UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NÍCOLAS ALCÂNTARA DE ANDRADE

UM TEOREMA TIPO PICARD PARA A APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA DE SUPERFÍCIES CMC-1 IMERSAS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO E DE SITTER 3-DIMENSIONAL

FORTALEZA

2019

NÍCOLAS ALCÂNTARA DE ANDRADE

UM TEOREMA TIPO PICARD PARA A APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA DE SUPERFÍCIES CMC-1 IMERSAS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO E DE SITTER 3-DIMENSIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A568 Andrade, Nicolas Alcântara de.
Um teorema tipo-Picard para a aplicação de Gauss hiperbólica de superfícies CMC-1 imersas no espaço hiperbólico e no espaço de Sitter 3-dimensional / Nicolas Alcântara de Andrade. – 2019.
54 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge.

1. Superfícies de Bryant . 2. Aplicação de Gauss Hiperbólica. 3. . CMC-1 faces. I. Título.
CDD 510

NÍCOLAS ALCÂNTARA DE ANDRADE

UM TEOREMA TIPO PICARD PARA A APLICAÇÃO DE GAUSS HIPERBÓLICA DE SUPERFÍCIES CMC-1 IMERSAS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO E DE SITTER 3-DIMENSIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovoda em: __ / __ / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luqésio Petrola de Melo Jorge (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof Dr. Ernani Ribeiro Junior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Francesco Mercuri
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Prof. Dr. Leandro De Freitas Pessoa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao Prof. Dr. Luquésio Petrola de Melo Jorge, pela excelente orientação, ensinamentos e dedicação.

Aos professores participantes da banca examinadora Ernani Ribeiro, Abdênado Alves, Francesco Mercuri e Leandro de freitas pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de doutorado Anderson Feitosa, Diego Eloi, Diego Sousa, Eddygledson Gama, Francisco Edson, Francisco Yure, Itamar Sales, João Luís, João Victor, José Eduardo, Leo Ivo, Marlon Santos, Renan Santos, Roger Oliveira e Wanderley Oliveira , pelas reflexões, críticas e sugestões,

Aos amigos Elaine Oliveira Emmanuel Bastos, Eva Gonzaga Henrique Demétrio, Manuel Sousa, Nathalie Costa, Pedro Guima e Sarah Pinheiro, à minha Mãe e minha irmã pelo apoio.

Aos professores do departamento de Matemática da UFC Abdênago Alves, Alexandre Fernades, Antônio Caminha, Daniel Cibutaru, Ernani Ribeiro, Fábio Montenegro, Gregório Pacelli, Luciano Mari, Luquésio Petrola e Marcos Melo, e aos funcionários do departamento de Matemática da UFC Andréia, Jéssica, Márcio e Tavarez.

"O preço de obter aquilo que você deseja é obter aquilo que você desejou."Neil Gaiman

RESUMO

Neste trabalho estudamos a aplicação de Gauss hiperbólica de superfícies CMC-1 imersas no espaço hiperbólico 3-dimensional, conhecidas como superfícies de Bryant, e das CMC-1 *faces* no espaço de Sitter 3-dimensional. Obtemos uma estimativa para o número de pontos omitidos na imagem de tal aplicação no caso de curvatura total finita e que tal estimativa é ótima, obtendo assim um teorema tipo Picard para essas superfícies.

Palavras-chave: Aplicação de Gauss Hiperbólica. Superfícies de Bryant. CMC-1 *faces* no espaço de Sitter.

ABSTRACT

In this work we study the hyperbolic Gauss map of CMC-1 immersed surfaces in hyperbolic 3-space, also known as Bryant surfaces, and of CMC-1 faces in the de Sitter 3-space. We obtain a sharp estimate of the missing points of this map when the surface has finite total curvature, providing a Picard-type theorem for hyperbolic Gauss map in these spaces.

Keywords: Hyperbolic Gauss Map. Bryant Surfaces. CMC-1 Faces in de Sitter 3-space.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um problema clássico da teoria de superfícies mínimas imersas no $\mathbb{R}^3$ é determinar o número de pontos omitidos na imagem da aplicação normal de Gauss, ou seja, se M é uma superfície mínima e $G : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é sua aplicação normal de Gauss, o problema consiste em estimar o número de elementos do conjunto $\mathbb{S}^2 \backslash G(M)$. Em outras palavras, determinar se existe um teorma do tipo Picard.

Teorema (Pequeno Teorema de Picard)**.** *Uma função inteira que omite dois valores finitos é constante.*

Osserman [20] [21], considerou o problema adicionando a hipótese da curvatura total ser finita. Nesse caso, ele foi capaz de mostrar que $\sharp(\mathbb{S}^2 \backslash G(M)) \leqslant 3$. Entretanto, Osserman não foi capaz de mostrar se seu resultado era ótimo ou não, surgindo então o problema de determinar se esse número de pontos é o melhor possível. Tal problema ficou conhecido como *problema de Osserman.* Fujimoto [10], por sua vez, retirou a hipótese da curvatura total ser finita e mostrou que se M não for o plano, então $\sharp(\mathbb{S}^2 \backslash G(M)) \leqslant 4$.

Recentemente, Jorge e Mercuri [16] conseguiram responder o problema de Osserman através do seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Jorge-Mercuri [16])**.** *Se a aplicação de Gauss de uma superfície mínima, completa e com curvatura total finita omite três ou mais pontos, então a superfície é um plano.*

Isto é, se M não for o plano então $\sharp(\mathbb{S}^2 \backslash G(M)) \leqslant 2$, sendo esse valor ótimo pois sabe-se que no catenóide a aplicação normal de Gauss omite exatamente dois pontos. Este resultado se baseia em fatos elementares sobre superfícies compactas, funções modulares e resultados sobre estabilidade de superfícies mínimas. Com base nisso, pode-se perguntar quais outras superfícies podem ser estudadas de um ponto de vista similar.

Como candidata natural temos as supefícies de Bryant. As superfícies de Bryant são superfícies imersas no espaço hiperbólico com curvatura média constante igual à 1, i.e. CMC-1. Tais superfícies possuem muitas propriedades em comum com as superfícies mínimas. De fato, Bryant mostrou em [4] que tais superfícies admitem uma representação análoga à representação de Weierstrass das superfícies mínimas, e Lawson mostrou que existe uma correspondência entre superfícies mínimas e as de Bryant, conhecida como correspondência de Lawson, que permite obter superfícies mínimas a partir de uma superfície de Bryant e vice versa.

Dessa forma é natural perguntar quais resultados da teoria de superfícies mínima são verdadeiros para superfícies de Bryant. Em particular pode-se perguntar quantos pontos a imagem da aplicação de Gauss hiperbólica (que é o análogo da aplicação normal de Gauss das superfícies mínimas) omite em uma superfície de Bryant, ou seja, perguntar se existe um teorema do tipo Picard para a aplicação de Gauss Hiperbólica de tais superfícies. Vários resultados parciais análogos ao do caso mínimo no $\mathbb{R}^3$ foram obtidos, com destaque para Z. Yu [27] que mostrou um resultado análogo ao do Fujimoto [10] (omite no máximo quatro pontos) e para Collin, Hauswirth e Rosenberg [13] que mostraram um resultado análogo ao do Osserman (omite três pontos supondo a curvatura total finita).

As superfícies de Bryant com curvatura total finita, porém, não são os únicos candidatos. Ainda no contexto hiperbólico é possível citar mais dois possíveis casos de supéficies naturais onde tal investigação pode ser feita. As chamadas *Superfícies de Bryant Algébricas*, que são superfícies de Bryant com curvatura total dual finita, onde o conceito de dualidade de superfícies de Bryant foi introduzido por Umehara e Yamada [26]. A aplicação de Gauss hiperbólica de tais Superfícies duais possuem uma relação muito forte com a aplicação de Gauss hiperbólica da superfície original, de forma que a finitude da curvatura total dual dá informações sobre a aplicação de Gauss hiperbólica da superfície original. E por fim, temos as chamadas *CMC-1 faces* imersas no espaço de *de Sitter*. Tais supefícies possuem uma relação com as superfícies de Bryant algébricas análoga à correspondência de Lawson.

Nosso objetivo é estudar tais superfícies de um ponto de vista análogo ao de Jorge e Mercuri [16] e, assim, obter um teorema tipo Picard ótimo para cada uma delas.

Teorema. *Seja M*

(i) Uma superfície completa CMC-1 imersa em $\mathbb{H}^3$ com curvatura total finita
(ii) Uma superfície completa CMC-1 imersa em $\mathbb{H}^3$ com curvatura total dual finita,
(iii) Uma CMC-1 face imersa no espaço de de Sitter do tipo finito com fins elípticos.

Se G é a aplicação de Gauss Hiperbólica de M, então ou G omite no máximo dois pontos ou G é constante, e nos dois primeiros casos M é uma horoesfera e no terceiro M é um superfície tipo espaço horosférica.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos básicos da teoria de superfícies mínimas e os resultados que motivaram este trabalho. Apesar de não abordarmos o caso mínimo, nossos resultados são motivados por resultados nesse contexto, então, por completude, apresentaremos um resumo das principais propriedades delas. Estes resultados serão apresentados na Seção 2.1. Na Seção 2.2 comentamos o resultados de Jorge e Mercuri [16] que servem de ferramentas básicas para os nossos resultados.

2.1 Superfícies Mínimas

Nesta seção apresentamos um resumo das propriedades de superfícies mínimas. Definimos uma superfície mínima no espaço euclidiano 3-dimensional da seguinte forma:

Definição 2.1. *Uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de superfície mínima se sua curvatura média H for identicamente nula.*

Observação 2.1. *É bem conhecido que as superfícies mínimas são os pontos críticos do funcional área. Tal fato admite a seguinte interpretação: dado uma curva de Jordan $\gamma \in \mathbb{R}^3$, dentre todas as supefícies imersas no $\mathbb{R}^3$ que possuem γ como fronteira, aquela que tiver a menor área é uma superfície mínima.*

Uma das principais propriedades das superfícies mínimas é o fato delas poderem ser representadas por um par de funções holomorfas chamado *referencial de Weierstrass.* Tal fato é notável pois permite estudar superfíces mínimas usando as ferramentas de análise complexa. A saber, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Representação de Weierstrass [6])**.** *Seja Ω uma superfície de Riemann, $g, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funçôes meromorfas e ω uma 1-forma holomorfa definidas em Ω dada por $\omega(z) = f(z)dz$. Então temos que $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por*

$$F(z) = Re \int_{z_0}^{z} ((1 - g^2(\zeta))f(\zeta),\ i(1 + g^2(\zeta))f(\zeta),\ 2g(\zeta)f(\zeta))\ d\zeta, \tag{1}$$

é uma imersão mínima e conforme. Reciprocamente, dada $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa, então existem uma função meromorfa g e uma 1-forma holomorfa ω definida em Ω tais que a equação (1) é satisfeita.

O par (g, ω), ou (g, f) é chamado de representação de Weierstrass. Como uma consequência direta do teorema, a métrica da imersão e a curvatura gaussiana podem ser descritas usando a representação de Weierstrass da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1+g\overline{g})^2\omega\overline{\omega} \\ &= (1+|g|^2)^2|\omega|^2 \\ &= |f|^2(1+|g|^2)^2|dz|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$K = -4\left(\frac{|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2. \tag{3}$$

Definimos agora a aplicação normal de Gauss.

Definição 2.2. *Seja $M \in \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada por um campo vetorial unitário*

$$N = g_1N_1 + g_2N_2 + g_3N_3.$$

A aplicação normal de Gauss $G : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação que associa cada ponto $p \in M$ ao ponto $G(p) = (g_1(p), g_2(p), g_3(p)) \in \mathbb{S}^3$.

Temos o seguinte resultado clássico.

Proposição 2.1 ([6])**.** *Se M é uma superfície mínima imersa em $\mathbb{R}^3$ então sua aplicação de Gauss é holomorfa.*

Podemos definir ainda o conceito de curvatura total:

Definição 2.3. *Uma superfície mínima $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ possui curvatura total finita se*

$$\int_M |K| = -\int_M K < \infty.$$

A curvatura total possui uma relação muito próxima com a aplicação de Gauss da superfície. De fato, a curvatura total é o grau da apliação de Gauss.

