



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**ÉSIO MAGALHÃES FEITOSA LIMA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS COM INTERAÇÃO  
PARCIAL**

**FORTALEZA**

**2018**

ÉSIO MAGALHÃES FEITOSA LIMA

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS COM INTERAÇÃO  
PARCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- L711a Lima, Écio Magalhães Feitosa.  
Análise Numérica de Vigas Mistas Protendidas com Interação Parcial / Écio Magalhães Feitosa Lima. –  
2018.  
96 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior.
1. Análise não linear. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Vigas mistas de aço e concreto. 4. Protensão.  
5. Interação Parcial. I. Título.

CDD 624.1

---

ÉSIO MAGALHÃES FEITOSA LIMA

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS COM INTERAÇÃO  
PARCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em: 27/08/2018

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)

## AGRADECIMENTOS

Expresso aqui meus agradecimentos às pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para confecção deste trabalho. De início, agradeço a Deus, pela vida que tenho. Aos meus pais, Graça e Solano, que além de proporcionarem muitos dos melhores momentos da minha vida, sempre me incentivaram a buscar uma formação intelectual de qualidade. Se hoje eu estou escrevendo este texto de agradecimento, é devido ao esforço que fizeram para me direcionar ao caminho certo. Dedico este trabalho a eles. Ainda neste parágrafo, gostaria de agradecer à minha irmã Maria Eduarda, pela companhia e pela saudável convivência em Fortaleza.

Gostaria de agradecer a todos os professores e funcionários do PEC, por tudo que já fizeram por mim. Um agradecimento especial vai ao professor João Batista. Gostaria agradecer por todos os conhecimentos repassados a mim ao longo do período que fui seu orientado, além do mais, sua forma bastante paciente e calma de corrigir os meus ~~não poucos~~ erros e explicar ~~muitas vezes~~ os conceitos utilizados, permitiram-me alcançar os objetivos desta dissertação.

Gostaria de agradecer a disponibilidade da banca avaliadora. Ao professor José Guilherme, pelo tempo dedicado a leitura e avaliação deste trabalho, suas considerações e comentários são de grande valia para este tema. Ao professor Evandro Parente, além das sugestões e tempo gasto na avaliação deste trabalho, gostaria de agradecer por ministrar as disciplinas de *Elementos Finitos* e *Estabilidade das Estruturas* com maestria, sem dúvidas irei guardar conceitos aprendidos com ele por toda vida profissional.

Gostaria também de agradecer aos meus professores da graduação, hoje amigos, Ricardo José Carvalho Silva e Audelis de Oliveira Marcelo Júnior. A carreira profissional que decidi seguir, seja como professor ou engenheiro calculista, têm os dois como principal influência. Ainda lembro do grande apoio que me deram quando decidi ingressar no mestrado em estruturas.

Gostaria de agradecer aos amigos que fiz no mestrado (Almircélio, Bergson, David, Emanuel, Rosendo e Michel) por fazerem esta caminhada se tornar mais leve e descontraída. Sem dúvidas, os últimos dois anos ficarão marcado em nossas vidas.

“Aqueles que se enamoram somente da prática, sem cuidar da teoria, ou melhor dizendo, da ciência, são como o piloto que embarca sem leme nem bússola, nunca têm certeza do seu destino. A prática deve alicerçar-se sobre uma boa teoria, à qual serve de guia a perspectiva, e em não entrando por esta porta, nunca se poderá fazer coisa perfeita nem na pintura, nem em nenhuma outra profissão”

Leonardo da Vinci

## RESUMO

A técnica de protensão, por mais que esteja tradicionalmente referenciada às estruturas de concreto, tem se mostrado bastante benéfica e útil quando usada em estruturas mistas. Trabalhos recentes indicam que quando se pré-tensiona vigas mistas através da inserção de cabos de aço, consegue-se obter diversos benefícios: comportamento elástico em situações de carregamento elevado, maior capacidade resistente e redução da altura útil da viga. Em vigas mistas a interação que ocorre na interface do perfil metálico e da laje de concreto tem grande influência no comportamento estrutural da peça. Na prática, para que um elemento misto não apresente deslizamento relativo entre os materiais, a rigidez na interface de contato deverá ser bastante alta, o que acarreta na utilização de uma grande quantidade de conectores de cisalhamento. Baseado na necessidade de se obter mais informações acerca desta técnica, o presente trabalho tem como objetivo promover uma análise numérica de vigas mistas com protensão externa em regime não linear, considerando a possibilidade de deslizamento na interface de contato da viga mista. O código utilizado para as análises numéricas foi desenvolvido através do programa *Matlab*, tendo sido fundamentado no Método dos Elementos Finitos. Esta ferramenta é constituída por elementos finitos de pórtico plano e por elementos finitos de cabo de protensão, ambos baseados na teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Em relação à não linearidade geométrica, foi considerada as deformações de *Green-Lagrange* decorrentes da formulação Lagrangeana total. Para representação da não linearidade física, foram considerados modelos constitutivos presentes em normas e trabalhos relevantes. Para a integração dos esforços internos e da matriz tangente na seção transversal e ao longo do eixo longitudinal, foram utilizados o Método das Fatias, a Quadratura de Gauss e a Quadratura de Lobatto. Por fim, os resultados obtidos pelo programa foram comparados com resultados experimentais, analíticos e numéricos de exemplos específicos disponíveis na literatura técnica, e pôde-se verificar que o código desenvolvido representa de forma satisfatória o comportamento não linear físico e geométrico de vigas mistas protendidas em que se considera a interação parcial.

**Palavras-chave:** Análise não linear, Método dos Elementos Finitos, Vigas mistas de aço e concreto protendidas, Interação parcial.

## ABSTRACT

The pretension technique, however traditionally referenced to concrete structures, has been shown to be very beneficial and useful when used in composite structures. Recent works indicate that when pretensioning composite beams through the insertion of steel cables, several benefits can be obtained: elastic behavior in situations of high load, greater capacity resistant and reduction of useful height of the beam. In composite beams the interaction that occurs at the interface of the steel and the concrete slab has influence on the structural behavior of the part. In practice, for a composite element to have no relative slip between the materials, the stiffness at the contact interface should be quite high, which leads to the use of a large number of shear connectors. Based on the need to obtain more information about this technique, the present work aims to realize a numerical analysis of composite beams with external pretension in a nonlinear analysis, considering the possibility of sliding at the contact interface of the composite beam. The code used for the numerical analysis was developed through the Matlab program, and was based on the Finite Element Method. This tool consists of finite elements of frame and finite elements of pretension cable, both based on Euler-Bernoulli beam theory. In relation to the geometric non-linearity, the Green-Lagrange deformations were considered as the result of the total Lagrangian formulation. For the representation of the material nonlinearity, constitutive models were considered present in norms and relevant papers. For the integration of the internal forces and the tangent matrix in the cross section and along the longitudinal axis, the Slice Method, the Gauss Quadrature Method and the Lobatto Quadrature were used. Finally, the results obtained by the program were compared with experimental, analytical and numerical results of specific examples available in the technical literature, and it was verified that the developed code satisfactorily represents the material and geometrical non-linear behavior of the prestressed composite beams which is considered partial interaction.

**Keywords:** Nonlinear analysis, Finite element method, Prestressed composite beams, Partial interaction.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura mista de aço/madeira.....	16
Figura 2 - Associação concreto/isopor.....	17
Figura 3 - Beichuan River Bridge.....	17
Figura 4 - Taipei 101.....	18
Figura 5 - Pilar Misto do Taipei 101.....	18
Figura 6 - Seções Transversais de Vigas Mistas.....	19
Figura 7 - Componentes da viga mista de aço e concreto.....	20
Figura 8 - Rigidez ao longo de uma viga mista contínua.....	21
Figura 9 - Tipos de Conectores Mecânicos.....	21
Figura 10 - Comportamento dos conectores na interface.....	22
Figura 11 - Interação aço-concreto no comportamento de seções mistas.....	22
Figura 12 - Diagramas de tensão deformação da seção mista.....	23
Figura 13 - Campo de deslocamentos da viga mista.....	24
Figura 14 - Princípios da protensão em estruturas de concreto.....	26
Figura 15 - Princípios da protensão em estruturas de metálicas.....	27
Figura 16 - Tipos de Desviadores do Cabo de Protensão.....	29
Figura 17 - Esquematização dos componentes da viga mista protendida.....	30
Figura 18 - Graus de liberdade do elemento finito.....	37
Figura 19 - Esquema de malha elementos de vigas de concreto e vigas mistas protendidas.....	45
Figura 20 - Malha de elementos finitos de vigas mistas protendidas sob interação parcial.....	46
Figura 21 - Elemento finito de viga e de cabo antes e após a deformação.....	46
Figura 22 - Ilustração da contribuição do elemento de cabo.....	51
Figura 23 - Modelo constitutivo de Hognestad para o concreto à compressão.....	55
Figura 24 - Modelo constitutivo de Zupan e Saje para o concreto.....	55
Figura 25 - Modelo constitutivo da NBR 6118 para o concreto à compressão.....	56
Figura 26 - Modelo constitutivo proposto pelo CEB-FIP para o concreto à compressão.....	57
Figura 27 - Modelo constitutivo proposto pelo Eurocode 2 para o concreto à compressão.....	58
Figura 28 - Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito.....	59
Figura 29 - Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito com endurecimento linear.....	60
Figura 30 - Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito tri-linear.....	60
Figura 31 - Modelo constitutivo da NBR 6118:2014 para o aço de protensão CP RB.....	61
Figura 32 - Modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) para o aço de protensão.....	62

Figura 33 - Modelo constitutivo de Ollgaard <i>et al.</i> (1971) para conectores de cisalhamento..	63
Figura 34 - Modelo constitutivo bi linear para conectores de cisalhamento.....	64
Figura 35 - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	72
Figura 36 - Malha de elementos da viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	72
Figura 37 - Caminho de equilíbrio - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	73
Figura 38 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> )- Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, (1989).	73
Figura 39 - Deformada vertical - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	74
Figura 40 - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	75
Figura 41 - Caminho de equilíbrio - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, (1989) .....	76
Figura.42 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> ) - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub,(1989).	76
Figura 43 - Deformada vertical - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989) .....	77
Figura 44 - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	78
Figura 45- Caminho de equilíbrio - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	79
Figura 46 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> ) - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	79
Figura 47 - Deformada vertical - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	80
Figura 48 - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	81
Figura 49 - Caminho de equilíbrio - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	82
Figura 50 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> ) - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	82
Figura 51 - Deformada vertical - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....	83
Figura 52 - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	84
Figura 53 - Malha de elementos finitos da viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	85
Figura 54 - Caminho de equilíbrio - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	86
Figura 55 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> ) - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	86
Figura 56 - Deformada vertical - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	86
Figura 57 - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	87
Figura 58 - Caminho de equilíbrio - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	88
Figura 59 - Deslizamento relativo ( <i>slip</i> ) - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	88
Figura 60 - Deformada vertical - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006) .....	89
Figura 61 - Caminho de Equilíbrio das vigas A e C de Ayyub et al (1990) .....	90
Figura 62 - Deslizamento das vigas A e C de Ayyub et al (1990).....	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cargas Últimas.....	91
--------------------------------	----

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> .....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	16
<b>2.1</b>	<b>Estruturas mistas</b> .....	16
<b>2.2</b>	<b>Vigas mistas de aço e concreto</b> .....	19
<b>2.2.1</b>	<i>Comportamento estrutural da viga mista</i> .....	22
<b>2.3</b>	<b>Interação parcial</b> .....	23
<b>2.4</b>	<b>Protensão</b> .....	25
<b>2.4.1</b>	<i>A Técnica de protensão: protensão externa</i> .....	26
<b>2.4.2</b>	<i>A Técnica de protensão: cabos e perdas de carga</i> .....	27
<b>2.5</b>	<b>Vigas mistas de aço e concreto com protensão externa</b> .....	30
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	36
<b>3.1</b>	<b>Elemento finito de viga mista</b> .....	36
<b>3.1.1</b>	<i>Contribuição da armadura passiva</i> .....	42
<b>3.2</b>	<b>Elemento finito de cabo</b> .....	43
<b>4</b>	<b>MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS</b> .....	54
<b>4.1</b>	<b>Concreto</b> .....	54
<b>4.2</b>	<b>Aço passivo</b> .....	59
<b>4.3</b>	<b>Aço de protensão</b> .....	61
<b>4.4</b>	<b>Conectores de cisalhamento</b> .....	63
<b>5</b>	<b>TRAÇADO DO CAMINHO DE EQUILÍBRIO</b> .....	66
<b>5.1</b>	<b>Método do controle de carga</b> .....	67
<b>5.2</b>	<b>Método do controle de deslocamentos</b> .....	68
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS</b> .....	71
<b>6.1</b>	<b>Vigas ensaiadas por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989)</b> .....	71
<b>6.1.1</b>	<i>Viga bi apoiada (Momento positivo)</i> .....	71
<b>6.1.2</b>	<i>Viga bi apoiada (Momento negativo)</i> .....	74
<b>6.2</b>	<b>Vigas ensaiadas por Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990)</b> .....	77
<b>6.2.1</b>	<i>Viga bi apoiada (Protensão com Traçado Reto)</i> .....	78
<b>6.2.2</b>	<i>Viga bi apoiada (Protensão com Traçado Poligonal)</i> .....	80
<b>6.3</b>	<b>Vigas ensaiadas por Lorenc e Kubica (2006)</b> .....	84
<b>6.3.1</b>	<i>Viga bi apoiada reforçada (Protensão com Traçado Reto)</i> .....	84
<b>6.3.2</b>	<i>Viga bi apoiada reforçada (Protensão com Traçado Poligonal)</i> .....	87
<b>6.4</b>	<b>Vigas sem protensão</b> .....	89
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	92
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	93

## 1 INTRODUÇÃO

Um sistema estrutural misto aço/concreto é caracterizado pela combinação de um perfil metálico e do concreto, de tal maneira que o elemento estrutural misto resultante desta junção aproveite melhor as propriedades mecânicas de cada material, em geral se tem o concreto resistindo bem à compressão e o aço à tração.

No caso de vigas mistas, essa associação ocorre quando a laje de concreto passa a atuar juntamente com a viga metálica por meio de conectores mecânicos, aumentando a rigidez e resistência do sistema, de tal forma que o concreto da laje passe a trabalhar majoritariamente contra os esforços de compressão, e o perfil metálico contra os esforços de tração. Parte da eficiência deste conjunto se dá pelo tipo de interação que ocorre entre ambos os materiais. Malite (1990) afirma que o ganho da resistência da seção composta está diretamente relacionado ao tipo de interação que existe entre a viga e a laje.

