



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE ESTATÍSTICA

LUCAS ARAÚJO DA SILVA

Modelos de Regressão *Fuzzy*

FORTALEZA-CE
2018

LUCAS ARAÚJO DA SILVA

MODELOS DE REGRESSÃO *FUZZY*

Monografia submetida à coordenação do curso de Estatística do Departamento de Estatística e matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Área de concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre

Co-Orientador: Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva

FORTALEZA-CE

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S581m Silva, Lucas Araújo da Silva.
Modelos de Regressão Fuzzy / Lucas Araújo da Silva Silva. – 2018.
51 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Estatística, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre.

Coorientação: Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva.

1. Modelos de Regressão. 2. Teoria dos Conjuntos Fuzzy. 3. Modelos de Regressão Fuzzy. I. Título.

CDD 519.5

LUCAS ARAÚJO DA SILVA

MODELOS DE REGRESSÃO *FUZZY*

Monografia submetida à coordenação do curso de Estatística do Departamento de Estatística e matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Aprovada em: ___/___/_____

Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luis Gustavo Bastos Pinho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

FORTALEZA-CE

2018

“To consult the statistician after an experiment is finished is often merely to ask him to conduct a post mortem examination. He can perhaps say what the experiment died of.”

Ronald Fisher

“The human brain works as a binary computer and can only analyze the exact information-based zeros and ones (or black and white). Our heart is more like a chemical computer that uses fuzzy logic to analyze information that can't be easily defined in zeros and ones.”

Naveen Jain

“I've seen things you people wouldn't believe. Attack ships on fire off the shoulder of Orion. I watched C-beams glitter in the dark near the Tannhäuser Gate. All those moments will be lost in time, like tears in rain.”

Roy Batty

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todo o corpo docente do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada que foi praticamente minha casa nestes últimos anos. Não poderia deixar de agradecer em especial ao meu orientador Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre, pelos valiosos conselhos e pela paciência que teve comigo. Ao meu co-orientador Prof. Dr. Ricardo Coelho Silva que foi meu primeiro orientador na iniciação científica, se não fosse pela influência dele este trabalho não teria existido. Ao Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto, pela paciência que teve comigo nesses anos de PET. Ao Prof. Dr. Luís Gustavo Bastos Pinho, pessoa que não tenho palavras para dizer o quanto ele é um grande amigo e alguém que enxerga nas pessoas o que elas tem de melhor, e é muito devido a ele que sigo a carreira de estatístico.

Aos meus colegas que fizeram Matemática Industrial comigo, em especial ao meu amigo Kalos Ítalo o cara mais engraçado e ao mesmo tempo inteligente que conheci na UFC, por todas as brincadeiras (em especial as na bolsa que tínhamos na biblioteca), ao Diaulas, Arthur, Anderson e Igor (a saudosa ordem dos amigos). Ao Nilton pelos momentos de diversão e raiva que tive jogando Yu-Gi-Oh com ele. A todos meus colegas do curso de Estatística que tive a honra de dividir momentos de glória e momentos de sacrifício, como ficar madrugadas no discord estudando. Aos colegas petianos, e aos colegas gaussianos, sem vocês minha graduação não teria sido o que foi.

Aos meus amigos Danrley “tá errado, não é pop não...” e Diego “ei man, vai dar certo” pelos seminários bem preparados (ou não), várias histórias e brincadeiras saudáveis (ou não), e as várias horas que perdemos depois do almoço assistindo as redublagens. Ao João Victor e a Áurea (casal 17k de ira) que estão sempre dispostos a tirar minhas dúvidas, simplesmente por que são muito nerds. Ao Vitão, Allyson, John, Roberto e Eduardo, Alberto, Sombra e Daniele vocês foram incríveis.

Agradeço aos meus pais pelo apoio e educação que sempre de deram, e a minha namorada Ana Cláudia que amo muito, que esteve comigo nesta jornada desde o início, pela paciência e compreensão, quando tinham seminários ou provas.

Agradeço também a todos aqueles que de alguma maneira colaboraram para o desenvolvimento e manutenção do R, Google e L^AT_EX. Por fim agradeço a existência do acaso no universo.

RESUMO

Em muitas situações práticas, temos o interesse de modelar a relação funcional entre uma variável resposta e uma ou mais variáveis explicativas, para isso podemos utilizar os modelos de regressão. Estes modelos possuem certas suposições, que quando violadas podem gerar certas características indesejadas no modelo. Por esta razão, várias metodologias para diagnóstico, bem como modelos mais robustos ou com suposições mais flexíveis têm sido propostas nos últimos anos. A teoria dos conjuntos *fuzzy* por outro lado, que ganhou atenção desde o trabalho de Zadeh (1965, *Information and control*), têm sido utilizada em inúmeras aplicações em que existem fatores de incerteza associados a pertinência de elementos a seus respectivos conjuntos. Metodologias baseadas na teoria *fuzzy* tem sido utilizadas para mecanismos de classificação, sistemas de tomada de decisão, inteligência artificial, etc. Neste trabalho primeiramente apresentamos a teoria dos conjuntos *fuzzy* e posteriormente abordamos dois modelos de regressão *fuzzy*, um baseado na proposta de Yen et. al. (1999, *Fuzzy Sets and Systems*) e outro baseado em Ishibushi e Nii (2001, *Fuzzy Sets and Systems*) sendo que este último é híbrido, no sentido que utiliza os estimadores de mínimos quadrados usuais para estimar parte dos parâmetros do modelo. As suposições desta metodologia são mais flexíveis do que o modelo de regressão linear usual, já que não precisamos supor uma distribuição em particular a respeito da fonte de variação. Com o intuito de comparar os resultados destes dois modelos com o modelo de regressão linear usual, apresentamos dois estudos de caso.

Palavras-chave: Modelos de Regressão. Conjuntos *Fuzzy*. Robustez.

ABSTRACT

In many practical situations, we are interested in modeling the functional relationship between a response variable and one or more explanatory variables, for which we can use the regression models. Those models have certain assumptions, which when violated can generate certain undesired characteristics in the model. For this reason, several diagnostic methodologies, as well more robust models, or with more flexible assumptions have been proposed in recent years. Fuzzy sets theory, on the other hand, which has gained attention since the work of Zadeh (1965, Information and control), and has been used in numerous applications in which there are uncertainty factors associated with the pertinence of elements to their respective sets. Methodologies based on fuzzy theory have been used for classification mechanisms, decision-making systems, artificial intelligence, etc. In this paper we first present the fuzzy set theory and later on we introduce two models of fuzzy regression, one based on the proposal of Yen et. al. (1999), Fuzzy Sets and Systems, and another based on Ishibushi and Nii (2001, Fuzzy Sets and Systems), the latter being hybrid, in the sense that it uses the usual least-squares estimators to estimate part of the model parameters. The assumptions of this methodology are more flexible than the usual linear regression model, since we do not need to assume a particular distribution about the source of variation. In order to compare the results of these two models with the usual linear regression model, we present two case studies.

Keywords: Regression Models. Fuzzy Sets. Robustness.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	12
Lista de Símbolos	13
1 Introdução	14
1.1 Introdução e Motivação	14
2 Teoria dos Conjuntos <i>Fuzzy</i>	16
2.1 Definições e Propriedades	16
2.2 Exemplos de Funções de Pertinência <i>Fuzzy</i>	18
2.3 Operações Aritméticas	20
2.4 Intervalos Esperados e Valores Esperados	23
3 Modelos de Regressão <i>Fuzzy</i>	25
3.1 Modelo de Regressão Linear Normal Clássico	25
3.1.1 Intervalo de Confiança para a Resposta Média	27
3.2 Modelo de Regressão Linear <i>Fuzzy</i>	27
3.2.1 Ajuste dos parâmetros do modelo	30
3.3 Modelo de Regressão <i>Fuzzy</i> Híbrido	32
3.3.1 Escolha do Valor h	33
4 Aplicações	34
4.1 Exemplo 1: Ajuste do modelo para dados fictícios	34
4.2 Exemplo 2: Conjunto de dados reais	36
5 Conclusões	40
5.1 Discussão, Considerações Finais e Pesquisas Futuras	40
Bibliografia	44
A Apêndices	45
A.1 Apêndice 1	45
A.2 Apêndice 2	45

A.3	Apêndice 3	46
A.4	Apêndice 4	47
A.5	Apêndice 5	48
A.6	Apêndice 6	50
A.7	Apêndice 7	50
A.8	Apêndice 8	51
A.9	Apêndice 9	51

Lista de Figuras

2.1	Função de pertinência equivalente a um conjunto clássico (a) e função de pertinência para um conjunto fuzzy (b).	16
2.2	Diagramas para um conjunto clássico (a) e um conjunto fuzzy (b).	17
2.3	Função triangular fuzzy com $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$	19
2.4	Função trapezoidal fuzzy com $a = 1$, $b = 1,5$, $c = 2,5$ e $d = 3$	20
2.5	Ilustração da operação multiplicação por escalar de uma função de pertinência triangular fuzzy	21
2.6	Ilustração da operação de soma de duas funções de pertinência triangulares fuzzy	22
2.7	Ilustração da operação de subtração de duas funções de pertinência triangulares fuzzy	22
2.8	Função triangular fuzzy com $a=1$, $b=2$ e $c=3$ destacando o intervalo esperado.	24
3.1	Ilustração de um modelo de regressão <i>fuzzy</i> simples $Y_i = A_0 + A_1x_i$, com os coeficientes ajustados $A_0 = (3, 1)$, $A_1 = (1, 0.5)$, $h = 0.5$	30
4.1	Diagrama de dispersão para velocidade (mph) versus distância (pés) e o ajuste dos modelos de regressão linear fuzzy e linear simples usual	37
4.2	Diagrama de dispersão para velocidade (mph) versus distância (pés) e o ajuste dos modelos de regressão linear fuzzy e linear simples usual	39

Lista de Tabelas

3.1	Disposição da tabela de dados para o modelo de regressão linear <i>fuzzy</i> . . .	28
4.1	Dados fictícios.	34
4.2	Resultado do ajuste de parâmetros para o modelo de regressão linear fuzzy com coeficientes triangulares simétricos para diversos valores de h para os dados da Tabela 4.1.	35
4.3	Medidas descritivas relativas as variáveis: distância e velocidade.	36
4.4	Resultado do ajuste de parâmetros para o modelo de regressão linear fuzzy com coeficientes triangulares simétricos para diversos valores de h para os dados da tabela 2.3.	37
4.5	Resultados dos coeficientes ajustados para o modelo híbrido para diversos valores de h	38
A.1	Velocidades em milhas por hora e distância percorrida do início da frenagem até a parada total em pés.	52

Lista de Símbolos

- \tilde{A} : Conjunto *fuzzy*.
- $\mu_{\tilde{A}}$: função de pertinência do conjunto *fuzzy* \tilde{A} .
- $\mu_{\tilde{A}}^-$ Função de espalhamento a esquerda do conjunto *fuzzy* \tilde{A} .
- $\mu_{\tilde{A}}^+$ Função de espalhamento a direita do conjunto *fuzzy* \tilde{A} .
- $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: distribuição normal com média μ e variância σ^2 .
- t_v : distribuição t-student com v graus de liberdade.
- h : nível de pertinência do modelo de regressão *fuzzy*.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução e Motivação

Quando se tem o interesse de modelar a relação funcional entre uma variável resposta e uma ou mais variáveis explicativas, é comum o uso de modelos de regressão. Esse tipo de modelagem tem sido uma importante ferramenta, com aplicações nas mais diversas áreas como: Economia, Engenharia, Medicina, Ciências Biológicas, Ciências Agrárias, dentre outras. Assim como todo modelo, os resultados podem ser altamente dependentes das suposições adotadas, e caso alguma suposição seja violada, o modelo pode apresentar características indesejadas. Para avaliar a validade das suposições, uma série de técnicas de diagnóstico foram desenvolvidas, ver por exemplo em Paula (2004) para maiores detalhes.

Podemos citar inúmeros exemplos de situações práticas, cujo o emprego dos modelos de regressão é possível, como o caso em que um pesquisador deseja estudar a relação entre a quantidade de irrigação com os níveis de produção de uma determinada cultura. Um outro exemplo seria o caso pode ainda estudar a influência de diferentes doses de insulina na corrente sanguínea em relação as taxas de glicemia dos pacientes.

