UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA

SOBRE TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE AUTOVALORES DE CHENG

FORTALEZA
2012

LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA

SOBRE TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE AUTOVALORES DE CHENG

Dissertacão submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentracão: Geometria Diferencial
Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Fortaleza

2012

O48s Oliveira, Leonardo Tavares de

Sobre teorema de comparação de autovalores de Cheng/ Leonardo Tavares de Oliveira. - 2012.

69f. :enc.; 31 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Curso de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza-2012.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientação: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

1-Geometria diferencial. 2.Variedades riemannianas. I. Título

CDD 516.36

À Deus, aos meus pais Lucia e Franscisco,
irmãs Neily e Cilane, amigos e a minha
namorada Raquel ,
dedico.

Agradecimentos

Antes de tudo agradeço a Deus, por ter feito essa promessa em minha vida. O Senhor que me deu forças e ajuda nos momentos mais difíceis da minha vida. A Ele devo essa vitória, pois sem Ele não teria chegado até aqui.

A minha querida e amada família, minha mãe Lúcia Maria, que por dois anos, apesar da distância, esteve sempre ao meu lado me ouvindo e ajudando através de suas orações, meu pai Francisco Felipe, que é um exemplo para mim de superação e que acreditou sempre na minha vitória, as minhas irmãs Lucineide Tavares e Lucilane Tavares, que não mediram esforços para me ajudar sempre que estivesse ao alcance delas, a minha tia Franscisca Claudelúcia, que esteve sempre se lembrando de mim em suas orações, e ao meu cunhado Wilderval, pela sua amizade e por me ajudar sempre que pôde.

Agradeço a esta pessoa tão especial, minha querida namorada Raquel Costa da Silva, pelo seu carinho, amizade, amor, paciência comigo nos momentos difíceis e por acreditar na minha vitória. Ela que é mais um presente do Senhor para mim.

Aos meus amigos da pós-graduação em matemática da UFC, em especial a Renivaldo Sena por toda a ajuda, paciência, boa vontade e contribuição em todo o trabalho, a Rafael Diógenes e Elaine Sampaio, pelo apoio e amizade durante esses dois anos, a João Nunes, Léo Ivo, Selene e João Vítor, por termos passado juntos o terceiro semestre e pela grande amizade, a Vanderlândia, Fátima, Rafael Marques, Oslenne Nogueira, Francisco Chaves, Tiarlos, Loester Carneiro e Zé Eduardo pelo apoio. Também agardeço aos meus dois amigos André Pinheiro e Renato Araújo.

Agradeço também ao professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa, pela orientação e paciência. Aos professores Fábio Montenegro e Luciano Mari por terem aceitado ao convite de participar da banca.

Não podia deixar de agradecer aos meus professores da UECE Francisco Valdomiro, por ter acreditado em mim e pela sua amizade, Francisco Enio, pelo ensino e incentivo. Aos meus amigos de graduação, Ana Cristina, José Iranildo, Antônio Nunes e Ricardo Marculino. E ao meu amigo Dirceu, pela sua ajuda durante o curso de verão.

Também agradeço aos meus amigos Luciano, Tarcísio, Matheus, Marcio e Macsuelma, Ana Erica e Marcio, Gisely, Sebastião, Maria e Assis Lucas, pela suas amizades.

À Andrea pela paciência, competência e toda sua atenção.

À FUNCAP pelo suporte financeiro.

Resumo

No presente trabalho apresentamos uma versão do Teorema de Comparação de Autovalores de Cheng, onde a limitação das curvaturas seccional e Ricci é trocada pela limitação da curvatura média das esferas geodésicas. Além disso, apresentamos a construção de métricas suaves, g_κ, em $[0,r]\times\mathbb{S}^3$, não isométrica a métrica canônica de curvatura seccional constante κ, can_κ, tal que as bolas geodésicas $B_{g_\kappa}(r) = ([0,r]\times\mathbb{S}^3, g_\kappa)$, $B_{can_\kappa}(r) = ([0,r]\times\mathbb{S}^3, can_\kappa)$ têm o mesmo primeiro autovalor, mesmo volume e as esferas geodésicas $\partial B_{g_\kappa}(s)$ e $\partial B_{can_\kappa}(s)$, $0 < s \leq r$, tem a mesma curvatura média. Finalmente, aplicamos esta versão do Teorema de Comparação de Autovalores de Cheng para a construção de exemplos de variedades Riemanniana M com tom fundamental positivo.

Palavras-Chaves: Autovalores de Dirichlet, Teorema de Comparação de Cheng, Teorema de Barta, curvatura média, esfera geodésica.

Abstract

We present a version of Cheng's Eigenvalue Comparison Theorem, where the limitation of the sectional and Ricci curvature is changed by limiting the mean curvature of the ball away. Furthermore, the present construction of smooth metrics g_κ, in $[0,r]\times\mathbb{S}^3$, non-isometric to the canonical metric of constant sectional curvature κ, can_κ, such that the balls geodesic $B_{g_\kappa}(r)=([0,r]\times\mathbb{S}^3,g_\kappa)$, $B_{can_\kappa}(r)=([0,r]\times\mathbb{S}^3,can_\kappa)$ have the same first eigenvalue, the same volume and the distances spheres $\partial B_{g_\kappa}(s)$ and $\partial B_{can_\kappa}(s)$, $0<s\leq r$, has the same mean curvature. Finally, this version of Cheng's Eigenvalue Comparison Theorem to construct examples of Riemannian manifolds M with positive fundamental tone.

Keywords: Dirichlet eigenvalues, Cheng's Eigenvalue Comparison Theorem, Barta's Theorem, mean curvature, distance spheres.

Sumário

1 Preliminares p. 3

1.1 Métrica Riemanniana e conexão . . . . p. 4

1.2 Geodésicas e aplicação exponencial . . . . p. 6

1.3 Curvaturas e campos de Jacobi . . . . p. 8

1.4 O Gradiente, a Divergência e o Laplaciano . . . . p. 14

2 Teoremas de Comparação p. 18

2.1 Problema de autovalor de Dirichlet . . . . p. 18

2.2 Coordenadas geodésicas . . . . p. 20

2.3 O Teorema de Barta . . . . p. 21

2.4 Os Teoremas de Bishop e de Cheng . . . . p. 23

2.5 Teorema Principal . . . . p. 35

3 Exemplos p. 41

3.1 Exemplo 1 . . . . p. 42

3.2 Exemplo 2 . . . . p. 45

4 Generalização do Teorema Principal p. 51

4.1 Generalização do Teorema Principal . . . . p. 51

Introdução

Seja $B_M(r)$ uma bola geodésica de raio r em uma variedade Riemanniana completa n-dimensional M e denote por $\lambda_1(B_M(r))$ seu primeiro autovalor de Dirichlet. E por $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$ o primeiro autovalor de Dirichlet da bola geodésica $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ de raio r no espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{M}^n(\kappa)$ de curvatura seccional constante κ.

Cheng em [6], usando o resultado de Barta [1], provou que se a curvatura seccional de M é limitada por cima $K_M \leq \kappa$ e $r < \min\{\text{inj}(p), \pi/\sqrt{\kappa}\}$, $(\pi/\sqrt{\kappa} = \infty$ se $\kappa \leq 0)$ então $\lambda_1(B_M(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$. E se a curvatura de Ricci de M é limitada por baixo $Ric_M \geq (n-1)\kappa$ então $\lambda_1(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$ para $r < \text{inj}(p)$. Está implícito na prova de Cheng que $\lambda_1(B_M(r)) = \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$ implica que as bolas geodésicas $B_M(p,r)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ são isométricas.

Bessa e Montenegro em [11] observaram que o resultado do Cheng das desiguladades de autovalores, citado acima, é válido sob hipótese geométrica mais fraca. Ou seja, dadas $B_M(r)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ bolas geodésicas dentro do cut locus dos seus centros e seja $(t,\theta) \in (0,r] \times \mathbb{S}^{n-1}$ coordenadas geodésicas de $B_M(r)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$. Sejam $H_M(t,\theta)$ e $H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t,\theta) = H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ as curvaturas média das esferas geodésicas $\partial B_M(t)$ e $\partial B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ em (t,θ) com respeito ao campo de vetor unitário $-\partial/\partial t$. Então, a seguinte versão do Teorema de Comparação de Autovalor de Cheng é válida

Teorema. *Se $H_M(s,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s \in (0,r]$ e todo $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então*

$$\lambda_1(B_M(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)). \tag{1}$$

Se $H_M(s,\theta) \leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s \in (0,r]$ e todo $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então

$$\lambda_1(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)). \tag{2}$$

A igualdade em (1) ou em (2) ocorre se, e somente se, $H_M(s,\theta) = H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s \in (0,r]$ e todo $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Usando o Teorema de Comparação do Hessiano e do Laplaciano concluímos que se $K_M \leq \kappa$ implica que $H_M(s,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ e $Ric_M \geq (n-1)\kappa$ implica que $H_M(s,\theta) \leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$. No entanto, as demonstrações inversas em geral não são sempre verdadeiras. No terceiro capítulo foi construído métricas suaves em $\mathbb{R}^n$ com curvaturas seccionais limitadas por cima $K(\partial/\partial s) > \kappa$ fora de um conjunto compacto com $H_M(s,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s \geq 0$, ver exemplo 1. No segundo exemplo, é construído métricas suaves g_κ em $[0,r] \times \mathbb{S}^3$, não isométrica a métrica canônica can_κ de curvatura seccional constante κ, tal que as bolas geodésicas $Bg_\kappa(r) = ([o,r] \times \mathbb{S}^3, g_\kappa)$, $Bcan_\kappa(r) = ([o,r] \times \mathbb{S}^3, can_\kappa)$ têm o mesmo primeiro autovalor, o mesmo volume e as esferas $\partial Bg_\kappa(s)$ e $\partial Bcan_\kappa(s)$, $0 < s \leq r$, tem a mesma curvatura média. Por outro lado, se a métrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional restrita a uma bola geodésica de raio r é rotacionalmente simétrica, isto é, sua expressão é dada por $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$, com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(t) > 0$ para $t > 0$, então a igualdade dos autovalores $\lambda_1(B_M(r), ds^2) = \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r), can_\kappa)$ implica que $B_M(r)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ são isométricas, veja a observação 3.1.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira. No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho. No capítulo 2 apresentamos a prova do Teorema Principal. No capítulo 3 contruímos exemplos como mencionamos acima, e no último capítulo são apresentados alguns corolários do Teorema principal que pode ser visto como generalizações do Teorema de Comparação de Cheng.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1 Métrica Riemanniana e conexão . . . . p. 4

1.2 Geodésicas e aplicação exponencial . . . . p. 6

1.3 Curvaturas e campos de Jacobi . . . . p. 8

1.4 O Gradiente, a Divergência e o Laplaciano . . . . p. 14

Na presente seção apresentamos fatos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. As principais referências são [2], [3], [4] e [7].

Seja M uma variedade diferenciável conexa de dimensão n. Para cada $p \in M$, indicaremos por T_pM o espaço tangente a M em p e TM seu fibrado tangente, isto é, a união de todos os espaços tangentes a M.

Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação de M no fibrado tangente TM

$$X : M \longrightarrow TM.$$

Podemos também pensar nos campos de vetores como uma aplicação $X : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}(M)$ definido por

$$(Xf)(p) = \sum a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{F}(M)$ são, respectivamente, o anel das funções reais $C^\infty(M)$ e o conjunto das funções em M. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ ao conjunto de campos de vetores de classe C^∞ em M.

1.1 Métrica Riemanniana e conexão

Uma métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno

$$g_p = \langle \, . \, \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

satisfazendo a seguinte propriedade: Se U é um aberto qualquer em M e X, Y são campos de vetores diferenciáveis em U, então a função $g(X,Y) : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(X,Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle$$

é diferenciável em U.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica é dizer que para todo par X, Y de campos de vetores diferenciáveis em M, numa vizinhança V de M, a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V. As funções g_{ij} são chamadas expressões da métrica Riemanniana em um sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

indicada por $(X,Y) \to \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Proposição 1.1 *Sejam M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável. Então existe uma única correspondência que associa a uma campo de vetores V ao longo de α a um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α, denominado derivada covariante de V ao longo de α, tal que*

(i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde V é um campo de vetores ao longo de uma curva α e f é uma função diferenciável em $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

(iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\alpha(t))$, então $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$.

Para uma demonstração desta proposição veja [7]

Podemos expressar $\nabla_X Y$ em coordenadas locais. Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ um sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $p \in M$ escrevendo

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j Y_j,$$

onde $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum x_i X_i} \sum y_j X_j = \sum x_i \nabla_{x_i} \left(\sum y_j X_j\right) \\
&= \sum_i x_i \left(\sum_j y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_j X_i(y_j) X_j \right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j.
\end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum \Gamma_{ij}^k X_k$, conclui-se que Γ_{ij}^k são diferenciáveis e

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

onde as funções Γ_{ij}^k são os coeficientes da conexão ∇ em U, chamado de *símbolos de Christoffel* da conexão. Podemos expressar os símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}, \tag{1.1}$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ e (g^{km}) é a inversa da matriz (g_{ij}). Essa é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos da métrica.

O teorema a seguir é fundamental. Ele garante que em toda variedade Riemanniana existe uma única conexão afim.

Teorema 1.1 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ é simétrica, isto é,
$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, *onde [ ] é o colchete de Lie dos campos de vetores X e Y.*

b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana, isto é,*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

A conexão dada pelo Teorema acima é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M.

1.2 Geodésicas e aplicação exponencial

Seja M uma variedade Riemanniana com conexão afim ∇, e seja γ uma curva em M. A aceleração de γ é o campo de vetores $\dfrac{D\gamma'}{dt}$ ao longo de γ. A curva γ é chamada *geodésica* com respeito a ∇ se a aceleração é zero, ou seja, $\dfrac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$.

Um campo de vetores V ao longo de uma curva γ é dito ser *paralelo ao longo de* γ com respeito a ∇ se $\dfrac{DV}{dt} \equiv 0$. Da mesma forma V é dito ser um campo paralelo a M se é *paralelo* ao longo de todo curva.

Um fato fundamental sobre campos de vetores paralelo é que qualquer vetor tangente em qualquer ponto de uma curva na variedade Riemanniana pode ser unicamente estendido a uma campo de vetores paralelos ao longo da curva inteira. É o que diz o

Teorema 1.2 *Dadas uma curva* $\gamma : I \to M$*,* $t_0 \in I$*, e um vetor* $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$*. Então, existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* γ *tal que* $V(t_0) = V_0$*.*

O campo de vetores V do Teorema acima é chamado de *transporte paralelo de* V_0 *ao longo de* γ. Uma observação importante é que se $\gamma : I \to M$ é uma curva e $t_0, t_1 \in I$, o transporte paralelo define um operador

$$P_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

dado por $P_{t_0,t_1}V_0 = V(t_1)$, onde V é o transporte paralelo de V_0 ao longo de γ. P_{t_0,t_1} é um isomorfismo linear entre $T_{\gamma(t_0)M}$ e $T_{\gamma(t_1)M}$.

Seja γ uma curva diferenciável em M. Essa curva determina uma curva $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ em TM. Assim dado um sistema de coordenadas (U,x) em torno de $\gamma(t_0)$, se γ é uma curva geodésica então, a curva

$$t \to \left(x_1(t), \ldots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_1(t)}{dt} \right)$$

satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = y_k, \\ \dfrac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \quad \text{k=1}\dots,\text{n.} \end{cases}$$

em TU.

Lema 1.1 *Existe um único campo G em TM cujas as trajetórias são da forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M.*

O campo G definido acima é chamado de *campo geodésico* em TM e seu fluxo $\varphi(t,\xi)$ é o fluxo geodésico de TM, onde $\xi \in TM$ e $t \in \mathbb{R}$. Então, definimos

$$\gamma_\xi(t) = \pi \circ \varphi(t,\xi),$$

onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção canônica, $\gamma_\xi(t)$ é a única geodésica em M satisfazendo as condições $\gamma_\xi(0) = \pi(\xi)$ e $\gamma'_\xi(0) = \xi$.

