



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUBENS SOARES DE OLIVEIRA

UMA ABORDAGEM GENERALIZADA
PARA A DEFINIÇÃO E
CARACTERIZAÇÃO DE BACIAS
HIDROMORFOLÓGICAS

FORTALEZA

2019

RUBENS SOARES DE OLIVEIRA

**UMA ABORDAGEM GENERALIZADA
PARA A DEFINIÇÃO E
CARACTERIZAÇÃO DE BACIAS
HIDROMORFOLÓGICAS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. José Soares Andrade Júnior

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p de Oliveira, Rubens Soares.
Uma Abordagem Generalizada para a Definição e Caracterização de Bacias Hidromorfológicas / Rubens Soares de Oliveira. – Fortaleza, 2019.
68 f.:il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2019.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada
Orientação: Prof. Dr. José Soares Andrade Júnior

1. Linhas Divisoras de Água. 2. Bacias Hidromorfológicas. 3. Bacias Hidrográficas. 4. Lei de Hack. 5. Leis de Escala. I. Título.

CDD:000.0

RUBENS SOARES DE OLIVEIRA

**UMA ABORDAGEM GENERALIZADA
PARA A DEFINIÇÃO E
CARACTERIZAÇÃO DE BACIAS
HIDROMORFOLÓGICAS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 30/01/2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Soares Andrade Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Prof. Dr. João José Vasco Peixoto Furtado
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Aos meus, porque
assim os considero, e
àqueles que se virem
como tal.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Soares de Andrade Jr. pela orientação e pelo acesso sempre fácil e prestimoso.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira pela disponibilidade e constância, bem como pelas sugestões sempre condizentes com o papel desempenhado.

Ao Dr. Rilder S. Pires pela contribuição significativa a este trabalho.

Ao Prof. Dr. Liacir dos Santos Lucena, meu orientador de iniciação científica no PET de Física da UFRN, cujas palavras e atos ficaram marcados em todo o período da minha formação na área de Física.

Aos professores Dr. Paulo de Tarso Cavalcante Freire e Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho, com quem aprendi conteúdos, mas também elementos fundamentais de ética e de postura profissional.

Ao prof. Dr. André Auto Moreira, pelos temas transversais.

À minha amiga Janete pela indicação do programa de pós-graduação e por ter me apresentado ao meu orientador.

Aos colegas de laboratório que estiveram presente nesses anos.

Às secretárias da pós-graduação, sempre muito profissionais.

Ao pessoal da limpeza por manter a alegria que me fazia esquecer temporariamente dos percalços.

Ao pessoal da cantina da Física.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Bacias hidromorfológicas desempenham um papel fundamental nas áreas de Hidrologia e Geomorfologia. No entanto, o desenvolvimento de uma abordagem generalizada para a definição e a caracterização dessas regiões ainda representa um importante desafio para pesquisadores em Geomorfologia. Aqui, nós introduzimos um modelo para delinear múltiplas bacias hidromorfológicas através de uma extensão do Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IBPA). Com o objetivo de confirmar o potencial da nossa abordagem, nós aplicamos a conjuntos de dados reais e artificiais e observamos que as distribuições do perímetro e da área das bacias e antibacias apresentam longas caudas que se estendem por várias ordens de magnitude e que seguem, dentro de certos limites, comportamentos em lei de potência. Ademais, os expoentes dessas leis de potência dependem das correlações espaciais, mas são invariantes sob a orientação de paisagem, não apenas para as terrestres, mas também para as lunares e marcianas. Surpreendentemente, os resultados terrestres e marcianos são estatisticamente idênticos, o que nos sugere que um hipotético rio marciano apresentaria similaridade com os rios terrestres. Propomos também um valor teórico para o expoente de Hack, baseado na dimensão fractal das linhas divisoras de águas, $\gamma = D/2$. Dessa forma, medimos $\gamma = 0.52 \pm 0.01$ para Terra, que é bastante próximo à nossa estimativa de $\gamma \approx 0.55$. Nosso estudo sugere que a lei de Hack pode ter sua origem puramente nas linhas máximas e mínimas das paisagens. Para completar, propusemos ainda um novo algoritmo hierárquico para definir todas as sub-bacias de uma dada paisagem. Aplicamos nosso método para a bacia amazônica e descobrimos que as sub-bacias obtidas são consistentes com aquelas reportadas na literatura. Finalmente, nós também observamos que as distribuições do perímetro e da área das sub-bacias exibem longas caudas, seguindo, de forma aproximada, comportamento em lei de potência e que os seus expoentes diminuem com a hierarquia das sub-bacias.

Palavras-chave: Linhas Divisoras de Água; Bacias Hidromorfológicas; Bacias Hidrográficas; Lei de Hack; Leis de Escala; Geomorfologia.

ABSTRACT

Drainage basins play a fundamental role in Hydrology and Geomorphology. However, the lack of a proper definition for these regions still represents an open problem. Here, we propose a new hierarchical algorithm to define all sub-basins of a given (basin) landscape. We introduce a model to delineate multiple drainage basins through an extension of the Invasion Percolation-Based Algorithm (IPBA). In order to prove the potential of our approach, we apply it to real and artificial datasets. We observe that the perimeter and area distributions of basins and anti-basins display long tails extending over several orders of magnitude and following approximately power-law behaviors. Moreover, the exponents of these power laws depend on spatial correlations and are invariant under the landscape orientation, not only for terrestrial, but lunar and martian landscapes. The terrestrial and martian results are statistically identical, which suggests that a hypothetical martian river would present similarity to the terrestrial rivers. Finally, we propose a theoretical value for the Hack's exponent based on the fractal dimension of watersheds, $\gamma = D/2$. We measure $\gamma = 0.52 \pm 0.01$ for Earth, which is close to our estimation of $\gamma \approx 0.55$. Our study suggests that Hack's law can have its origin purely in the maximum and minimum lines of the landscapes. We too apply our method to the Amazon basin and find that the obtained sub-basins are consistent with those reported in the literature. Finally, we also observe that the perimeter and area distributions of sub-basins exhibit long tails following approximately power-law behaviors and that their exponents decrease with the hierarchy of the sub-basins.

Keywords: watershed; Hydromorphological Basins; Drainage Basin; Hack's Law; Power Law; Geomorphology.

LISTA DE TABELAS

- 1 Tabela de valores para uma bacia com ramos em quatro ordens segundo a classificação de Strahler. p. 39
- 2 Expoentes α e β para paisagens reais. Esses expoentes foram determinados através dos ajustes de Mínimos Quadrados Ordinários(OLS) [91] para as correspondentes distribuições. Resultados similares foram obtidos usando Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) [92] (Ver Apêndice I). p. 49

LISTA DE FIGURAS

1	Dinâmica de propagação de fogo na floresta.	p. 21
2	Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ para o modelo de fogo na floresta em relação à probabilidade de ocupação p . Os cálculos foram realizados com 1000 amostras de redes de tamanho $L = 1024$ e estimou-se $p_c = 0.592$ como a probabilidade onde o maior valor de $\langle t_v \rangle$ foi encontrado. No sub-gráfico vê-se o deslocamento do ponto crítico para 0.407, quando segundos vizinhos são utilizados. Figura gentilmente cedida por <i>E. A. Oliveira</i> [18].	p. 22
3	a) Rede representando substrato com identificação de sítio a partir do qual o processo de percolação invasiva se inicia; b) Primeiro sítio invadido em preto com primeiros vizinhos identificados em amarelo; c) Segundo sítio invadido com vizinhos atualizados; d) Terceiro passo no processo de invasão.	p. 23
4	Imagens em escala de cinza para utilização em algoritmo usando MED.	p. 25
5	Evolução do cálculo da linha divisória de águas.	p. 26
6	Movimento Browniano observado em diferentes escalas. As curvas são estatisticamente equivalentes, revelando a lei de escala para o <i>Bm</i> [45].	p. 32
7	Movimento Browniano fracionário com fator de escala vertical de $2^{0.2}$. Note que essas curvas são muito mais rugosas quando comparadas com as do <i>Bm</i> da figura 6 [45].	p. 32
8	Amostras do <i>fBm</i> para os parâmetros $H = 0.2$, $H = 0.5$ e $H = 0.8$, respectivamente [47].	p. 34
9	Padrões de drenagem mais comuns [49].	p. 35
10	Esquema de ordenação estabelecida por Strahler para classificar bacias hidrográficas [50].	p. 36

- 11 Extensão do Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IPBA). Nós usamos um Modelo de Elevação Digital (DEM) da região da Ilha do Havaí para mostrar os três passos da nossa abordagem. (A) único agregado de altura composto por todos os sítios com $h_i > h^*$, onde $h^* = 0$ (nível do mar) ao longo do estudo. A cor da paisagem é organizada do roxo escuro (pequenas alturas) ao amarelo claro (grandes alturas) em escala linear. Nós representamos em cores diferentes todos os sumidouros: os locais que estão na fronteira do agregado de altura, neste caso, a costa do mar. Finalmente, o agregado de Percolação Invasiva (IP) do sítio i está em preto. O processo de Percolação Invasiva começa no sítio i e termina no sumidouro S_k . (B) Todas as bacias hidrográficas identificadas com o nosso algoritmo. As bacias têm as cores dos seus sumidouros e as linhas pretas representam a rede de linhas divisoras de águas. (C) Todas as anti-bacias hidrográficas a partir da maior bacia de drenagem. As anti-bacias são também representadas por várias cores e as linhas pretas, neste caso, representam a rede de anti-linhas divisoras de águas. p. 43
- 12 Paisagem, bacias e anti-bacias para a Terra, a Lua e Marte. (A) Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO) [87]. (B) Altímetro Laser da Órbita lunar (LOLA) [88]. (C) Altímetro Laser da Órbita de Marte (MOLA) [89]. Nos três casos, as alturas estão em unidades de quilômetro (km) e representadas em escala linear. (D-F) Bacias hidrográficas para alturas acima de h^* das paisagens de GEBCO, LOLA e MOLA. (G-I) Anti-bacias hidrográficas para alturas abaixo de h^* das paisagens GEBCO, LOLA e MOLA. Note que $h^* = 0$ (nível do mar para a Terra e nível hipotético do mar para Lua e Marte) ao longo do estudo. Aqui, usamos as seguintes abreviaturas: Bacias Terrestres (TB), Anti-bacias Terrestres (TA), Bacias Lunares (LB), Anti-bacias Lunares (LA), Bacias Marcianas (MB) e Anti-Bacias Marcianas (MA). Sítios abaixo do limite de altura h^* são exibidos em cinza. p. 46

- 13 Paisagens artificiais e suas respectivas bacias. Paisagens de movimento browniano fracionário (fBm) geradas pelo método de filtragem de Fourier (Ffm) para quatro regimes. Uma típica paisagem não-correlacionada ($H = -1$) é mostrada em (A), uma paisagem gerada com correlações negativas ($H = 0.2$) em (B), uma paisagem de movimento browniano ($H = 0.5$) em (C) e uma paisagem com correlações positivas ($H = 0.8$) em (D). Todas as paisagens fBm exibidas compartilham o mesmo tamanho $L = 1024$ e a mesma semente aleatória. As alturas são representadas em escala linear, onde as cores mais claras (mais escuras) significam alturas mais altas (mais baixas). As bacias definidas pela nossa abordagem correspondentes às paisagens fBm mostradas em (A), (B), (C) e (D) são mostradas em (E), (F), (G) e (H), respectivamente. Sítios abaixo do limite de altura h^* são mostrados em cinza. p. 47
- 14 Gráficos log-log das distribuições de perímetro e área para bacias e anti-bacias em paisagens reais e artificiais. (A) As distribuições de perímetro para bacias e anti-bacias na Terra, Lua e Marte. (B) As distribuições de área de superfície para bacias e anti-bacias na Terra, Lua e Marte. Em ambas, utilizamos as seguintes abreviaturas: Bacias Terrestres (TB), Anti-bacias Terrestres (TA), Bacias Lunares (LB), Anti-bacias Lunares (LA), Bacias Marcianas (MB) e Anti-bacias Marcianas (MA). Mostramos todos os expoentes para paisagens reais na Tabela 2. (C) As distribuições de perímetro para vários valores do expoente de Hurst H . (D) As distribuições de área de superfície para vários valores de H . As inserções mostram o comportamento dos expoentes α e β em relação a H . As funções logarítmicas usadas são de base 10 e todos os expoentes são calculados pelo ajuste dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) [91]. Também obtemos expoentes semelhantes usando um Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) [92] (Ver Apêndice I). p. 48
- 15 A bacia amazônica. A bacia hidrográfica da região amazônica obtida pelo nosso algoritmo. As alturas são representadas em metros (m) e em escala logarítmica para mostrar os detalhes da cordilheira dos Andes e do rio Amazonas. As linhas pretas representam a rede anti-linhas divisoras de águas, que mostram uma impressionante semelhança com a rede do rio Amazonas. p. 50

- 16 Lei de Hack para a Terra e para paisagens fBm com $H = 0.7$. A relação de escala do caminho mais longo ℓ do ponto de altura mínima (boca) da maior árvore na rede anti-linha divisora de água versus a área A da sua bacia (círculos azuis para a Terra e asteriscos verdes para paisagens fBm), em quilômetros quadrados (km^2) para a Terra. As linhas laranja e amarelo sólidas são o estimador de Nadaraya-Watson [95, 93], as regiões sombreadas laranja e amarelo são limitadas pelos intervalos de confiança inferiores e superiores, e a linha preta sólida é a regressão linear calculada por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) [91]. p. 51
- 17 Paisagem da América do Sul extraída do conjunto de dados da Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO). As alturas estão em unidades de metros (m) e representadas em escala logarítmica a fim de mostrar os detalhes da Cordilheira dos Andes e do Rio Amazonas. p. 55
- 18 Primeiras gerações de bacias e suas redes de anti-linhas divisoras de águas associadas. (A) A bacia Amazônica com as primeiras e segundas gerações de anti-linhas divisoras de águas (azul escuro) e redes de linhas divisoras de águas (cinza), respectivamente. (B) A sub-bacia do Purus com a segunda e a terceira geração de redes de anti-linhas divisoras de águas (azul) e linhas divisoras de águas (cinza), respectivamente. (C) Uma sub-bacia dentro do Purus com a terceira geração de rede de anti-linhas divisoras de águas (azul claro). p. 56
- 19 Distribuições do perímetro e da área para as sub-bacias do Amazonas. (A) A distribuição de perímetro para cada geração de sub-bacias. Encontramos o expoente α igual a -2.73 ± 0.03 , -3.15 ± 0.07 , e -3.41 ± 0.49 para a segunda, terceira e quarta gerações das sub-bacias do Amazonas, respectivamente. (B) A distribuição da área de superfície para cada geração de sub-bacias. Neste caso, nós encontramos o expoente β igual a -2.00 ± 0.02 , -2.28 ± 0.04 , -2.52 ± 0.21 para a segunda, terceira e quarta gerações das sub-bacias, respectivamente. As linhas tracejadas representam os expoentes α e β obtidos por Oliveira *et al.* [97] para a primeira geração de bacias do mundo inteiro. As funções logarítmicas usadas são de base 10 e todos os expoentes são calculados através de ajustes de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS). p. 57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 16
2	CONCEITOS BÁSICOS E FUNDAMENTAÇÃO	p. 19
2.1	Teoria da Percolação	p. 19
2.1.1	Modelo de Percolação	p. 20
2.1.1.1	Modelo de fogo na floresta	p. 20
2.1.1.2	Percolação invasiva	p. 22
2.2	Linhas divisoras de água	p. 24
2.3	Coeficiente de Hurst	p. 26
2.4	Movimento Browniano	p. 28
2.4.1	Movimento Browniano fracionário	p. 31
2.5	Hidrologia	p. 33
2.5.1	Caracterização Física das Bacias Hidrográficas	p. 36
2.5.2	Redes de Rios	p. 39
3	UMA ABORDAGEM UNIVERSAL PARA BACIAS HIDROMOR- FOLÓGICAS	p. 41
3.1	O Modelo	p. 42
3.1.1	Resultados	p. 45
3.1.2	Paisagens reais	p. 46
3.1.3	Paisagens Artificiais	p. 49
3.2	Discussão	p. 52

4 UM MÉTODO HIERÁRQUICO PARA DEFINIR SUB-BACIAS HIDROGRÁFICAS	p. 53
4.1 O Modelo	p. 53
4.2 Sub-bacias	p. 54
4.3 Discussão	p. 56
5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	p. 59
Apêndice A – Informações Suplementares	p. 61
A.1 Paisagens Reais	p. 61
A.2 Paisagens Artificiais	p. 62
REFERÊNCIAS	p. 64

1 INTRODUÇÃO

A Geografia Física clássica trata do estudo dos aspectos naturais aparentes da superfície terrestre atentando para suas irregularidades. A essas irregularidades damos o nome de *paisagens*. A variação das paisagens é vista como sendo decorrente de um conjunto de fatores que posteriormente vieram a se estabelecer como ramos da geografia, sendo os principais: geomorfologia, hidrologia, glaciologia, biogeografia, climatologia, pedologia, dentre outras. Estudos quantitativos conectando a hidrologia com a geomorfologia aparecem na primeira metade do século XX no extenso trabalho de Robert Elmer Horton [1]. É nesse trabalho onde a caracterização de Bacias Hidrográficas, elemento fundamental de estudo da hidrologia, aparece com maior consistência que em qualquer estudo anterior. As sub-bacias hidrográficas em zonas rurais ou urbanas constituem elementos unitários em torno dos quais fatores ecológicos, econômicos, biológicos e sociais se influenciam mutuamente, de modo que uma definição unívoca permite uma abordagem generalizada desses fatores em conjunto.

Embora tecnicamente o conceito implícito no termo seja claro, existem variações no foco principal, conforme a percepção dos técnicos que o utilizam em seus estudos. Na área de planejamento ambiental, o conceito de Bacia Hidrográfica tem sido cada vez mais expandido e utilizado como unidade de gestão da paisagem [2]. Na perspectiva de um estudo hidrológico, esse mesmo conceito envolve explicitamente o conjunto de terras drenadas por um corpo de água principal e seus afluentes, representando a unidade mais apropriada para o estudo qualitativo e quantitativo do recurso de água e dos fluxos de sedimentos e nutrientes [3]. Na perspectiva da Geologia uma Bacia Hidrográfica inclui os fluxos subterrâneos de água. Já Bormann e Likens abordam a unidade de pequenas bacias através do ciclo biogeoquímico [4]. Do ponto de vista do planejador direcionado à conservação dos recursos naturais, o conceito tem sido ampliado de tal modo que alguns autores ressaltam a importância do uso do conceito de Bacia Hidrográfica como análogo ao de Ecossistema [5, 6, 7]. Mesmo nos limitando à Hidrologia, as bacias hidrográficas reais não seguem uma definição única. Embora a maioria dos rios que definem as bacias

siga para o mar, há algumas que fluem para lagos, como o caso da bacia do lago Chade, outras surgem de lagos, como a bacia do Rio Nilo e a do Rio Yenisey (ou Enisey) e ainda aquelas que não chegam no mar, como a bacia do Rio Cubango (ou Okavango). Uma vez que não há uma definição única e fechada do que seja uma bacia hidrográfica, uma regra única e simples não poderia englobar todos os casos. Ademais, apenas bacias de maior importância socioeconômica têm nomes próprios e destaque.

Com o objetivo de simplificar o problema de determinar o conjunto completo de todas as principais linhas divisoras de água mundiais, entenderemos para este trabalho o conceito de bacia hidrográfica como sendo uma região hidromorfológica cujo fluxo superficial de água tende a convergir para o mar pela mesma região de acesso (foz). É uma caracterização pela foz de uma região, grosso modo, côncava. Independente de haver ou não água, há um relevo que determina a direção do fluxo. Essa definição tem caráter mais geral que a versão adotada na geografia/geopolítica e pode ser expandida posteriormente para qualquer relevo ou topografia natural ou artificialmente constituído.

Desde que Mandelbrot cunhou o termo *fractal*, tem havido especulações de que as redes fluviais são fractais. De fato, foi mostrado que a estrutura formada pelos rios, riachos e veios de água apresentam dimensão fractal próxima de 2 [8], o que significa em termos práticos que o perfil hidrográfico tem importância e influência sobre toda a superfície terrestre. Estudos sugerem [9] que o processo de formação natural dos rios evoluindo por redes de canais ótimos buscando, assim, uma condição de energia mínima e equilíbrio estável é responsável pela natureza fractal das redes de rios. Outros estudos sugerem [10] que a característica de auto-organização é tão patente na natureza que deve permear todos os fenômenos naturais, principalmente aqueles relacionados à vida.