Além disso, após o trabalho de Zadeh (1965), a teoria dos conjuntos *fuzzy* tem ganhado grande atenção, já que ela possui uma enorme gama de aplicações em situações em que a pertinência dos elementos aos seus respectivos conjuntos não é clara o bastante, e tem sido utilizada em sistemas de decisão, inteligência artificial, reconhecimento de padrões, etc. Enquanto os modelos de regressão lidam com uma ou mais fontes de variação, os conjuntos *fuzzy* modelam sistemas com imprecisão e/ou incerteza.

A ideia de Zadeh é que a noção básica de pertinência em conjuntos, nem sempre é evidente, e portanto, a teoria dos conjuntos poderia ser expandida caso substituíssemos a definição de que só há duas opções para um elemento: ou ele pertence a um determinado conjunto, ou ele não pertence. Ele considerou situações de incerteza a respeito dessa pertinência, por exemplo, podemos não saber com certeza, se uma pessoa pertence ao conjunto de bons pagadores ou não em uma carteira de crédito. Por isso, ele propôs que o grau de pertinência de um elemento a um conjunto específico poderia ser dado de

acordo com uma função de pertinência. Passando assim, a permitir graus de pertinência associados aos elementos de um conjunto de forma flexível, ou seja, um elemento pode pertencer a um certo conjunto com grau de pertinência de por exemplo 0,8.

Tanaka et al. (1982) propuseram um modelo de regressão *fuzzy*, de tal forma, que os coeficientes e os valores preditos são do tipo *fuzzy*, e cuja as variáveis explicativas e a variável resposta assumem valores reais. Yen et. al. (1999) propuseram um modelo que utiliza numeros *fuzzy* para os coeficientes do modelo de regressão. Ishibushi e Nii (2001) propõem um modelo híbrido que combina o método de estimação dos coeficientes do modelo linear usual com o modelo de regressão *fuzzy*.

Temos como objetivos, estudar um modelo de regressão que combine os métodos usuais de regressão linear com a teoria dos conjuntos *fuzzy* de Zadeh (1965). Além disso, avaliar sua interpretabilidade e realizar previsões para um conjunto de dados real.

Algumas aplicações práticas em situações do mundo real podem ser encontradas na literatura, em que foram aplicados métodos de regressão juntamente com a a teoria dos *fuzzy*. Entre as quais podemos destacar, Gharpuray, et. al. (1986) que modelam taxas de dependência de hidrólise enzimática em celulose; Bardossy et. al. (1990) que estudam um caso de aplicação dos MRF (Modelos de Regressão *Fuzzy*) na hidrologia, modelando a relação entre a resistência elétrica do solo e a permeabilidade hidráulica; Bell e Heng (1997) desenvolvem uma abordagem que quantifica os fatores de risco para lesões por esforço repetitivo através de um modelo de regressão *fuzzy*; Sánchez e Gómez (2003a) mostram várias situações de aplicação desses modelos nas ciências atuariais, mais especificamente no que diz respeito a precificação de contratos de seguros de vida ou de responsabilidade de propriedades, além da modelagem de taxas de juros.

Sánchez e Gómez (2003b) estudam especificamente estimativas para modelagem de taxas de juros no mercado financeiro através dos MRF; Koissi e Shapiro (2006) propõem uma abordagem via regressão *fuzzy* em comparação ao modelo Lee-Carter na modelagem da expectativa de vida de mulheres na Finlândia; Coelho e Cruz (2014) utilizam uma análise de regressão para estudar a precificação de casas prefabricadas e Sarip et. al (2016) estudam um caso de aplicação de MRF para precificação de imóveis em uma abordagem voltada ao paradigma de aprendizado de máquina.

No próximo capítulo apresentamos uma série de definições e propriedades a respeito da teoria dos conjuntos *fuzzy*, o leitor mais interessado em detalhes pode consultar Ross (2005). No capítulo dois realizamos uma revisão a respeito da teoria dos conjuntos *fuzzy*, e destacando algumas definições e propriedades. No capítulo três estudamos o modelo de regressão linear usual e de regressão *fuzzy*. No capítulo quatro realizamos duas aplicações dos modelos descritos ao longo deste trabalho.

Capítulo 2

Teoria dos Conjuntos *Fuzzy*

Neste capítulo apresentamos algumas definições e propriedades a respeito da teoria dos conjuntos *fuzzy*, além disso apresentamos alguns exemplos de funções de pertinência e operações aritméticas para números *fuzzy*, por fim apresentamos os intervalos esperados e valores esperados de conjuntos *fuzzy*.

2.1 Definições e Propriedades

A teoria dos conjuntos *fuzzy* nos permite representar imprecisão e informações vagas, para isso, precisamos inicialmente estudar suas definições e propriedades. Um conjunto é dito *fuzzy*, quando a noção de pertinência de elementos aos seus respectivos conjuntos na teoria clássica não é clara, ou seja, quando há incerteza associada a pertinência. Através de uma função de pertinência, descreveremos o grau de pertinência associado a cada elemento em uma escala no intervalo $[0,1]$. Para diferenciar dos conjuntos clássicos, representaremos os conjuntos *fuzzy* através da notação: \tilde{A} . Considere por exemplo a representação gráfica das funções de pertinência a seguir:

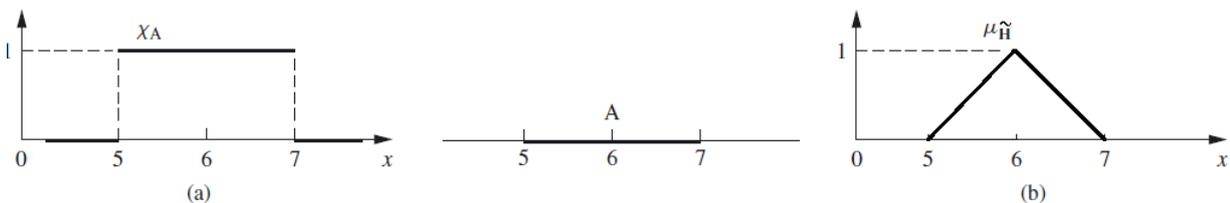


Figura 2.1: Função de pertinência equivalente a um conjunto clássico (a) e função de pertinência para um conjunto fuzzy (b).

No primeiro caso, os valores do intervalo $[5,7]$ pertencem ao conjunto A conforme o conceito usual, ou seja, ou estão completamente no conjunto (grau de pertinência um),

ou estão completamente fora (grau de pertinência zero). No segundo caso, é utilizado um nível de pertinência entre zero e um, este é o conceito da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Os números *fuzzy* (NFs ou *Fuzzy Numbers* (FNs)), foram definidos formalmente por Dubois e Prade (1983) da seguinte maneira:

Definição 1: Um conjunto *fuzzy* \tilde{A} com função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é um número *fuzzy*, se ele possui pelo menos uma das três seguintes propriedades:

- i. É um conjunto *fuzzy* normalizado, i.e. $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ii. É *fuzzy* convexo, i.e. para qualquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ asseguramos que $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2)$.
- iii. O suporte de A é limitado, onde $\text{supt}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

E qualquer valor que a função $\mu_{\tilde{A}}$ assume é chamada de grau de pertinência do elemento em respeito ao conjunto \tilde{A} .

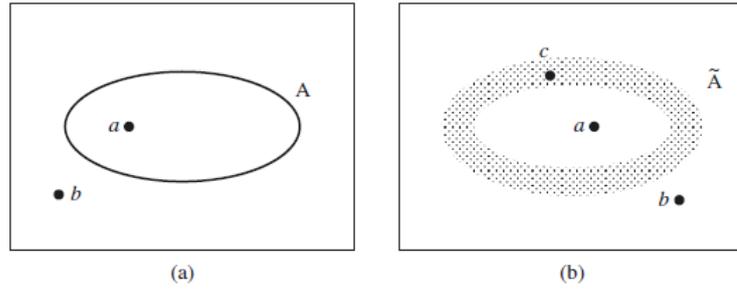


Figura 2.2: Diagramas para um conjunto clássico (a) e um conjunto fuzzy (b).

No caso da Figura (2.2), o elemento a claramente pertence ao conjunto A, e o elemento b claramente não pertence ao conjunto A, o conjunto A é um conjunto clássico. No caso do conjunto \tilde{A} que é um conjunto *fuzzy* a fronteira é difusa, ou seja, podem existir elementos como c que não são parcialmente membros do conjunto, e possuem assim um grau de pertinência em relação a \tilde{A} , enquanto a está completamente no conjunto e b está completamente fora.

Definição 2: Um número ou intervalo *fuzzy* associado a um conjunto *fuzzy* \tilde{A} com função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ é qualquer par $(\mu_{\tilde{A}}^-, \mu_{\tilde{A}}^+)$ de funções $\mu^\pm : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:

- i. $\mu_{\tilde{A}}^- : \mathbb{R} \rightarrow \alpha$ é uma função limitada monotonicamente crescente $\forall \alpha \in [0, 1]$;
- ii. $\mu_{\tilde{A}}^+ : \mathbb{R} \rightarrow \alpha$ é uma função limitada monotonicamente decrescente $\forall \alpha \in [0, 1]$;
- iii. $\mu_{\alpha}^- \leq \mu_{\alpha}^+ \forall \alpha \in [0, 1]$

Definição 3: Um α -corte de um conjunto *fuzzy* \tilde{U} é um conjunto clássico F, que contém todos os elementos do conjunto \tilde{U} que possuem grau de pertinência maior ou igual a um

valor especificado α .

Definição 4: Denotamos o corte ao nível $\alpha = 1$, ou seja, $[\mu_1^- < \mu_1^+]_{\alpha=1}$ por corte $[\hat{\mu}^-, \hat{\mu}^+]$.

Note que uma consequência da Definição 4, é que se $\hat{\mu}^- < \hat{\mu}^+$ nós temos um intervalo *fuzzy* e se $\hat{\mu}^- = \hat{\mu}^+$ temos um número *fuzzy*. Utilizamos a notação $[\mu]_\alpha = [\mu_\alpha^-, \mu_\alpha^+]$ para explicitar os α -cortes de μ . Iremos nos referir a μ^- e μ^+ como os ramos inferiores e superiores de μ (correspondendo aos lados esquerdo e direito na função de pertinência), respectivamente.

Definição 5: Se $[\mu^-]_\alpha + [\mu^+]_\alpha = [\hat{\mu}^-]_\alpha + [\hat{\mu}^+]_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ então o intervalo *fuzzy* é **simétrico**.

Denotaremos o conjunto de intervalos simétricos *fuzzy* por $\mathbb{S}_\mathbb{I}$ e o conjunto de números simétricos fuzzy por \mathbb{S} .

Definição 6: Dizemos μ é positiva se $[\mu^-]_\alpha > 0, \forall \alpha \in [0, 1]$ e que μ é negativa se $\mu_\alpha^+ > 0, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Denotaremos o conjunto de números positivos *fuzzy* por \mathbb{F}_+ e o conjunto de números negativos *fuzzy* por \mathbb{F}_- .

Definição 7: O **suporte** de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} definido no \mathbb{R} é um conjunto clássico, definido como $\text{supt}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

Definição 8: O **núcleo** de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , definido no \mathbb{R} é um conjunto clássico, definido como $\text{core}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$.

A seguir exploraremos alguns exemplos de funções de pertinência.

2.2 Exemplos de Funções de Pertinência *Fuzzy*

Podemos representar a sua função de pertinência de um conjunto A , de duas maneiras equivalentes, a primeira é através da explicitação usual da função, a outra é exibindo o par de funções laterais que definem a pertinência de acordo com as definições apresentadas ate aqui.