Em 1964, Osserman provou um importante resultado acerca do tipo conforme de tais superfícies, mais precisamente ele provou o seguinte:

Teorema 2.2 (Osserman [20])**.** *Seja M uma superfície mínima completa com curvatura* *total finita imersa em $\mathbb{R}^3$. Então existem uma superfície de Riemann $\overline{M}$ compacta e um conjunto finito $E = \{p_1, ..., p_n\} \in \overline{M}$ tais que M é conforme a $\overline{M} \setminus E$. Além disso, a aplicação normal de Gauss é holomorfa em M e se estende meromorficamente para os pontos p_i , $i = 1, ..., n$, e essa extensão é um recobrimento ramificado.*

Observação 2.2. *Os pontos do conjunto E são chamados de fins da variedade.*

Observação 2.3. *Uma superfície que possui a propriedade de ser conforme a uma superfície de Riemann compacta menos um número finito de pontos é dita uma superfície de tipo topológico finito. Em particular, uma das afirmações do teorema é que superfícies mínimas com curvatura total finita são do tipo topológico finito.*

2.2 Imersões Cuja Aplicação Normal de Gauss Omite três pontos

Uma vez que a aplicação de Gauss G de uma superfície mínima é holomorfa, e no caso com curvatura total finita ela se estende meromorficamente para os fins, faz sentido perguntar quais resultados da análise complexa são verdadeiros para ela. Em particular se existe um teorema do tipo Picard para G.

Durante muito tempo, a melhor resposta para essa pergunta era o resultado de Osserman.

Teorema 2.3 (Osserman [20]). *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita. Se a aplicação normal de Gauss omitir mais de três pontos, então M é um plano.*

Porém nunca foi encontrado na literatura um exemplo de uma tal superície cuja aplicação de Gauss omitisse exatamente três pontos. Jorge e Mercuri mostraram que tal superfície não existe.

Teorema 2.4 (Jorge, Mercuri [16]). *Seja M uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita. Se a aplicação normal de Gauss omitir mais de dois pontos, então M é um plano.*

Porém, diferente do resultado de Osserman, são conhecidos exemplos de tais superfícies cuja aplicação de Gauss omite exatamente dois pontos, a saber, o catenóide. Sendo assim o resultado de Jorge e Mercuri é ótimo.

Nessa seção vamos estudar as técnicas utilizadas por eles para provar o teorema, pois elas serão as ferramentas que utilizaremos para provar os nossos resultados.

Para obter tal teorema, Jorge e Mercuri estudaram o comportamento das imersões mínimas cuja aplicação de Gauss omite três pontos. Em [16] eles apresentam os seguintes resultados.

Definição 2.4. *Seja $M_\mu = \overline{M} \setminus E$ uma superfície do tipo topológico finito com gênero μ e fins $E = \{w_1, ..., w_m\}$. Um fim N_{wa}, $w \in E$ é* ***normal*** *se é um fim e $\gamma = \partial E_w$ é uma geodésica fechada mergulhada de M.*

Considere o aberto $U \supset E$ dado por

$$U = \bigcup_{j=1}^{m} U_j,$$

onde os U_j, $j = 1, ..., m$ formam uma coleção de fins disjuntos. Tome $U_0 = M \setminus U$ e as curvas $\gamma_j = \partial U_j$ com orientação induzida por U_0. Denote por η_j o campo vetorial unitário ortogonal a γ_j e apontando para o exterior de U_0.

Lema 2.1 (Jorge-Mercuri [16]). *Existe uma coleção de fins normais $N_j \ni w_j$, $1 \leq j \leq m_j$ tais que*

(i) Se M não é um anel, então todos os N_j são 2 a 2 disjuntos.
(ii) 2 fins normais N_i e N_j possuem $N_i \cap N_j \neq \emptyset$ se, e somente se, M é um anel. Neste caso $\partial N_i = \partial N_j$.
(iii) A aplicação $\phi_j : \gamma_j \times [0, \infty) \longrightarrow N_j$, $\gamma_j = \partial N_j$, dada por

$$\phi_j(\theta, t) = exp_{\gamma_j(\theta)}(t\eta(\theta))$$

é um difeomorfismo.
(iv) Existe uma constante $c > 0$ tal que se $\gamma(t)$ é tal que,$\gamma(t_1) \in N_i$, $\gamma(t_2) \in N_j$ com $t_1 \leq t \leq t_2$ e $i \neq j$, então $l(\gamma) > c$.

Além disso, eles fizeram o seguinte estudo sobre imersões cuja aplicação de Gauss omite três pontos. Suponha agora que $M = \overline{M}_\mu \setminus E$ é uma superfície com tipo topológico finito com fins $E = \{w_1, ..., w_m\}$, gênero $\mu \geq 1$, aplicação de Gauss $G : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ e conjunto de pontos omitidos $Y = \mathbb{S}^2 \setminus G(M)$, onde $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Como M possui tipo topológico finito, G possui uma extensão para $\overline{M}$ que ainda será denotada por G. Podemos considerar, após uma rotação da imersão se necessário, que $y_3 = \infty$. Assim, compondo a aplicação de Gauss com a projeção estereográfica, temos uma aplicação $g : M \longrightarrow \mathbb{C}$, que omite dois pontos a e b, $a \neq b$. Compondo com uma aplicação homográfica, podemos supor que $a = 0$ e $b = 1$. Considere $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | z = u + iv, v > 0\}$, $\mathbb{H}^\infty = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, a função modular $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ com domínio básico

$$V_0 = \{z \in \mathbb{H}^\infty | 0 \leq u \leq 1,\ v \geq \sqrt{1/4 - (u - 1/2)^2}\}$$

Com isso eles provaram o seguinte lema:

Lema 2.2 (Jorge-Mercuri [16]). *Nas condições acima, dados $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0 < 1/4$, existe uma constante positiva $c_0 > 0$, tal que*

$$\inf_{z \in V(\infty,\epsilon_0)} \left\{ \frac{|z|}{|\psi(z)|} \;\Big|\; z \in A_0 \right\} \geq c_0 > 0,$$

onde $V(\infty, \epsilon_0) = \{z \in \mathbb{H} \mid Im(z) \geq \frac{1}{\epsilon_0}\}$ e $A_0 = V(\infty, \epsilon_0) \setminus V(\infty, \epsilon_1)$.

Observação 2.4. *Seja $\sigma_{\epsilon_0} = \{(x, 1/\epsilon_0) | x \in \mathbb{R}\}$, e sejam $\sigma_+ = \psi(\sigma_{\epsilon_0}[0,1])$ e $\sigma_- = \psi(\sigma_{\epsilon_0}[-1,0])$. Jorge e Mercuri mostraram em [16] que $\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_-$ forma a fronteira de um disco topológico K_0. Além disso, eles mostram que se $w \in E_\infty$, então $G(B^{\mathbb{S}^2}_{\epsilon_0'}(G(w))) \subset \mathbb{C} \setminus K_0$, onde $0 < \epsilon_0' < \epsilon_0$.*

2.3 Decaimento de Curvatura

Em [11], Greene e Wu estudam o decaimento de curvatura de superfícies de Riemann e obtêm um importante resultado sobre existência de funções harmônicas. O resultado deles se baseia em mostrar que a exponencial $exp : T_pM \longrightarrow M$ é uma quasi-isometria.

Definição 2.5. *Seja $\phi : N \longrightarrow M$ uma função entre duas superfícies de Riemann. Dizemos que ϕ é uma quasi-isometria se ϕ for um difeomorfismo e além disso existirem constantes positivas μ e ν tais que, para todo vetor tangente X temos*

$$\mu |X|_N \leq |\phi_*(X)|_M \leq \nu |X|_N.$$

Greene e Wu demonstram o seguinte teorema.

Teorema 2.5 (Greene, Wu [11]). *Seja M uma variedade com pólo. Defina as seguintes funções $k, K : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, dadas por:*

$$-k(r) = \min\{0,\ \textit{curvatura radial em qualquer ponto } x \in M \textit{ onde } \rho(x) = r\},$$
$$K(r) = \max\{0,\ \textit{curvatura radial em qualquer ponto } x \in M \textit{ onde } \rho(x) = r\}.$$

Suponha que $\int_0^\infty sk(s)ds < \infty$ *e* $\int_0^\infty sK(s)ds < 1$*. Então em* M *as únicas funções harmônicas positivas são as constantes. Além disso, se* M *for Kähler, então não existe função holomorfa limitada não constante.*

Para obter tal teorema, os autores começam fazendo uma discussão sobre modelos.

Definição 2.6. *Seja* M *uma variedade* n*-dimensional. Dizemos que* (M, o) *é um modelo* n*-dimensional com métrica*

$$g = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2, \quad f(r) > 0 \ , \quad r > 0$$

em coordenadas geodésicas polares. Além disso, sua curvatura radial é dada por $K(r)$*. Além disso, dado o ponto* $o \in M$ *definimos* $v(r)$ *e* $V(r)$ *como sendo o volume da* r*-esfera* $S(r)$ *e da* r*-bola aberta* $B(r)$ *centrada em* o*, respectivamente.*

Os seguintes lemas são fundamentais na demonstração do Teorema (2.5):

Lema 2.3 ([11])**.** *Seja* (N, p) *um modelo com curvatura radial não positiva* $-k$*,* $k \geq 0$*. Considere a métrica de* N *em coordenadas geodésicas polares* $g = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$*. Então são equivalentes:*

(A) $exp : T_pN \longrightarrow N$ *é uma quasi-isometria;*
(B) Existe uma constante $\nu \geq 1$ *tal que* $r \leq f(r) \leq \nu r$*;*
(C) Existe uma constante $\nu \geq 1$ *tal que* $1 \leq f'(r) \leq \nu$*;*
(D) $\int_0^\infty sk(s)ds < \infty$*.*

Lema 2.4 ([11])**.** *Seja* (N, p) *um modelo com curvatura radial não negativa* K*. Considere a métrica de* N *em coordenadas geodésicas polares* $g = dr^2 + f(r)^2 d\theta^2$*. Então são equivalentes:*

(A) $exp : T_pN \longrightarrow N$ *é uma quasi-isometria;*
(B) Existe uma constante μ*,* $0 < \mu \leq 1$ *tal que* $\mu r \leq f(r) \leq r$*;*
(C) Existe uma constante μ*,* $0 < \mu \leq 1$ *tal que* $\mu \leq f'(r) \leq 1$*.*

Observação 2.5. *Usando os itens* (B) *ou* (C) *obtem-se que* $\int_0^\infty sK(s)ds \leq \frac{1}{\mu} < \infty$*. daí, usando* (A) *e* (C) *tem-se que* $\int_0^\infty sK(s)ds \leq 1$*.*

3 SUPERFÍCIES DE BRYANT

Neste capítulo estudaremosa teoria das superfícies de Bryant imersas em $\mathbb{H}^3$. Apresentaremos a motivação para o estudo de tais superfícies (ver seção 3.1) e enunciaremos um resultado que funciona como ferramenta básica para os estudo dessas superfícies, a representação de Bryant (ver seção 3.3). Em seguida apresentaremos a aplicação de Gauss hiperbólica, objeto de nosso estudo, e discutiremos o comportamento dela no caso da superfície possuir curvatura total finita (ver seção 3.5). Por fim definimos uma relação de dualidade nesses superfícies e introduziremos o conceito de superfícies de Bryant algébricas, isto é, com curvatura total dual finita.

3.1 Correspondência de Lawson

Seja $M^3(\overline{K})$ o espaço forma 3-dimensional de curvatura seccional constante $\overline{K}$. Para uma imersão $\phi : U \mapsto M^3(\overline{K})$ com métrica induzida $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$, conexão ∇, curvatura Gaussiana K e operador de Weingarten S, temos que:

(i) $K - \overline{K} = det(S)$ **(Equação de Gauss)**;
(ii) $\langle S([X,Y], Z\rangle = \langle \nabla_X S(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y S(X), Z\rangle$ **(Equação de Codazzi)**.