Conforme mostrado por Mandelbrot [11], leis de potência são assinaturas do comportamento fractal. Leis desse tipo foram observadas experimentalmente em uma ampla gama de escalas em descrições da morfologia de bacias hidrográficas [9, 12, 13] e foi sugerido também [14] que as cristas das montanhas seguiriam comportamento similar. Como parte da bacia hidrográfica, as redes fluviais exibem uma rica variedade de estruturas fractais [11, 15] cuja origem dinâmica e descrição geométrica são de grande importância tanto do ponto de vista prático quanto para uma compreensão mais profunda de como ocorrem os eventos naturais.

Nessa tese, generalizamos a definição de bacias hidrográficas através de um processo unívoco de determinação, mostramos a concordância dessa definição com as paisagens reais e demonstramos que o relevo global assim entendido segue leis previstas dentro da

Física Estatística.

O restante desse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 abordamos as teorias sobre as quais fundamentamos os trabalhos apresentados nessa tese, incluindo a *teoria da percolação*, apresentando os modelos de *fogo na floresta* e *percolação invasiva*, além de definirmos o conceito de *linhas divisoras de água* e movimento Browniano, bem como sua generalização dada pelo movimento Browniano fracionário. Finalizamos tratando de elementos de hidrologia e geomorfologia. No Capítulo 3, desenvolvemos uma abordagem generalizada para caracterização de bacias hidrográficas às quais nos referenciamos apropriada e justificadamente como bacias hidromorfológicas. No Capítulo 4 aplicamos o modelo apresentado no capítulo anterior a bacias e sub-bacias de modo a hierarquizar a relação entre elas. No Capítulo 5 discutimos os resultados obtidos apresentando conclusões e possibilidades de expansão desse trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS E FUNDAMENTAÇÃO

O objetivo principal desse capítulo é tratar das teorias básicas que orientam essa tese e sobre as quais fundamentamos nosso trabalho.

2.1 Teoria da Percolação

Percolação foi definida na segunda metade da década de cinquenta do século passado por *S. R. Broadbent* e *J. M. Hammersley* [16] como sendo o fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Mais especificamente descreviam de forma geral a situação na qual um fluido atravessa *randomicamente* um meio poroso. A expressão “randomicamente” vem do inglês *random* e pode ser comumente encontrada em português como “aleatório”, mas sua recorrência e a recorrência de suas variações já tornou-se tão constante que as versões adaptadas não são mais estranhas ou questionadas até mesmo fora dos círculos acadêmicos. A aleatoriedade do processo de percolação ocorre basicamente de duas formas diferentes. No já conhecido e bem estudado fenômeno da difusão, a aleatoriedade está no movimento desordenado das partículas individuais. Outro caso é o processo no qual o congelamento de um meio evolui e foi nesse contexto que a percolação foi explorada e estudada por Broadbent e Hammersley.

A diferença fundamental da difusão de partículas num meio e o processo de percolação propriamente dito é a existência nesse segundo caso daquilo que chamamos *limiar de percolação*, abaixo do qual o fenômeno está limitado a uma região finita da região total em estudo. Um exemplo discutido ainda no mesmo trabalho por Broadbent e Hammersley é o espalhamento de uma praga através das árvores de um pomar onde as árvores foram plantadas com curto espaçamento. Uma vez que o espaçamento fosse maior, a probabilidade de infecção de uma árvore vizinha caía até ficar abaixo de um valor crítico, p_c , a partir do qual a praga não se espalhava mais por todo o pomar. Para esse problema,

o limiar de percolação ocorre quando a probabilidade de um sítio qualquer estar preenchido é de aproximadamente $p_c = 0.593$, no caso de uma rede quadrada. Outro problema similar a esse e de grande interesse prático é a invasão de água deslocando petróleo em rochas porosas, onde regularmente o petróleo é encontrado, um mecanismo utilizado na recuperação de petróleo. Nesse problema, o fluido invasor, no caso a água que é injetada em alta pressão e temperatura para expulsar o petróleo, pode criar regiões isoladas de petróleo.

2.1.1 Modelo de Percolação

Considere inicialmente o caso de uma rede regular (quadrada, por exemplo) formada por sítios que podem estar ocupados ou vazios. Sendo p a probabilidade de um sítio estar ocupado, será $(1 - p)$ a probabilidade de o mesmo sítio estar vazio, independentemente dos seus vizinhos. Chama-se de aglomerado ao conjunto de sítios vizinhos ocupados. A teoria da percolação estuda basicamente as propriedades destes aglomerados.

Numa rede infinita, fazendo o parâmetro p variar no intervalo $[0, 1]$, num dado momento, o sistema passa de um estado onde todos os aglomerados são finitos para outro onde haverá pelo menos um aglomerado que conecta os lados opostos da rede. Quando isso acontece, dizemos que houve percolação. A esse ponto bem definido a partir do qual ocorre a percolação, onde $p = p_c$, chamamos de ponto crítico. O limiar da percolação, ou seja, o ponto crítico separa dois estados distintos e dizemos que nesse ponto ocorre uma transição de fase geométrica, pois abaixo desse ponto todos os aglomerados são finitos e acima desse limiar haverá um aglomerado infinito, ou seja, da mesma ordem de grandeza da rede. Esse fato permite uma conexão com a termodinâmica e as ferramentas utilizadas no estudo de transições de fase induzidas pela temperatura (mudanças de estado físico da matéria) podem ser aplicadas na investigação dos problemas de percolação.

2.1.1.1 Modelo de fogo na floresta

Para ilustrar a transição de fase no modelo de percolação, apresentaremos o modelo de *fogo na floresta*, que é efetivamente o modelo baseado no caso de propagação de pragas no pomar apresentado por Broadbent e Hammersley [16]. O problema de controle de incêndios em florestas é um problema de muito interesse por parte dos cientistas, não somente por questões ecológicas, mas principalmente pela simplicidade do modelo e pelos paralelos que podem ser feitos a partir dele para o estudo de outros problemas tanto práticos quanto teóricos.

Como um modelo simples para uma floresta, conforme representado esquematicamente em três momentos da figura 1, faz-se a aproximação com uma rede quadrada, dessa forma, cada sítio comporta uma árvore, podendo estar ocupado ou vazio. Para o preenchimento da rede, cada sítio terá probabilidade p de estar ocupado ou $(1 - p)$ de estar vazio. Sendo assim, para $p = 1$ todos os sítios da rede correspondem a uma árvore, o que não acontece no caso de uma floresta real onde o espaçamento entre as árvores é irregular. Com $0 < p < 1$ o espaçamento torna-se irregular e a rede descreve mais apropriadamente o modelo de uma floresta.

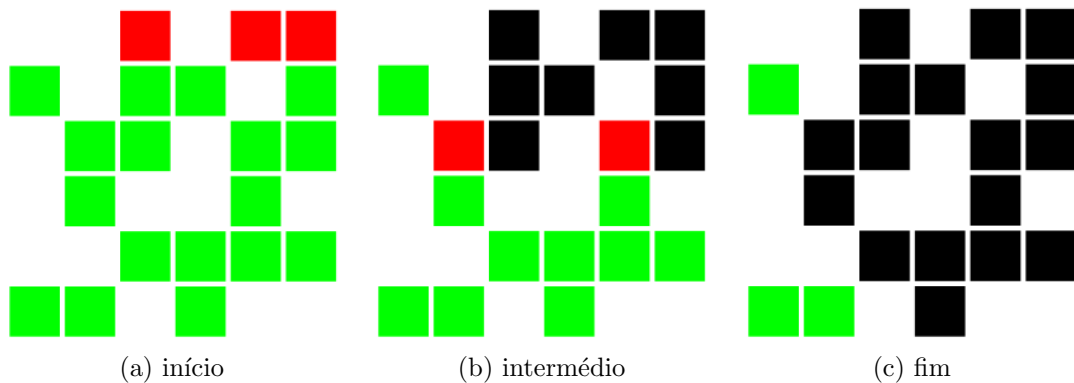


Figura 1: Dinâmica de propagação de fogo na floresta.

Estabelecida a condição inicial, podemos “incendiar” todas as árvores de uma aresta da rede estabelecendo que a cada passo do processo, a árvore queimada transmite a chama para a árvore vizinha (aquela com uma aresta em comum). A questão importante aqui diz respeito ao poder de penetração do fogo pela floresta (pela rede).

Iniciado o fogo e estabelecida a regra para sua propagação (através de vizinhos incendiados) falta esclarecer as regras dinâmicas do modelo em dois passos simples:

a) uma árvore incendiada transmite o fogo a uma árvore vizinha desde que o sítio onde se localiza a árvore incendiada esteja situado ao lado (na direção horizontal ou vertical) de um sítio que contenha outra árvore ainda sem fogo. Aqui não consideraremos como vizinhas duas árvores em sítios subsequentes diagonalmente.

b) no passo seguinte, a árvore incendiada fica inerte, não podendo ser queimada uma segunda vez.

Em um passo intermediário haverá árvores em três estados: ainda verdes, em chamas e já queimada. Ao fim do processo, quando mais nenhuma árvore puder ser queimada por não ter uma vizinha em chamas, somente haverá árvores verdes e queimadas. Quando o fogo iniciado em uma aresta da rede atinge a aresta paralela do outro lado da rede,

dizemos que houve percolação.

Considerando o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ sobre várias amostras de redes de tamanho L , variando os valores da probabilidade de ocupação p , tem-se que para $p < p_c$, o tempo de vida médio do incêndio é muito pequeno, devido à existência de poucas árvores na floresta, o que dificulta propagação do fogo. Na probabilidade crítica, $p = p_c = 0.5927$ [17], o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ é máximo. Nesse ponto, a floresta apresenta uma estrutura com muitas ramificações, fazendo com que o fogo possa atingir regiões remotas e o tempo de incêndio se prolongue. Para $p > p_c$, o tempo de vida médio do incêndio passa a diminuir novamente, pois a densidade de árvores passa a ser suficientemente alta, permitindo que o fogo se propague rapidamente.

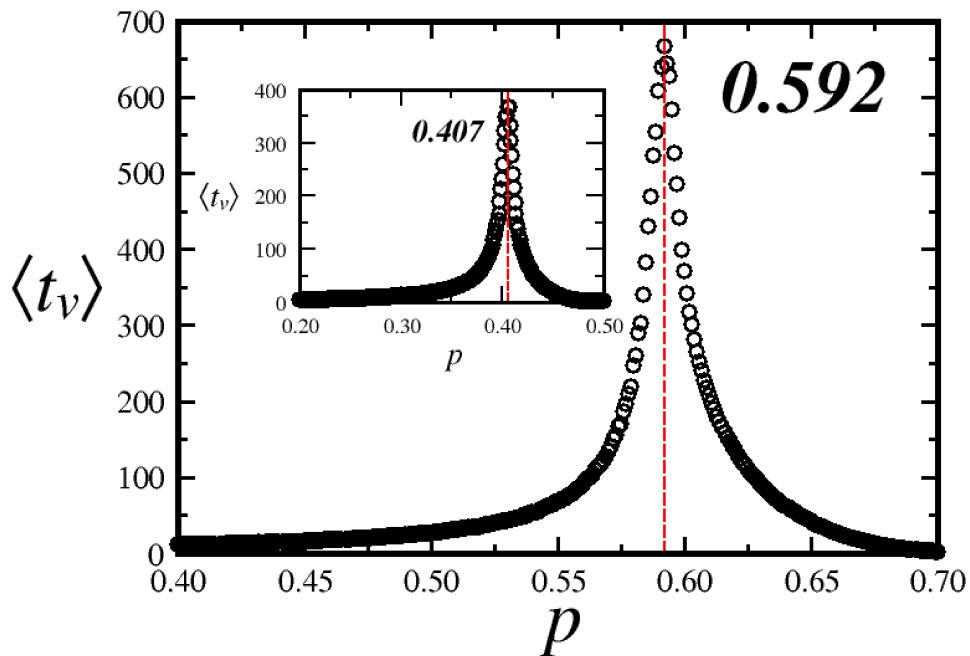


Figura 2: Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ para o modelo de fogo na floresta em relação à probabilidade de ocupação p . Os cálculos foram realizados com 1000 amostras de redes de tamanho $L = 1024$ e estimou-se $p_c = 0.592$ como a probabilidade onde o maior valor de $\langle t_v \rangle$ foi encontrado. No sub-gráfico vê-se o deslocamento do ponto crítico para 0.407, quando segundos vizinhos são utilizados. Figura gentilmente cedida por *E. A. Oliveira* [18].

2.1.1.2 Percolação invasiva

A percolação invasiva é um processo dinâmico introduzido no início da década de oitenta do século passado por *Wilkinson e Willemsen* [19] motivados pelo estudo de dois fluidos imiscíveis em um meio poroso. Na percolação invasiva os fluidos deslocam-se

somente devido à diferença de pressão capilar nos pontos da fronteira de invasão, isso quer dizer que em todos os pontos do fluido a pressão é a mesma, sendo razoável pensar que este “escapa” ou avança pelo ponto de menor resistência na sua fronteira. Considere o caso de um fluido de baixa viscosidade injetado num meio poroso previamente ocupado por um fluido de alta viscosidade, como representado na figura 3. Na injeção lenta, o fluido menos viscoso expulsa lentamente o fluido mais viscoso, como é o caso da recuperação de petróleo por injeção de água, um problema de indiscutível interesse econômico.

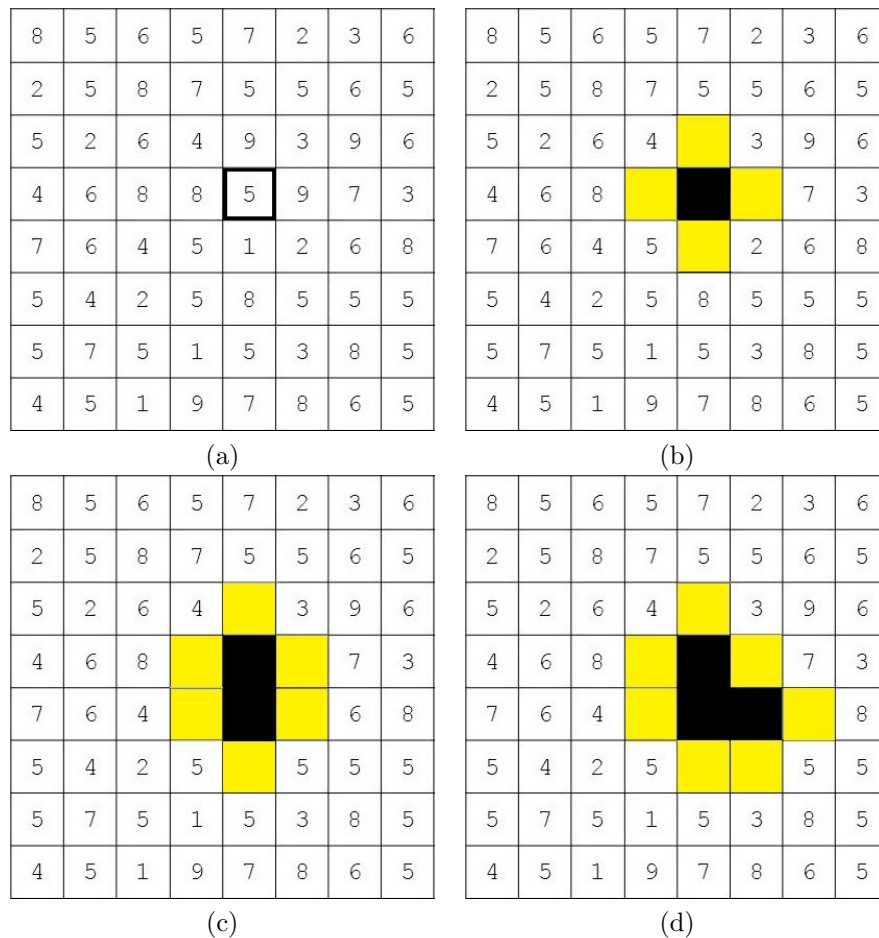


Figura 3: a) Rede representando substrato com identificação de sítio a partir do qual o processo de percolação invasiva se inicia; b) Primeiro sítio invadido em preto com primeiros vizinhos identificados em amarelo; c) Segundo sítio invadido com vizinhos atualizados; d) Terceiro passo no processo de invasão.

Na simulação desse processo um meio poroso será representado por uma rede regular de poros (sítios) conectados por ligações estreitas. Depois de definida uma rede regular preenchida aleatoriamente com valores reais (por escolha didática são representados na figura 3 com valores inteiros no intervalo $[0, 10]$), escolhe-se um ponto a partir do qual

a invasão começa e, a cada passo, o vizinho de menor valor da interface é ocupado. O processo continua até que o aglomerado percolante (sítios em preto na figura 3) atinja as fronteiras da rede.

Há dois casos a se considerar em relação ao fluido a ser expulso. No processo de invasão, a fronteira de invasão pode se dobrar sobre si formando regiões completamente circundadas pelo fluido invasor. Caso o fluido a ser expulso seja incompressível, formam-se “ilhas” que não podem mais ser invadidas. A fronteira dessas regiões deixa de fazer parte da fronteira de invasão. No segundo caso, o fluido é completamente compressível e a fronteira das ilhas continua fazendo parte da fronteira de inundação. A esses dois casos chamamos de percolação com ou sem aprisionamento. Diferente da percolação ordinária, onde os aglomerados formam-se pela ocupação aleatória dos sítios com probabilidade p , na percolação invasiva, não existe esse parâmetro e a fronteira de ocupação avança ocupando o menor sítio acessível.

2.2 Linhas divisoras de água

As linhas divisoras de água surgem naturalmente nos campos da geomorfologia e geopolítica. Os geógrafos definem *watershed* como sendo um terreno, ou limite de um sistema hidrológico, dentro do qual todas as coisas vivas naturalmente dividem a mesma fonte de água, tornando-se, por essa fonte de vida, parte de uma mesma comunidade. Outra definição diz respeito à área de terreno na qual toda a chuva é drenada na mesma direção. Embora surgindo na geografia e/ou geopolítica, esse conceito encontra aplicações em áreas aparentemente desconectadas, como no processamento de imagens [20] e na medicina.

Os divisores de águas são linhas imaginárias que separam bacias hidrográficas distintas. Historicamente foram utilizadas para determinar parte da fronteira entre o Chile e Argentina. Atualmente a determinação de divisores de água tem tido grande utilização no processamento de imagens [20, 21, 22, 23, 24]. Nessa área há forte interesse em desenvolver algoritmos cada vez mais eficientes para, através da determinação das linhas divisoras de águas, identificar objetos, regiões, conjuntos de itens similares, etc. [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. A identificação automática de elementos em imagens tem aplicações em diversas áreas e apresenta potencial para revolucionar a forma como realizamos uma imensa quantidade de tarefas, como identificação de substâncias proibidas em aeroportos, programação de respostas automáticas para imagens médicas, etc.

Há vários algoritmos desenvolvidos especificamente para segmentação de imagem, ação na qual são muito eficientes. Um modelo comum e de fácil utilização é conhecido como *modelo de elevação digital* - MED. Nesse modelo, a cada ponto da imagem é associado um valor diretamente relacionado com sua cor. Como só nos interessa a intensidade de cada ponto da imagem, as cores perdem o significado e mantém-se somente os tons de cinza.

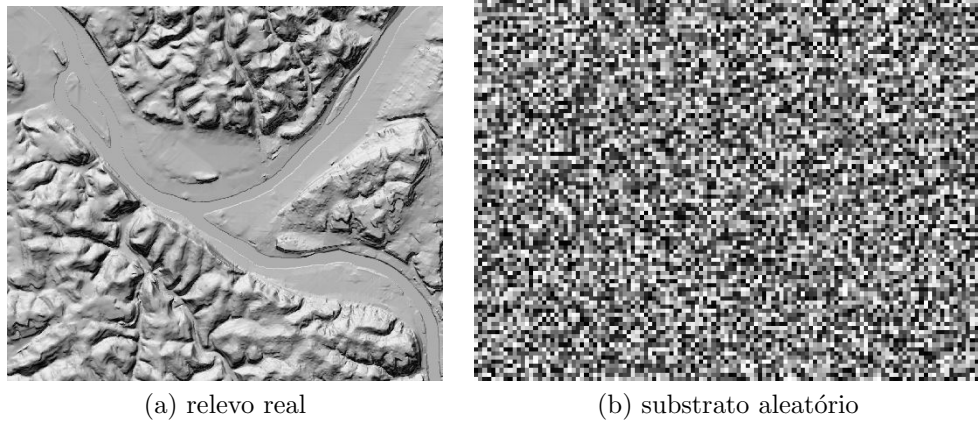


Figura 4: Imagens em escala de cinza para utilização em algoritmo usando MED.