Para todo $\xi \in TM$ existe um intervalo aberto maximal I_ξ em $\mathbb{R}$ contendo a origem e uma única geodésica $\gamma_\xi : I_\xi \to M$ satisfazendo $\gamma_\xi(0) = \pi(\xi)$ e $\gamma'_\xi(0) = \xi$. Se M é geodesicamente completa, isto é, $I_\xi = \mathbb{R}$ para todo $\xi \in TM$, então

$$\gamma_\xi(\alpha t) = \gamma_{\alpha\xi}(t), \quad |\gamma'_\xi| = |\xi| \quad \forall \alpha, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $\mathscr{T}M$ um subespaço de TM, definido por

$$\mathscr{T}M := \{\xi \in TM; 1 \in I_\xi\},$$

Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos a aplicação exponencial $\exp : \mathscr{T}M \longrightarrow M$ dada por

$$\exp\xi = \gamma_\xi(1).$$

Então, $\exp(t\xi) = \gamma_{t\xi}(1) = \gamma_\xi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathscr{T}M$. Além disso, dado $p \in M$ definimos

$$\exp_p = \exp|_{T_pM \cap \mathscr{T}M}.$$

1.3 Curvaturas e campos de Jacobi

Definição 1.1 *O tensor curvatura R da variedade Riemanniana M com conexão ∇ é uma aplicação multilinear $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \to \chi(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.2}$$

para todo $X,Y,Z \in \chi(M)$.

Iremos denotar $(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$.

Proposição 1.1 *O tensor curvatura R satisfaz as seguintes propriedades*
(1) $(X,Y,Z,W) = -(Y,X,Z,W) = (Y,X,W,Z)$
(2) $(X,Y,Z,W) = (Z,W,X,Y)$
(3) *Primeira Identidade de Bianchi*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Para uma prova veja Capítulo 3 de [7].

Definição 1.2 *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A curvatura seccional de P em p é dada por*

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

onde $X,Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM.

É possível mostrar que essa definição não depende da escolha dos vetores veja Capítulo 4 de [7]. Observe que, se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortornormal de P, então

$$K(e_1,e_2) = \langle R(e_1,e_2)e_1, e_2\rangle.$$

Lema 1.2 *Dados M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Definimos uma aplicação multilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X,Y,Z), W\rangle = \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle,$$

para todo $X,Y,Z,W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante κ se, e somente se, $R = \kappa R'$, onde R é a curvatura de M.

A demostração encontra-se em [7].

Definição 1.3 *Para cada $p \in M$ definimos o tensor curvatura de Ricci $Ric : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ por*

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \mapsto R(X,Z)Y\},$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1,...,e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM então,

$$Ric(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{n} \langle R(\xi,e_j)\eta, e_j\rangle. \tag{1.3}$$

Sejam M^n e $\bar{M}^{n+k}$ variedades diferenciaveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to \bar{M}$ é uma imersão, se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}M$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset \bar{M}$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por $\bar{M}$, diz-se que φ é um mergulho. Neste caso, $\varphi(M)$ é uma subvariedade de $\bar{M}$.

Seja $f : M \to \bar{M}^{n+k}$ uma imersão, se $\bar{M}$ tem estrutura Riemanniana, f induz uma métrica Riemanniana em M por

$$\langle u,v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)},$$

para todo $u,v \in T_pM$. Neste caso dizemos que f é uma imersão isométrica de M em $\bar{M}$.

Considere uma imersão isométrica $x : M^n \to \bar{M}^k$ de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\bar{M}$ de dimensão igual a $n+m=k$. Como usual, identificaremos M com a sua imagem por x, $x(M)$. Com esta identificação o espaço tangente de M em um dado ponto $p \in M$, T_pM é um subespaço do espaço tangente de $\bar{M}$ em p, $T_p\bar{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\bar{M}$ decompõe $T_P\bar{M}$ na soma direta de T_pM com seu complemento ortogonal $(T_pM)^\perp$. Para todo $p \in M$, $\bar{v} \in T_p\bar{M}$, denotaremos a projeção de $\bar{v}$ sobre T_pM por $\bar{v}^\top$, e a projeção de $\bar{v}$ sobre $(T_pM)^\perp$ por $\bar{v}^N$

Sejam $\nabla, \overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de M e $\bar{M}$, respectivamente. Se X,Y são campos locais de vetores em M, e $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são estensões locais a $\bar{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}\right)^\top.$$

No que se segue $\mathfrak{X}(U)^\perp$ representa os campos de vetores normais a $x(U) \approx U$, onde U é um aberto de M. A aplicação

$$B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^\perp$$

definida por

$$B(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^N = \overline{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

é chamada segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$.

Proposição 1.2 *A aplicação B é uma forma bilinear e simétrica.*

A demonstração encontra-se em [7].

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Definimos a aplicação $S : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)^{\perp} \to \mathfrak{X}(U)$ por

$$\langle S(X,\eta), Y\rangle := \langle B(X,Y), \eta\rangle.$$

Denotando $S_\eta(X) = S(X,\eta)$ obtemos um operador autoadjunto $S_\eta : \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ denominado operador de *Weingarten* da imersão na direção de η.

Proposição 1.3 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então,*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Prova. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente. Queremos mostrar que

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle = -\langle(\overline{\nabla}_x N)^T, y\rangle.$$

Então, como $\langle N, Y\rangle = 0$ segue

$$\begin{aligned}
-\langle(\overline{\nabla}_x N)^T, y\rangle &= -\langle \overline{\nabla}_x N, y\rangle = -\langle \overline{\nabla}_x N, Y\rangle \\
&= -x\langle N, Y\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_x Y\rangle \\
&= \langle \eta, (\overline{\nabla}_x Y)^N\rangle \\
&= \langle \eta, B(x,y)\rangle
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

■

Considere a $x : M \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Dizemos que $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{n+k}\}$ é um referencial ortonormal adaptado em um aberto $\overline{U} \subset \overline{M}$ se as restrições de $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n$ ao aberto $U = \overline{U} \cap \overline{M}$ formarem um referencial em $U \subset M$.

Sendo B a segunda forma fundamental da imersão x e $\{e_1, ..., e_n, \eta_1, ..., \eta_k\}$ a restrição de um referencial adaptado a um aberto $U \subset M$, considere o campo

$$H = \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) \in \mathfrak{X}(U)^{\perp}.$$

Como $B(e_i, e_i) \in (T_pM)^{\perp}$ então, se $B(e_i, e_i) = a\eta_j$ com $\eta_j \in (T_pM)^{\perp}$. Daí, vemos que $\langle B(e_i, e_i), \eta_j \rangle = \langle a\eta_j, \eta_j \rangle = a$. Portanto, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) &= \sum_{i=1}^{n} \langle B(e_i, e_i), \eta_j \rangle \eta_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle S_{\eta_j}(e_i), e_i \rangle \eta_j \\
H &= (\text{tr } S_{\eta_j}) \eta_j,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

onde H aplicado num ponto $p \in M$ é conhecido como vetor curvatura média de x em p. Agora fixado $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, definimos a curvatura média de M na direção η por

$$H = \text{tr } S_{\eta} \tag{1.5}$$

ou seja, o traço da aplicação de Weingarten é a curvatura média de M.

Sejam $x : M \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e N um campo unitário em $\overline{M}$ normal a M. Note que dado um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n, N\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{div}_{\overline{M}} N &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_N N, N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle + \frac{1}{2} N \langle N, N \rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$ temos que $e_i \langle N, N \rangle = 0$ e $\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \rangle = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, $(\overline{\nabla}_{e_i} N)^T = (\overline{\nabla}_{e_i} N)$. Assim,

$$\text{div}_{\overline{M}} N = -\text{tr } (S_N).$$

Portanto,

$$H = -\text{div}_{\overline{M}} N. \tag{1.6}$$

Agora iremos definir e apresentar alguns resultados básico sobre campos de Jacobi de uma variedade Riemanniana M.

Definição 1.4 *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. Um campo de vetores J ao longo de γ é um* *campo de Jacobi se satisfaz a equação de Jacobi*

$$\frac{D^2J}{dt^2}+R(\gamma'(t),J(t))\gamma'(t)=0, \quad \forall t\in[0,a].$$

Denotaremos $\mathscr{J}$ o conjunto dos campos de Jacobi ao longo de γ.

Proposição 1.4 *Para $X,Y\in\mathscr{J}$, temos que*

$$\langle\frac{D}{dt}X,Y\rangle-\langle X,\frac{D}{dt}Y\rangle=const.$$

Assim, para qualquer campo de Jacobi Y temos que existem constantes $a,b\in\mathbb{R}$ tais que

$$\langle Y,\gamma'\rangle=at+b.$$

Prova. Derivando

$$\langle\frac{D}{dt}X,Y\rangle-\langle X,\frac{D}{dt}Y\rangle$$

encontra-se

$$\left\langle\frac{D^2}{dt^2}X,Y\right\rangle-\left\langle X,\frac{D^2}{dt^2}Y\right\rangle.$$

Agora, usando a equação de Jacobi obtemos

$$\langle -R(\gamma',X)\gamma',Y\rangle-\langle R(\gamma',X)\gamma',Y\rangle=0.$$

Logo,

$$\left\langle\frac{D}{dt}X,Y\right\rangle-\left\langle X,\frac{D}{dt}Y\right\rangle=const.$$

isto é,

$$\frac{D}{dt}\langle X,Y\rangle=const.$$

e, portanto,

$$\langle X,Y\rangle=at+b.$$

■

Em particular, definimos o subespaço de $\mathscr{J}$

$$\mathscr{J}^{\perp}:=\{Y\in\mathscr{J}:\langle Y,\gamma'\rangle=0 \quad em \quad [0,a]\},$$

Para o que se segue os campos de Jacobi J pertencem a $\mathscr{J}^{\perp}$.

Dado um valor real κ, temos $S_\kappa(t)$ como a solução da equação diferencial ordinária

$$\psi''+\kappa\psi=0$$

satisfazendo as condições iniciais

$$S_\kappa(0) = 0, \quad S'_\kappa(0) = 1.$$

Então, podemos escrever

$$S_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa}\,\mathrm{t})}{\sqrt{\kappa}}, & \text{se } \kappa > 0; \\ t, & \text{se } \kappa = 0; \\ \dfrac{\operatorname{senh}(\sqrt{-\kappa}\,\mathrm{t})}{\sqrt{-\kappa}}, & \text{se } \kappa < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Além disso, se $S'_\kappa := C_\kappa$ então vale

$$C'_\kappa \;=\; -\kappa S_\kappa, \quad C_\kappa^2 + \kappa S_\kappa^2 = 1, \quad \left(\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\right)' = -S_\kappa^{-2}. \tag{1.8}$$

O seguinte exemplo é fundamental. Ele diz como são os campos de Jacobi em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante.

Exemplo: Sejam M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante κ e γ uma geodésica tal que, $|\gamma'| = 1$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'. Então, pelo Lema (1.2) segue que

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J)\gamma, T\rangle &= \kappa(\langle\gamma', \gamma'\rangle\langle J, T\rangle - \langle J, \gamma'\rangle\langle\gamma', T\rangle \\ &= \kappa\langle J, T\rangle \end{aligned}$$

para todo campo vetorial T ao longo de γ. Daí, $R(\gamma', J)\gamma = \kappa J$ e a equação do campo de Jacobi, fica

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + \kappa J = 0 \tag{1.9}$$

Com isso, a expressão acima diz que a derivada covariante segunda de J é um múltiplo de J, e é razoável tentar construir uma solução escolhendo um campo de vetor paralelo E normal a γ e fazendo $J(t) = u(t)E(t)$ para alguma função u a ser determinada. Assim, a expressão (1.9) passa a ser

$$u''(t) + \kappa u(t) = 0$$

a qual, implica que o campo de Jacobi ao longo de γ, que satisfaz $J(0) = 0$ e $J'(0) = E$ poder ser escrito como $J(t) = S_\kappa(t)E(t)$.

1.4 O Gradiente, a Divergência e o Laplaciano

Nesta seção definiremos o Gradiente , o Divergênte e o Laplaciano. Esses operadores serão utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 1.5 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* gradiente *de f é o campo vetorial suave* grad f*, definido em M por*

$$\langle \text{grad } f, X\rangle = X(f), \tag{1.10}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Decorre da definição que se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, então:

(i) grad $(f+g) = \text{grad } f + \text{grad } g$.

(ii) grad $(fg) = g(\text{grad } f) + f(\text{grad } g)$.

Proposição 1.5 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\text{grad } f = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.11}$$

Em particular,

$$\|\text{grad } f\|^2 = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l}. \tag{1.12}$$

Prova. Se grad $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{jl},$$

de modo que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{n} a_j g^{kl} g_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{kj} = a_k.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned}
\|\text{grad } f\|^2 &= \left\langle \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_{i,j,k,l} g^{kl} g^{ij} g_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j,k,l} g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.6 *Seja X um campo vetorial suave em M. A* divergência *de X é a função suave* div $X : M \to \mathbb{R}$*, dada para $p \in M$ por*

$$(\text{div } X)(p) = \text{tr } \{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.13}$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Decorre da definição que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então

(i) div $(X+Y) = \text{div } X + \text{div } Y$.

(ii) div $(fX) = f\text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$.

Proposição 1.6 *Seja X um campo vetorial suave em M e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Se X for dado em U por $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{G}), \tag{1.14}$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Prova. Temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{j} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial x_k} g_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{jk} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}.
\end{aligned}$$

Afirmamos agora que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{jk} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x_i}. \tag{1.15}$$

Para provar a relação acima, seja $(g^k)_i$ a matriz obtida de (g_{ij}) derivando as entradas de sua k-ésima coluna na direção de $\frac{\partial}{\partial x_i}$, i.e.,

$$(g^k)_i = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & \frac{\partial g_{2k}}{\partial x_i} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & \frac{\partial g_{nk}}{\partial x_i} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Desde que $G = \det(g_{ij})$ é uma função linear de cada uma de suas colunas, tem-se

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x_i} = \det(g_{ij})^{-1} \det((g^k)_i) = \det(g^{-1}(g^k)_i).$$

Segue agora de ser $g^{-1} g = Id$ que

$$g^{-1}(g^k)_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & A_{(k-1)k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{(k+1)k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onde $A_{lk} = g^{lj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$. Portanto,

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x_i} = \det(g^{-1}(g^k)_i) = A_{kk} = g^{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i},$$

como queríamos provar. Segue então daí e do lema anterior que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a_i\Gamma_{ij}^{j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+\frac{a_i}{2G}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+\frac{a_i}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x_i}\right]=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{G}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a_i\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x_i}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\sqrt{G}).
\end{aligned}$$

■

Definição 1.7 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* Laplaciano *de f é a função suave $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f. \tag{1.16}$$

Usando as propriedades do gradiente e da divergência, temos, para quaisquer $f,g \in \mathfrak{F}(M)$, que

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle$.

Proposição 1.7 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_m}$, então o Laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \tag{1.17}$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Prova. Seja $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, com $a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Segue-se de (1.14) que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

■

Capítulo 2

Teoremas de Comparação

Conteúdo

2.1 Problema de autovalor de Dirichlet . . . . p. 18

2.2 Coordenadas geodésicas . . . . p. 20

2.3 O Teorema de Barta . . . . p. 21

2.4 Os Teoremas de Bishop e de Cheng . . . . p. 23

2.5 Teorema Principal . . . . p. 35

2.1 Problema de autovalor de Dirichlet

Nesta seção estabeleceremos algumas terminologias necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Uma referência para este Capítulo é [4] e [3].

Seja $L^2(M)$ o espaço das funções mensuráveis f em M na qual

$$\int_M |f|^2 dV < +\infty$$

Em $L^2(M)$ consideremos o seguinte produto interno e norma induzida dados por

$$(f,h) = \int_M fh\, dV, \;\; \|f\|^2 = (f,f),$$

onde $f,h \in L^2(M)$. Com este produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

Nosso interesse está no seguinte problema de autovalor.

Problema de Autovalor de Dirichlet: Para M uma variedade Riemanniana conexa com fecho compacto e fronteira suave, ache todos os números reais λ na qual existe uma solução não trivial $\phi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ da equação

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \tag{2.1}$$

satisfazendo a condição $\phi = 0$ na fronteira de M.

Os números reais λ são chamados de autovalores do Laplaciano Δ de M, e o espaço vetorial das soluções do problema acima para um dado autovalor λ, é denominado seu autoespaço. Os elementos de cada autoespaço são chamadas de autofunções. O seguinte resultado pode ser encontrado em [3].

Teorema 2.1 *No problema Dirichlet, o conjunto dos autovalores consiste de uma sequência*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \uparrow +\infty,$$

e cada autoespaço associado tem dimenão finita. Além disso, autoespaços pertencentes a autovalores distintos são ortogonais em $L^2(M)$ e cada autofunção é C^∞ em $\overline{M}$.

Observe que, como a autofunção $\phi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ então o seu primeiro autovalor λ_1 deve ser não-negativo. De fato, aplicando a fórmula de Green a ϕ temos

$$\int_M (\phi\Delta\phi + |\mathrm{grad}\phi|^2) dV = 0$$

Usando (2.1) segue que

$$\lambda \int_M \phi^2 \, dV = \int_M |\mathrm{grad}\phi|^2 dV \tag{2.2}$$

$$\lambda \|\phi\|^2_{L^2} = \int_M |\mathrm{grad}\phi|^2 dV \tag{2.3}$$

$$\lambda = \|\phi\|^{-2}_{L^2} \int_M |\mathrm{grad}\phi|^2 dV \geq 0 \tag{2.4}$$

Veja que se $\lambda = 0$ implica $\int_M |\mathrm{grad}\phi|^2 dV = 0$. Daí, ϕ é constante. Aplicando a condição de fronteira do problema de Dirichlet segue que $\phi = 0$. Logo, os autovalores do problema de Dirichlet são todos positivos. Uma demonstração completa deste teorema encontra-se em [4].