Assuma que ϕ possui CMC H, i.e., $H = tr(S)$ é constante. Escolha $c \in \mathbb{R}$ e defina

$$\tilde{S} = S + c.Id\ ,\ \tilde{K} = \overline{K} - 2ctr(S) - c^2.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{S}([X,Y], Z\rangle &= \langle S([X,Y], Z\rangle + c\langle [X,Y], Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X S(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y S(X), Z\rangle + c\langle \nabla_X Y, Z\rangle - c\langle \nabla_Y X, Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X \tilde{S}(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y \tilde{S}(X), Z\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
K - \tilde{K} &= K - (\overline{K} - 2ctr(S) - c^2 \\
&= det(S) + 2ctr(S) + c^2 \\
&= det(S + c.id) \\
&= det(\tilde{S}).
\end{aligned}$$

Portanto as equações de Gauss e Codazzi são verdadeiras em $M^3(\tilde{K})$ trocando S por $\tilde{(S)}$ (observe que K é intrínseco e portanto invariante). Dessa forma, existe uma imersão $\tilde{\phi} : U \longrightarrow M^3(\tilde{K})$ com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, operador de Weingarten $\tilde{S}$, e $\tilde{\phi}(U)$ é isométrico à $\phi(U)$. Além disso, a curvatura média $\tilde{H}$ de $\tilde{\phi}(U)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= tr(\tilde{(}S) \\ &= tr(S) + c \\ &= H + c \end{aligned}$$

Assim, obtemos a relação de Lawson entre uma superfície CMC H em $M^3(\overline{K})$ e uma superfície CMC $H+c$ em $M^3(\overline{K} - ctr(S) - c^2)$. Em particular, tomando $H = \overline{K} = 0$ e $c = 1$, obtemos a correspondência entre superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e superfícies CMC-1 em $\mathbb{H}^3$.

Observação 3.1. *A superfície obtida através dessa correspondência é chamada de superfície prima da superfície original.*

3.2 Espaço Hiperbólico

Seja $\mathbb{L}^4$ o espaço de Lorentz-Minkowski 4-dimensional com a métrica de Lorentz

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{4}$$

Definimos o espaço hiperbólico 3-dimensional como sendo

$$\mathbb{H}^3 = \{ v \in \mathbb{L}^4 | \langle v, v \rangle = -1, x_0(v) > 0 \}$$

com a métrica induzida do $\mathbb{L}^4$. Daremos a $\mathbb{H}^3$ a orientação na qual os vetores v_1, v_2, v_3 formam uma base orientada de $T_v\mathbb{H}^3$ se, e somente se, v, v_1, v_2, v_3 forma uma base de $\mathbb{L}^4$. Temos assim que $\mathbb{H}^3$ é uma variedade Riemanniana 3-dimensional simplesmente conexa com curvatura seccional constante -1. Além disso suas geodésicas são formadas por interseção de $\mathbb{H}^3$ com 2-planos do $\mathbb{L}^4$ que passam pela origem de $\mathbb{L}^4$.

O espaço $\mathbb{H}^3$ não é compacto, mas pode ser compactificado adicionando uma "esfera no infinito" $\mathbb{S}^2_\infty$ de forma que os movimentos rígidos de $\mathbb{H}^3$ se extendem a um homeomorfismo de $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{S}^2_\infty \cup \mathbb{H}^3$.

Identificamos o $\mathbb{L}^4$ com o conjunto das matrizes Hermitianas 2×2 $Herm(2) = \{X^* = X\}$ do seguinte modo

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Com essa identificação podemos representar $\mathbb{H}^3$ como

$$\mathbb{H}^3 = \{XX^* | X \in SL(2,\ \mathbb{C})\} \qquad X^* = \overline{X}^t = [\overline{z_{ij}}]^t$$

com a métrica

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}tr(X, \tilde{Y}),\ \langle X, X\rangle = -det(X)$$

onde $\tilde{Y}$ é o cofator da matriz Y. Temos ainda que $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm id\}$ age isometricamente em $\mathbb{H}^3$ por

$$X \mapsto YXY^*,\ X \in \mathbb{H}^3,\ \ Y \in PSL(2,\mathbb{C}). \tag{6}$$

Note que a aplicação $PSL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Herm(2)$ tal que $F \mapsto FF^*$ toma valores em $\mathbb{H}^3$.

3.3 Superfície de Bryant

Superfícies de curvatura média constante (CMC) são objetos de grande interesse pois são pontos críticos do funcional área com respeito a variações que preservam o volume e fixam a fronteira. As superfícies mínimas constituem um caso particular de superfícies CMC de grande importancia, pois são pontos críticos do funcional área para todas as variações que fixam a fronteira, não apenas para aquelas que preservam o volume. Além disso as superfícies mínimas podem ser descritas em termos de um par de funções holomorfas, chamado *Referencial de Weierstrass.* Muitas propriedades das superfícies mínimas foram obtidas através da manipulação desse referencial.

Em 1970, Lawson descreveu uma correspondência elementar entre superfícies mínimas e superfícies CMC em outros espaços forma de dimensão 3. Tal correspondência ficou conhecida como *correspondência de Lawson.* Em particular, tal resultado mostrou que superfícies mínimas no espaço euclidiano possuem uma correspondência (local) com superfícies CMC-1 no espaço hiperbólico. Tal correspondência se dá atravéz do referencial de Weierstrass da superfície mínima que descreve uma superfície CMC-1 no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ que é isométrica à superfície mínima origial. Dessa forma, perguntou-se se tais superfícies também seriam descritas por um par de funções holomorfas de forma análoga ao referencial de Weierstrass. Tal pergunta foi respondida afirmativamente em 1987 por Robert Bryant [4]. Tal representação ficou conhecida como *Representação de Bryant, Representação de Weierstrass-Bryant, ou Representação de Weierstrass.* Desde então, as superfícies com CMC-1 no espaço hiperbólico ficaram conhecidas como *Superfícies de Bryant.*

Usando a correspondência de Lawson e as representações de Weierstrass e Bryant é possível mostrar que as superfícies mínimas e as de Bryant são de fato equivalentes localmente. Dessa forma elas compartilham várias propriedades. As diferenças aparecem quando analisamos propriedades globais.

Vamos descrever agora a representação de Bryant. Considere

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{7}$$

uma matriz de funções holomorfas na variável z. Tome $g = -\frac{dB}{dA}$ e $\omega = AdC - CdA$. Bryant mostrou que

Teorema 3.1 (Representação de Bryant [4]). *Seja M uma superfície de Riemann e $F : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ uma imersão conforme tal que $det(F^{-1}dF) = 0$. Seja $\phi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$, tal que $\phi = FF^*$. Então ϕ é uma imersão de M em $\mathbb{H}^3$ com curvatura média constante igual a 1. Reciprocamente, dada uma imersão $\phi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ com curvatura média constante igual a 1, existe um levantamento holomorfo de ϕ ao recobrimento universal $\tilde{F} : \tilde{M} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$, tal que $det(F^{-1}dF) = 0$ e $\phi = \tilde{F}\tilde{F}^*$.*

Observação 3.2. *Uma aplicação $F : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ holomorfa, tal que $det(F^{-1}dF) = 0$ é chamada de imersão holomorfa nula.*

Observação 3.3. *Considere $F : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ tal que $det(F^{-1}dF) = 0$. Podemos sempre escrever localmente*

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega, \tag{8}$$

onde g é uma função meromorfa e ω é uma 1-forma holomorfa. De fato, escreva

$$F(z) = \begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}), \tag{9}$$

onde z é uma coordenada local conforme e A, B, C, D são holomorfas. Então basta tomar

$$g = -\frac{dB}{dA},\ \omega = AdC - CdA.$$

Como F é holomorfa, as formas ω e $g^2\omega$ também são. F é imersão, então $F^{-1}dF$ nunca se anula. Portanto os pólos de g coincidem com os zeros de ω, e um pólo de ordem k de g é um zero de ordem $2k$ de ω. O par (g, ω) é a representação de Bryant associada a F.

Observação 3.4. *Podemos escrever a 1-forma holomorfa ω em coordenadas locais como $\omega = f(z)dz$. Assim podemos escrever a representação de Bryant como (g, f).*

Observação 3.5. *Sejam*

$$b = \begin{bmatrix} p & -\overline{q} \\ q & \overline{p} \end{bmatrix} \in SU(2) \text{ com } |p|^2 + |q|^2 = 1$$

e

$$\alpha = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & g \end{bmatrix} \omega \ , \text{ com } \alpha = F^{-1}dF \text{ e } \phi = FF^*.$$

então as superfícies determinadas por α e $b.\alpha.b^*$ coincidem. De fato, a 1-forma holomorfa $b.\alpha.b^*$ induz uma imersão conforme com curvatura média constante igual a 1 $b.\phi.b^*$ que é congruente a ϕ. O referencial de Weierstrass $\tilde{W} = (\tilde{g}, \tilde{\omega})$ correspondente à $b.\phi.b^*$ é dado por

$$\tilde{g} = \frac{pg - \overline{q}}{qg + \overline{p}} \quad e \quad \overline{\omega} = (qg + \overline{p})^2 \omega. \tag{10}$$

2 pares de representação de Bryant (g, ω) e $(\tilde{g}, \tilde{\omega})$ são ditos equivalentes se satisfazem (10).

Vamos comparar agora a representação de Bryant com a representação de Weierstrass.

Observação 3.6. *Note que a representação de Weierstrass pode ser obtida como um limite do teorema de Bryant colapsando o grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ no grupo abeliano $\mathbb{C}^3$.*

Seja F uma imersão de M em $SL(2, \mathbb{C})$ satisfazendo

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & g \end{bmatrix} \omega. \tag{11}$$

Usando a representação de Bryant e a correspondência de Lawson, é fácil ver que se (g, f) é um referencial de Bryant de uma superfície de Bryant então a métrica e a curvatura gaussiana dessa superfície são dadas pelas expressões (2) e (3). Evidenciando assim ainda mais a relação entre elas.

3.4 Aplicação de Gauss Hiperbólica

Em 1986, Epstein [7] introduziu a noção de aplicação de Gauss hiperbólica enquanto estudava superfícies imersas no espaço hiperbólico no modelo da bola de Poincaré. Posteriormente Bryant [4] reintroduziu o conceito, agora no modelo hiperboloide do espaço de Minkowski, da seguinte forma.

Definição 3.1. *Seja M uma superfície imersa no espaço hiperbólico 3-dimensional. De-*

finimos a aplicação de Gauss hiperbólica $G : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ *da seguinte maneira: Dado* $z \in M$*, considere a geodésica normal* γ *orientada partindo de* z*. Definimos então* $G(z)$ *como sendo o ponto onde* γ *intercepta a fronteira ideal* $\mathbb{S}^2_\infty$ *de* $\mathbb{H}^3$*, ou seja*

$$G(z) = \lim_{t\to\infty} \gamma(t).$$

No caso da superfície de Bryant temos a seguinte caracterização. Sejam M uma superfície de Bryant e $F : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ a imersão conforme dada pelo Teorema da representação de Bryant. Denote

$$F(z) = \begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ B(z) & D(z) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Então,

$$G(z) = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD}. \tag{13}$$

Ou ainda, identificando $\mathbb{S}^2_\infty$ com CP^1

$$G(z) = [dA, dC]. \tag{14}$$

Seguindo a terminologia introduzida por Umehara e Yamada [25], chamamos o quociente $g(z) = -\frac{dB}{dA}$ de *aplicação de Gauss Secundária.* Pelo visto acima, temos que essa aplicação de Gauss Secundária nada mais é do que a função meroforma g do referencial de Bryant (g,ω). A motivação para esse nome é a seguinte. Considere uma superfície mínima imersa em $\mathbb{R}^3$ e o referencial de Weierstrass $(\tilde{g},\tilde{f})$. Temos que a função $\tilde{g}$ pode ser interpretada como sendo a composição da aplicação de Gauss com a projeção estereográfica. Daí, vemos que na representação de Weierstrass a função $\tilde{g}$ desempenha dois papéis fundamentais:

(i) Descrever a métrica;

(ii) Descrever a projeção estereográfica do vetor normal unitário.

Já no caso da representação (g,f) de uma superfície de Bryant, os papéis (i) e (ii) não são descritos por apenas por g, a saber g desempenha o papel (i) e G desempenha o papel (ii). Ou seja, podemos pensar como se a representação de Bryant tivesse duas aplicações de Gauss, justificando o nome "secundária".