Na figura 4 são apresentados dois casos de imagens utilizadas em estudos e processamento. Na figura 4a está ilustrada um relevo real, enquanto na figura 4b um substrato gerado aleatoriamente. Para estudos estatísticos, com grande número de amostras, usa-se comumente os substratos gerados. Há processos desenvolvidos recentemente que são mais eficientes [32] para a determinação da linha divisora de águas, mas por questões didáticas, descreveremos inicialmente um processo mais elementar. O processo mais simples para determinar a linha divisora de águas consiste em escolher inicialmente uma direção. Escolhendo a direção vertical, fazemos da primeira linha e da última linha da rede duas regiões invadidas por fluidos distintos. Os sítios imediatamente vizinhos a estes são fronteiras de inundação. Geralmente estabelecemos condição de contorno periódica na direção perpendicular (horizontal). A partir das duas fronteiras de inundação, escolhemos o sítio de menor intensidade (valor) e ocupamos esse sítio com o fluido correspondente, passando os vizinhos deste a fazerem parte da fronteira de inundação. O avanço sobre a fronteira continua até que as duas fronteiras se encontram não restando mais sítios a serem ocupado que não aqueles localizados no interior (ilhas) dos fluidos percolantes.

A figura 5 ilustra três momentos do processo de determinação da linha divisória de água num substrato gerado com intensidades aleatoriamente escolhidas. Nessa rede de 32×32 sítios, as cores azul escuro e preto representam os fluidos percolantes e as cores

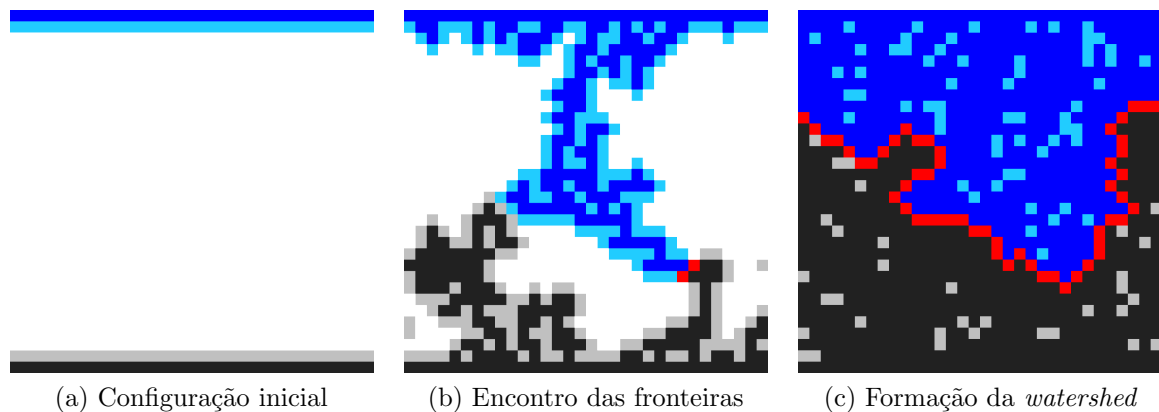


Figura 5: Evolução do cálculo da linha divisória de águas.

azul claro e cinza representam respectivamente suas fronteiras de inundação, ou seja, os sítios que serão verificados para ocupação posterior. A figura 5b ilustra o momento em que as duas fronteiras se encontram. Os sítios pertencentes às duas fronteiras de inundação ao mesmo tempo foram marcados com a cor vermelha e fazem parte do futuro *watershed* quando a linha divisora é formada. A figura 5c subsequente mostra o fim do processo quando a fronteira está completamente formada, isto é, quando a linha divisória é definida.

2.3 Coeficiente de Hurst

Em 1906, o hidrologista britânico Harold Edwin Hurst viajou para o Egito com a finalidade de trabalhar com o problema do controle de reservatórios de água do Rio Nilo. Um reservatório ideal nunca transbordaria nem secaria e o governo do Cairo era responsável por liberar uma certa quantidade de água a cada ano com a finalidade de manter o nível do reservatório adequado às necessidades da população. No entanto, se o fluxo do rio estivesse muito fraco, o nível do reservatório ficaria abaixo do esperado e apresentaria um grave problema de desabastecimento. Assim, o problema a ser resolvido por Hurst consistia em determinar a quantidade de água que o governo precisaria depositar no reservatório de forma que ele nunca transbordasse nem ficasse abaixo do nível crítico vindo a comprometer o abastecimento [33].

Na construção do seu modelo matemático, Hurst supôs que uma parte do sistema em estudo seguia sendo imprevisível, sendo assim tratada por ele como um caminhante aleatório. Essa parte correspondia ao fluxo de águas de chuva. Para testar suas hipóteses, ele inseriu um novo parâmetro estatístico para mensurar os efeitos de longa duração e que

ficou posteriormente conhecido como *expoente de Hurst*. A proposição do seu modelo para *caracterização da variabilidade de longo prazo em registros geofísicos* (em tradução livre) só foi feita no início dos anos 1950 [34] e posteriormente foi estudado por Mandelbrot nas décadas de 1960 e 1970 [35]. A ampla aplicabilidade do coeficiente de Hurst reside no fato de sua simplicidade e robustez. Aplica-se na biofísica, matemática aplicada, rede de computadores, economia, física, geofísica, medicina, astrofísica, etc.

Historicamente, Hurst chegou ao seu modelo começando por medir como o nível do reservatório flutuava em torno do nível médio ao longo do tempo [36]. Verificou que o intervalo de flutuação poderia mudar de acordo com o período de tempo usado para medição. Se a série temporal encontrada a partir dos valores medidos fosse completamente aleatória, isto é, seguissem o movimento Browniano, a extensão aumentaria com a raiz quadrada do tempo, isto é, $T^{1/2}$. Para padronizar a medida durante todo o tempo, Hurst decidiu criar uma razão adimensional, dividindo a extensão das observações (range R), pelo desvio padrão (S). Por isto, esta análise é chamada de *análise de reescalonamento* (análise R/S). Hurst encontrou que a maioria dos fenômenos naturais, incluindo descargas pluviais de rios, temperatura, chuvas e manchas solares, seguem um processo randômico com tendência. A intensidade desta tendência pode ser medida comparando o reescalonamento com o tempo, isto é, o quanto $H > 0.5$. Quando aplicou sua estatística aos valores registrados das medidas do nível do Rio Nilo, ele encontrou $H = 0.9$. Surpreso com o resultado, tentou outros rios e outros sistemas físicos, tendo encontrado em todos os casos $H > 0.5$.

Uma das áreas de utilização mais mencionadas recentemente é a economia. A aplicação estatística na previsibilidade das flutuações no mercado financeiro usando o expoente de Hurst tem se tornado popular apenas a partir das duas últimas décadas com os trabalhos de Christopher T. May [37], Marco Corazza e A. G. Malliaris [38] e, mais recentemente, Dariusz Grech e Zygmunt Mazur [39]. Mesmo assim, a área de finanças apresenta um desenvolvimento mais avançado do que o desenvolvimento em algumas áreas da física - como por exemplo a astrofísica - no que se refere ao tratamento de séries temporais usando o expoente de Hurst.

Ainda tratando de mercado financeiro, Bo L. Qian e Khaled Rasheed [40] estudaram o índice diário do Dow-Jones de 2 de janeiro de 1930 a 14 de maio de 2004 e calcularam o expoente de Hurst para cada série temporal em um período de 1024 dias. Na sequência, foram selecionados 30 períodos com valores de H próximos de 0.9 e outros 30 períodos com H próximos de 0.5. Foram usadas redes neurais para fazer aproximações dessas séries

temporais e, ao comparar os erros de aproximação, notou-se uma diferença significativa nesses valores.

O uso de redes neurais mostrou que séries temporais com expoente de Hurst próximo de 1.0 pode ser mais precisamente prevista do que aquelas que possuem H mais próximo de 0.5, corroborando com nossa interpretação desse parâmetro. Isso sugere que os mercados de ações não são totalmente aleatórios em todos os períodos. Alguns períodos possuem forte tendência e podem, por isso, ser usados para fazer previsões com precisão razoável. Essa forte tendência pode ser motivada por fatores históricos, políticos ou mesmo por escândalos envolvendo o nome do presidente ou alguém relevante no cenário econômico.

2.4 Movimento Browniano

A teoria que explica o movimento Browniano, descrito em artigo de 1827 pelo botânico e físico escocês Robert Brown, foi lançada em um artigo de Einstein em 1905 [41], intitulado *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, e publicado na famosa revista *Annalen der Physik*. Inicialmente Einstein não considerou que sua teoria explicasse o movimento Browniano. Após sua publicação, Einstein fora informado através dos trabalhos de Henry Friedrich Wilhelm Siedentopf e de Louis-George Gouy que sua teoria descrevia realmente o movimento Browniano.

Em seu artigo, além de fornecer uma explicação plausível para a existência daquele movimento intermitente de partículas, Einstein lançou duas equações fundamentais que seriam cruciais para a verificação da validade experimental de sua teoria: a equação que fornece uma fórmula para o cálculo do coeficiente de difusão do sistema, e a equação que fornece o deslocamento quadrático médio das partículas. Juntas, estas equações fornecem uma primeira alternativa para o cálculo teórico da constante de Avogadro. Posteriormente, Jean Baptist Perrin não somente demonstrou a plena concordância da teoria de Einstein com os experimentos, mas também obteve experimentalmente o valor do número de Avogadro com base nos trabalhos de Einstein. Graças a estas medidas e consequente obtenção do valor do número de Avogadro por meio de dados experimentais, Jean Perrin obteve o prêmio Nobel de Física, em 1926.

Os trabalhos de Einstein e Perrin forneceram evidências acerca da natureza molecular da matéria, através das quais, pela primeira vez, pôde-se mensurar as dimensões moleculares. De tal forma, a teoria do movimento Browniano, conforme desenvolvida por

Einstein, constituiu a última grande contribuição da Física Clássica para o esclarecimento dos fenômenos microscópicos da matéria antes do advento da Mecânica Quântica.

Introduziremos aqui o conceito de movimento Browniano, interessados em fundamentarmos as bases necessárias para compreendermos o movimento Browniano fracionário que é imprescindível na compreensão das superfícies correlacionadas, objetos que utilizaremos posteriormente como paisagens artificiais no nosso estudo acerca de watersheds. Para compreendermos esse tipo de movimento, vamos fazer uma restrição simplificadora e considerar o caso unidimensional, assim sendo, o movimento de uma partícula que executasse esse tipo de movimento estaria restrito a uma linha. Os pequenos impactos moleculares sofridos por uma partícula agitariam sua trajetória apenas a partir da direita ou da esquerda causando-lhe um deslocamento l . Se pudermos realizar alguma previsão sobre o deslocamento total da partícula após um número limitado de passos, poderemos simular o movimento Browniano e o teremos compreendido satisfatoriamente bem. Nesse intuito, vamos considerar o quadrado do deslocamento. A razão dessa escolha é que se considerarmos o deslocamento total esperado, este deverá ser zero, uma vez que todos os deslocamentos individuais são $+l$ ou $-l$, conforme a partícula se locomova para a direita ou para a esquerda, respectivamente, especificamente por ambos possuírem igual probabilidade de ocorrer [42].

A média dos deslocamentos ao quadrado, também referenciado como deslocamento quadrático médio, informa o quanto as partículas se dispersaram após um dado número de passos (em média). Matematicamente, temos nl^2 , onde n - número de passos e l - deslocamento em cada passo. Assim, quanto mais passos, mais as partículas se deslocam do local de onde começamos a observar o movimento.

Indicando por d_1, d_2, \dots, d_n os deslocamentos individuais, o quadrado da soma desses deslocamento será:

$$(d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j \quad (2.1)$$

Cada termo individual $d_i d_j$ nos somatórios tem valor $+l$ ou $-l$ com a mesma probabilidade de ocorrência, ou seja, 0.5. Além disso, os termos são independentes um do outro. Dessa forma, existem quatro possibilidades para o produto, sendo todas as probabilidades iguais a 0.25. Assim sendo, o produto entre $d_i d_j$ é sempre l^2 ou $-l^2$ com mesma probabilidade de 0.5 de ocorrência, e o valor esperado para um produto desse tipo para $i \neq j$ é zero. Então o valor dos termos $d_i d_j$ são sempre iguais a l^2 para quaisquer $i = 1, \dots, n$.

Portanto, o resultado é que o valor esperado do deslocamento quadrático total é igual nl^2 , que é o número de passos multiplicado pelo comprimento elevado ao quadrado.

O número de passos depende do número de colisões, que é impraticável de medir experimentalmente, mas para obtermos uma representação mais útil do movimento Browniano, consideremos o tempo de duração, t , porque este pode ser medido experimentalmente. Considerando o número médio de n passos durante um intervalo de tempo t , a partícula se desloca de um comprimento total dado por nl . Sendo v a velocidade média da partícula, temos: $vt = nl$. Usando esta relação e aquela para o deslocamento quadrático médio, obtemos $nl^2 = vlt$, de forma que o deslocamento quadrático médio é proporcional ao tempo t . O fator de proporcionalidade depende do comprimento, l , do passo e da velocidade média, v , da partícula. Esta é a propriedade fundamental do movimento Browniano verificada em 1908 numa série de experiências realizadas pelo físico francês Jean Perrin.

Em experiência simulada para descrever o movimento Browniano [43], foi mostrado que a distribuição dos deslocamentos para várias realizações tem a forma de uma distribuição Gaussiana, equação 2.2, caracterizada pelo seu formato tipo sino.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.2)$$

onde X é uma variável aleatória contínua com média μ em que $-\infty < x < \infty$ e $\sigma > 0$. Comumente a distribuição Gaussiana é considerada um modelo para uma amostra de dados estatisticamente bem coletados. Essa distribuição surge em todos os casos onde os eventos estudados são independentes e identicamente distribuídos. Este é exatamente o conteúdo do Teorema do Limite Central, tão importante em Teoria das Probabilidades. Assim temos que o deslocamento após um intervalo de tempo t é uma variável aleatória com distribuição Gaussiana, que é especificada pela sua média zero e o deslocamento quadrático médio é proporcional ao tempo t .

Mais formalmente, em termos estatísticos, para maior precisão, podemos estabelecer:

Seja $X = (X_t, t \in T)$ um processo estocástico e $T \subset \mathfrak{R}$ um intervalo. X é dito ter incrementos estacionários se $X_t - X_s = X_{t+h} - X_{s+h}$ para todo $t, s \in T$ e $t+h, s+h \in T$.

X tem incrementos independentes se para cada escolha de $t_i \in T$, com $t_1 < \dots < t_n$ e $n \geq 1$,

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad (2.3)$$

são variáveis aleatórias independentes. Assim, um processo estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ é chamado Movimento Browniano se:

1. O processo tem seu início em zero, $B_0 = 0$;
2. Possui incrementos estacionários e independentes;
3. Para todo $t > 0$, B_t tem uma distribuição normal $N(0, t)$;
4. O processo tem caminhos contínuos.

2.4.1 Movimento Browniano fracionário

Agora poderemos compreender, conceituar e analisar o movimento Browniano fracionário. Antes precisamos nos familiarizar com o conceito de auto-similaridade ou invariância de escala do movimento Browniano, abreviado daqui pra adiante por Bm (da sigla em inglês *Brownian motion*). O termo significa que o gráfico do Bm mantém a mesma aparência independente da escala escolhida para analisá-lo. A figura 6 ilustra essa característica do Bm . Uma análise dos valores médios, desvios padrões, momentos e demais parâmetros estatísticos deve fornecer as mesmas propriedades estatísticas para qualquer uma das curvas apresentadas na referida figura. Essas constatações implicam em auto-similaridade. Na descrição de *Seuront* [44]: um objeto é chamado auto-similar se ele pode ser escrito como uma união de cópias escalonadas de si mesmo com isotropia garantida, ou seja, mantém a uniformidade em todas as direções.

Ainda com relação a invariância de escala do Bm , as amplitudes desse movimento devem ser escalonadas por um fator de $\sqrt{2}$ quando o tempo (escala horizontal) é escalonado por um fator de 2. Amplitudes de escalas entre 1 e 2, entretanto, mudam as propriedades estatísticas dos gráficos do Bm . A situação é que para uma escala vertical arbitrária de fator entre 1 e 2 pode haver um tipo de curva que apresente auto-similaridade e a curva que apresenta esse comportamento é decorrente do chamado movimento Browniano fracionário. A figura 7 exhibe esse tipo de comportamento, onde a escala foi variada por um fator $2^{0.2}$ e postas juntas para facilitar a comparação.

Portanto, o fBm é uma generalização do Bm . Matematicamente, o Bm possui uma variância que respeita a expressão:

$$\text{var}(X(t_2) - X(t_1)) \propto |t_2 - t_1|^{2H}, \quad (2.4)$$

onde o parâmetro H é conhecido como *expoente de Hurst* [46] (o mesmo apresentado na

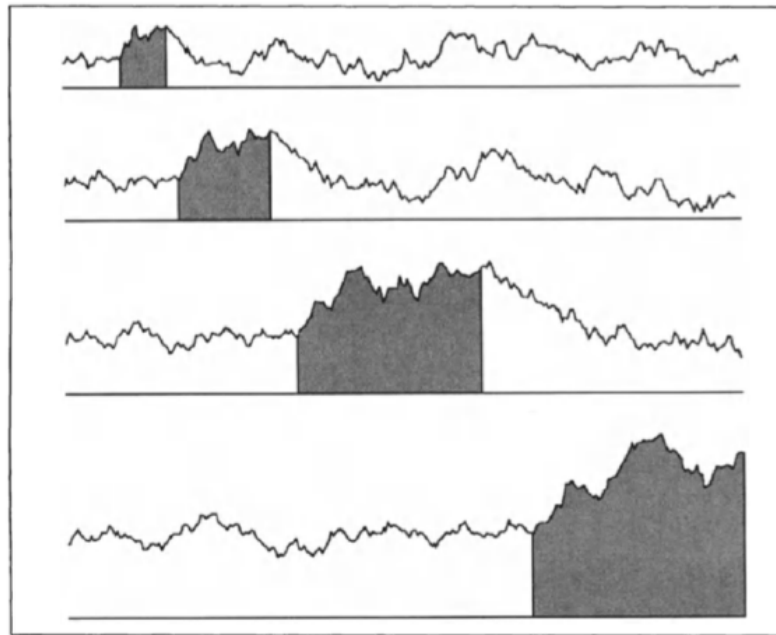


Figura 6: Movimento Browniano observado em diferentes escalas. As curvas são estatisticamente equivalentes, revelando a lei de escala para o Bm [45].