São vários os benefícios da utilização de sistemas mistos em estruturas, o seu emprego tem ganhado cada vez mais notoriedade na construção civil no âmbito nacional e mundial, porém o uso deste sistema não é tão recente. Griffis (1994) data que as primeiras obras a utilizarem um sistema estrutural misto surgiram nos Estados Unidos no fim do século XIX e o seu uso se intensificou já no século XX por volta da década de 20. O seu emprego estava atrelado não ao aprimoramento do comportamento estrutural, e sim como uma maneira de proteger o perfil metálico do fogo em situações de incêndio.

Segundo Malite (1990) as estruturas mistas começaram a ser utilizadas no Brasil por volta de 1950, através dos projetos do engenheiro Paulo Fragoso, mais precisamente no sudeste/sul. Obras como o Posto de Automóveis América (1954), Palácio do Comércio (1955), Jockey Club Brasileiro (1956), Edifício da Avenida Central (1957) e o Edifício Santa Cruz (1958) foram algumas das primeiras construções mistas do Brasil.

Por mais que as estruturas mistas tenham sido inseridas no Brasil na década de 50, a primeira norma brasileira que tratou desse tipo de construção só foi criada no ano de 1986, e foi chamada de NBR 8800. Nessa edição a norma tratava apenas de vigas mistas, somente na edição de 2008, tal norma se tornou mais abrangente e começou a abordar temas como pilares mistos e lajes mistas.

As estruturas mistas quando comparadas às estruturas de concreto armado podem apresentar algumas vantagens, tais como: redução do peso total da estrutura e conseqüentemente das cargas na fundação, aumento da produtividade, economizando assim

gastos com mão-de-obra, redução da altura útil e de flechas em vigas, possibilitando maior liberdade aos projetos arquitetônicos, melhor organização do canteiro de obras, entre outros.

É natural na engenharia buscar novas tecnologias e materiais que permitam aos engenheiros ou arquitetos maior liberdade ao conceber seus projetos. Nesse contexto, pode-se citar a utilização de protensão em vigas mistas. Tradicionalmente, a técnica de protensão está associada às estruturas de concreto, e tem como procedimento adicionar cabos de aço tracionados no interior peça. O traçado do cabo de aço é definido de tal maneira que surjam cargas de reação opostas às cargas oriundas dos carregamentos externos, a fim de reduzir os deslocamentos verticais e prevenir o surgimento precoce de fissuras.

Esta técnica é utilizada para melhorar o comportamento estrutural, e vem sendo difundida amplamente em estruturas de concreto, porém seu uso pode ser atrelado a vários tipos de materiais. Vários trabalhos indicam que o uso dos cabos de protensão em vigas mistas é bastante viável e benéfico à peça, podendo melhorar o seu comportamento, tanto na ruptura quanto em serviço. Saadatmanesh *et al.* (1989) afirma que existem quatro principais benefícios obtidos ao protender vigas mistas:

- Comportamento elástico mesmo em situações de carregamento elevado
- Maior capacidade resistente
- Redução da altura útil da viga
- Melhor comportamento em situações de fadiga

A protensão pode ser utilizada inclusive para reforçar vigas metálicas já existentes, em que a probabilidade de ocorrer problemas relacionados à deterioração é mais alta, podem-se citar nesse contexto as pontes e passarelas. A técnica de protensão pode ser utilizada para reforçar estruturas sujeitas a um aumento de sobrecarga.

Os benefícios da protensão aliados ao grande potencial das estruturas mistas resultam em uma alternativa viável e bastante útil para projetos estruturais que necessitam atender a imposições arquitetônicas e construtivas. Sendo assim, é justificável a elaboração de estudos mais aprofundados sobre o tema.

Com o advento dos computadores se tornou possível realizar cálculos difíceis com bastante precisão e rapidez. Vários métodos computacionais vêm possibilitando avaliar com mais confiabilidade o comportamento de estruturas bastante complexas. Dentre estes, pode-se destacar o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF vem sendo bastante empregado atualmente devido às suas diversas vantagens, tais quais permitem ao usuário avaliar os

comportamentos não lineares, físico e geométrico de estruturas, além da interação e deformabilidade entre materiais.

Atualmente a literatura dispõe de poucos trabalhos que abordem a utilização de ferramentas numéricas capazes de simular o comportamento vigas mistas protendidas com interação parcial. Com base nisso, este trabalho busca adaptar um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos, a fim de representar o desempenho estrutural destas vigas, considerando a interação parcial que existe na interface perfil metálico/laje de concreto.

Este trabalho busca contribuir positivamente para o tema proposto, e incentivar o desenvolvimento de novas investigações e pesquisas relacionadas a estruturas mistas. Espera-se também que este trabalho possa auxiliar com destreza futuras investigações experimentais acerca do tema.

## **1.1 Objetivos**

Antes do início deste trabalho, o código em questão já possuía uma formulação implementada desenvolvida por Moreira (2016) e Oliveira (2017). Esta formulação permitia a análise não linear física e geométrica de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa considerando a hipótese de interação total.

Logo, o objetivo principal deste trabalho é dar continuidade ao trabalho desenvolvido pelos autores citados acima, implementando assim, a possibilidade de deslizamento relativo entre os materiais (interação parcial) no código em questão. Como objetivos específicos, os seguintes pontos serão avaliados:

- Os aspectos fundamentais do comportamento estrutural e da utilização de protensão externa em vigas mistas de aço e concreto;
- Traçar o caminho de equilíbrio das vigas comparando os efeitos da interação total e parcial;
- Calcular os deslizamentos relativos entre os materiais;
- Gerar a configuração deformada das vigas;
- Comparar o comportamento estrutural de vigas mistas protendidas e vigas mistas sem protensão;

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão descritas as principais características e particularidades inerentes às estruturas mistas, com ênfase em vigas mistas de aço e concreto, a interação parcial existente entre os materiais e também sobre a protensão. Também será mostrada a utilização da técnica de protensão aplicada às vigas mistas, destacando os principais trabalhos existentes na literatura científica que abordam este tema. Após isso, a formulação do elemento finito de viga mista será apresentada.

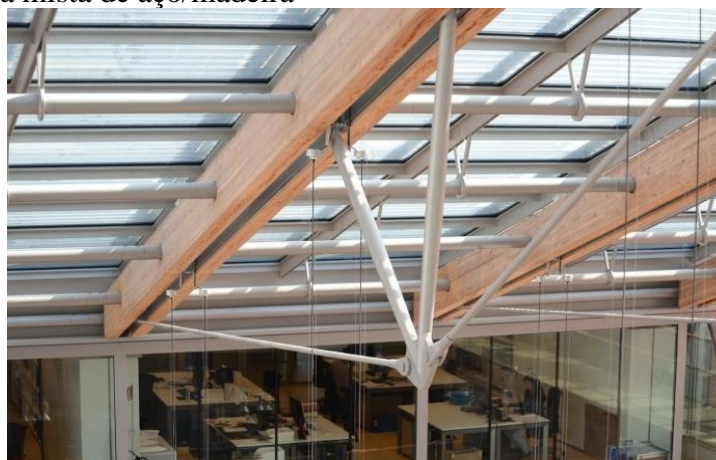
Os materiais utilizados como referência para esta pesquisa que tratam de vigas mistas protendidas são na sua grande maioria de origem estrangeira, já que existem muito poucos trabalhos nacionais sobre este assunto.

### 2.1 Estruturas mistas

Os elementos mistos consistem basicamente na associação de dois ou mais materiais que quando trabalham juntos, podem apresentar melhor comportamento do que quando utilizados isoladamente. É possível obter vários benefícios além das melhorias estruturais, tais quais: melhor desempenho funcional, economia, rapidez e flexibilidade.

A associação de materiais para obtenção de estruturas mistas é diversa, como pode ser visto na Figura 1 e na Figura 2. Porém, por mais que esta técnica possa ser expandida para vários tipos de materiais, a associação do aço com o concreto ainda é a mais utilizada na construção civil.

Figura 1 - Estrutura mista de aço/madeira



Fonte: <http://www.vitruvius.com.br/revistas/read/projetos/13.155/4958>



Figura 2 – Associação concreto/isopor



Fonte: OLIVEIRA (2009)

Fora do Brasil, as estruturas mistas são utilizadas largamente na construção de pontes e edifícios altos, Tao *et al.* (2004) relata que na só na China são catalogados mais de trinta edifícios altos e cerca de duzentas pontes em arco utilizando perfis tubulares preenchidos com concreto.

A utilização de elementos mistos no Brasil ainda não é tão comum, devido basicamente ao tradicionalismo de engenheiros e construtores em relação à cultura do concreto armado.

Como exemplo de ponte em estrutura mista, pode-se mostrar a Beichuan River Bridge (Figura 3), e está localizada na China. A ponte tem 90 metros de vão e foi construída sobre outra ponte já existente. A estrutura principal, em arco treliçado, é formada por tubos metálicos preenchidos com concreto. Análises dinâmicas, numérica e experimental, desta ponte podem ser encontradas no trabalho feito por Zong *et al.* (2003).

Figura 3 – Beichuan River Bridge



Fonte: Zong *et al.* (2003)

A Figura 4 mostra um exemplo de edifício construído em estrutura mista, o Taipei 101. Construído na China, é um dos mais altos prédios do mundo, com cerca de 510 metros de altura e 101 pavimentos. Atualmente é o prédio mais alto do mundo construído em estrutura mista.

Figura 4 – Taipei 101



Fonte: <https://ferreiralapa.wordpress.com>

Os pilares mistos principais utilizam perfis metálicos tubulares com seção retangular preenchidas com concreto de alta resistência (69MPa), com dimensões finais de 3.0 x 2.4 m e com espessura do perfil de 80mm. A Figura 5 mostra um dos pilares mistos utilizados neste edifício.

Figura 5 – Pilar Misto do Taipei 101



Fonte: <https://ferreiralapa.wordpress.com>

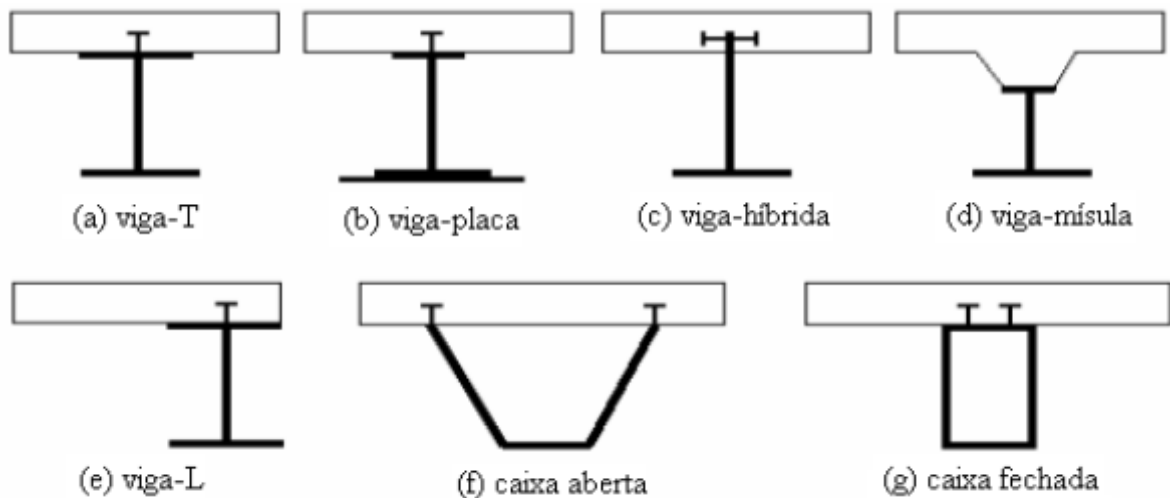
## 2.2 Vigas mistas de aço e concreto

As vigas mistas compostas por aço e concreto são elementos cuja rigidez da laje de concreto é considerada no cálculo da seção transversal. A princípio, as vigas eram projetadas como um elemento único e isolado, com a finalidade de dar suporte à laje. Tal consideração permite explorar de forma mais otimizada as propriedades relacionadas à rigidez e resistência de cada material, podendo assim se tornar uma estrutura mais econômica e eficiente.

Basicamente, as vigas mistas são compostas por perfis metálicos (Laminados, Dobrados ou Soldados) associados às lajes (Maciças, Treliçadas, Alveolares, Steel Deck, etc.) por meio de conectores mecânicos (Stud bolts, Perfis “U”, entre outros).

A Figura 6 mostra diferentes tipos de vigas mistas, onde se percebe o perfil metálico na parte inferior (em sua maioria tracionada) e uma laje de concreto na parte superior (parte comprimida da viga).

Figura 6 – Seções Transversais de Vigas Mistas



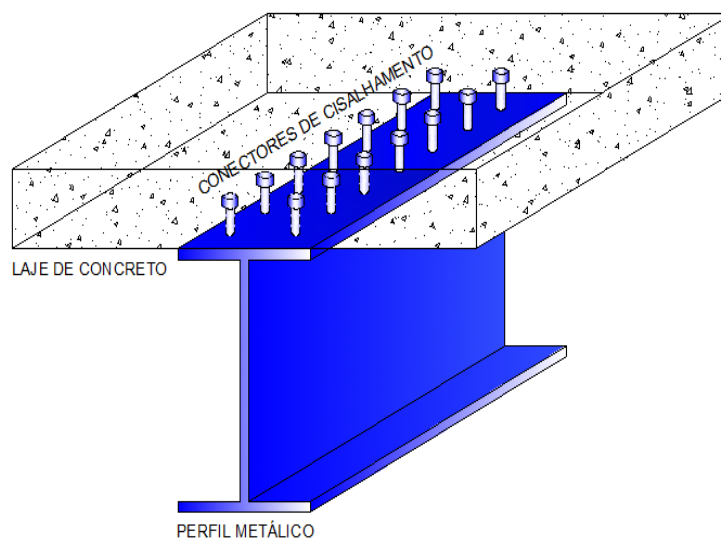
Fonte: Oehlers e Bradford (1995)

Existe uma grande variedade de seções transversais de vigas mistas, porém a mais comum na construção civil é a viga-T mostrada na Figura 6 (a). Além disso, os perfis metálicos podem estar embutidos parcialmente dentro da laje de concreto, como mostrados na Figura 6 (c). Na utilização de vigas mistas aço-concreto, deve-se atentar ao fato do escoramento da estrutura.

Com o concreto da laje atingindo determinada rigidez, a mesa comprimida do perfil é travada pela própria laje, não havendo assim a possibilidade de ocorrer flambagem lateral torsional (FLT). Por outro lado, Queiroz *et al.* (2001) cita que se a rigidez do conjunto na etapa

de execução não for suficiente para resistir às cargas de peso próprio da estrutura, a mesma deve ser escorada de forma a esperar que o concreto ganhe resistência suficiente. Para viabilizar a construção da viga mista de aço e concreto, a mesma deve possuir os seguintes itens apresentados na Figura 7.

