



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

**INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB NA DINÂMICA DO
OSCILADOR DE DIRAC E DE UMA PARTÍCULA COM MASSA EFETIVA
DEPENDENTE DA POSIÇÃO**

FORTALEZA

2019

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB NA DINÂMICA DO
OSCILADOR DE DIRAC E DE UMA PARTÍCULA COM MASSA EFETIVA
DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O51i Oliveira, Rubens Raimundo de Sousa.

Influência do sistema Aharonov-Bohm-Coulomb na dinâmica do oscilador de Dirac e de uma partícula com massa efetiva dependente da posição / Rubens Raimundo de Sousa Oliveira. – 2019.
71 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1. Sistema Aharonov-Bohm-Coulomb. 2. Equação de Dirac. 3. Oscilador de Dirac. 4. Massa Efetiva Dependente da Posição. 5. Operadores Projeção left-handed e right-handed. I. Título.

CDD 530

RUBENS RAIMUNDO DE SOUSA OLIVEIRA

INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB NA DINÂMICA DO
OSCILADOR DE DIRAC E DE UMA PARTÍCULA COM MASSA EFETIVA
DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 02/05/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, em especial aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Maria das Graças de Sousa Oliveira e Raimundo Cícero de Oliveira, pelo esforço, amor, dedicação e apoio destinados à minha educação e vida acadêmica.

Aos meus irmãos, Rogério, Rayane, Raisia e Rejane pelo incentivo e carinho.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto pela paciência, orientação e amizade durante essa minha jornada no mestrado.

Ao Prof. Dr. Rodolfo Casana e ao Dr. Davi Monteiro por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

À todos os professores e funcionários do Departamento de Física.

Aos amigos do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO), em especial a Michel, Adailton, Adevaldo, Rondinelly, Matheus Nilton, Júlio César, Victor Santos e Diego Frankin.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro, bem como a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFis) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

RESUMO

Nesta dissertação, estudamos a influência do sistema Aharonov-Bohm-Coulomb (ABC) na dinâmica quântica relativística e não-relativística do oscilador de Dirac (OD) e de uma partícula de Dirac com massa efetiva dependente da posição (MEDP). Para obter as soluções de estado ligado desses dois problemas, utilizamos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed*. Com respeito aos resultados do primeiro problema, verificamos que o spinor de Dirac é escrito em termos das funções de Heun biconfluentes e o espectro de energia relativístico depende dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e da frequência ciclotron ω_c que caracteriza um campo magnético uniforme. Observamos que Z tem a função de aumentar os valores deste espectro, enquanto Φ tem a função de diminuir. Em particular, notamos um efeito quântico peculiar: as frequências angulares do OD são quantizadas em termos dos números quânticos. Além dessas frequências serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à ω_c e aumentam quadraticamente com Z e as energias do sistema. Por consequência desse resultado incomum, as energias do estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado. Quando analisarmos o limite não-relativístico desse primeiro problema, obtemos a equação do oscilador harmônico quântico (OHQ) com um forte acoplamento spin-orbita na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Diferentemente do OD, as frequências do OHQ aumentam linearmente com as energias. Agora, com respeito aos resultados do segundo problema, verificamos que o spinor de Dirac é escrito em termos dos polinômios de Laguerre generalizados e o espectro de energia relativístico depende de Z , Φ e do parâmetro κ que caracteriza a MEDP. Observamos que Φ e κ têm a função de aumentar os valores deste espectro, enquanto Z tem a função de diminuir. Em especial, quando tomamos o limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), os resultados do sistema ABC relativístico são recuperados. No entanto, verificamos que mesmo na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), o espectro de energia da partícula livre com MEDP ainda permanece quantizado. Por outro lado, quando analisarmos o limite não-relativístico do nosso último problema, obtemos a equação de Schrödinger (ES) para uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC, onde verificamos que o espectro de energia de tal equação se reduz ao espectro do sistema ABC não-relativístico no limite $\kappa \rightarrow 0$, enquanto para $\Phi = Z = 0$, se reduz ao espectro da partícula livre com MEDP.

Palavras-chave: Sistema Aharonov-Bohm-Coulomb. Equação de Dirac. Oscilador de Dirac. Massa Efetiva Dependente da Posição. Operadores Projeção *left-handed* e *right-handed*.

ABSTRACT

In this dissertation, we study the influence of the Aharonov-Bohm-Coulomb (ABC) system on the relativistic and nonrelativistic quantum dynamics of the Dirac oscillator (DO) and of a Dirac particle with position-dependent effective mass (PDEM). To obtain the bound-state solutions of these two problems, we use the projection operators *left-handed* and *right-handed*. With respect to the results of the first problem, we verified that Dirac spinor is written in terms of the biconfluent Heun functions and the relativistic energy spectrum depends on the parameters Z and Φ which characterize the ABC system and of the cyclotron frequency ω_c which characterizes a uniform magnetic field. We observed that Z has the function of increase the values of this spectrum, while Φ has the function of decrease. In particular, we note a peculiar quantum effect: the angular frequencies of the OD are quantized in terms of quantum numbers. In addition to these frequencies being real and positive quantities, are linearly proportional to ω_c and increase quadratically with Z and the energies of the system. By consequence of this unusual result, the energies of the ground state are greater of the that the of the first excited state. When we analyze the nonrelativistic limit of this first problem, we obtain the equation of the quantum harmonic oscillator (QHO) with a strong spin-orbit coupling in the presence of a uniform magnetic field and under the influence of the ABC system. Unlike of the DO, the frequencies of the QHO increase linearly with the energies. Now, with respect to the results of the second problem, we verify that the Dirac spinor is written in terms of the generalized Laguerre polynomials and the relativistic energy spectrum depends of Z , Φ and of the parameter κ that characterizes the PDEM. We observed that Φ and κ have the function of increase the values of this spectrum, while Z has the function of decrease. In special, when we take the constant mass limit ($\kappa \rightarrow 0$), the results of the relativistic ABC system are recovered. However, we verified that even in the absence of the ABC system ($\Phi = Z = 0$), the energy spectrum of the free particle with MEDP still remains quantized. On the other hand, when we analyze the nonrelativistic limit of our last problem, we obtain the Schrödinger equation (SE) for a particle with PDEM under the influence of the ABC system, where we verify that the energy spectrum of such an equation is reduced to the spectrum of the nonrelativistic ABC system in the limit $\kappa \rightarrow 0$, while for $\Phi = Z = 0$, reduces to the spectrum of the free particle with MEDP.

Keywords: Aharonov-Bohm-Coulomb System. Dirac Equation. Dirac Oscillator. Position-Dependent Effective Mass. Projection Operators *left-handed* and *right-handed*.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Energias relativísticas do sistema ABC para o estado fundamental e primeiro estado excitado.	25
Tabela 2 – Energias não-relativísticas do sistema ABC para o estado fundamental e primeiro estado excitado.	28
Tabela 3 – Energias do OD para o estado fundamental.	40
Tabela 4 – Energias do OD para o primeiro estado excitado.	41
Tabela 5 – Energias do OD para o estado fundamental e primeiro estado excitado com cinco valores de m_l	42
Tabela 6 – Energias do OHQ para o estado fundamental.	45
Tabela 7 – Energias do OHQ para o primeiro estado excitado.	46
Tabela 8 – Energias do OHQ para o estado fundamental e primeiro estado excitado com cinco valores de m_l	47
Tabela 9 – Energias relativísticas da partícula com MEDP para o estado fundamental e primeiro estado excitado.	53
Tabela 10 – Energias não-relativísticas da partícula com MEDP para o estado fundamental e primeiro estado excitado.	56

LISTA DE SIGLAS

TRR	Teoria da Relatividade Restrita
MQ	Mecânica Quântica
MQR	Mecânica Quântica Relativística
EKG	Equação de Klein-Gordon
ED	Equação de Dirac
EW	Equação Weyl
EP	Equação de Proca
EK	Equação de Kemmer
ERS	Equação de Rarita-Schwinger
CPT	Carga-Paridade-Tempo
ETD	Equação Tipo-Dirac
ETDW	Equação Tipo-Dirac-Weyl
AB	Aharonov-Bohm
ABC	Aharonov-Bohm-Coulomb
ES	Equação de Schrödinger
OHQ	Oscilador Harmônico Quântico
OD	Oscilador de Dirac
OKG	Oscilador de Klein-Gordon
ODKP	Oscilador de Duffin–Kemmer–Petiau
MME	Modelo de Massa Efetiva
MEDP	Massa Efetiva Dependente da Posição
SI	Sistema Internacional
OHS	Oscilador Harmônico Simples
ESP	Equação de Schrödinger-Pauli

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	O SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB	15
2.1	A Equação de Dirac	15
2.2	O sistema Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico	18
2.3	O sistema Aharonov-Bohm-Coulomb não-relativístico	26
3	O OSCILADOR DE DIRAC (2+1)-DIMENSIONAL SOB A INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB	29
3.1	O Hamiltoniano do oscilador de Dirac	29
3.2	O oscilador de Dirac na presença de um campo magnético uniforme em um sistema Aharonov-Bohm-Coulomb	32
3.3	Resultados e discussão	35
3.4	Limite não-relativístico	44
4	UMA PARTÍCULA COM MASSA EFETIVA DEPENDENTE DA POSIÇÃO SOB A INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB	49
4.1	A equação de Dirac para uma partícula com massa efetiva dependente da posição em um sistema Aharonov-Bohm-Coulomb	49
4.2	Resultados e discussão	50
4.3	Limite não-relativístico	54
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	58
	REFERÊNCIAS	61
	APÊNDICE A - O EFEITO AHARONOV-BOHM	67

1 INTRODUÇÃO

A descrição dos fenômenos físicos em altas energias requer de forma indispensável a utilização das duas principais teorias surgidas no início do século XX: a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) e a Mecânica Quântica (MQ). A união desses dois pilares da física em uma teoria consistente é chamada atualmente de Mecânica Quântica Relativística (MQR). Em geral, a MQR tem por objetivo estudar as soluções das equações de onda para férmions (partículas de spin semi-inteiro) e bósons (partículas de spin inteiro). As principais equações de onda relativísticas conhecidas hoje em dia são: a equação de Klein-Gordon (EKG) (para partículas de spin-0), equação de Dirac (ED) (para partículas massivas de spin-1/2), equação de Weyl (EW) (para partículas não massivas de spin-1/2), equações de Proca (EP) e Kemmer (EK) (para partículas de spin-1) e a equação de Rarita-Schwinger (ERS) (para partículas de spin-3/2) [1]. Além da física de altas energias [2], a MQR também é aplicada na física de partículas [3], química [4], física atômica [5] e física da matéria condensada [5, 6].

No entanto, é na ED, formulada em 1928 pelo físico P. A. M. Dirac (prêmio Nobel de 1933), que podemos verificar o grande sucesso da MQR que continua até os dias atuais [1, 2, 3, 5]. A ED pode descrever entidades elementares como elétrons, múons, taus e quarks livres, ou, até mesmo entidades compostas livres como prótons e nêutrons [1, 2, 3]. Resumindo, todos os férmions do modelo padrão conhecidos atualmente, com exceção provavelmente dos neutrinos, são férmions de Dirac. Outros pontos relevantes que merecem ser destacados é que além da ED introduzir na literatura uma das simetrias mais importantes e belas da natureza, a simetria Carga-Paridade-Tempo (CPT), consegue descrever naturalmente o spin, helicidade e quiralidade dos elétrons, prótons, nêutrons, etc, assim como prevê que para cada uma dessas partículas existem suas respectivas antipartículas. Pouco tempo depois, em 1932, o físico C. D. Anderson (prêmio Nobel de 1936) [7] descobriu a antipartícula do elétron: o antielétron, no qual batizou de pósitron (depois foram descobertos do antimúon, antipróton, antinêutron, etc).

Por outro lado, dentre as pesquisas mais recentes sobre a aplicabilidade prática da ED está no estudo das propriedades físicas do grafeno, no qual é um material bidimensional (2D) composto de carbono (monocamada de grafite), possui a espessura de um átomo e uma estrutura cristalina no formato geométrico hexagonal, semelhante a um favo de mel [8]. Na realidade, a equação que descreve a dinâmica planar do grafeno é uma equação tipo-Dirac (ETD), ou, equação tipo-Dirac-Weyl (ETDW), isso se deve pelo fato dos elétrons e buracos que compõem as bandas de condução e valência não serem relativísticos e comportarem-se em certas situações como partículas não massivas. Em 2010, os físicos A. Geim e K. Novoselov ganharam o prêmio Nobel de Física por experiências inovadoras sobre o grafeno [8].

Em 1959, os físicos Y. Aharonov e D. Bohm publicaram um artigo no qual demonstraram a influência e importância dos potenciais eletromagnéticos na dinâmica quântica de partículas carregadas mesmo elas estando em regiões onde os campos eletromagnéticos são nulos [9, 10]. Neste artigo, a função de onda da partícula adquire uma fase quântica geométrica proporcional ao potencial vetor \mathbf{A} . Posteriormente, essa mudança de fase foi observada em laboratório através do fenômeno de interferência quântica [11]. Este fenômeno quântico peculiar é chamado atualmente de efeito Aharonov-Bohm (AB). Além do potencial vetor do efeito AB, o potencial escalar A_0 também possui relevância na literatura, principalmente quando usado para calcular a energia potencial elétrica entre partículas carregadas (em átomos, moléculas e íons) [10]. Em especial, essa energia potencial é chamada de energia potencial de Coulomb, ou, simplesmente de potencial de Coulomb. Considerando o caso bidimensional, o potencial de Coulomb 2D é de particular interesse em sistemas quânticos relativísticos [12] e não-relativísticos [13]. Além deste potencial também ser aplicado em vários problemas associados ao grafeno [14], surgiu num artigo sobre o movimento de elétrons em cristais altamente anisotrópicos [15].

Entretanto, quando trabalhados em combinação, o potencial vetor do efeito AB e o potencial de Coulomb (2D e 3D) modelam um importante sistema físico que vem ganhando notoriedade e foco de investigações ao longo dos anos, este sistema é o chamado sistema Aharonov-Bohm-Coulomb (ABC) [16, 17, 18]. Por exemplo, considerando o sistema ABC governado pela equação de Schrödinger (ES) (equação de onda não-relativística para partículas de spin-0), tal sistema é estudado em problemas envolvendo espalhamento e estados ligados [19], modelos moleculares [20], estados coerentes [18], peculiaridades espectroscópicas e polarização dinâmica [21]. Considerando agora o sistema ABC governado pela ED, assim como pela ETD e ETDW, tal sistema é estudado em conexão com as integrais de caminho de Feynmann [22], espalhamento [23], criação espontânea de pares de férmions [24], polarização do vácuo [25], monopolos magnéticos [17], impureza supercrítica de Coulomb [26], anéis de grafeno [27] e estados ligados virtuais [28].

Em 1989, os físicos M. Moshinsky e A. Szczepaniak formularam a primeira versão relativística do oscilador harmônico quântico (OHQ), no qual nomearam de oscilador de Dirac (OD) [29]. Para configurar o OD, Moshinsky e Szczepaniak inseriram o seguinte acoplamento não-mínimo na ED: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im_0\omega\beta\mathbf{r}$, onde m_0 é a massa de repouso da partícula, $\omega > 0$ é a frequência angular do oscilador e \mathbf{r} é o vetor posição [29]. Desde que foi proposto na literatura, vários trabalhos sobre o OD foram e continuam sendo realizados em diferentes áreas da física, tal como em termodinâmica [30], física-matemática [31], física nuclear [32], cromodinâmica quântica [29, 33], óptica quântica [34], supersimetria [31, 35] e física do grafeno [36]. Na Ref. [37], um acoplamento tipo-OD é usado na ED e ETDW para modelar anéis quânticos bidimensionais (relativísticos e não-relativísticos). Em particular, o OD também é estudado em

outros contextos interessantes da física, tal como em transições de fase quântica [38], espaços não-comutativos [39], espaços-tempos curvos com e sem rotações geradas por cordas cósmicas [40], cenário do comprimento mínimo [41], etc. Recentemente, o OD foi verificado experimentalmente por J. A. Franco-Villafãne et al [42]. Vale destacar que a versão relativística do OHQ não é modelada unicamente pela ED, de fato, posteriormente foram formulados os osciladores de Klein-Gordon (OKG) [43, 44] e de Duffin–Kemmer–Petiau (ODKP) [45].

Em física do estado sólido, o modelo de massa efetiva (MME) surgiu inicialmente com o propósito de estudar o comportamento de elétrons (ou impurezas) numa rede periódica de um cristal semiconductor sujeito a um campo elétrico externo [46, 47]. Em física teórica, o MME é muito eficiente porque permite reduzir um sistema de muitos corpos a de uma única partícula [48, 49]. Porém, um caso especial de MME, a chamada massa efetiva dependente da posição (MEDP), também ganhou grande atenção devida sua utilidade prática no estudo das propriedades físicas de várias microestruturas da física da matéria condensada. Por exemplo, em regime de baixas energias, a ES com MEDP é aplicada no estudo de semicondutores [50], poços quânticos [51, 52], pontos quânticos [52, 53], fios quânticos [52, 54], líquidos quânticos [55], moléculas diatômicas [56], sistemas quânticos sujeito a oscilações harmônicas [57], etc.

Contudo, a principal dificuldade encontrada na ES com MEDP consiste no problema da ambiguidade de ordenamento no termo cinético, pois uma vez que a massa $m(\mathbf{r})$ passa a ser um operador, não comuta mais com o operador momento $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ [58]. Por outro lado, quando analisamos a dinâmica da partícula com MEDP através da ED, onde \mathbf{p} e $m(\mathbf{r})$ aparecem na equação formando uma combinação linear cujos coeficientes são as matrizes de Dirac, implica automaticamente na eliminação do problema da ambiguidade. Por exemplo, usando a ED e ETD com MEDP, é possível estudar problemas envolvendo espalhamento [59], interação de Coulomb [48, 60, 61], simetria de spin e pseudo-spin [62], simetria-PT [63], física do estado sólido [64], poço quadrado infinito [65], princípio da incerteza generalizado [66], espaço-tempo cônico [67], grafeno [68], etc. Recentemente, o OD generalizado com MEDP foi estudado na presença de um campo elétrico via método supersimétrico [69].

A presente dissertação tem como objetivo estudar a influência do sistema ABC na dinâmica quântica relativística e não-relativística do OD e de uma partícula com MEDP. Para solucionar exatamente esses dois problemas, utilizamos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* [70, 71]. Em particular, esses operadores possuem a finalidade de projetar o spinor de Dirac nos seus respectivos spinores *left-handed* (“mão-esquerda”) e *right-handed* (“mão-direita”). Inicialmente, esses operadores tiveram uso prático como um método alternativo para determinar as soluções do átomo de hidrogênio relativístico. Com respeito a dimensionalidade e ao sistema de coordenadas e unidades, trabalhamos no espaço-tempo de Minkowski $(2+1)$ -dimensional e adotamos o sistema de coordenadas polares e o sistema internacional (SI).

Esta dissertação apresenta cinco capítulos e está organizada como segue.

No capítulo 2, fizemos uma breve revisão sobre o formalismo da ED, assim como um estudo aprofundado sobre as soluções de estado ligado do sistema ABC para os casos relativístico e não-relativístico. Em particular, aplicamos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* na ED e obtemos uma equação hipergeométrica confluyente, conseqüentemente, determinamos a partir desta equação o spinor de Dirac e o espectro de energia para os estados ligados da partícula.

No capítulo 3, começamos nossa discussão com uma rápida introdução sobre a origem física do OD. Logo em seguida, fizemos uma investigação sobre a dinâmica quântica relativística e não-relativística do OD na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Através da aplicação dos operadores projeção *left-handed* e *right-handed* no OD, obtemos uma equação de Heun biconfluyente. De posse desta equação, fomos capazes de determinar explicitamente o spinor de Dirac, os níveis de energia e as frequências angulares permitidas do OD para o estado fundamental e primeiro estado excitado. Em especial, a maior parte desses resultados foram publicados no periódico *Annals of Physics*:

- **R. R. S. Oliveira**, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Ann. Phys.* **400**, 1-8 (2019).

No capítulo 4, analisamos a dinâmica quântica relativística e não-relativística de uma partícula de Dirac com MEDP sob a influência do sistema ABC. Em seguida, aplicamos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* na ED e obtemos uma equação hipergeométrica confluyente. Posteriormente, determinamos o spinor de Dirac e o espectro de energia para os estados ligados da partícula. Por último, comparamos nossos resultados com o caso da massa constante. Em particular, a maior parte desses resultados foram submetidos no Arxiv:

- **R. R. S. Oliveira**, A. A. Araujo Filho, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *The relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system with position-dependent mass*, arXiv: 1812.07756, 2018.

No capítulo 5, fizemos as conclusões a respeito dos resultados de nossos dois problemas, assim como discutimos algumas perspectivas para futuros trabalhos baseados nesta pesquisa. Por último, finalizamos esta dissertação com um apêndice no qual aborda as principais características do efeito AB no contexto da MQ governada pela ES. Em particular, este apêndice dá ênfase ao estudo das funções de onda, do espectro de energia não-relativístico e da fase quântica geométrica associadas à uma partícula carregada sob a influência do efeito AB.

2 O SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB

Neste capítulo, faremos uma rápida e sucinta revisão sobre o formalismo da ED. Alguns tópicos que serão abordados são: a ED na forma diferencial e covariante, propriedades das matrizes de Dirac, conceito de quiralidade e os três principais “problemas” gerados pela EKG e solucionados pela ED. Além disso, analisaremos posteriormente as soluções de estado ligado do sistema ABC para os casos relativístico e não-relativístico. Para obter essas soluções, vamos aplicar os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* na ED, e logo em seguida, determinaremos o spinor de Dirac e o espectro de energia do sistema.