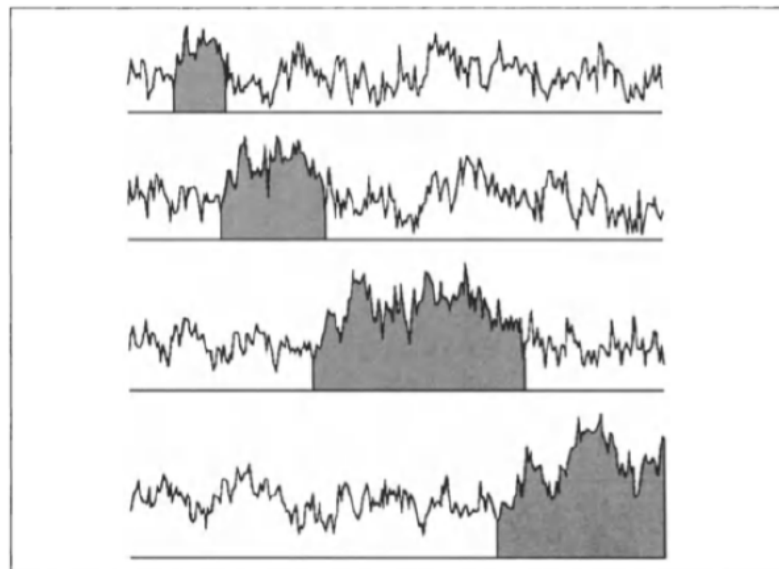


Figura 7: Movimento Browniano fracionário com fator de escala vertical de $2^{0.2}$. Note que essas curvas são muito mais rugosas quando comparadas com as do Bm da figura 6 [45].

seção anterior). Esse parâmetro é definido no intervalo $0 < H < 1$. Assim, com maior rigor, usamos o termo *movimento Browniano fracionário* para denotar uma família de funções Gaussianas aleatórias definidas como proposto por Mandelbrot & Ness [46]. Seja $B_H(t)$ um processo Gaussiano no intervalo fechado $[0, T]$ o qual possui valor esperado zero para todo t e satisfaz a equação:

$$E[B_H(s)B_H(t)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad (2.5)$$

onde $H \in (0, 1)$. Então, chamamos $B_H(t)$ um movimento *fBm* com parâmetro H . A forma dessa função de correlação mostra que os incrementos são estacionários [47] e resultam em,

$$E[(B_H(t)B_H(s))^2] = |t-s|^{2H}. \quad (2.6)$$

A principal característica desse processo é descrita em termos dos seguintes intervalos do valor de H :

1. $H < \frac{1}{2}$, os incrementos são dependentes e possuem correlação negativa (ou anticorrelação). Esse é um tipo de correlação que possui uma inversão na frequência da aparição dos seus valores muito maior do que ocorre com uma série aleatória. Essa inversão significa que um valor é seguido proximamente por um valor cuja frequência de ocorrência é inversa da frequência de ocorrência do valor anterior. Fenômenos dessa natureza são mais frequentes e podem ser encontrados em séries temporais de temperatura e umidade relativa do ar [48];

2. $H = \frac{1}{2}$, os incrementos são independentes, representando o movimento Browniano. Nesse caso o próximo passo da série temporal associada a esse valor de expoente não guarda correlação com o passo anterior;

3. $H > \frac{1}{2}$, os incrementos são dependentes. Significa que possuem correlação positiva entre os valores da série. Se a série está aumentando a partir de um dado instante t_0 , então é mais provável que em um instante t_n subsequente a série continue crescendo. Esse tipo de comportamento temporal é amplamente encontrado na natureza.

Na figura 8, mostramos algumas simulações para o *fBm* com diferentes parâmetros H extraídos de [47].

2.5 Hidrologia

Uma bacia hidrográfica compreende toda a área de captação natural da água da chuva que proporciona escoamento superficial para o canal principal e seus tributários.

Superiormente, a bacia tem um divisor topográfico que é o divisor de águas (*watershed*), e a delimitação inferior é a saída da bacia, também referenciada por *confluência*

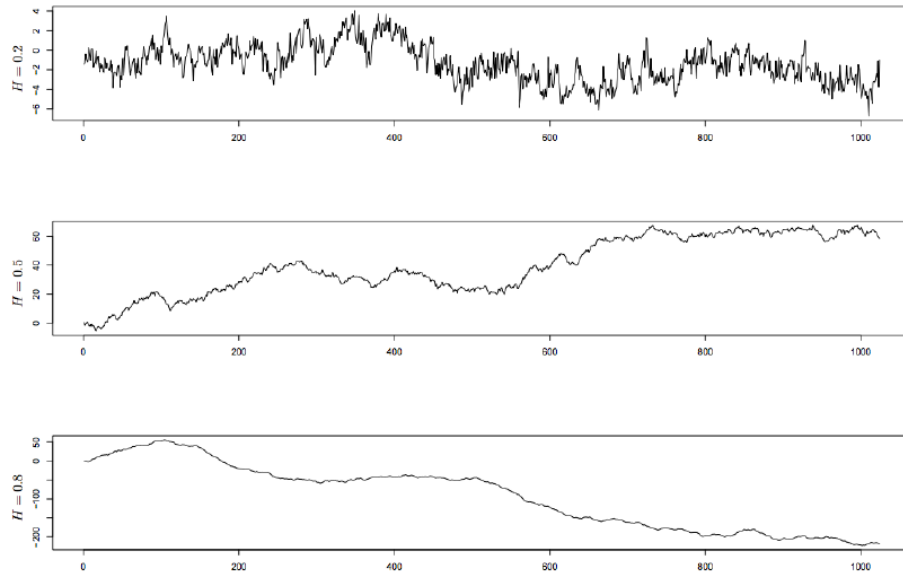


Figura 8: Amostras do fBm para os parâmetros $H = 0.2$, $H = 0.5$ e $H = 0.8$, respectivamente [47].

ou *exutório*. Essas nomenclaturas têm caráter mais geral, uma vez que nem todas as bacias desembocam no mar (foz).

O comportamento hidrológico de uma bacia hidrográfica é função de suas características morfológicas, tais como: área, forma, topografia, geologia, solo, cobertura vegetal, etc.. A fim de entender as inter-relações existentes entre esses fatores de forma e os processos hidrológicos de uma bacia hidrográfica, torna-se necessário expressar as características da bacia em termos quantitativos.

As bacias de drenagem podem ser classificadas de acordo com o escoamento global, segundo Antônio Christofletti [49], em quatro tipos:

a) exorreicas: quando o escoamento da água se faz de modo contínuo até o mar, isto é, quando as bacias deságuam diretamente no mar;

b) endorreicas: quando as drenagens são internas e não possuem escoamento até o mar, desembocando em lagos, ou dissipando-se nas areias do deserto, ou perdendo-se nas depressões cársticas (regiões de formação geológica sensivelmente porosa capaz de permitir infiltração de grandes quantidades de água);

c) arreicas: quando não há nenhuma estruturação em bacias, como nas áreas desérticas;

d) criptorreicas: quando as bacias são subterrâneas, como nas áreas cársticas.

Dentro da bacia, a forma da rede de drenagem também apresenta variações. Em geral,

predomina na natureza a forma dendrítica, a qual deriva da interação clima-geologia em regiões onde o solo é homogêneo quanto ao tipo de matéria formadora. Num certo sentido, considerando-se a fase terrestre do ciclo da água, pode-se dizer que a água procura evadir-se da terra para o mar. Assim fazendo, torna-se organizada em sistemas de drenagem, os quais refletem principalmente a estrutura geológica local. A figura 9 mostra uma representação qualitativa dos diferentes sistemas de drenagem.

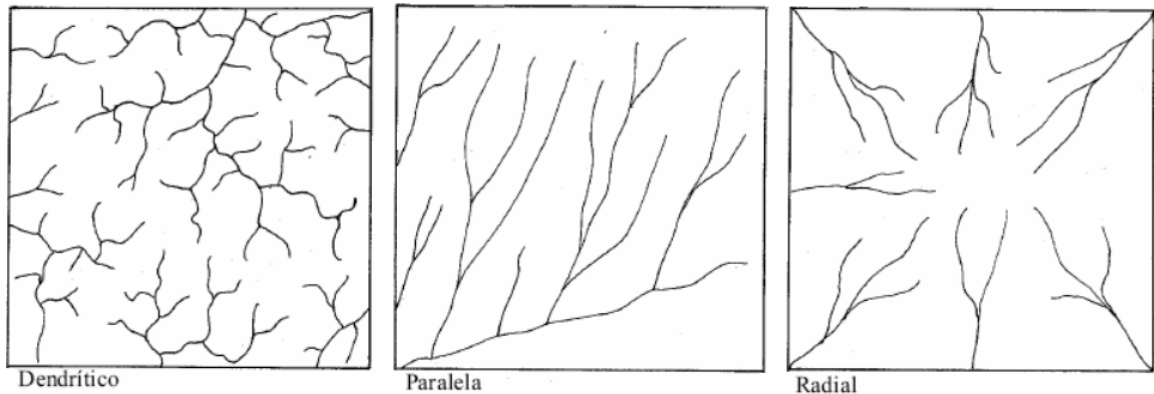


Figura 9: Padrões de drenagem mais comuns [49].

Estes chamados padrões de drenagem podem ser observados pelo exame de mapas topográficos de diferentes províncias geológicas.

- a) dendrítica: lembra a configuração de uma árvore. É típica de regiões onde predomina rocha de resistência uniforme;
- b) paralela: ocorre em regiões de vertentes com acentuada declividade, ou onde existam controles estruturais que favoreçam a formação de correntes fluviais paralelas;
- c) radial: pode desenvolver-se sobre vários tipos e estruturas rochosas, como por exemplo, em áreas vulcânicas e dômicas;

Embora existam outros padrões, esses são os mais comumente observados na topografia mundial. Logicamente, em muitos casos a classificação dos padrões de drenagem de áreas distintas, feita por diferentes autores, envolvia diferentes interpretações. Desta forma, visando a comparação de padrões de drenagem, assim como o relacionamento destes padrões com processos hidrológicos da bacia, exigia-se a elaboração de métodos de expressar os padrões de drenagem em termos quantitativos.

2.5.1 Caracterização Física das Bacias Hidrográficas

Para entender o funcionamento de uma bacia é necessário expressar quantitativamente as manifestações de forma (a área da bacia, sua forma geométrica, etc.), de processos (escoamento superficial, deflúvio, etc.) e suas inter-relações.

Vários parâmetros físicos foram desenvolvidos, alguns deles aplicáveis à bacia como um todo, enquanto que outros relativos a apenas algumas características do sistema. O importante é reconhecer que nenhum desses parâmetros deve ser entendido como capaz de simplificar a complexa dinâmica da bacia hidrográfica. Nossa atenção está predominantemente voltada para os parâmetros físicos e nas inter-relações com outros parâmetros, como o parâmetro geológico e de vegetação que influenciam na forma física da bacia hidrográfica. A maioria das características da bacia está, de alguma forma, correlacionada com sua área. A área deve ser definida em relação a um dado ponto ao longo do canal, ou à própria saída ou confluência da bacia. A área total inclui todos os pontos situados a altitudes superiores à da saída da bacia e dentro do divisor topográfico (*watershed*) que separa duas bacias adjacentes. Pela importância da área da bacia hidrográfica, tentativas foram feitas no sentido de se desenvolver métodos de classificação ou de ordenamento das bacias de acordo com seu tamanho, principalmente baseados na rede de canais da bacia. O método de ordenamento de Arthur Newell Strahler [50] é ilustrado na figura 10.

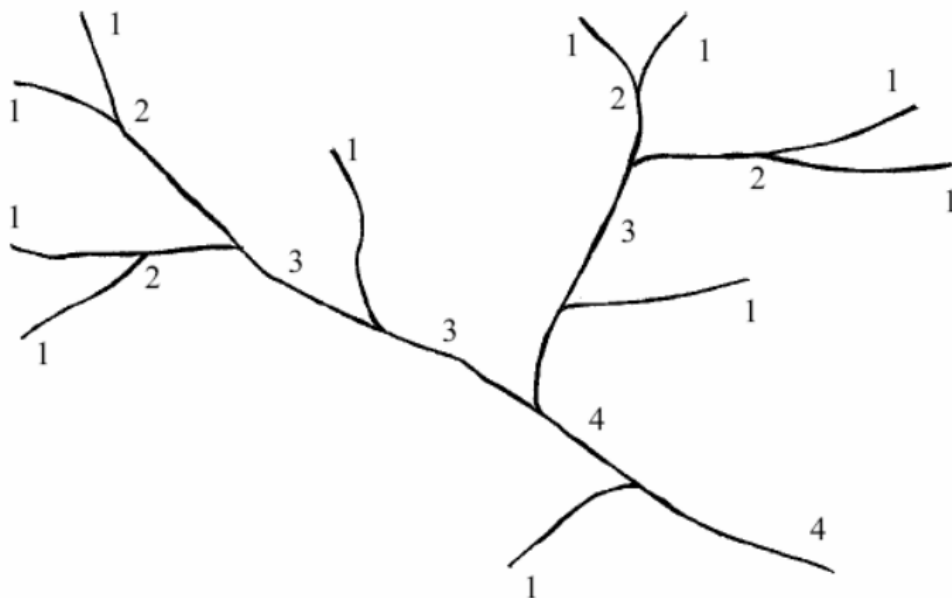


Figura 10: Esquema de ordenação estabelecida por Strahler para classificar bacias hidrográficas [50].

Os canais primários (nascentes) são designados de 1^a ordem. A junção de dois canais

primários forma um de 2ª ordem, e assim sucessivamente.

A junção de um canal de uma dada ordem a um canal de ordem superior não altera a ordem deste. A ordem do canal à saída da bacia é também a ordem da bacia. Conforme pode ser observado no esquema criado por Strahler (figura 10), a menor unidade geomorfológica que caracteriza a bacia hidrográfica é a bacia de primeira ordem. A junção de duas microbacias primárias formam uma microbacia maior, de segunda ordem, e assim sucessivamente, até a formação da macrobacia hidrográfica, a bacia de um rio.

O conceito de microbacia, portanto, é meio vago. Primeiro, porque não há um limite de tamanho para a sua caracterização. Em segundo lugar, porque há que se fazer distinção aqui a dois critérios:

a) Do ponto de vista hidrológico, ou seja, levando em conta o funcionamento hidrológico da bacia: deste ponto de vista, bacias hidrográficas são classificadas em grandes e pequenas não apenas com base em sua superfície total, mas também nos efeitos de certos fatores dominantes na geração do deflúvio. As microbacias apresentam, como características distintas, alta sensibilidade tanto a chuvas de alta intensidade (curta duração), como ao fator uso do solo (cobertura vegetal). Em bacias grandes, o efeito de armazenamento ao longo dos canais é tão pronunciado que a bacia não mais responde, ou perde sensibilidade àqueles dois fatores.

Desta forma, define-se “microbacia” como sendo aquela cuja área é tão pequena que a sensibilidade a chuvas de alta intensidade e às diferenças de uso do solo não seja suprimida pelas características da rede de drenagem. De acordo com tal definição, a área de uma microbacia pode variar de pouco menos de 1 ha a até 40 ou mais hectares, podendo mesmo atingir, em algumas situações, até 100 ha ou mais.

b) Do ponto de vista de programas e políticas de uso do solo urbano no Brasil, a lei que rege tal uso foi prevista na Constituição Federal de 1988, sendo regulamentada na segunda gestão do presidente Fernando Henrique Cardoso pelo *Estatuto da Cidade* (denominação oficial da lei 10.257 de 10 de julho de 2001 [51]) onde não consta nenhuma menção à bacias hidrográficas. Respeitando o Estatuto da Cidade, cada cidade tem liberdade política para legislar sobre a utilização do solo. Essa legislação é denominada de Plano Diretor da cidade/município.

A densidade de drenagem é definida como sendo a razão entre o comprimento total dos canais e a área da bacia hidrográfica.

$$DD = \frac{L}{A} \quad (2.7)$$

É um índice importante, pois reflete a influência da geologia, topografia, do solo e da vegetação da bacia hidrográfica, e está relacionado com o tempo gasto para a saída do escoamento superficial da bacia. Valores baixos de densidade de drenagem estão geralmente associados a regiões de rochas permeáveis e de regime pluviométrico caracterizado por chuvas de baixa intensidade. Uma bacia hidrográfica, quando representada em um plano, apresenta a forma geral de uma pera. Dependendo da interação clima-geologia, todavia, várias outras formas geométricas podem existir. Em qualquer situação a superfície da bacia é côncava, a qual determina a direção global do escoamento.

A forma é uma das características físicas mais difíceis de serem expressas em termos quantitativos. A forma da bacia, bem como a forma do sistema de drenagem, pode ser influenciada por algumas outras características da bacia, principalmente pela geologia. A forma pode, também, atuar sobre alguns dos processos hidrológicos, ou sobre o comportamento hidrológico da bacia.

Outra grandeza definida por Horton [1] foi o fator de forma, dado por:

$$F = \frac{A}{L^2} \quad (2.8)$$

onde F é o fator de forma, A é a área da bacia e L é o comprimento do eixo da bacia desde a foz até o final do ramo mais distante da foz. Este índice de forma pode, por exemplo, dar alguma indicação sobre a tendência a inundações. Bacias com maior fator de forma tem maior tendência a apresentar inundações.

Como expressão quantitativa das inter-relações entre os parâmetros físicos, a chamada “razão de bifurcação”, ou *Lei do Número de Canais*, foi proposta também por Horton [1]. A razão de bifurcação, Rb , é definida como a relação entre o número de canais de uma dada ordem, n , e o número de canais de ordem imediatamente superior, $n + 1$. E assim para uma dada bacia de ordem n , $n - 1$ valores de Rb podem ser determinados, conforme ilustra a tabela 1. O valor médio dos Rb individuais da bacia representa a razão de bifurcação média para a bacia, que para esse exemplo vale $\overline{Rb} = 3.2$.

Ainda no seu trabalho de 1932, Horton verificou que o número de canais diminui com o aumento da ordem dos canais de forma regular, ou seja, existe uma relação geométrica

N° de canais (NW)	Ordem (W)	Rb
32	1	
10	2	3.2
3	3	3.3
1	4	3.0

Tabela 1: Tabela de valores para uma bacia com ramos em quatro ordens segundo a classificação de Strahler.

simples entre o número e a ordem dos canais. No caso apresentado na tabela 1, a Lei do Número de Canais permite dizer que para cada canal de 4^a ordem existem em média 3.0 canais de 3^a ordem, e assim sucessivamente. De forma que podemos escrever:

$$N_u = \overline{Rb}^{k-u} \quad (2.9)$$

onde: N_u é o número de canais de ordem u , \overline{Rb} é a razão de bifurcação média, k é a ordem da bacia e u é uma ordem dada.

Embora existam exceções, a maioria das bacias hidrográficas estudadas segue essa que é mais conhecida como a Lei de Horton.

2.5.2 Redes de Rios

As bacias de drenagem, ou bacias hidrográficas, são as unidades básicas da divisão de paisagem na geomorfologia fluvial. Talvez não exista um exemplo mais claro e intuitivo de uma fronteira espacial entre sistemas similares, mas independentes, do que a divisão da bacia de drenagem.

Infelizmente o limite de qualquer bacia de drenagem em particular não possa ser mapeado com precisão total. Independentemente da escala do mapa topográfico ou da base de imagens empregada, curvas e irregularidades menores do que um certo limite são sempre negligenciadas. Tal suavização do traço de contorno não produz nenhum erro sistemático na estimativa da área da bacia, mas sempre resulta em uma subestimação do comprimento do perímetro da bacia. Como os limites da bacia de drenagem exibem curvas e reviravoltas em amplos intervalos de escala, eles parecem excelentes candidatos para a análise fractal. Para proceder a esse tipo de análise é preciso antes ter uma forma eficiente de determinar clara e univocamente esses limites. Também é necessário fazer isso para uma ampla gama de regiões, de tal forma a viabilizar uma estatística confiável sobre o tema.

No interior de cada bacia hidrográfica, existe uma estrutura em forma de árvore partindo de todos os pontos da bacia e convergindo para uma região única, que chamamos de foz para o caso de bacias que vertem suas águas nos mares. Essa estrutura corresponde ao que chamamos rede de rios (*river network*) e é de fundamental importância para o estudo da sustentabilidade, geopolítica de utilização de recursos e geomorfologia.

3 UMA ABORDAGEM UNIVERSAL PARA BACIAS HIDROMORFOLÓGICAS

*“Moon river, wider than a mile
I’m crossin’ you in style some day.”*

(Henry Mancini/Johnny Mercer)

*“Fiz meu marco num solo marciano
num deserto vermelho sem garoa...”*

*A história de Marte soterrada
Pelo efêmero pó das tempestades.”*

(Lenine)

A Geomorfologia é o estudo das formas terrestres, enquanto a hidromorfologia é o estudo das formas determinadas pelos cursos de água, como acontece com qualquer fluido sob a influência da força da gravidade sobre a superfície da terra, desconsiderando os processos de infiltração. Bacias hidrográficas desempenham um papel fundamental no ciclo hidrológico, o que as faz essenciais para a diversidade e para a manutenção da vida na Terra [52]. O antigo e duradouro problema de caracterizar bacias hidrográficas tem atraído muita atenção devido à sua importância em uma variedade de problemas ambientais, tais como gestão de recursos hídricos [53, 54, 55], prevenção de desabamentos e inundações [56, 57, 58, 59, 60], e zonas aquáticas mortas [61, 62, 63]. Nesse contexto trataremos *regiões hidromorfológicas* como *bacias hidrográficas*, ou simplesmente *bacias*, como sendo todas as áreas de terra inclinadas em direção a uma única saída, *e.g.* a foz de um rio ou os pontos de maiores taxas de infiltração ou evaporação. Eles são delineados por limites abstratos chamados *divisões topográficas* or *linhas divisoras de águas*. O conceito de linhas divisoras de águas aparece em várias outras áreas aparentemente não relacionadas, como Teoria da Percolação [64, 65], Segmentação de imagens e Medicina [20, 66, 67, 68], e até em questões de fronteiras internacionais [69, 70].