Figura 7 – Componentes da viga mista de aço e concreto

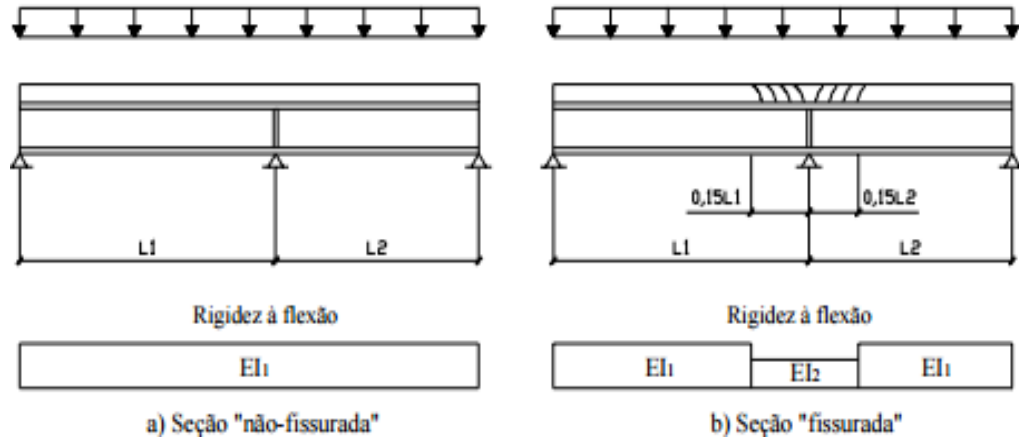


Fonte: Autor (2018)

As vigas mistas podem ser bi apoiadas ou contínuas, porém as bi apoiadas dão maior eficiência ao sistema misto, já que a tração ocorre predominantemente no perfil metálico e a compressão na laje de concreto. Já nas vigas contínuas a situação seria inversa na região dos apoios centrais, neste caso a viga estaria submetida a esforços de tração na laje e de compressão no perfil metálico.

O EUROCODE 4 (1992) aborda os principais aspectos do comportamento estrutural de vigas mistas contínuas. A mesma norma afirma que em uma análise elástica, a viga mista em regiões de momentos negativos, pode apresentar instabilidade e conseqüentemente ocorrência de flambagem da mesa inferior (efeito distorcional), como também pode haver redução da rigidez da viga mista devido ao surgimento de fissuras na laje de concreto. A Figura 8 ilustra esse efeito. Chaves (2009) cita que existem outros fatores que necessitam de atenção quando se dimensiona tais vigas, que são a fluência e a retração do concreto. Ambos os efeitos conduzem a deformações por carregamentos de longa duração maiores que a deformação inicial.

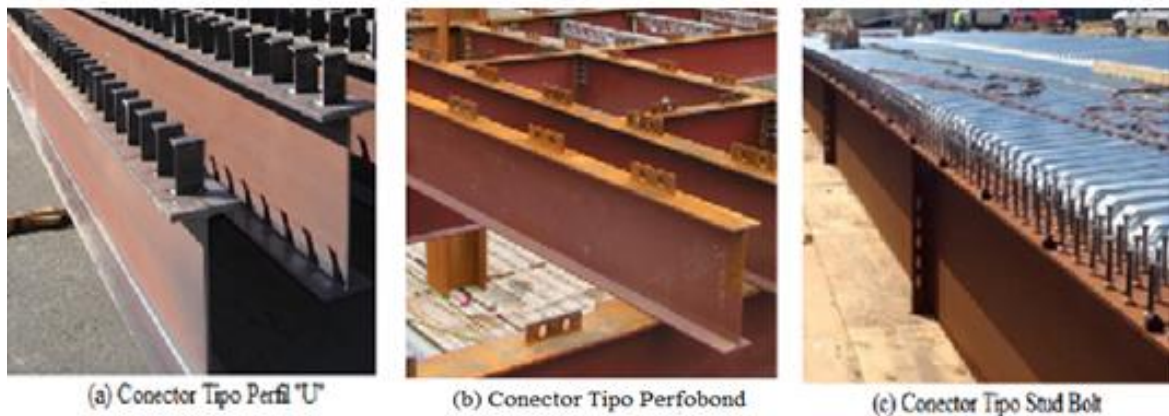
Figura 8 – Rigidez ao longo de uma viga mista contínua



Fonte: Alva (2005)

Grande parte da efetividade da viga mista é influenciada pelo tipo de interação existente entre a laje/perfil, e esta interação está diretamente relacionada com o tipo e a quantidade dos conectores mecânicos. O conector metálico mais comum em estruturas mistas é o *Stud Bolt*, porém o mercado dispõe de outros tipos, como mostrado na Figura 9.

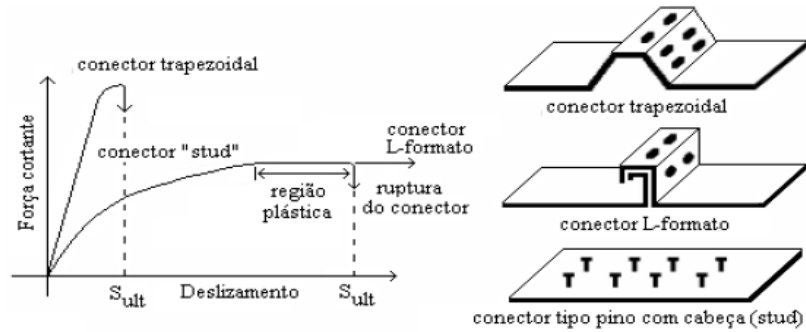
Figura 9 – Tipos de Conectores Mecânicos



Fonte: Adaptado de Souza (2014)

Oehlers e Bradford (1995) citam que além do fato da execução do conector tipo pino com cabeça (*Stud Bolt*) ser fácil, ele fornece um comportamento com patamar plástico à curva força x deslizamento na interface da viga, como mostrado na Figura 10. É este comportamento plástico que permite que a estrutura "avise" quando irá ocorrer ruptura do elemento, além de permitir a redistribuição das tensões.

Figura 10 – Comportamento dos conectores na interface

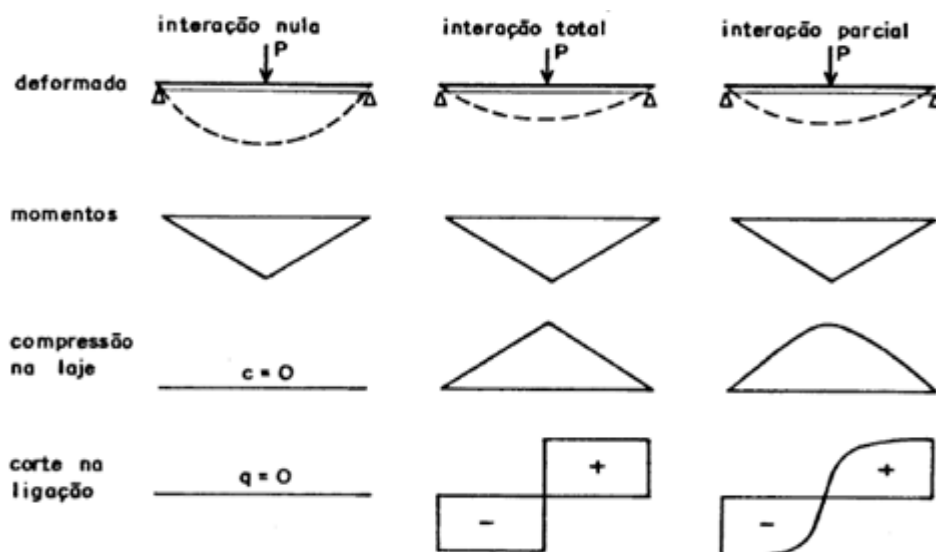


Fonte: Oehlers e Bradford (1995)

### 2.2.1 Comportamento estrutural da viga mista

A análise estrutural de seções mistas sob ação de esforços de flexão pode ser feita a partir de conceitos da Teoria Clássica de Vigas (TCV), admitindo a hipótese de que as seções planas permanecem planas. Malite (1990) afirma que quando não há descontinuidade no diagrama de deformações, ou seja, não ocorre afastamento vertical nem escorregamento longitudinal relativo entre os elementos, pode – se definir este comportamento como interação total. Não havendo interação total, ocorrerá sempre um deslizamento relativo no nível da ligação aço/concreto, ocasionando assim um comportamento definido como interação parcial. A Figura 11 mostra os tipos de interação aço- concreto nas seções mistas.

Figura 11 – Interação aço-concreto no comportamento de seções mistas



Fonte: Adaptado de Malite (1990).

Quando a interface não possui ação de forças restringindo a deformação relativa entre laje de concreto e viga de aço (interface sem conectores, por exemplo) chama-se de interação nula, ou seja, os elementos trabalham de forma independente, cada um resistindo isoladamente a uma parcela dos esforços de flexão.

Pode-se notar também através da Figura 11, que a interação parcial na interface, muda a distribuição de esforços (força cortante e força normal) em relação à interação total, portanto é coerente afirmar que a maneira na qual a conexão entre os materiais é feita, pode afetar diretamente a maneira como os esforços internos surgem na viga.

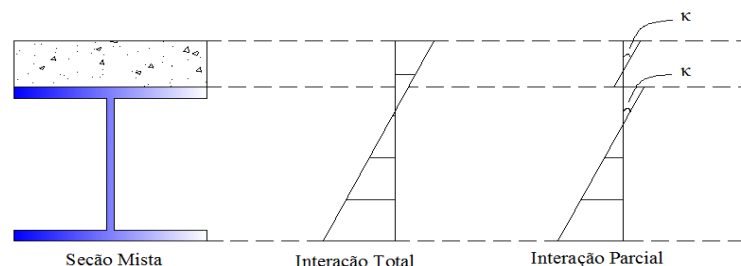
### 2.3 Interação parcial

A interação na interface dos materiais é definida em função da quantidade e do tipo de conector. Os conectores de cisalhamento e os demais meios mecânicos tem a função de absorver os esforços cisalhantes produzidos na interface, impedir por completo ou parcialmente os deslocamentos longitudinais entre os materiais, como também impedir a separação vertical, fenômeno conhecido como “*Uplift*”.

Machado (2012) cita que na prática dificilmente haverá um elemento misto que tenha realmente interação total entre os seus materiais, pois a interação total pode implicar em uma quantidade muito grande de conectores. Logo, o que normalmente acontece é o deslizamento existente ser tão pequeno que não influencie de modo considerável o comportamento do sistema ou mesmo da estrutura, podendo então ser desprezado, dizendo-se então que a interação é total.

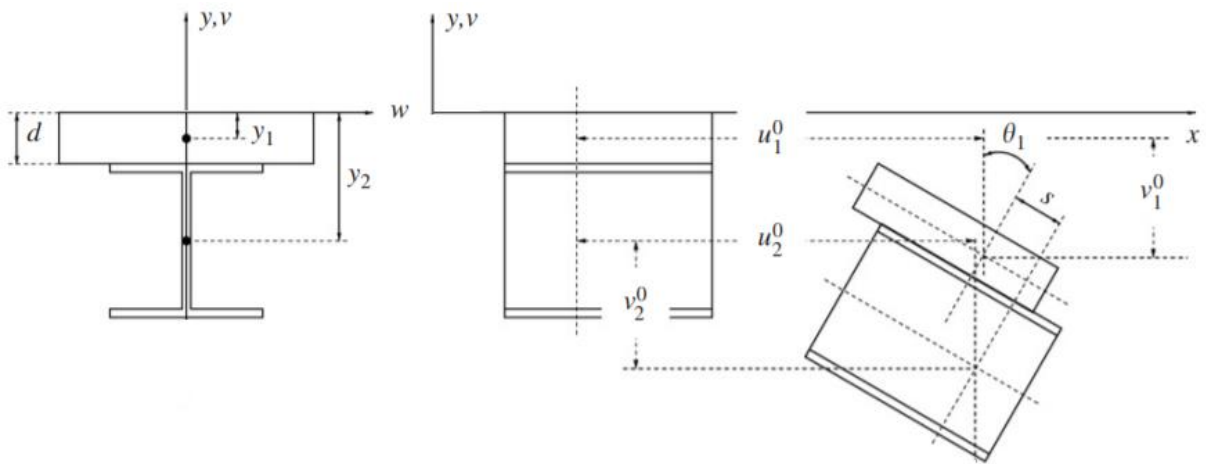
A interação parcial ocorre basicamente quando as forças resistentes longitudinais da interface não são suficientes para suportar a força cortante atuante entre a laje de concreto e o perfil metálico, fazendo assim com que os conectores sejam deformados, produzindo uma descontinuidade no diagrama de deformação da seção mista, como mostrado na Figura 12.

Figura 12 – Diagramas de tensão deformação da seção mista



Partindo da hipótese cinemática utilizada por Newmark *et al.* (1951) pode-se encontrar os valores para o deslocamento relativo na interface dos materiais de uma viga mista de forma relativamente simples, envolvendo algumas relações trigonométricas. A hipótese é baseada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, em que as seções planas permanecem planas e perpendiculares a um eixo de referência após a deformação. O esquema mostrado na Figura 13 apresenta o campo de deslocamentos de uma seção mista considerando a interação parcial.

Figura 13 – Campo de deslocamentos da viga mista



Fonte: Adaptado de Sousa Jr. *et al.* (2010)

Do esquema mostrado acima podemos relacionar a rotação da seção com os deslocamentos horizontais:

$$tg\theta = \frac{[u_1^0(x) - u_2^0(x)] + s(x)}{h} \quad (1)$$

Admitindo pequenas rotações da seção mista, tem-se que  $\cos\theta \approx 1$  e que  $tg\theta \approx \theta$  logo a Equação (1) pode ser reescrita conforme mostra a Equação (2):

$$s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - h\theta \quad (2)$$

A parcela  $s(x)$  representa o deslizamento relativo entre os materiais em função de “x”, onde  $h = y_2 - y_1$ . Por fim, pode-se reescrever a Equação (2) da seguinte maneira:



$$s(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - (y_2 - y_1) \frac{dv^0}{dx} \quad (3)$$

Da Equação (3), pode-se notar que quando se faz  $\theta = \frac{dv^0}{dx}$ , está se considerando a hipótese de Euler-Bernoulli, de tal maneira que  $\theta(x)$  e  $v^0(x)$  sejam variáveis dependentes. Fora isso se pode assumir que as tensões e deformações ao longo da direção  $y$  são desprezíveis ( $\varepsilon_y = \sigma_y = 0$ ).

## 2.4 Protensão

Nas estruturas de concreto, a técnica de protensão é utilizada com o propósito de reduzir ou até mesmo anular os esforços de tração provocados pelas solicitações de utilização da estrutura, ou seja, objetiva melhorar a deficiência a tração, já que a protensão cria tensões de compressão prévias nas regiões onde o concreto seria tracionado (LEONHARDT, 1983).