Umehara e Yamada [25] deduziram a seguinte relação entre a aplicação de Gauss hiperbólica e a aplicação de Gauss secundária

$$S(g) - S(G) = 2Q,$$

Onde

$$\begin{aligned} S(g) &= S_z(g)dz, \\ S_z(g) &= \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2, \\ Q &= \omega dg. \end{aligned}$$

$S_z(g)$ é chamada de *derivada Schwarziana* e Q é chamada de *diferencial de Hopf.*

A aplicação normal de Gauss euclidiana possui algumas características bem conhecidas. Entre elas, destaca-se o fato de que se uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ possui aplicação de Gauss constante, então essa superfície está contida em um plano. Além disso, as singularidades da aplicação de Gauss estimam o quão diferente a superfície é diferente de um plano. No contexto hiperbólico, temos que o análogo dos planos são as horoesferas, e Izumiya, D. Pei e T. Sano [15] mostraram que uma superfície imersa em $\mathbb{H}^3$ que possui aplicação de Gauss hiperbólica constante está contida em uma horoesfera, e além disso eles mostraram que as singularidadesde aplicação de Gauss hiperbólica estima o quão diferente uma superfície é diferente de uma horoesfera. Motivados por essa analogia entre entre a aplicação de Gauss euclidiana e a aplicação de hiperbólica, eles definiram um shape operator hiperbólico a partir da aplicação de Gauss hiperbólica e a partir daí eles obtiveram uma curvatura gaussiana hiperbólica e uma curvatura média hiperbólica. Usando esses objetos hiperbólicos, eles foram capazes de mostrar que uma superfície imersa em $\mathbb{H}^3$ é uma superfície de Bryant se, e somente se, ela possui curvatura média hiperbólica zero! Ou seja, as superfícies de Bryant coincidem com com as superfícies mínimas hiperbólicas (curvatura média hiperbólica zero).

3.5 Curvatura Total Finita

Na teoria de imersões mínimas $\phi : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ as superfícies com curvatura total finita assumem um papel importante. Os principais resultados sobre tais superfície são devidos a Osserman com destaque para o seguinte teorema:

Teorema 3.2 (Osserman [20]). *Seja M uma superfície mínima completa com curvatura total finita imersa em $\mathbb{R}^3$. Então existe uma superfície de Riemann $\overline{M}$ compacta e um conjunto finito $E = \{p_1, ..., p_n\} \in \overline{M}$ tal que M é conforme a $\overline{M} \setminus E$ e a aplicação de*

Gauss pode ser estendida meromorficamente para os pontos de E.

Passando para o contexto hiperbólico, Bryant [4] provou um resultado análogo ao de Osserman:

Teorema 3.3 (Bryant). *Seja M uma superfície de Bryant completa com curvatura total finita imersa em $\mathbb{H}^3$. Então existe uma superfície de Riemann $\overline{M}$ compacta e um conjunto finito $E = \{p_1, \ \dots \ , p_n\} \in \overline{M}$ tal que M é conforme a $\overline{M} \setminus E$.*

Comparando os dois resultados percebemos uma diferença essencial. A aplicação de Gauss hiperbólica é holomorfa,mas ao contrário do caso euclidiano, ela não necessariamente se estende meromorficamente para os fins. Tal fato motivou a seguinte definição:

Definição 3.2. *Seja M uma superfície de Bryant completa com curvatura total finita e seja $E = \{p_1, ..., p_n\}$ o conjunto dos seus fins. Dizemos que um fim p_i é regular se a aplicação de Gauss hiperbólica se estende meromorficamente para p_i. Caso contrário dizemos que o fim é irregular.*

Observação 3.7. *Observe que adicionando a hipótese que a superfície de Bryant não possui fins irregulares, então o teorema de Bryant fica um análogo ao teorema de Osserman.*

Temos a seguinte caracterização de fins regulares

Teorema 3.4 (Umehara-Yamada [26]). *Um fim p_i de uma superfície de Bryant de curvatura total finita é regular se, e somente se, a ordem da diferencial de Hopf Q no ponto p_i é maior ou igual a -2.*

Sendo assim, a existência de fins irregulares configura a primeira grande diferença entre superfícies mínimas e superfícies de Bryant.

Um resultado importante que vale resaltar é o seguinte:

Teorema 3.5 (Collin-Hauswirth-Rosenberg [13]). *Seja M uma superfície de Bryant propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ com tipo topológico finito. Então M possui curvatura total finita. Além disso, todos os seus fins são regulares.*

Além desse resultado, em [13] os autores trazem o seguinte resultado, análogo hiperbólico do Teorema (2.3), o qual, junto com o Teorema (1.1), inspiraram esse trabalho.

Teorema 3.6 (Collin, Hauswirth, Rosenberg). *Seja M uma superfície CMC-1 completa e com curvatura total finita imersa em $\mathbb{H}^3$. Então a aplicação de Gauss hiperbólica de M omite no máximo 3 pontos, a menos que seja constante e, nesse caso, M é uma horoesfera.*

3.6 Superficies Duais

Sabemos que uma superfície mínima M com curvatura total finita imersa no $\mathbb{R}^3$ satisfaz a desiguadalde de Osserman

$$\frac{1}{2\pi}\int_M KdA \leq (\chi(M) - n), \tag{15}$$

Onde K é a curvatura gaussiana de M e n é o número de fins da superfície.

Para superfícies de Bryant com curvatura total finita, não existe um análogo a esta relação. Umehara e Yamada [25] mostraram que elas satisfazem apenas a desigualdade de Cohn-Vossen

$$\frac{1}{2\pi}\int_M KdA < \chi(M). \tag{16}$$

Motivados por esse fato, Umehara e Yamada [**?**] criaram o conceito de superfície dual, de forma que se $\phi : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão CMC-1 e $\phi^\sharp : \tilde{M}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é seu dual, então M satisfaz um análogo da desiguadalde de Osserman, mas em termos da superfície dual. Tais superfícies são muito úteis, por exemplo Rossman [23] mostrou que é possível associar uma superfícies mínimas quase-mergulhada a uma família de s superfícies de Bryant duais e assim estudar problemas de auto interseção.

Nesta seção iremos estudar essa relação de dualidade. Veremos que é possível estudar a aplicação de Gauss hiperbólica da superfície original M em função de elementos da superfície dual, e dessa forma iremos obter uma teorema tipo Picard para as superfícies de Bryant com curvatura total dual finita.

Vejamos como tais superfícies duais são obtidas.Seja $\phi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície completa, CMC-1 e com curvatura total finita. Seja G sua aplicação de Gauss hiperbólica, (g, ω) sua representação de Bryant e $Q = \omega dg$ a diferencial de Hopf de ϕ.

Definição 3.3. *Definimos a imersão dual CMC-1 $\phi^\sharp : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ associada ao referencial de Bryant (g, ω) de ϕ por*

$$\phi^\sharp = (F^\sharp)(F^\sharp)^*$$

Onde F é o levantamento holomorfo nulo dado pelo Teorema da Representação de Bryant da imersão ϕ, $F^\sharp$ é a matriz inversa de F e $\tilde{M}$ é o recobrimento universal de M.

Observação 3.8. *Observe que $\phi^\sharp$ não é necessariamente single-valued em M. Porém é* *fácil ver que $\phi^\sharp$ é single-valued em M se, e somente se, g é single-valued em M.*

Seja $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ o par definido por

$$(F^\sharp)^{-1}dF^\sharp = \begin{bmatrix} g^\sharp & -(g^\sharp)^2 \\ 1 & -g^\sharp \end{bmatrix} \omega^\sharp. \tag{17}$$

Assim, tomando $(\phi^\sharp)^\sharp$, obtemos uma aplicação $(F^\sharp)^\sharp : \tilde{\tilde{M}} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ e pelo visto acima, $(F^\sharp)^\sharp = (F^{-1})^{-1} = F$, o que nos diz que $(\phi^\sharp)^\sharp = \phi$.

Apresentamos agora um importante resultado devido a Umehara e Yamada [26].

Proposição 3.1 (Umehara-Yamada). *Seja $\phi^\sharp$ a imersão dual de uma imersão ϕ CMC-1 no espaço hiperbólico. Seja (g, ω) o referencial de Bryant da imersão ϕ. Então, $\phi^\sharp$ é uma imersão CMC-1 no espaço hiperbólico com apliação de Gauss hiperbólica $G^\sharp$, referencial de Bryant $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ e a diferencial de Hopf $Q^\sharp$ de $\phi^\sharp$ são dadas por*

$$G^\sharp = g \ , \ g^\sharp = G \ , \ \omega^\sharp = -\frac{Q}{dG} \ , \ Q^\sharp = -Q. \tag{18}$$

Demonstração. Seja M uma superfície de Bryant. Tome (g, ω) seu referencial de Bryant. Temos então que

$$f = FF^*$$

é uma imersão de M em $\mathbb{H}^3$ com CMC-1 tal que

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -(g)^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega.$$

Denote $F = (F_{ij})$. A aplicação de Gauss hiperbólica G de M satisfaz

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{12}}{dF_{22}}$$

assim, é imediato que

$$F'_{11}F'_{22} - F'_{12}F_{21} = 0 \ , \ ' = \frac{d}{dz}$$

O que nos diz que podemos reescrever G da seguinte forma

$$G = \frac{F'_{11}}{F'_{21}} = \frac{F'_{11}F_{22} - F'_{12}F_{21}}{F'_{21}F_{22} - F'_{22}F_{21}}.$$

Agora faça $F^\sharp = (F_{ij})^{-1} = F^{-1}$. Observe que $dF^{-1} = -F^{-1}dF^{-1}F^{-1}$ e

$(F^\sharp)^{-1} = F$. Daí

$$(F^\sharp)^{-1}dF^\sharp = -FF^{-1}dF^{-1}F^{-1} = -dF^{-1}F^{-1} = -\begin{bmatrix} F'_{11}F_{22} - F'_{12}F_{21} & -F'_{11}F_{22} + F'_{12}F_{21} \\ F'_{21}F_{22} - F'_{22}F_{21} & -F'_{21}F_{22} - F'_{22}F_{21} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Seja $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ definido por

$$(F^\sharp)^{-1}dF^\sharp = \begin{bmatrix} g^\sharp & -(g^\sharp)^2 \\ 1 & -g^\sharp \end{bmatrix} \omega^\sharp. \tag{20}$$

Comparando as expressões dadas por (19) e (20), temos que

$$g^\sharp = G.$$

Usando o mesmo argumento à superfície $M = (M^\sharp)^\sharp$, obtemos $g = (g^\sharp)^\sharp = G^\sharp$. Portanto, calculando $Q^\sharp$, obtemos

$$\begin{aligned} 2Q^\sharp &= S(g^\sharp) - S(G^\sharp) \\ &= S(G) - S(g) \\ &= -2Q \end{aligned}$$

Logo, $Q^\sharp = -Q$. Por fim, pela definição,

$$\begin{aligned} Q^\sharp &= \omega^\sharp dg^\sharp \\ -Q &= \omega^\sharp dG \end{aligned}$$

Donde concluímos que, $\omega^\sharp = \frac{-Q}{dG}$. Portanto o par $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ define um referencial de Bryant e dessa forma determina uma imersão CMC-1 em $\mathbb{H}^3$.

□

Observação 3.9. *Observe que a superfície dual é obtida a partir da original trocando a aplicação de Gauss hiperbólica e a aplicação de Gauss secundária da superfície original.*

Seja ϕ uma imersão CMC-1 no espaço hiperbólico e $\phi^\sharp$ sua imersão dual. Como vimos acima, $\phi^\sharp$ também possui CMC-1 e portanto admite uma referencial de Bryant $(g^\sharp, \omega^\sharp)$. Por (2) temos que a métrica $ds^{\sharp 2}$ de $\phi^\sharp$ é dada por

$$ds^{\sharp 2} = (1+|g^\sharp|^2)^2\omega^\sharp\overline{\omega^\sharp} \tag{21}$$
$$= (1+|G|^2)^2\frac{Q}{dG}\overline{(\frac{Q}{dG})} \tag{22}$$

Tal métrica é chamada de *métrica dual.*

Observação 3.10. *Observe que a métrica $ds^{\sharp 2}$ está bem definida e assume um único valor em M, pois ela é dada em termos de G e Q, os quais são single valued em M. Sendo assim, faz sentido falar da superfície Riemanniana M, com a métrica $ds^{\sharp 2}$, tal superfície é uma superfície de Bryant com referencial de Bryant dado por $(G, \frac{-Q}{dG})$.*

Existe a seguinte ligação entre a métrica ds^2 e a métrica dual $ds^{\sharp 2}$

Proposição 3.2 (Yu [27])**.** *A métrica dual $ds^{\sharp 2}$ é completa (resp. não degenerada) se, e somente se, a métrica ds^2 é completa (resp. não degenerada).*

Como a métrica dual está bem definida em M, temos a seguinte definição.

Definição 3.4. *Seja M uma superfície de Bryant. Definimos a curvatura total dual de M, como sendo*

$$K_T^\sharp = \int_M -K^\sharp dA^\sharp, \tag{23}$$

onde $K^\sharp$ e $dA^\sharp$ são a curvatura Gaussiana e o elemento de área da superfície M com a métrica dual, respectivamente.