Seja $\Omega \subset M$ um subconjunto aberto de uma variedade Riemanniana M. Definimos o tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ como

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega \mid \nabla f \mid^2}{\int_\Omega f^2}, \quad f \in H_0^1(\Omega), \quad f \neq 0 \right\},$$

onde $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\parallel \varphi \parallel_\Omega^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega \mid \nabla \varphi \mid^2 . \tag{2.5}$$

No entanto, se Ω é limitado com fronteira suave, então o Teorema de Rayleigh (ver [4]) implica que $\lambda^*(\Omega)$ coincide com o menor autovalor do problema de Dirichlet, $\lambda_1(\Omega)$.

2.2 Coordenadas geodésicas

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e p um ponto de M. Dado $\xi \in T_pM$, seja $\gamma_\xi : [0,+\infty) \to M$ a única geodésica satisfazendo $\gamma_\xi(0) = p$ e $\gamma'_\xi(0) = \xi$.

Dados $p \in M$, $\xi \in T_pM$ definimos $c(\xi)$, por

$$c(\xi) := \sup\{t > 0;\ dist_M(p, \gamma_\xi(t)) = t\}$$

Além disso, chamamos de *raio de injetividade de p*, inj p, por

$$\text{inj } p := \inf\{c(\xi); \xi \in T_pM, |\xi| = 1\}$$

Observe que se $dist_M(p, \gamma_\xi(t_1)) = t_1$ para algum $t_1 > 0$, então $dist_M(p, \gamma_\xi(t)) = t$ para todo $t \in [0, t_1]$. Assim, a geodésica minimiza a distância entre p e $\gamma_\xi(t)$ para todo $[0, c(\xi))$ e não minimiza distância para $t > c(\xi)$. Daí, se $\gamma_\xi([0,t])$ minimiza a distância de p a $\gamma_\xi(t)$ para todo $t > 0$, então $c(\xi) = +\infty$.

Para todo $p \in M$ definimos o *cut locus* de p em M, como

$$Cut(p) := \{\exp c(\xi)\xi;\ c(\xi) < +\infty,\ \xi \in T_pM,\ |\xi| = 1\}.$$

Considere o maior subconjunto aberto de TpM

$$\mathscr{D}_p = \{t\xi \in T_pM; 0 \leq t \leq c(\xi),\ |\xi| = 1\},$$

tal que para todo $\xi \in \mathscr{D}_p$ a geodésica $\gamma_\xi(t) = \exp_p(t\xi)$ minimiza a distância de p a γ_ξ para todo $t \in [0, c(\xi)]$ e $\exp \mathscr{D}_p = M/Cut(p)$. Além disso, a aplicação exponencial $\exp_p : \mathscr{D}_p \to \exp_p(\mathscr{D}_p)$ é um difeomorfismo e é chamado *coordenadas geodésicas* de $M/Cut(p)$. Para mais detalhes veja [3] ou [4].

Fixado um vetor $\xi \in T_pM$, $|\xi| = 1$, seja $\xi^\perp$ o complemento ortogonal de $\{\mathbb{R}\xi\}$ em T_pM, e seja $\tau_t : T_pM \to T_{\exp(t\xi)}M$ o transporte paralelo ao longo de γ_ξ. Definimos o caminho das transformações lineares

$$\mathscr{A}(t,\xi) : \xi^\perp \to \xi^\perp$$

por

$$\mathscr{A}(t,\xi)\eta = (\tau_t)^{-1}Y(t)$$

onde $Y(t)$ é o campo de Jacobi ao longo de γ_ξ determinado pelas condições iniciais $Y(0) = 0$ e $(\nabla_{\gamma'_\xi}Y)(0) = \eta$.

Definimos agora a aplicação $\mathfrak{R} : \xi^\perp \to \xi^\perp$ dada por

$$\mathfrak{R}(t)\eta = (\tau_t)^{-1}R(\gamma'_\xi(t), \tau_t\eta)\gamma'_\xi(t)$$

onde R é o tensor curvatura de M. A partir daí, verifica-se que $\mathfrak{R}(t)$ é uma aplicação autoadjunta e o caminho de transformações lineares $\mathscr{A}(t,\xi)$ satisfazem a equação diferencial

$$\mathscr{A}'' + \mathfrak{R}\mathscr{A} = 0 \tag{2.6}$$

com as condições iniciais $\mathscr{A}(0,\xi) = 0$ e $\mathscr{A}'(0,\xi) = I$.

No conjunto $\exp(\mathscr{D}_p)$ a métrica Riemanniana de M pode ser expressa por

$$ds^2(\exp_p(t\xi)) = dt^2 + |\mathscr{A}(t,\xi)d\xi|^2, \tag{2.7}$$

e como M tem curvatura seccional constante igual a κ obtemos

$$\mathscr{A}(t,\xi) = S_\kappa(t)I,$$

onde $S_\kappa(t)$ é dado por (2.39).

2.3 O Teorema de Barta

Na presente seção, é apresentado o Teorema de Barta. Tal resultado é uma poderosa ferramenta para obter limitação para o primeiro autovalor de Dirichlet de um domínio suave e limitado de uma variedade Riemanniana. Uma referência para esta seção é [4].

Teorema 2.1 (Barta) . *Seja $\Omega \subset M$ um domínio com fecho compacto e fronteira suave $\partial\Omega$ em uma variedade Riemanniana. Seja $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ com $f > 0$ em Ω e $f|\partial\Omega = 0$. Se $\lambda_1(\Omega)$*

é o primeiro autovalor de Dirichlet de Ω, então

$$\sup_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right) \geq \lambda_1(\Omega) \geq \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right). \tag{2.8}$$

Além disso, cada igualdade em (2.8) ocorre se, e somente se, f é uma primeira autofunção positiva de Ω.

Prova. Seja $\phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(\Omega)$ com $\phi|\Omega > 0$ e $\phi|\partial\Omega = 0$. Então

$$\lambda_1(\Omega) = -\frac{\Delta\phi}{\phi} = -\frac{\Delta f}{f} + \frac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi}. \tag{2.9}$$

No entanto, $f\phi|\Omega > 0$ e aplicando uma das fórmulas de Green a $\{\phi\Delta f - f\Delta\phi\}$, teremos

$$\int_{\Omega}\{\phi\Delta f - f\Delta\phi\}dV = 0.$$

Com isso, existem x_1 e x_2 em Ω tais que

$$(\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_1) \leq 0 \leq (\phi\Delta f - f\Delta\phi)(x_2).$$

Portanto, temos que

$$\lambda_1(\Omega) = -\frac{\Delta f}{f}(x_1) + \frac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi}(x_1) \leq -\frac{\Delta f}{f}(x_1) \leq \sup_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

De forma análoga,

$$\lambda_1(\Omega) = -\frac{\Delta f}{f}(x_2) + \frac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi}(x_2) \geq -\frac{\Delta f}{f}(x_2) \geq \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (2.8), então $\dfrac{\phi\Delta f - f\Delta\phi}{f\phi} = 0$. Que é equivalente a dizer que $\Delta f + \lambda_1(\Omega)f = 0$, ou seja, f é uma autofunção associada a $\lambda_1(\Omega)$. Reciprocamente, se f é a primeira autofunção positiva, implica que ocorre $-\dfrac{\Delta f}{f} = \lambda_1(\Omega)$. Portanto,

$$\sup_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right) = \lambda_1(\Omega) = \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta f}{f}\right).$$

■

2.4 Os Teoremas de Bishop e de Cheng

Seja $\mathbb{M}_\kappa$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, n-dimensional com curvatura seccional constante κ. As variedades $\mathbb{M}_\kappa$ são chamadas *formas espaciais*. Como pode ser visto em [7], $\mathbb{M}_\kappa$ é isométrica a
(i) a esfera $\mathbb{S}^n$, quando $\kappa > 0$
(ii) o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, quando $\kappa = 0$
(iii) o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, quando $\kappa < 0$.

Para a demonstração do Teorema de Bishop, faremos o uso de alguns resultados. Um deles é o Teorema de Comparação de Rauch . Na qual será apresentado na forma que precisamos para a discusão atual. Além disso, a prova de tal resultado encontra-se em [4]

Teorema 2.2 *Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $p \in M$ e $\xi \in T_pM$ com $|\xi| = 1$. Se a curvatura seccional ao longo da geodésica γ_ξ são menores ou iguais a uma constante κ, então para qualquer campo de Jacobi Y ao longo de γ_ξ, pontualmente ortogonal a γ_ξ, e nulo em $p = \gamma_\xi(0)$, temos*

$$\frac{|Y|'}{|Y|} \geq \frac{S'_\kappa}{S_\kappa}$$

para todo $t < \pi/\sqrt{\kappa}$. Com igualdade para $t = t_0 \in (0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ se, e somente se, existe um campo de vetores paralelos ao longo de γ_ξ tal que

$$Y(t) = S_\kappa(t)E(t)\ , \quad \mathfrak{R}E(t) = \kappa E(t) \quad \forall t \in [0, \pi/\sqrt{\kappa}]$$

Em particular, temos

$$(\mathscr{A}^*\mathscr{A}) \geq S_\kappa^2(t)I,$$

onde $\mathscr{A}^*$ denota a adjunta da transformação linear $\mathscr{A}$, para todo $t \in (0, \pi/\sqrt{\kappa}]$, com igualdade para um $t_0 \in (0, \pi/\sqrt{\kappa}]$ se,e somente se,

$$\mathscr{A}(t, \xi) = S_\kappa(t)I\ , \quad \mathfrak{R} = \kappa I$$

para todo $t \in [0, t_0]$.

Lema 2.1 *Dado uma familia de matrizes invertíveis $A(t) = (a_{ij}(t))$. Então, vale a igualdade abaixo*

$$(\ln \det A)' = \text{tr } (A'A^{-1}).$$

Prova. Considere $G(t) = A'(t)A^{-1}(t)$, onde $t \in \mathbb{R}$. Então, G(t)A(t)=A'(t). Com isso, fazendo $a(t) = \det(a_{ij}(t)) = \det A$, temos

$$a'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a'_{1i}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a'_{ni}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Denotando $a^i(t)$ a i-ésima coluna de $A(t)$ obtemos

$$a'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det \left(a^1(t), \ldots, (a^i)'(t), \ldots, a^n(t) \right) \tag{2.10}$$

Por outro lado, considere a equação diferencial $A' = AG$, onde $G = A^{-1}A'$. Então,

$$(a^i)' = \sum_{j=1} g_{ji} a^j.$$

Daí, substituindo a última igualdade acima em (2.10), teremos

$$\begin{aligned} a'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det \left(a^1(t), \ldots, \sum_{j=1} g_{ji} a^j, \ldots, a^n(t) \right) \\ &= \sum_{i=1} g_{ii} \det A = \text{tr } \, G \det A \\ a'(t) &= \text{tr } \, (A'A^{-1}) \det A. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\ln \det A)' = \frac{(\det A)'}{\det A} = \text{tr } \, (A'A^{-1}).$$

■

Teorema 2.3 (Teorema de Comparação de Bishop I) *Suponha que temos uma geodésica γ_ξ com todas as curvaturas seccionais ao longo de γ_ξ menores ou iguais a uma constante real κ. Então,*

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} \geq (n-1) \frac{S'_\kappa}{S_\kappa} \tag{2.11}$$

em $\left(0, \pi/\sqrt{\kappa}\right)$ e

$$\det \mathscr{A} \geq S_\kappa^{n-1} \tag{2.12}$$

em $\left(0, \pi/\sqrt{\kappa}\right]$. Temos a igualdade em (2.11) para um $t_0 \in \left(0, \pi/\sqrt{\kappa}\right]$ se , e somente se, vale

$$\mathscr{A}(t, \xi) = S_\kappa(t) I, \quad \mathscr{R}(t) = \kappa I$$

para todo $t \in [0, t_0]$.

Prova. Defina a transformação autoadjunta

$$\mathscr{B} := \mathscr{A}^* \mathscr{A}.$$

Temos que

$$\det \mathscr{B} = \det \mathscr{A}^* \det \mathscr{A} = (\det \mathscr{A})^2.$$

Então,

$$(\det \mathscr{B})' = 2 \det \mathscr{B} \frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}},$$

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} = \frac{1}{2} \frac{(\det \mathscr{B})'}{\det \mathscr{B}}. \tag{2.13}$$

Dado $s \in (0, \pi/\sqrt{\kappa})$, seja $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $\xi^\perp$ constituinda de autovalores de $\mathscr{B}(s)$, e considere as soluções $\{\eta_1(t), ..., \eta_{n-1}(t)\}$ da equação de Jacobi em $\mathscr{B}(s)$,

$$\eta'' + \mathscr{R}(t)\eta = 0,$$

dados por $\eta_i(t) = \mathscr{A}(t)e_i$, com $i = 1, ..., n-1$. Então, aplicando o lema (2.1) na expressão (2.13) acima segue que

$$\begin{aligned}
(\ln \det \mathscr{A})'(s) &= \frac{1}{2}(\ln \det \mathscr{B})'(s) \\
&= \frac{1}{2} tr\left(\mathscr{B}' \mathscr{B}^{-1}\right)(s) \\
\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}}(s) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \eta_i', \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}(s).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Observe que $|\eta_i|' = \dfrac{\langle \eta_i', \eta_i \rangle}{|\eta_i|}$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \eta_i', \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\eta_i|' |\eta_i|}{|\eta_i|^2}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\eta_i|'}{|\eta_i|}(s)$$

Dai, pelo Teorema de Rauch, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \eta_i', \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}(s) &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_\kappa'}{S_\kappa}(s) \\
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \eta_i', \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}(s) &\geq (n-1)\frac{S_\kappa'}{S_\kappa}(s).
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão (2.14) fica

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}}(s) \geq (n-1)\frac{S_\kappa'}{S_\kappa}(s)$$

em $(0, \pi/\sqrt{\kappa})$.

Para o caso da igualdade, temos que $\det \mathscr{A} = S_\kappa^{n-1}$ na qual implica que $\mathscr{A} = S_\kappa I$ e a partir de (2.6) obtemos $\mathfrak{R} = \kappa I$. Reciprocamente, se $\mathscr{A}(t,\xi) = S_\kappa(t)I$ e $\mathfrak{R}(t) = \kappa I$ para todo $t \in [0,t_0]$, então

$$\det \mathscr{A} = S_\kappa^{n-1}$$

o que implica

$$(\det \mathscr{A})' = (n-1) = \frac{S_\kappa^{n-1}}{S_\kappa} S_\kappa'.$$

Logo,

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} = (n-1) = \frac{S_\kappa'}{S_\kappa}$$

■

Teorema 2.4 (S. Y. Cheng I) *Suponha que M é uma variedade Riemannaniana completa n-dimensional, cuja curvaturas secccionais são menores ou iguais a uma constante real κ. Então, para todo $x \in M$ temos*

$$\lambda(B(x,\rho)) \geq \lambda_\kappa(\rho), \tag{2.15}$$

para todo $\rho \leq \min\{\operatorname{inj} x, \pi/\sqrt{\kappa}\}$, onde $\lambda_\kappa(\rho)$ é o primeiro autovalor de Dirichlet do disco de raio ρ em $\mathbb{M}_\kappa$.

Prova.

Seja ϕ uma autofunção de $\lambda_\kappa(\rho)$ com $\phi|\mathbb{B}(o,\rho) > 0$, onde $\mathbb{B}(o,\rho)$ é a bola de centro o e raio ρ em $\mathbb{M}_\kappa$. Então, temos

$$\phi(\exp r\xi) = \Phi(r)$$

onde exp denota a aplicação exponencial em $\mathbb{M}_\kappa$. Por outro lado, a métrica de $\mathbb{M}_\kappa$ é dada por $ds^2 = (dt)^2 + S_\kappa^2 |d\xi|^2$. Assim, usando a expressão do Laplaciano em coordenadas, visto em (1.17), na variedade $\mathbb{M}_\kappa$, temos que $\sqrt{G} = S_\kappa^{n-1}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \frac{1}{S_\kappa^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(S_\kappa^{n-1} g^{ii} \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\right) \\
&= \frac{1}{S_\kappa^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(S_\kappa^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) \\
\Delta\Phi &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\frac{\partial}{\partial r}\Phi
\end{aligned}$$

A partir da última equação acima e do fato de ϕ ser uma autofunção do problema de Dirichlet, temos que Φ satisfaz a expressão

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \lambda_\kappa(\rho)\Phi = 0 \tag{2.16}$$

com as condições de fronteira

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(0) = \Phi(\rho) = 0$$

Podemos escrever (2.16) como

$$S_\kappa^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}\left(S_\kappa^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) + \lambda_\kappa(\rho)\Phi = 0$$

$$\left(S_\kappa^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right)(r) = -\lambda_\kappa(\rho)\int_0^r S_\kappa^{n-1}\Phi(r)dt < 0$$

para todo $r \in (0,\rho)$. Assim, Φ é estritamente decrescente com respeito a r.