2.1 A Equação de Dirac

Em 1928, Dirac propôs uma equação de onda relativística que descreve com sucesso a dinâmica quântica de partículas massivas de spin-1/2. No SI e em coordenadas cartesianas, a ED é escrita originalmente como (forma diferencial) [1, 72]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_D \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

onde

$$H_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_0 c^2 = i\hbar c \sum_{i=1}^2 \alpha_i \partial_i + \beta m_0 c^2, \quad \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (2.2)$$

sendo H_D o Hamiltoniano de Dirac para uma partícula livre de massa de repouso m_0 , os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ e β são as matrizes de Dirac, c é a velocidade da luz no vácuo, \hbar é a constante de Planck reduzida ($\hbar \equiv h/2\pi$) e $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é o spinor de Dirac de duas componentes, no qual é expresso por uma matriz coluna de dois elementos. Como estamos trabalhando no espaço-tempo de Minkowski (2 + 1)-dimensional, as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β são escritas diretamente em termos das matrizes de spin de Pauli, ou seja, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}$ e $\beta = \sigma_3$ [73]. Dessa forma, implica que as matrizes de Dirac obedecem à uma álgebra semelhante ao das matrizes de Pauli. De modo geral, as matrizes de Dirac satisfazem as seguintes propriedades [1, 2, 3, 5]:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} I_{2 \times 2}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.3)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad (2.5)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I_{2 \times 2}, \quad (2.6)$$

onde $\{, \}$ é o anticomutador, δ_{ij} é tensor métrico do espaço euclidiano (delta de Kronecker), $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2 e os índices $i, j = 1, 2$ referem-se aos eixos x e y , respectivamente. É importante destacar também que as matrizes de Pauli (ou Dirac) satisfazem a propriedade: $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$), onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita [74].

Vemos que além da ED possuir derivadas de primeira ordem no tempo e no espaço, colocando assim tempo e espaço em pé de igualdade na MQR (o que não acontece na EKG), está escrita numa forma elementar tipo-ES. Aliás, diferentemente do procedimento feito pelos físicos O. Klein e W. Gordon para obter uma equação de onda relativística, no qual apenas substituíram os operadores momento $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ e energia $\hat{E} = i\hbar\partial/\partial t$ na seguinte relação energia-momento (relação de dispersão relativística): $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$, Dirac partiu de um Hamiltoniano linear em $\mathbf{p}c$ e $m_0 c^2$. Porém, é apenas uma questão de pequeno trabalho algébrico mostrar que elevando H_D ao quadrado, dado em (2.2), obtêm-se a relação energia-momento, é claro, se e somente se as propriedades (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) forem satisfeitas [1, 75].

Por outro lado, a ED pode ser escrita numa forma mais compacta do ponto de vista relativístico, ou seja, numa forma covariante (forma tensorial). Em geral, isso é feito através de uma definição adequada para as novas matrizes de Dirac. Em especial, essas novas matrizes são chamadas de matrizes gama e são definidas como: $\gamma^0 \equiv \beta$ e $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ ($i = 1, 2$). Desse modo, por meio de uma pequena manipulação algébrica, a Eq. (2.1) passa a ser reescrita como [1]:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m_0 c)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2), \quad (2.7)$$

onde $p_\mu = i\hbar\partial_\mu = i\hbar\partial/\partial x^\mu$ é o operador momento tridimensional e as matrizes γ^μ satisfazem a seguinte relação de anticomutação da álgebra de Clifford: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_{2 \times 2}$, sendo $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski. Diferentemente do Hamiltoniano (2.2), omitimos o símbolo do somatório em (2.7), neste caso, usamos a convenção de soma de Einstein. Além disso, a ED covariante tem a vantagem de satisfazer as invariâncias de Lorentz, CPT e gauge (calibre) de forma mais rápida e explícita do que na forma diferencial dada em (2.1) [1, 5, 74]. Contudo, em virtude da assinatura do tensor métrico, temos as seguintes relações entre os tensores contravariantes e covariantes:

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}), \quad (2.8)$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = (ct, \mathbf{r}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

$$p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu = \left(\frac{\hat{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{\hat{E}}{c}, -\mathbf{p} \right). \quad (2.10)$$

Com respeito as novas matrizes de Dirac, as matrizes γ^i também devem satisfazer:

$$(\gamma^i)^\dagger \gamma^i = I_{2 \times 2}, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad (\gamma^i)^2 = -I_{2 \times 2}, \quad \gamma^i = -\gamma_i, \quad (i = 1, 2). \quad (2.11)$$

Na literatura, existe outra matriz gama que é de particular interesse em alguns problemas de MQR, em específico, associada à quiralidade das partículas. De acordo com as Refs. [1, 70], essa matriz é simbolizada por γ^5 e é normalmente chamada de operador quiralidade. Por exemplo, em $(3 + 1)$ -dimensões, γ^5 é definida em termos das outras quatro matrizes gama na forma $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Além disso, γ^5 deve satisfazer as seguintes propriedades [1]:

$$\gamma^5 = \gamma_5, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = I_{4 \times 4}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Agora, com relação ao espaço-tempo de Minkowski $(2+1)$ -dimensional, o operador quiralidade é definido como $\gamma_5 \equiv \sigma_1$ [70, 76]. Do ponto de vista físico, a quiralidade é uma propriedade extremamente sutil de ser definida, exceto para o caso de férmions sem massa ($m_0 = 0$), onde quiralidade e helicidade são equivalentes [1, 73]. Nesse caso, a quiralidade é definida como sendo a projeção do spin da partícula na direção do momento (ou movimento). No entanto, para o caso de férmions massivos, a quiralidade só faz sentido ser definida no regime ultra-relativístico onde a massa das partículas torna-se insignificante ($E \cong pc \gg m_0c^2$) [77, 8]. Consequentemente, somente nesse regime que os spinors *left-handed* e *right-handed* correspondem a helicidade negativa (spin down) e positiva (spin up), respectivamente [78, 77].

Antes de finalizarmos esta seção, falaremos agora de maneira sucinta como a ED solucionou os três principais “problemas” gerados pela EKG. Antes de tudo, a primeira tentativa de unir MQ com a TRR foi feita por Klein e Gordon, em 1927, no qual se mostrou “problemática”. Então, incluindo a interação eletromagnética, as soluções da ED estavam de acordo com o espectro de energia do átomo de hidrogênio relativístico e não-relativístico [1, 75]. Em segundo lugar, tanto a ED quanto a EKG admitiam estados de energia negativa ($E < 0$), contudo, foi Dirac o primeiro a interpretar corretamente esses estados (“mar de Dirac”), no qual levou posteriormente à previsão das antipartículas (“partículas com $E < 0$ ”). Na verdade, não faz sentido algum falar de partículas com energia negativa, mas sim, de antipartículas com energia positiva ($E > 0$) [75]. Por último, a equação de continuidade gerada a partir da ED apresentava uma densidade de probabilidade definida positiva, implicando com isso uma perfeita harmonia com um dos postulados da MQ [75]. Em particular, esta equação de continuidade é dada como segue [1, 75]:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.13)$$

onde $\varrho = \Psi^\dagger \Psi = \sum_{i=1}^2 \Psi_i^* \Psi_i \geq 0$ é a densidade de probabilidade e $\mathbf{J} = c\Psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \Psi$ é o vetor densidade de corrente de probabilidade. Vale a pena mencionar que esses três problemas são todos aparentes, na realidade, não se sabia na época que a EKG era apropriada somente para descrever partículas de spin-0. A título de ilustração, a primeira partícula de spin-0: o pión, só foi descoberto em 1947, numa equipe no qual participava o físico brasileiro Cesar Lattes [75].

2.2 O sistema Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico

A ED covariante que governa a dinâmica quântica relativística de uma partícula eletricamente carregada na presença de um campo eletromagnético é escrita via acoplamento mínimo na seguinte forma [1, 79]:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m_0 c) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2), \quad (2.14)$$

onde $\Pi_\mu = p_\mu - qA_\mu$ é o operador momento cinético, q é a carga elétrica da partícula de Dirac, $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (A_0/c, -\mathbf{A})$ é o campo eletromagnético externo e A_0 e \mathbf{A} são os potenciais escalar e vetor, respectivamente.

Para prosseguir em diante, apresentaremos agora os seguintes operadores projeção *left-handed* e *right-handed* [70, 71, 78]:

$$P_{L,R} \equiv \frac{1}{2}(I_{2 \times 2} \mp \gamma^5), \quad (\gamma^5 = \sigma_1), \quad (2.15)$$

no qual satisfazem as propriedades

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad \{P_{L,R}, P_{R,L}\} = 0, \quad P_L + P_R = I_{2 \times 2}, \quad P_{L,R} \gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R,L}. \quad (2.16)$$

Então, aplicando os operadores $P_{L,R}$ na Eq. (2.14), obtemos:

$$\gamma^\mu \Pi_\mu \Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t) = m_0 c \Psi_{L,R}(\mathbf{r}, t), \quad (\Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t) \neq \Psi_{L,R}(\mathbf{r}, t)), \quad (2.17)$$

onde $\Psi_L(\mathbf{r}, t) \equiv P_L \Psi(\mathbf{r}, t)$ e $\Psi_R(\mathbf{r}, t) \equiv P_R \Psi(\mathbf{r}, t)$ são os spinores *left-handed* e *right-handed*, respectivamente. Vemos na Eq. (2.17) que o operador $\gamma^\mu \Pi_\mu$ converte o spinor “destro” no spinor “canhoto”, e vice-versa. Portanto, usando a Eq. (2.17) e definindo o spinor de Dirac como uma superposição de $\Psi_L(\mathbf{r}, t)$ e $\Psi_R(\mathbf{r}, t)$, ou seja, $\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi_L(\mathbf{r}, t) + \Psi_R(\mathbf{r}, t)$, temos:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{m_0 c} (\gamma^\mu \Pi_\mu + m_0 c) \Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Assim sendo, obtemos a partir de (2.18) e (2.14) uma ED quadrática para $\Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t)$ na forma [5, 71, 80]:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu - m_0 c)(\gamma^\mu \Pi_\mu + m_0 c) \Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2), \quad (2.19)$$

ou ainda

$$(\gamma^0 \Pi_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Pi} - m_0 c)(\gamma^0 \Pi_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Pi} + m_0 c) \Psi_{R,L}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.20)$$

onde

$$\Pi_0 = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{qA_0}{c} \right), \quad \boldsymbol{\Pi} = (\mathbf{p} - q\mathbf{A}), \quad (2.21)$$

$$\psi_R(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(\mathbf{r}, t) \\ \chi_\uparrow(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \psi_L(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_\downarrow(\mathbf{r}, t) \\ \chi_\downarrow(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Vale a pena destacar que no caso onde $q = 0$, a Eq. (2.20) é reduzida à EKG [1]. Neste caso, vemos que a ED quadrática resulta na EKG, em outras palavras, a ED (equação mais restritiva) é a raiz quadrada da EKG (equação menos restritiva) [31, 71]. Contudo, essa afirmação só é verdadeira no caso da ED livre (sem interações). Por outro lado, fazendo uma analogia com o caso $(3 + 1)$ -dimensional, no qual o spinor de Dirac de quatro componentes acomoda os dois estados de spin para a partícula e a antipartícula, podemos interpretar $\varphi_\uparrow(\mathbf{r}, t)$ e $\chi_\uparrow(\mathbf{r}, t)$ como sendo as componentes associadas a uma partícula e antipartícula com spin up e $\varphi_\downarrow(\mathbf{r}, t)$ e $\chi_\downarrow(\mathbf{r}, t)$ como sendo as componentes associadas a uma partícula e antipartícula com spin down, respectivamente [1, 5, 75].

Adotando agora o sistema de coordenadas polares (ρ, θ, t) onde o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ é escrito na forma $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -\rho^2)$ [81], temos:

$$\mathbf{p}(\rho, \theta) = -i\hbar \left(\hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{A}(\rho, \theta) = A_\theta \hat{e}_\theta, \quad (2.24)$$

sendo $\hat{e}_\rho = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y$ e $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y$ os vetores unitários polares, ρ é a coordenada radial e θ é o ângulo polar. Aqui, estamos assumindo explicitamente que a componente radial do potencial vetor é nula ($A_\rho = 0$). Então, usando as relações (2.23) e (2.24) e considerando apenas o spinor *right-handed*, a Eq. (2.20) torna-se:

$$A^- A^+ \Psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (2.25)$$

onde os operadores A^\mp são definidos na forma:

$$A^\mp \equiv \left[\gamma^0 \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{V(\rho)}{c} \right) + \gamma^\rho \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \gamma^\theta \left(\frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + qA_\theta \right) \mp m_0 c \right], \quad (2.26)$$

com

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^\rho = \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{e}_\rho = \gamma^1 \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta, \quad \gamma^\theta = \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{e}_\theta = -\gamma^1 \sin \theta + \gamma^2 \cos \theta, \quad (2.27)$$

sendo $V(\rho) = qA_0$ o potencial de Coulomb 2D.

Vemos que as matrizes rotacionadas γ^ρ e γ^θ em (2.26) dificulta a nossa busca pelas soluções exatas da Eq. (2.25). Contudo, podemos contornar esse problema através de uma transformação de similaridade dada por um operador unitário $U(\theta) = e^{-i\sigma_3 \theta/2}$, onde $U(\theta)$ rotaciona os eixos coordenados cartesianos em torno do eixo- z por um ângulo θ [81, 74]. Para ser específico, este operador unitário tem a função de transformar as matrizes rotacionadas nas

matrizes de fixas (no plano cartesiano) na seguinte forma [81]:

$$U^{-1}(\theta)\gamma^\rho U(\theta) = \gamma^1, \quad U^{-1}(\theta)\gamma^\theta U(\theta) = \gamma^2. \quad (2.28)$$

Portanto, usando as relações (2.28) e o fato de que $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) = (-\gamma_1, -\gamma_2)$, sendo $\gamma_1 = \sigma_3\sigma_1$, $\gamma_2 = \sigma_3\sigma_2$ e $\gamma^0 = \gamma_0 = \sigma_3$ [1, 81], podemos reescrever a Eq. (2.25) como:

$$B^- B^+ \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (2.29)$$

onde

$$B^\mp \equiv \left[\sigma_3 \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{V(\rho)}{c} \right) + \sigma_2 \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + i\sigma_1 \left(\frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + qA_\theta + \frac{\hbar\sigma_3}{2\rho} \right) \mp m_0c \right], \quad (2.30)$$

$$\psi_R(\rho, \theta, t) \equiv U^{-1}(\theta)\Psi_R(\rho, \theta, t), \quad (2.31)$$

sendo $\psi_R(\rho, \theta, t)$ e $\Psi_R(t, \rho, \theta)$ os spinores do sistema rotacionado e cartesiano fixo, respectivamente. Em particular, esses dois spinores satisfazem as seguintes condições de periodicidade: $\Psi_R(\rho, \theta + 2\pi, t) = \Psi_R(\rho, \theta, t)$ e $\psi_R(\rho, \theta + 2\pi, t) = -\psi_R(\rho, \theta, t)$ [81].

Vamos agora considerar as configurações dos potenciais que caracterizam o sistema ABC, ou seja, do potencial vetor do efeito AB e do potencial de Coulomb 2D. Explicitamente, essas configurações são dadas na seguinte forma [9, 10, 12, 74]:

$$\mathbf{A}(\rho, \theta) = A_\theta \hat{e}_\theta = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \hat{e}_\theta, \quad (\Phi > 0), \quad (2.32)$$

$$V(\rho) = qA_0(\rho) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho}, \quad (q = -e), \quad (2.33)$$

onde $\Phi = \pi a^2 B$ é o fluxo magnético dentro de um solenóide impenetrável extremamente longo de comprimento L e raio a ($a \ll L$) e carregado uniformemente com uma carga total $Q = Ze$, sendo B a intensidade do campo magnético uniforme dentro do solenóide, Z é o número atômico e $e > 0$ é a carga elétrica elementar. Em particular, podemos considerar o sistema ABC como sendo um sistema no qual uma partícula (elétron) “orbita” em torno de um solenóide carregado (Ver Apêndice A), e não como sendo um átomo tipo-hidrogênio com Z prótons submetido a um fluxo magnético Φ , pois uma vez que a região dentro do solenóide é inacessível, tal núcleo atômico é inexistente. Porém, para $\Phi = 0$, temos agora um átomo tipo-hidrogênio com Z prótons no núcleo, ou, o átomo de hidrogênio ($Z = 1$). Além disso, é oportuno mencionar que um solenóide com as características mostradas aqui gera um potencial escalar dado por $A_0 = Ze/4\pi\epsilon_0\rho$ para $\rho \gg L$ [79], conseqüentemente, obtemos a partir disso um potencial de Coulomb dado por (2.33).

Assim, usando as configurações (2.32) e (2.33), transformamos a Eq. (2.29) na

seguinte equação diferencial linear homogênea de segunda ordem:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\hbar^2} - \frac{\Gamma}{\hbar} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\Lambda}{\rho} - \Theta \right] \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (2.34)$$

onde os operadores Γ^2 , Γ , Λ e Θ são definidos como segue:

$$\Gamma^2 \equiv \left[\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 \right] = \begin{pmatrix} \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 & 0 \\ 0 & \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\Gamma \equiv \left[\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \sigma_3 - iZ\alpha\hbar \sigma_1 \right] = \begin{pmatrix} \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) & -iZ\alpha\hbar \\ -iZ\alpha\hbar & -\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\Lambda \equiv \left(\frac{2iZ\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \Theta \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right), \quad (2.37)$$

sendo $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \cong 1/137$ a constante de estrutura fina, $\Phi_0 \equiv h/e$ é o quantum de fluxo magnético e $L_z = -i\hbar\partial/\partial\theta$ é a projeção do operador momento angular orbital \mathbf{L} no eixo- z .

Assumindo o seguinte ansatz para o spinor de Dirac [1, 81]:

$$\psi_R(\rho, \theta, t) = \frac{e^{i(m_l\theta - Et/\hbar)}}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} \phi^+(\rho) \\ \phi^-(\rho) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

a Eq. (2.34) fica compactada na forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{\rho^2} + \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] \phi^s(\rho) = 0, \quad (s = \pm 1), \quad (2.39)$$

onde

$$\gamma \equiv \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2} > 0, \quad \rho_0 \equiv \frac{2Z\alpha E}{\hbar c}, \quad (2.40)$$

sendo $\phi^s(\rho)$ funções radiais reais, $m_l = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots$ é o número quântico magnético orbital e a quantidade E é a energia total relativística da partícula, no qual descreve a evolução temporal do estados estacionários do sistema [1, 10]. Vale a pena ressaltar que o número quântico γ surge devido às seguintes equações de autovalores:

$$\Gamma^2 \psi_R(\rho, \theta, t) = \hbar^2 \gamma^2 \psi_R(\rho, \theta, t), \quad \Gamma \psi_R(\rho, \theta, t) = s\hbar \gamma \psi_R(\rho, \theta, t), \quad (s = \pm 1). \quad (2.41)$$

Contudo, vale a pena também ressaltar que elevando o operador Γ em (2.36) ao quadrado, obtemos justamente (2.35). Caso contrário, provavelmente dificultaria em muito a nossa busca pelas soluções exatas do sistema ABC.

Para resolver a Eq. (2.39), vamos introduzir agora uma nova variável adimensional dada por $z = 2\eta\rho$, onde $\eta \equiv \sqrt{m_0^2 c^4 - E^2}/\hbar c$, sendo $m_0 c^2 > E$ (condição para a existência de estados ligados relativísticos) [1, 10, 12]. Assim, fazendo uma mudança de variável na equação

radial (2.39), obtemos:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{z^2} + \frac{z_0}{z} - \frac{1}{4} \right] \phi^s(z) = 0, \quad (2.42)$$

onde

$$z_0 \equiv \frac{\rho_0}{2\eta}. \quad (2.43)$$

De acordo com as Refs. [1, 10], um procedimento normalmente usado para se determinar as soluções analíticas (ou exatas) de uma dada equação diferencial consiste em analisar o comportamento assintótico da equação para $z \rightarrow 0$ e $z \rightarrow \infty$. Sendo assim, quando $z \rightarrow 0$, a Eq. (2.42) fica escrita como:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{z^2} \right] \phi^s(z) = 0, \quad (2.44)$$

cujas soluções gerais são:

$$\phi^+(z) = c_1 z^\gamma + c_2 z^{-\gamma+1}, \quad (s = +1), \quad (2.45)$$

$$\phi^-(z) = c_3 z^{-\gamma} + c_4 z^{\gamma+1}, \quad (s = -1), \quad (2.46)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias. Agora, quando $z \rightarrow \infty$, a Eq. (2.42) fica escrita como:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} \right] \phi^s(z) = 0, \quad (2.47)$$

cujas soluções gerais são:

$$\phi^s(z) = c_5 e^{z/2} + c_6 e^{-z/2}, \quad (2.48)$$

onde c_5 e c_6 são constantes arbitrárias.

Porém, como $\gamma > 0$ [12, 23, 24] e $\phi^s(z)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno para ser uma solução fisicamente aceitável (solução normalizável):

$$\phi^s(z \rightarrow 0) = 0, \quad \phi^s(z \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.49)$$

implica automaticamente em $c_2 = c_3 = c_5 = 0$. Sendo assim, uma solução admissível para a Eq. (2.42) toma a seguinte forma assintótica:

$$\phi^s(z) = C^s z^{\gamma+(1-s)/2} e^{-z/2} R^s(z), \quad (2.50)$$

onde C^s são constantes de normalização e $R^s(z)$ são funções desconhecidas a serem determinadas. Vale mencionar que a primeira condição de contorno em (2.49) implica que na origem o spinor de Dirac também é nulo, portanto, a partícula não existe nessa região. Em particular,

essa situação está de total acordo com o fato do solenóide do sistema ABC ser impenetrável.

Substituindo agora a função (2.50) na Eq. (2.42), obtemos uma equação diferencial para $R^s(z)$ na forma:

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (b^s - z) \frac{d}{dz} - a^s \right] R^s(z) = 0, \quad (2.51)$$

onde

$$b^s \equiv (2\gamma + 1 - s), \quad a^s \equiv \left(\frac{b^s}{2} - z_0 \right). \quad (2.52)$$

Não é difícil notar que a Eq. (2.51) tem a forma de uma equação hipergeométrica confluyente, cuja solução é escrita em termos das funções hipergeométricas confluentes do primeiro tipo ${}_1F_1(a^s, b^s, z)$ e segundo tipo $U(a^s, b^s, z)$ [82, 83]. Entretanto, como $b^s \geq 1$, implica que a solução $U(a^s, b^s, z)$ deve ser rejeitada por ser irregular na origem [82]. Além disso, como $\phi^s(z)$ deve ser uma solução normalizável, implica que a função ${}_1F_1(a^s, b^s, z)$ deve ser um polinômio de grau N , conseqüentemente, o parâmetro a^s deve ser igual a um inteiro não positivo, ou seja, $a^s = -N$, onde $N = 0, 1, 2, \dots$. Dessa forma, usando essa imposição e as expressões (2.52), (2.43) e (2.40), obtemos o seguinte espectro discreto de energia de uma partícula de Dirac sob a influência do sistema ABC [23, 24]:

$$E_{n,m_l} = +m_0c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - |m_l| - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2} \right]^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.53)$$

onde $n \equiv N + |m_l| + 1/2 = 1, 2, 3, \dots$ é o famoso número quântico principal. Vemos que do espectro de energia (2.53) depende explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC. Mais importante que isso, as energias da partícula dependem claramente da intensidade do campo magnético B no interior do solenóide, mesmo a partícula estando numa região onde $B = 0$. Por outro lado, o sinal negativo no espectro de energia (2.53) foi excluído porque para um solenóide carregado positivamente ($Z\alpha > 0$), os estados de energia negativa ($E < 0$) não satisfazem a seguinte condição: $z_0 = N + b^+/2 > 0$ (condição de quantização). Dessa forma, usamos o parâmetro s com o sinal positivo ($s = +1$), no qual está associado ao estado da partícula. Diante disso, implica que somente partículas com energia positiva podem interagir com o sistema ABC. Com respeito à máxima energia permitida para a partícula: a energia de repouso $E_0 = +m_0c^2$, no qual corresponde ao limite do contínuo ou clássico do espectro de energia (2.53), é obtida quando temos um fluxo magnético intenso ($\Phi \rightarrow \infty$), ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$) ou números quânticos muito grandes ($n, m_l \rightarrow \infty$) (Princípio da correspondência de Bohr). Vemos a partir disso que o fluxo magnético e os números quânticos tem como função aumentar os valores das energias do sistema. Além disso, a medida que Z

aumenta, fazendo com que o termo $(Z\alpha)$ se aproxima cada vez mais de $(m_l + \Phi/\Phi_0)$, os valores do espectro de energia diminuem substancialmente.

