; GILBARG, D. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer, 1998.

STEIN, E.M., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, 1970.