Agora, considere $F : B(x,\rho) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\exp r\xi) = \Phi(r)$$

onde exp denota a aplicação exponencial de T_xM em M. Além disso, sendo a métrica em $B(x,\rho)$ dada por (2.7) temos que

$$\begin{aligned}
\Delta F(\exp r\xi) &= \frac{1}{\sqrt{g}(r,\xi)}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}(r,\xi)G^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi(r))\right)\\
\Delta F(\exp r\xi) &= \frac{1}{\sqrt{g}(r,\xi)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g}(r,\xi)\frac{\partial}{\partial r}(\Phi(r))\right),
\end{aligned}$$

onde $\sqrt{g}(r,\xi) = \det\mathscr{A}(r,\xi)$. Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F(\exp r\xi)}{F} &= \frac{1}{\Phi(r)\sqrt{g}(r,\xi)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g}(r,\xi)\frac{\partial}{\partial r}(\Phi(r))\right)\\
&= \frac{1}{\Phi(r)\sqrt{g}(r,\xi)}\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{g}(r,\xi))\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r) + \sqrt{g}(r,\xi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi(r)\\
\frac{\Delta F(\exp r\xi)}{F} &= \frac{1}{\Phi(r)}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi(r) + \frac{\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{g}(r;\xi))}{\sqrt{g}(r;\xi)}\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r)\right].
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Bishop I, temos que

$$\frac{\Delta F(\exp r\xi)}{F} \le \frac{1}{\Phi(r)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi(r) + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r)\right\}.$$

Então, usando a expressão (2.16) teremos

$$-\frac{\Delta F}{F}(\exp r\xi) \geq \frac{1}{\Phi(r)}\{\lambda_\kappa(\rho)\Phi(r)\} = \lambda_\kappa(\rho).$$

Assim, pelo Teorema de Barta,

$$\lambda(B(x,\rho)) \geq \inf\left(-\frac{\Delta F}{F}\right) \geq \lambda_\kappa(\rho).$$

Portanto, $\lambda(B(x,\rho)) \geq \lambda_\delta(\rho)$.

■

Teorema 2.5 (Teorema de Comparação de Bishop II) *Dados um número real κ e uma geodésica fixada γ_ξ, com a curvatura de Ricci ao longo de γ_ξ maior ou igual a $(n-1)\kappa$, isto é,*

$$Ric(\gamma'_\xi(t), \gamma'_\xi(t)) = \text{tr } \mathfrak{R}(t) \geq (n-1)\kappa \tag{2.17}$$

para todo $t \in (0, c(\xi)]$. Então,

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} \leq (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa} \tag{2.18}$$

em $(0, c(\xi))$, e $\det \mathscr{A} \leq S_\kappa^{n-1}$ em $(0, c(\xi)]$.

Temos a igualdade em (2.18) para $t = t_0 \in (0, c(\xi))$ se, e somente se,

$$\mathscr{A}(t,\xi) = S_\kappa(t)I\,, \qquad \mathfrak{R}(t) = \kappa I, \tag{2.19}$$

para todo $t \in (0, t_0]$.

Prova. Novamente, pelo Lema (2.1) temos que

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} = \text{tr } \mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1}.$$

Defina $\psi := (n-1)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}$. Então, usando (1.8), vemos que ψ satisfaz a equação escalar de Riccati

$$\psi' + \frac{\psi^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa = 0 \tag{2.20}$$

Além disso, sendo $\psi'(t) = -S_\kappa^{-2} < 0$ segue que $\psi(t)$ é estritamente decrescente com respeito a t, e, quando $\kappa \leq 0$, tem-se para $t \to +\infty$ que $\psi(t) = (n-1)\sqrt{-\kappa}$.

Dadas as transformações lineares $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t) : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Definimos o Wronskiano $\mathbf{W}$ por

$$\mathbf{W}(\mathbf{A},\mathbf{B}) := (\mathbf{A}')^*\mathbf{B} - (\mathbf{A})^*\mathbf{B}'$$

Note que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem soluções de (2.6), então $\mathbf{W}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é constante. Portanto, $\mathscr{A}$ satisfaz $\mathbf{W}(\mathscr{A},\mathscr{A}) = 0$.

Seja $U := \mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned}
U^* - U &= (\mathscr{A}^{-1})^*(\mathscr{A}')^* - \mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1} \\
&= (\mathscr{A}^{-1})^*(\mathscr{A}')^*\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} - (\mathscr{A}^{-1})^*\mathscr{A}^*\mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1} \\
&= (\mathscr{A}^{-1})^*[(\mathscr{A}')^*\mathscr{A} - \mathscr{A}^*\mathscr{A}']\mathscr{A}^{-1} \\
&= (\mathscr{A}^{-1})^*\mathbf{W}(\mathscr{A},\mathscr{A})\mathscr{A}^{-1} \\
U^* - U &= 0
\end{aligned}$$

Portanto, U é autoadjunta e satisfaz a equação

$$U' + U^2 + \mathfrak{R} = 0, \tag{2.21}$$

na qual implica

$$(\text{tr } U)' + \text{tr } U^2 + \text{tr } \mathfrak{R}. \tag{2.22}$$

Agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica

$$\text{tr } U^2 \geq \frac{(\text{tr } U)^2}{(n-1)} \tag{2.23}$$

Daí, para $\phi := \text{tr } U = \text{tr } \mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1} = \dfrac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}}$ e usando (2.17), (2.22), segue que

$$(\text{tr } U)' + \frac{\text{tr } U^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa \leq 0,$$

ou seja, ϕ satisfaz a desigualdade diferencial

$$\phi' + \frac{\phi^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa \leq 0 \tag{2.24}$$

Portanto, iremos comparar ϕ com ψ. Como vimos acima $\psi' < 0$, e sendo válido (2.20) tem-se

$$\Psi := \frac{\psi^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa > 0$$

para todo $t \in (0, \pi/\sqrt{\kappa})$. Note, em seguida que

$$\phi \sim \frac{(n-1)}{t}$$

quando t tende a zero. Assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\Phi := \frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa > 0$$

em $(0, \varepsilon_0)$. Suponha que $\Phi > 0$ em todo $(0,t)$, $t \in (0, c(\xi))$. Então, a desigualdade (2.24) dividida por Φ, fica

$$\frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa} \geq 1, \tag{2.25}$$

onde implica

$$\int_0^s \frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{(n-1)} + (n-1)\kappa}(\tau)d\tau \geq s \quad \forall s \in (0,t]. \tag{2.26}$$

Com isso, através de alguns cálculos, para os casos de $\kappa = 0$, $\kappa > 0$ e $\kappa < 0$. Nota-se que a integral acima é a função inversa de $f(t) := \frac{C_\kappa}{S_\kappa}$, aplicada em $\frac{\phi(t)}{(n-1)}$. Então, como f é estritamente decrescente, vale

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(s)}{(n-1)} &\leq f(s) = \frac{S'_\kappa}{S_\kappa}, \\
\phi(s) &\leq (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}, \\
\phi(s) &\leq \psi(s) \quad \forall s \in (0,t].
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de ϕ e ψ segue que

$$\frac{(\det \mathscr{A})'}{\det \mathscr{A}} \leq (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}.$$

Na qual implica em $\det \mathscr{A} \leq S_\kappa^{n-1}$.

Suponha que tenhamos a igualdade em (2.18) para algum $t_0 > 0$, então a igualdade em (2.26) para $t = t_0$ implica na igualdade em (2.23) e (2.24). Isto, por sua vez, implica que

$$\begin{aligned}
(\text{tr } U)' + \frac{(\text{tr } U)^2}{(n-1)} + \text{tr } \mathfrak{R} &= 0 \\
\phi' + \frac{\phi^2}{(n-1)} + \text{tr } \mathfrak{R} &= 0 \\
\text{tr } \mathfrak{R} = (n-1)\kappa,&
\end{aligned}$$

de (2.18) que $\phi = \psi$ e, por último, U é um múltiplo escalar da identidade para cada $t \in (0, t_0]$.

Desde que U é um múltiplo escalar da identidade para cada t, a equação (2.21) implica que $\mathfrak{R}$ é um múltiplo escalar da identidade para cada $t \in (0,t_0]$. Daí, como tr $\mathfrak{R} = (n-1)\kappa$ então

$$\mathfrak{R} = \kappa I,$$

para todo $t \in (0,t_0]$. Finalmente, por U ser múltiplo escalar da identidade e seu traço ser igual a

$$\text{tr } U = \text{tr } \mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1} = \frac{\det \mathscr{A}'}{\det \mathscr{A}} = (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa},$$

então

$$\mathscr{A}'\mathscr{A}^{-1} = (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}$$

para todo $(0,t_0]$. Mas isto implica que $\mathscr{A}(t) = S_\kappa(t)I$ em todo $(0,t_0]$. Isto verifica a expressão (2.19). Agora resta considerar o caso de um dado valor $t \in (0,c(\xi))$ para o qual a desigualdade $\Phi > 0$ não ocorra em todo intervalo $(0,t]$. Neste caso, então existe um $t_0 \in (0,t]$ tal que $\Phi > 0$ em $(0,t_0)$, e $\Phi(t_0)$ igual a zero. Mas, como $\Psi > 0$ e $\Phi(t_0) = 0$ então $\phi(t_0) < \psi(t_0)$. Assim, $\phi < \psi$ em todo intervalo $(0,t_0]$.

Se $\phi < \psi$ em todo $(0,t)$, então já temos (2.18) em $(0,t]$, como foi provado acima. Caso contrário, então existe um elemento maximal $t_1 \in (0,t)$ tal que $\phi < \psi$ em $(0,t_1)$. Em particular, $\phi = \psi$ para t_1. Então $\Phi(t_1) > 0$, pois $\phi(t_1) = \psi(t_1)$, e existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\Phi \mid [t_1, t_1+\varepsilon_1) > 0$, implica que (2.25) é válido a partir de t_1 para qualquer $s \in (t_1, t_1+\varepsilon_1)$. Com isso, temos que $\phi \leq \psi$ em $(t_1, t_1+\varepsilon_1)$, que contraria a maximalidade de t_1. Assim, temos que vale (2.18) em todo intervalo $(0,t]$.

Para considerar o caso da igualdade, é suficiente considerar o caso onde existe um $t_2 \in [0,t]$ tal que $\phi < \psi$ em $(0,t_2)$ e $\phi(t_2) = \psi(t_2)$. Mas então, $\Phi(t_2) = \Psi(t_2)$, na qual implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que (2.25) é válida em $(t_2-\varepsilon, t_2]$. Para qualquer $t \in (t_2-\varepsilon, t_2]$ integrar (2.25) de t para t_2, obtemos $\phi(t) \geq \psi(t)$, uma contradição.

■

Teorema 2.6 (S. Y. Cheng II) *Seja M uma variedade Riemanniana completa com as curvaturas de Ricci em M maiores ou iguais a $(n-1)\kappa$. Então, para todo $x \in M$, $\rho > 0$, temos*

$$\lambda^*(B(x,\rho)) \leq \lambda_\kappa(\rho). \tag{2.27}$$

Prova. Note que não temos a garantia de que $S(x,\rho)$, a fronteira de $B(x,\rho)$, é suave, por isso só temos o tom fundamental de $B(x,\rho)$. Assim, queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe uma função F em $B(x,\rho)$ que é aproximada, em relação a norma (2.5), por uma função em

$C_0^\infty(B(x,\rho))$, tal que

$$\int_{B(x,\rho)} \mid \nabla F \mid^2 \leq (\lambda_\kappa(\rho)+\varepsilon)\int_{B(x,\rho)} F^2.$$

A função F é construida da seguinte forma. Seja ϕ uma autofunção de $\lambda_\kappa(\rho)$ tal que $\phi \mid \mathbb{B}_\kappa(o,\rho) > 0$, onde $\mathbb{B}_\kappa(o,\rho)$ representa o disco em $\mathbb{M}_\kappa$. Então, tem-se que ϕ é radial e

$$\phi(\exp r\xi) = \Phi(r),$$

onde exp é a aplicação exponencial em $\mathbb{M}_\kappa$, e Φ satisfaz a expressão

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \lambda_\kappa(\rho)\Phi = 0, \tag{2.28}$$

com as condições iniciais de fronteira $\left(\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right)(0) = \Phi(\rho) = 0$. Novamente, como feito no Teorema de Cheng acima,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right)(r) < 0$$

para todo $(0,\rho)$. Assim, Φ é estritamente decrescente com respeito a r.

Agora, defina a aplicação $F : B(x,\rho) \to \mathbb{R}$ para todo $r\xi \in \overline{\mathbf{B}(x,\rho)} \cap \mathscr{D}_x$ com

$$F(\exp r\xi) = \Phi(r),$$

onde exp é a aplicação exponencial de M_x em M e $\mathbf{B}(x,\rho) = \{\xi \in T_xM \,;\, \mid \xi \mid < \rho\}$. a função F está bem definida em toda $\overline{B(x,\rho)}$, pois se duas geodésicas minimizantes partem de x e intersectam-se em y então ambas as geodésicas tem o mesmo comprimento. Temos também que a função F é continua, pois $c(\xi)$, definida na seção 2.2, é continua. Além disso, para $r\xi \in \overline{\mathbf{B}(x,\rho)} \cap \mathscr{D}_x$ temos

$$\mid (\mathrm{grad}F)(\exp r\xi) \mid = \mid \frac{\partial}{\partial_r}\Phi(r) \mid,$$

assim grad F tem comprimento limitado em $B(x,\rho)$. Desde que grad F é contínuo em quase todo lugar, exceto, possivelmente, em $C(x) \cap \overline{B(x,\rho)}$, o qual é um conjunto de medida Riemmanniana nula, pois ele está contido em $C(x) := \exp(\{c(\xi)\xi; c(\xi) < +\infty;\, |\xi| = 1\})$ que tem medida nula, concluímos que $F \in H(B(x,\rho))$, onde $H(B(x,\rho))$ é o completamento de $C^1(B(x,\rho))$ com respeito a norma 2.5.

Mostraremos agora que F é aproximada em $H(B(x,\rho))$ por uma função $G \in C_0^\infty(B(x,\rho))$. Seja $L : [0,\infty) \to \mathbb{R} \in C^\infty$ com $L'(0) = 0$, e suporte contido em $[0,\rho_1]$ para algum $\rho_1 < \rho$. Defina a função $G : (\exp r\xi) \to \mathbb{R}$ por

$$G(\exp r\xi) = L(r)$$

para todo $r\xi \in \overline{\mathbf{B}(x,\rho)} \cap \mathscr{D}_x$. Logo, pelo mesmo motivo que $F \in H(B(x,\rho))$, temos que $G \in$

$H(B(x,\rho))$ e G tem suporte compacto. Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \| F-G \|^2 &= \int_{B(x,\rho)} [(F-G)(\exp r\xi)]^2 dV \\ &= \int_{B(x,\rho)} [\Phi(r)-L(r)]^2 \sqrt{g}(r;\xi) dr\, d\mu_x(\xi), \end{aligned}$$

usando coordenadas polares e sendo $\mathbf{S}_x = \{\xi \in T_xM \, ; \, |\xi| = 1\}$, temos

$$\begin{aligned} \| F-G \|^2 &= \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi) \int_0^{\min\{c(\xi),\rho\}} (\Phi-L)^2(r)\sqrt{g}(r;\xi)dr \\ &= \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi) \int_0^{\min\{c(\xi),\rho\}} (\Phi-L)^2(r)\det\mathscr{A}(r,\xi)dr \end{aligned}$$

pelo Teorema 2.5 segue que

$$\| F-G \|^2 \leq \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi) \int_0^{\rho} (\Phi-L)^2(r) S_\kappa^{n-1} dr$$

que é em $L^2(\mathbb{B}_\kappa(o,\rho))$ a distância de funções em $\mathbb{B}_\kappa(o,\rho)$ determinada por ϕ e L. Analogamente, mostra-se que

$$\int_{B(x,\rho)} |\operatorname{grad}(F-G)|^2 \leq \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi) \int_0^{\rho} (\partial_r\Phi - L')^2(r) S_\kappa^{n-1} dr,$$

onde daqui por diante usaremos ∂_r para representar $\dfrac{\partial}{\partial_r}$. Daí, qualquer aproximação atingida em $H(\mathbb{B}_\kappa(o,\rho))$ é atingida automaticamente em $H(B(x,\rho))$. Então, F é aproximada por uma função $G \in C_0^\infty(B(x,\rho))$ em $H(B(x,\rho))$.