Bacias hidrográficas são definitivamente fractais [71, 32]. Elas exibem autossimilaridade e são caracterizadas por uma *dimensão fractal* bem definida. Há vários objetos que compartilham da mesma dimensão fractal que as linhas divisoras de águas em substratos aleatórios não-correlacionados (*viz.* $D \approx 1.22$), como caminhos ótimos sob desordens fortes [72, 73, 74, 75], árvores de extensão mínima em redes aleatórias [76], espinhas dorsais de fraturas de caminhos ótimos [77, 78, 79], ligações de pontes em superfícies ranqueadas [80]. Todos esses caminhos sem loops pertencem a mesma universalidade que as linhas divisoras de água. Além disso, é também sabido que as linhas divisoras de águas são curvas de evolução de Schramm-Loewner [81] e que é possível definir linhas divisoras de águas hidrológicas [82], onde o processo de infiltração no solo é levado em consideração.

Os métodos cartográficos tradicionais usados para obter uma linha divisora de água dependem de uma estimativa manual das linhas de contorno, o que inevitavelmente introduz subjetividade ao processo de delimitação dos limites da bacia [83]. Até a maioria dos modelos computacionais para tarefas similares requerem uma boa quantidade de intuição e algumas considerações adicionais para cada caso [84]. Aqui, nós propomos um modelo simples para delinear por completo múltiplas bacias hidrográficas para qualquer paisagem dada. A inovação da nossa abordagem é o fato de caracterizar todas as bacias a partir de um único conjunto de dados de altura e através da definição de um nível (do mar) de referência, *i.e.* nossa abordagem é livre de ajustes de parâmetros.

3.1 O Modelo

Em 2009, Fehr *et al.* [71, 32, 85, 86] introduziram um modelo chamado Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IPBA), a fim de extrair linhas divisoras de águas de paisagens. O IPBA foi proposto para uma rede quadrada regular de tamanho L com condições de contorno fixas na direção vertical e condições de contorno periódicas na direção horizontal, onde a altura de cada sítio i foi representada por h_i . Também foi definido que as linhas superiores e inferiores da rede representam os sumidouros de duas bacias, *e.g.* uma ao Norte (N) e outra ao Sul (S), respectivamente. Nesse contexto, a seguinte regra para a identificação de bacias foi proposta: Para cada sítio i , aplica-se o modelo de Percolação Invasiva (IP) [19], definindo que a bacia (N ou S) a que o sítio i pertence é aquela que o agregado invadido da Percolação Invasiva alcança primeiro. Assim, todos os sítios da rede pertencem a uma das duas bacias, e a linha de interface entre eles define a bacia hidrográfica. Para melhorar o desempenho computacional da tarefa de encontrar a linha de interface, uma estratégia de varredura eficiente também

foi introduzida: (i) Inicialmente, os sítios são escolhidos ao longo da linha reta que liga os sumidouros. Portanto, quando os processos de Percolação Invasiva a partir de dois locais vizinhos evoluem para diferentes sumidouros, um segmento da linha divisora de água fica entre eles. (ii) A partir de então, os sítios são escolhidos apenas na vizinhança dos segmentos de linhas divisoras de água já conhecidos, a fim de revelar mais segmentos de linhas divisoras de águas, resultando ao final na linha divisora de água completa.

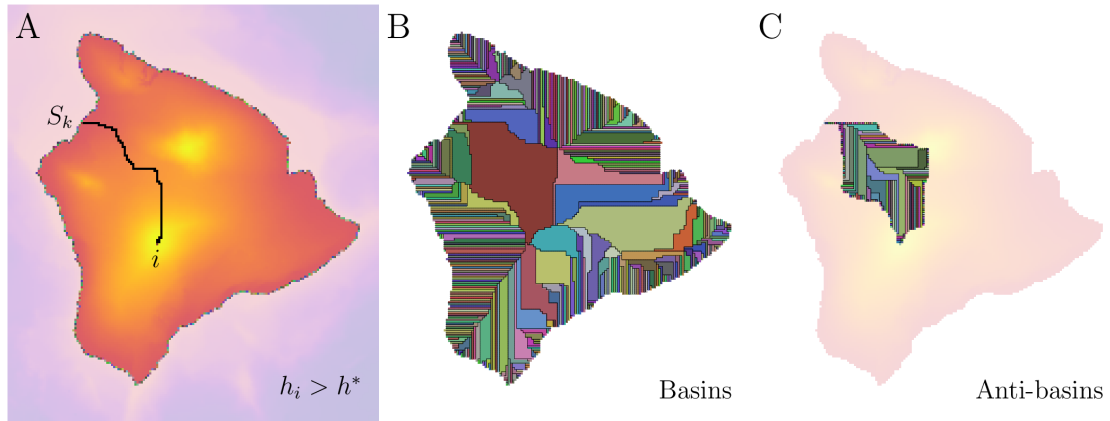


Figura 11: Extensão do Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IPBA). Nós usamos um Modelo de Elevação Digital (DEM) da região da Ilha do Havá para mostrar os três passos da nossa abordagem. (A) único agregado de altura composto por todos os sítios com $h_i > h^*$, onde $h^* = 0$ (nível do mar) ao longo do estudo. A cor da paisagem é organizada do roxo escuro (pequenas alturas) ao amarelo claro (grandes alturas) em escala linear. Nós representamos em cores diferentes todos os sumidouros: os locais que estão na fronteira do agregado de altura, neste caso, a costa do mar. Finalmente, o agregado de Percolação Invasiva (IP) do sítio i está em preto. O processo de Percolação Invasiva começa no sítio i e termina no sumidouro S_k . (B) Todas as bacias hidrográficas identificadas com o nosso algoritmo. As bacias têm as cores dos seus sumidouros e as linhas pretas representam a rede de linhas divisoras de águas. (C) Todas as anti-bacias hidrográficas a partir da maior bacia de drenagem. As anti-bacias são também representadas por várias cores e as linhas pretas, neste caso, representam a rede de anti-linhas divisoras de águas.

Nosso objetivo é definir um modelo matemático robusto para o delineamento de múltiplas bacias hidrográficas através de uma extensão do IPBA. Suponha que uma rede retangular regular $L_x \times L_y$, onde a altura de cada sítio i é h_i , análogo ao modelo original. Nós introduzimos um limite de altura h^* tal que se $h_i > h^*$, então o i -ésimo sítio pertence ao agregado que chamamos de *agregado de altura*, composto por todos os sítios conectados com altura acima desse limite. Caso contrário, o i -ésimo sítio não pertence a nenhum agregado. Como explicado na seção seguinte, adotamos $h^* = 0$ ao longo deste estudo, que para a Terra corresponde ao nível do mar. Para esta escolha particular, os agregados de altura definem continentes e ilhas na Terra, como mostrado na figura 11A.

Aqui os sumidouros S_k ($k = 1, 2, \dots, N_b$) são todos os N_b sítios de fronteiras de agregados de altura, isto é, a costa marítima da Terra. Consequentemente, sabemos *a priori* que eles definem bacias hidrográficas N_b separadas por várias linhas de interface, mas seus tamanhos e formas específicas precisam ser determinados. De forma similar às idéias propostas por Fehr *et al.* [32], definimos a seguinte regra para identificar bacias presentes nos agregados de altura: o modelo de Percolação Invasiva é aplicado para cada sítio i definindo que a bacia (S_k) a qual o sítio i pertence é aquela que o agregado invadido de Percolação Invasiva alcança primeiro (ver figura 11A).

Como mostrado na figura 11B, o conjunto de linhas de interface forma a *rede de linhas divisoras de água* que separa todas as bacias nos agregados de altura. Também usamos uma estratégia análoga ao IPBA original para melhorar o desempenho de procura da rede de linha divisora de água. Aqui, a seleção ocorre em cada bacia S_k da seguinte maneira: (i) O sumidouro S_k define as extremidades (segmentos inicial e final) de sua linha divisora de água ainda não identificada. (ii) Para cada bacia, a varredura ocorre apenas em locais vizinhos aos segmentos de bacias já conhecidos, a fim de revelar os que faltam. Em outras palavras, escaneamos os locais ao longo da vizinhança do perímetro interno da linha divisora de água de cada bacia. Essa estratégia reduz drasticamente o número de vezes que precisamos aplicar o algoritmo de Percolação Invasiva para a identificação da rede de linhas divisoras de águas. (iii) Opcionalmente, um algoritmo de queimada (burning) simples pode ser aplicado a cada bacia a fim de avaliar sua área [17].

Na verdade, consideramos duas versões do nosso algoritmo ao longo do estudo: Uma versão com condições de contorno periódicas tradicionais na direção horizontal e condições de contorno periódicas não convencionais na direção vertical para paisagens reais e outra versão com condições de contorno fixas em ambas as direções para paisagens artificiais. As condições de contorno periódicas não convencionais, adotadas para paisagens reais, são definidas impondo que cada sítio na linha superior (inferior) seja vizinho de todos os outros sítios na linha superior (inferior). Essas condições de contorno representam um mapeamento de uma esfera em uma rede.

Uma extensão natural do conceito de linha divisora de água é a definição de sua linha recíproca, denominada anti-linha divisora de água. As *anti-linhas divisoras de águas* são compostas por linhas de alturas mínimas, em contraste com as linhas divisoras de águas, definidas em termos de linhas de alturas máximas. Dada uma paisagem invertida, a mesma abordagem para linhas divisoras de águas pode ser considerada para definir as anti-linhas divisoras de águas. Neste caso, a rede de linhas divisoras de águas representa a *rede*

de *anti-linhas divisoras de águas* na paisagem de origem. Além disso, também podemos definir uma rede de anti-linhas divisoras de águas dentro de uma bacia hidrográfica (ver figura 11C). Aqui, as linhas de alturas mínimas representam os rios mais profundos e seus afluentes em várias situações.

Destacamos que nosso modelo apenas leva em conta as bacias hidrográficas que fluem para os oceanos, ou seja, estamos ignorando *bacias hidrográficas endorréicas* (ou simplesmente *bacias endorréicas*), que são aquelas bacias que fluem para qualquer lugar além dos oceanos, como, por exemplo, lagos ou pântanos, sendo suas quantidades de água equilibradas por infiltração ou evaporação [40]. No entanto, poderíamos também incluir tais bacias em nosso modelo introduzindo sumidouros adicionais S'_k (onde $k = 1, 2, \dots, N_e$ e N_e é o número de bacias endorréicas), localizadas nos pontos de maior taxa de evaporação, por exemplo. Nesse contexto, o número total de bacias hidrográficas ($N_b + N_e$) dependeria da resolução espacial dos dados e das informações disponíveis sobre as bacias endorréicas.

3.1.1 Resultados

Aplicamos o modelo Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IPBA) a paisagens reais e artificiais para estudar as propriedades estatísticas das bacias hidrográficas na Terra, Lua e Marte. Para paisagens reais, usamos três diferentes Modelos de Elevação Digital (DEMs) ao longo deste estudo: a Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO) [87], o Altímetro Laser da Órbita Lunar (LOLA) [88] e o Altímetro Laser da Órbita de Marte (MOLA) [89]. Tais conjuntos de dados consistem no mapa de alturas da Terra, da Lua e de Marte, respectivamente. Além disso, obtivemos as paisagens artificiais através do *movimento browniano fracionário* (fBm) [90]. Mostramos todas as paisagens nas figuras 12A-C da Terra, Lua e Marte, e figuras 13A-D mostramos paisagens artificiais. Foram considerados dois cenários para os conjuntos de dados GEBCO, LOLA e MOLA: as orientações originais e as orientações invertidas de paisagem. Para realizar uma análise global, as resoluções dos conjuntos de dados reais foram diminuídas por um fator de 8, isto é, cada bloco de 8×8 sítios foi substituído por um único sítio com um valor dado pela média de todos os 64 sítios originais. Os tamanhos das redes usadas foram 5400×2700 para GEBCO (original 43200×21600), 5760×2880 para LOLA (original 46080×23040) e 5760×2880 para MOLA (original 46080×23040). Para as paisagens fBm, consideramos apenas a orientação original devido à simetria natural da distribuição gaussiana usada no Ffm. Neste caso, calculamos as médias de nossas simulações em 10 amostras de redes de 4096×4096 para o intervalo tradicional do expoente de Hurst H ($0 \leq H \leq 1$). As

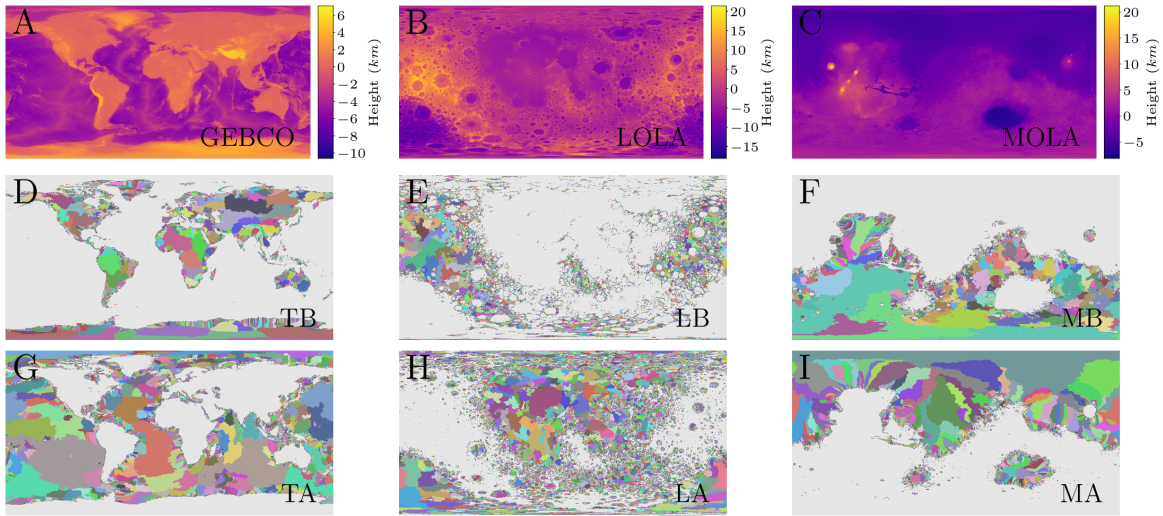


Figura 12: Paisagem, bacias e anti-bacias para a Terra, a Lua e Marte. (A) Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO) [87]. (B) Altímetro Laser da Órbita lunar (LOLA) [88]. (C) Altímetro Laser da Órbita de Marte (MOLA) [89]. Nos três casos, as alturas estão em unidades de quilômetro (km) e representadas em escala linear. (D-F) Bacias hidrográficas para alturas acima de h^* das paisagens de GEBCO, LOLA e MOLA. (G-I) Anti-bacias hidrográficas para alturas abaixo de h^* das paisagens GEBCO, LOLA e MOLA. Note que $h^* = 0$ (nível do mar para a Terra e nível hipotético do mar para Lua e Marte) ao longo do estudo. Aqui, usamos as seguintes abreviações: Bacias Terrestres (TB), Anti-bacias Terrestres (TA), Bacias Lunares (LB), Anti-bacias Lunares (LA), Bacias Marcianas (MB) e Anti-Bacias Marcianas (MA). Sítios abaixo do limite de altura h^* são exibidos em cinza.

subseções a seguir mostram os resultados correspondentes.

3.1.2 Paisagens reais

Aqui, mostramos os principais resultados da nossa abordagem aplicada a paisagens reais. Nas figuras 12D e G, mostramos os resultados do nosso modelo aplicado às paisagens originais e invertidas da Terra, respectivamente. Nas figuras 12E, H, F e I, usamos o limiar de altura $h^* = 0$ (nível hipotético do mar) e executamos a mesma análise usada para a paisagem da Terra para obter as bacias e anti-bacias para Lua e para Marte. Notamos que as bacias e anti-bacias se assemelham nas paisagens terrestres e marcianas, enquanto que na paisagem lunar elas são afetadas pelas *bacias de impacto*, isto é, crateras originadas pelo impacto dos asteróides.

Esta semelhança é quantificada aqui através das distribuições estatísticas de perímetros e áreas das bacias e anti-bacias para a Terra, Lua e Marte. Os gráficos log-log de todas estas distribuições mostradas nas figuras 14A-B indicam claramente a presença de caudas

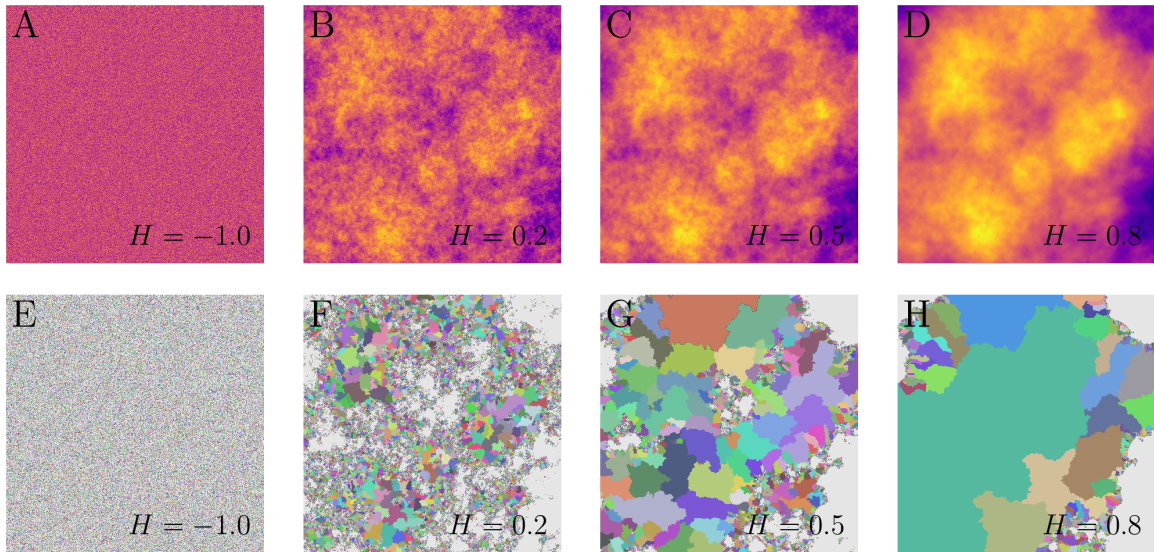


Figura 13: Paisagens artificiais e suas respectivas bacias. Paisagens de movimento browniano fracionário (fBm) geradas pelo método de filtragem de Fourier (Ffm) para quatro regimes. Uma típica paisagem não-correlacionada ($H = -1$) é mostrada em (A), uma paisagem gerada com correlações negativas ($H = 0.2$) em (B), uma paisagem de movimento browniano ($H = 0.5$) em (C) e uma paisagem com correlações positivas ($H = 0.8$) em (D). Todas as paisagens fBm exibidas compartilham o mesmo tamanho $L = 1024$ e a mesma semente aleatória. As alturas são representadas em escala linear, onde as cores mais claras (mais escuras) significam alturas mais altas (mais baixas). As bacias definidas pela nossa abordagem correspondentes às paisagens fBm mostradas em (A), (B), (C) e (D) são mostradas em (E), (F), (G) e (H), respectivamente. Sítios abaixo do limite de altura h^* são mostrados em cinza.

longas que se estendem por várias ordens de grandeza. Além disso, essas caudas seguem, de forma aproximada os comportamentos em lei de potência, $P(s) \propto s^\alpha$ e $P(A) \propto A^\beta$, para os perímetros e áreas, respectivamente. Aplicando os ajustes de Mínimos Quadrados Ordinários [91] às distribuições correspondentes, obtivemos estimativas para os expoentes da lei de potência α e β que estão resumidos na Tabela 2. Resultados semelhantes foram encontrados usando Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) [92], conforme mostrado no Apêndice I.