Comparando o espectro de energia (2.53) com a literatura, vemos que na ausência do efeito AB ($\Phi = 0$), obtemos o espectro de energia de uma partícula interagindo com o campo de Coulomb, ou, do átomo de hidrogênio relativístico 2D ($Z = 1$) [12]. No entanto, na ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$), mesmo existindo o efeito AB ($\Phi \neq 0$), não temos mais um espectro discreto de energia, mais sim a energia de repouso da partícula. Este resultado surge devido a coordenada radial do nosso problema ser variável ($\rho=\text{var.}$), caso tivéssemos um raio constante ($\rho=\text{const.}$), teríamos um espectro discreto mesmo para $Z = 0$ (Ver apêndice A). Verificamos também que o espectro de energia (2.53) com $\Phi = 0$ é idêntico ao espectro de energia do átomo piônico 3D obtido pela EKG [1]. Agora, fazendo uma comparação com o caso do átomo de hidrogênio relativístico 3D, verificamos que além de ambos os espectros de energia serem semelhantes, os valores das energias para o caso 3D são ligeiramente maiores do que para o caso 2D. De fato, isso acontece porque diferentemente de m_l , o segundo número quântico no caso 3D é um inteiro, isto é, $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, sendo κ chamado de número quântico spin-orbita [1, 60]. Além disso, verificamos que por consequência do fluxo magnético Φ em (2.40), o número atômico Z presente em γ admite valores maiores do que no caso 3D ($Z > 137$). Por exemplo, considerando $m_l > 0$ e $\Phi = \Phi_0/2$, o espectro de energia (2.53) fica exatamente idêntico ao do caso 3D. Por outro lado, quando temos $(Z\alpha) > (m_l + \Phi/\Phi_0)$ (campo de Coulomb forte), as energias em (2.53) tornam-se imaginárias e o Hamiltoniano de Dirac torna-se anti-Hermitiano, semelhante ao caso 3D [1]. De acordo com as Refs. [1, 85], este estranho resultado é chamado de colapso do vácuo ou problema supercrítico de Coulomb. Então, para que o Hamiltoniano de Dirac seja Hermitiano e o espectro de energia seja real, é obrigatório que os parâmetros $Z\alpha$ satisfaçam a condição: $(Z\alpha) < (m_l + \Phi/\Phi_0)$. Embora a condição $(Z\alpha) = (m_l + \Phi/\Phi_0)$ também implica em energias reais, não admitimos esta possibilidade, uma vez que isso resulta em $E = 0$ para $n = 1$ e $|m_l| = 1/2$, ou seja, a partícula não possui energia alguma no estado fundamental (estado de menor energia), o que é fisicamente um absurdo, já que a energia do estado fundamental não pode ser zero [1, 10].

Antes de finalizarmos esta seção com a forma geral do spinor de Dirac de duas componentes para os estados ligados do sistema, faremos agora uma discussão sobre o espectro de energia (2.53). Nosso objetivo com essa discussão é analisar a influência de Z e Φ nos níveis de energia da partícula. Na Tabela 1, encontram-se os valores das energias para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 1: Energias relativísticas do sistema ABC para o estado fundamental e primeiro estado excitado.

Z	$E_{1,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{1,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	0.9999881600	0.9999957376	0.9998934356	0.9999881595
2	0.9999526394	0.9999829500	0.9995736744	0.9999526305
3	0.9998934356	0.9999616362	0.9990405115	0.9998933901
4	0.9998105444	0.9999317940	0.9982936051	0.9998104005
5	0.9997039598	0.9998934205	0.9973324750	0.9997036084

Como podemos observar a partir da Tabela 1, além das energias do primeiro estado excitado serem maiores do que as do estado fundamental, ambas diminuem de valores à medida que Z aumenta. Vemos ainda que o fluxo magnético Φ tem a função de aumentar os valores das energias (como deve ser). A título de informação, a influência de Φ é de tal ponto que as energias do estado fundamental com $\Phi = \Phi_0$ são ligeiramente maiores do que as do primeiro estado excitado com $\Phi = 0$. Em particular, verificamos que o valor máximo de Z (com $m_l = 1/2$) para que as energias não tornam-se imaginárias é de $Z = 205$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z = 68$ para $\Phi = 0$.

Daqui por diante, vamos dedicar nossa atenção na forma original do spinor de Dirac para os estados ligados do sistema. Então, através dos operadores (2.26) e da relação (2.31), o spinor (2.18) fica escrito na forma:

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0c} A^+ U(\theta) \psi_R(\rho, \theta, t), \quad (2.54)$$

ou melhor

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0c} U(\theta) U^{-1}(\theta) A^+ U(\theta) \psi_R(\rho, \theta, t). \quad (2.55)$$

Obviamente, o spinor (2.55) é reescrito em termos dos operadores (2.30) como:

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0c} U(\theta) B^+ \psi_R(\rho, \theta, t). \quad (2.56)$$

Substituindo a variável $z = 2\eta\rho$ nas funções radiais (2.45) e expressando por conveniência as funções hipergeométricas confluentes do primeiro tipo em termos dos polinômios de Laguerre generalizados [5, 82, 83], temos:

$$\psi_R(\rho, \theta, t) = e^{i(m_l\theta - Et/\hbar)} \begin{pmatrix} D^+ \rho^{\gamma-1/2} e^{-\eta\rho} L_N^{2\gamma-1}(2\eta\rho) \\ D^- \rho^{\gamma+1/2} e^{-\eta\rho} L_N^{2\gamma+1}(2\eta\rho) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

onde

$$D^s \equiv \frac{C^s(2\eta)^{\gamma+(1-s)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (s = \pm 1). \quad (2.58)$$

Portanto, substituindo as configurações (2.32), (2.33) e o spinor (2.57) em (2.56), obtemos explicitamente a forma geral do spinor de Dirac:

$$\Psi_{N,m_l}(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} e^{i[(m_l-1/2)\theta - Et/\hbar]} [F^+(\rho) + iG^-(\rho)] \\ e^{i[(m_l+1/2)\theta - Et/\hbar]} [F^-(\rho) - iG^+(\rho)] \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

onde

$$F^s(\rho) \equiv D^s \rho^{\gamma-s/2} e^{-\eta\rho} L_N^{2\gamma-s} (2\eta\rho) \left[\frac{s}{m_0 c} \left(\frac{E}{c} + \frac{Z\alpha\hbar}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (2.60)$$

$$G^s(\rho) \equiv \frac{\hbar D^s}{m_0 c} \rho^{\gamma-s/2} e^{-\eta\rho} \left[L_N^{2\gamma-s} (2\eta\rho) \left(\eta + \frac{(m_l s - \frac{1-s}{2} - \gamma + s \frac{\Phi}{\Phi_0})}{\rho} \right) + L_{N-1}^{2\gamma+1-s} (2\eta\rho) \right]. \quad (2.61)$$

Deve-se observar aqui que nosso spinor de Dirac incorpora simultaneamente os valores positivos e negativos do número quântico m_l , o que não acontece, por exemplo, na Ref. [81]. Do ponto de vista prático, uma das vantagens de termos um spinor com essa característica é a possibilidade de calcular os observáveis físicos associados a partícula de forma mais rápida e direta do que se tivéssemos dois spinores, um para cada valor de m_l .

2.3 O sistema Aharonov-Bohm-Coulomb não-relativístico

Nesta seção, vamos fazer uma discussão sobre o limite não-relativístico de nossos resultados, em especial, da Eq. (2.39) e do espectro de energia (2.53). De acordo com a literatura [1], esse limite é obtido considerando que a maior parte da energia total do sistema esteja concentrada na energia de repouso da partícula, ou seja, $E \cong \varepsilon + m_0 c^2$, onde ε é o espectro de energia não-relativístico para os estados ligados e satisfaz a condição $\varepsilon \ll m_0 c^2$. Além disso, para uma descrição mais completa, também temos que assumir um campo de Coulomb fraco que satisfaz a condição $|qA_0| \ll m_0 c^2$ ou $Z\alpha \ll 1$ ($Z \ll 137$) [1]. Então, aplicando essas informações na Eq. (2.39), obtemos a seguinte ES para uma partícula sob a influência do sistema ABC [19]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{(m + \frac{\Phi}{\Phi_0})^2}{\rho^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \right] f^+(\rho) = \varepsilon f^+(\rho), \quad (2.62)$$

onde $m \equiv m_l - 1/2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $f^+(\rho) = \phi^+(\rho)/\sqrt{\rho}$. Neste caso, usamos o parâmetro s com o sinal positivo ($s = +1$), no qual representa o estado da partícula (com spin up). Além disso, vemos que na ausência do efeito AB ($\Phi = 0$), obtemos a ES para uma partícula interagindo com o campo de Coulomb, ou, para o átomo de hidrogênio 2D ($Z = 1$) [13]. Por outro lado, na ausência do potencial de Coulomb ($Z = 0$), obtemos a ES na presença do efeito AB (neste caso, podemos estudar o espalhamento AB não-relativístico) [84].

Para analisarmos o limite não-relativístico do espectro de energia (2.53), devemos utilizar uma expansão em série de Taylor centrada na origem. Então, definindo $x \equiv (Z\alpha)^2$ na expressão (2.53), podemos escrever o espectro de energia não-relativístico como segue:

$$\varepsilon(x) = m_0c^2 f(x) - m_0c^2, \quad (2.63)$$

onde

$$f(x) = \left[1 + \frac{x}{\left[n - |m_l| - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - x} \right]^2} \right]^{-1/2}. \quad (2.64)$$

Expandindo $f(x)$ em uma série de Taylor de primeira ordem, obtemos:

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x, \quad (2.65)$$

ou melhor:

$$f(x) \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{\left(n - \frac{1}{2} - Q \right)^2}, \quad (2.66)$$

onde $Q \equiv |m_l| - |m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}|$ é um termo chamado de “defeito quântico” ou correção de Rydberg [19].

Portanto, substituindo (2.66) em (2.63), obtemos explicitamente o seguinte espectro de energia de uma partícula sob a influência do sistema ABC [19, 24]:

$$\varepsilon_{n,m_l} = - \frac{Z^2 \bar{\varepsilon}}{\left(n - \frac{1}{2} - Q \right)^2}, \quad (2.67)$$

onde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \alpha^2 \cong 13.6 \text{ eV}. \quad (2.68)$$

O sinal negativo em (2.67) significa que quanto maiores os valores dos números quânticos n e m_l , maior será a energia total da partícula (análogo ao caso relativístico). Em particular, esse espectro de energia fornece as chamadas energias de ligação da partícula, ou seja, as energias necessárias para que a partícula fique confinada (“orbitando”) ao redor do solenóide. De acordo com a literatura, os valores absolutos dessas energias, dado por $|\varepsilon_{n,m_l}|$, são chamadas de energias de ionização da partícula, ou seja, as energias necessárias para ionizar o sistema (tornar a partícula livre) [1, 10]. Com respeito ao número atômico Z , vemos explicitamente que os valores das energias de ionização aumentam a medida que Z aumenta, como deveria. Além disso, vemos que para $m_l > 0$, temos $Q = \Phi_0/\Phi_0$, ou seja, o espectro de energia (2.67) não depende do número quântico m_l . Por outro lado, para $m_l < 0$, temos $Q \neq \Phi_0/\Phi_0$, logo, neste caso o espectro de energia depende de m_l . Quanto ao limite do contínuo (clássico) onde $\varepsilon \rightarrow 0$,

é obtido quando temos um fluxo magnético intenso ($\Phi \rightarrow \infty$), ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$) ou números quânticos muito grandes ($n, m_l \rightarrow \infty$). Vale ressaltar que nesse limite a partícula é livre e os níveis de energia do sistema ficam suficientemente próximos um do outro. Agora, comparando o espectro de energia (2.67) com a literatura, vemos que na ausência do efeito AB ($\Phi = 0$), obtemos o espectro de energia (fórmula de Bohr) de uma partícula interagindo com o campo de Coulomb, ou, do átomo de hidrogênio 2D ($Z = 1$) [13]. Por último e não menos importante, fazendo $n = 1$, $m_l > 0$ e $Z = 137$ em (2.67), obtemos $|\varepsilon_1| \cong 0.113$ MeV, ou seja, a energia do estado fundamental é da mesma ordem de grandeza que a energia de repouso da partícula ($E_0 \cong 0.511$ MeV), logo, podemos dizer que a condição $Z \ll 137$ é uma condição mais do que suficiente para que o espectro de energia (2.67) seja não-relativístico.

Antes de encermos esta seção, faremos agora uma pequena discussão sobre o espectro de energia (2.67). Contudo, podemos fazer essa discussão através de dois caminhos diferentes, porém, completamente equivalentes. O primeiro baseia-se na substituição dos valores de n , m_l , Z e Φ no espectro de energia (2.67), o segundo, baseia-se na aplicação da prescrição $E \cong \varepsilon + m_0c^2$ nos resultados da Tabela 1. Por simplicidade, seguiremos pelo segundo caminho. Dessa forma, na Tabela 2 encontram-se os valores das energias de ligação da partícula para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 2: Energias não-relativísticas do sistema ABC para o estado fundamental e primeiro estado excitado.

Z	$\varepsilon_{1,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	-0.0000118400	-0.0000042624	-0.0001065644	-0.0000118405
2	-0.0000473606	-0.0000170500	-0.0004263256	-0.0000473695
3	-0.0001065644	-0.0000383638	-0.0009594885	-0.0001066099
4	-0.0001894556	-0.0000682060	-0.0017063949	-0.0001895995
5	-0.0002960402	-0.0001065795	-0.0026675250	-0.0002963916

Como podemos observar a partir da Tabela 2, além das energias do primeiro estado excitado serem maiores do que as do estado fundamental, ambas diminuem de valores à medida que Z aumenta. Vemos ainda que o fluxo magnético Φ tem como função aumentar os valores das energias de tal ponto que as energias do estado fundamental com $\Phi = \Phi_0$ são ligeiramente maiores do que as do primeiro estado excitado com $\Phi = 0$. Além disso, embora as energias da Tabela 2 estejam expressas em termos da energia de repouso, vemos que a condição $|\varepsilon| \ll m_0c^2$ ainda permanece satisfeita.

3 O OSCILADOR DE DIRAC (2+1)-DIMENSIONAL SOB A INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB

Neste capítulo, apresentaremos detalhadamente a origem física do Hamiltoniano do OD, bem como seu espectro de energia e limite não-relativístico. Logo em seguida, faremos um estudo aprofundado sobre a dinâmica quântica relativística e não-relativística do OD na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Em particular, este estudo tem como objetivo principal investigar as soluções de estado ligado do sistema. Portanto, para alcançar estas soluções, iremos aplicar os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* no OD. Por último, determinaremos explicitamente o spinor de Dirac, as energias e frequências angulares permitidas do OD para o estado fundamental e primeiro estado excitado.

3.1 O Hamiltoniano do oscilador de Dirac

Embora não exista um oscilador harmônico simples (OHS) perfeito na natureza, qualquer movimento oscilatório com pequenas amplitudes de oscilação se comporta aproximadamente como um OHS [10]. Apesar disso, o OHS é considerado um dos modelos mais importantes e eficazes da física, seja do ponto de vista teórico ou experimental, seja no mundo clássico ou quântico [86]. Além do mais, o fato do Hamiltoniano do OHS ser uma função quadrática no momento \mathbf{p} e nas coordenadas espaciais \mathbf{r} , ou seja, $H_{OHS} = \mathbf{p}^2/2m + m\omega^2\mathbf{r}^2/2$, tal modelo apresenta diversas simetrias que implicam na conservação da energia, momento linear e paridade [86]. Por exemplo, na MQ, o modelo do OHQ é obtido simplesmente através da substituição do operador momento $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ em H_{OHS} [10]. Em especial, além do OHQ ser um dos primeiros modelos da MQ a ter solução analiticamente exata, é usado no estudo de vibrações de átomos em moléculas diatômicas, nas propriedades acústicas, térmicas e magnéticas dos sólidos e em sistemas envolvendo ondas eletromagnéticas [47].

Tendo em vista essas observações e o fato da ED ser linear no momento, Moshinsky e Szczepaniak buscaram por um potencial externo (termo de interação) que fosse linear nas coordenadas espaciais, satisfazer-se as condições de Hermiticidade, invariâncias de Lorentz e CPT, e que no limite não-relativístico reduzisse a um Hamiltoniano tipo-OHQ [29, 31, 87]. Para obter a equação de movimento do OD, Moshinsky e Szczepaniak introduziram na ED livre o seguinte acoplamento não-mínimo: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im_0\omega\beta\mathbf{r}$, onde m_0 é a massa de repouso da partícula, ω é a frequência angular (não uma velocidade angular) do oscilador, β é um das matrizes de Dirac e \mathbf{r} é o vetor posição [29, 31]. Explicitamente, a equação do OD é dada por:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_{OD}\Psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

onde

$$H_{OD} = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im_0\omega\beta\mathbf{r}) + \beta m_0c^2], \quad (3.2)$$

sendo H_{OD} o Hamiltoniano do OD. Entretanto, apesar do termo $\mathbf{p} - im_0\omega\beta\mathbf{r}$ ser obviamente não-Hermitiano, o Hamiltoniano H_{OD} permanece Hermitiano devido à presença da matriz $\boldsymbol{\alpha}$ [29, 31]. Além disso, o momento angular total \mathbf{J} também é uma quantidade conservada no caso do OD. De fato, isso é consequência do comutador de \mathbf{J} com H_{OD} , ou seja, $[\mathbf{J}, H_{OD}] = 0$. Em particular, de acordo com a literatura [31], o acoplamento não-mínimo do OD também é dado por: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \pm im_0\omega\beta\mathbf{r}$, onde o sinal $-$ está relacionado à partícula e o sinal $+$ à antipartícula. Contudo, como veremos logo a diante, H_{OD} admite estados de energia positiva e negativa, no qual interpretamos como sendo os estados da partícula e antipartícula, respectivamente. Desse modo, usaremos o acoplamento não-mínimo (3.2), no qual já é usado amplamente na literatura.

A origem do Hamiltoniano do OD remota a ED para partículas neutras (nêutrons, por exemplo) interagindo com campos eletromagnéticos externos. Por exemplo, vimos na seção 2.1 como a ED é modificada via acoplamento mínimo devido a interação de uma partícula eletricamente carregada com um campo eletromagnético externo. Porém, no caso de uma partícula neutra interagindo com um campo eletromagnético externo, a ED é modificada via acoplamento não-mínimo, onde tal acoplamento leva em consideração o momento de dipolo magnético da partícula. Em particular, a ED covariante para uma partícula neutra interagindo com um campo eletromagnético externo é escrita via acoplamento não-mínimo na seguinte forma [1, 31]:

$$\left[\gamma^\mu p_\mu + \frac{\mu_n}{2c} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m_n c \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2), \quad (3.3)$$

onde $\sigma^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico dado por $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor campo eletromagnético, m_n é a massa de repouso da partícula com momento de dipolo magnético $\mu_n = K_n \mu_B$, sendo $K_n = -1.91$ o momento de dipolo magnético anômalo da partícula e $\mu_B = e\hbar/2m_n > 0$ é o magnéton de Bohr, respectivamente.

Então, partindo do fato de que o termo $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é escrito como segue [1, 10, 31]:

$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(\frac{i}{c} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \right), \quad (3.4)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético, a Eq. (3.3) toma a seguinte forma:

$$\left[\gamma^\mu p_\mu + \frac{\mu_n}{c} \left(\frac{i}{c} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \right) - m_n c \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2), \quad (3.5)$$

ou na forma diferencial, como:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \mu_n \beta \left(\frac{i}{c} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \right) + \beta m_n c^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.6)$$

Considerando o caso restrito onde o campo magnético é nulo ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$), temos:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{i\beta\mu_n \mathbf{E}}{c^2} \right) + \beta m_n c^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.7)$$

Se compararmos a Eq. (3.7) com a Eq. (3.1), vemos imediatamente que fazendo a seguinte transformação [31]:

$$\mu_n \mathbf{E} \rightarrow -m_0 c^2 \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}, \quad (m_0 = m_n), \quad (3.8)$$

obtemos justamente o Hamiltoniano do OD dado em (3.2). Portanto, conclui-se aqui que o termo de acoplamento não-mínimo usado para modelar o OD pode ser interpretado como uma interação magnética anômala da partícula de Dirac neutra com um campo elétrico externo (campo cromoeletrico) [31], ou em outras palavras, o Hamiltoniano do OD surge como consequência direta da interação de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético anômalo com um campo elétrico radial e linear em r . É oportuno salientar que um modelo simples de campo elétrico com essas características pode ser gerado por um cilindro dielétrico uniformemente carregado de comprimento L , raio R e carga total $-Q$. Por exemplo, aplicando a lei de Gauss na região interna deste cilindro, obtemos o seguinte campo elétrico:

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda \rho}{2\epsilon_0} \hat{e}_\rho, \quad (0 < \rho < R), \quad (3.9)$$

onde $\lambda = Q/\pi R^2 L > 0$ é a densidade volumétrica de carga elétrica do cilindro.