A primeira tentativa de se protender o concreto, que se tem registro, aconteceu no final do século XIX para construção de lajes e pisos. Porém não se obteve êxito por se usar aços convencionais ao invés de aços de alta resistência. As perdas de protensão devido à retração e à fluência do concreto eram muito grandes quando se utilizava aços convencionais.

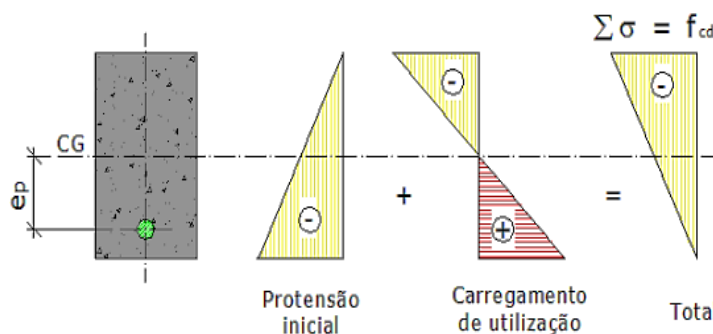
Em 1919, Wettstein utilizou cordas de piano, altamente pré-tracionadas, para a construção de pranchas de concreto de pequena espessura. Esse foi o primeiro registro de aços de alta resistência sob elevadas tensões em concreto protendido. O concreto protendido como material estrutural deve-se, principalmente, aos estudos e obras realizados por Freyssinet, que foi tido como o pai do concreto protendido.

Silva (2005) cita em seu trabalho que existem quatro principais vantagens ao se protender estruturas de concreto:

- Vencer maiores vãos e, conseqüentemente reduzir o número de pilares;
- Elementos de lajes/vigas com menor altura;
- Redução/eliminação de flechas/fissuras;
- Aumento da resistência à punção;

O esquema apresentado na Figura 14 possibilita perceber que o elemento estrutural quando protendido passa a ter seção completamente comprimida, ou seja, as tensões de compressão prévias melhoram a deficiência a tração do concreto, tensões estas provocadas pelas solicitações de carga da estrutura.

Figura 14 – Princípios da protensão em estruturas de concreto



Fonte: Nelsen (2013)

### 2.4.1 A Técnica de protensão: protensão externa

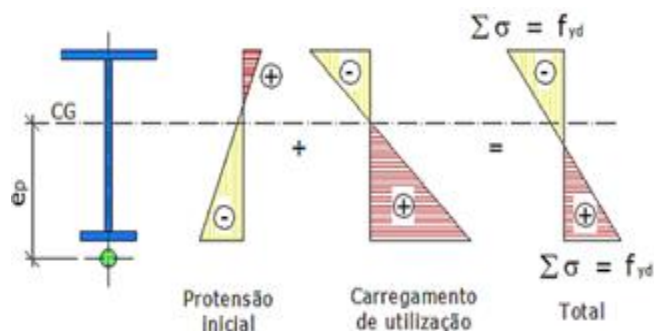
A Protensão externa pode ser utilizada em diversos tipos de materiais, como o concreto, o aço, a madeira ou em estruturas mistas. Quando se trata de vigas metálicas ou mistas é importante o domínio desta técnica. Reis (2003) mostra as principais características da protensão externa:

- Os cabos de protensão são colocados fora da área física da seção transversal da peça;
- A força de protensão é transmitida apenas pelos pontos de ancoragem e na região dos desviadores;
- A aderência entre o cabo de protensão e a estrutura acontece apenas nos pontos de ancoragem e desvio dos cabos;
- Os desviadores devem ser posicionados com alto grau de precisão para reduzir o atrito e evitar danos ao aço de protensão, além de provocarem excentricidades;

Nelsen (2013) cita que nas estruturas metálicas, a protensão externa proporciona um maior aproveitamento da seção na sua capacidade máxima, uma vez que permite atingir tensões máximas admissíveis de projeto nas duas mesas da viga quando solicitada pelos carregamentos externos, ou seja, em uma mesma seção transversal existem tensões de tração e de compressão, obtendo assim economia de material, uma vez que podem ser utilizados perfis mais leves.

A Figura 15 ilustra as tensões na viga no ato da protensão, que corresponde à soma das tensões geradas pela força de protensão com as tensões devidas ao uso da estrutura.

Figura 15 - Princípios da protensão em estruturas de metálicas



Fonte: Nelsen (2013).

O principal material a ser considerado para a técnica de protensão é o aço de alta resistência. Além deste, devem ser observados os diferentes tipos de acessórios, como os dispositivos de ancoragem e desviadores. A seguir serão mostradas algumas características de cada um desses materiais, além da aplicação da protensão e enfatizar sobre as perdas de protensão que podem ocorrer ao aplicar protensão aos perfis metálicos que compõe as vigas mistas.

#### 2.4.2 A Técnica de protensão: cabos e perdas de carga

A técnica de protensão utiliza cabos de aço que podem ser encontrados em forma de fios de aço – carbono, isolados ou em forma de cordoalhas, revestidos de uma bainha de polietileno de alta densidade e costumam ser aproximadamente três vezes mais resistentes do que o aço utilizado em estruturas de concreto armado. Além disso, os cabos de aço devem apresentar boa ductilidade para que não tenham uma ruptura frágil por meios mecânicos ou por deformações por ancoragem.

O cabo de aço mais utilizado na construção civil é a cordoalha de sete fios com 12.7 mm de diâmetro, tendo uma tensão última de aproximadamente 1860MPa. Devido ao processo de trefilação utilizado na produção dos fios de aço, o aço tem sua seção transversal reduzida e sua resistência última aumentada, além disso, ocorre a redução da deformação referente ao limite de elasticidade dos cabos.

No processo conhecido como revenimento, os fios são aquecidos a uma temperatura de 400 C°, a fim de aliviar as tensões internas residuais do processo de trefilação e consequentemente elevar os valores de deformação de escoamento do aço, tornando-os mais dúcteis.

Os cabos de aço podem ser classificados conforme ao processo de revenimento a ele submetido, e estes podem ser classificados como:

- Aço de relaxação normal (RN) ou estabilizado: aço no qual o processo de revenimento é feito sem aplicação de tensão no aço, conferindo uma relaxação máxima de 5 a 8,5%.
- Aço de baixa relaxação (RB) ou aliviado: aço no qual é realizado o processo de estabilização, onde o mesmo é aquecido sob aplicação de tensão, conferindo uma relaxação máxima de 2 a 3%.

A NBR 6118:2014 recomenda que a tensão no cabo de protensão deva ficar limitada a 74% da tensão de ruptura e 82% da tensão correspondente ao escoamento do aço, resultando para o CP 190 RB ( $\varnothing$  12.7 mm) uma carga máxima de aproximadamente 140kN por cordoalha e para o CP 190 RB ( $\varnothing$  15.2 mm) uma carga máxima de aproximadamente 200kN por cordoalha. No caso dos cabos de relaxação normal (CP 190 RN) a tensão no cabo de protensão deva ficar limitada a 74% da tensão de ruptura e 87% da tensão correspondente ao escoamento do aço.

O traçado do cabo é importante para a distribuição dos esforços em vigas mistas com protensão externa, geralmente nesse tipo de estrutura os cabos são encontrados no formato poligonal ou reto. No caso de cabos com traçado poligonal modificado pelos desviadores, procura-se posicionar o cabo tentando acompanhar o desenho do diagrama de momentos fletores que atuam na viga, quando são utilizados cabos de protensão com traçado retilíneo, é possível reduzir o número de desviadores, já que nesse caso os mesmos funcionam apenas para garantir que o cabo acompanhe a deformação da peça. (FERREIRA, 2007).

Outro fator importante a ser considerado ao utilizar a protensão, sendo ela externa ou interna à seção, é a perda da força de protensão nos cabos. Pode-se classificar este fenômeno em dois tipos: perdas imediatas e perdas diferidas no tempo. No caso das perdas imediatas, as mesmas ocorrem durante a aplicação da protensão e na acomodação das ancoragens, subdividindo-se em:

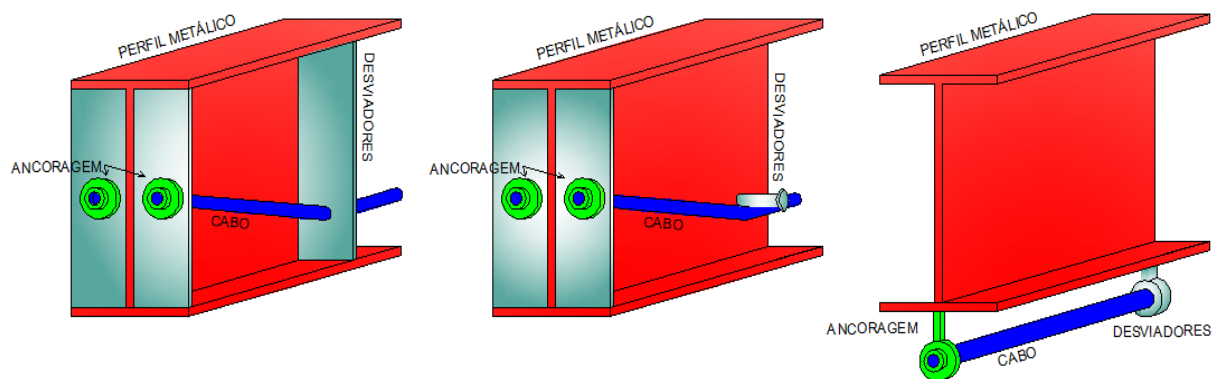
- Perda por atrito da cordoalha: surge nas peças pós-tracionadas, em que a armadura ativa ao ser posta em tensão pelo macaco sofre um alongamento gradativo. As curvaturas do perfil do cabo criam atrito entre a bainha e a cordoalha, e esse atrito provoca uma perda de protensão de maneira que a força de protensão na ancoragem ativa seja  $P$  e na ancoragem passiva somente  $P-dP$ .

- Perda por acomodação da ancoragem: Após a aplicação da protensão, quando a ancoragem ativa for cravada, sempre há uma acomodação dos clavetes, provocando assim um afrouxamento na cordoalha, ou seja, uma perda de protensão denominada perda por acomodação da ancoragem.
- Perda por encurtamento linear do concreto: No caso da utilização em peças de concreto, quando um cabo é protendido, provoca um encurtamento elástico no material, que por sua vez causa um afrouxamento nos cabos próximos já protendidos anteriormente.

No caso das perdas diferidas ao longo do tempo, pode-se afirmar que as mesmas ocorrem ao longo de anos. No caso de peças de concreto a perda de protensão pode estar relacionada aos fenômenos de retração e fluência do material. Em relação aos cabos de protensão, as perdas podem estar relacionadas ao processo de relaxação da cordoalha, onde a armadura de protensão quando estirada e mantida com comprimento constante, acaba sofrendo um alívio de tensão ao longo do tempo. A perda da protensão relacionada a este fenômeno pode ter valores reduzidos utilizando cabos do tipo CP RB, ou seja, cabos com baixa relaxação.

São diferentes os métodos de aplicação de protensão em estruturas metálicas, nesse contexto, os desviadores são utilizados para manter o traçado desejado do cabo e podem ser constituídos por chapas ou pinos soldados no perfil metálico como mostrado na Figura 16, enquanto as ancoragens atuam na estrutura fixando os cabos de protensão tensionados, de forma a manter a carga aplicada pelo macaco hidráulico. Para o sistema de ancoragem são utilizadas cunhas ou porca e rosca, além de enrijecedores para prevenir falhas localizadas na seção de aço.

Figura 16 – Tipos de Desviadores do Cabo de Protensão



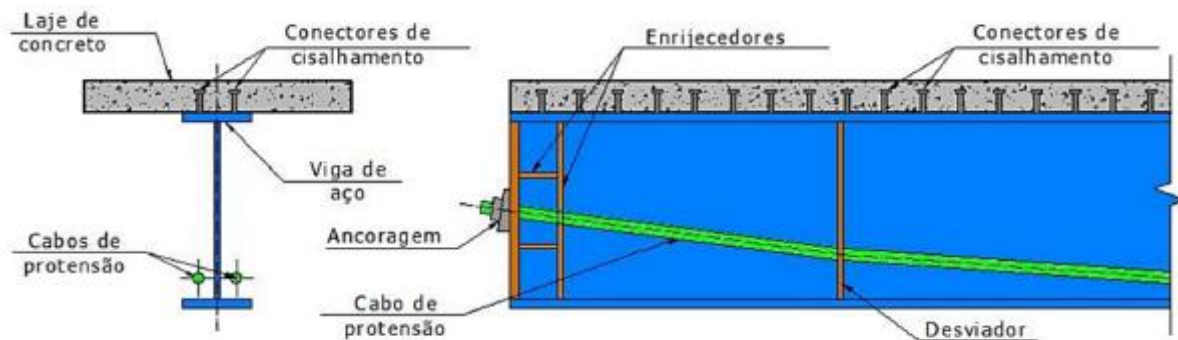
Fonte: Autor (2018)

## 2.5 Vigas mistas de aço e concreto com protensão externa

A técnica de protensão aplicada a vigas mistas de aço/concreto pode conduzir a estruturas que aproveitam melhor as características principais de cada material, sendo importante aprimorar técnicas e teorias que permitam e incentivem sua utilização.

A tipologia da viga mista protendida consiste basicamente na união do perfil metálico com a laje de concreto por meio de conectores mecânicos, onde o perfil metálico é pré-tensionado por cabos de aço. A laje de concreto pode ser moldada *in-loco* ou pré-fabricada. O cabo de aço tem seu traçado definido pelos desviadores e são ancorados em suas extremidades, como mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Esquemática dos componentes da viga mista protendida



Fonte: Nelsen (2013)

Para dar embasamento teórico ao trabalho proposto, a seguir serão mostradas algumas pesquisas desenvolvidas ao longo de anos que abordam a técnica da protensão em vigas mistas. Os artigos utilizados como referência para este trabalho datam do final da década de 80 até os dias atuais. Estes estudos fortificam a viabilidade desta técnica, além de impulsionar o surgimento de novos trabalhos, sendo experimentais ou numéricos, com o objetivo de se obter informações cada vez mais precisas sobre o comportamento estrutural destas peças.

É importante citar, inclusive, que além da busca por entender o comportamento estrutural, pesquisas são desenvolvidas com o intuito de aprimorar as técnicas de projeto e métodos construtivos, facilitando assim o seu emprego, seja ele no reforço de estruturas existentes, na aplicação em projetos de novas edificações ou na aplicação em projetos de pontes.

Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) desenvolveram um trabalho sobre o comportamento estrutural de vigas mistas protendidas que resultou em dois artigos publicados naquele ano, sendo o primeiro analítico e o segundo experimental.