Descobrimos que os resultados terrestres e marcianos são estatisticamente idênticos, o que sugere que as superfícies de ambos os planetas passaram por uma história de formação similar e que um hipotético rio marciano apresentaria algum grau de similaridade aos rios terrestres, já que ambas as paisagens compartilham as mesmas estatísticas para linhas divisoras de águas (máximas) e anti-linhas divisoras de águas (mínimas). De fato, também obtivemos resultados similares para outros valores de h^* na Terra, Lua e Marte.

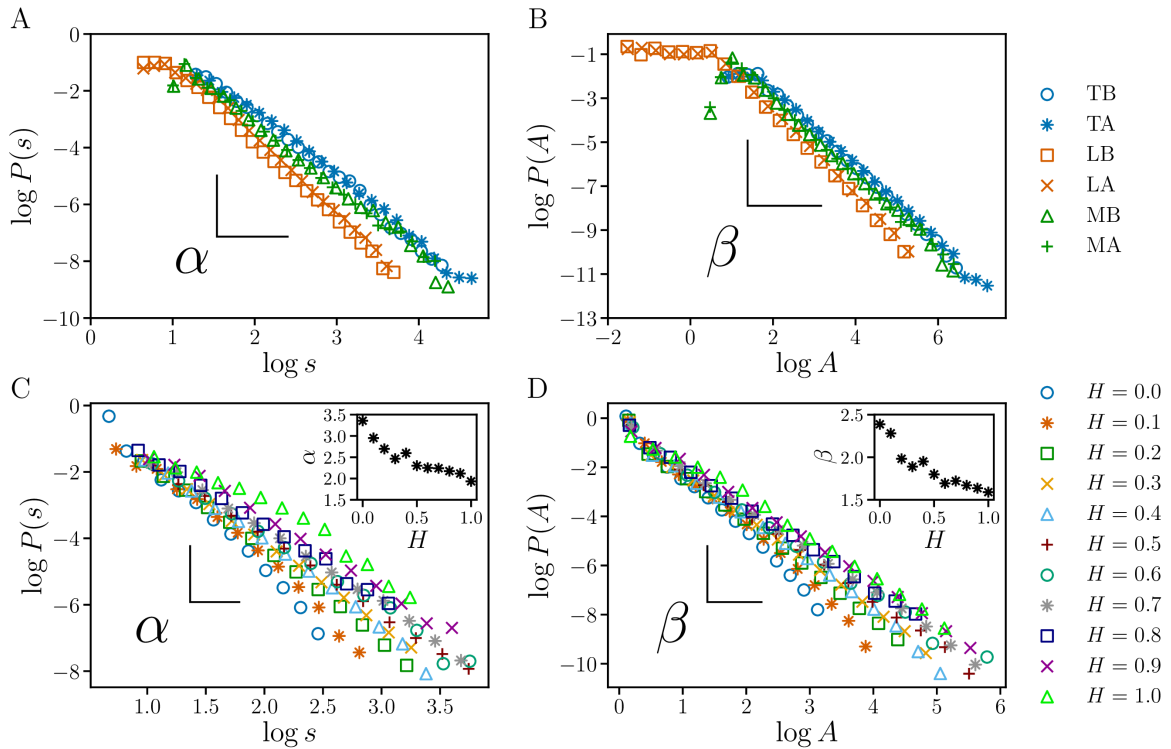


Figura 14: Gráficos log-log das distribuições de perímetro e área para bacias e anti-bacias em paisagens reais e artificiais. (A) As distribuições de perímetro para bacias e anti-bacias na Terra, Lua e Marte. (B) As distribuições de área de superfície para bacias e anti-bacias na Terra, Lua e Marte. Em ambas, utilizamos as seguintes abreviauras: Bacias Terrestres (TB), Anti-bacias Terrestres (TA), Bacias Lunares (LB), Anti-bacias Lunares (LA), Bacias Marcianas (MB) e Anti-bacias Marcianas (MA). Mostramos todos os expoentes para paisagens reais na Tabela 2. (C) As distribuições de perímetro para vários valores do expoente de Hurst H . (D) As distribuições de área de superfície para vários valores de H . As inserções mostram o comportamento dos expoentes α e β em relação a H . As funções logarítmicas usadas são de base 10 e todos os expoentes são calculados pelo ajuste dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) [91]. Também obtemos expoentes semelhantes usando um Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) [92] (Ver Apêndice I).

Na figura 15, mostramos a bacia amazônica e suas anti-bacias associadas definidas pelo nosso algoritmo no conjunto de dados GEBCO, na resolução original. Neste caso especial, removemos todos os sumidouros internos do continente sul-americano, isto é, permitimos a existência de sítios com alturas negativas na América do Sul. Ressaltamos que vários rios (os mais profundos) seguem as anti-linhas divisoras de águas. As linhas pretas da figura 15 representam a rede de anti-linhas divisoras de águas, que mostram uma impressionante semelhança com a rede fluvial da Amazônia. Essa semelhança nos permite obter o comprimento do rio mais longo em uma bacia, aproximando-o pelo comprimento do caminho mais longo a partir do ponto de altura mínima (a foz do rio) da maior árvore

Casos	Abreviação	α	β
Bacias Terrestres	TB	2.30 ± 0.03	1.74 ± 0.02
Anti-bacias Terrestres	TA	2.26 ± 0.03	1.72 ± 0.02
Bacias Lunares	LB	2.70 ± 0.02	1.93 ± 0.01
Anti-bacias Lunares	LA	2.64 ± 0.04	1.89 ± 0.02
Bacias Marcianas	MB	2.33 ± 0.04	1.75 ± 0.02
Anti-bacias Marcianas	MA	2.26 ± 0.02	1.73 ± 0.02

Tabela 2: Expoentes α e β para paisagens reais. Esses expoentes foram determinados através dos ajustes de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) [91] para as correspondentes distribuições. Resultados similares foram obtidos usando Estimativa por Máxima Verossimilhança (MLE) [92] (Ver Apêndice I).

na rede de anti-linhas divisoras de águas. Definimos a altura de cada ponto das anti-linhas divisoras de águas como a média das alturas dos sítios vizinhos.

Também realizamos a verificação da lei de Hack [94] para todo o planeta. Essa lei de escala estabelece a relação entre as áreas (A) das bacias e os comprimentos máximos (ℓ) de seus rios, isto é, $\ell \propto A^\gamma$, onde γ é conhecido como o expoente de Hack. Na figura 16, mostramos a lei de Hack para a orientação original da paisagem terrestre considerando apenas as bacias com área maior que 100.000 km^2 . Encontramos o expoente de Hack $\gamma = 0.52 \pm 0.01$ com o coeficiente de determinação $R^2 = 0.89$, o que é muito próximo do nosso valor teórico de $\gamma \approx 0.55$ para a Terra.

3.1.3 Paisagens Artificiais

Aplicamos também a extensão do IPBA a paisagens artificiais. Nas figuras 13E-H, mostramos todas as bacias definidas pelo nosso modelo para as mesmas amostras apresentadas nas figuras 13A-D. Como mostrado nas figuras 14C e D, as distribuições de perímetro e área obtidas dessas paisagens são sistematicamente afetadas pela presença de correlações espaciais, quantificadas aqui em termos do parâmetro H . Além disso, exceto no caso de $H = -1$, todas as distribuições geradas a partir de paisagens artificiais podem ser descritas aproximadamente por leis de potência, $P(s) \propto s^{-\alpha}$ para perímetros e $P(A) \propto A^{-\beta}$ para áreas. Para cada valor de H , calculamos a média de ambas as distribuições para todas as amostras. As inserções das figuras 14C e D mostram que α e β diminuem sistematicamente com o expoente de Hurst H . Os expoentes α e β variam entre 3.36 e 1.93 e entre 2.39 e 1.59, respectivamente. No caso não-correlacionado ($H = -1$), no entanto, obtivemos menos do que uma ordem de magnitude para ℓ e A , impedindo o mesmo tipo de análise.

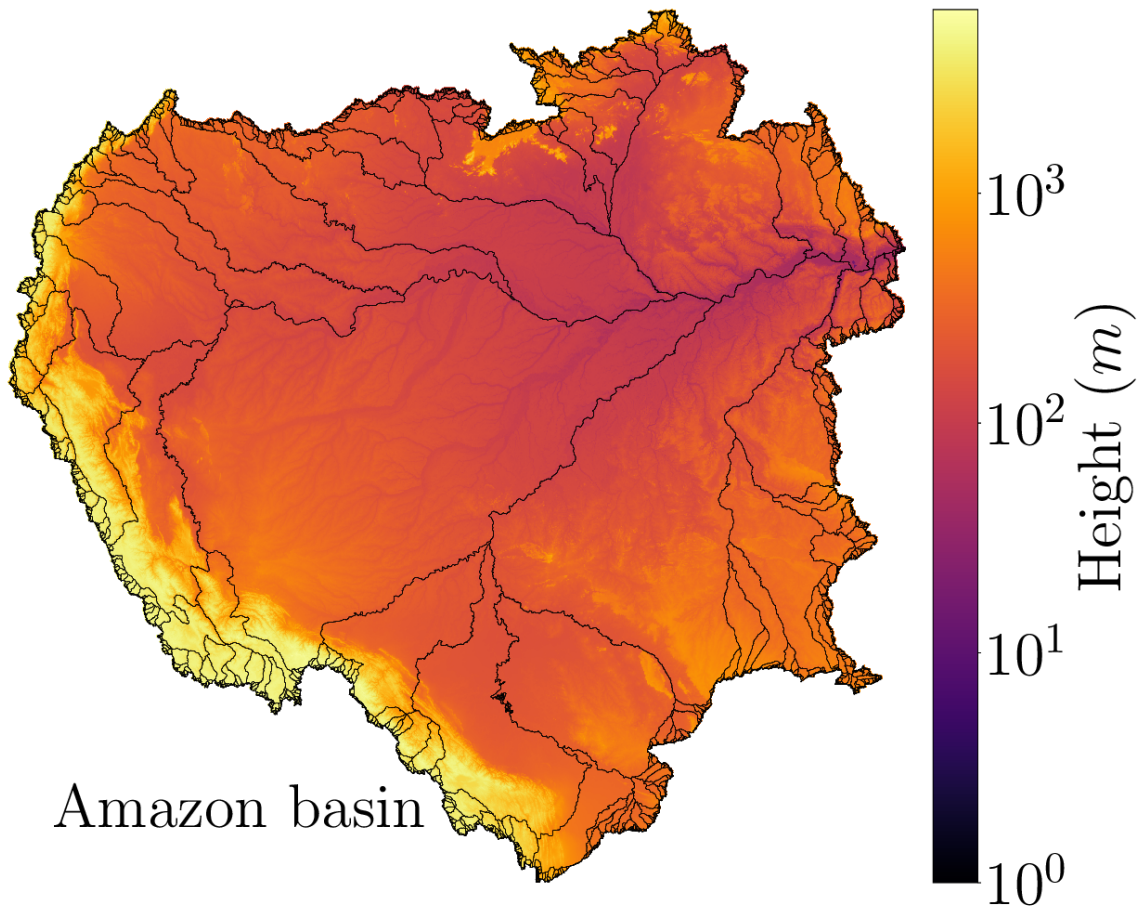


Figura 15: A bacia amazônica. A bacia hidrográfica da região amazônica obtida pelo nosso algoritmo. As alturas são representadas em metros (m) e em escala logarítmica para mostrar os detalhes da cordilheira dos Andes e do rio Amazonas. As linhas pretas representam a rede anti-linhas divisoras de águas, que mostram uma impressionante semelhança com a rede do rio Amazonas.

Na figura 16, mostramos a lei de Hack obtida para $H = 0.7$ (um valor aproximado de H é normalmente obtido para paisagens reais [86]), considerando apenas as bacias cuja área seja acima de 1024. Tal resultado nos levou à seguinte conjectura: Seja a área da bacia A e a maior anti-linha divisora de água ℓ , e assumindo que as anti-linhas divisoras de águas são de fato linhas divisoras de águas das paisagens invertidas, é sabido que $\ell \propto L^D$, onde L é o comprimento linear do sistema e D é a dimensão fractal das linhas divisoras de águas [32]. Uma vez que $A \propto L^2$, temos:

$$L^D \propto \ell \propto A^\gamma \propto L^{2\gamma} \quad (3.1)$$

o que dá $\gamma = D/2$. Em outras palavras, o expoente de Hack depende da dimensão fractal

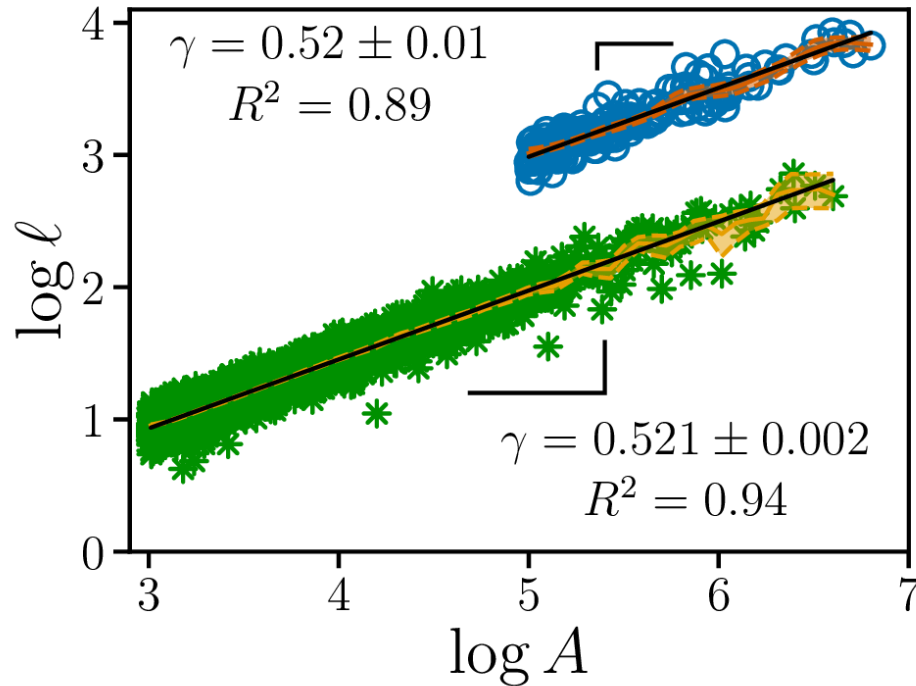


Figura 16: Lei de Hack para a Terra e para paisagens fBm com $H = 0.7$. A relação de escala do caminho mais longo ℓ do ponto de altura mínima (boca) da maior árvore na rede anti-linha divisora de água versus a área A da sua bacia (círculos azuis para a Terra e asteriscos verdes para paisagens fBm), em quilômetros quadrados (km^2) para a Terra. As linhas laranja e amarelo sólidas são o estimador de Nadaraya-Watson [95, 93], as regiões sombreadas laranja e amarelo são limitadas pelos intervalos de confiança inferiores e superiores, e a linha preta sólida é a regressão linear calculada por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) [91].

das anti-linhas divisórias de águas. Fehr *et al.* [86] mostrou que a dimensão fractal das linhas divisoras de águas diminui com o expoente de Hurst, H , similarmente às Fraturas de Caminhos Ótimos [78], e as linhas costeiras em paisagens correlacionadas [96]. A dimensão fractal das linhas divisórias varia entre $D = 1.0$ e $D = 1.22$, o que dá ao expoente de Hack um intervalo correspondente de $\gamma = 0.5$ a $\gamma = 0.61$. Para paisagens reais, as dimensões fractais das linhas divisoras estão em torno de 1.10 ($D = 1.10$ para os Alpes [32], $D = 1.11$ para o Himalaia [32], e $D = 1.12$ para os Andes [86]). Portanto, nosso expoente de Hack esperado para a Terra deve ser $\gamma \approx 0.55$, um valor que está em concordância com o resultado mostrado na figura 16 ($\gamma = 0.521 \pm 0.002$ com coeficiente de determinação $R^2 = 0,94$ para paisagens artificiais). Este resultado sugere que a lei de Hack, freqüentemente observada para redes de rios, é um efeito intrínseco de topografia, isto é, depende, em essência, das linhas divisoras e anti-linhas divisoras de águas.

3.2 Discussão

Propusemos um modelo geral para delinear por completo bacias hidrográficas para qualquer paisagem de alturas através de uma extensão do IPBA. A novidade da nossa abordagem é caracterizar todas as bacias a partir de um único conjunto de dados de altura através da definição de um nível (do mar) de referência. Tal fato nos permite afirmar que nosso modelo é livre de ajustes de parâmetros. Desta forma, somos capazes de delinear bacias através da definição da rede de linhas divisoras de águas (linhas máximas de uma paisagem), bem como das anti-bacias através da definição da rede de anti-linhas divisoras de águas (linhas mínimas de uma paisagem). A fim de mostrar que nosso algoritmo é robusto, nós o aplicamos a paisagens reais e artificiais. Em ambos os casos, descobrimos que as distribuições de perímetro e área são regidas por leis de potência com os expoentes α e β , respectivamente. Também foi mostrado que os resultados terrestres e marcianos são estatisticamente idênticos, o que sugere que as superfícies da Terra e da Lua passaram por processos de formação similares e que um hipotético rio marciano se assemelharia aos rios terrestres, uma vez que ambas as paisagens compartilham as mesmas estatísticas para linhas divisoras e anti-linhas divisoras de águas. Também verificamos que, na bacia amazônica e nas suas anti-bacias associadas, definidas pela nossa abordagem, vários rios (os mais profundos) encontram-se em anti-linhas divisoras de águas. Além disso, mostramos que os expoentes α e β , para paisagens artificiais, diminuem sistematicamente com o expoente de Hurst H e que eles são invariáveis sob a inversão de paisagens reais. Finalmente, encontramos um valor teórico para o expoente de Hack baseado na dimensão fractal da linha divisora e da anti-linha divisora, $\gamma = D/2$. Medimos $\gamma = 0.521 \pm 0.002$ para paisagens artificiais com $H = 0.7$ e $\gamma = 0.52 \pm 0.02$ para a Terra, o que está em consonância, dentro da margem de erro, com nossa estimativa de $\gamma \approx 0.55$ para casos reais.

4 UM MÉTODO HIERÁRQUICO PARA DEFINIR SUB-BACIAS HIDROGRÁFICAS

Como já definido no capítulo 3, *linhas divisoras de águas* são linhas de alturas máximas que delineam bacias hidrográficas. Elas são essenciais para toda a diversidade de vida na Terra, uma vez que suas bacias associadas desempenham papel-chave no ciclo hidrológico. Linhas divisoras de água são fractais e pertencem a mesma classe de universalidade que os caminhos ótimos, árvores de extensão mínima, fraturas de caminhos ótimos e pontes de ligação. O conceito de linhas divisoras de água também aparece em diversas áreas não-relacionadas, como na gestão de recursos hídricos, desabamentos e prevenção de alagamentos, segmentação de imagens, Medicina e até questões de fronteiras internacionais.

Neste capítulo propomos um novo algoritmo para encontrar todas as linhas divisoras e anti-linhas divisoras de águas de uma dada paisagem. *Anti-linhas divisoras de águas* são linhas de alturas mínimas que delineam anti-bacias hidrográficas, isto é, elas são as recíprocas das linhas divisoras. O algoritmo apresentado aqui é uma extensão daquele introduzido por Oliveira *et al.* [97], no qual o Algoritmo Baseado em Percolação Invasiva (IPBA) é aplicado para caracterizar bacias e anti-bacias de um único conjunto de dados de altura.

4.1 O Modelo

Nós propomos um modelo através de um processo iterativo hierárquico a fim de melhor descrever linhas divisoras e anti-linhas divisoras de água de topografias complexas, como, por exemplo, fiordes e deltas. Nosso método é baseado na aplicação, em cada iteração, de duas técnicas autoalimentadas e acopladas: detecção de linhas divisoras e de anti-linhas divisoras. Para a detecção de linhas (anti-linhas) divisoras de águas nós definimos uma rede retangular regular com dimensões L_x e L_y , onde a altura (profundidade) de

cada sítio i é w_i apenas se esse sítio existe na rede. Aqui, consideramos a altura como medida base e a profundidade como a transformação de reflexão da altura. Também definimos os sumidouros (fontes) S_k ($k = 1, 2, \dots, N_b$) como os N_b sítios de fronteiras de cada aglomerado. Em outras palavras, sumidouros são vales, representando a costa marítima na primeira iteração, e as fontes são cumes de montanhas em paisagens reais. Como proposto por Fehr *et al.* e Oliveira *et al.* [97], nós identificamos a bacia (anti-bacia) do sítio i através do modelo de Percolação Invasiva (IP) definindo que a bacia (anti-bacia) S_k a qual o sítio i pertence é aquele que o agregado invadido de Percolação Invasiva atinge primeiro. As linhas de interface que separam todas as bacias (anti-bacias) formam redes de linhas (anti-linhas) divisoras daquela iteração. Usamos também os mesmos métodos propostos por Oliveira *et al.* [97] para melhorar a performance de busca de redes de linhas (anti-linhas) divisoras e avaliar as áreas das suas bacias e anti-bacias associadas. A detecção de linhas e anti-linhas divisoras é aplicada a uma anti-bacia (bacia) apenas se a área da anti-bacia (bacia) é maior que um limiar A^* , do contrário nós finalizamos o processo iterativo para aquela anti-bacia (bacia).