Seja $b(\xi) := \min\{c(\xi),\rho\}$. Então, afirmamos que

$$\int_0^{b(\xi)} (\partial r\Phi)^2 \sqrt{g}(r;\xi)dr \leq \lambda_\kappa(\rho) \int_0^{b(\xi)} \Phi^2 \sqrt{g}(r;\xi)dr \tag{2.29}$$

para todo $\xi \in \mathbf{S}_x$. De fato, usando integração por partes, com u e dv dados abaixo

$$u = \partial_r\Phi\sqrt{g}(r;\xi), \qquad dv = \partial_r\Phi dr,$$

teremos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{b(\xi)} (\partial_r\Phi)^2\sqrt{g}(r;\xi)dr &= \Phi\partial_r\Phi\sqrt{g}(r;\xi)|_0^{b(\xi)} - \int_0^{b(\xi)} \Phi\partial_r[\partial_r\Phi\sqrt{g}(r;\xi)]dr \\
&= \Phi(b(\xi))\partial_r\Phi(b(\xi))\sqrt{g}(b(\xi);\xi) - \int_0^{b(\xi)} \Phi\partial_r[\partial_r\Phi\sqrt{g}(r;\xi)]dr \\
&\leq -\int_0^{b(\xi)} \Phi\partial_r[\partial_r\Phi\sqrt{g}(r;\xi)]dr \\
&\leq -\int_0^{b(\xi)} \Phi\left\{\partial_r^2\Phi(\sqrt{g}(r;\xi)) + (\partial_r\Phi)\partial_r\sqrt{g}(r;\xi)\right\}dr \\
&\leq -\int_0^{b(\xi)} \Phi\left\{\partial_r^2\Phi + (\partial_r\Phi)\frac{\partial_r\sqrt{g}(r;\xi)}{\sqrt{g}(r;\xi)}\right\}\sqrt{g}(r;\xi)dr \\
\int_0^{b(\xi)} (\partial_r\Phi)^2\sqrt{g}(r;\xi)dr &\leq -\int_0^{b(\xi)} \Phi\left\{\partial_r^2\Phi + (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(\partial_r\Phi)\right\}\sqrt{g}(r;\xi)dr,
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos que $\Phi|[0,\rho) > 0$ e $\partial_r\Phi|(0,\rho] < 0$, e a última desigualdade foi aplicamos o Teorema 2.5. Daí, como vale a igualdade (2.28), teremos

$$\int_0^{b(\xi)} (\partial_r\Phi)^2\sqrt{g}(r;\xi)dr \leq \lambda_\kappa(\rho)\int_0^{b(\xi)} \Phi^2\sqrt{g}(r;\xi)dr,$$

com isso provamos a afirmação (2.29) feita acima. Agora, sabendo que

$$\| \operatorname{grad} F \|^2 = \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi)\int_0^{b(\xi)} (\partial_r\Phi)^2\sqrt{g}(r;\xi)dr,$$

e

$$\| F \|^2 = \int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi)\int_0^{b(\xi)} \Phi^2\sqrt{g}(r;\xi)dr,$$

concluimos, usando a afirmação (2.29) provada acima, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi)\int_0^{b(\xi)} (\partial_r\Phi)^2\sqrt{g}(r;\xi)dr &\leq \lambda_\kappa(\rho)\int_{\mathbf{S}_x} d\mu_x(\xi)\int_0^{b(\xi)} \Phi^2\sqrt{g}(r;\xi)dr \\
\frac{\| \operatorname{grad} F \|^2}{\| F \|^2} &\leq \lambda_\kappa(\rho) \\
\lambda^*(B(x,\rho)) = \inf\left\{\frac{\| \operatorname{grad} F \|^2}{\| F \|^2}\ ;\ F \in H_0^1\right\} &\leq \frac{\| \operatorname{grad} F \|^2}{\| F \|^2} \leq \lambda_\kappa(\rho).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda^*(B(x,\rho)) \leq \lambda_\kappa(\rho)$.

■

2.5 Teorema Principal

Nesta seção apresentamos a demonstração do principal resultado desta dissertação. Para isto usaremos o Teorema de Barta e o seguinte lema.

Lema 2.2 *Dado* $u : B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r) \to \mathbb{R}$ *uma primeira autofunção positiva de Dirichlet na bola* $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r) \subset \mathbb{M}^n(\kappa)$. *Então, vale que:*

(i) *u é solução radial, isto é,* $u(t,\theta) = u(t)$ *e satisfaz a seguinte equação diferencial,*

$$u''(t) + (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}(t)u'(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))u(t) = 0, \;\; t \in [0,r). \tag{2.30}$$

(ii) $u'(t) \leq 0$, *com igualdade somente para* $t = 0$.

Prova. (i) Sabemos que $\mathbb{M}^n(\kappa)$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante $\kappa \in \mathbb{R}$. Então, para cada $p \in B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$, existe um sistema de coordenadas $(t,\theta) \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}) \times \mathbb{S}^{n-1}$ na qual a métrica Riemanniana é dada como

$$ds^2 = (dt)^2 + S_\kappa^2(t)|d\theta|^2, \tag{2.31}$$

onde $S_\kappa(t)$ é a solução de $\psi'' + \kappa\psi = 0$ satisfazendo $S_\kappa(0) = 0$, e $S'_\kappa(0) = 1$. Veja [4] p.38 e 39. Agora defina $u(q(t,\theta)) = f(t,\theta)$. Assim, calculando o Laplaciano de $u(q(t,\theta))$, teremos

$$\Delta u(q(t,\theta)) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x_j}\right),$$

onde (g_{ij}) é a matriz da métrica ds^2 que é dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_\kappa^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_\kappa^2 \end{pmatrix}_{nxn}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta u(q(t,\theta)) &= \frac{1}{S_\kappa^{n-1}(t)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(S_\kappa^{n-1}(t)g^{ii}\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x_i}\right)\\
&= \frac{1}{S_\kappa^{n-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(S_\kappa^{n-1}(t)\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial t}\right)+\frac{1}{S_\kappa^{n-1}(t)}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(S_\kappa^{n-1}(t)S_\kappa^{-2}(t)\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial x_i}\right)\\
&= S_\kappa^{1-n}(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(S_\kappa^{n-1}(t)\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial t}\right)+S_\kappa^{-2}(t)\Delta_{S^{n-1}}f(t,\theta),
\end{aligned}$$

onde $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é o operador Laplaciano em $\mathbb{S}^{n-1}$.

Se $f(t,\theta)=T(t)G(\theta)$, temos que

$$\Delta u(q(t,\theta)) = S_\kappa^{1-n}(t)(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'G(\theta)+S_\kappa^{-2}(t)T(t)\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}G(\theta),$$

sendo que $'$ significa a diferenciação com respeito a t. Somando $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))u$, ou seja, $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))T(t)G(\theta)$ na última igualdade e sendo u uma primeira autofunção do problema de Dirichlet, isto é, u satisfaz $\Delta u+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))u=0$, teremos

$$S_\kappa^{1-n}(t)(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'G(\theta)+S_\kappa^{-2}(t)T(t)\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}G(\theta)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))T(t)G(\theta)=0 \quad (2.32)$$

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}G(\theta)+\frac{[S_\kappa^{1-n}(t)(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))T(t)]}{S_\kappa^{-2}(t)T(t)}G(\theta)=0$$

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}G(\theta)+\nu G(\theta)=0, \quad (2.33)$$

onde $\nu=\dfrac{[S_\kappa^{1-n}(t)(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))T(t)]}{S_\kappa^{-2}(t)T(t)}$ são os autovalores de $\mathbb{S}^{n-1}$ com autofunções G. Com isso, usando (2.33) na expressão (2.32) obtemos

$$\begin{aligned}
(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'G(\theta)+\left(S_\kappa^{-2}(t)\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}G(\theta)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))G(\theta)\right)S_\kappa^{n-1}(t)T(t)=0\\
\left\{(S_\kappa^{n-1}(t)T'(t))'+\left[\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))-\nu S_\kappa^{-2}(t)\right]S_\kappa^{n-1}(t)T(t)\right\}G(\theta)=0.
\end{aligned}$$

Como $G(\theta)$ não é identicamente nula, podemos escrever a última igualdade acima da seguinte forma

$$T''(t)+(n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}T'(t)+\left\{\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))-\frac{\nu}{S_\kappa^2(t)}\right\}T(t)=0$$

Em particular, o menor autovalor de $\mathbb{S}^{n-1}$ é zero, ver [4]. Assim, segue que

$$T''(t)+(n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}T'(t)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))T(t)=0 \quad (2.34)$$

onde de (2.34) concluímos que a primeira autofunção do problema de Dirichlet, u, é uma solução radial.

Para provar (ii) começamos usando que $u(t,\theta)=u(t)$. Então,

$$(S_\kappa^{n-1}(t)u'(t))'+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))S_\kappa^{n-1}(t)u(t)=0$$

integrando a expressão acima, obtemos

$$(S_\kappa^{n-1}u')(s)=-\lambda_1\int_0^s S_\kappa^{n-1}(t)u(t)dt$$

$$u'(s)=\frac{-\lambda_1}{S_\kappa^{n-1}(s)}\int_0^s S_\kappa^{n-1}(t)u(t)dt \tag{2.35}$$

na qual $s\in[0,\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$. Como $\lambda_1>0$ e por hipótese $u\mid(0,s)>0$ temos que $u'(t)<0$ em $(0,s)$. Sendo $u'(0)=0$, concluimos que $u'(s)\leq 0$ para todo $s\in[0,\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$.

■

Agora iremos apresentar o principal resultado deste trabalho, devido a Bessa-Montenegro [11]. Neste Teorema foi observado que as desigualdades dos autovalores obtidas por Cheng para bolas geodésicas, usando o teorema de Barta, é válido se trocarmos curvatura seccional e Ricci pela curvatura média das esferas geodésicas. Ou seja, dadas $B_M(r)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ bolas geodésicas e seja $(t,\theta)\in(0,r]\times\mathbb{S}^{n-1}$ suas coordenadas geodésicas. Defina $H_M(t,\theta)$ e $H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t,\theta)=H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ as curvaturas média das esferas $\partial B_M(r)$ e $\partial B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ com respeito a campo de vetor unitário $-\partial/\partial t$. Então segue a seguinte versão do Teorema de Comparação de Autovalores de Cheng.

Teorema 2.2 (Bessa-Montenegro [11]) *Se $H_M(s,\theta)\geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s\in(0,r]$ e todo $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$ então*

$$\lambda_1(B_M(r))\geq\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)). \tag{2.36}$$

Se $H_M(s,\theta)\leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s\in(0,r]$ e todo $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$ então

$$\lambda_1(B_M(r))\leq\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)). \tag{2.37}$$

A igualdade em (2.36) ou em (2.37) ocorre se, e somente se, $H_M(s,\theta)=H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(s)$ para todo $s\in(0,r]$ e todo $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$.

Prova. Seja $u: B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}\to\mathbb{R}$ uma primeira autofunção positiva, solução do problema de Dirichlet. A partir do Lema 2.2 sabemos que u é função radial, $u(t,\theta)=u(t)$, $u'(t)\leq 0$ e satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$u''(s)+(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(s)u'(s)+\lambda_1\left(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}\right)u(s)=0,\ \ s\in[0,r] \tag{2.38}$$

onde

$$S_\kappa(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{\kappa}\,\mathrm{t})}{\sqrt{\kappa}}, & \text{se } \kappa>0;\\ t, & \text{se } \kappa=0;\\ \dfrac{\operatorname{senh}(\sqrt{-\kappa}\,\mathrm{t})}{\sqrt{-\kappa}}, & \text{se } \kappa<0.\end{cases} \tag{2.39}$$

e $C_\kappa(t)=S'_\kappa(t)$. Veja que $u(t,\theta)=u(t)$ também define uma função suave em $B_M(r)$, (*chamada de função transplantada*) com *grad* $u=u'\dfrac{\partial}{\partial t}$, onde $\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo de vetorial normal unitário da esfera geodésica $\partial B_M(r)$ apontando para fora. Portanto

$$\begin{aligned}\Delta u &= div(grad\ u)=div\left(u'\frac{\partial}{\partial t}\right)\\ \Delta u &= \left\langle grad\ u',\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle+u'div\left(\frac{\partial}{\partial t}\right).\end{aligned}$$

Pela definição do gradiente e divergente, chegamos a

$$\Delta u=u''+u'\mathrm{tr}\ \left(\xi\to\nabla_\xi\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{2.40}$$

tal que $\xi\in T_pM$ e $\xi\mapsto\nabla_\xi\dfrac{\partial}{\partial t}$ é a aplicação de Weingarten da esfera geodésica com respeito a $-\partial/\partial t$. Além disso, o traço da matriz da *aplicação de Weingarten* nos dá a curvatura média, então tr $\left(\xi\to\nabla_\xi\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ é a curvatura média $H_M(t,\theta)$. Logo

$$\Delta u=u''+u'H_M.$$

Pela igualdade acima tem-se que para todo ponto (t,θ) de $B_M(r)$ que

$$-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta)=\left(-\frac{u''}{u}-H_M\frac{u'}{u}\right)(t,\theta),$$

e como $-\dfrac{u''}{u}=(n-1)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}\dfrac{u'}{u}+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$, teremos que

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta) &= (n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{u'}{u}(t)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))-H_M(t,\theta)\frac{u'}{u}(t)\\ -\frac{\Delta u}{u}(t,\theta) &= \left[(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)-H_M(t,\theta)\right]\frac{u'}{u}(t)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por (1.6) observe que $H_{\mathbb{M}(\kappa)} = (n-1)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}$. Então, segue de (2.41) que

$$-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta) = \left[H_{\mathbb{M}(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta)\right]\frac{u'}{u}(t) + \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)) \tag{2.42}$$

Então, aplicando o $\sup\limits_{(t,\theta)}$ e usando o Teorema de Barta (2.8) para $u : B_M(r) \to \mathbb{R}$ na última expressão acima, implica que

$$\sup_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}(\kappa)} - H_M)\frac{u'}{u}\right] + \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)) = \sup_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right) \geq \lambda_1(B_M(r)) \tag{2.43}$$

analogamente,

$$\lambda_1(B_M(r)) \geq \inf_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}(\kappa)} - H_M)\frac{u'}{u}\right] + \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)) = \inf_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right). \tag{2.44}$$

Como $u' \leq 0$ e $u > 0$ em $B_M(r)$, logo $u'/u \leq 0$. A partir disto fazemos as seguintes conclusões
(i) Se $H_M(t,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) \Longrightarrow \inf\left[(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta))\frac{u'}{u}\right] \geq 0$ e a partir de (2.44) chega que

$$\lambda_1(B_M(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$$

(ii) Se $H_M(t,\theta) \leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) \Longrightarrow \sup\left[\left(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta)\right)\dfrac{u'}{u}\right] \leq 0$ e segue de (2.43) que

$$\lambda_1(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)).$$

Com *(i)* e *(ii)*, provamos que para todo $s \in (0,r]$ e $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ tem-se

$$H_M(t,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) \Longrightarrow \lambda_1(B_M(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)),$$

$$H_M(t,\theta) \leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) \Longrightarrow \lambda_1(B_M(r)) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)).$$

Por outro lado, se $H_M(t,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ então $\inf\limits_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta))\dfrac{u'}{u}(t)\right] \geq 0$, e se $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)) = \lambda_1(B_M(r))$ implica de (2.44) que $\inf\limits_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta))\dfrac{u'}{u}(t)\right] \leq 0$. Logo, concluímos que

$$\inf_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta))\frac{u'}{u}(t)\right] = 0.$$

Dai, de (2.42) vale

$$\inf_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta)\right) = \inf_{(t,\theta)}\left[(H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) - H_M(t,\theta))\frac{u'}{u}(t)\right] + \lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))$$

$$\inf_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta)\right)=\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))=\lambda_1(B_M(r)). \tag{2.45}$$

Como se pode observar no Teorema de Barta (2.8), a função transplantada u é uma primeira autofunção positiva de $\lambda_1(B_M(r))$, então da expressão (2.41), temos

$$\lambda_1(B_M(r))=-\frac{\Delta u}{u}(t,\theta)=\left[(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}-H_M\right]\frac{u'}{u}(t,\theta)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)),$$

mas, como supomos que $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))=\lambda_1(B_M(r))$, então

$$\left[(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}-H_M\right]\frac{u'}{u}(t,\theta)=0,$$

para todo $t\in(0,r]$ e $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, como vimos na prova do Lema (2.10), $u'(0)=0$ e $u'(t)<0$ para todo $t\in(0,r]$. Dai,$\dfrac{u'(t)}{u}<0$ em $t\in(0,r]$. Assim

$$\left[(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa}-H_M\right]=0\Longrightarrow H_M=(n-1)\frac{C_\kappa}{S_\kappa},$$

para todo $t\in(0,r]$. Por continuidade $H_M=(n-1)\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}$ em toda a bola com raio r . Portanto, $H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)=H_M(t,\theta)$, para todo $(s,\theta)\in(0,r]\times\mathbb{S}^{n-1}$. Reciprocamente, se $H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)=H_M(t,\theta)$, então segue de (2.42) que

$$-\frac{\Delta u}{u}=\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)),$$

novamente pelo Teorema de Barta (2.8) tem-se

$$\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))=\sup_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right)\geq\lambda_1(B_M(r))\geq\inf_{(t,\theta)}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right)=\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)).$$

Portanto, $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r))=\lambda_1(B_M(r))$. A igualdade no caso de $H_M(t,\theta)\leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ é tratado de forma similar.