Observe que a curvatura total dual é a área de M com respeito à métrica (singular) induzida da métrica de Fubini-Study em $\mathbb{CP}^1$.

Definição 3.5. *Seja M uma superfície de Bryant. Dizemos que M é algébrica se M possui curvatura total dual finita.*

Temos que as superfícies de Bryant algébricas satisfazem o seguinte teorema:

Teorema 3.7 (Bryant-Hubber-Yu)**.** *Seja M uma superfície de Bryant algébrica. Então:*

(i) M é biholomorfa a $\overline{M_\gamma} \setminus E$, onde $\overline{M_\gamma}$ é uma superfície fechada com gênero γ e $E \subset \overline{M_\gamma}$ é um conjunto finito de pontos $E = \{p_1, ..., p_m\}$.

(ii) O referencial de Bryant dual $(G, \omega^\sharp)$ se estende meromorficamente para $\overline{M_\gamma}$.

Os pontos do conjunto E são chamados de fins de M.

Observe que, diferente do caso de curvatura total finita, $\overline{M_\gamma}$ não precisa ser compacta, porém, a aplicação de Gauss hiperbólica G da superfície original M sempre se estente meromorficamente para os fins, isto é, todos os fins de M são regulares.

Com isso, Umehara e Yamada [26] foram capazes de mostrar um análogo à desigualdade de Osserman para o caso hiperbólico. Mais explicitamente eles provaram.

Teorema 3.8 (Umehara-Yamada). *Seja M uma superfície de Riemann e $\phi : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão CMC-1 completa, conforme e com curvatura total dual finita. Seja $\phi^\sharp$: $M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ sua imersão dual. Então,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K^\sharp dA^\sharp \leq (\chi(M) - n), \tag{24}$$

onde $\tilde{K}$ e $dA^\sharp$ são a curvatura gaussiana dual e o elemento de área dual, e n é o número de fins da superfície original M.

Devido a essas semelhanças com as superfícies mínimas, perguntou-se se existe um teorema tipo Picard para a aplicação de Gauss hiperbólica de superfícies de Bryant algébricas. De fato, muitos resultados parciais foram obtidos, com destaque para os trabalhos de Kawakami [18], que abordou tal problema do ponto de vista da teoria de *valor totalmente ramificado* da aplicação de Gauss hiperbólica.

Definição 3.6 (Nevanlinna [19]). *Dizemos que $b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é um valor valor totalmente ramificado de G se G se ramifica em qualquer ponto na imagem inversa de b ou se b é um valor omitido por G na imagem. Seja $\{a_1, ..., a_{r_0}, b_1, ..., b_{l_0}\}$ o conjuntos dos valores totalmente ramificados de G, onde os a_j's denotam os valores omitidos. Para cada a_j, defina $\nu_j = \infty$ e para cada b_j defina ν_j como sendo o mínimo da multiplicidade de G nos pontos de $G^{-1}(b_j)$. Dessa forma, temos que $\nu_j \geq 2$. Daí, definimos o valor numérico totalmente ramificado de G por*

$$\nu_G = \sum_{a_j, b_j}\left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right).$$

Usando tal definição, Kawakami conseguiu dar uma estimativa para o *valor numérico totalmente ramificado* de G e, consequêntemente, para o número de valores omitidos por G.

Teorema 3.9 (Kawakami [18]). *Seja M uma superfície de Bryant algébrica. Seja G a aplicação de Gauss hiperbólica de M, D_G o número de valores omitidos por G na imagem* *e d o grau da estensão de G para $\overline{M_\gamma}$. Então*

$$D_G \ \leq \ \nu_G \ \leq 2 + \frac{2}{R},$$

onde,

$$\frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + \frac{m}{2}}{d} < 1,$$

onde m é o número de fins de M.

Usando tal desigualdade Kawakami conseguiu estimar o número de pontos omitidos para alguns casos particulares. Por exemplo, tome o caso $(\gamma, k, d) = (0, 2, n)$ então

$$D_G \ \leq \ \nu_G \ \leq 2,$$

onde γ é o gênero da superfície, d é o grau da aplicação de Gauss hiperbólica e k é o número de fins.

4 CMC-1 FACES

Neste capítulo estudaremos uma outra classe de superfícies chamada *CMC-1 face*. Tais superfícies são imersões tipo espaço com curvatura média constante 1 no espaço de **de Sitter** com algumas hipóteses sobre seus fins e suas singularidades. Veremos que tais superfícies apresentam uma representação análoga à representação de Bryant e, de fato, compartilham várias características com as superfícies de Bryant. É possível definir uma aplicação de Gauss hiperbólica análoga ao caso anterior e, assim, estudar o número de pontos omitidos por ela na imagem. Apresentaremos neste trabalho uma estimava *sharp* para esse número.

4.1 Espaço de Sitter 3-dimensional

Nessa seção descreveremos o espaço de *de Sitter*, que servirá de ambiente para as superfícies que passaremos a estudar. Seja $\mathbb{L}^4$ o espaço de Lorentz-Minkowski 4-dimensional com a métrica de Lorentz

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{25}$$

Definimos o espaço de *de Sitter* 3-dimensional $\mathbb{S}^3_1$ como sendo

$$\mathbb{S}^3_1 = \{v \in \mathbb{L}^4 | \langle v, v \rangle = 1\}$$

com a métrica induzida de $\mathbb{L}^4$. $\mathbb{S}^3_1$ é uma variedade Lorentziana 3-dimensional simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a 1.

Podemos identificar o $\mathbb{L}^4$ com o conjunto das matrizes Hermitianas 2×2 $Herm(2) = \{X^* = X\}$ por

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Com essa identificação podemos definir

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3_1 &= \{X | X = X^*\ ,\ det(X) = -1\} \\ &= \{Fe_3F^* | F \in SL(2, \mathbb{C})\} \end{aligned}$$

será uma variedade Lorentziana munida com a métrica

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}tr(Xe_2(Y^t)e_2)$$

onde $X^* = \overline{X^t}$.

Observação 4.1. *Observe que na definição acima* $\langle X, X\rangle = -detX$.

4.2 CMC-1 Face

Nessa seção apresentamos a teoria clássica das CMC-1 faces no espaço de Sitter. Apresentaremos um resumo da teoria e juntamente com algumas demonstrações dos teoremas mais importantes. Veremos quais classes dessas superfícies possuem propriedades análogas aos casos estudados anteriormente.

Definição 4.1. *Uma imersão* $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ *de uma superfície* M *é dita ser do tipo espaço se a métrica induzida em* M *for positiva definida.*

De forma análoga às superfícies de Bryant, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 (Aiyama-Akutagawa [2])**.** *Sejam* D *um domínio simplesmente-conexo em* $\mathbb{C}$ *e um ponto base* $z_0 \in D$. *Seja*

$$g : D \longrightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$$

uma função meromorfa e ω *uma 1-forma holomorfa em* D *tal que*

$$d\hat{s}^2 = (1 + |g|^2)^2\omega\overline{\omega}$$

é uma métrica Riemanniana em D. *Tome a insersão holomorfa* $F = (F_{ij}) : D \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ *tal que* $F(z_0) = e_0$ *e*

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix}\omega. \tag{28}$$

Então, $f : D \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ *definida por*

$$f = Fe_3F^*$$

é uma imersão do tipo espaço, conforme com curvatura média constante 1. Ademais a métrica induzida ds^2 *em* D, *satifaz*

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \omega \overline{\omega}.$$

Reciprocamente, toda imersão CMC-1 de uma superfície simplesmente conexa pode ser representada dessa forma.

Observação 4.2. *O par (g, w) é chamado de referencial de Aiyama.*

Seguindo as idéias de Umehara e Yamada [25], [26] para imersões CMC-1 no $\mathbb{H}^3$ estudadas anteriormente, temos as seguintes definições.

Definição 4.2. *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ e $F = (F_{ij})$ como acima. Definimos a aplicação de Gauss hiperbólica G de f como sendo*

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} = \frac{dF_{21}}{dF_{22}}.$$

Definimos também a diferencial de Hopf Q da imersão como sendo

$$Q = \omega dg.$$

Observação 4.3. *A aplicação de Gauss hiperbólica possui a seguinte interpretação geométrica. Seja $\mathbb{S}^2_\infty$ a fronteira ideal na direção futura de $\mathbb{S}^3_1$. Temos que $\mathbb{S}^2_\infty$ pode ser identificado com $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dado $z \in D$, considere a geodésica γ em $\mathbb{S}^3_1$ com vetor velocidade inicial sendo o vetor normal unitário de $f(D)$ no ponto $f(z)$. Então $G(z)$ é o ponto onde γ intercepta a fronteira ideal $\mathbb{S}^2_\infty$.*

Observação 4.4. *Observe que dada uma imersão $f : D \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ com $f = Fe_3F^*$, temos que a imersão $\hat{f} : D \longrightarrow \mathbb{H}^3$ correspondente dada por $\hat{f} = FF^*$ é uma imersão conforme CMC-1, com métrica $d\hat{s}^2$ e com a mesma aplicação de Gauss G e diferencial de Hopf que f.*

Definição 4.3. *Seja M uma superfície orientada. Uma aplicação suave $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ é chamada de aplicação CMC-1 se existe $W \subset M$ aberto e denso tal que $f|_W$ é uma imersão do tipo espaço. Um ponto $p \in M$ é dito um ponto singular de f se a métrica induzida ds^2 for degenerada em p.*

Definição 4.4. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma aplicação CMC-1 e $W \subset M$ um aberto denso tal que $f|_W$ é uma imersão CMC-1. Um ponto $p \in M \setminus W$ é um ponto singular admissível se:*

(1) Existe uma função $\beta : U \cap W \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1, onde U é uma vizinhança de p,

tal que βds^2 *se estende a uma métrica Riemanniana em* U *de classe* C^1.

(2) $df(p) \neq 0$, *ou seja,* df *tem rank 1 em* p.

Dizemos que uma aplicação CMC-1 f *é uma CMC-1 face se todos os seus pontos singulares são admissíveis.*

Vejamos agora como estender o Teorema (4.1) para superfícies não simplesmente conexas. Para isso precisaremos de alguns resultados clássicos.

Proposição 4.1. *Sejam* M *uma superfície orientada e* $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ *uma CMC-1 face e considere* $W \subset M$ *é um aberto denso onde* $f|_W$ *é uma imersão CMC-1. Então existe uma única estrutura complexa* J *em* M *tal que*

(1) $f|_W$ *é conforme com respeito a* J.

(2) Existe uma imersão $F : \tilde{M} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ *que é holomorfa com respeito a* J, *tal que*

$$det(dF) = 0 \text{ e } f \circ \varrho = Fe_3F^*,$$

Onde $\varrho : \tilde{M} \longrightarrow M$ *é o recobrimento universal de* M. F *é chamada de levantamento holomorfo nulo.*

Observação 4.5. *Uma levantamento holomorfo nulo é única a menos por multiplicação à direita por uma matriz constante de* $SU(1, 1)$.

Pela proposição acima, dada uma CMC-1 face $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$, sempre existe uma estrutura complexa J em M. Doravante, M será tratada como sendo uma superfície de Riemann com esta estrutura complexa.

Proposição 4.2. *Seja* M *uma superfície de Riemann e* $F : M \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ *uma holomorphic null immersion, i.e* $det(F^{-1}dF) = 0$. *Assuma que o* $(0, 2)$*-tensor simétrico* $det[d(Fe_3F^*)]$ *não é identicamente nulo. Então*

$$f = Fe_3F^* : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$$

é uma CMC-1 face, e um ponto $p \in M$ *será um ponto singular de* M *se, e somente se,* $det[d(Fe_3F^*)]_p = 0$. *Além disso,* $-det[d(FF^*)]$ *é positivo definido em* M.