Por outro lado, o limite-não relativístico do OD é dado no seguinte formulário [88]:

$$\left(H_{OHQ} - s \frac{\hbar\omega}{2} - s \frac{2\omega}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right) \phi^s(\mathbf{r}) = \varepsilon \phi^s(\mathbf{r}), \quad (s = \pm 1), \quad (3.10)$$

onde $\varepsilon > 0$ é a energia total não-relativística da partícula com spin up ($s = +1$) ou spin down ($s = -1$) [75], $\phi^s(\mathbf{r})$ são as duas componentes do spinor de Pauli, H_{OHQ} é o Hamiltoniano do OHQ circular [89], a quantidade $\hbar\omega/2$ é um termo que desloca rigidamente todos os níveis de energia e a quantidade $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ é o termo de acoplamento spin-orbita, cuja intensidade é da ordem ω/\hbar . Do exposto, vemos que o limite não-relativístico do OD não resulta unicamente no OHQ, mais sim no OHQ com um forte acoplamento spin-orbita.

Antes de encerrarmos esta seção, mostraremos agora algumas características do espectro de energia do OD, bem como seu limite não-relativístico. De acordo com as Refs. [81, 82], o espectro de energia do OD é escrito na forma:

$$E^2 = \begin{cases} m_0^2 c^4 + 4N\hbar\omega m_0 c^2, & m > 0, \\ m_0^2 c^4 + 2(n + |m|)\hbar\omega m_0 c^2, & m < 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $n \equiv 2N + |m| = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico principal e m é um número quântico de-

finido como: $m \equiv k_\theta - 1/2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sendo k_θ idêntico ao m_l desta dissertação, ou seja, $m_l = k_\theta = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ [81]. Contudo, para o caso onde $m = 0$, os dois espectros de energia em (3.11) produzem os mesmos valores de energia, como devem ser. Agora, comparando os espectros de energia (3.11) com a literatura, verificamos que para $m > 0$, obtemos exatamente o espectro de energia do OD (3+1)-dimensional para $j = l + 1/2$, enquanto para $m < 0$, obtemos um espectro semelhante para $j = l - 1/2$, onde j e l são números quânticos [5, 31, 30]. Devido a semelhança de (3.11) com o espectro de energia do OD (3 + 1)-dimensional, vemos que para $m > 0$, temos um espectro de energia dependente apenas de N , e como m pode assumir qualquer valor inteiro, diz-se que tal espectro é infinitamente degenerado [5, 30]. Agora, para $m < 0$, temos um espectro de energia dependente de n e $|m|$, ou, do número quântico k , definido como $k \equiv n + |m| > 1$. Neste caso, temos um espectro de energia finitamente degenerado, aumentando com o valor k [5, 30].

A fim de investigar o limite não-relativístico do espectro de energia (3.11), devemos utilizar a mesma prescrição que se encontra na seção 2.3, ou seja, $E \cong \varepsilon + m_0 c^2$, onde $\varepsilon \ll m_0 c^2$ [1]. Assim sendo, temos o seguinte espectro de energia do OD não-relativístico [82]:

$$\varepsilon = \begin{cases} 2N\hbar\omega, & m > 0, \\ (n + |m|)\hbar\omega, & m < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

É importante observar que análogo ao caso relativístico, a degenerescência finita e infinita também está presente em (3.12) [82]. Nota-se que no caso de $m = 0$, os dois espectros de energia em (3.12) produzem os mesmos valores de energia, como devem ser. Além disso, vemos claramente que os espectros de energia (3.12) não se parecem muito com o espectro de energia do OHQ circular [89]. De fato, isso é consequência dos dois termos que resultam do limite não-relativístico do OD: o termo que desloca os níveis de energia do sistema e o termo de acoplamento spin-órbita [5]. Entretanto, para $m < 0$, o espectro de energia (3.12) produz os mesmos valores de energia do OHQ para $|m| = 1$ [89].

3.2 O oscilador de Dirac na presença de um campo magnético uniforme em um sistema Aharonov-Bohm-Coulomb

Nesta seção, modelaremos a equação de movimento do OD para uma partícula na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Por razões de economia de notação e simplicidade, utilizaremos aqui nas próximas seções uma considerável parte do formalismo das seções 2.2 e 2.3, conseqüentemente, usaremos de forma moderada as equações, termos, expressões e passagens matemáticas já previamente estabelecidas. Desse modo, inserindo o acoplamento não-mínimo do OD na Eq. (2.20), obtemos o OD quadrático na

seguinte forma:

$$(\gamma^0 \Pi_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{\boldsymbol{\Pi}} - m_0 c)(\gamma^0 \Pi_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \bar{\boldsymbol{\Pi}} + m_0 c) \Psi_R(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.13)$$

onde

$$\Pi_0 = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{qA_0}{c} \right), \quad \bar{\boldsymbol{\Pi}} = (\mathbf{p} - q\mathbf{A} - im_0\omega\beta\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

Em coordenadas polares, a Eq. (3.13) fica escrita como:

$$A^- A^+ \Psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (3.15)$$

onde os operadores A^\mp são definidos na forma [90]:

$$A^\mp \equiv \left[\gamma^0 \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{V(\rho)}{c} \right) + \gamma^\rho \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} + im_0\omega\beta\rho \right) + \gamma^\theta \left(\frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + qA_\theta \right) \mp m_0 c \right]. \quad (3.16)$$

Vemos que as matrizes rotacionadas γ^ρ e γ^θ em (3.16) dificulta a nossa busca pelas soluções exatas da Eq. (3.15). Contudo, usando as relações de similaridade dadas em (2.28), podemos reescrever a Eq. (3.15) como:

$$B^- B^+ \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (3.17)$$

onde

$$B^\mp \equiv \left[\sigma_3 \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{V(\rho)}{c} \right) + \sigma_2 \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} + m_0\omega\sigma_3\rho \right) + i\sigma_1 \left(\frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + qA_\theta + \frac{\hbar\sigma_3}{2\rho} \right) \mp m_0 c \right], \quad (3.18)$$

$$\psi_R(\rho, \theta, t) \equiv U^{-1}(\theta) \Psi_R(\rho, \theta, t). \quad (3.19)$$

Vimos na seção 2.2 como são as configurações dos potenciais que caracterizam o sistema ABC, agora, focaremos nossa atenção na configuração do potencial vetor associado a um campo magnético externo uniforme. Então, considerando um campo magnético uniforme gerado por um solenóide extremamente longo de comprimento l e raio b ($b \ll l$) perpendicular ao plano xy dado por: $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$, temos um potencial vetor para este campo magnético na forma: $\mathbf{A} = (B_0/2)(x\hat{e}_y - y\hat{e}_x)$, sendo B_0 a intensidade do campo magnético no interior do solenóide [10, 74, 81]. Em coordenadas polares, este potencial vetor é escrito como segue:

$$\mathbf{A}(\rho, \theta) = A_\theta \hat{e}_\theta = \frac{B_0 \rho}{2} \hat{e}_\theta, \quad (3.20)$$

Consequentemente, o potencial vetor total para nosso problema será dado por:

$$\mathbf{A}(\rho, \theta) = \left(\frac{\Phi}{2\pi\rho} + \frac{B_0\rho}{2} \right) \hat{e}_\theta. \quad (3.21)$$

Como agora temos dois solenóides presentes no sistema, é necessário que seus

respectivos raios satisfaçam a seguinte condição: $a < \rho < b$, conseqüentemente, a partícula é obrigada a ficar confinada neste intervalo restrito. Caso contrário, não será possível modelar a equação do OD sob a influência do campo magnético uniforme e do sistema ABC.

Assim, usando as configurações (3.21) e (2.33), transformamos a Eq. (3.17) na seguinte equação diferencial linear homogênea de segunda ordem [90]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\Gamma^2}{\hbar^2} - \frac{\Gamma}{\hbar} + \frac{1}{4} \right) - \frac{m_0^2 \Omega^2 \rho^2}{\hbar^2} + \frac{\Lambda}{\rho} - \Sigma \right] \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (3.22)$$

onde os operadores Γ^2 , Γ , Λ e Σ são definidos como segue:

$$\Gamma^2 \equiv \left[\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 \right] = \begin{pmatrix} \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 & 0 \\ 0 & \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha\hbar)^2 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\Gamma \equiv \left[\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \sigma_3 - iZ\alpha\hbar \sigma_1 \right] = \begin{pmatrix} \left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) & -iZ\alpha\hbar \\ -iZ\alpha\hbar & -\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\Lambda \equiv \left(\frac{2iZ\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \Sigma \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{m_0 \Omega}{\hbar^2} (2L_z + \hbar \sigma_3) - \frac{2m_0 \Omega}{\hbar} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (3.25)$$

sendo Ω uma frequência angular efetiva definida como: $\Omega \equiv \omega - \omega_c/2 \geq 0$, onde $\omega_c \equiv eB_0/m_0$ é a frequência ciclotron (uma velocidade angular) da partícula e $L_z = -i\hbar\partial/\partial\theta$. Vale a pena mencionar que esta frequência de rotação é uma quantidade que dá origem aos chamados níveis de Landau (relativísticos e não-relativísticos) de uma partícula planar.

Assumindo o seguinte ansatz para o spinor de Dirac [81]:

$$\psi_R(\rho, \theta, t) = \frac{e^{i(m_l\theta - Et/\hbar)}}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} \phi^+(\rho) \\ \phi^-(\rho) \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

a Eq. (3.22) fica compactada na forma [90]:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{\rho^2} - \frac{m_0^2 \Omega^2 \rho^2}{\hbar^2} + \frac{\rho_0}{\rho} + E^s \right] \phi^s(\rho) = 0, \quad (s = \pm 1), \quad (3.27)$$

onde

$$\gamma \equiv \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2} > 0, \quad \rho_0 \equiv \frac{2Z\alpha E}{\hbar c}, \quad E^s \equiv \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{2m_0 \Omega}{\hbar} \left(m_l + \frac{s}{2} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (3.28)$$

Comparando a Eq. (3.27) com a literatura, verificamos que para $\Phi = Z = 0$, obtemos o OD na presença de campo um magnético uniforme [81], enquanto para $\Omega = 0$, obtemos a ED para o sistema ABC relativístico (Ver Eq. (2.39)).

3.3 Resultados e discussão

Para resolver a Eq. (3.27), introduziremos inicialmente uma nova variável adimensional dada por $r = w\rho$, sendo $w \equiv \sqrt{m_0\Omega/\hbar}$. Então, fazendo uma mudança de variável na equação radial (3.27), obtemos:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{r^2} - r^2 + \frac{r_0}{r} + \bar{E}^s \right] \phi^s(r) = 0, \quad (3.29)$$

onde

$$r_0 \equiv \frac{\rho_0}{w}, \quad \bar{E}^s \equiv \frac{E^s}{w^2} \quad (3.30)$$

De acordo com as Refs. [44, 93], podemos determinar as soluções analíticas da Eq. (3.29) também através de uma análise do comportamento assintótico da equação para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Portanto, quando $r \rightarrow 0$, a Eq. (3.29) fica escrita como:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma(\gamma - s)}{r^2} \right] \phi^s(r) = 0, \quad (3.31)$$

cujas soluções gerais são na forma:

$$\phi^+(r) = C_1 r^\gamma + C_2 r^{-\gamma+1}, \quad (s = +1), \quad (3.32)$$

$$\phi^-(r) = C_3 r^{-\gamma} + C_4 r^{\gamma+1}, \quad (s = -1), \quad (3.33)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes arbitrárias. Agora, quando $r \rightarrow \infty$, a Eq. (3.29) fica escrita como:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - r^2 \right] \phi^s(r) = 0, \quad (3.34)$$

cujas soluções gerais são na forma:

$$\phi^s(r) = C_5 e^{r^2/2} + C_6 e^{-r^2/2}, \quad (3.35)$$

onde C_5 e C_6 são constantes arbitrárias.

Contudo, como $\gamma > 0$ e $\phi^s(r)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno para ser uma solução fisicamente aceitável (solução normalizável):

$$\phi^s(r \rightarrow 0) = 0, \quad \phi^s(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.36)$$

implica automaticamente em $C_2 = C_3 = C_5 = 0$, portanto, uma solução admissível para a Eq. (3.29) toma a seguinte forma assintótica:

$$\phi^s(r) = C^s r^{\gamma+(1-s)/2} e^{-r^2/2} R^s(r), \quad (3.37)$$

onde C^s são constantes de normalização e $R^s(r)$ são funções desconhecidas.

Substituindo agora a função (3.37) na Eq. (3.29), obtemos uma equação diferencial para $R^s(r)$ na forma [90]:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{\delta^s}{r} - 2r \right) \frac{d}{dr} + \left(\mathcal{E}^s + \frac{r_0}{r} \right) \right] R^s(r) = 0, \quad (3.38)$$

onde

$$\delta^s \equiv (2\gamma + 1 - s), \quad \mathcal{E}^s \equiv (\bar{E}^s - \delta^s - 1). \quad (3.39)$$

De acordo com a literatura [44, 93, 91], a Eq. (3.38) corresponde à equação de Heun biconfluente e a função $R^s(r)$ é a função Heun biconfluente, na qual é escrita na forma: $R^s(r) = H_B(2\gamma - s, 0, \bar{E}^s, 2r_0, -r)$. Para prosseguir com nossa busca pelas soluções de estado ligado, vamos usar o método de série de potências (caso restrito do método de Frobenius) para determinar a forma da função de Heun biconfluente [92]. Assim, a solução geral da Eq. (3.38) passa a ser escrita como uma expansão em série de potências em torno da origem na forma:

$$R^s(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^s r^k. \quad (3.40)$$

Substituindo a série (3.40) na Eq. (3.38), obtemos a seguinte relação de recorrência juntamente com os dois coeficientes independentes da série:

$$a_{k+2}^s = -\frac{r_0}{(k+2)(k+\delta^s+1)} a_{k+1}^s + \frac{2k - \mathcal{E}^s}{(k+2)(k+\delta^s+1)} a_k^s, \quad (3.41)$$

$$a_1^s = -\frac{r_0}{\delta^s} \quad (3.42)$$

$$a_2^s = \frac{r_0^2 - \delta^s \mathcal{E}^s}{2\delta^s(\delta^s + 1)}, \quad (3.43)$$

onde tomamos por simplicidade $a_0^s = 1$.

Por outro lado, como a MQR requer que as soluções de estado ligado sejam funções normalizáveis, implica que $\phi^s(r)$ deve desaparecer em $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Desse modo, as soluções de estado ligado podem ser obtidas quando admitimos que a série de potências (3.40) se torne um polinômio de grau n , onde n é um inteiro positivo [44, 93]. Desta forma, garantimos que $\phi^s(r)$ seja uma solução normalizável. Portanto, podemos ver que a série de potências (3.40) torna-se um polinômio de grau n quando impomos duas condições na seguinte forma [44, 93]:

$$\mathcal{E}^s = 2n, \quad a_{n+1}^s = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.44)$$

Então, da condição $\mathcal{E}^s = 2n$ (condição de quantização) e usando as expressões (3.39), (3.30) e (3.28), obtemos o seguinte espectro discreto de energia do OD na presença de

um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC [90]:

$$E_{n,m_l,s} = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2 \frac{\hbar \Omega}{m_0 c^2} \left[n + 1 - s + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2 - \left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)} \right]}, \quad (3.45)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico principal. Vemos que além do espectro de energia (3.45) depender explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e da frequência efetiva Ω que caracteriza o OD e o campo magnético uniforme, admite estados de energia positiva e negativa, no qual são simbolizados pelos sinais \pm . Vale mencionar que nos estados de energia positiva (negativa), deve-se usar $s = +1$ ($s = -1$). Devido à existência do fluxo magnético Φ , temos: $E_{n,m_l,s}(\Phi \pm \Phi_0) = E_{n,m_l \pm 1,s}(\Phi)$, logo, o espectro de energia é uma função periódica com periodicidade $\pm \Phi_0$ [93]. Por outro lado, em virtude do parâmetro s , notamos que a componente superior do spinor de Dirac possui autovalores de energia ligeiramente menores que a componente inferior, ou seja, os autovalores de energia para a partícula são menores do que as da antipartícula. Além disso, quando temos $(Z\alpha) > (m_l + \Phi/\Phi_0)$ (campo de Coulomb forte), as energias em (3.45) tornam-se imaginárias e o Hamiltoniano do OD torna-se anti-Hermitiano, semelhante ao caso do sistema ABC relativístico. Então, para que o Hamiltoniano do OD seja Hermitiano e o espectro de energia seja real, é obrigatório que os parâmetros $Z\alpha$ satisfaçam a condição: $(Z\alpha) \leq (m_l + \Phi/\Phi_0)$. Agora, com respeito a energia de repouso da partícula e antipartícula: $E_0 = \pm m_0 c^2$, no qual corresponde ao limite do contínuo (clássico) do espectro de energia (3.45), é obtida quando temos um fluxo magnético intenso ($\Phi \rightarrow \infty$), ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$) ou números quânticos muito grandes ($n, m_l \rightarrow \infty$). Embora a condição $\Omega = 0$ (condição de ressonância) também implica em $E_0 = \pm m_0 c^2$, não consideramos este caso, pois como veremos em breve, a condição $Z = 0$ resulta em $\Omega = 0$.

Agora, vamos comparar o espectro de energia (3.45) com a literatura. Antes de tudo, como veremos logo adiante, existe uma dependência explícita da frequência angular do OD em função dos números quânticos n , m_l e do parâmetro s , ou seja, ω varia de acordo com os valores de n , m_l e s . No presente momento, vamos supor por simplicidade e de forma arbitrária que a frequência angular do OD seja constante ($\omega = \text{const.}$). Desse modo, na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), escrevemos o espectro de energia (3.45) como:

$$E_{n,M,s} = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2 \frac{\hbar \Omega}{m_0 c^2} [n + M + 1 - s]}, \quad (3.46)$$

onde $M \equiv |m_l| - m_l$, sendo $M = 1, 3, 5, \dots$ para $m_l < 0$ e $M = 0$ para $m_l > 0$. Evidentemente, vemos que na ausência do campo magnético uniforme ($\omega_c = 0$), o espectro de energia (3.46) produz os mesmos autovalores de energia que o espectro de energia do OD dado em (3.11) para $m < 0$. De fato, essa afirmação só é válida com a manipulação correta do parâmetro $s = \pm 1$,

no qual podemos ver facilmente que a quantidade $M + 1 - s$ gera os mesmos valores que $|m|$, ou seja, $M + 1 - s = |m| = 1, 2, 3, \dots$. Além disso, usando por conveniência a definição do número quântico principal: $n = 2N + |m|$, e supondo o caso particular onde: $M = m = 0$, o espectro de energia (3.46) se reduz ao do OD na presença de um campo magnético uniforme [38]. Agora, na ausência do OD ($\omega = 0$) e usando o número quântico principal com o caso particular onde: $M + 1 - s = |m| = 1$, o espectro de energia (3.46) se reduz aos níveis de Landau relativísticos de uma partícula de Dirac planar [94].

Para analisarmos as frequências angulares permitidas do OD, assim como os níveis de energia relativísticos modificados por essas frequências e posteriormente o spinor de Dirac para os estados ligados do sistema, usaremos para tal propósito as duas condições dadas em (3.44) juntamente com a relação de recorrência (3.41) e os coeficientes (3.42) e (3.43). Por razões didáticas, determinaremos somente as frequências angulares, os níveis de energia e o spinor de Dirac para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$). Então, para $n = 1$, temos $a_2^s = 0$, logo, usando as expressões (3.43), (2.52), (3.30) e (3.28), obtemos as frequências angulares do OD para o estado fundamental na seguinte forma:

$$\omega_{1,m_l,s} = \frac{\omega_c}{2} + \frac{2(Z\alpha)^2 E_{1,m_l,s}^2}{m_0 c^2 \hbar \left[2\sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2 + 1 - s} \right]}. \quad (3.47)$$

Como podemos ver na expressão (3.47), além das frequências angulares serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à frequência ciclotron e aumentam quadraticamente com o número atômico Z e com as energias $E_{1,m_l,s}$. Vemos ainda que a condição $(Z\alpha) = (m_l + \Phi/\Phi_0)$ neste caso não é admissível, uma vez que isso resulta em frequências angulares infinitas ($\omega_{1,m_l,s} \rightarrow \infty$) para $s = +1$. Além disso, para $Z = 0$, ou, $m_l \rightarrow \infty$ e $\Phi \rightarrow \infty$, implica em $\omega_{1,m_l,s} = \omega_c/2$, conseqüentemente, temos $\Omega = 0$ e o espectro de energia (3.45) se reduz a energia de repouso da partícula e antipartícula livre.