■

Capítulo 3

Exemplos

Conteúdo

3.1 Exemplo 1 . . . . p. 42

3.2 Exemplo 2 . . . . p. 45

Neste Capítulo, iremos construir exemplos de métricas relativas a certos aspectos do Teorema de Comparação de Autovalores de Cheng. No primeiro exemplo, construímos uma família de métricas completas suaves rotacionalmente simétricas, ou seja, sua expressão é dada por $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$ com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(t) > 0$ para todo $t > 0$, em $\mathbb{R}^n = [0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com curvatura seccional radial $K_{(\mathbb{R}^n, ds^2)} > \kappa$ fora de um conjunto compacto tal que a curvatura média da esfera geodésica satisfaz $H_{(\mathbb{R}^n, ds^2)}(t,\theta) \geq H_{(\mathbb{M}^n(\kappa), can_\kappa)}$. Da mesma forma, construímos métricas completas suaves rotacionalmente simétricas em $\mathbb{R}^n$ com curvatura seccional radial $K_{(\mathbb{R}^n, ds^2)} < \kappa$ fora de um conjunto compacto tal que a curvatura média da esfera geodésica satisfaz $H_{(\mathbb{R}^n, ds^2)}(t,\theta) \leq H_{(\mathbb{M}^n(\kappa), can_\kappa)}$. Isso mostra que as hipóteses do Teorema Principal não implica nas hipóteses dos Teoremas de Cheng para curvaturas seccional e de Ricci.

3.1 Exemplo 1

Sejam $\mathbb{R}^n = [0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$. Seja $\psi_\kappa(t)$ dado por

$$\psi_\kappa(t) = (-f'S_\kappa + fS'_\kappa)(t),$$

onde $'$ representa a diferenciação com respeito a t. Com isso, temos as seguintes afirmações:

(I) A curvatura seccional radial de $(\mathbb{R}^n, ds^2)$ é limitada superiormente por κ se, e somente se, $\psi'_\kappa(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$.

(II) A curvatura média de $\partial B_{\mathbb{R}^n}(t)$ e $\partial B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ satisfaz $H_{\mathbb{R}^n}(t,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ se, e somente se, $\psi_\kappa(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Provaremos as afirmações acima

Prova. (I) A curvatura seccional radial é dada por $K(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta_i})$, tal que $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por outro lado, o $\mathbb{R}^n = [0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$ tem matriz da métrica g_{ij} dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f^2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

na qual sua inversa g^{ij} é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{f^2} \end{pmatrix}$$

Daí, através da definição tem-se $K(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}) = \frac{-f''}{f}$. Então, no caso de $\frac{-f''}{f} \leq \kappa$ e $S''_\kappa = -\kappa S_\kappa$ implica que $\psi'(t) \leq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Reciprocamente, quando $\psi'(t) \leq 0$ equivale a $-f''S_\kappa + fS''_\kappa \leq 0$, ou seja, $fS''_\kappa \leq f''S_\kappa$, porém $-\kappa = \frac{S''_\kappa}{S_\kappa}$. Logo, temos $K(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}) = -\frac{f''}{f} \leq \kappa$.

(II) Dado $-\dfrac{\partial}{\partial t}$ um campo unitário apontando para fora em $B_{\mathbb{R}^n}(t)$ e $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ normal a $\partial B_{\mathbb{R}^n}(t)$ e $\partial B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$. Com isso, usando (1.6) podemos escrever a curvatura média de $\partial B_{\mathbb{R}^n}(t)$ e $\partial B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ com respeito a $-\dfrac{\partial}{\partial t}$ como

$$H = \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{3.2}$$

Usando (1.14) e (3.1) na última expressão acima chegamos a

$$\begin{aligned} H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta) &= \frac{1}{f^{n-1}(t)}\sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} f^{n-1}(t) \\ H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta) &= \frac{1}{f^{n-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t} f^{n-1}(t). \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura média de $\partial B_{\mathbb{R}^n}(t)$ é

$$H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta) = (n-1)\frac{f'}{f}. \tag{3.3}$$

Analogamente, para $H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$ com $\mathbb{M}(\kappa)$ tendo a métrica $d\sigma^2 = dt^2 + S_\kappa^2 d\theta^2$, temos que

$$H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) = (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}. \tag{3.4}$$

Portanto, segue de (3.3) e (3.4) que

$$H_{\mathbb{R}^n}(t,\theta) \geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t) \Leftrightarrow (n-1)\frac{f'}{f} \geq (n-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa} \Leftrightarrow -f'S_\kappa + fS'_\kappa \leq 0 \Leftrightarrow \psi_\kappa(t) \leq 0,$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Isso prova as afirmações feitas acima.

■

Por outro lado, como $\psi_\kappa(t) = (-f'S_\kappa + fS'_\kappa)(t)$ temos que $\psi_\kappa(0) = \psi'_\kappa(0) = 0$. Além disso, observe que para todo $t \neq 0$,

$$\frac{\psi_\kappa}{S_\kappa^2} = \frac{-f'S_\kappa + fS'_\kappa}{S_\kappa^2} = -\left(\frac{f}{S_\kappa}\right)'$$

e, pela regra de L'Hospital, vemos que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\psi_\kappa}{S_\kappa^2}(t) = 0$. Então, integrando $\left(\dfrac{f}{S_\kappa}\right)'$ entre ε e t obtemos

$$\int_\varepsilon^t \left(\frac{f}{S_\kappa}\right)'(s)ds = \frac{f}{S_\kappa}(t) - \frac{f}{S_\kappa}(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^t \frac{\psi_\kappa}{S_\kappa^2}(s)ds. \tag{3.5}$$

Desde que, novamente pela regra de L'Hospital, $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f}{S_\kappa}(\varepsilon)=1$, teremos por (3.5) ao passarmos o limite para $\varepsilon\to 0$ uma expressão para f dada por

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f}{S_\kappa}(t)-\frac{f}{S_\kappa}(\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_\varepsilon^t\frac{\psi_\kappa{}^2}{S_\kappa}(s)ds\right)$$

$$f(t)=S_\kappa(t)-S_\kappa(t)\cdot\int_0^t\frac{\psi_\kappa}{S_\kappa^2}(s)ds. \tag{3.6}$$

Agora, a partir dos fatos acima, considere $\psi_\kappa:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo as seguintes condições

(i) $\psi_\kappa(0)=\psi'_\kappa(0)=0$

(ii) $\psi_\kappa(t)\leq 0$

(iii) $\left|\int_{[0,\infty)}\frac{\psi_\kappa(s)}{S_\kappa^2(s)}ds\right|<\infty$

(iv) $\psi'_\kappa(t)>0$ para todo $t>1$

Então, a partir destas condições acima podemos concluir, usando (3.6) e as afirmações (I) e (II), que f está bem definida e que temos uma métrica completa suave $ds^2=dt^2+f^2(t)d\theta^2$ em $\mathbb{R}^n$, tal que a curvatura seccional radial $K_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}>\kappa$ fora da bola $B_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(1)$ e a esfera geodésica $\partial B_{\mathbb{R}^n}(t)$ tem curvatura média dada $H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta)\geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$. Ou seja,

$$H_M(t,\theta)\geq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)\not\Rightarrow K_M\leq\kappa.$$

Porém, se tomarmos $\psi_\kappa:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ para ser uma função suave satisfazendo a

(i) $\psi_\kappa(0)=\psi'_\kappa(0)=0$

(ii) $\psi_\kappa(t)\geq 0$

(iii) $\left|\int_{[0,\infty)}\frac{\psi_\kappa(s)}{S_\kappa^2(s)}ds\right|<1$

(iv) $\psi'_\kappa(t)<0$, para todo $t>1$,

obtemos uma métrica $ds^2=dt^2+f^2(t)d\theta^2$ suave com curvatura seccional $K_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}<\kappa$ fora do conjunto compacto $B_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(1)$ com $H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta)\leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$. Mas, a curvatura de Ricci é o somatório das curvaturas seccionais dado por (1.3), então $Ric_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}<(n-1)\kappa$ e $H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta)\leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)$. Logo, concluímos que

$$H_M(t,\theta)\leq H_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(t)\not\Rightarrow Ric_M\geq(n-1)\kappa.$$

Observação 3.1 *No caso de métricas rotacionalmente simétricas* $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$, *a igualdade* $H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t,\theta) = H_{(\mathbb{M}(\kappa),can_\kappa)}(t)$ *para todo* $t \in (0,r]$ *e todo* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *implica que* $ds^2 = dt^2 + S_\kappa^2(t)d\theta^2$. *Visto que , se tivermos que*

$$H_{(\mathbb{R}^n,ds^2)}(t) = (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)(t) = (n-1)\left(\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\right)(t) = H_{\mathbb{M}(\kappa)}(t),$$

para todo $t \in (0,r]$ *e todo* $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ *implica* $(-f'S_\kappa + fS_\kappa')(t) = 0$, *então* $\psi_\kappa(t) = 0$ *para todo* $t \in [0,r]$ *e por (3.6) tem* $f(t) \equiv S_\kappa(t)$. *Logo, podemos concluir que as bolas* $B_{\mathbb{R}^n}(r)$ *e* $B_{\mathbb{M}^n(\kappa)}(r)$ *são isométricas.*

∎

No segundo exemplo, considera-se a métrica suave g_κ dada por $dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2$ em $[0,r] \times \mathbb{S}^3$, onde dx, dy e dz é um co-referencial dual do referencial global X, Y, Z em $\mathbb{S}^3$ satisfazendo a $[X,Y] = 2\,Z$, $[Y,Z] = 2\,X$, $[Z,X] = 2\,Y$ e $a,b,c : [0,r] \to \mathbb{R}$ são funções suaves, positivas em $(0,r]$, com a condição inicial $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ e $a'(0) = b'(0) = c'(0) = 1$. Escolhendo $a(t) = b(t) = c(t) = S_\kappa(t)$ obtemos a métrica canônica can_κ de curvatura seccional constante κ. Neste exemplo, escolhemos $a(t) = \dfrac{S_\kappa^2}{t}$, $b(t) = t$, $c(t) = S_\kappa(t)$ para obtermos uma métrica suave com as seguintes propriedades.

- O conjunto $[0,r] \times \mathbb{S}^3$ dotado com as métricas can_κ, g_κ são bolas geodésicas de raio r, isto é, $B_{can_\kappa}(r) = ([0,r] \times \mathbb{S}^3, can_\kappa)$ e $B_{g_\kappa}(r) = ([0,r] \times \mathbb{S}^3, g_\kappa)$.
- $B_{can_\kappa}(r)$ e $B_{g_\kappa}(r)$ não são isométricos se $\kappa \neq 0$.
- $B_{can_\kappa}(r)$ e $B_{g_\kappa}(r)$ têm o mesmo primeiro autovalor $\lambda_1(B_{can_\kappa}(r)) = \lambda_1(B_{g_\kappa}(r))$.
- $B_{can_\kappa}(r)$ e $B_{g_\kappa}(r)$ têm o mesmo volume $\mathrm{vol}_{can_\kappa}(B_{can_\kappa}(r)) = \mathrm{vol}_{g_\kappa}(B_{g_\kappa}(r))$.
- As esferas geodésicas $(\partial B(t), can_\kappa)$ e $(\partial B(t), g_\kappa)$ têm as mesmas curvaturas médias $H_{g_\kappa}(t,x) = H_{can_\kappa}(t,x) = 3\dfrac{C_\kappa}{S_\kappa}(t)$ para todo $t \in (0,r]$ e $x \in \mathbb{S}^3$.

3.2 Exemplo 2

Seja $\{X,Y,Z\}$ um referencial globalmente definido em $\mathbb{S}^3$ com $[X,Y] = 2\,Z$, $[Y,Z] = 2\,X$, $[Z,X] = 2\,Y$ e sejam dx, dy e dz seu co-referencial dual. Considere em $[0,r] \times \mathbb{S}^3$ a seguinte métrica $dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2$, onde $r = \infty$ se $\kappa \leq 0$, $r = \pi/\sqrt{\kappa}$ se $\kappa > 0$ e as funções $a,b,c : [0,r] \to \mathbb{R}$ são suaves positivas em $(0,r]$, com $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ e

$a'(0) = b'(0) = c'(0) = 1$. Aqui dt é o co-vetor dual do campo de vetor radial T. Observe que a matriz da métrica acima é

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2(t) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

e além disso, o campo de vetor T comuta com X, Y, Z, isto é, $[T,X] = [T,Y] = [T,Z] = 0$. De fato, dados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ campos coordenados do $\mathbb{S}^3$ e $T = \frac{\partial}{\partial t}$. Assim, $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z}$, onde $a_i : U \subset \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} [T,X] &= TX - XT \\ &= a_1 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + a_3 \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} - a_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - a_3 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}. \end{aligned}$$

Aplicando a última expressão a uma função $\varphi(t,\theta) \in C^2([0,r] \times \mathbb{S}^3)$ temos que $[T,X] = 0$. De forma análoga, mostra-se que $[T,Y] = [T,Z] = 0$. Observe que, no caso de $a(t) = b(t) = c(t) = S_\kappa(t)$ obtemos ainda que métrica canônica can_κ de curvatura seccional constante κ.

Considere o seguinte campo ortonormal

$$E_1 = T, \;\; E_2 = \frac{1}{a} \cdot X, \;\; E_3 = \frac{1}{b} \cdot Y, \;\; E_4 = \frac{1}{c} \cdot Z,$$

em $[0,r] \times \mathbb{S}^3$. Note que, se usarmos a fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle &= E_i \langle E_j, E_k \rangle + E_j \langle E_k, E_i \rangle - E_k \langle E_j, E_i \rangle \\ &\quad + \langle [E_i, E_j], E_k \rangle + \langle [E_k, E_i], E_j \rangle - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle, \end{aligned}$$

chegamos a expressão

$$2\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \langle [E_i, E_j], E_k \rangle + \langle [E_k, E_i], E_j \rangle - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle. \tag{3.8}$$

Com isso, se $i = j$ obtemos $\langle \nabla_{E_i} E_i, E_k \rangle = \langle [E_k, E_i], E_i \rangle$. Então, para $i,k \in \{1,2,3,4\}$, temos que

$$\nabla_{E_1} E_1 = 0, \quad \nabla_{E_2} E_2 = -\frac{a'}{a} E_1, \quad \nabla_{E_3} E_3 = -\frac{b'}{b} E_1, \quad \nabla_{E_4} E_4 = -\frac{c'}{c} E_1. \tag{3.9}$$

Por outro lado, o operador Laplaciano em coordenadas é dado por (1.17) e usando (3.7), temos

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{abc}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(abc(g^{ii})\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
&= \frac{1}{abc}\left[T\,(abcT)+X\left(\frac{bc}{a}X\right)+Y\left(\frac{ac}{b}Y\right)+Z\left(\frac{ab}{c}Z\right)\right]\\
&= \frac{1}{abc}\left[\left(a'bc+ab'c+abc'\right)T+abcT^2+\left(\frac{bc}{a}\right)X^2+\left(\frac{ac}{b}\right)Y^2+\left(\frac{ab}{c}\right)Z^2\right]\\
&= \left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\right)T+T^2+\frac{1}{a^2}X^2+\frac{1}{b^2}Y^2+\frac{1}{c^2}Z^2\\
\Delta &= E_1^2+\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\right)E_1+\sum_{i=2}^{4}E_i^2, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

onde $E_i^2=E_iE_i$. Além disso, a curvatura seccional no plano gerado por $\{E_1,E_2\},\{E_1,E_3\}$ para qualquer ponto $(t,p)\in(0,r]\times\mathbb{S}^3$ são dados por

$$K(E_1,E_2)=-\frac{a''}{a},\ K(E_1,E_3)=-\frac{b''}{b}. \qquad (3.11)$$

De fato isto acontece, vejamos a demonstração da primeira expressão $K(E_1,E_2)$. Por definição, temos

$$K(E_1,E_2)=\langle R(E_1,E_2)E_1,E_2\rangle=\langle\nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1-\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1+\nabla_{[E_1,E_2]}E_1,E_2\rangle$$

mas, $\nabla_{E_1}E_1=0$, $[E_1,E_2]=-\frac{a'}{a}E_2$ então $\nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1=0$ e $\nabla_{[E_1,E_2]}E_1=-\frac{a'}{a}\nabla_{E_2}E_1$. Logo,

$$K(E_1,E_2)=\langle-\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1-\frac{a'}{a}\nabla_{E_2}E_1,E_2\rangle. \qquad (3.12)$$

No entanto, com a expressão (3.8) temos que

$$2\langle\nabla_{E_2}E_1,E_k\rangle=\langle[E_2,E_1],E_k\rangle+\langle[E_k,E_2],E_1\rangle-\langle[E_1,E_k],E_2\rangle.$$

Assim, com os possíveis valores de k obtemos $\langle\nabla_{E_2}E_1,E_1\rangle=\langle\nabla_{E_2}E_1,E_3\rangle=\langle\nabla_{E_2}E_1,E_4\rangle=0$ e $\langle\nabla_{E_2}E_1,E_2\rangle=\frac{a'}{a}$. Na qual implica que $\nabla_{E_2}E_1=\frac{a'}{a}E_2$. Por outro lado, sabendo que a conexão é simétrica temos que $\nabla_{E_1}E_2=[E_1,E_2]+\nabla_{E_2}E_1=-\frac{a'}{a}E_2+\nabla_{E_2}E_1=0$. Com isso, chegamos a conclusão de que

$$\nabla_{E_2}E_1=\frac{a'}{a}E_2 \quad e \quad \nabla_{E_1}E_2=0.$$

Agora aplicando em (3.12) segue que

$$\begin{aligned}
K(E_1,E_2) &= \left\langle -\nabla_{E_1}\frac{a'}{a}E_2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_2, E_2 \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{a'}{a}\nabla_{E_1}E_2 - E_1\left(\frac{a'}{a}\right)E_2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_2, E_2 \right\rangle \\
&= \left\langle -E_1\left(\frac{a'}{a}\right)E_2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_2, E_2 \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{a''}{a}E_2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 E_2, E_2 \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{a''}{a}E_2, E_2 \right\rangle \\
K(E_1,E_2) &= -\frac{a''}{a},
\end{aligned}$$

como queriamos mostrar.