Demonstração. Como $det[d(Fe_3F^*)]$ não é identicamente nulo, o conjunto

$$W = \{p \in M | det[d(Fe_3F^*)]_p \neq 0\}$$

é aberto e denso em M. Como $F^{-1}dF$ é uma 1-forma que assume valores na álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$, existem 1-formas holomorfas a_1, a_2, a_3, tais que

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Como F é uma imersão holomorfa nula, temos que $rank(dF) = 1$ e

$$a_1^2 + a_2 a_3 = \ e \ |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 > 0. \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d(Fe_3F^*) &= dFe_3F^* + Fe_3dF^* \\ &= FF^{-1}dFe_3F^* + Fe_3dF^* \\ &= F(F^{-1}dFe_3F^* + e_3F^*) \\ &= F(F^{-1}dFe_3 + e_3F^*(F^*)^{-1})F^* \\ &= F(F^{-1}dFe_3 + (F^{-1}dFe_3)^*)F^* \\ &= F\begin{pmatrix} a_1 + \overline{a_1} & -a_2 + \overline{a_3} \\ a_3 - \overline{a_2} & a_1 + \overline{a_1} \end{pmatrix} F^*, \end{aligned}$$

Donde concluímos que no subconjunto W vale

$$\begin{aligned} -det[d(Fe_3F^*)] &= -2|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \\ &= -2|a_2|^2|a_3|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \\ &= (|a_2| - |a_3|)^2 \\ &> 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Seja $f = Fe_3F^*$. Então $f|_W : W \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ determina uma imersão conforme com métrica induzida

$$ds^2 = f^*ds^2_{\mathbb{S}^3_1} = \langle df, df \rangle = -det[d(Fe_3F^*)].$$

Pelo Teorema (4.1), f é CMC-1. Além disso, por (31) temos que

$$-det[d(FF^*)] = 2|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 > 0$$

que nos diz que $-det[d(FF^*)]$ é positiva definida em M. Dessa forma, defina

$$\beta = \frac{det[d(FF^*)]}{det[d(Fe_3F^*)]}$$

em W, segue então que β é positiva definida em W. Além disso, como a métrica $ds^2 = -det[d(Fe_3F^*)]$, temos que $\beta ds^2 = -det[d(FF^*)]$ se estende a uma métrica Riemanniana em M. Por fim, note que

$$\begin{aligned} \partial f \cdot f^{-1} &= dF \cdot F^{-1} \\ &= F(F^{-1}dF)F^{-1} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $df \neq 0$, o que completa a prova.

$\square$

Observação 4.6. *A hipótese de $det[d(Fe_3F^*)] \neq 0$ é essencial. De fato, tome $F : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ imersão holomorfa nula, tal que*

$$F(z) = \begin{bmatrix} z+1 & -z \\ z & -z+1 \end{bmatrix}$$

A aplicação $f = Fe_3F^*$ degenera em todo ponto de $\mathbb{C}$, o que implica que ela não pode ser uma imersão. Isto é decorrência do fato de que $det[d(Fe_3F^*)]$ é identicamente nulo.

Usando as proposições (4.1) e (4.2), é possível estender o Teorema (4.1) para *CMC-1 faces* que podem ter domínios não simplesmente conexos.

Teorema 4.2. *Seja M uma superfície de Riemann com um ponto base $z_0 \in M$. Seja g uma função meromorfa e ω uma 1-forma holomorfa no recobrimento universal $\tilde{M}$, tal que a métrica $d\hat{s}^2$ é a métrica Riemanniana de $\tilde{M}$ e $|g|$ não é identicamente 1. Tome uma imersão holomorfa $F = (F_{ij}) : \tilde{M} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que $F(z_0) = e_0$, e F satisfaz*

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega.$$

Então, $f : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$, dada por $f = Fe_3F^*$, é uma CMC-1 face que é conforme fora das suas singularidades. A métrica induzida em M ds^2 e a aplicação de Gauss hiperbólica G são dadas por

$$ds^2 = |(1-|g|^2)^2|\omega|^2 \text{ e } G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}}.$$

Ademais, as singularidades da CMC-1 face ocorrem nos pontos tais que $|g| = 1$.

Reciprocamente, seja M uma superfície de Riemann e $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face. Então existem uma função meromorfa g (onde $|g|$ não é identicamente 1) e uma 1-forma holomorfa ω em $\tilde{M}$, tal que ds^2 é uma métrica Riemanniana em $\tilde{M}$,

$f = Fe_3F^*$, *e* F *satifaz*

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega.$$

Demonstração. Como vimos na demonstração da proposição (4.2),

$$\begin{aligned} -det[d(Fe_3F^*)] &= (|a_2| - |a_3|)^2 \\ &= (1 - |g|^2)^2|\omega|^2. \end{aligned}$$

Além disso, como $d\hat{s}^2$ determina uma métrica Riemanniana em $\tilde{M}$, ω tem um zero de ordem k se, e somente se, g possui um pólo de ordem $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$. Portanto, $det[d(Fe_3F^*)] = 0$ se, e somente se, $|g| = 1$. Portanto, pela Proposição (4.2), $f = Fe_3F^* : \tilde{M} \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ é uma CMC-1 face, e $p \in \tilde{M}$ é um ponto singular se, e somente se, $|g(p)| = 1$. O que mostra a primeira parte do teorema.

Vamos agora provar a recíproca. Pela Proposição (4.1), existe um levantamento holomorfo nulo, $F : \tilde{M} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$, da CMC-1 face f. Então, pelo mesmo argumento usado na proposição anterior, obtemos a_1, a_2, a_3 1-formas holomorfas tais que

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{bmatrix} \omega \quad e \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 > 0.$$

Trocando F por FB, onde $B \in SU(1, 1)$ é uma matriz constante, se necessário, podemos assumir a_3 não identicamente nulo. Defina

$$\omega = a_3 \ , \ g = \frac{a_1}{a_3}.$$

Daí, ω é uma 1-forma holomorfa e g é uma função meromorfa. Assim,

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_3} & \frac{a_2}{a_3} \\ 1 & -\frac{a_1}{a_3} \end{bmatrix} a_3 \\ &= \begin{bmatrix} g & \frac{a_2}{a_3} \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_2 a_3}{a_3^2} = -\frac{a_1^2}{a_3^2} = -g^2,$$

Segue que

$$F^{-1}dF = \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} \omega.$$

Argumentando de forma análoga à demonstração do resultado anterior, temos que $|g|$ não é identicamente 1, pois $|a_2| - |a_3|$ não é identicamente 0. Além disso, $g^2\omega = a_2$ é holomorfa e, portanto,

$$-det[d(Fe_3F^*)] = (1 + |g|^2)^2|\omega|^2 = d\hat{s}^2$$

é positiva definida, portanto determina uma métrica riemanniana em $\tilde{M}$, isto encerra a prova do teorema.

$\square$

Observação 4.7. *Seja F um levantamento holomorfo nulo de uma CMC-1 face f com referencial de Aiyama (g, ω). Seja $B \in SU(1,1)$ uma matriz constante, dada por*

$$B = \begin{bmatrix} \overline{p} & -q \\ -\overline{q} & p \end{bmatrix} \in SU(1,1)\ ,\ p\overline{p} - q\overline{q} = 1.$$

Então FB é um levantamento holomorfo nulo de f. O referencial de Aiyama $(\hat{g}, \hat{\omega})$ correspondente a $(FB)^{-1}d(FB)$ é dado por

$$\hat{g} = \frac{pg + q}{\overline{q}g + \overline{p}} \text{ e } \hat{\omega} = (\overline{q}g + \overline{p})^2\omega.$$

Dois referenciais de Aiyama (g, ω) e $(\hat{g}, \hat{\omega})$ são chamados de ***equivalentes*** *se satisfazem a equação acima para alguma matriz $B \in SU(1,1)$. Chamamos a classe de equivalência do referencial de Aiyama (g, ω) do referencial de Aiyama associado a f.*

Observação 4.8. *Se (g, ω) e $(\hat{g}, \hat{\omega})$ são 2 refenciais de Aiyama equivalentes, e se G e $\hat{G}$ são as aplicações de Gauss hiperbólicas associadas a esses referenciais, então*

$$G = \frac{dF_{11}}{dF_{21}} \quad e \quad \hat{G} = \frac{\overline{p}dF_{11} + \overline{q}dF_{12}}{\overline{p}dF_{21} + \overline{q}dF_{22}}$$

Dessa forma, segue que $G = \hat{G}$, ou seja, a aplicação de Gauss hiperbólica é independente da escolha de F na classe.

4.3 *CMC-1 Faces* com Fins Elípticos

Definição 4.5. *Sejam M uma superfície de Riemann e $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face. Seja $ds^2 = f^*(ds^2_{\mathbb{S}^3_1})$. Então f é completa (resp. do tipo finito) se existem um conjunto compacto C e um $(0,2)$-tensor simétrico T em M tal que T se anula em $M \setminus C$ e $ds^2 + T$ é uma métrica Riemanniana completa (resp. tem curvatura total finita).*

Observação 4.9. *Para imersões CMC-1 em $\mathbb{S}^3_1$, a curvatura gaussiana K é não negatica, de forma que a curvatura total coincide com a curvatura total absoluta. Entretanto, para CMC-1 faces com pontos singulares, a curvatura total nunca é finita.*

Observação 4.10. *O recobrimento universal de uma CMC-1 face completa (resp. tipo finito) não necessariamente é completo (resp. tipo finito), pois o conjunto singular pode não ser compacto no recobrimento universal.*

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma *CMC-1 face* completa de tipo finito. Então $(M, ds^2{+}T)$ é uma superfície Riemannina completa com curvatura total finita. Portanto, M possui tipo topológico finito.

Seja $\phi : \tilde{M} \longrightarrow M$ o recobrimento universal de M, e $F : \tilde{M} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ um *levantamento holomorfo nulo* de uma *CMC-1 face* $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$. Fixe um ponto $z_0 \in M$. Seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ um laço tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$. Então existe uma única *transformação de recobrimento* τ de $\tilde{M}$ associada à classe de homotopia de γ. Definimos a **representação da monodromia** Φ_γ de F como sendo

$$Fo\tau = F\Phi_\gamma.$$

Como f é bem definida em M, $\Phi_\gamma \in SU(1,1)$ para todo laço γ. Portanto, Φ_γ é conjugado a uma das seguintes matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix},\ ou\ E_2 = \pm \begin{bmatrix} coshs & senhs \\ senhs & coshs \end{bmatrix},\ ou\ E_3 = \pm \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definição 4.6. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face completa de tipo finito com levantamento holomorfo nulo F. Um fim de f é chamado de **elíptico, hiperbólico ou parabólico** se sua representação de monodromia é conjugada a E_1, E_2 ou E_3 em $SU(1,1)$, respectivamente.*

Observação 4.11. *A definição acima é motivada pelo seguinte fato. A matriz*

$$X = \begin{bmatrix} p & q \\ \overline{q} & \overline{p} \end{bmatrix} \in SU(1,1)$$

age em $\mathbb{H}^2$ *no modelo de Poicaré como uma isometria*

$$v \mapsto \frac{pv + q}{\overline{q}v + \overline{p}}.$$

Daí, X *é chamada de elíptica se esta ação possui um único ponto fixo, o qual está em* $\mathbb{H}^2$*. É hiperbólica se possui dois pontos fixos, ambos em* $\partial\mathbb{H}^2$*. É chamada de parabólica se possui um único ponto fixo, o qual está em* $\partial\mathbb{H}^2$*.*

Observação 4.12. *Como toda matriz em* $SU(2,\mathbb{C})$ *é conjugada a* E_1 *em* $SU(2,\mathbb{C})$*, imersões CMC-1 em* $\mathbb{H}^3$ *possuem propriedades semelhantes a CMC-1 faces com fins elípticos em* $\mathbb{S}^3_1$*. Por isso voltamos nossa atenção para esse caso.*

Proposição 4.3. *Seja* V *uma vizinhança de um fim de* f *e* $f|_V$ *uma imersão tipo espaço CMC-1 de curvatura total finita, a qual é completa no fim. Suponha que o fim seja elíptico. Então existe um levantamento holomorfo nulo* $F : \tilde{V} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ *de* f *com referencial de Aiyama associado* (g,ω) *tal que*

$$d\hat{s}^2|_V = (1 + |g|^2)^2|\omega|^2$$

é single valued em V*. Além disso,* $d\hat{s}^2$ *possui curvatura total finita e é completa no fim.*

Demonstração. Seja $\gamma : [0,1) \longrightarrow V$ um laço em torno de um fim e τ uma transformação de recobrimento associada a γ. Tome o *levantamento holomorfo nulo* $F_0 : \tilde{V} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ de f. Então, por definição de fim elíptico, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$F_0 \circ \tau = F_0 P E_\theta P^{-1},$$

onde $P \in SU(1,1)$ e

$$E_\theta = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

Defina $F = F_0 P$. Vemos que F é um levantamento holomorfo nulo de f, daí, tomando (g,ω) como sendo o referencial de Aiyama associado a F, temos

$$F \circ \tau = F E_\theta \ , \ g \circ \tau = e^{-2i\theta} g \text{ e } \omega \circ \tau = e^{2i\theta}\omega.$$

Assim, $|g \circ \tau| = |g|$ e $|\omega \circ \tau| = |\omega|$. Logo, $d\hat{s}^2|_V$ assume um valor em V. Seja T o

$(0,2)$-tensor como na definição 4.5, então, em $v \setminus C$, temos

$$\begin{aligned} ds^2 + T &= (1 - |g|^2)^2|\omega|^2 \\ &\leq (1 + |g|^2)^2|\omega|^2 \\ &= d\hat{s}^2|V. \end{aligned}$$

Portanto, se $ds^2 + T$ é completa, então $d\hat{s}^2$ é completa. Além disso

$$\begin{aligned} -(K_{d\hat{s}^2})d\hat{s}^2|_V &= \frac{4dgd\overline{g}}{(1+|g|^2)^2} \\ &\leq \frac{4dgd\overline{g}}{(1-|g|^2)^2} \\ &= Kds^2 \end{aligned}$$

em $V \setminus C$. Conclui-se que, se $ds^2 + T$ tem curvatura total finita, então, $d\hat{s}^2|_V$ possui curvatura total finita.