Na prática, usamos um Modelo de Elevação Digital (DEM) da região de interesse como paisagem de entrada para primeira geração de bacias. A primeira geração de anti-bacias é definida a partir da primeira geração de bacias. A segunda geração de bacias é definida a partir da primeira geração de anti-bacias, e assim por diante.

4.2 Sub-bacias

Nós aplicamos nosso algoritmo ao conjunto de dados da Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO), o qual consiste em alturas altimétricas e batimétricas ao redor da Terra com resolução de 30 arco-segundos (30/3600 graus decimais), que é equivalente a 0.926 quilômetros (km) na linha do Equador, como foi descrito no Apêndice I. Na verdade, nossa paisagem de entrada é um DEM recortado da América do Sul, abrangendo desde a região de Magallanes ao Canal do Panamá e permitindo a existência de sítios com alturas negativas no Continente, como mostrado na figura 17.

A figura 18 mostra as primeiras gerações de bacias e as suas redes de anti-linhas divisoras de águas associadas. Na figura 18A, mostramos as redes de anti-linhas divisoras da primeira geração a partir da maior bacia da primeira geração, no caso, a Bacia Amazônica. Descobrimos que a maior bacia da segunda geração dentro da maior anti-bacia de primeira geração (isto é, dentro da combinação das áreas das sub-bacias de Javari, Juruá e Purus

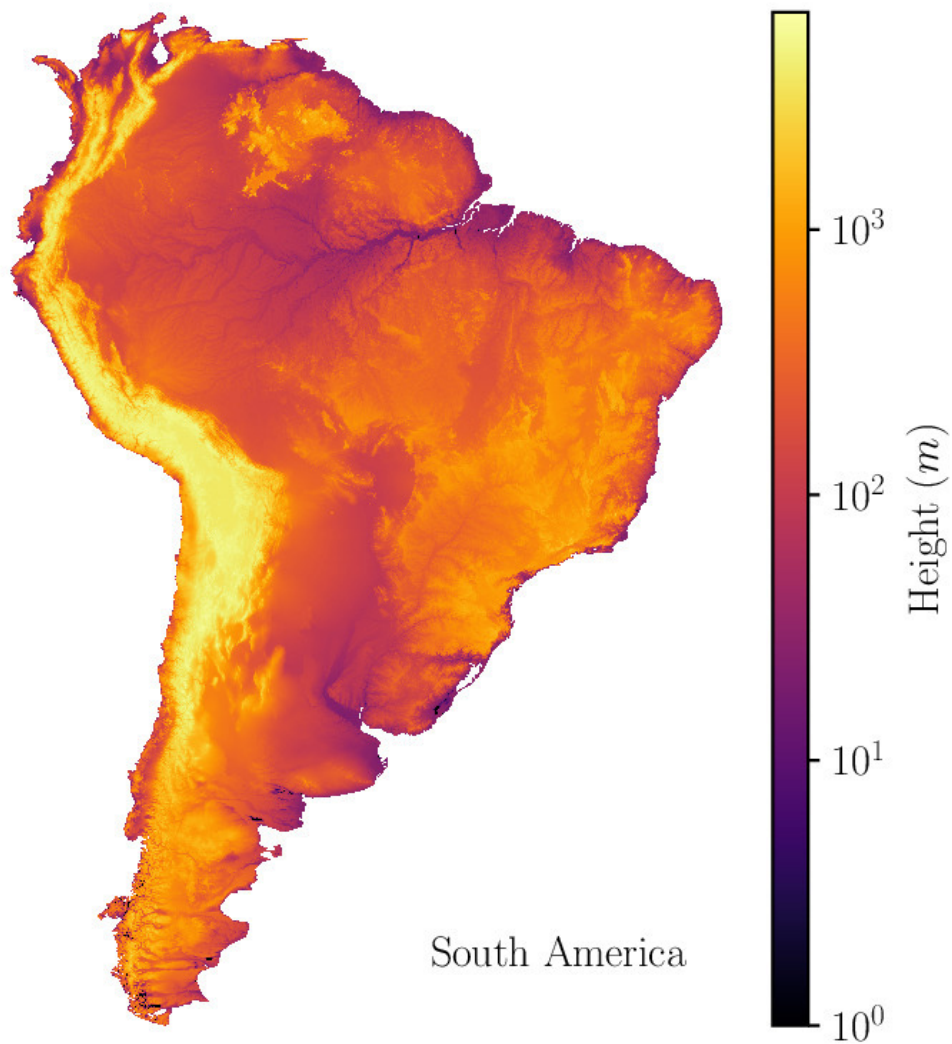


Figura 17: Paisagem da América do Sul extraída do conjunto de dados da Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO). As alturas estão em unidades de metros (m) e representadas em escala logarítmica a fim de mostrar os detalhes da Cordilheira dos Andes e do Rio Amazonas.

[98]) é a sub-bacia do Purus (figura 17B). Na figura 17C, nós mostramos a maior bacia da terceira geração dentro da sub-bacia do Purus.

Nós procedemos à análise das distribuições estatísticas de perímetros e áreas das sub-bacias do Amazonas, considerando $A^* = 100km^2$. Os gráficos log-log dessas distribuições são mostrados nas figuras 19A-B e indicam a presença de longas caudas que se estendem por várias ordens de magnitude e que seguem, de forma aproximada, leis de potência, $P(s) \propto s^\alpha$ e $P(A) \propto A^\beta$, para perímetros e áreas, respectivamente. Usamos o método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) a fim de ajustar ambas as distribuições à leis de potência, $P(s) \propto s^\alpha$ e $P(A) \propto A^\beta$, onde α e β são os expoentes das distribuições.

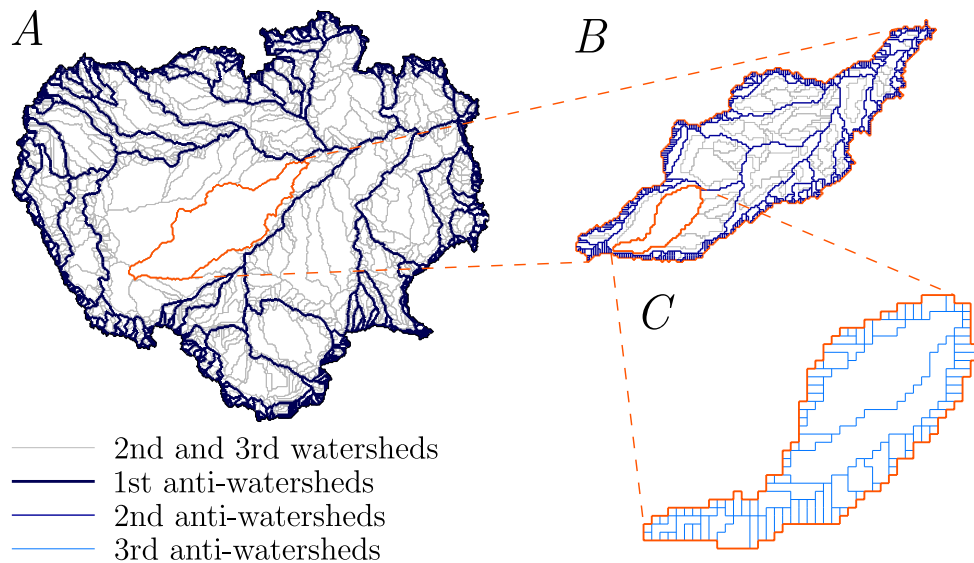


Figura 18: Primeiras gerações de bacias e suas redes de anti-linhas divisoras de águas associadas. (A) A bacia Amazônica com as primeiras e segundas gerações de anti-linhas divisoras de águas (azul escuro) e redes de linhas divisoras de águas (cinza), respectivamente. (B) A sub-bacia do Purus com a segunda e a terceira geração de redes de anti-linhas divisoras de águas (azul) e linhas divisoras de águas (cinza), respectivamente. (C) Uma sub-bacia dentro do Purus com a terceira geração de rede de anti-linhas divisoras de águas (azul claro).

As linhas tracejadas representam os resultados obtidos por Oliveira *et al.* [97], no qual a primeira geração de bacias do mundo inteiro foi caracterizada. Nossos resultados mostram que ambos os expoentes diminuem ao longo das gerações. Tal comportamento pode ser explicado pelo seguinte argumento: bacias grandes são divididas em várias bacias menores a cada geração, causando a diminuição no número de bacias grandes e o aumento desproporcional no número de pequenas bacias, levando a menores valores de α e β a cada geração. Como mencionado no Apêndice I desta tese, vale notar que os perímetros são medidos em quilômetros (km) e áreas são medidas em quilômetros quadrados (km^2). Além disso obtivemos essas medidas através das abordagens clássicas da *Fórmula de Haversine* e da *trigonometria esférica* para distâncias e áreas, respectivamente, na superfície da Terra [97].

4.3 Discussão

Nós propusemos uma extensão do algoritmo introduzido por Oliveira *et al.* [97] a fim de melhor descrever topografias complexas, como por exemplo, fiordes e deltas de rios. Encontramos todas as sub-bacias do Amazonas através de um processo iterativo

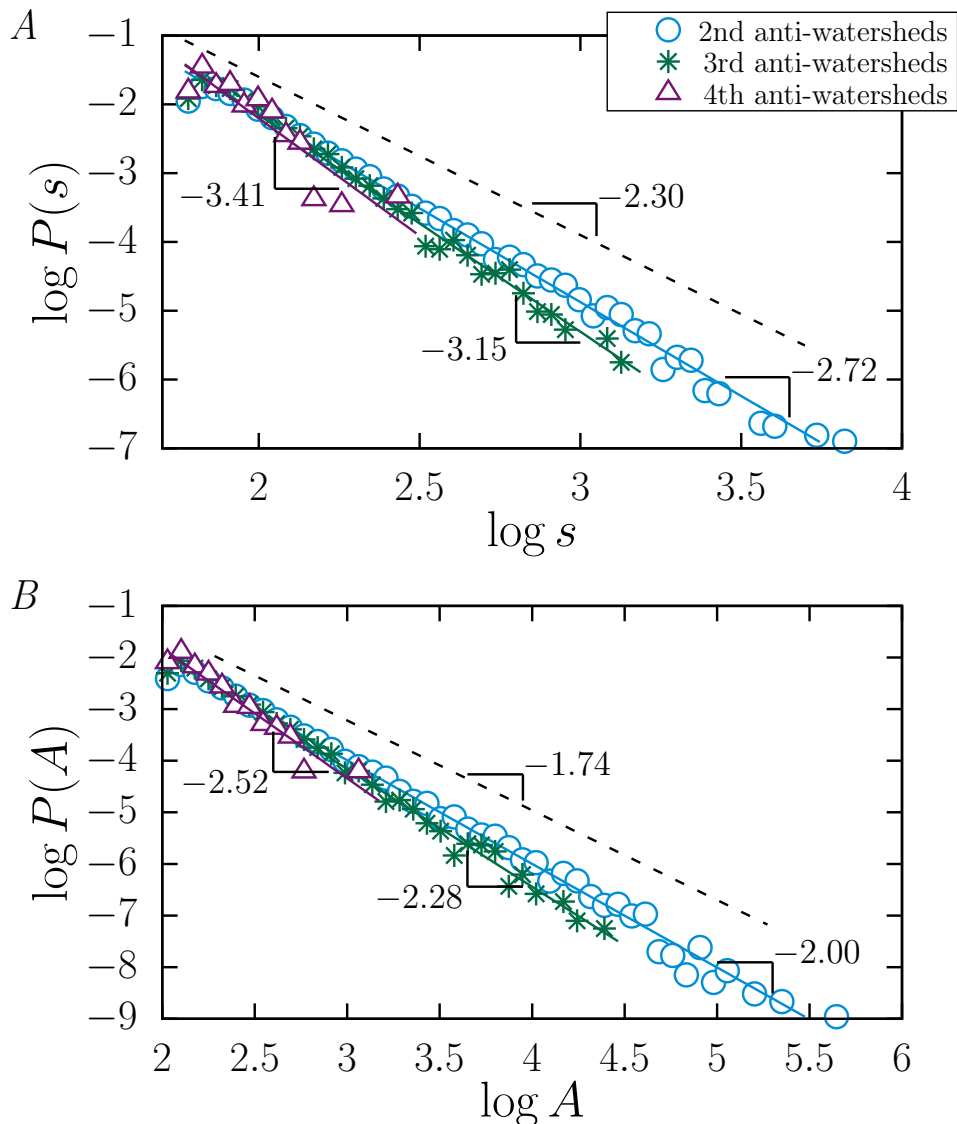


Figura 19: Distribuições do perímetro e da área para as sub-bacias do Amazonas. (A) A distribuição de perímetro para cada geração de sub-bacias. Encontramos o expoente α igual a -2.73 ± 0.03 , -3.15 ± 0.07 , e -3.41 ± 0.49 para a segunda, terceira e quarta gerações das sub-bacias do Amazonas, respectivamente. (B) A distribuição da área de superfície para cada geração de sub-bacias. Neste caso, nós encontramos o expoente β igual a -2.00 ± 0.02 , -2.28 ± 0.04 , -2.52 ± 0.21 para a segunda, terceira e quarta gerações das sub-bacias, respectivamente. As linhas tracejadas representam os expoentes α e β obtidos por Oliveira *et al.* [97] para a primeira geração de bacias do mundo inteiro. As funções logarítmicas usadas são de base 10 e todos os expoentes são calculados através de ajustes de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS).

hierárquico, o qual é baseado na aplicação, a cada iteração, de duas técnicas acopladas e autoalimentadas: a detecção de linhas divisoras e de anti-linhas divisoras de águas. As sub-bacias do Amazonas obtidas pelo nosso algoritmo são consistentes com as reportadas pela Amazon Waters Initiative [98]. Nós também afirmamos que α e β , os expoentes para

a distribuição de perímetro e área de superfície, diminuem ao longo das gerações de bacias. Nós argumentamos que as bacias grandes são divididas em várias bacias menores de uma geração para outra, causando a diminuição no número de bacias grandes e o aumento desproporcional no número de bacias pequenas. Finalmente, nossa análise poderia ser estendida para o mundo inteiro e até para um conjunto de dados de resolução maior, a fim de aprimorar as estatísticas para cada geração e, conseqüentemente, generalizar os resultados apresentados nesse trabalho.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho propusemos um modelo geral para delineamento de bacias hidrográficas utilizando um algoritmo para determinação de linhas divisoras de águas baseado em percolação invasiva. Da forma que fizemos, generalizamos a ideia do que seja uma bacia hidrográfica ou bacia hidromorfológica como sendo a região geográfica formada pelo conjunto de pontos sobre a superfície da Terra para onde convergiriam superficialmente todas as águas provenientes de precipitação pluviométrica, desconsiderados os processos de infiltração/evaporação. Por esse processo, um sítio (que podemos referenciar como *foz*) e a linha divisora de águas definem completamente uma bacia hidrográfica. Similarmente, invertendo o processo, podemos determinar anti-linhas divisoras de águas (que na geomorfologia são comumente referenciados como canais de drenagem). Para testar a robustez do algoritmo e também do processo como um todo, aplicamos o algoritmo a superfícies correlacionadas geradas artificialmente. Tanto as paisagens reais quanto aquelas produzidas computacionalmente apresentam distribuição de perímetros e áreas seguindo leis de potência. De posse de dados batimétricos do planeta Marte, mostramos que as paisagens marcianas e terrestres são estatisticamente idênticas (tanto para bacias quanto para anti-bacias). Esse resultado é particularmente interessante e surpreendente porque indica que processos geológicos similares foram responsáveis pela formação das superfícies dos planetas Terra e de Marte. Numa parte posterior do processo, aplicando o algoritmo desenvolvido e seu complementar (para delimitação de bacias e anti-bacias), verificamos que na bacia amazônica e nas suas anti-bacias internas, definidas conforme propusemos, os principais rios e aqueles mais profundos coincidem exatamente com anti-linhas divisoras de águas. Mostramos também que os expoentes α e β (para paisagens artificiais) diminuem à medida que o expoente de Hurst, H , diminui e que estes expoentes são invariantes por inversão das paisagens reais. Ainda identificamos um valor teórico para o expoente de Hack, $\gamma = D/2$. Obtivemos o valor $\gamma = 0.521 \pm 0.002$ para paisagens artificiais com $H = 0.7$ e $\gamma = 0.52 \pm 0.02$ para o substrato terrestre, valores que são consistentes com a

estimativa de $\gamma \approx 0.55$ obtida para paisagens reais. Ainda na mesma linha, interessados numa melhor descrição de geomorfologias complexas, como aquela de fiordes e deltas de rios, aplicamos o algoritmo introduzido no capítulo 4 à bacia amazônica seguidamente, determinando anti-bacias dentro daquela bacia e seguidamente determinando bacias dentro das anti-bacias determinadas no processo anterior. Hierarquicamente as sub-bacias internas à bacia amazônica são compatíveis com aquelas identificadas pela Amazon Waters Initiative. Finalmente, observamos que os expoentes α e β obtidos para as distribuições de perímetros e área superficial, diminuem à medida que descemos até níveis mais inferiores das gerações de sub-bacias.

Como perspectiva futura, almejamos estender a estatística de sub-bacias para o substrato cobrindo todo o globo terrestre em resolução mais acurada a partir de onde pretendemos generalizar os resultados apresentados nesse trabalho.

APÊNDICE A – Informações Suplementares

Neste apêndice detalhamos a metodologia utilizada para manipular as bases de dados reais utilizadas no desenvolvimento do trabalho desse capítulo. Descrevemos em maior detalhe também a metodologia utilizada na geração dos substratos artificiais.

A.1 Paisagens Reais

Usamos três diferentes conjuntos de dados DEM ao longo do estudo. O primeiro conjunto de dados foi a Carta Batimétrica Geral dos Oceanos (GEBCO) [87], a qual consiste em alturas altimétricas e batimétricas, ou seja, as alturas acima e abaixo do nível do mar, em todo o Globo. A resolução desses dados é 30 arc-segundos (30/3600 graus decimais) em ambas coordenadas, equivalente a uma rede quadrada com aresta de comprimento 0.926 quilômetros (km) na Linha do Equador. Os outros dois são o Altímetro Laser da Órbita Lunar (LOLA) [88] e o Altímetro Laser da Órbita de Marte (MOLA) [89], os quais consistem nos mapas de alturas da Lua e de Marte, respectivamente. A resolução do LOLA é de cerca de $0.118km$, enquanto a resolução do MOLA é de $0.463km$, ambos em relação ao que seria o seu correspondente “Equador”. Os três conjuntos de dados são mostrados nas figuras 12A-C.

Destaque-se que todos os três conjuntos de dados são mapeados em esferas, o terrestre (com raio $R_{terra} = 6378.137km$), o lunar (com raio $R_{lua} = 1737.4km$), e o de Marte (com raio $R_{marte} = 3396.19km$). Para o GEBCO, a superfície-referência (o nível 0) é definida pelo geóide terrestre. Este é o formato natural que um fluido estático apresentaria devido ao potencial gravitacional de seu corpo celeste [99]. Na Terra, os oceanos podem ser considerados estáticos e, conseqüentemente, eles se aproximam de tal superfície. Para o LOLA e o MOLA, o conceito de geóide é generalizado pela superfície equipotencial gravitacional com os raios médios lunar e marciano no Equador, respectivamente definindo os “níveis do mar” hipotéticos [88, 89]. Nós adotamos o limiar de altura $h^* = 0$ para todas as paisagens a fim de fazer uma análise comparativa geral.