Os autores em seu trabalho experimental ensaiaram duas vigas mistas com protensão externa, a primeira com o cabo de protensão ao longo da mesa superior do perfil, para verificação do comportamento da peça em regiões de momento negativo. A segunda tinha cabos de protensão ao longo da mesa inferior, a fim de avaliar o comportamento da peça em situações de momento positivo.

Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) concluíram que: A adição de cabos de protensão aumentou significativamente a carga de escoamento e a carga última da peça; Quanto mais distantes os cabos estiverem do eixo neutro, maior será o aumento da capacidade da peça, tanto em regiões de momento positivo quanto em regiões de momento negativo; A protensão pode impedir o surgimento precoce de fissuras na laje, garantindo assim um aumento de rigidez e redução da deflexão da peça, além de aumentar a vida útil; Os efeitos benéficos da protensão em regiões de momento negativo podem ser alcançados com uma menor carga nos cabos.

Ayyub, Saadatmanesh e Sohn (1990) estudaram em seu trabalho o comportamento de três vigas mistas com protensão externa submetidas a momento positivo. A metodologia consistiu em testar experimentalmente todas as vigas até a ruptura, além da utilização de modelos analíticos para determinação das tensões nos cabos. Os cabos de protensão em duas das vigas tinham o traçado reto, porém em uma delas foram utilizadas barras protendidas e na outra, cordoalhas. A terceira viga utilizava cabos protendidos, porém o seu traçado era no formato poligonal.

Os autores supracitados, concluíram que: O modelo analítico desenvolvido no trabalho representou bem o comportamento experimental da peça; A protensão pode aumentar significativamente a carga de escoamento e a carga última da peça; A hipótese de interação total não pôde ser justificada, pois houve deslizamentos relativos entre os materiais, resultando em deflexões maiores do que as previstas; Uma maior distância do cabo ao eixo neutro da peça resulta em uma maior carga final, se possível os cabos devem ser locados abaixo da mesa inferior; Um cabo com área da seção transversal maior reduz as deflexões e aumentam a carga última; O uso de cordoalhas ao invés de barras é preferível, já que sua relação força/peso é maior; Cabos com traçado poligonal induzem um comportamento mais dúctil à estrutura em relação aos cabos com o traçado reto, porém estes apresentam uma maior facilidade de execução e menor custo.

Dall'Asta e Dezi (1998) propuseram um modelo analítico em seu trabalho considerando o comportamento não linear físico dos materiais. A hipótese cinemática adotada foi a de Euler-Bernoulli, em que as seções planas permanecem planas e perpendiculares a um eixo de referência após a deformação. Os autores realizaram a solução numérica e expuseram as estratégias adotadas na resolução de equações não lineares, e relatam ainda sobre as tensões, e os deslocamentos relativos à carga aplicada, além disso, estes desenvolvem algumas comparações entre diferentes sequências construtivas, e investigam a influência de alguns parâmetros de projeto diante a capacidade final da estrutura.

Chen (2005) estudou o comportamento estrutural de vigas mistas protendidas submetidas a momentos negativos. A metodologia adotada consistia em avaliar o comportamento até a ruptura de quatro grupos de vigas, classificados pelo EUROCODE 4 como, seções plásticas (Classe 1), seções compactas (Classe 2), seções não compactas (Classe 3) e seções esbeltas (Classe 4). Foram estudadas duas vigas mistas com protensão externa, a fim de investigar o comportamento de flambagem e para a determinação das tensões na região elástica, considerou-se uma distribuição de tensão linear em toda a espessura da seção mista.

O autor concluiu que o incremento de forças internas no cabo de protensão na região de momentos negativos é bastante pequeno, a ponto de ser negligenciáveis no valor da resistência final da viga; Em regiões de momentos negativos, a carga última da viga é influenciada pelo efeito da flambagem local ou pelo efeito da flambagem lateral distorcional, ou uma combinação modal de ambos; Para as vigas com seção compacta, o momento último pode chegar ao momento de plastificação quando perfil de aço está totalmente plastificado; Para uma seção não compacta, o momento último pode ser limitado pelo início do escoamento da mesa comprimida.

Lorenc e Kubica (2006) avaliaram o comportamento de vigas mistas com protensão externa sujeita a momento positivo. Foram estudadas seis vigas mistas protendidas com cabos no traçado reto e poligonal e uma viga mista sem protensão. A análise das vigas foi feita através de experimentos e consistiu em analisar as vigas até a ruptura, com o objetivo de se obter o comportamento estrutural das vigas mistas protendidas e da viga mista não protendida, a curva força - deslizamento na interface dos materiais e por fim a comparação dos resultados entre as peças.

Os autores concluíram que: Não existiu diferença significativa entre o comportamento das vigas com cabos de traçado reto e das vigas com cabos de traçado poligonal; Vigas com o concreto mais resistente apresentaram maior ductilidade do que as vigas com o concreto menos resistente; A laje de concreto falhou localmente nas extremidades das vigas,



mas não teve efeito significativo sobre o comportamento da peça inteira; A capacidade de carga das vigas mistas protendidas foi 25% maior do que em vigas mistas sem protensão; O mecanismo de falha das vigas consistiu no escoamento do perfil na região tracionada, seguido pelo esmagamento do concreto da laje; Os cabos de protensão não romperam em nenhuma das situações; A interação na interface dos materiais tem efeitos significativos no comportamento da peça; Após a ruptura da laje, o perfil metálico sofre flambagem devido à carga de protensão aplicada nos cabos.

Dall'Asta, Ragni e Zona (2006) avaliaram os efeitos das não linearidades física e geométrica de vigas mistas com protensão externa através do método dos elementos finitos. O modelo analítico proposto foi baseado na hipótese de pequenas deformações e rotações moderadas obtidas da teoria não linear exata, como também foi considerado o deslocamento longitudinal relativo (interação parcial). Nesse estudo, uma viga mista contínua protendida externamente foi analisada. O código em elementos finitos implementado pelos autores foi comparado com dados experimentais da literatura.

Chen, Wang e Jia (2009) fizeram um estudo comparativo entre vigas mistas protendidas contínuas. A metodologia consistiu em ensaiar experimentalmente quatro vigas, sendo que duas delas têm dois vãos e outras duas têm três vãos. As duas últimas tinham cabos de protensão apenas nas regiões de momento negativo. Os testes experimentais dos autores mostraram que: A adição dos cabos de protensão aumenta o momento resistente da peça e diminui a deflexão em região de momento positivo; O momento de escoamento na região sujeita a momentos negativos não foi aumentado mesmo com a inserção dos cabos de protensão.

Chen e Jia (2010) avaliaram numericamente a flambagem inelástica de vigas mistas protendidas baseado no método dos elementos finitos, através do *software* comercial ABAQUS. A análise foi feita em vigas submetidas a momentos negativos, considerando imperfeições geométricas iniciais e tensões residuais devido ao processo de fabricação do perfil metálico. Vinte e cinco grupos de vigas foram avaliados, totalizando cerca de duzentas vigas com variação das dimensões da seção transversal. A influência da instabilidade da seção de aço na capacidade resistente de vigas protendidas foi abordada e os resultados encontrados a partir do modelo obtiveram boa concordância com os resultados experimentais.

Nie, Tao, Cai e Li (2011) apresentaram em seu trabalho um modelo analítico-numérico para representar o comportamento de vigas mistas protendidas contínuas. A metodologia consiste em comparar os resultados obtidos através das equações desenvolvidas com os resultados apresentados pelo *software* MSC.Marc e testes experimentais encontrados na literatura. Nos modelos foram consideradas características não lineares física e geométrica.

Após as comparações entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais, os autores concluíram que o método analítico é uma ferramenta conveniente e confiável para um projeto de rotina e também que o modelo de elementos finitos proporciona uma excelente simulação numérica para o comportamento não linear de vigas mistas protendidas contínuas.

Lou, Lopes e Lopes (2015) estudaram a influência dos efeitos de segunda ordem e dos fatores dependentes do tempo em vigas com protensão externa. Os autores apresentaram um modelo numérico desenvolvido para prever o comportamento em longo prazo de peças de concreto protendidas, levando em consideração a interação entre os efeitos de segunda ordem e dos fatores que são dependentes do tempo, como relaxação do cabo de protensão e a fluência do concreto. O modelo foi verificado e validado através de resultados experimentais disponíveis. Verificou-se também que o comportamento em longo prazo do elemento com dois desviadores é muito semelhante à do elemento com armaduras internas não aderentes, indicando que os efeitos de segunda ordem são minimizados pela disposição dos desviadores.

No ano seguinte Lou, Lopes e Lopes (2016) divulgaram outro estudo referente a um modelo baseado no método dos elementos finitos que avalia o comportamento de vigas mistas protendidas externamente, considerando os efeitos não lineares do material e também da geometria além da variação de excentricidade dos cabos de protensão. Desta forma, os autores concluíram que a protensão externa pode melhorar significativamente o comportamento de curta duração de uma viga mista, por outro lado, as respostas de longa duração devido aos efeitos dependentes do tempo para as vigas mistas com e sem protensão externa não apresentaram qualquer diferença significativa.

Os trabalhos apresentados acima representam alguns dos estudos internacionais mais relevantes encontrados, porém à nível nacional ainda existem muito poucos trabalhos acerca do assunto. O único trabalho nacional encontrado foi desenvolvido por Nelsen (2013) em sua dissertação de mestrado da Universidade Federal de São Carlos. A autora apresenta um procedimento de cálculo com o propósito de dimensionar essas estruturas quando solicitadas por um momento fletor positivo, mostrando também os modos de colapso globais da peça. Além disso, o trabalho apresenta um estudo paramétrico referente à influência da variação do nível de protensão e da excentricidade dos cabos, bem como da metodologia construtiva (pré-tração e pós-tração) adotada para a protensão.

Pode-se notar atualmente que a concentração de trabalhos numéricos acerca do tema aumentou consideravelmente em relação ao fim da década de 90, o que mostra que o uso desta metodologia é bastante viável, e a utilização de ferramentas numéricas pode representar

de forma satisfatória o comportamento estrutural de vigas mistas protendidas. É com base nestes aspectos que este trabalho pretende contribuir para o estado da arte.

### 3 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é bastante difundido no meio da engenharia. No caso da análise estrutural este método ganha ainda mais força, por ser capaz de representar estruturas com geometria, material e condições de contorno complexas.

O desenvolvimento do método dos elementos finitos para a solução de problemas de engenharia começou com o advento do computador digital. A essência da solução utilizando método dos elementos finitos de um problema de engenharia consiste na resolução de um conjunto de equações algébricas que governam o problema. (BATHE, 1996).

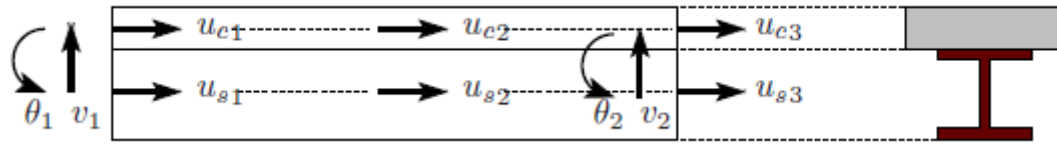
Explanando de forma resumida, o MEF consiste em dividir o domínio do problema em subdomínios de geometria simples (elementos finitos), utilizando funções para interpolar os deslocamentos no interior do elemento a partir dos valores dos deslocamentos nodais. Após isso se deve obter e resolver as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos nodais, possibilitando assim o cálculo das respostas (deformações a partir do campo de deslocamentos e tensões a partir das deformações) nos nós e no interior dos elementos. Nos próximos dois tópicos serão apresentadas as formulações do elemento finito de viga mista e do elemento finito de cabo.

#### 3.1 Elemento finito de viga mista

A formulação do elemento finito de viga mista feita para a análise deste trabalho é baseada no elemento finito de pórtico plano. Considerou-se o modelo de barras submetidas à flexão, os efeitos axiais devidos aos esforços normais à seção transversal, como também o deslizamento relativo entre os materiais (interação parcial). A formulação deste elemento será desenvolvida a partir da hipótese cinemática apresentada na Figura 13 por Newmark *et al* (1951). Os autores se basearam na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, usualmente empregada em implementações computacionais na Engenharia Civil. A seguir serão mostradas as formulações.

A interação parcial será considerada apenas na direção horizontal, enquanto na direção vertical será considerada a interação total, ou seja, não ocorrerá o fenômeno de *Uplift*. Na Figura 18 são apresentados os graus de liberdade do elemento finito de viga mista, onde  $u_{ij}$ ,  $v_i$  e  $\theta_i$  são os deslocamentos nodais do elemento finito (deslocamentos axiais, deslocamentos verticais e rotações, respectivamente).

Figura 18 – Graus de liberdade do elemento finito



Fonte: Autor (2018).

De acordo com a hipótese de Bernoulli e considerando rotações moderadas da seção, os valores dos deslocamentos  $v$ ,  $u_1$  e  $u_2$  podem ser matematicamente expressos como apresentados nas Equações (4), (5) e (6) respectivamente. O sobrescrito 0 denota valores medidos a partir de um eixo de referência, o valor subscrito (1) consiste na representação do aço, e o valor subscrito (2) consiste na representação do concreto.

$$v(x, y) = v^0(x) \quad (4)$$

$$u_1(x, y) = u_1^0(x) - (y - y_1) \frac{dv^0(x)}{dx} \quad (5)$$

$$u_2(x, y) = u_2^0(x) - (y - y_2) \frac{dv^0(x)}{dx} \quad (6)$$

Considerando a formulação Lagrangeana total, tem-se que as únicas deformações na viga são as deformações axiais de Green-Lagrange. É válido frisar que a principal vantagem da deformação de Green-Lagrange é que ela é mais conveniente para análise não linear geométrica de sólidos, levando a expressões mais simples que as outras medidas de deformação. Desta forma, a deformação de Green-Lagrange é largamente utilizada na formulação de elementos finitos para análise não linear geométrica. Nesse contexto, as deformações axiais dos materiais podem ser calculadas utilizando as Equações (7) e (8) apresentadas a seguir.

$$\varepsilon_{x1} = u_{1,x}^0 - (y - y_1)v_{,xx}^0 + \frac{(v_{,x}^0)^2}{2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{x2} = u_{2,x}^0 - (y - y_1)v_{,xx}^0 + \frac{(v_{,x}^0)^2}{2} \quad (8)$$

As Equações (7) e (8) ainda podem ser escritas em termos da deformação de membrana e da curvatura.