Substituindo (3.47) em (3.45), obtemos as energias permitidas do OD para o estado fundamental como:

$$E_{1,m_l,s} = \pm \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - 2(Z\alpha)^2 \left(\frac{2^{-s} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2} - \left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{1-s}{2} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)}}. \quad (3.48)$$

Vemos na expressão (3.48) que o segundo termo do denominador não pode ser igual a 1, caso contrário, teremos energias infinitas para o estado fundamental ($E_{1,m_l,s} \rightarrow \infty$). Diferentemente do sistema ABC relativístico, vemos que o número atômico Z tem como função aumentar os valores das energias do OD, uma vez que o aumento de Z torna o denominador cada

vez menor. Além disso, a condição $(Z\alpha) = (m_l + \Phi/\Phi_0)$ também não é admissível, uma vez que isso resulta em energias imaginárias para $s = +1$. Com o intuito de avançarmos um pouco em nossa discussão sobre o spinor de Dirac para os estados ligados do sistema, calcularemos agora a função de Heun biconfluente para o estado fundamental. Portanto, para $n = 1$, a série de potências (3.40) corresponde ao seguinte polinômio do primeiro grau:

$$R_{1,m_l,s}^s(r) = a_0^s r^0 + a_1^s r^1 = 1 - \frac{r_0}{\delta^s} r. \quad (3.49)$$

Substituindo (3.49) em (3.37), obtemos as componentes do spinor de Dirac para o estado fundamental na forma:

$$\phi_{1,m_l,s}^s(r) = C^s r^{\gamma+(1-s)/2} e^{-r^2/2} \left(1 - \frac{r_0}{\delta^s} r \right). \quad (3.50)$$

Agora, vamos considerar o primeiro estado excitado do sistema. Assim sendo, para $n = 2$, temos $a_3^s = 0$, logo, usando as relações (3.44), (3.41) e (3.42), este coeficiente toma a seguinte forma:

$$a_3^s = -\frac{r_0}{6\delta^s(\delta^s + 2)(\delta^s + 1)} \left[r_0^2 - 4(2\delta^s + 1) \right], \quad (3.51)$$

Consequentemente, obtemos a partir de (3.51), (2.52), (3.30) e (3.28) as frequências angulares do OD para o primeiro estado excitado como segue:

$$\omega_{2,m_l,s} = \frac{\omega_c}{2} + \frac{(Z\alpha)^2 E_{2,m_l,s}^2}{m_0 c^2 \hbar \left[4\sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2 + 3 - 2s} \right]}. \quad (3.52)$$

Como podemos ver na expressão (3.52), além das frequências angulares também serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à frequência ciclotron e aumentam quadraticamente com o número atômico Z e com as energias $E_{2,m_l,s}$. Neste caso, a condição $(Z\alpha) = (m_l + \Phi/\Phi_0)$ já é admissível, uma vez que isso não resulta em frequências angulares infinitas para $s = +1$. Então, substituindo (3.52) em (3.45), obtemos as energias permitidas do OD para o primeiro estado excitado:

$$E_{2,m_l,s} = \pm \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - 2(Z\alpha)^2 \left(\frac{3-s + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2 - \left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}}{3-2s+4\sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)}}. \quad (3.53)$$

Vemos claramente na expressão (3.53) que o segundo termo do denominador não pode ser igual a 1, caso contrário, também teremos energias infinitas para o primeiro estado excitado ($E_{2,m_l,s} \rightarrow \infty$). Além disso, vemos nitidamente que o número atômico Z tem como função aumentar os valores das energias do OD. Neste caso, a condição $(Z\alpha) = (m_l + \Phi/\Phi_0)$

já é admissível, uma vez que isso não resulta em energias imaginárias para $s = +1$. Agora, com respeito a função de Heun biconfluyente para este estado, é obtida fazendo $n = 2$ na série de potências (3.40). Desse modo, a função de Heun biconfluyente corresponde ao seguinte polinômio do segundo grau:

$$R_{2,m_l,s}^s(r) = a_0^s r^0 + a_1^s r^1 + a_2^s r^2 = 1 - \frac{r_0}{\delta^s} r + \left(\frac{r_0^2 - 4\delta^s}{2\delta^s(\delta^s + 1)} \right) r^2. \quad (3.54)$$

Substituindo agora a função (3.54) em (3.37), obtemos as componentes do spinor de Dirac para o primeiro estado excitado na seguinte forma:

$$\phi_{2,m_l,s}^s(r) = C^s r^{\gamma+(1-s)/2} e^{-r^2/2} \left[1 - \frac{r_0}{\delta^s} r + \left(\frac{r_0^2 - 4\delta^s}{2\delta^s(\delta^s + 1)} \right) r^2 \right]. \quad (3.55)$$

Então, partindo do fato de que as frequências angulares do OD para o n -ésimo nível de energia podem ser determinadas por meio das condições (3.44), da relação de recorrência (3.41) e dos coeficientes (3.42) e (3.43), devemos rotular a frequência efetiva Ω por $\Omega_{n,m_l,s}$, logo, o espectro de energia (3.45) é reescrito de uma forma mais geral como:

$$E_{n,m_l,s} = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2 \frac{\hbar \Omega_{n,m_l,s}}{m_0 c^2} \left[n + 1 - s + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2 - \left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)} \right]}. \quad (3.56)$$

Vale a pena mencionar que de acordo com as Refs. [44, 93], as frequências angulares no caso do OKG também podem ser quantizadas em função dos números quânticos do sistema, portanto, este efeito inusitado não é uma peculiaridade apenas do OD. Contudo, um dos primeiros trabalhos a analisarem este efeito para o caso do OD se encontra na Ref. [90].

Com o objetivo de analisar a influência de Z e Φ nos níveis de energia do OD, faremos agora uma discussão sobre as energias (3.48) e (3.53). Na Tabela 3, encontram-se inicialmente os valores das energias positivas e negativas do OD para o estado fundamental ($n = 1$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 3: Energias do OD para o estado fundamental.

Z	$E_{1,1/2,+1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{1,1/2,-1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{1,1/2,+1}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$E_{1,1/2,-1}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	1.0000355212	-1.0000639414	1.0001065814	-1.0000710473
2	1.0001421052	-1.0002558402	1.0004265984	-1.0002842878
3	1.0003198124	-1.0005759202	1.0009608718	-1.0006400171
4	1.0005687440	-1.0010245552	1.0017107760	-1.0011387300
5	1.0008890418	-1.0016022703	1.0026782504	-1.0017811205

De acordo com a Tabela 3, os valores absolutos das energias da partícula e antipartícula aumentam à medida que Z aumenta. Vemos que na presença do fluxo magnético ($\Phi = \Phi_0$), as energias da antipartícula são maiores do que as da partícula, enquanto na ausência ($\Phi = 0$), as energias da partícula são maiores do que as da antipartícula. Por outro lado, no caso $\Phi = \Phi_0$, vemos que as energias da partícula e antipartícula são menores do que no caso $\Phi = 0$. Diferentemente do sistema ABC relativístico, este resultado implica que Φ tem como função diminuir os valores das energias do sistema. Em particular, como os valores da Tabela 3 são maiores que a energia de repouso, implica que m_l também tem a função diminuir os valores das energias, uma vez que no limite $m_l \rightarrow \infty$ obtemos $E_0 = \pm m_0 c^2$. Vale a pena ressaltar que o valor máximo de Z para que as energias não tornam-se imaginárias é de $Z = 205$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z = 68$ para o caso $\Phi = 0$ (análogo ao sistema ABC relativístico).

Na Tabela 4, encontram-se os valores das energias positivas e negativas do OD para o primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 4: Energias do OD para o primeiro estado excitado.

Z	$E_{2,1/2,+1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2,-1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2,+1}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2,-1}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	1.0000152230	-1.0000193750	1.0000355230	-1.0000304412
2	1.0000608966	-1.0000775070	1.0001421340	-1.0001218120
3	1.0001370340	-1.0001744175	1.0003199574	-1.0002741630
4	1.0002436566	-1.0003101431	1.0005692030	-1.0004875640
5	1.0003807962	-1.0004847343	1.0008901650	-1.0007623308

De acordo com da Tabela 4, além dos valores absolutos das energias da partícula e antipartícula aumentarem à medida que Z aumenta, vemos que na presença do fluxo magnético ($\Phi = \Phi_0$) as energias da antipartícula são maiores do que as da partícula, enquanto na ausência ($\Phi = 0$) vemos que as energias da partícula são maiores do que as da antipartícula. Além disso, no caso $\Phi = \Phi_0$, as energias da partícula e antipartícula são menores do que no caso $\Phi = 0$, ou seja, Φ tem como função diminuir os valores das energias do sistema. Agora, comparando os resultados das Tabelas 4 e 3, um efeito incomum pode ser observado: as energias do OD para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado. Podemos interpretar este comportamento inesperado devido à quantização das frequências angulares, pois como discutimos anteriormente, supondo que a frequência angular do OD seja constante, obtemos

um espectro de energia em perfeita concordância com a literatura (Ver expressão (3.46)), consequentemente, as energias do estado fundamental são menores do que as do primeiro estado excitado. É importante destacar que este comportamento também não é uma exclusividade do OD, pois de acordo com a Ref. [95], podemos verificar facilmente que as energias da EKG para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado para todos os valores de Z ($Z < 137$). Vale apenas mencionar que o comportamento inesperado observado aqui não se restringe apenas ao número atômico Z , de fato, este comportamento também é observado com o número quântico m_l . Na Tabela 5, encontram-se os valores das energias positivas e negativas do OD para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores positivos de m_l , onde tomamos por simplicidade $Z = 1$ e $\Phi = \Phi_0$.

Tabela 5: Energias do OD para o estado fundamental e primeiro estado excitado com cinco valores de m_l .

m_l	$E_{1,m_l,+1}/m_0c^2$	$E_{1,m_l,-1}/m_0c^2$	$E_{2,m_l,+1}/m_0c^2$	$E_{2,m_l,-1}/m_0c^2$
1/2	1.0000355212	-1.0000639414	1.0000152230	-1.0000193750
3/2	1.0000213123	-1.0000456711	1.0000096873	-1.0000142081
5/2	1.0000152230	-1.0000355214	1.0000071039	-1.0000112170
7/2	1.0000118400	-1.0000290627	1.0000056083	-1.0000092701
9/2	1.0000096872	-1.0000245913	1.0000046330	-1.0000078933
...
∞	1.0000000000	-1.0000000000	1.0000000000	-1.0000000000

Como podemos observar na Tabela 5, além dos valores absolutos das energias da partícula e antipartícula diminuírem à medida que m_l aumenta, vemos claramente que as energias do OD para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado. Em particular, este comportamento também acontece na Ref. [95], onde as energias da EKG para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado para todos os valores possíveis do número quântico $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Além disso, vemos na Tabela 5 que além das energias da antipartícula serem maiores do que as da partícula, a energia de repouso é obtida no limite de $m_l \rightarrow \infty$ (limite do contínuo). Por último e não menos importante, podemos analisar agora a partir dos resultados das Tabelas 3, 4 e 5 que os valores das frequências angulares do OD para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado.

Daqui por diante, dedicaremos nossa atenção na forma original do spinor de Dirac para os estados ligados do sistema. Assim sendo, através dos operadores (3.16) e da relação

(3.19), o spinor (2.59) fica escrito na forma:

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0 c} A^+ U(\theta) \psi_R(\rho, \theta, t), \quad (3.57)$$

ou melhor

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0 c} U(\theta) U^{-1}(\theta) A^+ U(\theta) \psi_R(\rho, \theta, t). \quad (3.58)$$

Claramente, o spinor (3.58) é reescrito em termos dos operadores (3.18) como:

$$\Psi(\rho, \theta, t) = \frac{1}{m_0 c} U(\theta) B^+ \psi_R(\rho, \theta, t). \quad (3.59)$$

Substituindo a variável $r = w\rho$ nas funções radiais (3.37), o spinor (3.26) ficará escrito na seguinte forma:

$$\psi_R(\rho, \theta, t) = e^{i(m_l \theta - Et/\hbar)} \begin{pmatrix} D^+ \rho^{\gamma-1/2} e^{-w^2 \rho^2/2} R_n^+(w\rho) \\ D^- \rho^{\gamma+1/2} e^{-w^2 \rho^2/2} R_n^-(w\rho) \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

onde

$$D^s \equiv \frac{C^s w^{\gamma+(1-s)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (s = \pm 1). \quad (3.61)$$

Portanto, substituindo (2.33), (3.21) e (3.60) em (3.59), obtemos explicitamente a forma geral do spinor de Dirac de duas componentes:

$$\Psi_{n, m_l}(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} e^{i(m_l - 1/2)\theta - Et/\hbar} [\mathcal{F}_n^+(\rho) + i\mathcal{G}_n^-(\rho)] \\ e^{i(m_l + 1/2)\theta - Et/\hbar} [\mathcal{F}_n^-(\rho) - i\mathcal{G}_n^+(\rho)] \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

onde

$$\mathcal{F}_n^s(\rho) \equiv D^s \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} R_n^s(w\rho) \left[\frac{s}{m_0 c} \left(\frac{E}{c} + \frac{Z\alpha\hbar}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (3.63)$$

$$\mathcal{G}_n^s(\rho) \equiv \frac{\hbar D^s}{m_0 c} \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} \left[\left(w^2 - s \frac{m_0 \omega}{\hbar} \right) \rho + \frac{(m_l s - \frac{1-s}{2} - \gamma + s \frac{\Phi}{\Phi_0})}{\rho} - \frac{d}{d\rho} \right] R_n^s(w\rho). \quad (3.64)$$

Substituindo a função (3.49) em (3.62), obtemos o spinor de Dirac para o estado fundamental como:

$$\Psi_{1, m_l}(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} e^{i(m_l - 1/2)\theta - Et/\hbar} [\mathcal{F}_1^+(\rho) + i\mathcal{G}_1^-(\rho)] \\ e^{i(m_l + 1/2)\theta - Et/\hbar} [\mathcal{F}_1^-(\rho) - i\mathcal{G}_1^+(\rho)] \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

onde

$$\mathcal{F}_1^s(\rho) \equiv D^s \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} R_1^s(k\rho) \left[\frac{s}{m_0 c} \left(\frac{E}{c} + \frac{Z\alpha\hbar}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (3.66)$$

$$\mathcal{G}_1^s(\rho) \equiv \frac{\hbar D^s}{m_0 c} \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} \left\{ \left[\left(w^2 - s \frac{m_0 \omega}{\hbar} \right) \rho + \frac{(m_l s - \frac{1-s}{2} - \gamma + s \frac{\Phi}{\Phi_0})}{\rho} \right] R_1^s(w\rho) + \frac{r_0 w}{\delta^s} \right\}. \quad (3.67)$$

Agora, substituindo a função (3.54) em (3.62), obtemos o spinor de Dirac para o primeiro estado excitado como:

$$\Psi_{2,m_l}(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} e^{i[(m_l-1/2)\theta - Et/\hbar]} [\mathcal{F}_2^+(\rho) + i\mathcal{G}_2^-(\rho)] \\ e^{i[(m_l+1/2)\theta - Et/\hbar]} [\mathcal{F}_2^-(\rho) - i\mathcal{G}_2^+(\rho)] \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

onde

$$\mathcal{F}_2^s(\rho) \equiv D^s \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} R_2^s(w\rho) \left[\frac{s}{m_0 c} \left(\frac{E}{c} + \frac{Z\alpha \hbar}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (3.69)$$

$$\mathcal{G}_2^s(\rho) \equiv \frac{\hbar D^s}{m_0 c} \rho^{\gamma-s/2} e^{-w^2 \rho^2/2} \left\{ \left[\left(w^2 - s \frac{m_0 \omega}{\hbar} \right) \rho + \frac{(m_l s - \frac{1-s}{2} - \gamma + s \frac{\Phi}{\Phi_0})}{\rho} \right] R_2^s(w\rho) + f^s(w\rho) \right\}, \quad (3.70)$$

sendo

$$f^s(w\rho) \equiv \left[\frac{r_0 w}{\delta^s} - \left(w^2 \frac{r_0^2 - 4\delta^s}{\delta^s(\delta^s + 1)} \right) \rho \right]. \quad (3.71)$$

Vemos que os spinor de Dirac para os estado fundamental e primeiro estado excitado incorpora simultaneamente os valores positivos e negativos do número quântico m_l , o que não acontece, por exemplo, na Ref. [81]. Análogo ao sistema ABC relativístico, uma das vantagens de termos um spinor com essa característica é a possibilidade de calcular os observáveis físicos associados a partícula de forma mais rápida e direta do que se tivéssemos dois spinores, um para cada valor de m_l .

3.4 Limite não-relativístico

Nesta seção, analisaremos o limite não-relativístico de nossos resultados, em particular, da Eq. (3.27), do espectro de energia (3.56) e das frequências angulares (3.47) e (3.52). De acordo com a seção 2.3, esse limite é obtido considerando que $E \cong \varepsilon + m_0 c^2$, onde $\varepsilon \ll m_0 c^2$ e $Z\alpha \ll 1$. Assim, aplicando essas informações na Eq. (3.27), obtemos a seguinte equação de Schrödinger-Pauli (ESP) para o OHQ sob a influência de um campo magnético uniforme e do sistema ABC:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0})^2}{\rho^2} \right) + \frac{m_0 \Omega^2 \rho^2}{2} - s \frac{\hbar \Omega}{2} - s \frac{2\Omega}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \right] \phi^s(\rho) = \varepsilon \phi^s(\rho), \quad (3.72)$$

onde $\varepsilon > 0$ é a energia total não-relativística da partícula (ou oscilador) com spin up ($s = +1$) ou spin down ($s = -1$) [75] e $\phi^s(\rho)$ são as duas componentes do spinor de Pauli. Comparando a Eq. (3.72) com a literatura, verificamos que para $\Phi = Z = \omega_c = 0$, obtemos a equação do OHQ com um forte acoplamento spin-orbita e um termo que desloca todos os níveis de energia (ver Eq. (3.10)). Entretanto, na ausência do OHQ e do campo magnético uniforme ($\Omega = 0$) com $\phi^s(\rho) = \sqrt{\rho} f^s(\rho)$ e $s = +1$, obtemos a ES para uma partícula sob a influência do sistema

ABC (ver Eq. (2.62)).

Então, usando a prescrição $E \cong \varepsilon + m_0c^2$ com $Z\alpha \ll 1$ na expressão (3.56), obtemos o espectro de energia do OHQ sob a influência de um campo magnético uniforme e do sistema ABC na seguinte forma:

$$\varepsilon_{n,m_l,s} = \hbar\Omega_{n,m_l,s} [n + 1 - s + |I| - I], \quad (3.73)$$

onde $I \equiv (m_l + \Phi/\Phi_0)$.

Embora o número atômico Z não apareça explicitamente em (3.73), ele aparece na frequência angular efetiva $\Omega_{n,m_l,s}$. Veremos isso logo adiante ao analisarmos o limite não-relativístico das frequências angulares do OD. Agora, vamos comparar o espectro de energia (3.73) com a literatura, porém, vamos supor por simplicidade que a frequência angular do OHQ seja constante ($\omega = \text{const.}$). Desse modo, usando por conveniência o número quântico principal dado por: $n = 2N + |m|$, e supondo que $m = 0$, verificamos que o espectro de energia (3.73) com $m_l > 0$ se reduz ao do OHQ sujeito a um campo magnético uniforme [38]. Agora, na ausência do campo magnético ($\omega_c = 0$) e do efeito AB ($\Phi = 0$), obtemos justamente o espectro de energia dado em (3.12), onde definimos $1 - s + M \equiv |m| = 1, 2, 3, \dots$. Vale destacar que esta definição é a mesma usada no espectro de energia (3.46). Por outro lado, para $\Phi = \omega = 0$, verificamos que o espectro de energia (3.73) com $m_l < 0$ se reduz aos níveis de Landau não-relativísticos de uma partícula planar sujeita a um campo magnético uniforme [81]. Explicitamente, esses níveis de Landau são dados na forma:

$$\varepsilon^{Landau} = \frac{\hbar\omega_c}{2} [n + 1 - s + M] = \frac{\hbar\omega_c}{2} [n - l + 1] > 0, \quad (l = 0, -1, -2, \dots). \quad (3.74)$$

Na Tabela 6, encontram-se os valores das energias do OHQ com e sem a influência do fluxo magnético Φ para o estado fundamental ($n = 1$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$. Vale mencionar que neste caso, o parâmetro s representa o OHQ (ou partícula) com spin up ($s = +1$) ou com spin down ($s = -1$) [75].

Tabela 6: Energias do OHQ para o estado fundamental.

Z	$\varepsilon_{1,1/2,+1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,1/2,-1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,1/2,+1}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,1/2,-1}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	0.0000355212	0.0000639414	0.0001065814	0.0000710473
2	0.0001421052	0.0002558402	0.0004265984	0.0002842878
3	0.0003198124	0.0005759202	0.0009608718	0.0006400171
4	0.0005687440	0.0010245552	0.0017107760	0.0011387300
5	0.0008890418	0.0016022703	0.0026782504	0.0017811205

Em particular, construímos a Tabela 6 usando a prescrição $|E| \cong \varepsilon + m_0c^2$ nos resultados da Tabela 3. Então, como podemos ver na Tabela 6, além das energias do OHQ aumentarem à medida que Z aumenta, vemos que na presença do fluxo magnético ($\Phi = \Phi_0$), as energias do OHQ com spin down são maiores do que com o spin up, enquanto na ausência ($\Phi = 0$), as energias do OHQ com spin up são maiores do que com o spin down. Além disso, no caso $\Phi = \Phi_0$, vemos que as energias do OHQ são menores do que no caso $\Phi = 0$, ou seja, Φ tem como função diminuir os valores das energias do sistema. Contudo, como as energias do OHQ aumentam à medida que Z aumenta, vemos que Z deve ter um valor máximo para que a condição $\varepsilon \ll m_0c^2$ permaneça satisfeita. Em especial, verificamos que o valor máximo de Z para que tenhamos $\varepsilon \cong m_0c^2$ é de $Z \cong 108$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z \cong 61$ para o caso $\Phi = 0$, portanto, para que $\varepsilon \ll m_0c^2$ permaneça satisfeita, devemos ter $Z \ll 108$ para $\Phi = \Phi_0$ e $Z \ll 61$ para $\Phi = 0$.

Na Tabela 7, encontram-se os valores das energias do OHQ com e sem a influência do fluxo magnético Φ para o primeiro estado excitado com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 7: Energias do OHQ para o primeiro estado excitado.

Z	$\varepsilon_{2,1/2,+1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2,-1}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2,+1}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2,-1}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	0.0000152230	0.0000193750	0.0000355230	0.0000304412
2	0.0000608966	0.0000775070	0.0001421340	0.0001218120
3	0.0001370340	0.0001744175	0.0003199574	0.0002741630
4	0.0002436566	0.0003101431	0.0005692030	0.0004875640
5	0.0003807962	0.0004847343	0.0008901650	0.0007623308

Vemos na Tabela 7 que as energias do OHQ apresentam um comportamento semelhante ao que ocorre no caso do estado fundamental. Entretanto, comparando os resultados das Tabelas 7 e 6, vemos que as energias do estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado. Análogo ao que acontece no caso do OD, podemos interpretar este comportamento devido à quantização das frequências angulares do OHQ. Além disso, o valor máximo de Z para que $\varepsilon \ll m_0c^2$ permaneça satisfeita é de $Z \ll 108$ para $\Phi = \Phi_0$ e $Z \ll 61$ para $\Phi = 0$.

Na Tabela 8, encontram-se os valores das energias do OHQ para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores positivos de m_l , onde tomamos por simplicidade $Z = 1$ e $\Phi = \Phi_0$.

Tabela 8: Energias do OHQ para o estado fundamental e primeiro estado excitado com cinco valores de m_l .

m_l	$\varepsilon_{1,m_l,+1}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,m_l,-1}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,m_l,+1}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,m_l,-1}/m_0c^2$
1/2	0.0000355212	0.0000639414	0.0000152230	0.0000193750
3/2	0.0000213123	0.0000456711	0.0000096873	0.0000142081
5/2	0.0000152230	0.0000355214	0.0000071039	0.0000112170
7/2	0.0000118400	0.0000290627	0.0000056083	0.0000092701
9/2	0.0000096872	0.0000245913	0.0000046330	0.0000078933
...
∞	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

Como podemos observar a partir da Tabela 5, além dos valores das energias do OHQ diminuírem à medida que m_l aumenta, vemos nitidamente que as energias para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado. No entanto, notamos que as energias do OHQ com spin down são maiores do que com o spin up. Aliás, no limite do contínuo (clássico) onde $m_l \rightarrow \infty$, as energias do OHQ tendem à zero ($\varepsilon \rightarrow 0$), consequentemente, neste limite a partícula torna-se livre e os níveis de energia ficam suficientemente próximos um do outro (semelhante ao que ocorre no sistema ABC não-relativístico).