Seja \tilde{A} um conjunto triangular *fuzzy*, ou seja, um conjunto em cada elemento está associado a uma função de pertinência triangular, dada a seguir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \mathbb{1}_{[a,b)}(x) + \mathbb{1}_{\{b\}}(x) + \left(\frac{c-x}{c-b}\right) \mathbb{1}_{(b,c]}(x)$$

em que, $\mathbb{1}$ é denominada função indicadora e é expressa por:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A. \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

E a e c representam o menor e o maior valor no suporte respectivamente e b representa o núcleo do conjunto triangular *fuzzy*. Note que de maneira equivalente poderíamos representar esta mesma função de pertinência através da notação:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = [\mu_{\tilde{A}}^-(x), \mu_{\tilde{A}}^+(x)] = \left[\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \mathbb{1}_{[a,b)}(x), \left(\frac{c-x}{c-b} \right) \mathbb{1}_{[b,c]}(x) \right] \quad (2.1)$$

Podemos verificar que os α -cortes neste caso são dados por:

$$[\mu_{\tilde{A}}(x)]_{\alpha} = [[\mu_{\tilde{A}}^-(x)]_{\alpha}, [\mu_{\tilde{A}}^+(x)]_{\alpha}] = [a + \alpha(b-a), c - \alpha(c-b)]. \quad (2.2)$$

Já que $\frac{x-a}{b-a} = \alpha \Leftrightarrow x = a + \alpha(b-a)$ e $\frac{c-x}{c-b} = \alpha \Leftrightarrow x = c - \alpha(c-b)$.

O *software* R Core Team (2018) tem sido uma importante ferramenta para trabalhar com estatística computacional, além de ser gratuito e de código livre. Utilizaremos o R para representação computacional e ajuste dos modelos ao longo deste trabalho. A seguir construímos a função de pertinência (2.1) utilizando o R e plotamos a representação gráfica para valores particulares de a , b e c . Para mais detalhes ver apêndice A.1.

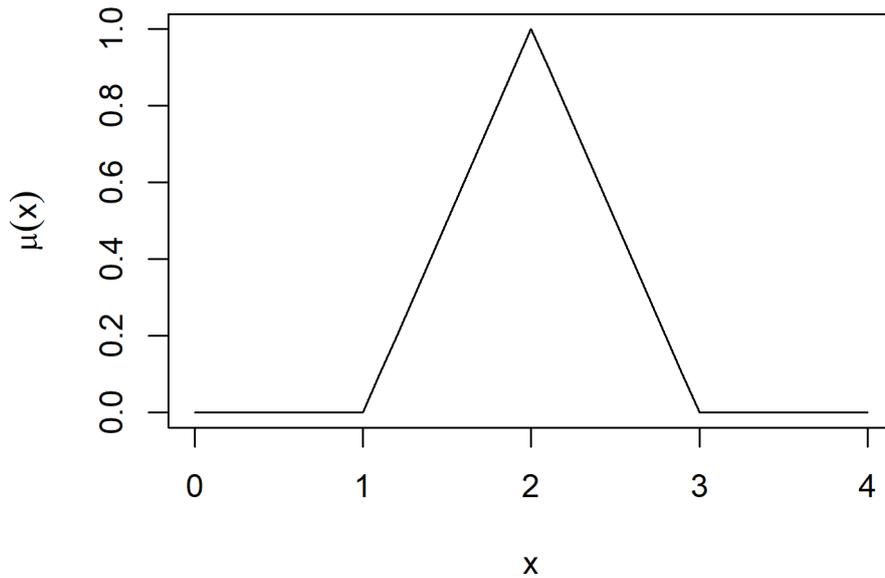


Figura 2.3: Função triangular fuzzy com $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$

O suporte da função de pertinência triangular é o intervalo $[a, c]$ e o núcleo é $\{b\}$, particularmente para o exemplo da Figura (2.3), $\text{supt}(\tilde{A}) = [1, 3]$ e $\text{core}(\tilde{A}) = 2$. Esta função de pertinência também é simétrica (para estes parâmetros específicos), já que $\mu_{\alpha}^- + \mu_{\alpha}^+ = (1 - \alpha(1 - 2)) + (3 - \alpha(3 - 2)) = 4 = \hat{\mu}_{\alpha}^- + \hat{\mu}_{\alpha}^+ = 2 + 2$. Outra função de pertinência que podemos considerar é a função trapezoidal.

Seja \tilde{B} um conjunto trapezoidal *fuzzy*, sua função de pertinência é definida por:

$$\mu_{\tilde{B}}(x; a, b, c, d) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \mathbb{1}_{[a,b)}(x) + \mathbb{1}_{[b,c]}(x) + \left(\frac{d-x}{d-c} \right) \mathbb{1}_{[c,d]}(x). \quad (2.3)$$

De forma alternativa podemos representar a função de pertinência trapezoidal da seguinte maneira:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = [\mu_{\tilde{B}}^-(x), \mu_{\tilde{B}}^+(x)] = \left[\left(\frac{x-a}{b-a} \right) \mathbb{1}_{[a,b)}(x), \left(\frac{d-x}{d-c} \right) \mathbb{1}_{[b,c]}(x) \right].$$

Podemos verificar que os α -cortes neste caso são dados por:

$$[\mu_{\tilde{B}}(x)]_{\alpha} = [[\mu_{\tilde{B}}^-(x)]_{\alpha}, [\mu_{\tilde{B}}^+(x)]_{\alpha}] = [a + \alpha(b-a), d - \alpha(d-c)].$$

Tendo em vista que $\frac{x-a}{b-a} = \alpha \Leftrightarrow x = a + \alpha(b-a)$ e $\frac{d-x}{d-c} = \alpha \Leftrightarrow x = d - \alpha(d-c)$.

Por exemplo, para os valores particulares de $a = 1$, $b = 1,5$, $c = 2,5$ e $d = 3$, temos a seguinte representação gráfica da função trapezoidal:

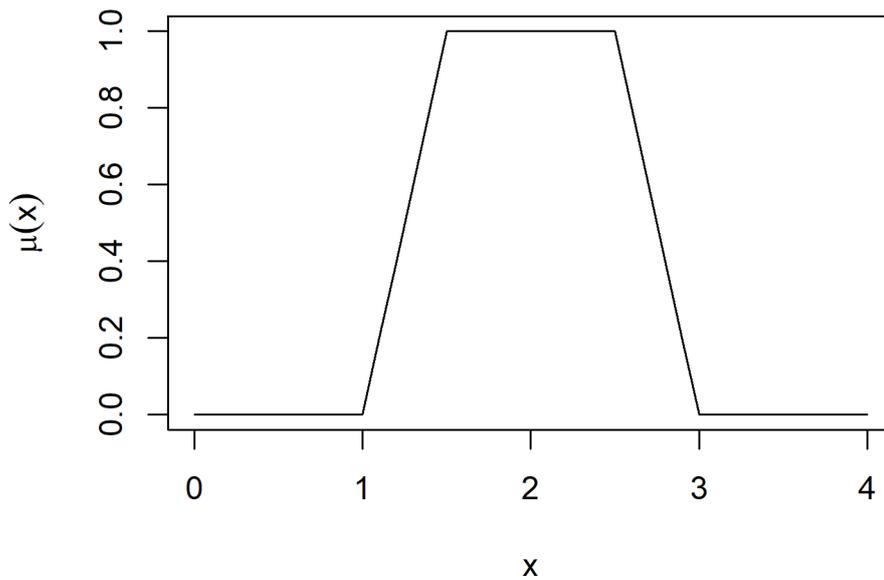


Figura 2.4: Função trapezoidal fuzzy com $a = 1$, $b = 1,5$, $c = 2,5$ e $d = 3$

O suporte da função trapezoidal é o intervalo $[a, d]$ e o núcleo é o intervalo $[b, c]$.

2.3 Operações Aritméticas

As operações aritméticas em conjuntos *fuzzy* são definidas de maneira distinta dos conjuntos numéricos clássicos. Guerra e Stefanini (2006) exploram algumas propriedades aritméticas dos conjuntos *fuzzy*. Nas Definições 9, 10 e 11, descrevemos as definições para as operações aritméticas básicas de multiplicação por escalar, soma, subtração, multiplicação e divisão.

Definição 9: Se $u = (u^-, u^+)$ e $v = (v^-, v^+)$ são dois intervalos *fuzzy*, as operações aritméticas de soma, subtração e multiplicação por escalar são definidas, respectivamente, a seguir:

$$[u + v]_\alpha := [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+], \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

$$[u - v]_\alpha := [u_\alpha^- - v_\alpha^+, u_\alpha^+ - v_\alpha^-], \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

$$[ku]_\alpha := [\min\{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}, \max\{ku_\alpha^-, ku_\alpha^+\}], \text{ para } \alpha \in [0, 1] \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Considere, por exemplo, o conjunto triangular u com $a = 0$, $b = 1$ e $c = 3$. Utilizando o α -corte triangular em (2.2), podemos expressar \tilde{A} em função do grau de pertinência α da seguinte forma: $[u]_\alpha = [1 - \alpha, 3 - 2\alpha]$. Realizando a multiplicação por 2, obtemos: $[2u]_\alpha = [\min\{2(1 - \alpha), 2(3 - 2\alpha)\}, \max\{2(1 - \alpha), 2(3 - 2\alpha)\}]$, a representação gráfica do resultado está na Figura (2.5).

Considere agora, os intervalos triangulares u e v , com $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 3$ e $a_2 = 2$, $b_2 = 3$ e $c_2 = 4$, respectivamente. Expressando em função dos α -cortes, obtemos: $[u]_\alpha = [1 - \alpha, 3 - 2\alpha]$ e $[v]_\alpha = [2 + 2\alpha, 4 - \alpha]$, respectivamente. Somando, obtemos $[u + v]_\alpha = [2 - 2\alpha, 7 - 3\alpha]$. O gráfico resultante pode ser observado na Figura (2.6).

Considerando ainda os mesmos u e v , mas desta vez realizando a operação de subtração, obtemos $[u - v]_\alpha = [-4 + 2\alpha, 7 - 3\alpha]$. Conforme expresso na Figura (2.7).

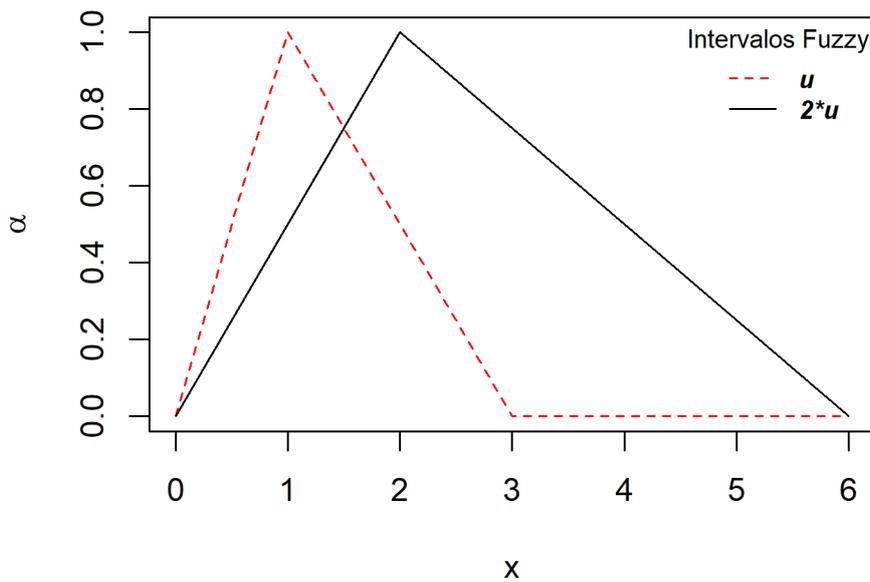


Figura 2.5: Ilustração da operação multiplicação por escalar de uma função de pertinência triangular fuzzy.