Aqui, procedemos ao cálculo da área de cada sítio pela composição de dois triângulos esféricos (as áreas dos sítios para paisagens artificiais não possuem unidade de medida e são todos unitários). A área de um triângulo esférico com arestas a , b e c é dado por [100],

$$A = 4R_k^2 \tan^{-1} \left[\tan \left(\frac{s}{2} \right) \tan \left(\frac{s_a}{2} \right) \tan \left(\frac{s_b}{2} \right) \tan \left(\frac{s_c}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

onde $s = (a/R_k + b/R_k + c/R_k)/2$, $s_a = s - a/R_k$, $s_b = s - b/R_k$, e $s_c = s - c/R_k$. Nesse formalismo, R_k é o raio da esfera, onde, no nosso caso, $k = \{terra, lua, marte\}$, e os comprimentos das arestas são calculados pela distância do grande círculo (geodésica) entre dois pontos i e j na superfície da esfera dada pela *fórmula Haversina* [101]:

$$d_{ij} = 2R_k \sin^{-1} \left[\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) + \cos \phi_i \cos \phi_j \sin^2 \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)} \right] \quad (\text{A.2})$$

onde $\Delta\phi = \phi_j - \phi_i$ e $\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_i$. Os valores de λ_i (λ_j) e ϕ_i (ϕ_j), medidos em radianos, são a longitude e a latitude, respectivamente, do ponto i (j). Logo, nós podemos definir as áreas dos sítios, e, conseqüentemente, obter a área total de uma dada bacia, uma vez que cada bacia é composta por um conjunto de sítios.

A.2 Paisagens Artificiais

Obtivemos paisagens artificiais através do *movimento browniano fracionário* (fBm) [90] a fim de estudarmos as redes de linhas divisoras e anti-linhas divisoras de águas. Um dos métodos mais estabelecidos para gerar o fBm é o chamado *método de filtragem de Fourier* (Ffm) [90], cuja ideia básica é definir coeficientes aleatórios de Fourier no espaço recíproco, distribuídos de acordo com a seguinte densidade espectral da lei de potência:

$$S(f_1, f_2, \dots, f_d) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d f_i^2 \right)^{-w}} \quad (\text{A.3})$$

onde f_i é a frequência da dimensão i , d é a dimensão topológica, e w é o expoente espectral. Subseqüentemente, a transformada inversa de Fourier é aplicada para gerar uma distribuição correlata no espaço real. No nosso caso $d = 2$, a distribuição correlata é uma paisagem. Cada paisagem é caracterizada por um expoente H , chamado de *expoente de Hurst*, relacionado ao expoente espectral por $w = 2H + d = 2H + 2$. Quatro casos podem ser distinguidos: (i) Para $H = -1$, a paisagem é não-correlacionada (ver figura 13A). (ii) Para $0 < H < 1/2$, a paisagem tem uma correlação negativa, isto é, os incrementos são

anticorrelacionados (ver figura 13B). (iii) Para $H = 1/2$, a paisagem é correlacionada, mas os incrementos são não-correlacionados (ver figura 13C), o que é o caso do clássico movimento *Browniano* [90]. (iv) Finalmente, para $1/2 < H < 1$, a paisagem tem uma correlação positiva, ou seja, os incrementos são correlacionados (ver figura 13D).

REFERÊNCIAS

- [1] R. E. Horton. *Drainage Basin Characteristics*. Trans. American Geophysical Union, vol. 13, p. 350, 1932.
- [2] José Salatiel Rodrigues Pires, José Eduardo dos Santos, Marcos Estevan del Prette. *Conceitos de Bacias Hidrográfica – Teorias e Aplicações*. Editora da UESC. 2002.
- [3] Pires, J. S. R. *Análise Ambiental voltada ao Planejamento e Gerenciamento do Ambiente Rural: Abordagem Metodológica Aplicada ao Município de Luiz Antônio – SP*. (Tese de Doutorado), PPG-ERN, UFSCar, 1995.
- [4] Bormann, F. H. & Likens, G. E. Nutrient Cycling, *Science*, 155, p 424-429, 1967.
- [5] Pollete, M. *Planície do Perequê/Ilha de São Sebastião - SP. Diagnóstico e Planejamento Ambiental Costeiro*. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 1993. (Dissertação de Mestrado).
- [6] Rocha, O.; Pires, J. S. R. & Santos, J. E. A Bacia Hidrográfica como unidade de estudo e planejamento. Cap 1: 1-16, In: Espíndola, E. L. G.; SILVA, J.S.V.; MARINELLI, C. E. & ABDON, M. M. (Orgs). *A Bacia Hidrográfica do Rio Monjolinho*. Rima. São Carlos, 2000.
- [7] Lima, M. A. *Avaliação da Qualidade Ambiental de uma Microbacia no Município de Rio Claro - SP*. UNESP, Rio Claro, SP. 1994. 264 p. (Tese de Doutorado).
- [8] D. G. Tarboton, R. L. Bras, I. Rodriguez-Iturbe, *The fractal nature of river networks*, *Water Resources Research*, vol. 24, n. 8, p 1317, 1988.
- [9] A. Rinaldo, I. Rodriguez-Iturbe, R. Rigon, E. Ijjasz-Vasquez, R. L. Bras. *Self-Organized Fractal River Networks*. *Phys. Rev. Let.*, vol. 70, n. 6, p. 822, 1993.
- [10] A. Kurakin. *The self-organizing fractal theory as a universal discovery method: the phenomenon of life*. *Theor Biol Med Model*, vol. 8, n. 4, 2011.
- [11] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. WH Freeman e Co., New York, 1983.
- [12] I. Rodriguez-Iturbe, M. Marani, R. Rigon, A. Rinaldo. *Self-organized river basin landscapes: Fractal and multifractal characteristics*. *Water Resources Research*, vol. 30, n. 12, p. 3531, 1994.
- [13] D. R. Montgomery, W. E. Dietrich. *Where do Channels Begin?*. *Nature*, vol 336, n. 6196, p. 232, 1988.
- [14] A. E. Scheidegger. *Theoretical Geomorphology*. Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1970.
- [15] J. Feder, *Fractals*. New York: Plenum Press, 1989.
- [16] S. R. Broadbent e J. M. Hammersley. Percolation processes I. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53, p. 629-641, 1957.

- [17] D. Stauffer & A. Aharony. *Introduction to percolation theory* (Taylor & Francis, 1994).
- [18] E. A. Oliveira. *Linhas divisoras de água e fraturas de caminhos ótimos em meios desordenados*. Tese (Doutorado), 2012.
- [19] D. Wilkinson & J. F. Willemsen. Invasion percolation: a new form of percolation theory. *J. Phys. A Math. Gen.* **16**, 3365-3376 (1983).
- [20] L. Vincent, P. Soille. *Watersheds in digital spaces: an efficient algorithm based on immersion simulations*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 13, n. 6, p. 583, 1991.
- [21] H. Gao, W. Siu e C. How. Improved techniques for automatic image segmentation. *Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on*, 11, n. 12, p. 1273, 2001.
- [22] L. G. Shapiro e G. C. Stockman. *Computer vision*. Hew Jersey: Prentice-Hall, 2001.
- [23] J. Shi e J. Malik, iNormalized cuts and image segmentation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 22, n. 8, p. 888, 2000.
- [24] M. P. Pathegama e Ö. Göl. *Edge-end pixel extration for edge-based image segmentation*. Engineering and Technology, vol. 2, p. 164, 2007.
- [25] R. Balakrishnan. *The energy of a graph*. Linear Algebra and its Applications, vol. 387, 2004.
- [26] I. Gutman, B. Zhou. *Laplacian energy of a graph*. Linear Algebra and its Applicatinos, 414, 2006.
- [27] Z. Huigang, et al. *Hierarchical remote sensing image analysis via graph laplacian energy*. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, vol. 10, n. 2, 2013.
- [28] K. Parvati, B. S. Prakasa Rao e M. Mariya Das. *Image Segmentation Using Gray-Scale Morphology and Marker-Controlled Watrshed Transformation*. Discrete Dynamics in Nature and Society, p. 2008, 2008.
- [29] K. Haris, et al. *Hybrid image segmentation usind watershed and fast region merging*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, n. 12, 1998.
- [30] J. M. Gauch. *Image segmantation and analysis via multiscale gradient watershed hierarchies*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 8, n. 1, 1999.
- [31] P. K. Geetha, et al. *Cell segmentation and NC ratio analysis for biopsy images using marker controlled watershed algoritmh*. Green Computing Communication and Eletrical Engineering, International Conference, vol. 387, 2014.
- [32] E. Fehr, J. S. Andrade Jr., S. D. da Cunha, L. R. da Silva, H. J. Herrmann, D. Kadau, C. F. Moukarzel & E. A. Oliveira. New efficient methods for calculating watersheds. *J. Stat. Mech.* **2009**, P09007 (2009).
- [33] E. E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1996.
- [34] H. E. Hurst. *Long-term storage capacity of reservoirs*. Transactions of American Society of Civil Engineers. vol. 116, p. 770, 1951.
- [35] C. C. Heyde, & Seneta, E. *Statisticians of the centuries*. New York: Springer, 2001.
- [36] H. E. Hurst, Black, R. P., Simaika, Y. M. *Long-term storage: an experimental study*. London: Constable London, p.145, 1965.

- [37] C. T. May, *Nonlinear pricing: theory and applications*, J. Wiley New York, 1999.
- [38] M. Corazza, A. G. Malliaris, *Multi-fractality in foreign currency markets*. *Multinational Finance Journal*, p. 65, 2002.
- [39] D. Grech, Z. Mazur, *Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?*, *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 336, p. 133, 2004.
- [40] B. Qian, K. Rasheed, *Hurst Exponent and Financial Market Predictability*, Artigo Apresentado na *Conference on Financial Engineering and Applications*, p. 203, 2004.
- [41] A. Einstein. *On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat*. *Annalen der Physik*. vol. 17, p. 549, 1905.
- [42] V. Suyal, A. Prasad, H. P. Singh. *Nonlinear Time Series Analysis of Sunspot Data*, *Solar Physics*, vol. 260, p. 441, 2009.
- [43] R. L. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamics*. Addison-Wesley, Menlo Park, California. *Biom. J.*, vol. 34: p 383, 1992.
- [44] L. Seuront, *et al. Fractals and multifractals in ecology and aquatic science*, 2009.
- [45] H-O. Peitgen, D. Saupe, M. F. Barnsley. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, 1988.
- [46] B. B. Mandelbrot, V. Ness. *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, *SIAM Review*, vol. 10, 1968.
- [47] J.-F. Coeurjolly, *Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study*. *Journal of Statistical Software*, vol. 5, 2000.
- [48] R. T. Vassoler, *Coeficiente DCCA de Correlação Cruzada Aplicada a Séries de Temperatura do Ar e Umidade Relativa do Ar*, SENAI CIMATEC, Dissertação (Mestrado) 2003.
- [49] A. Christofolletti. *Geomorfologia*. Ed. Edgard Blucher Ltda, 2nd. ed., p. 188, 1980.
- [50] A. N. Strahler. *Dynamic basis of geomorphology*. *Geological Society of America Bulletin*, vol. 63, p. 923, 1952.
- [51] BRASIL. *Lei Federal 10.257*, de 10 de julho de 2001. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/LEIS_2001/L10267.htm Acessado em 13 de Outubro de 2018.
- [52] C. W. Fetter. *Applied Hydrogeology* (Pearson Education Limited, 2014).
- [53] C. J. Vörösmarty, C. A. Federer, & A. L. Schloss. Potential evaporation functions compared on US watersheds: Possible implications for global-scale water balance and terrestrial ecosystem modeling. *J. Hydrol.* **207**, 147–169 (1998).
- [54] C. L. Knecht, W. Trump, D. ben Avraham & R. M. Ziff. Retention capacity of random surfaces. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 045703 (2012).
- [55] K. N. Brooks, P. F. Folliott, & J. A. Magner. *Hydrology and the management of watersheds* (Wiley-Blackwell, 2012).
- [56] A. S. Dhakal, & R. C. Sidle. Distributed simulations of landslides for different rainfall conditions. *Hydrol. Process.* **18**, 757-776 (2004).

- [57] B. Pradhan, R. P. Singh, & M. F. Buchroithner. Estimation of stress and its use in evaluation of landslide prone regions using remote sensing data. *Adv. Space Res.* **37**, 698-709 (2006).
- [58] M. Lazzari, E. Gerardi, V. Lapenna, & A. Loperte. Natural hazards vs human impact: an integrated methodological approach in geomorphological risk assessment on the Tursi historical site, Southern Italy. *Landslides* **3**, 275–287 (2006).
- [59] K. T. Lee, & Y. T. Lin, Flow analysis of landslide dammed lake watersheds: a case study. *J. Am. Water Resour. Assoc.* **42**, 1615-1628 (2006).
- [60] D. Yang, Y. Zhao, R. Armstrong, D. Robinson & M. J. Brodzik. Streamflow response to seasonal snow cover mass changes over large Siberian watersheds. *J. Geophys. Res. Earth Surf.* **112**, F02S22 (2007).
- [61] R. J. Diaz & R. Rosenberg. Spreading Dead Zones and Consequences for Marine Ecosystems. *Science* **321**, 926-929 (2008).
- [62] D. Breitburg, *et al.* Declining oxygen in the global ocean and coastal waters. *Science* **359**, eaam7240 (2018).
- [63] A. S. Goudie. *The Human Impact on the Natural Environment: Past, Present, and Future* (Wiley-Blackwell, 2018).
- [64] N. A. M. Araújo, P. Grassberger, B. Kahng, K. J. Schrenk & R. M. Ziff. Recent advances and open challenges in percolation. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **223**, 2307–2321 (2014).
- [65] A. A. Saberi. Recent advances in percolation theory and its applications. *Phys. Rep.* **578**, 1-32 (2015).
- [66] V. Grau, A. U. J. Mewes, M. Alcaniz, R. Kikinis & S. K. Warfield. Improved watershed transform for medical image segmentation using prior information. *IEEE Trans. Med. Imaging* **23**, 447-458 (2004).
- [67] H. P. Ng, S. H. Ong, K.W. C. Foong, P. S. Goh & W. L. Nowinski. Medical image segmentation using k-means clustering and improved watershed algorithm. *Proc. IEEE Southwest Symp. Image Anal. Interpret.*, 61-65 (2006).
- [68] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman & M. Couprie. Watershed cuts: Thinnings, shortest path forests, and topological watersheds. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **32**, 925-939 (2010).
- [69] United Nations (1902) Reports of international arbitral awards. Disponível em http://legal.un.org/riaa/cases/vol_IX/37-49.pdf. Acessado em 13 de Novembro, 2018.
- [70] Eidgenössisches Departement für Auswärtige Angelegenheiten (2009) Verlauf der grenze zwischen schweiz und italien. Disponível em <https://www.admin.ch/gov/de/start/dokumentation/medienmitteilungen.msg-id-28489.html>. Acessado em 13 de Novembro de 2018.
- [71] S. P. Breyer & R. S. Snow. Drainage basin perimeters: a fractal significance. *Geomorphology* **5**, 143-157 (1992).
- [72] M. Cieplak, A. Maritan & J. R. Banavar. Optimal paths and domain walls in the strong disorder limit. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2320-2323 (1994).

- [73] M. Cieplak, A. Maritan & J. R. Banavar. Invasion percolation and Eden growth: geometry and universality. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3754-3757 (1996).
- [74] M. Porto, S. Havlin, S. Schwarzer & A. Bunde. Optimal path in strong disorder and shortest path in invasion percolation with trapping. *Phys Rev Lett* **79**, 4060-4062 (1997).
- [75] M. Porto, N. Schwartz, S. Havlin & A. Bunde. Optimal paths in disordered media: Scaling of the crossover from self-similar to self-affine behavior. *Phys. Rev. E* **60**, R2448 (1999).
- [76] R. Dobrin & P. M. Duxbury. Minimum spanning trees on random networks. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5076-5079 (2001).
- [77] J. S. Andrade Jr., E. A. Oliveira, A. A. Moreira, H. J. Herrmann. *Fracturing the optimal paths*. Physical Review Letters, vol. 103, p. 225503, 2009.
- [78] E. A. Oliveira, K. J. Schrenk, N. A. M. Araújo, H. J. Herrmann & J. S. Andrade Jr.. Optimal-path cracks in correlated and uncorrelated lattices. *Phys. Rev. E* **83**, 046113 (2011).
- [79] J. S. Andrade Jr., S. D. S. Reis, E. A. Oliveira, E. Fehr & H. J. Herrmann. Ubiquitous fractal dimension of optimal paths. *J. Comput. Sci. Eng.* **13**, 74-81 (2011).
- [80] K. J. Schrenk, N. A. M. Araújo, J. S. Andrade Jr. & H. J. Herrmann. Fracturing ranked surfaces. *Sci. Rep.* **2**, 348 (2012).
- [81] E. Daryaei, N. A. M. Araújo, K. J. Schrenk, S. Rouhani & H. J. Herrmann. Watersheds are schramm-loewner evolution curves. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 218701 (2012).
- [82] B. Burger, J. S. Andrade Jr. & H. J. Herrmann. A comparison of hydrological and topological watersheds. *Sci. Rep.* **8**, 10586 (2018).
- [83] I. Zăvoianu. *Morphometry of drainage basins* (Elsevier, 1985).
- [84] R. J. Peckham & J. Gyozo. *Digital terrain modelling* (Springer, 2007).
- [85] E. Fehr, D. Kadau, J. S. Andrade Jr. & H. J. Herrmann. Impact of perturbations on watersheds. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 048501 (2011).
- [86] E. Fehr, D. Kadau, N. A. M. Araújo, J. S. Andrade Jr. & H. J. Herrmann. Scaling relations for watersheds. *Phys. Rev. E* **84**, 036116 (2011).
- [87] United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO) (2014) General Bathymetric Chart of the Oceans (GEBCO). Available at https://www.gebco.net/data_and_products/gridded_bathymetry_data/gebco_30_second_grid/. Accessed November 13, 2018.
- [88] United States Geological Survey (USGS) (2014) Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA). Available at https://astrogeology.usgs.gov/search/map/Moon/LRO/LOLA/Lunar_LRO_LOLA_Global_LDEM_118m_Mar2014. Accessed November 13, 2018.
- [89] United States Geological Survey (USGS) (2014) Mars Orbiter Laser Altimeter (MOLA). Available at https://astrogeology.usgs.gov/search/map/Mars/GlobalSurveyor/MOLA/Mars_MGS_MOLA_DEM_mosaic_global_463m. Accessed November 13, 2018.
- [90] Fisher, Y., McGuire, M., Voss, R.F., Barnsley, M.F., Devaney, R.L. & Mandelbrot, B.B. *The science of fractal images* (Springer, 1998).

- [91] Montgomery, D.C., Peck, E.A. & Vining, G. G. *Introduction to linear regression analysis* (John Wiley & Sons, 2012).
- [92] Clauset, A., Shalizi, R.C. & Newman, M.E.J. Power-Law Distributions in Empirical Data. *SIAM Review* **51**, 661-703
- [93] G. S. Watson. Smooth regression analysis. *Sankhyā Ser. A* **26**, 359-372 (1964).
- [94] I. Rodríguez-Iturbe, I. & Rinaldo, A. *Fractal river basins: Chance and self-organization* (University Press, 2001).
- [95] E. A. Nadaraya. On estimating regression. *Theory Probab. Appl.* **9**, 141-142
- [96] P. A. Morais, E. A. Oliveira, N. A. M. Araújo, H. J. Herrmann, e J. S. Andrade Jr. *Fractality of eroded coastlines of correlated landscapes*. Physical Review E, vol. 84, n. 016102, 2011.
- [97] E. A. Oliveira, R. S. Pires, R. S. Oliveira, V. Furtado, H. J. Herrmann & J. S. Andrade Jr. Sci. Rep. 2019. XX, XXX XXX <http://doi.org/> (2019).
- [98] Wild Conservation Society (WCS). Amazon Waters Initiative. Available at <https://www.amazonwaters.org/basins/great-sub-basins>. Accessed January 3, 2019.
- [99] G. Schubert. *Treatise on Geophysics* (Elsevier, 2007).
- [100] I. Todhunter. *Spherical trigonometry, for the use of colleges and schools: with numerous examples* (Macmillan, 1863).
- [101] J. P. Snyder. *Map Projections - A Working Manual* (United States Government Printing Office, 1987).