Antes de concluirmos esta seção, faremos agora alguns comentários a respeito das frequências angulares do OHQ para o estado fundamental e primeiro estado excitado. Assim sendo, definindo $x \equiv (Z\alpha)^2$ em (3.47), podemos reescrever as frequências angulares do OD para o estado fundamental como segue:

$$\omega_{1,m_l,s} = \frac{\omega_c}{2} + \frac{2E_{1,m_l,s}^2}{m_0c^2\hbar} f(x), \quad (3.75)$$

onde

$$f(x) = \frac{x}{\left[2\sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 - x} + 1 - s\right]}. \quad (3.76)$$

Expandindo $f(x)$ em uma série de Taylor de primeira ordem, obtemos:

$$f(x) \cong \frac{x}{[2|m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}| + 1 - s]}. \quad (3.77)$$

Agora, usando a prescrição $E \cong \varepsilon + m_0c^2$, temos $E_{1,m_l,s}^2 \cong 2m_0c^2\varepsilon_{1,m_l,s} + m_0^2c^4$. Portanto, substituindo esta última relação e a série (3.77) em (3.75), obtemos as frequências

angulares do OHQ para o estado fundamental na seguinte forma:

$$\omega_{1,m_l,s} = \frac{\omega_c}{2} + \frac{4Z^2(\alpha^2\varepsilon_{1,m_l,s} + \bar{\varepsilon})}{\hbar[2|m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}| + 1 - s]}, \quad (3.78)$$

onde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_0c^2\alpha^2 \cong 13.6 \text{ eV}. \quad (3.79)$$

Como podemos ver na expressão (3.78), além das frequências angulares serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à frequência ciclotron, aumentam quadraticamente com o número atômico Z e linearmente com as energias $\varepsilon_{1,m_l,s}$. Vemos também que a constante (energia) da seção 2.3, dada por $\bar{\varepsilon}$, tem como função aumentar os valores das frequências angulares. Em particular, no limite do contínuo (clássico) onde $Z = 0$, $m_l \rightarrow \infty$ ou $\Phi \rightarrow \infty$, a frequência angular se reduz a metade da frequência ciclotron, consequentemente, o espectro de energia (3.73) reduz a zero ($\varepsilon \rightarrow 0$). O fato de termos $\varepsilon \rightarrow 0$ não significa que o OHQ não tenha energia, já que neste caso sua energia é apenas a de repouso, significa que os níveis de energia estão suficientemente próximos (análogo ao que acontece no sistema ABC não-relativístico e também na Ref. [81]).

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos as frequências angulares do OHQ para o primeiro estado excitado como segue:

$$\omega_{2,m_l,s} = \frac{\omega_c}{2} + \frac{2Z^2(\alpha^2\varepsilon_{2,m_l,s} + \bar{\varepsilon})}{\hbar[4|m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}| + 3 - 2s]}. \quad (3.80)$$

Comparando as expressões (3.80) e (3.78), vemos que as frequências angulares do OHQ para o estado fundamental são maiores do que as do primeiro estado excitado, uma vez que $\varepsilon_{1,m_l,s} > \varepsilon_{2,m_l,s}$ e os valores do denominador em (3.80) são maiores do que em (3.78) para $s = +1$ ou $s = -1$.

4 UMA PARTÍCULA COM MASSA EFETIVA DEPENDENTE DA POSIÇÃO SOB A INFLUÊNCIA DO SISTEMA AHARONOV-BOHM-COULOMB

Neste capítulo, investigaremos a dinâmica quântica relativística e não-relativística de uma partícula de Dirac com MEDP sob a influência do sistema ABC. Para obter as soluções de estado ligado dessa investigação, aplicaremos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed* na ED. Posteriormente, determinaremos o spinor de Dirac e o espectro de energia da partícula. Por último, compararemos nossos resultados com o caso da massa constante.

4.1 A equação de Dirac para uma partícula com massa efetiva dependente da posição em um sistema Aharonov-Bohm-Coulomb

Nesta seção, desenvolveremos a equação de movimento para uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC. Em particular, este capítulo pode ser considerado a versão com massa variável das seções 2.2 e 2.3. Desse modo, seguiremos um procedimento análogo ao que foi feito no capítulo 3, ou seja, utilizaremos aqui e também nas próximas seções uma considerável parte do formalismo das seções 2.2 e 2.3. Nossa discussão inicia-se com a transformação $m_0 \rightarrow m(\mathbf{r})$ na ED, sendo $m(\mathbf{r})$ a MEDP da partícula. Em coordenadas polares, esta MEDP toma a forma $m(\rho)$, portanto, reescrevemos a Eq. (2.29) como segue [96]:

$$B^- B^+ \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (4.1)$$

onde

$$B^\mp \equiv \left[\sigma_3 \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{V(\rho)}{c} \right) + \sigma_2 \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + i\sigma_1 \left(\frac{i\hbar}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + qA_\theta + \frac{\hbar\sigma_3}{2\rho} \right) \mp m(\rho)c \right]. \quad (4.2)$$

Com respeito à configuração da massa variável, consideramos a seguinte MEDP:

$$m(\rho) = m_0 + \frac{\kappa}{\rho}, \quad (4.3)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula e κ é um parâmetro real. Em especial, esta MEDP é a versão bidimensional de uma distribuição de massa singular esfericamente simétrica trabalhada nas Refs. [48, 60, 61, 62]. De acordo com a Ref. [60], o nosso parâmetro κ pode ser definido na forma $\kappa \equiv m_0 \mu \lambda^2$, onde $\lambda = \hbar/m_0 c$ é o comprimento de onda de Compton reduzido da partícula e μ é um parâmetro real positivo com dimensão do inverso de comprimento. Com esta definição, vemos que além da MEDP (4.3) ser uma massa efetiva relativística, reduz a massa de repouso m_0 no limite $\kappa \rightarrow 0$ ou no limite $\rho \rightarrow \infty$. Em particular, como esta MEDP diverge na origem ($\rho = 0$), o parâmetro κ pode ser interpretado como uma escala de renormalização na teoria quântica de campos (TQC) para eliminar divergências ultravioletas que aparecem na

física de altas energias [60]. Além disso, vale a pena mencionar que a MEDP (4.3) é equivalente a ED com acoplamento escalar, onde o potencial escalar é do tipo-Coulomb 2D (potencial escalar de Lorentz) e simbolizado por $V_s(\rho) = \kappa/\rho$ [1, 60].

Portanto, usando as configurações (2.32), (2.33) e (4.3), transformamos a Eq. (4.1) na seguinte equação diferencial linear homogênea de segunda ordem [96]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\bar{\Gamma}^2 - \frac{\bar{\Gamma}}{\hbar} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\Delta}{\rho} - \Theta \right] \psi_R(\rho, \theta, t) = 0, \quad (4.4)$$

onde os operadores $\bar{\Gamma}^2$, $\bar{\Gamma}$, Δ e Θ são definidos como segue:

$$\bar{\Gamma}^2 \equiv \begin{pmatrix} (L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0})^2 - (Z\alpha\hbar)^2 + (c\kappa)^2 & 0 \\ 0 & (L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0})^2 - (Z\alpha\hbar)^2 + (c\kappa)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\bar{\Gamma} \equiv \left[\left(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \sigma_3 - iZ\alpha\hbar\sigma_1 - c\kappa\sigma_2 \right] = \begin{pmatrix} (L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0}) & -i(Z\alpha\hbar - c\kappa) \\ -i(Z\alpha\hbar + c\kappa) & -(L_z + \hbar \frac{\Phi}{\Phi_0}) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\Delta \equiv \left(\frac{2iZ\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2m_0c^2\kappa}{\hbar^2} \right), \quad \Theta \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} \right). \quad (4.7)$$

Assumindo o seguinte ansatz para o spinor de Dirac [81]:

$$\psi_R(\rho, \theta, t) = \frac{e^{i(m_l\theta - Et/\hbar)}}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} \bar{\phi}^+(\rho) \\ \bar{\phi}^-(\rho) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

a Eq. (4.4) fica compactada na forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\bar{\gamma}(\bar{\gamma} - s)}{\rho^2} + \frac{\bar{\rho}_0}{\rho} + \frac{E^2 - m_0^2c^4}{\hbar^2c^2} \right] \bar{\phi}^s(\rho) = 0, \quad (s = \pm 1), \quad (4.9)$$

onde

$$\bar{\gamma} \equiv \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2 + \left(\frac{c\kappa}{\hbar} \right)^2} > 0, \quad \bar{\rho}_0 \equiv \left(\frac{2Z\alpha E}{\hbar c} - \frac{2m_0c^2\kappa}{\hbar^2} \right). \quad (4.10)$$

Vemos claramente que no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), também chamado de limite de não-renormalização [60], a Eq. (4.9) se reduz a Eq. (2.39).

4.2 Resultados e discussão

Para resolver a Eq. (4.9), vamos introduzir agora uma nova variável adimensional dada por $z = 2\eta\rho$, onde $\eta \equiv \sqrt{m_0^2c^4 - E^2}/\hbar c$, sendo $m_0c^2 > E$ [1, 10]. Assim, fazendo uma mudança de variável na equação radial (4.9), obtemos:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{\bar{\gamma}(\bar{\gamma} - s)}{z^2} + \frac{\bar{z}_0}{z} - \frac{1}{4} \right] \bar{\phi}^s(z) = 0, \quad (4.11)$$

onde

$$\bar{z}_0 \equiv \frac{\bar{\rho}_0}{2\eta}, \quad (4.12)$$

Analisando o comportamento assintótico da Eq. (4.11) para $z \rightarrow 0$ e $z \rightarrow \infty$, obtemos uma solução admissível na seguinte forma assintótica:

$$\bar{\phi}^s(z) = \bar{C}^s z^{\bar{\gamma}+(1-s)/2} e^{-z/2} \bar{R}^s(z), \quad (4.13)$$

onde \bar{C}^s são constantes de normalização e $\bar{R}^s(z)$ são funções desconhecidas.

Substituindo agora a função (4.13) na Eq. (4.11), obtemos uma equação diferencial para $\bar{R}^s(\bar{z})$ na forma:

$$\left[z \frac{d^2}{dz^2} + (\bar{b}^s - z) \frac{d}{dz} - \bar{a}^s \right] \bar{R}^s(z) = 0, \quad (4.14)$$

onde

$$\bar{b}^s \equiv (2\bar{\gamma} + 1 - s), \quad \bar{a}^s \equiv \left(\frac{\bar{b}^s}{2} - \bar{z}_0 \right). \quad (4.15)$$

Não é difícil notar que a Eq. (4.14) tem a forma de uma equação hipergeométrica confluyente, cuja solução é a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo ${}_1F_1(\bar{a}^s, \bar{b}^s, z)$. Além disso, como $\bar{\phi}^s(z)$ deve ser uma solução normalizável, implica que: $\bar{a}^s = -N$, onde $N = 0, 1, 2, \dots$. Então, usando as expressões (4.15), (4.12) e (4.10), obtemos o seguinte espectro discreto de energia de uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC [96]:

$$E_{n,m_l} = +m_0 c^2 \left[\frac{Z\alpha c\kappa}{\hbar\bar{n}} + \sqrt{1 + \left(\frac{Z\alpha c\kappa}{\hbar\bar{n}} \right)^2 - \frac{1}{\bar{n}} \left[(Z\alpha)^2 + \left(\frac{c\kappa}{\hbar} \right)^2 \right]} \right], \quad (4.16)$$

onde

$$\bar{n} \equiv \left(n - |m_l| - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - (Z\alpha)^2 + \left(\frac{c\kappa}{\hbar} \right)^2} \right)^2 + (Z\alpha)^2, \quad (4.17)$$

sendo $n = N + |m_l| + 1/2 = 1, 2, 3, \dots$ o número quântico principal. Vemos que o espectro de energia (4.16) depende explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e do parâmetro κ que caracteriza a MEDP da partícula. Análogo ao sistema ABC relativístico, o sinal negativo em (4.16) foi excluído porque para um solenóide carregado positivamente ($Z\alpha > 0$), os estados de energia negativa não satisfazem a seguinte condição: $\bar{z}_0 = N + \bar{b}^+/2 > 0$ (condição de quantização). Dessa forma, implica que tanto partículas com massa constante quanto com massa variável podem interagir com o sistema ABC (antipartículas não são admissíveis). Além disso, vemos que a condição $(Z\alpha)^2 > (m_l + \Phi/\Phi_0)^2 + (c\kappa/\hbar)^2$ (campo de Coulomb forte) não é aceitável, uma vez que isso resulta em energias imaginárias e o Hamiltoniano de Dirac torna-se anti-Hermitiano, logo, $(Z\alpha)^2$ deve satisfazer a condição:

$(Z\alpha)^2 \leq (m_l + \Phi/\Phi_0)^2 + (c\kappa/\hbar)^2$. Diferentemente do sistema ABC relativístico, neste caso podemos usar o sinal de igualdade, visto que nesta situação temos $\bar{\gamma} = 0$, e para $n = 1$ e $m_l = 1/2$, onde resulta em $\bar{n} = (Z\alpha)^2$, não temos mais o problema das energias nulas para o estado fundamental. Com respeito à máxima energia permitida para a partícula: a energia de repouso $E_0 = +m_0c^2$, no qual corresponde ao limite do contínuo (clássico) do espectro de energia (4.16), é obtida no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$) juntamente com alguma das seguintes condições: ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$), fluxo magnético intenso ($\Phi \rightarrow \infty$) ou números quânticos muito grandes ($n, m_l \rightarrow \infty$). A priori, não podemos concluir por enquanto se o aumento de κ e Z provoca o aumento ou a diminuição nos valores do espectro de energia (4.16), uma vez que esses dois parâmetros aparece tanto no numerador quanto no denominador. Contudo, discutiremos logo em breve como as energias do estado fundamental e primeiro estado excitado são influenciados por Φ , κ e Z , e posteriormente, vamos comparar essas energias com as do caso da massa constante ($\kappa = 0$) da seção 2.2.

Comparando o espectro de energia (4.16) com a literatura, verificamos que na ausência do efeito AB ($\Phi = 0$), obtemos um espectro de energia semelhante ao de uma partícula com MEDP na presença do potencial de Coulomb 3D [48, 60] e de uma partícula com massa constante na presença de um potencial escalar 3D [1]. Agora, no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), obtemos o espectro de energia do sistema ABC relativístico (Ver expressão (2.53)). Por último e não menos importante, na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), obtemos o espectro de energia de uma partícula e antipartícula livre com MEDP [96]. Explicitamente, esse espectro de energia é dado na seguinte forma:

$$E_{n,m_l,s} = \pm m_0c^2 \sqrt{1 - \left[\frac{c\kappa}{\hbar \left(n - |m_l| - \frac{s}{2} + \sqrt{m_l^2 + \left(\frac{c\kappa}{\hbar} \right)^2} \right)} \right]^2}, \quad (4.18)$$

Vemos em (4.18) que o segundo termo da raiz quadrada não pode ser igual a 1, caso contrário, a energia de repouso será nula, o que é um absurdo do ponto de vista relativístico. Vemos que nos limites $\kappa \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ou $m_l \rightarrow \infty$, obtemos energia de repouso da partícula e antipartícula (máxima energia possível). Vemos que além do espectro de energia (4.18) ser invariante sob a transformação $\kappa \rightarrow -\kappa$ [48], aumenta ou diminui de valores de acordo com os valores de κ . Por exemplo, para grandes valores de κ o espectro de energia diminui a tal ponto de tender a zero no limite $\kappa \rightarrow \infty$, enquanto para pequenos valores de κ ($0 \leq \kappa \ll 1$), o espectro de energia aumenta. É importante destacar que em vez de termos somente energias positivas em (4.18), a condição de quantização para este caso admite também energias negativas. De fato, usando a transformação $\kappa \rightarrow -\kappa$ em (4.10), a condição de quantização para este caso fica sendo dada por: $m_0c^2|\kappa|/\hbar^2\bar{\eta} = N + \bar{b}^s/2 > 0$. Por último, diferentemente do caso de uma partícula

livre com massa constante, no qual o espectro de energia é sempre contínuo [10], vemos que existem exceções quanto a isso, uma vez que a expressão (4.18) mostra que é possível sim uma partícula possuir um espectro discreto de energia mesmo sendo livre.

Antes de finalizarmos esta seção com a forma geral do spinor de Dirac para os estados ligados, faremos agora uma breve discussão sobre o espectro de energia (4.16). Nosso objetivo com essa discussão é analisar a influência de Φ , Z e κ nos níveis de energia da partícula. Na Tabela 9, encontram-se os valores das energias da partícula com MEDP para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores de Z . Por simplicidade e sem perda de generalidade, usamos o parâmetro κ definido na Ref. [48], onde $\kappa \equiv m_0 a$, sendo $0 < a < r_c$ e $r_c = e^2/4\pi\epsilon_0 m_0 c^2 \cong 2.8 \times 10^{-15} \text{m}$ é o raio clássico do elétron [10]. Diante disso, usamos os seguintes valores para construir a Tabela (9): $a = 2.5 \times 10^{-15} \text{m}$, $m_0 \cong 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$, $c \cong 3.0 \times 10^8 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\hbar \cong 1.0 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ e $m_l = 1/2$.

Tabela 9: Energias relativísticas da partícula com MEDP para o estado fundamental e primeiro estado excitado.

Z	$E_{1,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$E_{1,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$E_{2,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	0.9999999537	0.9999999829	0.9999995740	0.9999999526
2	0.9999866054	0.9999951771	0.9998794011	0.9999866013
3	0.9999495788	0.9999818472	0.9995459240	0.9999495563
4	0.9998888696	0.9999599913	0.9989988008	0.9998887863
5	0.9998042771	0.9999296070	0.9982375518	0.9998042432

Como podemos observar a partir da Tabela 9, além das energias do primeiro estado excitado serem maiores do que as do estado fundamental, ambas diminuem de valores à medida que Z aumenta. Vemos ainda que o fluxo magnético Φ tem a função de aumentar os valores das energias do sistema de tal ponto que as energias do estado fundamental com $\Phi = \Phi_0$ são ligeiramente maiores que as energias do primeiro estado excitado com $\Phi = 0$. Agora, comparando os resultados das Tabelas 9 e 1, vemos que as energias da partícula são maiores no caso da massa variável ($\kappa \neq 0$) do que no caso da massa constante ($\kappa = 0$), seja para $\Phi = \Phi_0$ ou $\Phi = 0$. Portanto, concluímos a partir disso que o parâmetro κ tem como função aumentar os valores das energias da partícula. Em particular, como $\kappa = m_0 a$, vemos que o valor máximo de κ é obtido quando temos: $a \rightarrow r_c$ (raio clássico do elétron). Além disso, verificamos também que o valor máximo de Z para que as energias não tornam-se imaginárias é de $Z = 205$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z = 68$ para o caso $\Phi = 0$. Vemos a partir disso que os valores máximos de

Z para os casos da partícula com massa constante e variável são praticamente os mesmos. De fato, isso é consequência direta dos valores de κ ($0 \leq \kappa \ll 1$).

Daqui por diante, dedicaremos nossa atenção na forma original do spinor de Dirac para os estados ligados. Entretanto, como discutimos no início da seção anterior que este capítulo pode ser considerado a versão com massa variável das seções 2.2 e 2.3, faremos sem perda de generalidade e por economia de notação as substituições $m_0 \rightarrow m(\rho)$, $\gamma \rightarrow \bar{\gamma}$ e $z \rightarrow \bar{z}$ em (2.59). De fato, podemos fazer essas substituições porque como vimos anteriormente, os resultados aqui apresentados se reduzem aos da seção 2.2 no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$). Desse modo, obtemos explicitamente a forma geral do spinor de Dirac para os estados ligados da partícula com MEDP como [96]:

$$\Psi_{N,m_l}(\rho, \theta, t) = \begin{pmatrix} e^{i[(m_l-1/2)\theta - Et/\hbar]} [\bar{F}^+(\rho) + i\bar{G}^-(\rho)] \\ e^{i[(m_l+1/2)\theta - Et/\hbar]} [\bar{F}^-(\rho) - i\bar{G}^+(\rho)] \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

onde

$$\bar{D}^s \equiv \frac{\bar{C}^s (2\eta)^{\bar{\gamma} + (1-s)/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (s = \pm 1), \quad (4.20)$$

$$\bar{F}^s(\rho) \equiv \bar{D}^s \rho^{\bar{\gamma}-s/2} e^{-\eta\rho} L_N^{2\bar{\gamma}-s}(2\eta\rho) \left[\frac{s}{m(\rho)c} \left(\frac{E}{c} + \frac{Z\alpha\hbar}{\rho} \right) + 1 \right], \quad (4.21)$$

$$\bar{G}^s(\rho) \equiv \frac{\hbar\bar{D}^s}{m(\rho)c} \rho^{\bar{\gamma}-s/2} e^{-\eta\rho} \left[L_N^{2\bar{\gamma}-s}(2\eta\rho) \left(\eta + \frac{(m_l s - \frac{1-s}{2} - \bar{\gamma} + s\frac{\Phi}{\Phi_0})}{\rho} \right) + L_{N-1}^{2\bar{\gamma}+1-s}(2\eta\rho) \right]. \quad (4.22)$$

Por outro lado, para obter o spinor de Dirac para a partícula livre com MEDP, basta considerar $\Phi = Z = 0$ em (4.19). Consequentemente, podemos obter a partir disso todos os observáveis associados a partícula livre. Por exemplo, é sabido na literatura que as soluções de uma equação de onda (relativística e não-relativística) para uma partícula livre com massa constante não podem ser normalizáveis, ou seja, não representam estados fisicamente realizáveis [10]. Porém, existem exceções quanto a isso, pois além do spinor de Dirac para o caso da partícula livre com MEDP ainda poder ser normalizável, satisfaz às seguintes condições de contorno: $\Psi(\rho \rightarrow 0, \theta, t) = \Psi(\rho \rightarrow \infty, \theta, t) = 0$.