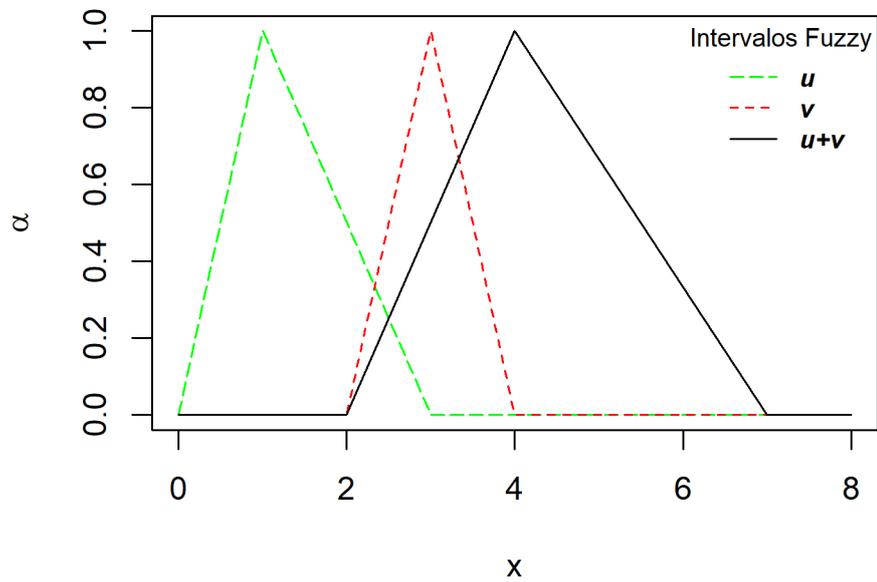


Figura 2.6: Ilustração da operação de soma de duas funções de pertinência triangulares fuzzy.

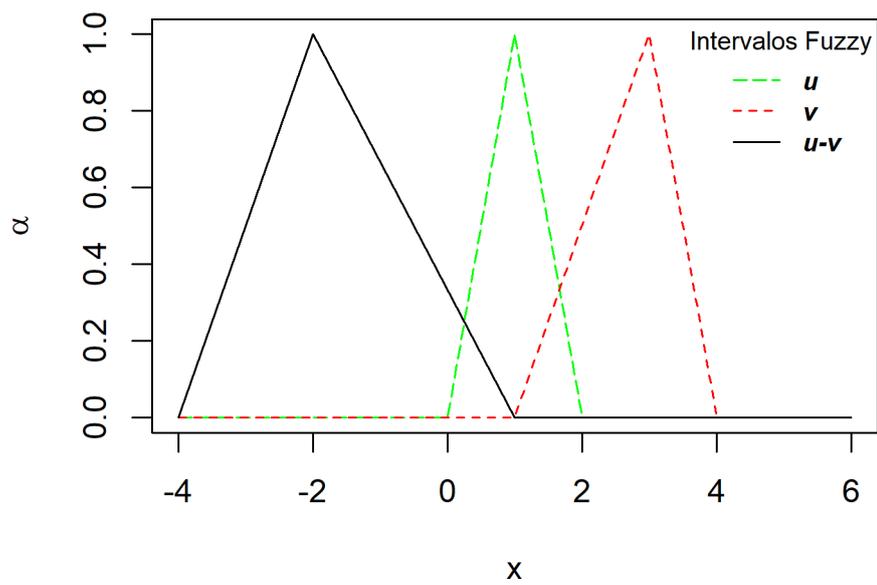


Figura 2.7: Ilustração da operação de subtração de duas funções de pertinência triangulares fuzzy.

Definição 10: Se $u = (u^-, u^+)$ e $v = (v^-, v^+)$ são dois intervalos *fuzzy*, então para $\alpha \in [0, 1]$ defini-se a multiplicação de u por v como:

$$[uv]_\alpha := [(uv)_\alpha^-, (uv)_\alpha^+].$$

em que,

$$\begin{aligned} (uv)_\alpha^- &= \min\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\} \text{ para } \alpha \in [0, 1] \text{ e} \\ (uv)_\alpha^+ &= \max\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\} \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Definição 11: Se $0 \notin [v_0^-, v_0^+]$ e $u = (u^-, u^+)$ e $v = (v^-, v^+)$ são dois intervalos *fuzzy*, então para $\alpha \in [0, 1]$ definimos a divisão de u por v como:

$$\left[\frac{u}{v}\right]_\alpha := \left[\left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^-, \left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^+\right].$$

em que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^- &:= \min\left\{\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+}\right\}, \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \\ \left(\frac{u}{v}\right)_\alpha^+ &:= \max\left\{\frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^-}{v_\alpha^+}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^-}, \frac{u_\alpha^+}{v_\alpha^+}\right\}, \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

As operações de multiplicação e divisão de dois números triangulares *fuzzy* não é um número triangular *fuzzy*, sua pertinência existe e não é trivial de ser calculada, para maiores detalhes o leitor pode consultar Gao (2009).

Além das operações aritméticas que foram apresentadas, as operações usuais da teoria dos conjuntos clássica existe também na teoria dos conjuntos *fuzzy*, as operações de complemento, união, interseção, diferença, e princípios de De Morgan podem ser encontrados com detalhes em Ross (2005).

2.4 Intervalos Esperados e Valores Esperados

Em algumas situações pode ser de interesse calcular o intervalo esperado de um conjunto *fuzzy*. O valor esperado de um conjunto *fuzzy*, neste caso equivale ao valor modal da função de pertinência Dubois e Prade (1987).

Definição 12: O intervalo esperado de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , sujeito a uma função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é definido como:

$$IE(\tilde{A}) = [IE^-(\tilde{A}), IE^+(\tilde{A})]$$

em que os valores de $IE^-(\tilde{A})$ e $IE^+(\tilde{A})$ são calculados de acordo com as seguintes integrais de Riemann,

$$EI^-(\tilde{A}) := \int_0^1 \alpha [\mu_{\tilde{A}}^-(x)]_\alpha d\alpha \text{ e}$$

$$EI^+(\tilde{A}) := \int_0^1 \alpha [\mu_{\tilde{A}}^+(x)]_\alpha d\alpha.$$

Definição 13: O valor esperado de um conjunto *fuzzy* \tilde{A} , sujeito a uma função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é definida como:

$$VE(\tilde{A}) := \frac{IE^-(\tilde{A}) + IE^+(\tilde{A})}{2}.$$

Podemos obter a expressão do intervalo e do valor esperado para um conjunto triangular *fuzzy* por exemplo, e depois verificar se o resultado coincide com casos particulares. Tomemos por exemplo, o caso da função de pertinência triangular com $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$.

$$IE^-(\tilde{A}) = \int_0^1 a + (b - a)\alpha d\alpha = \frac{(a + b)}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

$$IE^+(\tilde{A}) = \int_0^1 c - \alpha(c - b) d\alpha = \frac{(b + c)}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

Ou seja, o intervalo esperado neste caso é $[1,5; 2,5]$ e o valor esperado portanto é $\frac{1,5 + 2,5}{2} = 2$. Na figura (2.8) destacamos o intervalo esperado graficamente.

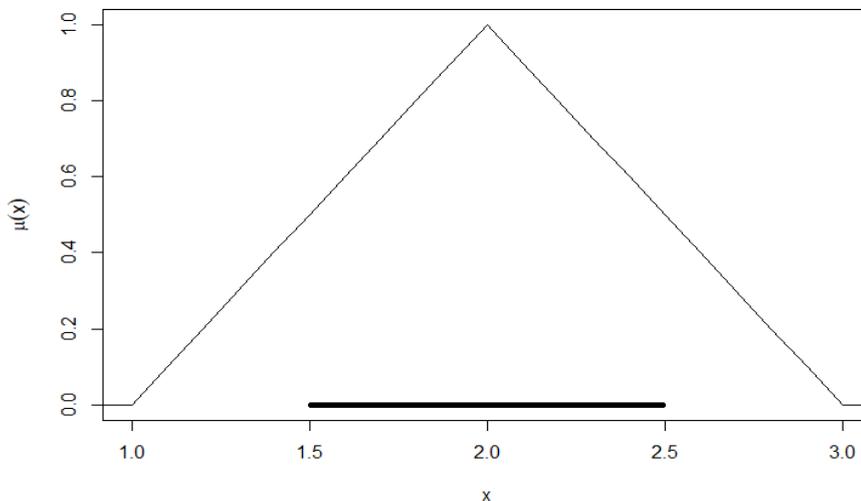


Figura 2.8: Função triangular fuzzy com $a=1$, $b=2$ e $c=3$ destacando o intervalo esperado.

Capítulo 3

Modelos de Regressão *Fuzzy*

Neste capítulo revisamos o modelo de regressão linear clássico, e apresentamos o modelo de regressão *fuzzy* através de duas abordagens, em que uma delas utiliza o modelo usual para ajustar a parte central do modelo. Por fim, discutimos qual a influência da escolha do valor h no modelo.

3.1 Modelo de Regressão Linear Normal Clássico

Uma vez que desejamos modelar a relação funcional entre uma variável resposta e um conjunto de variáveis explicativas, das quais dispomos de n observações. Podemos fazer uso da teoria de modelos de regressão, em particular a classe de modelos lineares. Cada tipo de modelo de regressão possui suas suposições, e uma vez que alguma destas não é satisfeita o modelo pode apresentar características indesejadas. Sendo assim, várias novas abordagens para técnicas de regressão tem sido propostos ao na literatura nas últimas décadas. Alguns destes, são mais robustos, ou possuem suposições mais flexíveis ver por exemplo Paula (2004).

Consideremos inicialmente o modelo de regressão linear múltiplo, em que temos a variável resposta denotada por y_i e k variáveis explicativas (se $k = 1$, temos um modelo de regressão linear simples - MRLS) denotadas por $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})^\top$ e p parâmetros desconhecidos ($p = k + 1$), que admite a seguinte forma funcional:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

Em que, β_j , $j = 0, \dots, k$, são os coeficientes da regressão e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ representam as fontes variação associadas ao modelo. O parâmetro β_j representa a variação esperada na variável resposta y por unidade de incremento em x_j quando todas as demais variáveis explicativas x_i ($i \neq j$) são fixadas. Além disso, supomos que os y_i 's são independentes e $y_i | (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik}, \sigma^2)$.

No modelo de regressão linear normal clássico, estimamos os parâmetros baseando-se essencialmente na ideia de minimizar a diferença entre os valores esperados sob a

validade do modelo de regressão y'_i s e os valores ajustados \hat{y}'_i s. Uma forma de solucionar este problema é utilizando o método dos mínimos quadrados que descrevemos a seguir.

Quando estamos lidando com modelos de regressão múltiplos, é mais conveniente expressar o modelo em notação matricial, assim a forma funcional do modelo (3.1) alternativamente pode ser representada na notação:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

em que,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix},$$

em que \mathbf{y} é o vetor de observações, \mathbf{X} é a matriz de especificação do modelo, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes da regressão, e $\boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor da fonte de variação associada ao modelo.

Desejamos encontrar o vetor de estimadores $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, que minimize a função de mínimos quadrados Q ,

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Note que $Q(\boldsymbol{\beta})$ pode ser expresso como

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta},$$

uma vez que $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$ é um escalar, e assim $(\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y})^\top = \mathbf{y}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}$.

Os estimadores de mínimos quadrados devem satisfazer

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}^\top \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = 0.$$

simplificando temos,

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}, \quad (3.2)$$

que são as chamadas equações normais de mínimos quadrados, para resolver as equações (3.2), podemos multiplicar os dois lados da igualdade pela inversa de $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$. Assim, o estimador de mínimos quadrados de $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \quad (3.3)$$

3.1.1 Intervalo de Confiança para a Resposta Média

Podemos construir um intervalo de confiança para a resposta média em um ponto particular. Definimos inicialmente um vetor \mathbf{x}_0 como

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0k} \end{bmatrix}$$

o valor ajustado neste ponto é

$$\hat{y}_0 = \mathbf{x}_0^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

como $\mathbb{E}(\hat{y}_0) = \mathbf{x}_0^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbb{E}(y|\mathbf{x}_0)$, então \hat{y}_0 é um estimador não viciado para $\mathbb{E}(y|\mathbf{x}_0)$ e a variância de \hat{y}_0 é

$$\mathbb{V}(\hat{y}_0) = \sigma^2 \mathbf{x}_0^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0$$

dessa forma, um intervalo de confiança ao nível $(1 - \alpha)$ para a resposta média no ponto $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}$ é

$$IC_{(1-\alpha)}(\mathbb{E}(\hat{y}_0)) = [\hat{y}_0 - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}; \hat{y}_0 + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{x}_0^\top (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0}]. \quad (3.4)$$

Além disso, González et. al (2016) estabelecem uma relação entre conjuntos de confiança e conjuntos *fuzzy*.