No nosso exemplo definiremos $a(t) = \dfrac{S_\kappa^2}{t}$, $b(t) = t$, $c(t) = S_\kappa(t)$, onde estamos assumindo que $r < \dfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ se $\kappa > 0$. Observe que obtemos uma métrica suave g_κ em $[0,r]\times\mathbb{S}^3$ que não isométrica a métrica canônica can_κ se $\kappa \neq 0$. Por exemplo, em $(t,p) \in (0,r]\times\mathbb{S}^3$ temos, através de um cálculo simples, para $\kappa < 0$, $S_\kappa(t)$ dado por (2.39) e as curvaturas seccionais como em (3.11) que

$$K(E_1,E_2) = 2\kappa - \frac{2}{t^2} + \frac{4\sqrt{-\kappa}\cosh(\sqrt{-\kappa}t)}{t} - 2\cosh^2(\sqrt{-\kappa}t), \quad K(E_1,E_3) = 0$$

Da mesma forma para $\kappa > 0$ obtemos

$$K(E_1,E_2) = 2\kappa - \frac{2}{t^2} + \frac{4\sqrt{\kappa}\cot(\sqrt{\kappa}t)}{t} - 2\cot^2(\sqrt{\kappa}t), \quad K(E_1,E_3) = 0$$

Além disso, $[0,r]\times\mathbb{S}^3$ é a bola geodésica (fechada) de raio r centrada em $0 = \{0\}\times\mathbb{S}^3$ com respeito a ambas as métricas can_κ, g_κ, desde que a função $\rho : [0,r]\times\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(t,x) = t$ é a funçaõ distância a origem 0 para ambas as métricas. Os operadores Laplaciano de Δ_{g_κ}, Δ_{can_κ} de g_κ e can_κ dados por (3.10) são escritos como

$$\begin{aligned}
\Delta_{g_\kappa} &= T^2 + 3\frac{C_\kappa}{S_\kappa}T + \frac{t^2}{S_\kappa^4}X^2 + \frac{1}{t^2}Y^2 + \frac{1}{S_\kappa^2}Z^2 \\
\Delta_{can_\kappa} &= T^2 + 3\frac{C_\kappa}{S_\kappa}T + \frac{1}{S_\kappa^2}X^2 + \frac{1}{S_\kappa^2}Y^2 + \frac{1}{S_\kappa^2}Z^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja $u : B_{can_\kappa}(r) \to \mathbb{R}$ uma primeira autofunção positiva de $B_{can_\kappa}(r) = ([0,r]\times\mathbb{S}^3, can_\kappa)$.

Isto significa que u satisfaz o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta_{can_\kappa} u + \lambda_1(B_{can_\kappa}(r))u = 0 & \text{em } B_{can_\kappa}(r) \\ u = 0 & \text{no } \partial B_{can_\kappa}(r). \end{cases} \tag{3.14}$$

Sabemos que u é radial, isto é, $u(t,x) = u(t)$. Daí, de (3.13) vemos que Δ_{g_κ} e Δ_{can_κ} coincidem no conjunto das funções suaves radiais definidas em $[0,r] \times \mathbb{S}^3$. De fato, suponha que $w(t,x)$ seja uma função radial. Então, aplicando esta função em (3.13) segue o resultado. Com isso, podemos dizer que $\Delta_{g_\kappa} = \Delta_{can_\kappa}$. Isto implica que u satisfaz o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta_{g_\kappa} u + \lambda_1(B_{can_\kappa}(r))u = 0 & \text{em } B_{g_\kappa}(r) \\ u = 0 & \text{no } \partial B_{g_\kappa}(r). \end{cases} \tag{3.15}$$

Dai, u é uma autofunção de $B_{g_\kappa}(r)$. Além disso, u é positiva então ela é uma primeira autofunção e $\lambda_1(B_{g_\kappa}(r)) = \lambda_1(B_{can_\kappa}(r))$ é o primeiro autovalor. Ou seja, as bolas geodésicas $B_{can_\kappa}(r)$, $B_{g_\kappa}(r)$ tem o mesmo primeiro autovalor. Por outro lado, obtemos que curvatura média das esferas geodésicas $\partial B_{g_\kappa}(t)$ e $\partial B_{can_\kappa}(t)$ são iguais, pois, dado qualquer função radial suave $v : [0,r] \to \mathbb{R}$ temos que $\Delta_{g_\kappa} v(t) = \Delta_{can_\kappa} v(t)$. Logo, tomando $v(t) = \rho(t) = t$ (distância ao centro das bolas geodésicas) teremos que é igual a

$$3\left(\frac{C_\kappa}{S_\kappa}\right)(t) = \Delta_{can_\kappa}\rho(t,x) = \Delta_{g_\kappa}\rho(t,x). \tag{3.16}$$

Por fim, observe que as matrízes das métricas g_κ e can_κ são dadas, respectivamentes, por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_\kappa^4(t)}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_\kappa^2(t) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_\kappa^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_\kappa^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_\kappa^2(t) \end{pmatrix}$$

Então o determinante são iguais, $\det(g_\kappa)_{ij} = \det(can_\kappa)_{ij}$. Isto implica que

$$\frac{\sqrt{\det(g_\kappa)_{ij}}'}{\sqrt{\det(g_\kappa)_{ij}}} = \frac{\sqrt{\det(can_\kappa)_{ij}}'}{\sqrt{\det(can_\kappa)_{ij}}}.$$

Portanto, as bolas geodésicas tem o mesmo volume.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Generalização do Teorema Principal

Conteúdo

4.1 Generalização do Teorema Principal . . . . p. 51

Neste capítulo, derivaremos alguns corólarios da demonstração do Teorema 2.2 que pode ser visto como uma generalização do Teorema de Comparação de Autovalores de Cheng. O primeiro corolário que vamos considerar é o seguinte.

4.1 Generalização do Teorema Principal

Considere a métrica $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\xi^2$ em $\mathbb{R}^m = [0,\infty) \times \mathbb{S}^{m-1}$, onde $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave satisfazendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(t) > 0$ para $t \in (0,\infty)$. Seja $B_{(M,g)}(r)$ uma bola geodésica normal de uma variedade Riemanniana completa n-dimensional (M,g). Seja $(t,\theta) \in (0,r] \times \mathbb{S}^{n-1}$ as coordenadas geodésicas para $B_{(M,g)}(r)$ e $(t,\theta) \in (0,r] \times \mathbb{S}^{m-1}$ as coordenadas geodésicas para $B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)$.

Seja $H_{(M,g)}(t,\theta)$ e $H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t,\xi) = (m-1)\left(\frac{f'}{f}\right)(t)$ a curvatura média das esferas geodésicas $\partial B_{(M,g)}(r)$ e $\partial B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)$ nos pontos (t,θ) e (t,ξ) com respeito ao campo vetorial unitário $-\frac{\partial}{\partial t}$.

Corolário 4.1 *Se $H_{(M,g)}(t,\theta) \geq H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$, para todo $t \in (0,r]$ e $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então*

$$\lambda_1(B_{(M,g)}(r)) \geq \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)). \tag{4.1}$$

Se $H_{(M,g)}(t,\theta) \leq H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$, para todo $t \in (0,r]$ e $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ então

$$\lambda_1(B_{(M,g)}(r)) \leq \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)). \tag{4.2}$$

A igualdade em (4.1) ou (4.2) ocorre se, e somente se, $n = m$ e $H_{(M,g)}(t,\theta) = H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$, para todo $t \in (0,r]$ e $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Prova. Seja $u : B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r) \to \mathbb{R}$ uma primeira autofunção da bola geodésica $B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)$. Assim, u é radial, isto é, $u(t,\xi) = u(t)$ para todo $(t,\xi) \in (0,r] \times \mathbb{S}^{m-1}$ e $u'(t) \leq 0$. Transplante u para a bola $B_{(M,g)}(r)$ e defina como $u(t,\theta) = u(t)$. Calculando o Laplaciano de u, temos

$$\begin{aligned} \Delta_g u &= \operatorname{div}_g(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div}_g\left(u'\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ -\frac{\Delta_g u}{u} &= -\frac{u''}{u} - \frac{u'}{u}\operatorname{div}_g\left(\frac{\partial}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Mas, u satisfaz a equação

$$u''(t) + (n-1)\frac{f'}{f}(t)u'(s) + \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r))u(t) = 0,$$

e por (1.6) obtemos $\operatorname{div}_g\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = H_{(M,g)}(t,\theta)$ e $H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t) = (n-1)\frac{f'}{f}$. Assim, voltando a expressão do Laplaciano de g, fica

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta_g u}{u} &= (n-1)\frac{f'}{f}\frac{u'}{u} - H_{(M,g)}(t,\theta)\frac{u'}{u} + \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)) \\ -\frac{\Delta_g u}{u} &= \left[H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t) - H_{(M,g)}(t,\theta)\right]\frac{u'}{u} + \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora considerando que $H_{(M,g)}(t,\theta) \geq H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$ e $\frac{u'}{u} < 0$ para todo $t \in (0,r]$ e todo $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, então segue de (4.3) que

$$\inf\left(-\frac{\Delta_g u}{u}\right) \geq \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)),$$

e aplicando o Teorema de Barta 2.3 temos

$$\lambda_1(B_{(M,g)}(r)) \geq \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)).$$

E se $H_{(M,g)}(t,\theta) \leq H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$ e $\frac{u'}{u} < 0$ para todo $t \in (0,r]$ e todo $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, então

$\lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)) \geq \sup\left(-\dfrac{\Delta_g u}{u}\right)$. Pelo Teorema de Barta obtemos

$$\lambda_1(B_{(M,g)}(r)) \leq \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)).$$

No caso da igualdade dos autovalores $\lambda_1(B_{(M,g)}(r)) = \lambda_1(B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r))$ temos que a função transplantada u é uma primeira autofunção de $B_{(M,g)}(r)$, e como provamos no Teorema principal (2.2), $H_{(M,g)}(t,\theta) = H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$. Para mostrar que $n = m$ procedemos da seguinte forma.

Seja p o centro da bola $B_{(M,g)}(r)$. Fixado $\theta \in \mathbb{S}^{n-1} \subset T_pM$, seja τ_t denotado o transporte paralelo por t unidades ao longo da única geodésica minimizante γ_θ satisfazendo $\gamma_\theta(0) = p$ e $\gamma_\theta'(0) = \theta$. Para $\eta \in \theta^\perp \subset T_pM$ seja $\mathfrak{R}\eta = \tau_{-t}\{R(\gamma'_\theta(t), \tau_t\eta)\gamma'_\theta(t)\}$, onde R é o tensor curvatura e $\mathscr{A}(t,\theta)$ é o caminho das transformações lineares $\theta^\perp$ satisfazendo $\mathscr{A}'' + \mathfrak{R}\mathscr{A} = 0$ com condições iniciais $\mathscr{A}(0,\theta) = 0$, $\mathscr{A}'(0,\theta) = I$. A métrica Riemanniana de M na bola geodésica $B_{(M,g)}(r)$ é dada por

$$ds^2(\exp t\theta) = dt^2 + |\mathscr{A}(t,\theta)d\theta|^2 \cdot$$

Defina $\sqrt{G}(t,\theta) = \det\mathscr{A}(t,\theta)$. Usando (1.6) temos que, a curvatura média $H_{(M,g)}(t,\theta)$ da esfera geodésica $\partial B_{(M,g)}(t)$ em um ponto (t,θ) com respeito ao campo de vetor unitário $-\dfrac{\partial}{\partial t}$ é dada por $\dfrac{\sqrt{G}'(t,\theta)}{\sqrt{G}(t,\theta)}$. Além disso, para t suficientemente pequeno a expansão de Taylor de ordem 3 para $\mathscr{A}(t,\theta)$ é

$$\mathscr{A}(t,\theta) \;=\; \mathscr{A}(0,\theta) + \mathscr{A}'(0,\theta)\,t + \frac{1}{2}\mathscr{A}''(0,\theta)\,t^2 + \frac{1}{6}\mathscr{A}'''(0,\theta)\,t^3 + O(t^4)\cdot$$

Mas, pela equação $\mathscr{A}'' + \mathfrak{R}\mathscr{A} = 0$ temos que $\mathscr{A}''(0,\theta) = 0$ e $\mathscr{A}'''(0,\theta) = -\mathfrak{R}(0)$. Assim, teremos

$$\mathscr{A}(t,\theta) = tI - \frac{\mathfrak{R}(0)}{6}\,t^3 + O(t^4)\cdot$$

Cujo o determinante é o seguinte

$$\sqrt{G}(t,\theta) = t^{n-1}\left(1 - t^2\frac{Ric(\theta,\theta)}{6} + O(t^3)\right)\cdot$$

Então,

$$\frac{\sqrt{G}'(t,\theta)}{\sqrt{G}(t,\theta)} = \frac{(n-1) - (n+1)t^2Ric(\theta,\theta)/6 + O(t^3)}{t(1 - t^2Ric(\theta,\theta)/6 + O(t^3))}. \tag{4.4}$$

Por outro lado, a métrica da $B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(r)$ é dada por $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\xi^2$, onde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Novamente, aplicando (1.6) temos que a curvatura média $H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t,\xi)$ da esfera geodésica $\partial B_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t)$ em um ponto (t,ξ) (com respeito a $-\partial/\partial t$) é dado por $(m-1)\dfrac{f'(t)}{f(t)}$.

A expansão de Taylor até a ordem 2 de f é expressa como

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0)+f'(0)\,t+\frac{1}{2}f''(0)\,t^2+O(t^3) \\ f(t) &= t+\frac{1}{2}f''(0)\,t^2+O(t^3)\cdot \end{aligned}$$

Portanto,

$$(m-1)\frac{f'(t)}{f(t)} = (m-1)\frac{1+f''(0)t+O(t^2)}{t(1+f''(0)t/2+O(t^2))}\cdot \tag{4.5}$$

Agora, tendo que $H_{(M,g)}(t,\theta) = H_{(\mathbb{R}^m,ds^2)}(t,\xi)$ para todo $t \in (0,r]$. Podemos dizer que (4.4) é igual a (4.5), isto é,

$$\frac{(n-1)-(n+1)t^2Ric(\theta,\theta)/6+O(t^3)}{(1-t^2Ric(\theta,\theta)/6+O(t^3))} = (m-1)\frac{1+f''(0)t+O(t^2)}{(1+f''(0)t/2+O(t^2))}\cdot$$

fazendo $t \to 0$ temos que $n = m$.