4.3 Limite não-relativístico

Nesta seção, vamos analisar o limite não-relativístico de nossos resultados, em especial, da Eq. (4.9) e do espectro de energia (4.16). Neste caso, devemos usar além da prescrição padrão: $E \cong \varepsilon + m_0 c^2$ e $Z\alpha \ll 1$, também o limite não-relativístico da MEDP da partícula. Em particular, neste limite obtemos aproximadamente a massa de repouso, ou seja, $m(\rho) \cong m_0$, onde $\kappa \ll 1$, ou ainda, $c\kappa/\hbar \ll 1$. Então, aplicando essas informações na Eq. (4.9), obtemos a

seguinte ES para uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(c^2 \kappa - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \right] f^+(\rho) = \varepsilon f^+(\rho), \quad (4.23)$$

onde $m \equiv m_l - 1/2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $f^+(\rho) = \phi^+(\rho)/\sqrt{\rho}$ e usamos o parâmetro s com o sinal positivo ($s = +1$), no qual representa o estado de da partícula. É oportuno mencionar que embora a constante c^2 apareça explicitamente na Eq. (4.23), aparentando assim ser uma equação de onda relativística, tal constante é cancelada devido a existência do parâmetro κ , logo, temos realmente uma equação de onda não-relativística. Então, comparando a Eq. (4.23) com a literatura, vemos que no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), obtemos a ES para uma partícula sob a influência do sistema ABC (Ver Eq. (2.62)). No entanto, na ausência do efeito AB ($\Phi \rightarrow 0$), obtemos a ES com MEDP na presença do potencial de Coulomb 2D, ou, a ES para o átomo de hidrogênio 2D com MEDP ($Z = 1$). Agora, na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), obtemos a ES para uma partícula livre com MEDP.

Para analisarmos o limite não-relativístico do espectro de energia (4.16), devemos utilizar uma expansão em série de Taylor. Diferentemente da seção 2.3, aqui devemos usar uma série de Taylor para uma função de duas variáveis. Portanto, definindo $x \equiv (Z\alpha)^2$ e $y \equiv (c\kappa/\hbar)^2$ em (4.16), podemos escrever o espectro de energia não-relativístico como segue:

$$\varepsilon(x, y) = m_0 c^2 f(x, y) - m_0 c^2, \quad (4.24)$$

onde

$$f(x, y) = \left[\frac{\sqrt{xy}}{\bar{n}(x, y)} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{xy}}{\bar{n}(x, y)} \right)^2 - \frac{1}{\bar{n}(x, y)} [x + y]} \right], \quad (4.25)$$

sendo

$$\bar{n}(x, y) = \left(n - |m_l| - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - x + y} \right)^2 + x. \quad (4.26)$$

Então, expandindo $f(x, y)$ em uma série de Taylor de primeira ordem, obtemos:

$$f(x, y) \cong f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y = f(x) \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2} - Q \right)^2} [x + y]. \quad (4.27)$$

onde $Q \equiv |m_l| - |m_l + \frac{\Phi}{\Phi_0}|$.

Portanto, substituindo (2.48) em (2.63), obtemos explicitamente o espectro de energia de uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC:

$$\varepsilon_{n, m_l} = -\frac{Z^2 \bar{\varepsilon} + \nu}{\left(n - \frac{1}{2} - Q \right)^2}, \quad (4.28)$$

onde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_0c^2\alpha^2 \cong 13.6 \text{ eV}, \quad \nu \equiv \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{c^2\kappa}{\hbar} \right)^2 \cong 11.9 \text{ eV}. \quad (4.29)$$

Como podemos observar a partir da espectro de energia (4.28), o termo ν devido a MEDP tem a função de aumentar os valores das energias de ionização da partícula. Em especial, para obter o valor deste termo consideramos o mesmo κ usado para construir a Tabela 8. Além disso, vemos que o limite do contínuo (clássico) onde $\varepsilon \rightarrow 0$, é obtido no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$) juntamente com a ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$), quando temos um fluxo magnético intenso ($\Phi \rightarrow \infty$) ou números quânticos muito grandes ($n, m_l \rightarrow \infty$). Agora, comparando o espectro de energia (4.28) com a literatura, vemos que no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), obtemos o espectro de energia de uma partícula sob a influência do sistema ABC (Ver expressão (2.67)). Já na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), obtemos o espectro de energia de uma partícula livre com MEDP. Por último e não menos importante, fazendo $n = 1$, $m_l > 0$ e $Z = 137$ em (4.28), obtemos $|\varepsilon_1| \cong 0.213 \text{ MeV}$ (mais que o dobro do caso da massa constante), ou seja, a energia do estado fundamental é da mesma ordem de grandeza que a energia de repouso da partícula ($E_0 = 0.511 \text{ MeV}$), logo, podemos dizer que a condição $Z \ll 137$ é uma condição mais do que suficiente para que o espectro de energia (2.67) seja não-relativístico.

Na Tabela 10, encontram-se os valores das energias de ligação para o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$) com cinco valores de Z , onde tomamos $m_l = 1/2$.

Tabela 10: Energias não-relativísticas da partícula com MEDP para o estado fundamental e primeiro estado excitado.

Z	$\varepsilon_{1,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2}^{\Phi=\Phi_0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{1,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$	$\varepsilon_{2,1/2}^{\Phi=0}/m_0c^2$
1	-0.0000000463	-0.0000000171	-0.0000004260	-0.0000004740
2	-0.0000133946	-0.0000048229	-0.0001205989	-0.0000133987
3	-0.0000504212	-0.0000181528	-0.0004540760	-0.0000504437
4	-0.0001111304	-0.0000400087	-0.0010011992	-0.0001112137
5	-0.0001957229	-0.0000703930	-0.0017624482	-0.0001957568

Como podemos observar a partir da Tabela 10, além das energias de ligação da partícula para o primeiro estado excitado serem maiores do que as do estado fundamental, ambas diminuem de valores à medida que Z aumenta. Vemos ainda que o fluxo magnético Φ tem a função de aumentar os valores das energias de tal ponto que as energias do estado fundamental

com $\Phi = \Phi_0$ são ligeiramente maiores do que as do primeiro estado excitado com $\Phi = 0$. Além disso, embora as energias da Tabela 10 estejam expressas em termos da energia de repouso, vemos que a condição $\varepsilon \ll m_0 c^2$ ainda permanece satisfeita. Agora, comparando os resultados das Tabelas 10 e 2, vemos que as energias da partícula são maiores no caso da massa variável ($\kappa \neq 0$) do que no caso da massa constante ($\kappa = 0$), ou seja, o parâmetro κ tem como função aumentar os valores das energias da partícula.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na presente dissertação, estudamos a influência do sistema ABC na dinâmica quântica relativística e não-relativística do OD $(2 + 1)$ -dimensional e de uma partícula de Dirac com MEDP. Para obter as soluções de estado ligado desses dois problemas específicos, utilizamos os operadores projeção *left-handed* e *right-handed*, no qual possuem a finalidade projetar o spinor de Dirac nos seus respectivos spinores *left-handed* (“mão-esquerda”) e *right-handed* (“mão-direita”). Optamos por usar estes operadores ao invés de outras técnicas da literatura porque se mostraram extremamente úteis na determinação das soluções de estado ligado do átomo de hidrogênio relativístico $(3 + 1)$ -dimensional.

Antes de analisarmos as soluções dos dois problemas aqui propostos, fizemos no capítulo 2 uma revisão da literatura sobre o formalismo da ED, bem como um estudo aprofundado e detalhado sobre as soluções de estado ligado do sistema ABC para os casos relativístico e não-relativístico. Alguns tópicos abordados incluíam a ED na forma diferencial e covariante, propriedades das matrizes de Dirac, conceito de quiralidade e os três principais “problemas” gerados pela EKG, assim como a forma do spinor de Dirac e do espectro de energia relativístico e não-relativístico para os estados ligados do sistema. Em particular, além desta revisão ser considerada de fundamental importância para o entendimento da dissertação como um todo, forneceu as bases teóricas para alcançarmos o objetivo central desta pesquisa.

Nosso primeiro problema inicia-se no capítulo 3. Por razões didáticas, começamos nossa discussão com uma introdução sobre a origem do Hamiltoniano do OD, bem como seu espectro de energia e limite não-relativístico. Logo em seguida, fizemos uma investigação sobre a dinâmica quântica relativística e não-relativística do OD na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Com respeito aos resultados desta investigação, verificamos que o spinor de Dirac é escrito em termos das funções de Heun biconfluentes e o espectro de energia relativístico depende explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e da frequência ciclotron ω_c que caracteriza o campo magnético uniforme. Além deste espectro admitir estados de energia positiva e negativa, é uma função periódica com periodicidade $\pm\Phi_0$. Com o intuito de analisar a influência de Z e Φ nos níveis de energia do OD, fizemos uma discussão sobre o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$), onde notamos que Z tem como função aumentar os valores das energias, enquanto Φ tem como função diminuir. Contudo, o valor máximo de Z para que as energias não se tornem imaginárias é de $Z = 205$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z = 68$ para o caso $\Phi = 0$. Além disso, na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), do campo magnético uniforme ($\omega_c = 0$) e supondo que a frequência angular do OD seja constante ($\omega = \text{const.}$), os resultados do OD usual são recuperados.

Por outro lado, ao procurar pelos estados ligados relativísticos do OD, observamos um efeito quântico peculiar: as frequências angulares do OD também são quantizadas em termos dos números quânticos n e m_l e do parâmetro s que representa as duas componentes do spinor de Dirac. Em particular, além destas frequências serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à frequência ciclotron e aumentam quadraticamente com Z e as energias do sistema. Vale a pena destacar que por consequência direta deste resultado incomum, implica que os valores das energias do estado fundamental são ligeiramente maiores do que as do primeiro estado excitado para todos os valores possíveis de Z e m_l . Diante disso, podemos supor que caso o OD sob a influência do sistema ABC seja testado em laboratório (com ou sem a presença de ω_c), assim como já foi feito para o caso $\Phi = Z = 0$, esperamos que as frequências angulares do oscilador sejam quantizadas assim como seu espectro de energia.

Ao analisarmos o limite não-relativístico do nosso primeiro problema, obtemos a equação do OHQ com um forte acoplamento spin-orbita na presença de um campo magnético uniforme e sob a influência do sistema ABC. Contudo, verificamos que além do espectro de energia depender explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e da frequência ciclotron ω_c que caracteriza o campo magnético uniforme, é uma função periódica com periodicidade $\pm\Phi_0$. Ao fazermos uma discussão sobre as energias do estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$), observamos um comportamento semelhante ao do OD, ou seja, além das energias do estado fundamental serem maiores do que as do primeiro estado excitado, ambas aumentam de valores a medida que Z aumenta e diminuem a medida que Φ aumenta. Embora as energias do OHQ aumentam com Z crescente, verificamos que Z deve satisfazer as seguintes condições para que as energias não se tornam relativísticas: $Z \ll 108$ para $\Phi = \Phi_0$ e $Z \ll 61$ para $\Phi = 0$. Em particular, além das frequências angulares do OHQ também serem quantidades reais e positivas, são linearmente proporcionais à frequência ciclotron, aumentam quadraticamente com Z e linearmente com as energias do sistema.

Finalmente, nosso segundo e último problema inicia-se no capítulo 4. Neste capítulo, estudamos a dinâmica quântica relativística e não-relativística de uma partícula de Dirac com MEDP sob a influência do sistema ABC. Com respeito aos resultados deste estudo, verificamos que o spinor de Dirac é escrito em termos dos polinômios de Laguerre generalizados e o espectro de energia relativístico depende explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e do parâmetro κ que caracteriza a MEDP da partícula. Em particular, este espectro admite somente estados de energia positiva (antipartículas não são admissíveis). Com o intuito de analisar a influência de Z , Φ e κ nos níveis de energia da partícula, fizemos uma discussão sobre o estado fundamental ($n = 1$) e primeiro estado excitado ($n = 2$), onde observamos que Φ e κ têm como funções aumentar os valores das energias, enquanto Z tem como função diminuir. Em especial, quando tomamos o limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$)

de nossos resultados, o spinor de Dirac e espectro de energia do sistema ABC relativístico são recuperados. Aliás, o valor máximo de Z para que as energias não se tornam imaginárias é de $Z = 205$ para o caso $\Phi = \Phi_0$ e $Z = 68$ para o caso $\Phi = 0$.

No entanto, verificamos que mesmo na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), o espectro de energia da partícula e antipartícula livre com MEDP ainda permanece quantizado (discreto) em termos dos números quânticos n e m_l e do parâmetro s . De acordo com a literatura, podemos tranquilamente interpretar este resultado devido ao fato de que uma partícula relativística de spin-1/2 com MEDP é equivalente a ED com acoplamento escalar, onde o potencial escalar é do tipo-Coulomb 2D (ou potencial escalar de Lorentz). Algumas características desse espectro de energia é que no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), assim como no limite do contínuo ou clássico ($n, m_l \rightarrow \infty$), obtemos a energia de repouso da partícula e antipartícula (máxima energia permitida). Além disso, esse espectro de energia aumenta ou diminui de valores de acordo com os valores de κ , por exemplo, no limite $\kappa \rightarrow \infty$, o espectro de energia tende a zero ($E \rightarrow 0$), enquanto para valores entre $0 \leq \kappa \ll 1$, o espectro de energia aumenta.

Ao analisarmos o limite não-relativístico do nosso último problema, obtemos a ES para uma partícula com MEDP sob a influência do sistema ABC, cujo espectro de energia de tal equação depende explicitamente dos parâmetros Z e Φ que caracterizam o sistema ABC e do parâmetro κ que caracteriza a MEDP da partícula. Análogo ao caso relativístico, Φ e κ têm como função aumentar os valores das energias, enquanto Z tem como função diminuir. Além disso, para que o espectro de energia seja não-relativístico, Z tem que satisfazer a condição $Z \ll 137$. Por último e não menos importante, verificamos que no limite da massa constante ($\kappa \rightarrow 0$), o espectro de energia do sistema ABC não-relativístico é recuperado, enquanto na ausência do sistema ABC ($\Phi = Z = 0$), o espectro de energia de uma partícula livre com MEDP é recuperado.

Como perspectivas para futuros trabalhos baseados nesta pesquisa, podemos indicar os seguintes caminhos:

1. Analisar a dinâmica do sistema ABC sujeito à violação da simetria de Lorentz;
2. Estudar a influência do sistema ABC em outros contextos da física, tal como nas propriedades físicas do grafeno, espaços-tempos curvos, cenário do comprimento mínimo, princípio da incerteza generalizado, etc;
3. Investigar outros possíveis casos onde as frequências angulares do OD sejam quantizadas;
4. Determinar as soluções de estado ligado de uma partícula com momentos de dipolos elétrico e magnético e sob a influência do sistema ABC.

REFERÊNCIAS

- [1] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2000. J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, New York: McGraw-Hill, 1964.
- [2] D. H. Perkins, *Introduction to high energy physics*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] B. R. Martin, G. Shaw, *Particle Physics, Manchester Physics Series*, v. 4, Wiley, 2008.
- [4] P. Pyykko, *Relativistic quantum chemistry. In Advances in quantum chemistry*, v. 11, Academic Press, 1978.
- [5] P. Strange, *Relativistic quantum mechanics: with applications in condensed matter and atomic physics*, Cambridge University Press, New York, 1998.
- [6] P. Mohn, *Magnetism in the solid state: an introduction*, v. 134, Springer Science and Business Media, 2006.
- [7] C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933).
- [8] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature* **438**, 197 (2005). M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Nat. Phys.* **2**, 620 (2006). A. C. Neto, F. Guinea, N. M. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009). A. K. Geim, *science* **324**, 1530-1534 (2009). A. K. Geim, K. S. Novoselov, In *Nanoscience and Technology: A Collection of Reviews from Nature Journals* (pp. 11-19) (2010).
- [9] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [10] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, 2nd ed., Pearson Prentice Hall, 2004.
- [11] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 3 (1960). A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792 (1986). P. Recher, B. Trauzettel, A. Rycerz, Y. M. Blanter, C. W. J. Beenakker, A. F. Morpurgo, *Phys. Rev. B* **76**, 235404 (2007).
- [12] S. H. Dong, *Phys. Scr.* **67**, 89 (2003). S. H. Dong, Z. Q. Ma, *Phys. Lett. A* **312**, 78-83 (2003). S. H. Dong, M. Lozada-Cassou, *Phys. Lett. A* **330**, 168-172 (2004). S. H. Dong, G. H. Sun, *Phys. Scr.* **69**, 161 (2004). W. C. Qiang, R. S. Zhou, Y. Gao, *Phys. Lett. A* **333**, 8-15 (2004). S. Haouat, L. Chetouani, *J. Math. Phys.* **53**, 063503 (2012).
- [13] B. Zaslav, M. E. Zandler, *Am. J. Phys.* **35**, 1118-1119 (1967). X. L. Yang, S. H. Guo, F. T. Chan, K. W. Wong, W. Y. Ching, *Phys. Rev. A* **43**, 1186 (1991). C. Grimaldi, *Phys. Rev. B* **77**, 113308 (2008). A. I. Safonov, S. A. Vasilyev, I. S. Yasnikov, I. I. Lukashevich, S. Jaakkola, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4545 (1998).
- [14] R. R. Biswas, S. Sachdev, D. T. Son, *Phys. Rev. B* **76**, 205122 (2007). V. M. Pereira, J. Nilsson, A. C. Neto, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 166802 (2007). E. H. Hwang, S. D. Sarma, *Phys. Rev. B* **75**, 205418 (2007). D. S. Novikov, *Phys. Rev. B* **76**, 245435 (2007). V. M. Pereira,

- V. N. Kotov, A. C. Neto, Phys. Rev. B **78**, 085101 (2008). S. D. Sarma, S. Adam, E. H. Hwang, E. Rossi, Rev. Mod. Phys. **83**, 407 (2011). V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, A. C. Neto, Rev. Mod. Phys. **84**, 1067 (2012).
- [15] W. Kohn, J.M. Luttinger, Phys. Rev. **98**, 915 (1955)
- [16] H. D. Doebner, E. Papp, Phys. Lett. A **144**, 423-426 (1990). C. R. Hagen, Phys. Rev. D **48**, 5935 (1993). C. R. Hagen, D. K. Park, Ann. Phys. **251**, 45 (1996). C. R. Hagen, Phys. Rev. A **77**, 036101 (2008).
- [17] L. X. Hai, L. I. Komarov, T. S. Romanova, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 6461 (1992). V. M. Villalba, J. Math. Phys. **36**, 3332 (1995).
- [18] G. E. Draganascu, C. Campigotto, M. Kibler, Phys. Lett. A **170**, 339-343 (1992).
- [19] H. T. T. Nguyen, P. A. Meleshenko, A. V. Dolgikh, A. F. Klinskikh, Eur. Phys. J. D **62**, 361 (2011).
- [20] S. M. Ikhdair, B. J. Falaye, M. Hamzavi, Ann. Phys. **353**, 282-298 (2015).
- [21] P. A. Meleshenko, H. T. Nguyen, A. F. Klinskikh, Eur. Phys. J. D **67**, 209 (2013).
- [22] J. Bornales, C. C. Bernido, M. V. Carpio-Bernido, Phys. Lett. A **260**, 447-452 (1999). D.-H. Lin, J. Math. Phys. **40**, 1246 (1999).
- [23] Q. G. Lin, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 5049 (2000). F. A. B. Coutinho, J. F. Perez, Phys. Rev. D **48**, 932 (1993).
- [24] V. R. Khalilov, Theor. Math. Phys. **158**, 210-220 (2009). V. R. Khalilov, Eur. Phys. J. C **73**, 2548 (2013). V. R. Khalilov, I. V. Mamsurov, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650032 (2016).
- [25] V. R. Khalilov, Eur. Phys. J. C **74**, 3061 (2014). V. R. Khalilov, I. V. Mamsurov, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650032 (2016). I. V. Mamsurov, V. R. Khalilov, Theor. Math. Phys. **188**, 1181-1196 (2016).
- [26] Y. Nishida, Phys. Rev. B **94**, 085430 (2016).
- [27] E. Jung, M. R. Hwang, C. S. Park, D. Park, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 055301 (2012).
- [28] V. R. Khalilov, Theor. Math. Phys. **175**, 637-654 (2013).
- [29] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L817, (1989). M. Moshinsky, G. Loyola, Found. Phys. **23**, 197 (1993).
- [30] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A **311**, 93 (2003). M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. R. Landim, Europhys. Lett. **108**, 10005 (2014). A. Boumali, H. Hassanabadi, Eur. Phys. J. Plus **128**, 124 (2013). H. Hassanabadi, S. Sargolzaeipor, B. H. Yazarloo, Few-Body Syst. **56**, 115-124 (2015).
- [31] R. P. Martínez-y Romero, H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, Eur. J. Phys. **16**, 135 (1995). J. Benítez, Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, Phys. Rev. Lett. **64**, 1643 (1990). R. P. Martínez-y-Romero, A. L. Salas-Brito, J. Math. Phys. **33**, 1831-1836 (1992). R. V. Maluf, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4991 (2011). R. Szymtkowski, M. Gruchowski, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 4991 (2001).