3.2 Modelo de Regressão Linear *Fuzzy*

Como visto na seção anterior, os métodos de regressão clássicos consideram minimizar os desvios entre os valores observados e os valores esperados sob a validade do modelo. Tanaka et. al. (1982) apresentaram um modelo denominado de modelo de regressão linear *fuzzy* (MRLF) com estrutura similar ao modelo (3.1), porém considerando os coeficientes de regressão sendo pertencentes a um conjunto *fuzzy*. Aqui, eles consideram que os desvios têm um reflexo direto nos parâmetros associados aos coeficientes do modelo. Yen et. al. (1999) propõem uma formulação similar a de Tanaka et. al. (1982), porém incluindo o intercepto *fuzzy* assumindo especificamente números triangulares *fuzzy* como coeficientes do modelo. A seguir descrevemos precisamente este modelo e implementamos um ajuste para um conjunto de dados real comparando com o modelo linear clássico.

A Tabela (3.1) ilustra as variáveis explicativas, a variável resposta e os valores ajustados para o modelo (3.5).

Tabela 3.1: Disposição da tabela de dados para o modelo de regressão linear *fuzzy*.

Observação	Variável resposta	Variáveis explicativas	Valores ajustados
1	y_1	x_{11}, \dots, x_{1k}	$\tilde{y}_1 = \langle y_1^s, y_1^c \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	y_n	x_{n1}, \dots, x_{nk}	$\tilde{y}_n = \langle y_n^s, y_n^c \rangle$

A estrutura a seguir é a forma funcional do MRLF, para n observações e k variáveis explicativas, assumimos que o modelo só pode ser ajustado se $n > k$:

$$\tilde{y}_i = f(\mathbf{x}_i, \tilde{A}) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \mathbf{x}_{i1} + \dots + \tilde{A}_k \mathbf{x}_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

em que, \tilde{y}_i é a variável resposta *fuzzy*, tem-se k variáveis explicativas $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}]^\top, i = 1, 2, \dots, n$.

Uma função *fuzzy* como f é definida como:

Definição 14: Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{y}; \tilde{y} = f(\mathbf{x}, \tilde{A})$, em que:

- (i) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) \tilde{A} é um conjunto *fuzzy*;
- (iii) \tilde{y} é a imagem de \mathbf{x} associada ao conjunto *fuzzy* \tilde{A} .

Assumimos neste caso, que para o modelo (3.5) o coeficiente de regressão *fuzzy* associado a variável x_i , possui função de pertinência triangular (2.1), e assim podemos descrever de maneira única cada \tilde{A}_i por:

$$\tilde{A}_i = \langle a_i^l; a_i^c; a_i^r \rangle, \quad (3.6)$$

em que os parâmetros, a_i^l, a_i^c, a_i^r representam a, b e c , respectivamente em (2.1).

Pode-se mostrar (ver apêndice A.8) que se $a_i^c = \frac{a_i^l + a_i^r}{2}$ então a função de pertinência é simétrica e pode ser unicamente representada por $\langle a_i^s, a_i^c \rangle$, em que, $a_i^s = a_i^r - a_i^c$.

Portanto, no caso da função de pertinência triangular simétrica iremos utilizar a notação $\tilde{A}_i = \langle a_i^s, a_i^c \rangle$ em que o parâmetro a_i^s é chamado de parâmetro de espalhamento e a_i^c é o parâmetro de centralidade. Para melhor compreender este conceito, considere por exemplo, a seguinte função linear *fuzzy*:

$$\tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2,$$

em que, $\tilde{A} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$, dado $\mathbf{x} = (1, 1)^\top$. De forma que obtemos $\tilde{y} = \langle 6, 4 \rangle$.

Considere agora, o modelo (3.5) com os coeficientes da triangulares simétricos, isto é $\tilde{A}_i = \langle a_i^s, a_i^c \rangle$. Podemos expressar \tilde{y} através dos parâmetros a^s e a^c do modelo da seguinte maneira:

$$\tilde{y} = \langle y^s; y^c \rangle,$$

em que,

$$\begin{aligned} y^s &= a_0^s + a_1^s|x_1| + \cdots + a_k^s|x_k|, \\ y^c &= a_0^c + a_1^c x_1 + \cdots + a_k^c x_k. \end{aligned}$$

E $|x|$ é o módulo de x , ou seja:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

Desta forma, pode-se escrever 3 equações lineares para descrever o modelo (3.5), uma de centralidade, e duas para os espalhamentos a esquerda e a direita, obtendo assim:

$$\begin{aligned} y^l &= y^c - y^s = a_0^c + a_1^c x_1 + \cdots + a_k^c x_k - a_0^s - a_1^s|x_1| - \cdots - a_k^s|x_k| \\ y^r &= y^c + y^s = a_0^c + a_1^c x_1 + \cdots + a_k^c x_k + a_0^s + a_1^s|x_1| + \cdots + a_k^s|x_k| \\ y^c &= a_0^c + a_1^c x_1 + \cdots + a_k^c x_k \end{aligned}$$

Por exemplo, considere $\tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2$, com os seguintes coeficientes $\tilde{A}_0 = \langle 1, -1 \rangle$, $\tilde{A}_1 = \langle 1, 2 \rangle$ e $\tilde{A}_2 = \langle 2, 4 \rangle$, e $\mathbf{x} = (1, 2)^\top$. Temos a parte central do modelo dado por:

$$y^c = a_0^c + a_1^c x_1 + a_2^c x_2 = -1 + 2x_1 + 4x_2 = 9,$$

e a parte de espalhamento do modelo dado por:

$$y^s = a_0^s + a_1^s|x_1| + a_2^s|x_2| = 1 + |x_1| + 2|x_2| = 6.$$

Assim, a variável \tilde{y} é uma triangular simétrica $\langle 6, 9 \rangle$, e reescrevendo de acordo com a parametrização da pertinência triangular não simétrica a variável resposta é $y^l = y^c - y^s = 9 - 6 = 3$ e $y^r = y^c + y^s = 9 + 6 = 15$, obtendo $\langle 3, 9, 15 \rangle$.

Yen et. al. (1999) demonstram que a função de pertinência correspondente a variável resposta \tilde{y}_i é:

$$\mu_{\tilde{y}}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{y_i - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - a_0^c}{a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}|}, & \text{se a condição 1 é satisfeita,} \\ 1 - \frac{a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - y_i}{a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}|}, & \text{se a condição 2 é satisfeita,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.7)$$

em que, $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^\top$. As condições supracitadas são:

Condição 1:

$$a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c \leq y_i \leq a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + \left(a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| \right).$$

Condição 2:

$$a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - \left(a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| \right) \leq y_i \leq a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij}.$$

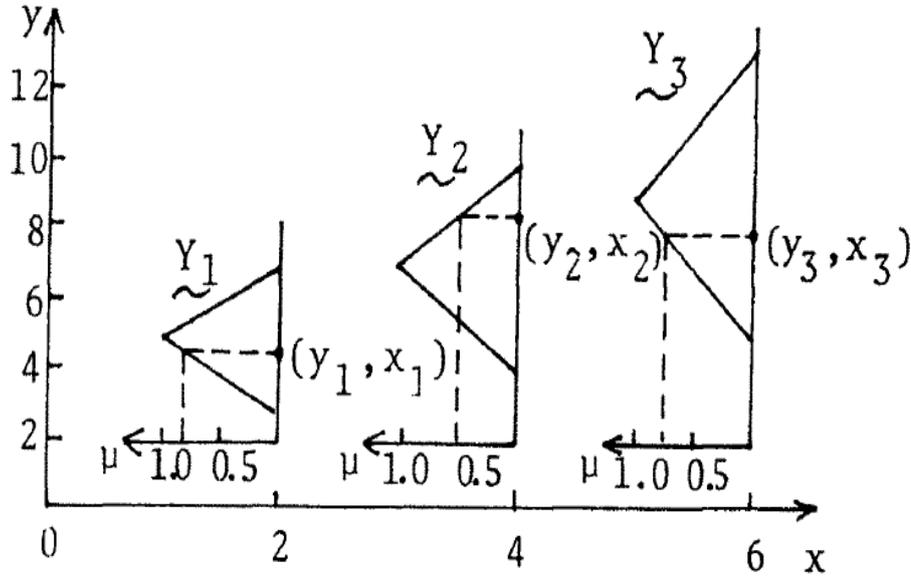


Figura 3.1: Ilustração de um modelo de regressão *fuzzy* simples $Y_i = A_0 + A_1 x_i$, com os coeficientes ajustados $A_0 = (3, 1)$, $A_1 = (1, 0.5)$, $h = 0.5$.

A Figura (3.1) do trabalho original de Tanaka et. al. (1982), ilustra a interpretação geométrica do modelo *fuzzy* a respeito da predição da variável resposta que é do tipo *fuzzy* com pertinência triangular.

3.2.1 Ajuste dos parâmetros do modelo

O critério de ajuste dos coeficientes \tilde{A}_j s do modelo (3.5) é minimizar a soma do espalhamento total sujeito a restrição de que cada observação y_i pertence ao modelo (3.5) a um nível h de pertinência. Podemos assim, formular um modelo de programação linear para este problema conforme Yen et. al. (1999):

$$\text{minimize } Z = a_0^s + \sum_{j=1}^k \left[a_j^s \sum_{i=1}^n |x_{ij}| \right], \quad (3.8)$$

$$\text{sujeito a: } y_i \in [f(\mathbf{x}_i, \tilde{A})]_h,$$

em que, $[\cdot]_h$ é o h -corte associado a função. Ou seja, desejamos que cada observação da variável resposta do modelo possua pertinência de pelo menos h no modelo. Podemos explicitar esta restrição a partir da função de pertinência dada em (3.7) limitando-a a h da seguinte maneira:

$$1 - \frac{y_i - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - a_0^c}{a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}|} \geq h, \quad (3.9)$$

e

$$1 - \frac{a_0^c + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - y_i}{a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}|} \geq h, \quad (3.10)$$

que pode ser reescrita como 3.9,

$$a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| - y_i + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + a_0^c \geq h(a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}|),$$

implicando que

$$a_0^l + \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + a_0^c - h a_0^l - h \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| \geq y_i,$$

obtendo assim:

$$(1 - h)a_0^l + (1 - h) \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + a_0^c \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

podemos reescrever (3.10) da seguinte forma,

$$a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| - a_0^c - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + y_i \geq h(a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}|).$$

implicando

$$a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| - a_0^c - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - h a_0^r + h \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| \geq -y_i,$$

e por fim, obtendo:

$$(1 - h)a_0^r + (1 - h) \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - a_0^c \geq -y_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

Desta maneira, (3.11) e (3.12) formam as restrições do modelo. Temos portanto, o seguinte modelo de programação linear para obter os parâmetros *fuzzy* que ajustam o modelo de Yen et. al (1999) expresso em (3.5).

$$\begin{aligned} &\text{minimize } Z = a_0^s + \sum_{j=1}^k \left[a_j^s \sum_{i=1}^n |x_{ij}| \right] \\ &\text{sujeito a: } (1 - h)a_0^l + (1 - h) \sum_{j=1}^k a_j^l |x_{ij}| + \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} + a_0^c \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ &(1 - h)a_0^r + (1 - h) \sum_{j=1}^k a_j^r |x_{ij}| - \sum_{j=1}^k a_j^c x_{ij} - a_0^c \geq -y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ &a_j^l, a_j^r, a_j^c \geq 0, j = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Podemos adaptar o modelo 3.13 para o caso em que os coeficientes são simétricos, formulando o seguinte modelo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } Z &= a_0^s + \sum_{j=1}^k \left[a_j^s \sum_{i=1}^n |x_{ij}| \right] \\
\text{sujeito a: } &(1-h)a_0^s + (1-h) \sum_{i=1}^n a_i^s |x_{ij}| + \sum_{j=1}^n a_j^c x_{ij} + a_0^c \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\
&(1-h)a_0^s + (1-h) \sum_{j=1}^n a_j^s |x_{ij}| - \sum_{i=j}^n a_i^c x_{ij} - a_0^c \geq -y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\
&a_j^s, a_j^c \geq 0, j = 0, 1, \dots, k.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Para resolver os problemas de otimização linear (3.13) e (3.14) acima o método simplex usual pode ser empregado, tal método se baseia em percorrer os vértices da região viável do problema, que por possuir restrições e função objetivo lineares é portanto uma região convexa. O simplex se baseia em realizar uma busca nos vértices da região convexa até encontrar um ponto de otimalidade. Por não estar no escopo deste trabalho não entraremos nos pormenores deste método, para mais detalhes o leitor pode consultar Bregalda et. al. (1988). No Capítulo 4 ajustamos um modelo de regressão *fuzzy* para dois conjuntos de dados.