□

Proposição 4.4. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face de tipo finito com fins elipticos. Então existem uma superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ e um número finito de pontos $p_1, ..., p_n \in \overline{M}$, tais que M é biholomorfa a $\overline{M} \setminus \{p_1, ..., p_n\}$. Além disso, a diferencial de Hopf Q de f se estende meromorficamente para $\overline{M}$.*

Demonstração. Quando f possui tipo finito, Hubber [14] mostrou que M é finitamente conexa. Dessa forma, existe um compacto $M_0 \subset M$, limitado por um número finito de curvas de Jordan $\gamma_1, ..., \gamma_n$ tais que cada componenteM_j de $M \setminus M_0$ é conforme ao anel $D_j = \{z \in \mathbb{C} | r_j < |z| < 1\}$, onde γ_j corresponde ao conjunto $\{|z| = 1\}$. Então pela Proposição 4.3, existe $d\hat{s}^2|_{M_j}$, bem definida em M_j, com curvatura total finita e completa no fim, assim, $K_{d\hat{s}^2|_{M_j}}$ é não positiva. Portanto, pelo teorema 9.1 em [22], $r_j = 0$ e M_j é biholomorfa ao disco furado $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$. Dessa forma, podemos trocar M_j por D_j sem alterar a estrutura conforme de M. Portanto, sem perda de generalidade, $M = \overline{M} \setminus \{p_1, ..., p_m\}$ para alguma superfície compacta $\overline{M}$ e um número finito de pontos $p_1, ..., p_m \in \overline{M}$, e cada M_j se torna um disco furado em p_j. Podemos usar a representação de Bryant para cada $\hat{f}_j = \hat{f}|_{M_j}$, e pela observação 4.4, temos que a diferencial de Hopf $\hat{Q}$ da imersão $\hat{f} = FF^* : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ se estende meromorficamente para $M_j \cup \{p_j\}$. Porém, vimos que $Q = \hat{Q}$ e portanto Q se estende meromorficamente.

□

Analogamente ao caso de superfícies de Bryant imersas no espaço hiperbólico, a aplicação de Gauss hiperbólica não necessariamente se estende para os fins. Dessa forma, temos a seguinte definição.

Definição 4.7. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face. Um fim p_j de M é dito regular se a aplicação de Gauss hiperbólica se estende meromorficamente para p_j. Caso contrário ele é chamado de irregular.*

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face de tipo finito e com fins elípticos. Então $M = \overline{M} \setminus \{p_1, ..., p_n\}$. Sejam G e Q a aplicação de Gauss hiperbólica e a diferencial de Hopf de f, respectivamente.

Definição 4.8. *Chamamos a métrica*

$$d\hat{s}^{\sharp 2} = (1 + |G|^2)^2 \left(\frac{Q}{dG}\right)\overline{\left(\frac{Q}{dG}\right)}$$

de métrica lift da CMC-1 face f. Além disso, definimos a métrica

$$d\hat{\sigma}^{\sharp 2} = -(K_{d\hat{s}^{\sharp 2}})d\hat{s}^{\sharp 2} = \frac{4dGd\overline{G}}{(1 + |G|^2)^2}$$

Observação 4.13. *Observe que tanto $d\hat{s}^{\sharp 2}$ e $d\hat{\sigma}^{\sharp 2}$ são dadas em termos de G e Q, e como tais funções estão definidas em M, temos que $d\hat{s}^{\sharp 2}$ e $d\hat{\sigma}^{\sharp 2}$ também estão definidas em M.*

A seguinte Proposição é devida a Fujimori [8]

Proposição 4.5. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face. Assuma que cada fim de f é regular e elíptico. Se f é completa e de tipo finito, então a métrica lift $d\hat{s}^{\sharp 2}$ é completa e com curvatura total finita em M.*

5 RESULTADOS

Neste capítulo iremos apresentar nosso resultado principal juntamente com alguns resultados paralelos que surgiram no desenvolvimento do trabalho.

5.1 Pontos Omitidos Pela Aplicação de Gauss Hiperbólica

Teorema 1. *Seja M*

(i) Uma superfície completa CMC-1 imersa em $\mathbb{H}^3$ com curvatura total finita
(ii) Uma superfície completa CMC-1 imersa em $\mathbb{H}^3$ com curvatura total dual finita,
(iii) Uma CMC-1 face imersa no espaço de de Sitter do tipo finito com fins elípticos.

Se G é a aplicação de Gauss Hiperbólica de M, então ou G omite no máximo dois pontos ou G é constante, e nos dois primeiros casos M é uma horoesfera e no terceiro M é um superfície tipo espaço horosférica

Demonstração. Suponha inicialmente que M é uma superfície CMC-1 com curvatura total dual finita . Seja G sua aplicação de Gauss Hiperbólica e Q sua diferencial de Hopf. Temos que M com o referencial $(G, \frac{-Q}{dg})$ é uma superfíce de Bryant completa com a métrica dual.

Usando a correspondência de Lawson, o referencial de Bryant $(G, \frac{-Q}{dg})$ nos dá uma imersão $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mínima e completa, cujo referencial de Weierstrass é exatamente $(G, \frac{-Q}{dg})$. Além disso, note que a métrica dessa imersão é dada por

$$ds^2 = (1 + |G|^2)^2 \left(\frac{-Q}{dg}\right) \left(\overline{\frac{-Q}{dg}}\right).$$

Repare que tal métrica coincide com a métrica da superfície dual de M em $\mathbb{H}^3$, e portanto $f(M) \in \mathbb{R}^3$ possui curvatura total finita, pois estamos suponto que M possui curvatura total dual finita. Além disso, é imediato, pelo referencial de Weierstrass que a aplicação de Gauss da superfície mínima $f(M)$ é exatamente G. Portanto, construimos uma superfície mínima com curvatura total finita e com aplicação de Gauss G. Pelo Teorema 1.1 não pode omitir mais de dois pontos, caso contrário será constante, o que demonstra o resultado.

Suponha agora que M é uma superfície completa CMC-1 com curvatura total finita imersa em $\mathbb{H}^3$. Então temos que M é conforme a uma superfície compacta $\overline{M}$ menos um númeno finito de pontos $\{p_1, ..., p_n\}$, os fins.

Suponha que M possui pelo menos um fim irregular. Nesse caso, temos que a aplicação de Gauss hiperbólica G não se estende para $\overline{M}$, de forma que tal fim é uma singularidade essencial de G. Daí, pelo Grande Teorema de Picard aplicado à G em coordenadas, temos que G pode omitir no máximo dois pontos em qualquer vizinhança desse fim.

Podemos então supor que M possui todos os fins regulares. Seja $M^\sharp$ a superfície dual de M. Em [26], os autores mostraram que se uma superfície de Bryant completa com curvatura total finita possui todos os fins regulares, então sua curvatura total dual satisfaz

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K^\sharp dA^\sharp = \chi((M) - n)$$

e portanto, $M^\sharp$ possui curvatura total dual finita. Pelo argumento acima, segue que sua aplicação de Gauss hiperbólica omite no máximo dois pontos

Por fim, seja agora $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face completa, de tipo finito cujos fins são todos elípticos. Suponha inicialmente que f possui um fim irregular. Então, a aplicação de Gauss Hiperbólica G possui singularidade essencial no fim, e o resultado segue usando o Grande Teorema de Picard de forma análoga ao caso anterior. Dessa forma, podemos supor que todos os fins de f são regulares.

Seja então $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ uma CMC-1 face completa, de tipo finito cujos fins são todos elípticos e regulares. Pela observação 4.4, existe uma imersão $\hat{f} : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ com CMC-1 e com mesma aplicação de Gauss hiperbólica e mesma diferencial de Hopf.

Considere a métrica lift de f $d\hat{s}^{\sharp 2}$. Pela Proposição (4.5), M possui curvatura total finita nessa métrica.

Por outro lado, considere a superfície dual de M em $\mathbb{H}^3$. Temos que a métrica lift de f coincide com a métrica dual de $\hat{f}$, daí, como $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ possui curvatura total finita com a métrica lift, temos que $\hat{f} : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma superfície de Bryant algébrica. Como foi provado acima, a aplicação de Gauss hiperbólica G de uma tal superfície ou é constante ou omite no máximo dois pontos. Porém, como vimos acima, a aplicação de Gauss hiperbólica G de $\hat{f} : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ coincide com a aplicação de Gauss hiperbólica de $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$. Portanto, a aplicação de Gauss hiperbólica de f é constante ou omite no máximo dois pontos.

□

Observação 5.1. *Observe que o resultado acima é sharp de fato, pois*

(i) a aplicação de Gauss hiperbólica do catenóide primo omite exatamente dois pontos, e tal superfície possui curvatura total finita.

(ii) são conhecido vários exemplos de superfífices de Bryant algébrica cuja aplicação de Gauss hiperbólica omite exatamente dois pontos, como, por exemplo, $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ é uma superfície de Bryant algébrica e sua aplicação de Gauss hiperbólica omite exatamente dois pontos.

(iii) o catenóide elíptico é uma CMC-1 face do tipo finito com fins elípticos e sua aplicação de Gauss hiperbólica omite exatamente dois pontos

Corolário 5.1. *Seja M uma superfície de Bryant propriamente mergulhada com tipo topológico finito. Então a aplicação de Gauss hiperbólica de M é constante ou omite no* *máximo dois pontos.*

Demonstração. Em [12] os autores mostraram que uma tal superfície possui curvatura total finita, portanto o resultado segue do teorema anterior.

□

5.2 Decaimento de Curvatura

Iniciaremos mostrando que as superfícies mínimas e de Bryant com curvatura total finita safistazem as condições estudadas por Green-Wu em [11].