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_1^0 - (y - y_1)\kappa = \begin{Bmatrix} 1 & -(y - y_1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{x2} = \varepsilon_2^0 - (y - y_2)\kappa = \begin{Bmatrix} 1 & -(y - y_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (10)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais será utilizado para a formulação do elemento finito de viga mista. Sousa Jr. *et al* (2010) cita que o trabalho virtual interno de um elemento isolado de comprimento  $l$ , pode ser definido a partir das somas dos trabalhos internos dos dois materiais e do deslizamento relativo entre as camadas. A Equação (11) é descrita como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \left( \sum_{\alpha=1,2} \int_{A_\alpha} \delta \varepsilon_{x\alpha} \sigma_{x\alpha} dA_{x\alpha} + \delta s S \right) dx \quad (11)$$

Já o trabalho virtual externo é obtido a partir da contribuição das cargas atuantes na superfície. A equação que define o trabalho externo é apresentada em (12). Os termos  $p_x$  e  $p_y$  representam a força por unidade de volume e os termos  $t_x$  e  $t_y$  representam as forças por unidade de área:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \left( \sum_{\alpha=1,2} \delta u_\alpha p_{x\alpha} + p_y \delta v \right) dV + \int_\Omega \left( \delta u_\alpha t_{x\alpha} + t_y \delta v \right) d\Omega \quad (12)$$

Igualando o trabalho virtual interno ao trabalho virtual externo, pode-se obter uma equivalência da forma fraca das equações de equilíbrio, porém devem-se assumir deslocamentos e deformações arbitrárias que sejam compatíveis. A obtenção da forma fraca do problema é importante, já que a forma forte é definida por equações diferenciais que podem não ter solução. O incremento das deformações axiais pode ser descritos como mostra a Equação (13):

$$\delta \varepsilon_\alpha = \delta u_{\alpha,x}^0 - (y - y_\alpha) \delta v_{,xx}^0 + \frac{\delta (v_{,x}^0)^2}{2} \quad (13)$$

As definições de força normal e de momento são apresentadas nas Equações (14) e (15) respectivamente.

$$N_{\alpha} = \int_{A_{\alpha}} \sigma_{x\alpha} dA_{\alpha} \quad (14)$$

$$M_{\alpha} = - \int_{A_{\alpha}} \sigma_{x\alpha} (y - y_{\alpha}) dA_{\alpha} \quad (15)$$

Substituindo a Equação (13) em (11) e fazendo as considerações apresentadas em (14) e (15), pode-se encontrar a Equação (16), que descreve o incremento de trabalho na forma matricial.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (16)$$

O item (17) mostra os termos da matriz  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  e o (18) os termos do vetor  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad \kappa \quad s \} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ N_1 \quad N_2 \quad M \quad S \} \quad (18)$$

O vetor do incremento dos deslocamentos pode ser definido em (19):

$$\delta \mathbf{u}^T = \{ \delta u_1^0 \quad \delta u_2^0 \quad \delta v^0 \quad \delta s \} \quad (19)$$

O incremento das deformações generalizadas é mostrado em (20):

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\partial} \delta \mathbf{u} \quad (20)$$

Expandindo (20), se chega em (21):

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\partial}} \delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & v_{,x}^0 \partial_x \\ 0 & \partial_x & v_{,x}^0 \partial_x \\ 0 & 0 & -\partial_{xx} \\ -1 & 1 & -h \partial_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_1^0 \\ \delta \mathbf{u}_2^0 \\ \delta \mathbf{v}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_{1,x}^0 + v_{,x}^0 \delta \mathbf{v}_{,x}^0 \\ \delta \mathbf{u}_{1,x}^0 + v_{,x}^0 \delta \mathbf{v}_{,x}^0 \\ \delta \mathbf{v}_{,xx}^0 \\ \delta \mathbf{u}_2^0 - \delta \mathbf{u}_1^0 + h \delta \mathbf{v}_{,x}^0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

No caso dos elementos de viga em que são considerados os deslizamentos entre camadas, a escolha das funções de interpolação tem suma importância. Diversos autores vêm debatendo sobre o tema ao longo dos anos, Dall'Asta e Zona (2004) afirma que na expressão que envolve o deslizamento, mostrada na Equação (3), os termos polinomiais de  $u_\alpha$  e de  $v^0$  podem ter grau diferente, causando assim problemas de *locking*. O vetor que descreve os graus de liberdade é mostrado em (22).

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{u}_1^0 \quad \mathbf{u}_2^0 \quad \mathbf{v}] \quad (22)$$

A matriz de interpolação é mostrada em (23).

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_u^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_v^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

A matriz  $\mathbf{N}_u^T$  representa os polinômios de Lagrange e a matriz  $\mathbf{N}_v^T$ , os polinômios de Hermite. Utilizando a matriz de interpolação na Equação (20), se chega em (24).

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\partial}} \mathbf{N} \delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \quad (24)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  transforma deslocamentos em deformações, e é apresentada em (25).

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^T & \mathbf{0} & \mathbf{v}^T \mathbf{N}_{v,x} \mathbf{N}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{u,x}^T & \mathbf{v}^T \mathbf{N}_{v,x} \mathbf{N}_{v,x}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_{v,xx}^T \\ -\mathbf{N}_u^T & \mathbf{N}_u^T & -h \mathbf{N}_{v,x}^T \end{bmatrix} \quad (25)$$



O vetor de forças internas  $\mathbf{g}$  pode ser expresso na forma apresentada na Equação (26).

$$\mathbf{g} = \int_0^l \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (26)$$

Na análise de estruturas reticuladas é mais cômodo trabalhar com esforços internos (tensões generalizadas), logo o vetor das tensões generalizadas pode ser representado como mostra (27):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{A_1} \sigma_x dA_1 \\ \int_{A_2} \sigma_x dA_2 \\ \int_{A_1} -(y - y_1) \sigma_x dA_1 + \int_{A_2} -(y - y_2) \sigma_x dA_2 \\ K_S \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz de rigidez tangente é obtida derivando o vetor das forças internas  $\mathbf{g}$  em relação ao vetor dos deslocamentos  $\mathbf{d}$ , como mostrado em (28). O primeiro termo da equação resulta na matriz de rigidez geométrica, e o segundo termo, na matriz de rigidez material.

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} = \int_0^l \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} dx + \int_0^l \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} dx \quad (28)$$

O segundo termo da integral,  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}}$ , pode ser escrito como mostrado em (29).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{CB} \quad (29)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é definida como matriz constitutiva tangente, apresentada em (30). Integrações numéricas como a de Gauss, Gauss-Lobato bem como o método das fatias, também conhecido como regra do ponto médio, foram utilizadas neste trabalho.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \int_{A_1} E_T \cdot dA_1 & 0 & - \int_{A_1} E_T (y - y_1) dA_1 & 0 \\ 0 & \int_{A_2} E_T \cdot dA_2 & - \int_{A_2} E_T (y - y_2) dA_2 & 0 \\ - \int_{A_1} E_T (y - y_1) dA_1 & - \int_{A_2} E_T (y - y_2) dA_2 & \int_{A_1} E_T (y - y_1)^2 dA_1 + \int_{A_2} E_T (y - y_2)^2 dA_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dS}{ds} \end{bmatrix} \quad (30)$$

O primeiro termo da integral pode ser reescrito como mostrado em (31).

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} \right|_{\boldsymbol{\sigma}=\text{cte}} = \frac{\partial [\bar{\mathbf{B}}_1 N_1 + \bar{\mathbf{B}}_2 N_2 + \bar{\mathbf{B}}_3 (M_1 + M_2) + \bar{\mathbf{B}}_4 S]}{\partial \mathbf{d}} \quad (31)$$

Os termos  $\bar{\mathbf{B}}_i$  são transpostos da inésima linha da matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ . Como apenas os dois primeiros termos  $\bar{\mathbf{B}}_1$  e  $\bar{\mathbf{B}}_2$  são dependentes de  $\mathbf{d}$ , a Equação (32) pode ser reescrita como mostrado em (31).

$$\int_0^l \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} dx = \int_0^l \mathbf{B}_{\text{NL}} (N_1 + N_2) dx \quad (32)$$

Onde a matriz  $\mathbf{B}_{\text{NL}}$  pode ser vista em (33).

$$\mathbf{B}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{\mathbf{v},\mathbf{x}} \mathbf{N}_{\mathbf{v},\mathbf{x}}^T \end{bmatrix} \quad (33)$$

### 3.1.1 Contribuição da armadura passiva

A consideração do aço da armadura passiva segue o modelo adotado por Fafitis (2001), onde cada barra é considerada um ponto discreto com sua respectiva área, coordenadas e tensão, correspondente ao centroide da armadura (MOREIRA, 2016). Para evitar somar a contribuição da resistência do concreto com a contribuição da resistência do aço passivo, deve-

se subtrair a área de concreto correspondente a área da barra de aço, conforme as Equações (34) e (35):

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (34)$$

$$M_s = \sum_{j=1}^{N_b} -y_{sj} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (35)$$

Onde  $N_b$  é o número de barras da seção transversal,  $A_{sj}$  é a área de cada barra,  $y_{sj}$  é a ordenada de cada barra em relação ao sistema de eixos global,  $\sigma_s$  é a tensão na armadura de aço passiva e  $\sigma_c$  é a tensão atuante no concreto. De forma semelhante os termos da matriz constitutiva tangente também são adicionados da contribuição do aço passivo, como mostra as Equações (36), (37) e (38):

$$EA_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} (E_{Ts} - E_{Tc}) \quad (36)$$

$$ES_s = \sum_{j=1}^{N_b} -y_{sj} A_{sj} (E_{Ts} - E_{Tc}) \quad (37)$$

$$EI_s = \sum_{j=1}^{N_b} y_{sj}^2 A_{sj} (E_{Ts} - E_{Tc}) \quad (38)$$

Por fim, basta somar os termos calculados referentes à contribuição do aço passivo com os termos correspondentes à parcela do concreto, tanto na matriz constitutiva tangente quanto no vetor de tensões generalizadas.

### 3.2 Elemento finito de cabo

Neste trabalho será utilizado o elemento finito de cabo de protensão abordado por Moreira (2016). O elemento finito de cabo, segundo o autor foi modelado tendo os mesmos graus de liberdade de um elemento finito de treliça, além disso, a formulação foi baseada no campo de deslocamentos da Teoria Clássica de Vigas.

Algumas premissas foram utilizadas por Moreira (2016) para formulação do elemento finito de cabo. O modelo proposto considera que a protensão é não aderente, ou seja, o atrito entre os desviadores e o aço de protensão é nulo, pois a graxa existente entre a bainha e a cordoalha reduz significativamente a perda de protensão ao longo do cabo, tornando a deformação constante; as coordenadas do elemento de cabo não representam coordenadas do aço de protensão, visto que este desliza em relação à viga, mas sim representam as coordenadas da bainha.

Além disso, existe apenas a compatibilidade de deslocamentos nas extremidades da viga ou em pontos intermediários de ancoragem. Estes deslocamentos são utilizados para calcular a variação do comprimento total do cabo, e assim calcular a deformação no aço de protensão. Além de Moreira (2016), diversos autores abordam a utilização de elementos finitos de cabo em seus trabalhos.

Barbieri (2003) desenvolveu um modelo de elementos finitos de pórticos planos para simulação de estruturas de concreto protendido aderente e não aderente. A armadura de protensão aderente é somada à rigidez da seção, e assim contribuem na matriz de rigidez do elemento, já a armadura de protensão não aderente é considerada como uma componente separada que atua sobre a estrutura e não são consideradas na matriz de rigidez.

Lou et al (2006) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano para análise de vigas de concreto com protensão externa, onde a protensão é considerada como carga equivalente externa, sendo a deformação no cabo é constante e calculada a partir dos deslocamentos calculados a cada iteração.

Zona e Dall'Asta (2008) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano para análise de vigas de concreto com protensão externa, onde a protensão é considerada como um elemento resistente, que contribui na matriz de rigidez do elemento. Esse modelo é semelhante ao apresentado nesse trabalho.

Lou et al (2013) apresenta um modelo de elementos finitos de pórtico plano semelhante ao desenvolvido por Lou et al (2006), no entanto para simulação vigas de concreto com protensão interna não aderente, a partir da discretização do cabo em trechos retos, em cada elemento de concreto.

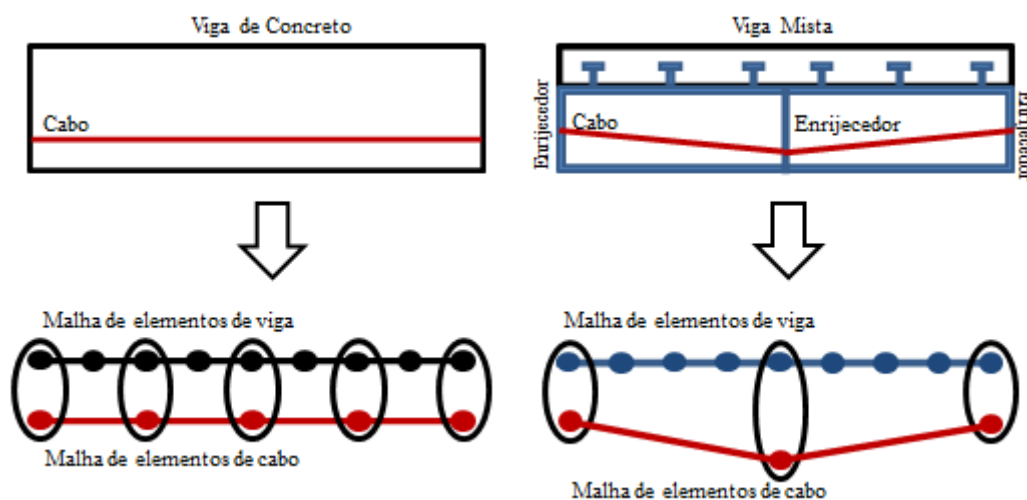
Quando se trata de vigas mistas protendidas externamente, a associação entre o elemento finito cabo de protensão e o elemento finito viga mista tem suas particularidades. Em vigas de concreto protendidas, o cabo está ancorado à viga de forma contínua, em suas extremidades e ao longo de todo o comprimento, neste caso a quantidade de elementos finitos

de cabo é limitada apenas pela quantidade de elementos de viga, basta que os nós de ambas as malhas sejam coincidentes.

No caso de vigas mistas protendidas, o cabo está ancorado nos enrijecedores das extremidades da viga e nas regiões onde existem enrijecedores/desviadores ao longo do vão. Neste caso é convencional que a quantidade de nós da malha de elementos finitos de cabo seja igual à quantidade de enrijecedores/desviadores existentes no perfil metálico.

O ideal é que as malhas de elementos de viga e de cabo sejam definidas de tal forma que as coordenadas dos enrijecedores/desviadores coincidam com a coordenada de algum nó da malha de elementos finitos de viga e de algum nó da malha de elementos de cabo. Essa condição é necessária para existir interação entre os dois elementos finitos, em outras palavras, os termos do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente do elemento de cabo devem ser transferidos para as posições corretas do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente do elemento viga. A Figura 19 ilustra um esquema de malha adequado.