3.3 Modelo de Regressão Fuzzy Híbrido

O ajuste do modelo de regressão *fuzzy* em (3.14) é simétrico, e em certos casos, podemos ter uma assimetria em relação ao ajuste central, Yen et. al. propõem para este caso que a utilização de um parâmetro de assimetria para os espalhamentos laterais $a_i^r = k_i a_i^l$, entretanto, a escolha deste valor é completamente arbitrária, ficando a critério do pesquisador escolhe-lo. Por essa razão, Ishibushie e Nii (2001) sugerem um modelo híbrido, em que a parte central é ajustada de acordo com o estimador de mínimos quadrados, assim o vetor de coeficientes centrais \mathbf{a}^c do modelo é estimado da seguinte maneira:

$$\hat{\mathbf{a}}^c = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y},$$

em seguida, utilizamos uma adaptação na formulação do modelo de programação linear (3.13) para determinar os parâmetros de espalhamento \mathbf{a}^l e \mathbf{a}^r e considerando os valores de $\hat{\mathbf{a}}$ como constantes. Devemos assim, resolver:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } Z &= \frac{1}{2}(a_0^l + a_0^r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (a_j^l + a_j^r)(x_{ij}^+ + x_{ij}^-) \\
\text{sujeito a: } & (1-h)(a_0^l + a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^r x_{ij}^+ + \sum_{j=1}^k a_j^l x_{ij}^-) + \hat{a}_0^c + \sum_{j=1}^k \hat{a}_j^c x_{ij} \geq y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\
& (1-h)(a_0^l + a_0^r + \sum_{j=1}^k a_j^l x_{ij}^+ + \sum_{j=1}^k a_j^r x_{ij}^-) - \hat{a}_0^c - \sum_{j=1}^k \hat{a}_j^c x_{ij} \geq -y_i, i = 1, 2, \dots, n, \\
& a_j^l, a_j^r \geq 0, j = 0, 1, \dots, k.
\end{aligned}$$

em que,

$$x_{ij}^+ = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } x_{ij} \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$x_{ij}^- = \begin{cases} 0 & \text{se } x_{ij} \geq 0, \\ -x_{ij} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 0, 1, \dots, k$ respectivamente. Note que, x_{ij}^+ e x_{ij}^- são não negativos e satisfazem $x_{ij} = x_{ij}^+ - x_{ij}^-$ e $|x_{ij}| = x_{ij}^+ + x_{ij}^-$.

3.3.1 Escolha do Valor h

A escolha do valor de h para o modelo de regressão *fuzzy* é discutida por diversos autores. Tanaka e Watada (1988) alertam que maiores valores de h podem ser utilizados se o número de observações é pequeno. Bárdossy et. al. (1990) diz que a seleção do valor h pode ser baseado na crença do pesquisador e recomenda valores entre 0,5 e 0,7 para situações reais. Ge e Wang (2007) sugerem que o valor de h pode ser inversamente proporcional ao ruído das variáveis explicativas. Chen et. al. (2016) propõem um modelo de programação matemática para a otimização do valor de h para o MRLF com coeficientes triangulares *fuzzy* e recomendam valores inferiores a 0,5 quando o modelo utiliza coeficientes triangulares *fuzzy*, tanto para o caso simétrico quanto para o caso assimétrico.

Neste trabalho realizamos ajustes considerando alguns valores de h e adotamos por padrão $h = 0$, caso acreditemos que possam haver pontos fora das bandas de espalhamento do modelo podemos aumentar o valor de h . O valor de h é um reflexo da incerteza que temos a respeito da tendência dos dados.

No capítulo seguinte estudamos duas aplicações dos modelos trabalhados neste capítulo.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo realizamos duas aplicações, uma para um pequeno conjunto de dados e outra para um conjunto de dados com 150 observações, além disso discutimos alguns resultados a respeito da interpretação dos valores dos coeficientes ajustados dos modelos.

4.1 Exemplo 1: Ajuste do modelo para dados fictícios

Considere inicialmente um pequeno conjunto de dados fictícios, composto por 5 observações e duas variáveis explicativas apresentados por Yen et. al. (1999).

Tabela 4.1: Dados fictícios.

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}
1	3,54	0,84	0,86
2	4,05	0,65	0,52
3	4,51	0,76	0,57
4	2,63	0,70	0,30
5	1,90	0,43	0,60

Primeiramente, podemos ajustar o modelo de regressão linear simples usual, no qual obtemos:

$$\hat{y}_i = 0,135 + 4,6832x_1 + 0,0442x_2.$$

Utilizando a formulação (3.14), particularmente para os dados da Tabela (4.1) obtemos explicitamente o seguinte problema de programação linear utilizando $h = 0,5$:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } Z &= a_0^s + a_1^s \sum_{i=1}^5 |x_{i1}| + a_2^s \sum_{i=1}^5 |x_{i2}| \\
\text{sujeito a: } &0, 5a_0^s + 0, 5a_1^s x_{i1} + 0, 5x_{i2} + a_0^c + a_1^c x_{i1} + a_2^c x_{i2} \geq y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. \\
&0, 5a_0^s + 0, 5a_1^s x_{i1} + 0, 5x_{i2} - a_0^c - a_1^c x_{i1} - a_2^c x_{i2} \geq -y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. \\
&a_j^s, a_j^c \geq 0, j = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Ou seja, substituindo pelos valores dos dados em questão, desejamos encontrar os coeficientes *fuzzy* que são as soluções ótimas de:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } Z &= a_0^s + 3,338a_1^s + 2,85a_2^s \\
&0, 5a_0^s + 0, 42a_1^s + 0, 43a_2^s + a_0^c + 0, 84a_1^c + 0, 86 \\
&0, 5a_0^s + 0, 42a_1^s + 0, 43a_2^s - a_0^c - 0, 84a_1^c - 0, 86a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 325a_1^s + 0, 26a_2^s + a_0^c + 0, 65a_1^c + 0, 52a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 325a_1^s + 0, 26a_2^s - a_0^c - 0, 65a_1^c - 0, 52a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 38a_1^s + 0, 285a_2^s + a_0^c + 0, 76a_1^c + 0, 57a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 38a_1^s + 0, 285a_2^s - a_0^c - 0, 76a_1^c - 0, 57a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 35a_1^s + 0, 15a_2^s + a_0^c + 0, 70a_1^c + 0, 30a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 35a_1^s + 0, 15a_2^s - a_0^c - 0, 70a_1^c - 0, 30a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 215a_1^s + 0, 30a_2^s + a_0^c + 0, 43a_1^c + 0, 60a_2^c \\
&0, 5a_0^s + 0, 215a_1^s + 0, 30a_2^s - a_0^c - 0, 43a_1^c - 0, 60a_2^c \\
&a_0^s, a_1^s, a_2^s, a_0^c, a_1^c, a_2^c \geq 0
\end{aligned}$$

Para encontrar a solução ótima desta formulação, utilizamos o código em R disponível no Apêndice A.4. E assim, obtivemos os seguintes resultados para diversos valores de h .

Tabela 4.2: Resultado do ajuste de parâmetros para o modelo de regressão linear *fuzzy* com coeficientes triangulares simétricos para diversos valores de h para os dados da Tabela 4.1.

h	a_0^s	a_0^c	a_1^s	a_1^c	a_2^s	a_2^c	Z
0,1	0,8154	0,6707	0	3,5290	0	0,7427	0,8154
0,3	1,0484	0,6707	0	3,5290	0	0,7427	1,0484
0,5	1,4677	0,6707	0	3,5290	0	0,7427	1,4677
0,7	2,4462	0,6707	0	3,5290	0	0,7427	2,4462

Para interpretar mais facilmente o resultado do ajuste para $h = 0,5$, podemos reescrever os coeficientes conforme (3.6). Nesta notação, os coeficientes ajustado são $\tilde{A}_0 = \langle -0,797; 0,6707; 2,1384 \rangle$, $\tilde{A}_1 = \langle 3,5229; 3,5229; 3,5229 \rangle$ e $\tilde{A}_2 = \langle 0,7427; 0,7427; 0,7427 \rangle$.

O ajuste da parte do modelo para os espalhamentos y^l e y^r são paralelas ao ajuste central y^c , essa é uma característica do modelo de Yen et. al. (1999). Além disso interpretamos que para cada unidade de incremento na variável x_{i1} mantendo fixo x_{i2} a variável resposta y_i aumenta em aproximadamente 3,529, e para cada unidade de incremento na variável x_{i2} mantendo fixo x_{i1} temos aproximadamente 0,7474 de incremento na variável resposta y_i . Uma vantagem em relação ao modelo de regressão linear usual é que a única suposição que fazemos é que o número de observações deve ser maior que o número de parâmetros ajustados.

4.2 Exemplo 2: Conjunto de dados reais

Considere a Tabela (4.3) que ilustra registros da década de 1920 a respeito da medida das distâncias que veículos percorreram até a parada total dada a velocidade que vinham no trajeto (ver Tabela A.1 no Apêndice A.9). Os dados estão disponíveis em Ezekiel e Fox (1963). Análisisando os dados de maneira exploratória obtemos as seguintes medidas descritivas:

Tabela 4.3: Medidas descritivas relativas as variáveis: distância e velocidade.

	Velocidade (<i>mph</i>)	Distância (pés)
Mínimo	4,00	2,00
1° Quartil	12,00	26,00
Mediana	15,00	36,00
Média	15,40	42,98
3° Quartil	19,00	56,00
Máximo	25,00	120,00
Desvio Padrão	5,289	25,77

Desejamos ajustar tanto um modelo linear usual quanto um modelo de regressão linear *fuzzy* adequados para explicar a relação entre a variável resposta distância (y) e distância (x). Se realizarmos um ajuste via modelo de regressão linear simples usual como o modelo (3.1), iremos obter um modelo na forma:

$$\hat{y}_i = -17,579 + 3,932x_i.$$

Ou seja, em média os veículos percorrem 3,932 pés a mais até a parada total, para cada milha por hora de incremento na velocidade do veículo.

Vamos agora comparar com os resultados do modelo de regressão *fuzzy*, para isso, iremos inicialmente encontrar um ajuste dos parâmetros através da formulação (3.14). E assim, obtemos:

Tabela 4.4: Resultado do ajuste de parâmetros para o modelo de regressão linear fuzzy com coeficientes triangulares simétricos para diversos valores de h para os dados da tabela 2.3.

h	a_0^s	a_0^c	a_1^s	a_1^c	Z
0	37,0909	0	0	3,4545	37,0909
0,1	41,2121	0	0	3,4545	41,2121
0,3	52,9870	0	0	3,4545	52,9870
0,5	74,1818	0	0	3,4545	74,1818
0,8	185,4545	0	0	3,4545	185,4545

Interpretamos o resultado dos parâmetros ajustados da seguinte maneira: a cada milha por hora (*mph*) que o veículo aumenta em sua velocidade ele irá aumentar em aproximadamente 3,4545 (pés) de distância extra durante a frenagem.