■

A prova do Teorema 2.2 gera outro corolário quando se considera um cone incompleto sobre uma variedade Riemanniana compacta $(n-1)$-dimensional (N,dh^2). O cone incompleto $C_f(N)$ sobre N é o espaço Riemanniano $C(N) = (0,\infty)\times N$ com a métrica

$$ds_f^2 = dt^2 + f^2(t,x)dh^2,$$

onde $f : [0,\infty)\times N \to \mathbb{R}$ é uma função suave satisfazendo $f(0,x) = 0$, $f'(0,x) = 1$, $f(t,x) > 0$ para todo $t > 0$. O cone completo é $\overline{C_f(N)} = C_f(N)\cup\{p\}$, $p = \{0\}\times N$. Note que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$ com a métrica $ds_g^2 = dt^2 + g^2(t)d\theta^2$ é o cone completo $\overline{C_g(\mathbb{S}^{m-1})}$. Lembrando que o *tom fundamental* $\lambda^*(\Omega)$ de um conjunto aberto Ω de uma variedade Riemanniana é dado por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega \mid \nabla f\mid^2}{\int_\Omega f^2},\quad f\in H_0^1(\Omega),\quad f\neq 0\right\},$$

onde $H_0^1(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$, isto é, o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\parallel \varphi \parallel_\Omega^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega \mid \nabla\varphi\mid^2.$$

Quando Ω é limitado (independentemente de sua fronteira) existe uma $u \in C^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $u > 0$ em Ω, também chamada de primeira autofunção, satisfazendo $\Delta u + \lambda^*(\Omega)u = 0$, em Ω. Se $\partial\Omega \neq \emptyset$ é suave então u é extendida continuamente para a fronteira, $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ com

$u|\partial\Omega = 0$.

O próximo resultado compara o tom fundamental $\lambda^*(C_f(N)(r))$ do cone truncado $\lambda^*(C_f(N)(r)) = (0,r)\times N$ com o menor autovalor de Dirichlet $\lambda_1(B_{\mathbb{R}^m}(r))$ da bola geodésica $(B_{\mathbb{R}^m}(r), ds_g^2)$.

Corolário 4.2 *Sejam $C_f(N)(r)$ um cone incompleto sobre uma variedade Riemanniana compacta $(n-1)$-dimensional (N,dh^2) e $\mathbb{R}^m$ com a métrica $ds_g^2 = dt^2 + g^2(t)d\xi^2$. Se*

$$(n-1)\frac{f'}{f}(t,x) \geq (m-1)\frac{g'}{g}(t), \tag{4.6}$$

para todo $x \in N$ e todo $t \in (0,r)$ onde $'$ significa a diferenciação com respeito a variável t, então

$$\lambda^*(C_f(N)(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{R}^m}(r)). \tag{4.7}$$

Se (4.6) vale par todo $t > 0$ então fazendo $r \to \infty$ temos que

$$\lambda^*(C_f(N)) \geq \lambda^*(\mathbb{R}^m). \tag{4.8}$$

Prova. Para provar este corolário é preciso a seguinte versão do Teorema de Barta para conjuntos abertos limitados que foi provada em [10].

Proposição 4.1 *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana suave. Dado $v \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $v > 0$ em Ω e $v|\partial\Omega = 0$. Então,*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Além disso, $\lambda^*(\Omega) = \inf_{\Omega}\left(-\frac{\Delta v}{v}\right)$ se, e somente se, $v = u$, onde u é uma autofunção positiva de Ω, ou seja, $\Delta u + \lambda^*(\Omega)u = 0$.

Agora dado $u : B_{\mathbb{R}^m}(r) \to \mathbb{R}$ uma primeira autofunção positiva de Dirichlet. Daí, definimos uma $v(t,x) := u(t)$ em $(C_f(N)(r))$ tal que $v \in C^2(C_f(N)(r)) \cap C^0(\overline{C_f(N)(r)})$ e $v|\partial C_f(N) = 0$. Com isso, procedendo como na demonstração do Teorema Principal 2.2, temos que

$$-\frac{\Delta v}{v} = \left[(m-1)\frac{g'}{g} - (n-1)\frac{f'}{f}\right]\frac{u'}{u} + \lambda_1(B_{\mathbb{R}^m}(r)).$$

Mas, se $(n-1)\frac{f'}{f}(t,x) \geq (m-1)\frac{g'}{g}(t)$ e $u'/u \leq 0$ para todo $t \in (0,r)$, então

$$\inf\left(\frac{\Delta v}{v}\right) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{R}^m}(r)).$$

Logo, como N é compacta implica que $C_f(N)(r)$ é limitado, então pela proposição 4.1 acima, temos que

$$\lambda^*(C_f(N)(r)) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{R}^m}(r)).$$

Além disso, se vale (4.6) para todo $t > 0$ então fazendo $r \to \infty$ obtemos

$$\lambda^*(C_f(N)) \geq \lambda^*(\mathbb{R}^m),$$

onde temos uma desigualdade com tom fundamental, pois estamos com domínios ilimitados.

■

Seja $M = \mathbb{R}^m \times N$ com a métrica $ds^2 = dt^2 + f^2(t,\theta)d\theta^2 + g^2(t,\theta)dh^2$ onde (N, dh^2) é uma variedade Riemanniana completa n-dimensional e $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ são funções suaves satisfazendo $f(0,\theta) = 0$, $f'(0,\theta) = 1$, $f(t,\theta) > 0$ para $t > 0$ e $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ e $g(t,\theta) > 0$ para todo $(t,\theta) \in [0,\infty) \times \mathbb{S}^{m-1}$. Seja $\Omega = B_{\mathbb{R}^m}(r) \times W \subset M$ onde $B_{\mathbb{R}^m}(r) \subset \mathbb{R}^m$ é uma bola geodésica com raio r e $W \subset N$ é um dominio com fecho compacto e fronteira suave ∂W. Seja $B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r) \subset \mathbb{M}^l(\kappa)$ uma bola geodésica de raio r no espaço forma simplesmente conexo l-dimensional de curvatura seccional constante $\kappa \in \{-c^2, 0, c^2\}$, $c > 0$ com métrica $dt^2 + S_\kappa^2(t)d\theta^2$.

Corolário 4.3 *Se* $(m-1)\frac{f'}{f}(t,\theta) + n\frac{g'}{g}(t,\theta) \geq (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}(t)$ *para todo* $t \in [0,r]$ *e* $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ *então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \inf_{(t,\theta)} \left[\frac{1}{g^2}\right] \cdot \lambda_1(W). \tag{4.9}$$

Se $\kappa = -c^2$, $r = \infty$ *e tomando* $W = N$ *temos que*

$$\lambda^*(M) \geq \frac{(l-1)^2\kappa^2}{4} + \inf_{(t,\theta)} \left[\frac{1}{g^2}\right] \cdot \lambda^*(N).$$

Se $(m-1)\frac{f'}{f}(t,\theta) + n\frac{g'}{g}(t,\theta) \leq (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}(t)$ *para todo* $t \in [0,r]$ *e* $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ *então*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \sup_{(t,\theta)} \left[\frac{1}{g^2}\right] \cdot \lambda_1(W). \tag{4.10}$$

Se $\kappa = -c^2$, $r = \infty$ *e tomando* $W = N$ *temos que*

$$\lambda^*(M) \leq \frac{(l-1)^2\kappa^2}{4} + \sup_{(t,\theta)} \left[\frac{1}{g^2}\right] \cdot \lambda^*(N).$$

Prova. Escolha uma função positiva $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(t,\theta,x) = u(t) \cdot v(x)$ onde u e v são autofunções positivas de $B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)$ e W respectivamente, isto é, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)+(l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t)+\lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r))u(t)=0 \tag{4.11}$$

com $u(0)=1$, $u'(0)=0$ e $v: W\to\mathbb{R}$ satisfaz o problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta_{dh^2}v+\lambda_1(W) \quad v=0, & \text{em W;}\\ \qquad\qquad\qquad\quad v=0, & \text{no } \partial W. \end{cases} \tag{4.12}$$

Com isso, $\psi\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ com $\psi>0$ em Ω e $\psi\mid\partial\Omega=0$. O operador Laplaciano de ds^2, na qual a matriz da métrica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & f^2(t,\theta) & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & . & . & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & f^2(t,\theta) & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & g^2(t,\theta) & 0 & 0\\ 0 & . & . & . & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g^2(t,\theta) \end{pmatrix}$$

Pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Delta_{ds^2} &= \frac{1}{f^{(m-1)}g^n}\sum_{i=1}^{m+n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^n\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{1}{f^{m-1}g^n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(f^{m-1}g^n\frac{\partial}{\partial t}\right)+\sum_{i=2}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^n\frac{\partial}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^n\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right].\end{aligned}$$

No entanto, calculando as três parcelas da expressão acima, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f^{m-1}g^n\frac{\partial}{\partial t}\right)=\left[(m-1)f^{m-2}g^n\frac{\partial f}{\partial t}+nf^{m-1}g^{n-1}\frac{\partial g}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial t}+f^{m-1}g^n\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f^{m-3}g^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
&= \sum_{i=2}^{m}\left[(m-3)f^{m-4}g^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+nf^{m-3}g^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+f^{m-3}g^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right]\\
&= \frac{f^{(m-3)}}{g^{(1-n)}}\left[\frac{(m-3)g}{f}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+n\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+g\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right]\\
\sum_{i=2}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{f^{(m-3)}}{g^{(1-n)}}\left[\frac{(m-3)g}{f}d\theta^2(\nabla_{d\theta^2}f,\nabla_{d\theta^2}\cdot)+nd\theta^2(\nabla_{d\theta^2}g,\nabla_{d\theta^2}\cdot)+g\Delta_{d\theta^2}\right]
\end{aligned}
$$

e

$$
\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ii}f^{m-1}g^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f^{m-1}g^{n-2}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\frac{f^{m-1}}{g^{2-n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\frac{f^{m-1}}{g^{2-n}}\Delta_{dh^2}.
$$

Somando as últimas igualdades acima no valor de Δ_{ds^2} apresentado anteriormente, fica

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ds^2} &= \frac{1}{f^{m-1}g^{n}}\left[\left((m-1)f^{m-2}g^{n}\frac{\partial f}{\partial t}+nf^{m-1}g^{n-1}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}+f^{m-1}g^{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\\
&+ \frac{1}{f^{m-1}g^{n}}\left[\frac{f^{(m-3)}}{g^{(1-n)}}\left(\frac{(m-3)g}{f}d\theta^2(\nabla_{d\theta^2}f,\nabla_{d\theta^2}\cdot)+nd\theta^2(\nabla_{d\theta^2}g,\nabla_{d\theta^2}\cdot)+g\Delta_{d\theta^2}\right)\right]+\\
&+ \frac{1}{f^{m-1}g^{n}}\left[\frac{f^{m-1}}{g^{2-n}}\Delta_{dh^2}\right],
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ds^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left[(m-1)\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t}+n\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial t}+\frac{(m-3)}{f^3}d\theta^2(\nabla_{d\theta^2}f,\nabla_{d\theta^2}\cdot)\\
&+ \frac{n}{f^2g}d\theta^2(\nabla_{d\theta^2}g,\nabla_{d\theta^2}\cdot)+\frac{1}{f^2}\Delta_{d\theta^2}+\frac{1}{g^2}\Delta_{dh^2},
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

onde $\nabla_{d\theta^2}$ e $\Delta_{d\theta^2}$ são respectivamentes o gradiente e o Laplaciano de $\mathbb{S}^{m-1}$ e ∇_{dh^2} e Δ_{dh^2} são respectivamentes o gradiente e o Laplaciano de N. Agora calculando $\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi}$ temos,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ds^2}\psi &= \Delta_{ds^2}u(t)v(x)\\
&= vu''+(m-1)\frac{f'}{f}vu'+n\frac{g'}{g}vu'+\frac{1}{g^2}u\Delta_{dh^2}v.
\end{aligned}
$$

Dai

$$
-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi} = -\frac{u''}{u}-(m-1)\frac{f'}{f}\frac{u'}{u}-n\frac{g'}{g}\frac{u'}{u}-\frac{1}{g^2}\frac{\Delta_{dh^2}v}{v},
$$

mas u satisfaz a equação (4.11) e v ao problema (4.12), assim segue que

$$-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi} = \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) - \frac{u'}{u}\left((m-1)\frac{f'}{f} + n\frac{g'}{g} - (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}\right) + \frac{1}{g^2}\lambda_1(W). \tag{4.14}$$

Agora usando a igualdade acima temos o seguinte.

Se $(m-1)\frac{f'}{f} + n\frac{g'}{g} - (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa} \geq 0$ então de (4.14)

$$\begin{aligned}
\inf\left(-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi}\right) &= \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \inf\left[-\frac{u'}{u}\left((m-1)\frac{f'}{f} + n\frac{g'}{g} - (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}\right)\right] + \inf\left(\frac{1}{g^2}\lambda_1(W)\right),\\
\inf\left(-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi}\right) &\geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \inf\left(\frac{1}{g^2}\lambda_1(W)\right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Barta, segue que

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \inf_{(t,\theta)}\left[\frac{1}{g^2}\right]\cdot\lambda_1(W).$$

Se $(m-1)\frac{f'}{f} + n\frac{g'}{g} - (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa} \leq 0$ então de (4.14)

$$\begin{aligned}
\sup\left(-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi}\right) &= \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \sup\left[-\frac{u'}{u}\left((m-1)\frac{f'}{f} + n\frac{g'}{g} - (l-1)\frac{S'_\kappa}{S_\kappa}\right)\right] + \sup\left(\frac{1}{g^2}\lambda_1(W)\right),\\
\sup\left(-\frac{\Delta_{ds^2}\psi}{\psi}\right) &\leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \sup\left(\frac{1}{g^2}\lambda_1(W)\right).
\end{aligned}$$

Então, novamente pelo teorema de Barta, temos

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) + \sup_{(t,\theta)}\left[\frac{1}{g^2}\right]\cdot\lambda_1(W).$$

Em cada caso usamos que $\left(-\frac{u'}{u}\right) \geq 0$.

No entanto, se $\kappa = -c^2$ temos por [3] páginas 46-49 que $\lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) \geq (l-1)^2\kappa^2/4$ para todo $r > 0$, e $\lim_{r\to+\infty}\lambda_1(B_{\mathbb{M}^l(\kappa)}(r)) = (l-1)^2\kappa^2/4$. Logo, se $\kappa = -c^2$, $r = \infty$ e $W = N$ segue que

$$\lambda^*(M) \geq \frac{(l-1)^2\kappa^2}{4} + \inf_{(t,\theta)}\left[\frac{1}{g^2}\right]\cdot\lambda^*(N)$$

e

$$\lambda^*(M) \leq \frac{(l-1)^2\kappa^2}{4} + \sup_{(t,\theta)}\left[\frac{1}{g^2}\right]\cdot\lambda^*(N).$$

■

Referências

[1] BARTA, J. *Sur la vibration fundamentale dúne membrane*. C.R. Acad. Sci., v.144, p. 472-473, 1937.

[2] CAMINHA, A. *Notas de geometria diferencial*. Preprint.

[3] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. New York: Academic Press, 1984.

[4] CHAVEL, I. *Riemannian geometry a modern introduction*, 2ª ed. New York : Cambridge University Press, 2006.

[5] CHENG, S. Y.*Eigenvalues comparison theorems and its geometric application*. Math Z., v. 143, p. 289-297, 1975.

[6] CHENG, S. Y. *Eigenvalues of the Laplacian*. Amer Math. Soc. Proc. Sympos. Pure Math., v. 27, p. 185-193, 1975.

[7] CARMO, M. do. *Geometria Riemanniana*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[8] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds* . New York : Springer-Verlag, 2002. (Graduate texts in mathematics; v. 218)

[9]________*Riemannian Manifolds an Introduction to Curvature*. New York: Springer-Verlag, 2007. (Graduate texts in mathematics; v. 176).

[10] BESSA, G. PACELLI ; MONTENEGRO, J. F. *An extension of Barta's and geometric application*.Ann. Global Anal. Geom., v. 11, p. 345-362, 2007.

[11] ________*On Cheng's eigenvalue comparison theorem*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., v.144, p. 673-682, 2008.

[12]________*Eigenvalue estimates and applications to geometry*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., v. 144, p. 673-682, 2008.

[13] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. New York : Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics; v. 171)

[14] VEERAVALLI, A. R. *Une remarque sur l'négalité de Mckean*. Comment, Math. Helv., v. 78, p. 884-888, 2003.

[15] GRIGOR'YAN, A. *Heat Kernel and analysis on manifolds*. New York, American Mathematical Society, 2009. (Studies in advanced mathematics; v. 47)