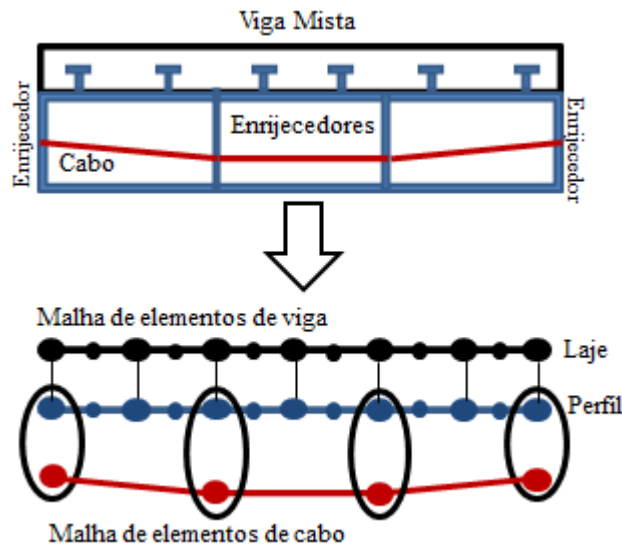
Figura 19– Esquema de malha elementos de vigas de concreto e vigas mistas protendidas



Fonte: Autor (2018).

Como mostrado na Figura 18, o elemento finito de viga mista sob interação parcial utilizado neste trabalho tem dois eixos. Neste caso, existe outra condição além das já mostradas para vincular os elementos de cabo aos elementos de viga. Os nós da malha de elementos finitos de cabo devem estar acoplados aos nós da malha de elementos de viga referentes ao perfil metálico. A Figura 20 ilustra essa condição.

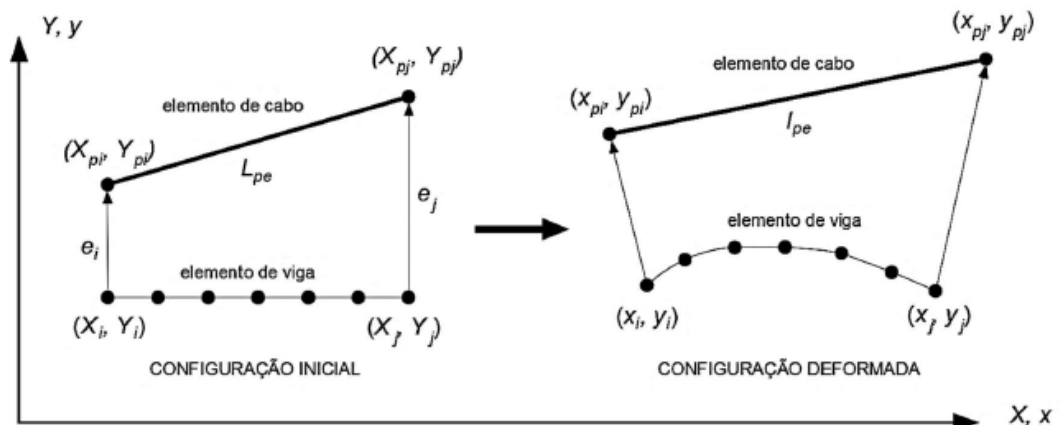
Figura 20– Malha de elementos finitos de vigas mistas protendidas sob interação parcial



Fonte: Autor (2018).

Oliveira (2017) afirma que as coordenadas finais de cada segmento do cabo de protensão nas seções do desviador, não correspondem ao mesmo ponto material, que desliza em relação à seção da viga. Estas coordenadas são então empregadas para avaliar a variação do comprimento do cabo e subsequentemente as suas deformações. A Figura 21 mostra a hipótese cinemática utilizada para relacionar os deslocamentos dos nós do cabo com os deslocamentos dos nós da viga.

Figura 21 - Elemento finito de viga e de cabo antes e após a deformação



Fonte: OLIVEIRA (2017)

Para a formulação do elemento finito de cabo, Moreira (2016) utilizou o campo de deslocamentos da Teoria Clássica de Vigas (TCV), utilizado anteriormente na formulação do

elemento finito de viga mista. Substituindo os termos das coordenadas do elemento de cabo nas equações do campo de deslocamentos da TCV, tem-se:

$$u_{pi} = u_i - e_i \cdot \theta_i \quad (39)$$

$$v_{pi} = v_i \quad (40)$$

$$u_{pj} = u_j - e_j \cdot \theta_j \quad (41)$$

$$v_{pj} = v_j \quad (42)$$

Os deslocamentos nodais são representados pelas letras  $u$  e  $v$ , o subscrito  $p$  representa os deslocamentos do cabo, o termo  $e$  representa as excentricidades do cabo de protensão em relação a um ponto de referencia da viga, por fim  $\theta$  representa a rotação da seção. As equações acima podem ser representadas de forma matricial, tal como mostrado em (43):

$$\bar{\mathbf{u}}_{pe} = \mathbf{T}_e \cdot \bar{\mathbf{u}}_e \quad (43)$$

O termo  $\mathbf{T}_e$  representa a matriz de transformação que relaciona os deslocamentos nodais da viga com os deslocamentos nodais do cabo,  $\mathbf{u}_e$  é o vetor de deslocamentos nodais da viga e  $\mathbf{u}_{pe}$  é o vetor de deslocamentos nodais do cabo. A confecção da matriz de transformação  $\mathbf{T}_e$  depende do endereçamento e da quantidade de deslocabilidades de um determinado elemento finito de viga. No caso do elemento finito de viga mista com interação parcial apresentado neste trabalho, os deslocamentos finais do elemento de cabo dependem dos deslocamentos nodais do elemento de viga associado, logo a matriz de transformação pode ser vista em (44):

$$\begin{bmatrix} u_{pi} \\ v_{pi} \\ u_{pj} \\ v_{pj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -e_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Nota-se que as condições mostradas na Figura 20 são cumpridas, pois nota-se que os deslocamentos dos nós do elemento de cabo estão acoplados aos deslocamentos dos nós referentes ao perfil metálico do elemento de viga mista com interação parcial. Os deslocamentos globais da malha são relacionados aos deslocamentos locais de um elemento de acordo com a Equação (45):

$$\bar{\mathbf{u}}_e = \mathbf{L}_e \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (45)$$

A matriz  $\mathbf{L}_e$  é a matriz de incidência cinemática e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos globais. De posse da deformação do aço de protensão é possível calcular o trabalho virtual interno, o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do cabo. Assim, toda a formulação do elemento finito do cabo de protensão pode ser aprofundada através da pesquisa realizada por Moreira (2016), na qual permite a análise de vigas de concreto com protensão interna e externa. O trabalho virtual interno realizado pelo cabo de protensão é assumido como apresentado na Equação (46):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon_p \sigma_p dV \quad (46)$$

Como a tensão e deformação foram assumidas como constantes ao longo do cabo, os termos que as representam podem ser retirados da integral, como ilustrado em (47):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon_p \sigma_p dV = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p dAdL = \delta \varepsilon_p \sigma_p \int_{L_p} \int_{A_p} dAdL \quad (47)$$

Como a área do cabo é considerada constante, a equação (47) resulta em (48):

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \varepsilon_p \sigma_p A_p L_p = \delta \varepsilon_p F_p L_p \quad (48)$$

Ou seja, o trabalho realizado pelo cabo de protensão é dependente da variação da deformação do cabo ( $\delta \varepsilon_p$ ), da força de protensão ( $F_p$ ) e do comprimento inicial do cabo ( $L_p$ ). A deformação no cabo pode ser encontrada utilizando a equação (49):



$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta\varepsilon_p \quad (49)$$

A deformação no cabo é definida pela soma da deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) e do incremento de deformação no cabo ( $\Delta\varepsilon_p$ ). A deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) é a deformação que seria teoricamente encontrada no cabo após a aplicação da protensão, caso a força de protensão não fosse transmitida à viga, situação verificada na pré-tração, mas que é utilizada como modelo para aplicação da protensão no caso de peças pós-tracionadas. (MOREIRA, 2016).

A deformação no cabo pode ser encontrada utilizando os conceitos de deformação de engenharia, assim como mostrado em (50):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{\sum_{e=1}^{n_p} (l_{pe} - L_{pe})}{\sum_{e=1}^{n_p} L_{pe}} \quad (50)$$

Os termos  $l_{pe}$  e  $L_{pe}$  são respectivamente os comprimentos deformado e inicial de um elemento de cabo,  $n_p$  é a quantidade de elementos de cabo. O comprimento total, deformado e inicial do cabo, é definido como o somatório dos comprimentos deformado e inicial de cada elemento. A variação do comprimento final de um elemento de cabo é função das coordenadas finais e iniciais dos nós do elemento de cabo. A sequência de cálculo é mostrada a seguir:

$$l_{pe}^2 = (x_{pj} - x_{pi})^2 + (y_{pj} - y_{pi})^2 \quad (51)$$

$$\delta l_{pe} = \frac{(x_{pj} - x_{pi})}{l_{pe}} (\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + \frac{(y_{pj} - y_{pi})}{l_{pe}} (\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (52)$$

$$\delta l_{pe} = \cos \beta (\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + \sin \beta (\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (53)$$

O termo  $\beta$  é definido como o ângulo final formado pelo elemento de cabo com o eixo horizontal de referência. As coordenadas finais dos nós dos elementos finitos de cabo variam em função dos deslocamentos nodais. Matricialmente isto pode ser representado em (54):

$$\delta l_{pe} = \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\text{sen}\beta & \cos\beta & \text{sen}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{pi} \\ \delta v_{pi} \\ \delta u_{pj} \\ \delta v_{pj} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_e^T \delta \mathbf{u}_{pe} \quad (54)$$

Onde  $\delta \mathbf{u}_{pe}$  é a variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo. Utilizando a equação (55), chega-se na expressão que calcula a variação do comprimento final do cabo em função dos deslocamentos da viga:

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \bar{\mathbf{u}}_e \quad (55)$$

A variação da deformação no cabo pode ser escrita em função da variação do comprimento final e do comprimento inicial do cabo:

$$\delta \varepsilon_p = \frac{\delta l_p}{L_p} \quad (56)$$

Rearranjando o incremento de trabalho, tem-se:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta l_p F_p = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e F_p \quad (57)$$

A força interna do elemento finito de cabo pode ser expressa em (58):

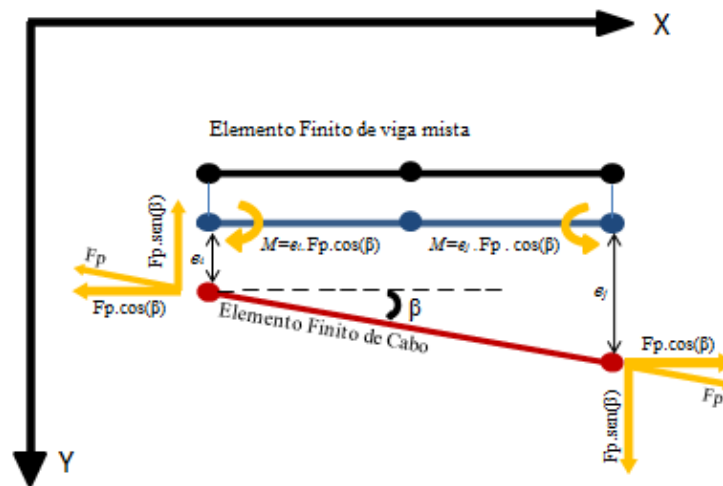
$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e F_p \quad (58)$$

Expandindo os termos de (58), pode-se ter uma interpretação matricial da contribuição do vetor do elemento finito de cabo quando transferidas para o elemento finito de viga mista com interação parcial:

$$\mathbf{g}_{pe} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -e_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \end{bmatrix} F_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_p \cos\beta \\ -F_p \text{sen}\beta \\ e_i F_p \cos\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_p \cos\beta \\ F_p \text{sen}\beta \\ -e_j F_p \cos\beta \end{bmatrix} \quad (59)$$

De forma ilustrativa, as forças internas do elemento de cabo são apresentadas na Figura 22. Fica claro que as parcelas referentes ao momento e as forças são dependentes da inclinação (traçado) do cabo. Em cabos com traçado reto, os termos que multiplicam o  $\text{sen}(\beta)$  não contribuem para o vetor de forças internas da viga mista.

Figura 22 – Ilustração da contribuição do elemento de cabo



Fonte: Autor (2018).

A metodologia utilizada para formulação do elemento finito de cabo é semelhante à ideia de força equivalente de protensão, no entanto, nesse modelo a força é atualizada a cada iteração com o incremento de deslocamentos na viga e a matriz de rigidez do elemento é considerada, o que torna a formulação consistente. Vale ressaltar que, apesar das forças serem atualizadas a partir dos deslocamentos em cada passo, a excentricidade da parcela do momento equivalente é constante. (MOREIRA, 2016)

A matriz de rigidez tangente do elemento finito de cabo é obtida através da diferenciação do vetor de forças internas em relação ao vetor de deslocamentos do elemento:

$$\mathbf{K}_{pe} = \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \partial \frac{(\mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e F_p)}{\partial \mathbf{u}} \quad (60)$$

A matriz de rigidez tangente pode ser definida como sendo igual à soma da matriz de rigidez elástica (61) com a matriz de rigidez geométrica (62):

$$\mathbf{K}_{Epe} = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (61)$$

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \mathbf{T}_{pe}^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p \quad (62)$$

A regra da cadeia pode ser utilizada para reescrever os termos  $\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}}$  e  $\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}}$  das equações (61) e (62). Em relação a matriz de rigidez elástica, tem-se:

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial F_p}{\partial l_p} \frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (63)$$

O primeiro termo pode ser reescrito como apresentado em (64):

$$\frac{\partial F_p}{\partial l_p} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial l_p} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial l_p} = \frac{A_p E_p}{L_p} \quad (64)$$

O termo  $A_p$  representa a área e  $E_p$  o módulo de elasticidade do cabo de protensão. O segundo termo da equação (63) pode ser reescrito como apresentado em (65):

$$\frac{\partial l_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{n_p} \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{n_p} \frac{\partial l_{pe}}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \quad (65)$$

Por fim, a parcela elástica da matriz de rigidez tangente é dada por (66):

$$\mathbf{K}_{Epe} = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e \frac{A_p E_p}{L_p} \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \quad (66)$$

Fazendo o mesmo para a matriz de rigidez geométrica:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \mathbf{L}_e \quad (67)$$

A derivada de  $\mathbf{r}_e$  em relação ao vetor  $\mathbf{u}$  é definido por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{z}_e \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}} \mathbf{T}_e \quad (68)$$

Onde  $\mathbf{z}_e^T = [\sin \beta \quad -\cos \beta \quad -\sin \beta \quad \cos \beta]$ . A matriz de rigidez geométrica do cabo é igual a:

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{z}_e \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}} \mathbf{T}_e F_p \quad (69)$$

Finalmente, a matriz de rigidez tangente global do cabo, é definida como:

$$\mathbf{K}_p = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{L}_e^T \left( \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \frac{A_p E_p}{L_p} \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e + \mathbf{T}_e^T \mathbf{z}_e \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}} \mathbf{T}_e F_p \right) \quad (70)$$

A matriz de rigidez tangente global do elemento de cabo é simétrica, quadrática e tem tamanho igual à quantidade de graus de liberdade ativos da malha. De forma isolada, a matriz de rigidez elástica, é uma matriz acoplada, ou seja, cada grau de liberdade influi na rigidez de todos os termos da matriz, já a matriz de rigidez geométrica não é acoplada.