Neste exemplo, por se tratar de um conjunto de dados com apenas duas variáveis podemos, observar o gráfico de dispersão e a interpretação geométrica do modelo de regressão *fuzzy*. A seguir analisamos o diagrama de dispersão com as retas de regressão ajustadas com $h = 0$ no modelo *fuzzy* e a reta em vermelho sendo de regressão linear simples usual:

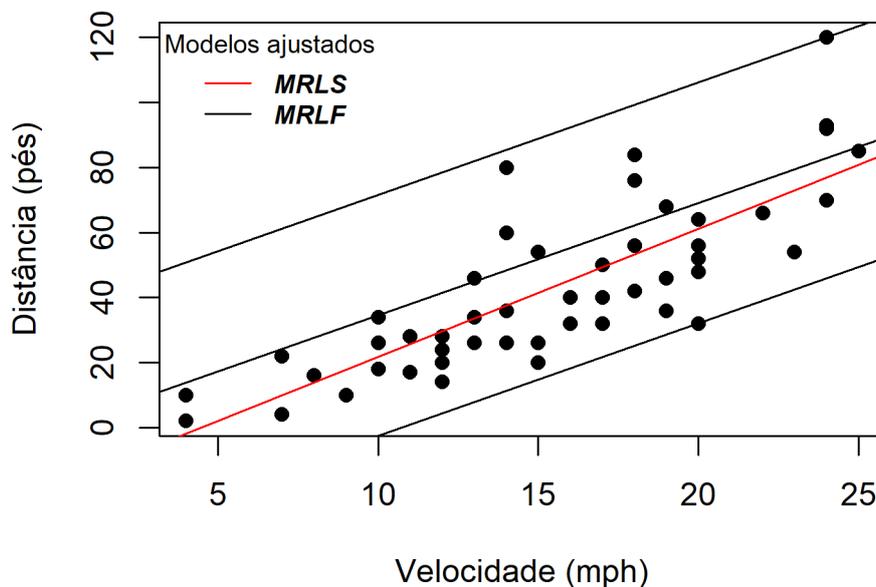


Figura 4.1: Diagrama de dispersão para velocidade (mph) versus distância (pés) e o ajuste dos modelos de regressão linear fuzzy e linear simples usual.

Podemos também avaliar a diferença na interpretação da predição do modelo de regressão linear simples usual que possui como preditor um valor real, em comparação

ao modelo de regressão linear *fuzzy* que possui como preditor um número *fuzzy*. No primeiro dado os valores das variáveis explicativas temos um valor numérico predito, no segundo temos algo que se assemelha a um intervalo de confiança para a resposta média como apresentado na seção 3.1.1. Isso fica evidente se observarmos a reta vermelha (MRLS) e as retas pretas (modelo *fuzzy*). Suponha por exemplo que um veículo esteja em uma velocidade de 18 milhas por hora e desejamos prever qual será a distância que ele irá percorrer durante a frenagem até parar completamente, utilizando o MRLS ele irá percorrer 53,204 pés, se desejamos uma medida um pouco mais flexível, podemos utilizar o intervalo de confiança (3.4), obtendo assim [48,3214; 58,0871] ao nível de 95% de confiança. Utilizando o MRLF obtemos a predição de $\langle 25,0901; 62,181; 99,2719 \rangle$, isso significa que para a velocidade de 18 milhas por hora valores de distância percorrida menores do que 25,0901 tem pertinência zero e, 62,181 tem pertinência igual a um e para velocidades maiores que 99,2719 temos pertinência zero. Como os espalhamentos cobrem todos os pontos na dispersão, os espalhamentos laterais em geral irão gerar bandas de amplitude maior que os intervalos de predição.

Observando o gráfico de dispersão da Figura (4.1), verifica-se que há uma concentração de pontos maior abaixo da reta central do modelo *fuzzy*, indicando assim que um modelo assimétrico seria possivelmente mais adequado.

Podemos optar em utilizar esse tipo de modelo quando há dificuldades em verificar as suposições do modelo e desejamos realizar predições intervalares ao invés de pontuais, substituindo assim o intervalo de confiança pela predição baseada no ajuste de espalhamento *fuzzy*.

Realizando o ajuste de acordo com o modelo de regressão linear *fuzzy* híbrido apresentado na seção 3.3, e sabendo que estamos realizando um ajuste de espalhamentos paralelos ao modelo central obtido através do estimador de mínimos quadrados, obtemos:

Tabela 4.5: Resultados dos coeficientes ajustados para o modelo híbrido para diversos valores de h .

h	a_0^l	a_0^c	a_0^r	a_1^c	Z
0	-46,648	-17,579	25,622	3,932	36,135
0,1	-49,878	-17,579	30,422	3,932	40,150
0,2	-53,915	-17,579	36,422	3,932	45,169
0,3	-59,106	-17,579	44,137	3,932	51,622
0,4	-66,027	-17,579	54,423	3,932	60,225
0,5	-75,717	-17,579	68,824	3,932	72,270
0,6	-90,252	-17,579	90,424	3,932	90,338
0,7	-114,48	-17,579	126,425	3,932	120,450
0,8	-162,92	-17,579	198,427	3,932	180,676
0,9	-308,27	-17,579	414,434	3,932	361,352

O resultado da interpretação do ajuste dos parâmetros para $h = 0$ é dado a seguir, considere portanto o modelo:

$$\tilde{y}_i = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1,$$

em que, $\tilde{A}_0 = \langle -46,648; -17,579; 25,622 \rangle$ e $\tilde{A}_1 = \langle 3,932; 3,932; 3,932 \rangle$.

Neste modelo como a tendência central é a mesma do modelo linear usual então a interpretação é a mesma que já comentamos, a diferença neste caso está na predição. Realizando assim o mesmo exemplo de predição para um veículo a 18 milhas por hora, obtemos neste caso $\langle 24,135; 53,204; 96,405 \rangle$.

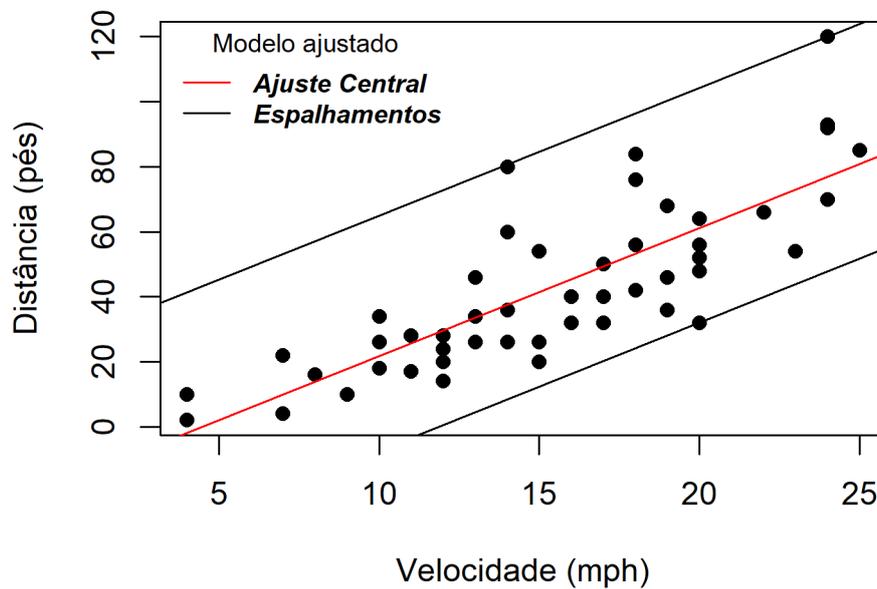


Figura 4.2: Diagrama de dispersão para velocidade (mph) versus distância (pés) e o ajuste dos modelos de regressão linear fuzzy e linear simples usual.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Discussão, Considerações Finais e Pesquisas Futuras

Os modelos de regressão tem sido uma ferramenta importante na estatística, entretanto em diversas situações as suposições do modelo podem não ser atendidas. Outras metodologias tem sido propostas ao longo dos anos, os modelos de regressão *fuzzy* são uma dessas metodologias. Se considerarmos o modelo híbrido em que combinamos o modelo de regressão linear usual com o modelo de regressão *fuzzy*, ele é no mínimo uma ampliação do modelo usual, já que a tendencia central é a mesma, podemos assim avaliar o modelo através dos métodos de diagnóstico usuais porém com a vantagem de que temos uma faixa de valores possíveis na resposta e não apenas um valor pontual. Além disso, essa modelagem dispensa suposições sobre quaisquer distribuição, podemos considerar portanto essa metodologia como livre de distribuição.

No caso da modelagem de Yen et. al. (1999), não ajustamos o modelo considerando a minimização da distância entre os valores observados e preditos, isso pode levar a constantes problemas com a assimetria do ajuste central, já que nem sempre os dados estarão concentrados no meio das bandas de espalhamento. Seria portanto, mais adequado o ajuste através do modelo híbrido já citado.

Para trabalhos futuros pode-se considerar, por exemplo:

1. Estudar o ajuste de modelos de regressão *fuzzy* utilizando como coeficientes números trapézoidais.
2. Uma formulação que trabalhe com equações de espalhamento não paralelas ao ajuste central.
3. Considerar os modelos de regressão *fuzzy* através de uma abordagem via programação quadrática proposto por Coelho e Cruz (2014) e estudar métodos de diagnóstico para esta abordagem.

4. Estudar um modelo que considera a otimização do valor de h durante o ajuste.
5. Estudar o caso em que as variáveis explicativas também são *fuzzy*.
6. O caso da regressão polinomial.

Bibliografia

- [1] BÁRDOSSY, Andras; BOGARDI, Istvan; DUCKSTEIN, Lucien. **Fuzzy regression in hydrology**. Water Resources Research, v. 26, n. 7, p. 1497-1508, 1990.
- [2] BELL, Pamela McCauley; HENG, Wang. **Fuzzy linear regression models for assessing risks of cumulative trauma disorders**. Fuzzy Sets and Systems, v. 92, n. 3, p. 317-340, 1997.
- [3] BERTSIMAS, Dimitris; TSITSIKLIS, John N. **Introduction to linear optimization**. Belmont, MA: Athena Scientific, 1997.
- [4] BREGALDA, Paulo Fabio; DE OLIVEIRA, Antonio Alberto F.; BORNSTEIN, Claudio Thomas. **Introdução à programação linear**. Campus, 1988.
- [5] CHEN, Fangning; CHEN, Yizeng; ZHOU, Jian; LIU, Yuanyuan. **Optimizing h value for fuzzy linear regression with asymmetric triangular fuzzy coefficients**. Engineering Applications of Artificial Intelligence, v. 47, p. 16-24, 2016.
- [6] COELHO, Ricardo; CRUZ, Carlos. **Price analysis for prefabricated houses with imprecise data**. Congreso Español sobre tecnologías y lógica fuzzy, 2014.
- [7] DUBOIS, Didier; PRADÉ, Henri. **Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory**. Information Sciences, v. 30, n. 3, p. 183-224, 1983.
- [8] DUBOIS, Didier; PRADÉ, Henri. **The mean value of a fuzzy number**. Fuzzy sets and systems, v. 24, n. 3, p. 279-300, 1987.
- [9] EZEKIEL, Mordecai; FOX, Karl August. **Methods of correlation and regression analysis: linear and curvilinear**. Nova York, Estados Unidos: Wiley, 1963.
- [10] GAO, Shang; ZHANG, Zaiyue; CAO, Cungen. **Multiplication Operation on Fuzzy Numbers**. JSW, v. 4, n. 4, p. 331-338, 2009.
- [11] GE, Hong-Wei; WANG, Shi-Tong. **Dependency between degree of fit and input noise in fuzzy linear regression using non-symmetric fuzzy triangular coefficients**. Fuzzy Sets and Systems, v. 158, n. 19, p. 2189-2202, 2007.