- [32] J. Munarriz, F. Dominguez-Adame, R. P. A. Lima, Phys. Lett. A **376**, 3475-3478 (2012). D. A. Kulikov, I. V. Uvarov, A. P. Yaroshenko, Cent. Eur. J. Phys. **11**, 1006-1015 (2013). J. Grineviciute e D. Halderson. Phys. Rev. C **85**, 054617 (2012). J. Grineviciute, D. Halderson, Phys. Rev. C **80**, 044607 (2009).
- [33] O. L. de Lange, J. Math. Phys. **32**, 1296 (1991).
- [34] Y. X. Wang, J. Cao, S. J. Xiong, Eur. Phys. J. B **85**, 237, (2012). S. Longhi, Opt. Lett. **35**, 1302, (2010). A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano. Phys. Rev. A **76**, 041801 (2007). V. V. Dodonov, J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **4**, R1 (2002).
- [35] M. Moshinsky, C. Quesne, Y. F. Smirnov, J. Phys. A **28**, 6447 (1995). V. V. Dixit, T. S. Santhanam, W. D. Thacker, J. Math. Phys. **33**, 1114, (1992). C. Quesne, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 1567 (1991). G. Junker, A. Inomata, J. Math. Phys. **59**, 052301 (2018).
- [36] C. Quimbay, P. Strange, *Graphene physics via the Dirac oscillator in (2+1) dimensions*, arXiv: 1311.2021, 2013. A. Boumali, Phys. Scrip. **90**, 045702 (2015). A. Belouad, A. Jellal, Y. Zahidi. Phys. Lett. A **380**, 773 (2016).
- [37] K. Bakke, C. Furtado, Phys. Lett. A **376**, 1269-1273 (2012). M. J. Bueno, J. L. de Melo, C. Furtado, A. M. D. M. Carvalho, Eur. Phys. J. Plus **129**, 201 (2014). J. A. Neto, M. J. Bueno, C. Furtado (2016), Ann. Phys. **373**, 273-285. J. A. Neto, J. D. S. Oliveira, C. Furtado, S. Sergeenkov, Eur. Phys. J. Plus **133**, 185 (2018).
- [38] A. Bermudez, M. Martin-Delgado, A. Luis, Phys. Rev. A **77**, 063815 (2008). Y. L. Hou, Q. Wang, Z. G. Yuan, Z. W. Long, J. Jing, Phys. Rev. A **91**, 032120 (2015). C. Quimbay, P. Strange, *Quantum phase transition in the chirality of the (2+1)-dimensional Dirac oscillator*, arXiv: 1312.5251, 2013. M. Presilla, O. Panella, P. Roy, Phys. Rev. D **92**, 045019 (2015).
- [39] B. P. Mandal, S. K. Rai, Phys. Lett. A **376**, 2467 (2012). G. Melo, M. Montigny, P. Pompeia, E. Santos, Int. J. Theor. Phys. **52**, 441-457 (2013).
- [40] K. Bakke, Gen. Rel. Gravit. **45**, (2013) 1847. K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **127**, 82 (2012). K. Bakke, C. Furtado, Ann. Phys. **336**, 489-504 (2013). J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, Phys. Rev. A **84**, 032109 (2011). F. M. Andrade, E. O. Silva, Eur. Phys. J. C **74**, 3187 (2014).
- [41] C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1747 (2005). C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 10909 (2006). K. Nouicer, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 5125 (2006). S. Zarrinkamar, K. Jahankohan, H. Hassanabadi, Can. J. Phys. **93**, 1638-1641 (2015). L. Menculini, O. Panella, P. Roy, Phys. Rev. D **91**, 045032 (2015).
- [42] J.-A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T. H. Seligman, Phys. Rev. Lett. **111**, 170405 (2013).
- [43] S. Bruce, P. Minning, Nuovo Cimento A **106**, 711 (1993). A. Boumali, N. Messai, Can. J. Phys. **92**, 1460-1463 (2014).
- [44] R. L. L. Vitória, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **131**, 36 (2016). R. L. L. Vitória, C. Furtado, K. Bakke, Ann. Phys. **370**, 128 (2016). R. L. L. Vitória, H. Belich, K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **132**, 25 (2017).

- [45] A. Boumali, *J. Math. Phys.* **49**, 022302 (2008). Z. H. Yang, C. Y. Long, S. J. Qin, Z. W. Long, *Int. J. Theor. Phys.* **49**, 644-651 (2010). L. B. Castro, A. S. De Castro, *Phys. Lett. A* **375**, 2596-2600 (2011).
- [46] C. Kittel, P. McEuen, *Introduction to solid state physics*, v. 8, New York, Wiley, 1996.
- [47] R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd ed., New York, Wiley, 1985.
- [48] I. O. Vakarchuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 4727 (2005).
- [49] P. Ring, P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Nova York, 1980.
- [50] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure*, Les Editions de Physique, Les Ulis, 1988. O. von Roos, *Phys. Rev. B* **27**, 7547 (1983). O. von Roos, H. Mavromatis, *Phys. Rev. B* **31**, 2294 (1985). R. A. Morrow, K. R. Brownstein, *Phys. Rev. B* **30**, 678 (1984). K. Young, *Phys. Rev. B* **39**, 13434 (1989).
- [51] L. E. Oliveira, *Phys. Rev. B* **38**, 10641 (1988). X. H. Qi, X. J. Kong, J. J. Liu, *Phys. Rev. B* **58**, 10578 (1998). G. H. Herling, M. L. Rustgi, *J. Appl. Phys.* **71**, 796-799 (1992). Y. X. Li, J. J. Liu, X. J. Kong, *J. Appl. Phys.* **88**, 2588-2592 (2000). F. Q. Zhao, X. X. Liang, S. L. Ban, *Eur. Phys. J. B* **33**, 3-8 (2003).
- [52] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots*, Wiley, New York, 2000.
- [53] L. Serra and E. Lipparini, *Europhys. Lett.* **40**, 667 (1997). A. J. Peter, K. Navaneethakrishnan, *Physica E* **40**, 2747-2751 (2008). R. Khordad, *Physica B* **406**, 3911-3916 (2011). Y. Naimi, J. Vahedi, M. R. Soltani, *Opt. Quant. Electron.* **47**, 2947-2956 (2015).
- [54] R. Khordad, *Physica E* **42**, 1503-1508 (2010).
- [55] F. A. de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, *Phys. Rev. B* **50**, 4248 (1994).
- [56] S. M. Ikhdaïr, *Chem. Phys.* **361**, 9-17 (2009). S. M. Ikhdaïr, *Mol. Phys.* **110**, 1415-1428 (2012). S. Miraboutalebi, *J. Theor. Appl. Phys.* **10**, 323-328 (2016).
- [57] S. C. y Cruz, J. Negro, L. M. Nieto, *Phys. Lett. A* **369**, 400-406 (2007). R. A. Kraenkel, M. Senthilvelan, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 415303 (2009). N. Amir, S. Iqbal, *Commun. Theor. Phys.* **62**, 790 (2014). D. X. Macedo, I. Guedes, *Physica A* **434**, 211-219 (2015).
- [58] F. S. A. Cavalcante, R. N. Costa Filho, J. Ribeiro Filho, C. A. S. De Almeida, V. N. Freire, *Phys. Rev. B* **55**, 1326 (1997). A. R. Plastino, A. Rigo, M. Casas, F. Garcias, A. Plastino, *Phys. Rev. A* **60**, 4318, (1999). S. Koç, M. Koca, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 8105 (2003).
- [59] A. Alhaidari, H. Bahlouli, A. Al-Hasan, M. Abdelmonem, *Phys. Rev. A* **75**, 062711 (2007). M. Eshghi, M. R. Abdi, *Chin. Phys. C* **37**, 053103 (2013). M. Chabab, A. El Batoul, H. Hassanabadi, M. Oulne, S. Zare, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 387 (2016).
- [60] A. Alhaidari, *Phys. Lett. A* **322**, 72 (2004).
- [61] M. Eshghi, M. Hamzavi, S. M. Ikhdaïr, *Chin. Phys. B* **22**, 030303 (2013).
- [62] S. M. Ikhdaïr, R. Sever, *Appl. Math. Comput.* **216**, 545 (2010). M. Hamzavi, A. A. Rajabi, H. Hassanabadi, *Phys. Lett. A* **374**, 4303-4307 (2010). S. Ortakaya, *Few-Body Syst.* **54**, 2073-2080 (2013).

- [63] C. S. Jia, A. S. Dutra, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 11877 (2006). C. S. Jia, A. S. Dutra, Ann. Phys. **323**, 566 (2008). L. B. Castro, Phys. Lett. A **375**, 2510-2512 (2011). O. Mustafa, S. H. Mazharimousavi, Int. J. Theor. Phys. **47**, 1112-1120 (2008). S. Longhi, Phys. Rev. Lett. **105**, 013903 (2010).
- [64] R. Renan, M. Pacheco, C. A. S. Almeida, J. Phys. A **33**, L509 (2000).
- [65] P. Alberto, C. Fiolhais, V. M. S. Gil, Eur. J. Phys. **17**, 19 (1996). P. Alberto, S. Das, E. C. Vagenas, Phys. Lett. A **375**, 1436-1440 (2011).
- [66] S. Das, E. C. Vagenas, A. F. Ali, Phys. Lett. B **690**, 407-412 (2010). P. Pedram, Phys. Lett. B **702**, 295-298 (2011). P. Pedram, Phys. Lett. B **710**, 478-485 (2012).
- [67] G. D. A. Marques, V. B. Bezerra, S. H. Dong, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350137 (2013).
- [68] N. M. R. Peres, A. C. Neto, F. Guinea, Phys. Rev. B **73**, 241403 (2006). P. Carmier, D. Ullmo, Phys. Rev. B **77**, 245413 (2008). G. W. Semenoff, V. Semenoff, F. Zhou, Phys. Rev. Lett. **101**, 087204 (2008). V. Jakubský, D. Krejčířík, Ann. Phys. **349**, 268-287 (2014). M. Zarenia, O. Leenaerts, B. Partoens, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **86**, 085451 (2012). L. J. P. Xavier, D. R. da Costa, A. Chaves, J. M. Pereira Jr, G. A. Farias, J. Phys. Condens. Matter **28**, 505501 (2016).
- [69] C. L. Ho, P. Roy, Europhys. Lett. **124**, 60003 (2019).
- [70] P. R. Auvil, L. M. Brown, Am. J. Phys. **46**, 679 (1978). R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, C. F. Roos, Nature **463**, 68 (2010). E. Marsch, Symmetry **7**, 450-463 (2015).
- [71] W. T. Grandy, *Relativistic quantum mechanics of leptons and fields*, v. 41, Springer, 2012.
- [72] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford university press, 1981. P. A. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **117**, 610-624 (1928). P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **118**, 351-361 (1928). P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **126**, 360-365 (1930). B. Thaller, *The Dirac Equation*, Springer-Verlage, 2013.
- [73] T. O. Wehling, A. M. Black-Schaffer, A. V. Balatsky, Adv. Phys. **63**, 1-76 (2014). D. T. Son, Phys. Rev. X **5**, 031027 (2015).
- [74] J. J. Sakurai, J. J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*, 2nd ed., Pearson Education, 2010.
- [75] J. B. Neto, *Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinors*, v. 1, Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [76] M. Ezawa, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 094701 (2007).
- [77] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd ed., Wiley-VCH, 2008.
- [78] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks And Leptons. An Introductory Course In Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [79] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed., Prentice Hall, 1990.

- [80] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, E. Mottola, Phys. Rev. D **45**, 4659 (1992).
- [81] V. M. Villalba, A. R. Maggiolo, Eur. Phys. J. B **22**, 31 (2001).
- [82] F. M. Andrade, E. O. Silva, Europhys. Lett. **108**, 30003 (2014).
- [83] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York, 1965.
- [84] S. N. M. Ruijsenaars, Ann. Phys. **146**, 1-34 (1983). O. Bergman, G. Lozano, Ann. Phys. **229**, 416-427 (1994).
- [85] V. M. Pereira, V. N. Kotov, A. C. Neto, Phys. Rev. B **78**, 085101 (2008). O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, Phys. Rev. B **80**, 165429 (2009).
- [86] R. V. M. Cavalcante, *Oscilador de Dirac: Implicações da Violação da Simetria de Lorentz e da Massa Dependente da Posição*, Dissertação, Universidade Federal do Ceará, 2008.
- [87] M. Moreno, A. Zentella, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L821 (1989). E. Sadurni, AIP Conference Proceedings **1334**, 249-290 (2011).
- [88] J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, Phys. Rev. A **84**, 032109 (2011).
- [89] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [90] R. R. S. Oliveira, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, Ann. Phys. **400**, 1-8 (2019).
- [91] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, 1995.
- [92] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6nd. ed., Elsevier Academic Press, New York, 2005.
- [93] R. L. L. Vitória, K. Bakke, Int. J. Mod. Phys. D **27**, 1850005 (2018).
- [94] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano, Phys. Rev. Lett. **99**, 123602 (2007).
- [95] R. L. L. Vitória, K. Bakke, H. Belich, Ann. Phys. **399**, 117-123 (2018).
- [96] R. R. S. Oliveira, A. A. Araujo Filho, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *The relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system with position-dependent mass*, arXiv: 1812.07756, 2018.
- [97] R. Citro, F. Romeo, Phys. Rev. B **73**, 233304 (2006). R. Citro, F. Romeo, M. Marinaro, Phys. Rev. B **74**, 115329 (2006). J. Nitta, T. Bergsten, New J. Phys. **9**, 341 (2007). B. Reulet, M. Ramin, H. Bouchiat, D. Mailly, Phys. Rev. Lett. **75**, 124 (1995). U. Aeberhard, K. Wakabayashi, M. Sigrist, Phys. Rev. B **72**, 075328 (2005). I. A. Shelykh, N. T. Bagraev, N. G. Galkin, L. E. Klyachkin, Phys. Rev. B **71**, 113311 (2005). R. R. Oliveira, A. A. Araújo Filho, F. C. E. Lima, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Thermodynamic properties of an Aharonov-Bohm quantum ring*, arXiv: 1812.08607, 2018.
- [98] H. F. Cheung, Y. Gefen, E. K. Riedel, W. H. Shih, Phys. Rev. B **37**, 6050 (1988). A. Lorke, R. J. Luyken, A. O. Govorov, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia, P. M. Petroff, Phys. Rev. Lett. **84**, 2223 (2000). S. Viefers, P. Koskinen, P. S. Deo, M. Manninen, Physica E **21**, 1 (2004).

APÊNDICE A - O EFEITO AHARONOV-BOHM

Neste apêndice, faremos um estudo sucinto sobre as principais características do efeito AB. Para determinar as funções de onda e o espectro de energia de uma partícula carregada sob a influência do efeito AB e do potencial de Coulomb, faremos uso da ES em coordenadas polares. Além disso, consideraremos o caso restrito onde a coordenada radial é uma constante. Desse modo, a partícula fica confinada em uma estrutura chamada de anel quântico AB unidimensional (1D), no qual é um modelo bastante estudado na literatura [97].

De acordo com a eletrodinâmica clássica, os potenciais eletromagnéticos \mathbf{A} e A_0 , denominados de potenciais vetor e escalar, respectivamente, não são quantidades diretamente mensuráveis, embora sejam usados para definir as quantidades físicas realmente mensuráveis, ou seja, os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} . Explicitamente, estes campos podem ser expressos em termos dos potenciais na seguinte forma (em unidades do SI) [10]:

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.1})$$

Em contrapartida, as leis fundamentais da eletrodinâmica (equações de Maxwell e a lei da força de Lorentz) não fazem nenhuma referência aos potenciais, em outras palavras, do ponto de vista lógico e formal, os potenciais não são mais que ferramentas matemáticas convenientes para simplificar os cálculos, embora sejam construções teóricas dispensáveis [9, 10, 74]. Na realidade, podemos sem problema algum alterar a forma dos potenciais, conseqüentemente, obtemos a partir disso as chamadas transformações de gauge (calibre). Em particular, essas transformações são dadas por:

$$A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad (\text{A.2})$$

onde Λ é qualquer função da posição e do tempo. Vale a pena mencionar que Λ não tem efeito nos campos. De fato, aplicando as transformações (A.2) em (A.1), obtemos: $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$. Além disso, como os campos são invariantes sob as transformações de gauge, ocorre nesse caso a chamada invariância ou simetria de gauge.

Por outro lado, no contexto da MQ, as coisas funcionam de forma um tanto diferente, onde agora as quantidades de interesse que desempenham um papel significativo na dinâmica de uma partícula carregada são os potenciais. Por exemplo, na MQ o Hamiltoniano

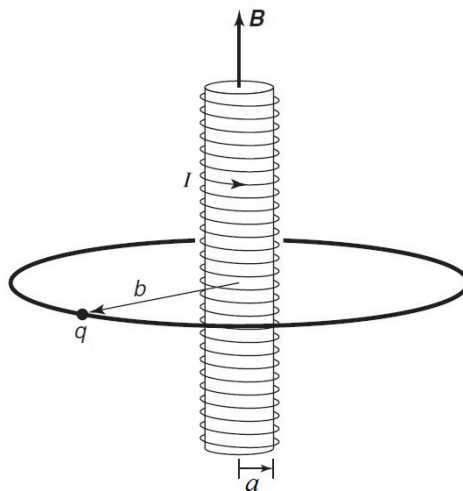
de Schrödinger é expresso em termos de \mathbf{A} e A_0 (e não de \mathbf{E} e \mathbf{B}) na seguinte forma [10, 79]:

$$H_S = \frac{1}{2m_0}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + V(\rho), \quad (\text{A.3})$$

onde $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ é o operador momento, q é carga elétrica da partícula e $V(\rho) = qA_0$ é o potencial de Coulomb 2D. Por um longo tempo a literatura considerou que não poderia haver influências eletromagnéticas em regiões onde \mathbf{E} e \mathbf{B} fossem nulos (neste caso a força de Lorentz também é nula). No entanto, em 1959, os físicos Y. Aharonov e D. Bohm [9] publicaram um artigo no qual demonstraram que \mathbf{A} pode afetar o comportamento quântico da partícula carregada mesmo ela estando em regiões onde o campo eletromagnético é nulo ($\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$).

Agora, focaremos nossa atenção nas soluções de estado ligado de uma partícula sob a influência do efeito AB. Por simplicidade, tomaremos a coordenada radial do problema como sendo uma constante ($\rho = \text{const.}$), conseqüentemente, a partícula é restrita a se mover em um círculo de raio b (circunferência de um anel de arame, por exemplo). Em especial, ao longo do eixo- z existe um solenóide de raio a ($a < b$) carregando uma corrente elétrica constante I . Na Figura 1, é mostrado uma partícula de carga q confinada (“orbitando”) em um anel AB.

Figura 1: Partícula carregada confinada em um anel quântico AB.



Fonte: Adaptado da Ref. [10].

Contudo, se o solenóide for extremamente longo, o campo magnético interno será uniforme, enquanto fora o campo é zero, porém, o potencial vetor não é zero. De fato, fixando o gauge na forma $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, podemos escrever o potencial vetor do efeito AB como [9, 10]:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi b} \hat{e}_\theta, \quad (b > a), \quad (\text{A.4})$$

onde Φ é o fluxo magnético dentro do solenóide.

Portanto, escrevendo o Hamiltoniano (A.3) em coordenadas polares, obtemos a se-

guinte seguinte ES para o anel AB na presença do campo de Coulomb:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\theta, t)}{\partial t} = H_{anel} \Psi(\theta, t), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$H_{anel} = \frac{1}{2m_0} \left[- \left(\frac{\hbar}{b} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - i \left(\frac{e\hbar\Phi}{\pi b^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{e\Phi}{2\pi b} \right)^2 \right] - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}, \quad (q = -e). \quad (\text{A.6})$$

Em particular, podemos considerar a ES dada em (A.5) como sendo a versão com raio constante da ES que governa o sistema ABC não-relativístico, embora ambas as respectivas equações sejam bem distintas (Ver Eq. (2.62)). Diferentemente da literatura, decidimos incluir o potencial de Coulomb 2D na Eq. (A.5), assim, temos uma espécie de anel quântico ABC.

Assumindo que (A.5) admita estados estacionários, podemos escrever a função de onda como: $\Psi(\theta, t) = e^{-i\epsilon t/\hbar} \psi(\theta)$. Desse modo, reescreveremos (A.5) na seguinte forma:

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + 2i\beta \frac{d}{d\theta} + \epsilon \right] \psi(\theta) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\beta = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \epsilon = \left(\frac{b}{\hbar} \right)^2 \left(2m_0\epsilon + \frac{Ze^2 m_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \right) - \beta^2, \quad \left(\Phi_0 \equiv \frac{h}{e} \right). \quad (\text{A.8})$$

Na Eq. (A.7), temos uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é dada por: $\psi(\theta) = Ae^{i\lambda\theta}$, sendo λ um parâmetro real e A é uma constante de normalização. Sendo assim, substituindo esta solução em (A.7), obtemos:

$$\lambda = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2m_0\epsilon + \frac{Ze^2 m_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}}. \quad (\text{A.9})$$

Partindo do fato de que a função de onda é uma função periódica: $\Psi(\theta + 2\pi, t) = \Psi(\theta, t)$, implica que λ deve ser um inteiro: $\lambda = n$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Portanto, usando esta informação, obtemos o seguinte espectro de energia de uma partícula confinada em um anel quântico ABC:

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m_0 b^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}, \quad (\text{A.10})$$

sendo n um número quântico, onde $n > 0$ representa uma partícula se movendo no mesmo sentido que a corrente do solenóide, enquanto para $n < 0$, temos uma partícula se movendo no sentido oposto, respectivamente. Vemos que além do espectro de energia ser uma função periódica com periodicidade $\pm\Phi_0$, ou seja, $\epsilon_n(\Phi \pm \Phi_0) = \epsilon_{n\mp 1}(\Phi)$, depende explicitamente do raio do anel (a) e do número atômico (Z). Em particular, na ausência do campo de Coulomb ($Z = 0$), temos o espectro de energia de um anel quântico AB [10, 97]. Mais importante que isso, as energias da partícula dependem claramente do campo magnético dentro do solenóide,

mesma ela estando localizada numa região onde o campo é zero. Além disso, a presença do efeito AB quebra a degenerescência do sistema, uma vez que para $\Phi = Z = 0$, obtemos o espectro de um anel quântico usual com dupla degenerescência (exceto para $n = 0$) [10].

Com respeito a forma das funções de onda normalizadas, são obtidas através da seguinte condição de normalização:

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(\theta, t)|^2 d\theta = 1. \quad (\text{A.11})$$

Desse modo, as funções de onda normalizadas para a partícula são dadas por:

$$\Psi_n(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n\theta - \varepsilon t/\hbar)}. \quad (\text{A.12})$$

Na verdade, as funções de onda dadas em (A.12) são de uma partícula confinada em um anel quântico usual [98], uma vez que não leva em consideração o fluxo magnético Φ do efeito AB. Para obtermos a forma geral, devemos incluir um fator de fase dado por: e^{ig} , sendo g uma diferença de fase. Diante disso, a forma geral das funções de onda são dadas por:

$$\Psi_n(\mathbf{r}, t) = e^{ig} \Psi'_n(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.13})$$

onde

$$g = g(\mathbf{r}) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (\text{A.14})$$

sendo \mathcal{O} um ponto de referência e $\Psi'_n(\mathbf{r}, t) = \Psi_n(\theta, t)$. Vale ressaltar que a definição em (A.14) só faz sentido quando a seguinte condição for satisfeita: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Por exemplo, inserindo o potencial vetor (A.4) em (A.14), a diferença de fase g toma a seguinte forma:

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{\hat{e}_\theta}{b} \right) \cdot (b\hat{e}_\theta d\theta) = \pm \frac{q\Phi}{\hbar} = \mp 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (\text{A.15})$$

consequentemente, as funções de onda gerais ficam escritas como:

$$\Psi_n^\sigma(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(2\pi\sigma\Phi/\Phi_0 + n\theta - \varepsilon t/\hbar)} \quad (\sigma = \mp 1). \quad (\text{A.16})$$

Concluimos aqui que o efeito AB é um exemplo de fase geométrica, em especial, um caso particular das chamadas fases de Berry [9, 10]. Contudo, uma última pergunta merece ser feita, o que fazer com o efeito AB? Evidentemente, a maior consequência do efeito é mostrar que nossos preconceitos clássicos estão simplesmente equivocados, em outras palavras, é possível sim haver efeitos eletromagnéticos em regiões onde os campos são zeros.