Teorema 2. *Seja M uma superfície mínima ou de Bryant com curvatura total finita e com todos os fins regulares. Então, existe uma função $k : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, de classe C^2, tal que,*

(i) $0 \geq \kappa(p) \geq -k(p)$

(ii) $\int_0^\infty sk(s)ds < \infty$

Demonstração. Pelos Teoremas 2.2 e 3.7 temos que existe uma superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ e um número finito de pontos $E = \{w_1, \ ... \ , w_m\}$ tal que M é conforme a $\overline{M} \setminus E$, onde w_i são os fins. Como todos os fins são regulares, a aplicação de Gauss hiperbólica G de M se estende meromorficamente para os fins e $G : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é um recobrimento ramificado. Tome $R_0 > 0$ tal que $\overline{M} \setminus B^M_{R_0}(o)$ é uma união finita dos subfins $E_1, ..., E_m$. Osserman [22] e Bryant [4] mostraram que é possível parametrizar cada subfim E_i usando o referencial de Weierstrass e Bryant (g, f) respectivamente, em $\{z \in \mathbb{C}/0 < |z| < r_j \ , \ \ r_j > 0\}$ por

$$\begin{cases} g(z) = z^{1+\beta(w_i)}\hat{g}(z) \\ f(z) = \frac{1}{z^{1+I(w_i)}}\hat{f}(z), \end{cases} \tag{32}$$

Onde $\hat{g}$ e $\hat{f}$ são analíticas, nunca se anulam e se extendem meromorficamente para $z = 0$. Seja $\gamma_j = \partial E_j$. Para cada $|z| < r_j$ seja α_j o caminho $re^{i\theta}$, $|z| \leqslant r \leqslant r_j$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dist}^M(\gamma_j, z) &= inf_\alpha\{l(\alpha)\} \\
&\leq l(\alpha) \\
&= \int_\alpha |ds| \\
&\leq \int_{r_j}^{|z|} |f|(1+|g|^2)|dz| \\
&= \int_{r_j}^{|z|} \frac{1}{|z|^{1+I(w_j)}}|\hat{f}(z)|(1+|z|^{2+2\beta(w_j)}|\hat{g}(z)|^2)|dz| \\
&= \int_{r_j}^{|z|} \frac{1}{|z|^{1+I(w_j)}}|\hat{f}(z)|(1+|z|^{2+2\beta(w_j)}|\hat{g}(z)|^2)|dz|.
\end{aligned}
$$

Observe que $\hat{f}$ e $\hat{g}$ são limitadas em $0 < |z| < r_j$. Portanto, nesse conjunto, temos

$$
\begin{aligned}
dist_M(\gamma_j, z) &\leq \int_{r_j}^{|z|} \frac{1}{|z|^{1+I(w_j)}}|\hat{f}(z)|(1+|z|^{2+2\beta(w_j)}|\hat{g}(z)|^2)|dz| \\
&\leq \int_{r_j}^{|z|} \frac{1}{|z|^{1+I(w_j)}} c_1(1+|r_j|^{2++2\beta(w_j)}c_2^2)|dz| \\
&= \int_{r_j}^{|z|} \frac{1}{|z|^{1+I(w_j)}} c_3|dz|.
\end{aligned}
$$

De onde concluímos que

$$
\mathrm{dist}^M(\gamma_j, z) \leq \frac{c_3}{|z|^{I(w_j)}}. \tag{33}
$$

Além disso, a curvatura gaussiana κ satisfaz

$$
\begin{aligned}
|\kappa(z)| &= \frac{4|g'|^2}{|f|^2(1+|g|^2)^4} \\
&\leq \frac{4|z^{\beta(w_j)}\hat{g}(z) + z^{1+\beta(w_j)}\hat{g}'(z)|^2}{|\frac{1}{z^{1+I(w_j)}}\hat{f}(z)|^2(1+|z^{1+\beta(w_j)}g_1(z)|^2)^4}.
\end{aligned}
$$

Observe que $1 \leq |1+|g(z)|^2|$, i.e, $\frac{1}{|1+|g(z)|^2|} \leq 1$. Como, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{g}'$ são limitadas $0 < |z| < r_j$. Daí,

$$\begin{aligned}
|\kappa(z)| &\leq \frac{4|z^{\beta(w_j)}\hat{g}(z)+z^{1+\beta(w_j)}\hat{g}'(z)|^2}{|\frac{1}{z^{1+I(w_j)}}\hat{f}(z)|^2(1+|z^{1+\beta(w_j)}\hat{g}(z)|^2)^4} \\
&\leq \frac{4(|z|^{\beta(w_j)}|\hat{g}(z)|+|z|^{1+\beta(w_j)}|\hat{g}'(z)|)^2}{\frac{|\hat{f}(z)|^2}{|z|^{2+2I(w_j)}}(1+|z^{1+\beta(w_j)}\hat{g}(z)|^2)^4} \\
&= 4\frac{|z|^{2+2I(w_j)}(|z|^{\beta(w_j)}|\hat{g}(z)|+|z|^{1+\beta(w_j)}|\hat{g}'(z)|)^2}{|\hat{f}(z)|^2(1+|z^{1+\beta(w_j)}\hat{g}(z)|^2)^4} \\
&\leq 4\frac{|z|^{2+2I(w_j)}(|z|^{\beta(w_j)}\hat{c}_1+|z|^{1+\beta(w_j}\hat{c}_2)}{\hat{c}_3} \\
&= \hat{c}_4|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)}(1+|z|)^2 \\
&= \hat{c}_4|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)}(1+r_j)^2 \\
&= \hat{c}_5|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)}, \qquad (34)
\end{aligned}$$

nde $|\hat{g}(z)| \leq \hat{c}_1$, $|\hat{g}'(z)| \leq \hat{c}_2$ e $|\hat{3}(z)| \geq \hat{c}_3$ para $|z| \leq r_j$, e $\hat{c}_4 = 4.max\{\hat{c}_1, \hat{c}_2\}$.

Agora, seja $\rho(z)$ a distância geodésica de $o \in M$ até z. Note que por (33), $\rho(z) \leq \frac{c_3}{|z|^{I(w_j}}$, daí

$$|z|^{I(w_j)} \leq \frac{c_3}{\rho}.$$

Portanto,

$$|z| \leq \frac{c_3}{\rho^{\frac{1}{I(w_j)}}} \qquad (35)$$

Substituindo (35) em (34) obtemos

$$\begin{aligned}
|\kappa(z)| &\leq c_4|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)} \\
-\kappa(z) &\leq c_4|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)} \\
\kappa(z) &\geq -c_4|z|^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)} \\
&\geq -c_4\left(\frac{c_5}{\rho^{\frac{1}{I(w_j)}}}\right)^{2+2I(w_j)+2\beta(w_j)} \\
&= -\frac{c_6}{\rho^{2+2\frac{1+\beta(w_j)}{I(w_j)}}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$0 \geq \kappa(z) \geq -\frac{c_6}{\rho^{2+\frac{1+\beta(w_j)}{I(w_j)}}}, \quad para\ |z| < r_j. \tag{36}$$

Tome $c_0 \geq max_j\{c_6\}$ e defina

$$\epsilon = \inf\left\{2\frac{1+\beta(w_j}{I(w_j)} \;\middle|\; 1 \leq j \leq m\right\} \quad e \quad \kappa_o = \sup_{\rho(p)} |\kappa(z)|.$$

Seja uma *cut off function* $k : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ de classe C^∞ tal que $k(s) \geq |\kappa(z)|$ para todo $\rho(p) \leq R_o$ e $k(s) = \frac{c_o}{s^{2+\epsilon}}$, para todo $s \geq R_o$. Então temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty sk(s)ds &= \int_0^{R_o} sk(s)ds + \int_{R_o}^\infty sk(s)ds \\
&\leq \int_0^{R_o} s\kappa_o ds + \int_{R_o}^\infty s\frac{c_o}{s^{2+\epsilon}}ds \\
&= \kappa_o R_o^2 + \int_{R_o}^\infty \frac{c_o}{s^{1+\epsilon}}ds \\
&= C_7 + c_o \lim_{y\to\infty} \int_{R_o}^y \frac{1}{s^{1+\epsilon}}ds \\
&= C_7 + c_o \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y^\epsilon} - \frac{1}{R_o^\epsilon}\right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

Como aplicação temos o seguinte resultado imediato.

Corolário 5.2. *Seja M uma superfície completa simplesmente conexa de um dos seguintes tipos:*

(a) mínima imersa no $\mathbb{R}^3$ com curvatura total finita.
(b) CMC-1 imersa no $\mathbb{H}^3$ com curvatura total ou curvatura total dual finita.

Então as únicas funções harmônicas positivas em M são as constantes. Além disso, se M for Kähler, então não existe função holomorfa limitada não constante.

Demonstração. Primeiramente, temos que essas superfícies possuem curvatura radial negativa, portanto, a função $K : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ definida pelo Teorema 2.5 é identicamente nula. Além disso, pelo Teorema 2 acima, basta aplicar o Teorema 2.5 de Greene-Wu, pois tais superfícies satisfazem o item (D) da do Lema 2.3. Assim, o resultado decorre do

Teorema 2.5 de Greene-Wu. □

Observação 5.2. *Como toda superfície de Kähler imersa em* $\mathbb{R}^3$ *é mínima, o Corolário* (5.2) *está dizendo que em superfícies de Kähler simplesmente conexa com curvatura total finita as únicas funções holomorfas limitadas são as constantes, ou seja, vale um Teorema tipo Liouville.*

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstramos teoremas tipo Picard para superfícies de Bryant com curvatura total finita e superfícies de Bryant algébricas imersas em $\mathbb{H}^3$ e para CMC-1 faces do tipo finito com fins elípticos imersas no espaço de Sitter $\mathbb{S}^3_1$, respondendo assim, de maneira definitiva, o problema de Osserman nesses casos.

Uma sequência para esse trabalho seria investigar o que acontece para os seguintes casos:

(i) Superfícies CMC-1 com tipo topológico finito, sem necessariamente possuir curvatura total finita.

(ii) Superfícies CMC-1 imersas em $\mathbb{H}^4$.

Esperamos abordar tais problemas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AKUTAGAWA, K. *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. Mathematische Zeitschrift* 196, 13-19, 1987.

AIYAMA, R. ; AKUTAGAWA, K. *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{H}^3(-c^{2)}$ *and* $\mathbb{S}^3_1(c^{2)}$*. Annals of Global Analysis and Geometry 17*, 49-75, 1998.

BARBOSA, J.L. ; DO CARMO, M.P. *On the size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^3$*. American journal of Mathematics*, v. 98, p. 515-528, 1976.

BRYANT, R. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space Astérisque* 154-155, 321-347, 1987.

DO CARMO, M.P. ; PENG, K. C. *Stable minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes. Bullet of the American Mathematical Society*, v.110, p. 903-906, 1979.

COLDING, T. H. ; MINICOZZI, W. P. *A Course in Minimal Surfaces Graduate Studies in Mathematics vol. 121*, AMS

EPSTEIN, C. L. *The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections. Journal für die reine und angewandte Mathematik - 372* | Periodical 40 page(s) (96 - 135).

FUJIMORI, S. *Spacelike CMC-1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space. Hokkaido Math. Journal 35*, 289-320, 2006.

FUJIMORI, S. ; ROSSMAN, W. ; UMEHARA, M ; YAMADA, K. ; YANG, S.D. *Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space. Communications in Analysis and Geometry vol 17*, number 3, 383-427, 2009.

FUJIMOTO, H. *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces. Michigan Mathematics Journal*, vol. 5, 235-247 1988.

GREENE, R.E. ; WU, H. *Function theory on manifolds which posses a pole. Lectures Notes in Mathematics No. 699.* Edited by A. Dold and B. Eckmann, Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979

HAUSWIRTH, L. ; ROITMAN, P ; ROSENBERG, H. *The geometry of finite topology Bryant surfaces. Annals of Mathematics*, 153, 623-659, 2001.

HAUSWIRTH, L. ; COLLIN, P. ; ROSENBERG, H. *The gaussian image of mean curvature one surfaces in* $\mathbb{H}^3$ *of finite total curvature. Journal of Differential Geometry* 60, 55-101, 2002.

HUBBER, A. *On subharmonic functions and differential geometry in the large. Commentarii Mathematici Helvetici* 32, 13-72, 1957.

IZUMIYA, S.; PEI, D. ; FUSTER, M.C. ; TAKAHASHI, M. *The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space. Journal of the London Math. Soc.* 2004.

JORGE, L.P. ; MERCURI, F. *The Gauss map of a complete non flat minimal surface in* $\mathbb{R}^3$ *with finite total curvature* 2018.

JORGE, L.P. ; MEEKS, W. H. *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature. Topology, Vol. 22 No 2*, 203-221, 1983.

KAWAKAMI, Y. *Ramification estimatives for the hyperbolic Gauss map. Osaka Journal of Mathematics* 46, 1059-1076, 2009.

NEVALINNA, R. *Analytic Function, translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer, New York, 1970.

OSSERMAN, R. *Proof of a conjecture of Nirenberg. Communication on Pure and Applied Mathematics*, vol. 12, 229-232, 1959.

OSSERMAN, R. *Global properties of minimal surfaces in* E^3 *and* E^n *. Annals of Mathematics*, Vol. 80, 340-364, 1964.

OSSERMAN, R. *A survey of minimal surfaces.* Dover Publications, 1986.

ROSSMAN, W. *Mean curvature one surfaces in hyperbolic space, and their relashionship to minimal surfaces in euclidean space. The Jornal of Geometric Analysis*, vol. 11, number 4, 2001.

ROSSMAN, W. ; UMEHARA, M ; YAMADA, K. *Mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space with low total curvature. Hiroshima Math Journal* 34, 21-56, 2004.

UMEHARA, M ; YAMADA, K. *Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space. Annals of Mathematics* 137, 611-638, 1993.

UMEHARA, M ; YAMADA, K. *A duality on CMC-1 surfaces in hyperbolic space, and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality. Tsukuba Journal of Mathematics* vol. 21, No. 1, 229-237, 1997.

YU, Z. *Value of distribution of hyperbolic Gauss maps. Proceedings of the American Mathematical Society* 125, 2997-3001, 1997.