- [12] GHARPURAY, M. M; TANAKA, H; FAN, L. T. Fuzzy linear regression analysis of cellulose hydrolysis. *Chemical engineering communications*, v. 41, n. 1-6, p. 299-314, 1986.
- [13] GONZÁLEZ, José Alejandro et al. **A confidence set analysis for observed samples: A fuzzy set approach**. *Entropy*, v. 18, n. 6, p. 211, 2016.
- [14] GUERRA, Maria Letizia; STEFANINI, Luciano. **On Fuzzy Arithmetic Operations: Some Properties and Distributive Approximations**. Working Papers Series in Economics, Matematics and Statistics, 2006.
- [15] ISHIBUCHI, Hisao; NII, Manabu. **Fuzzy regression using asymmetric fuzzy coefficients and fuzzified neural networks**. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 119, n. 2, p. 273-290, 2001.
- [16] KIM, Kwang Jae; MOSKOWITZ, Herbert; KOKSALAN, Murat. **Fuzzy versus statistical linear regression**. *European Journal of Operational Research*, v. 92, n. 2, p. 417-434, 1996.
- [17] KOISSI, Marie-Claire; SHAPIRO, Arnold F. **Fuzzy formulation of the Lee–Carter model for mortality forecasting**. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 39, n. 3, p. 287-309, 2006.
- [18] MONTGOMERY, Douglas C.; PECK, Elizabeth A.; VINING, G. Geoffrey. **Introduction to regression analysis**. Arizona: 5 ed. Wiley, 2012.
- [19] PAULA, Gilberto Alvarenga. **Modelos de regressão: com apoio computacional**. São Paulo: IME-USP, 2004.
- [20] R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>, acesso em: Outubro de 2018.
- [21] ROSS, Timothy J. **Fuzzy logic with engineering applications**. New México, Estados Unidos: 3 ed, John Wiley & Sons, 2005.
- [22] SÁNCHEZ, Jorge de Aandres; GÓMEZ, Antonio Terceño. **Applications of fuzzy regression in actuarial analysis**. *Journal of Risk and Insurance*, v. 70, n. 4, p. 665-699, 2003a.
- [23] SÁNCHEZ, Jorge de Aandres; GÓMEZ, Antonio Terceño. **Estimating a term structure of interest rates for fuzzy financial pricing by using fuzzy regression methods**. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 139, n. 2, p. 313-331, 2003b.

- [24] SARIP, Abdul Ghani; HAFEZ, Muhammad Burhan; DAUD, Md Nasir. **Application of fuzzy regression model for real estate price prediction**. Malaysian Journal of Computer Science, v. 29, n. 1, p. 15-27, 2016.
- [25] SAVIC, Dragan A.; PEDRYCZ, Witold. **Evaluation of fuzzy linear regression models**. Fuzzy sets and systems, v. 39, n. 1, p. 51-63, 1991.
- [26] TANAKA, Hideo; UEJIMA, Satoru; ASAI, Kiyoji. **Linear regression analysis with fuzzy model**. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, v. 12, n. 6, p. 903-907, 1982.
- [27] TANAKA, Hideo; HAYASHI, Isao; WATADA, Junzo. **Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data**. European Journal of Operational Research, v. 40, n. 3, p. 389-396, 1989.
- [28] TANAKA, Hideo; WATADA, J. **Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model**. Fuzzy sets and systems, v. 27, n. 3, p. 275-289, 1988.
- [29] YEN, Kang K.; GHOSHROY, Sabyasachi; ROIG, Gustavo. **A linear regression model using triangular fuzzy number coefficients**. Fuzzy sets and systems, v. 106, n. 2, p. 167-177, 1999.
- [30] ZADEH, Lofti A. **Fuzzy Sets**. Information and control, p. 338-353, 1965.

Apêndice A

Apêndices

A.1 Apêndice 1

Função de pertinência triangular fuzzy

```
triangle = function(x,a,b,c){
  if(x>=a&&x<=b){
    return((x-a)/(b-a))
  }
  if(x>=b&&x<=c){
    return((c-x)/(c-b))
  }else{
    return(0)
  }
}
# Exemplo
x = seq(0,4,0.1)
y = c()
for(i in 1:length(x)){
  y = c(y,triangle(x[i],1,2,3))
}
plot(x, y, type = "l", ylab = expression(mu(x)))
```

A.2 Apêndice 2

Função de pertinência trapezoidal fuzzy

```
trapezoid = function(x,a,b,c,d){
  if(x>=a&&x<=b){
    return((x-a)/(b-a))
  }
```

```

}
if(x>=b&&x<=c){
  return(1)
}
if(x>=c&&x<=d){
  return((d-x)/(d-c))
}else{
  return(0)
}
}
# Exemplo
x = seq(0,4,0.1)
y = c()
for(i in 1:length(x)){
  y = c(y, trapezoid(x[i], 1, 1.5, 2.5, 3))
}
plot(x, y, type = "l", ylab = expression(mu(x)))

```

A.3 Apêndice 3

Operações Aritméticas

```

# Multiplicação por escalar
library(FuzzyNumbers)
A <- TrapezoidalFuzzyNumber(0, 1, 1, 3)
plot(A, xlim=c(0,6))
plot(2*A, add=TRUE, col="red", lty=2)

# Soma
A <- TrapezoidalFuzzyNumber(0, 1, 1, 3)
B <- TrapezoidalFuzzyNumber(2, 3, 3, 4)
plot(A, xlim=c(0,8))
plot(B, add=TRUE, col="red", lty=2)
plot(A+B, add=TRUE, col="brown", lty=5)

# Subtração
A <- TrapezoidalFuzzyNumber(0, 1, 1, 3)
B <- TrapezoidalFuzzyNumber(2, 3, 3, 4)
plot(A, xlim=c(-4,4))
plot(B, add=TRUE, col="red", lty=2)
plot(A-B, add=TRUE, col="brown", lty=5)

```

A.4 Apêndice 4

Ajuste do MRLF de Yen

```

#Recebe y variável resposta e x matriz de covariáveis
#(primeira coluna de uns), h (opcional, default = 0.5)
library(lpSolve)
yen_symmetric <- function(y, x, h = 0){
  n = nrow(x)
  k = ncol(x)

  f.obj = 1:(2*k)
  for(i in 2:k){
    f.obj[i] = sum(abs(x[,i]))
  }
  for(i in (k+1):(2*k)){
    f.obj[i] = 0
  }

  f.con = matrix(0,2*n,2*k)
  for(i in 1:n){
    for(j in 1:k){
      f.con[i,j] = (1-h)*x[i,j]
    }
  }
  for(i in (n+1):(2*n)){
    for(j in 1:k){
      f.con[i,j] = (1-h)*x[i-n,j]
    }
  }
  for(i in 1:n){
    for(j in (k+1):(2*k)){
      f.con[i,j] = x[i,j-k]
    }
  }
  for(i in (n+1):(2*n)){
    for(j in (k+1):(2*k)){
      f.con[i,j] = -x[i-n,j-k]
    }
  }
}

```

```

f.dir = rep(">=", 2*n)

f.rhs = c(y, -y)

solution = lp("min", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)

aux = solution$solution
spread = aux[1:k]
center = aux[(k+1):(k*2)]
parameters = data.frame(spread, center)
rownames(parameters) = paste("A", seq(0, k-1), sep = "")
return(list(parameters = parameters, general_vagness = solution$objval))
}

```

A.5 Apêndice 5

Ajuste do MRLF de Ishibushi

```

#Funções auxiliares para  $x_{ij}^{+}$  e  $x_{ij}^{-}$ 
x.pos = function(x){
  if(x>=0){
    return(x)
  }else{
    return(0)
  }
}

x.neg = function(x){
  if(x>=0){
    return(0)
  }else{
    return(-x)
  }
}

#Recebe y variável resposta e x matriz de covariáveis
#(primeira coluna de uns), h (opcional, default = 0)
library(lpSolve)
ishibushi <- function(y, x, h = 0){
  n = nrow(x)
  k = ncol(x)

```

```

f.obj = 1:k
for(i in 2:k){
  f.obj[i] = sum(abs(x[,i]))
}
f.obj = c(f.obj/2,f.obj/2)

f.con = matrix(0,2*n,2*k)
for(i in 1:n){
  for(j in 1:k){
    f.con[i,j] = (1-h)*x.pos(x[i,j])
  }
}
for(i in (n+1):(2*n)){
  for(j in 1:k){
    f.con[i,j] = (1-h)*x.neg(x[i-n,j])
  }
}
for(i in 1:n){
  for(j in (k+1):(2*k)){
    f.con[i,j] = (1-h)*x.neg(x[i,j-k])
  }
}
for(i in (n+1):(2*n)){
  for(j in (k+1):(2*k)){
    f.con[i,j] = (1-h)*x.pos(x[i-n,j-k])
  }
}

f.dir = rep(">=",2*n)

xa = x[,-1]
B = lm(y~xa)$coefficients

rhs = 1:n

for(i in 1:n){
  rhs[i] = -y[i]+sum(B*x[i,])
}

```

```

f.rhs = c(rhs,-rhs)

solution = lp ("min", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)

aux = solution$solution

leaf_spread = aux[(k+1):(2*k)]
right_spread = aux[1:k]
center = B
leaf_spread = B+leaf_spread
right_spread = B-right_spread
parameters = data.frame(leaf_spread,center,right_spread)
rownames(parameters) = paste("A",seq(0,k-1), sep = "")
return(list(parameters = parameters, general_vagness = solution$objval))
}

```

A.6 Apêndice 6

Plot da reta de regressão *fuzzy*

```

#Recebe a matriz de parâmetros e
#plota a curva de regressão linear simples fuzzy
plot_flr <- function(P){
  if(dim(P)!=c(2,2)){
    return("Dimension of P must be 2x2!")
  }
  abline(P[1,2]+P[1,1],P[2,2])
  abline(P[1,2]-P[1,1],P[2,2])
  abline(P[1,2],P[2,2])
}

```

A.7 Apêndice 7

Valores ajustados

```

#Predicted values
#Recebe o vetor de valores a serem preditos
#e uma matriz de parâmetros adequada do mrlf simétrico
#Retorna os parâmetros de uma função triangular fuzzy
predicted_fuzzy <- function(Pred, Par){
  if(nrow(Par)!=(length(Pred))){

```

```

    print("Dimensões inconsistentes")
    return("Erro")
}
n = nrow(Par)
C = Par[,2]
S = Par[,1]
Sr = 1:n
Pred = c(1,Pred)
for(i in 1:n){
  Sr[i] = S[i]+C[i]
}
s = sum(Sr)-sum(C)
c = sum(C)
pred_value = cbind(s,c)
colnames(pred_value) = c("spred","center")
return(pred_value)
}

```

A.8 Apêndice 8

Demonstração: se $a_i^c = \frac{a_i^l + a_i^r}{2}$ então a função de pertinência é simétrica e pode ser unicamente representada por $\langle a_i^s, a_i^c \rangle$, em que, $a_i^s = a_i^r - a_i^c$.

De acordo com a definição 5, um intervalo *fuzzy* é simétrico se $\mu_\alpha^- + \mu_\alpha^+ = \hat{\mu}_\alpha^- + \hat{\mu}_\alpha^+, \forall \alpha$, no caso da função de pertinência triangular

$$\begin{aligned}
 \mu_\alpha^- + \mu_\alpha^+ &= a^l + \alpha \left(\frac{a^l + a^r}{2} - a^l \right) + a^r - \alpha \left(\frac{a^l + a^r}{2} \right) = \\
 &= a^l + \alpha \left(\frac{a^r - a^l}{2} \right) + a^r - \alpha \left(\frac{a^r - a^l}{2} \right) = a^l + a^r
 \end{aligned}$$

além disso $\hat{\mu}_\alpha^- + \hat{\mu}_\alpha^+ = a^c + a^c = 2a^c$. Igualando as duas expressões obtemos $a^l + a^r = 2a^c \Rightarrow a^c = \frac{a^l + a^r}{2}$, como gostaríamos de demonstrar.

A.9 Apêndice 9

Conjunto de dados para o Exemplo 2

Tabela A.1: Velocidades em milhas por hora e distância percorrida do início da frenagem até a parada total em pés.

Obs.	Velocidade (mpg)	Distância (ft)	Obs.	Velocidade (mpg)	Distância (ft)
1	4	2	26	15	54
2	4	10	27	16	32
3	7	4	28	16	40
4	7	22	29	17	32
5	8	16	30	17	40
6	9	10	31	17	50
7	10	18	32	18	42
8	10	26	33	18	56
9	10	34	34	18	76
10	11	17	35	18	84
11	11	28	36	19	36
12	12	14	37	19	46
13	12	20	38	19	68
14	12	24	39	20	32
15	12	28	40	20	48
16	13	26	41	20	52
17	13	34	42	20	56
18	13	34	43	20	64
19	13	46	44	22	66
20	14	26	45	23	54
21	14	36	46	24	70
22	14	60	47	24	92
23	14	80	48	24	93
24	15	20	49	24	120
25	15	26	50	25	85