## 4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Os modelos constitutivos adotados neste trabalho provêm de diversas referências da literatura nacional e internacional. A não linearidade física dos materiais é considerada através do uso de relações tensão-deformação uniaxiais não lineares, para o concreto, aço passivo e para o aço de protensão. Por mais que estes materiais sejam não lineares, os mesmos são considerados elásticos.

A consideração da não linearidade física refletirá no cálculo dos esforços resistentes bem como no cálculo da matriz constitutiva tangente. Por mais que existam diversas relações tensão-deformação na literatura, não há uma relação considerada melhor.

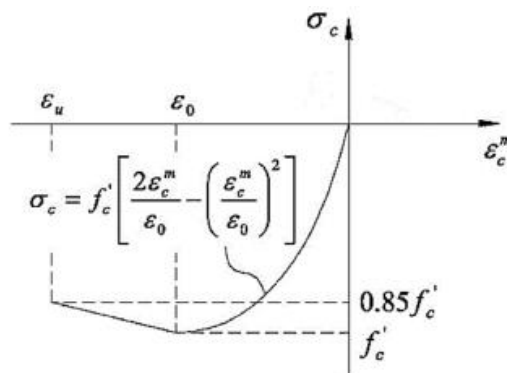
### 4.1 Concreto

O concreto é um material com características não lineares mesmo em situações de baixo carregamento, isso devido à micro fissuração interna. À medida que o carregamento é aumentado, essas microfissuras se propagam, acarretando diminuição gradativa da rigidez da estrutura.

Para consideração do material concreto em regime não linear físico, diversas relações tensão – deformação foram adotadas. As curvas de autores como Hognestad (1951) e Zupan e Saje (2005) bem como as curvas das normas NBR 6118:2014, CEP-FIP (1990) e o Eurocode 2 (2004) são utilizadas para avaliar o comportamento da estrutura quando submetida à compressão.

O modelo constitutivo de Hognestad (1951) apresenta um diagrama de tensão-deformação para o concreto na compressão conforme mostrado na Figura 23.

Figura 23 – Modelo constitutivo de Hognestad para o concreto à compressão



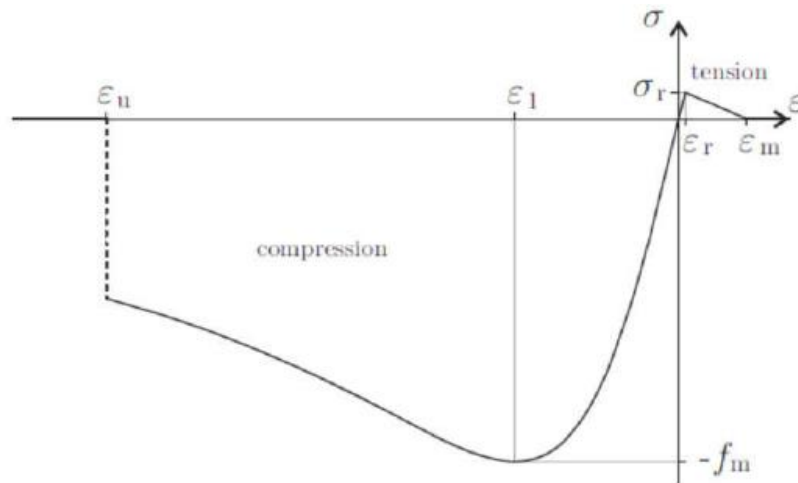
Fonte: Oliveira (2017).

Nota-se que trecho ascendente da curva, que está no intervalo de 0 a  $\varepsilon_c$ , é parabólico e semelhante ao da norma brasileira NBR 6118:2014. Já o trecho linear que mostra um decaimento da curva, representa a perda de resistência devido ao fenômeno de amolecimento do concreto. A equação do trecho linear da curva é apresentada em (79):

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ 1 - 0,15 \frac{(\varepsilon_c^m - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_0)} \right] \rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \quad (79)$$

A curva proposta por Zupan e Saje (2005) é composta por dados de outros dois trabalhos. Os autores utilizaram o estado uniaxial de tensões por Desayi e Krishnan (1964) para o concreto submetido à compressão e o de Bergan e Holand (1979) para o concreto submetido à tração. Tal como o modelo constitutivo proposto por Hognestad, o modelo de Zupan e Saje apresenta um decaimento da curva decorrente do amolecimento do concreto, e, além disso, apresenta o efeito do *tension-stiffening*. A Figura 24 ilustra esse comportamento

Figura 24 – Modelo constitutivo de Zupan e Saje para o concreto



Fonte: Zupan e Saje (2005)

O comportamento do concreto quando a deformação medida estiver dentro do domínio  $\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r$  é representado por uma única curva, como mostra a equação (80):

$$\sigma = 2f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \quad (80)$$

Os termos  $f_m$  e  $\varepsilon_1$  representam respectivamente a resistência do concreto a compressão e a deformação correspondente. Para o cálculo da tensão no domínio  $\varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m$  utiliza-se a equação apresentada em (81):

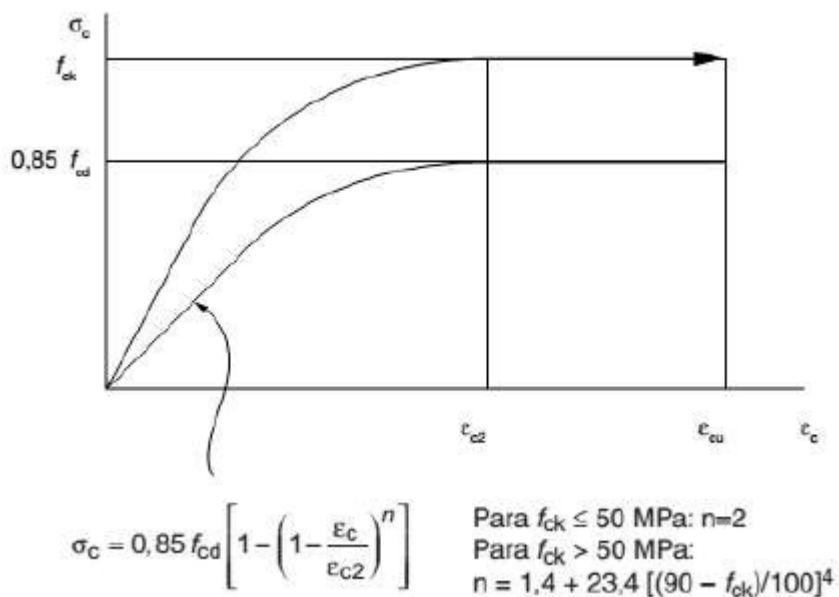
$$\sigma = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r + \varepsilon_m} (\varepsilon + \varepsilon_m) \quad (81)$$

Segundo Zupan e Saje (2005), existem valores para  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_m$  testados empiricamente, que são usualmente utilizados e apresentam uma boa aproximação. Esses valores são dados por:  $\varepsilon_r = 5,5 \cdot 10^{-5}$  e  $\varepsilon_m = 7 \cdot 10^{-4}$ , já o termo  $\sigma_r$  representa a resistência do concreto à tração, e é definido pela equação (82):

$$\sigma_r = 2 f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} \quad (82)$$

A curva da NRB 6118:2014 mais conhecida como parábola-retângulo, recomenda a utilização do diagrama de tensão deformação idealizado mostrado na Figura 25:

Figura 25 – Modelo constitutivo da NBR 6118 para o concreto a compressão





Segundo a NBR 6118 (2014), os valores a serem adotados para a deformação do concreto sob compressão no início do patamar plástico ( $\epsilon_{c2}$ ) e a deformação do concreto sob compressão na ruptura ( $\epsilon_{cu}$ ) são definidos de acordo com a resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ). Assim, tem-se para o concreto com  $f_{ck} \leq 50$  MPa os valores mostrados em (83) e (84) e para o concreto com  $50 < f_{ck} \leq 90$  MPa os valores mostrados em (85) e (86):

$$\epsilon_{c2} = 2\text{‰} \quad (83)$$

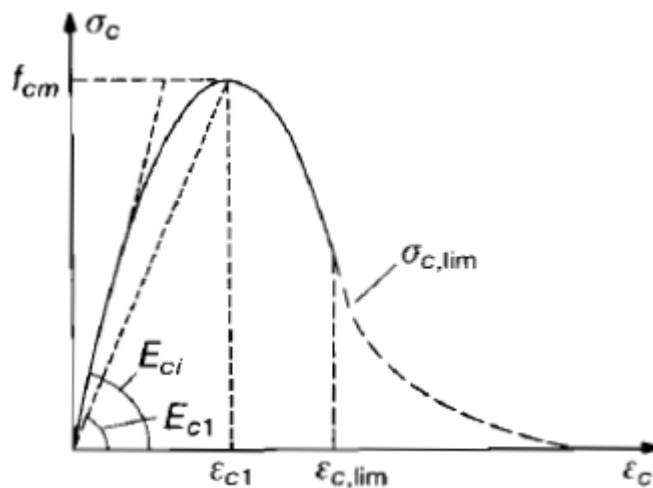
$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰} \quad (84)$$

$$\epsilon_{c2} = 2\text{‰} + 0,085\text{‰}(f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (85)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (86)$$

O CEP-FIP (1990) recomenda a utilização da relação tensão-deformação para o concreto sob compressão mostrada na Figura 26. Bem como os modelos constitutivos propostos por Hognestad e Zupan e Saje, este modelo apresenta um decaimento da curva decorrente do amolecimento do concreto.

Figura 26 – Modelo constitutivo proposto pelo CEB-FIP para o concreto à compressão



Fonte: CEB-FIB (1990)

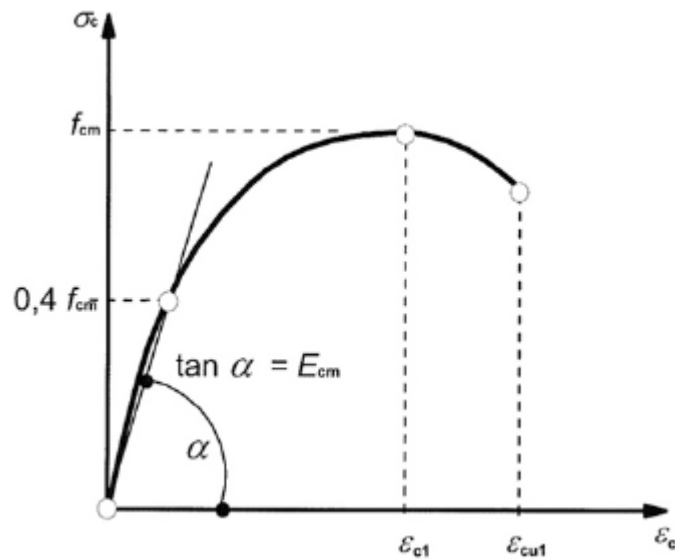
A relação tensão deformação ao longo de todo o domínio da curva pode ser representada através da Equação (87):

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad (87)$$

O termo  $E_{ci}$  representa o módulo de elasticidade tangente,  $\varepsilon_{c1}$  é um valor empírico igual a  $-0,0022$ ,  $f_{cm}$  representa a resistência à compressão do concreto e  $E_{c1}$  é o módulo de elasticidade secante, cujo valor é dado por  $f_{cm} / \varepsilon_{c1}$ .

Outro modelo constitutivo apresentado neste trabalho, é o do Eurocode 2 (2004). É recomendada a utilização da curva mostrada na Figura 27 para representação do comportamento do concreto à compressão em regime não linear:

Figura 27 – Modelo constitutivo proposto pelo Eurocode 2 para o concreto à compressão



Fonte: Eurocode 2 (2004)

A equação que representa o comportamento deste modelo é mostrada em (88):

$$\sigma_c = f_{cm} \left[ \frac{\kappa \eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2) \eta} \right] \quad (88)$$

O termo  $f_{cm}$  representa a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias. O termo  $\eta$  é igual à relação  $\varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ , sendo que  $\varepsilon_c$  é a deformação nominal do concreto e  $\varepsilon_{c1}$  é a deformação de pico, calculada pela equação (89):

$$\varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31} \quad (89)$$

O parâmetro  $\kappa$  é obtido através da equação (90):

$$\kappa = \frac{1,05 E_{cm} |\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}} \quad (90)$$

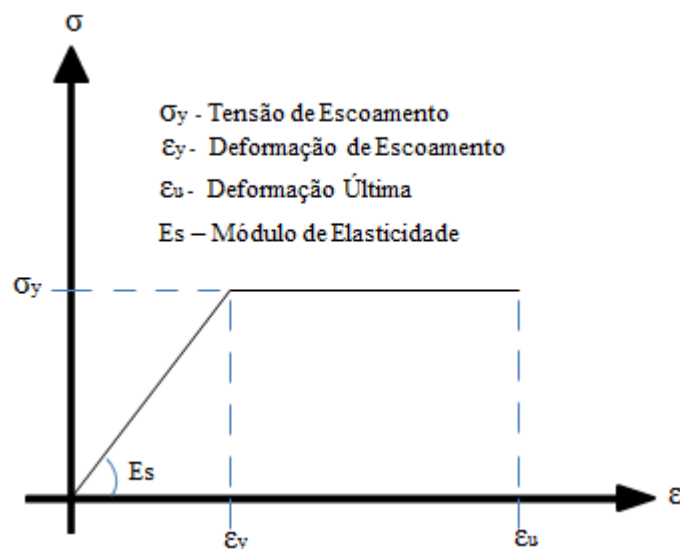
Sendo que  $E_{cm}$  é dado pela equação (91):

$$E_{cm} (GPa) = 22 \cdot [0,1 \cdot f_{cm}]^{0,3} \quad (92)$$

## 4.2 Aço passivo

O aço passivo considerado possui comportamento linear elástico, e apresenta as mesmas características na tração e compressão. O modelo elasto plástico perfeito mostrado na Figura 28 traz uma relação tensão – deformação proporcional até atingir a tensão de escoamento, após isso, o material apresenta um patamar de escoamento bastante definido.

Figura 28 – Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito

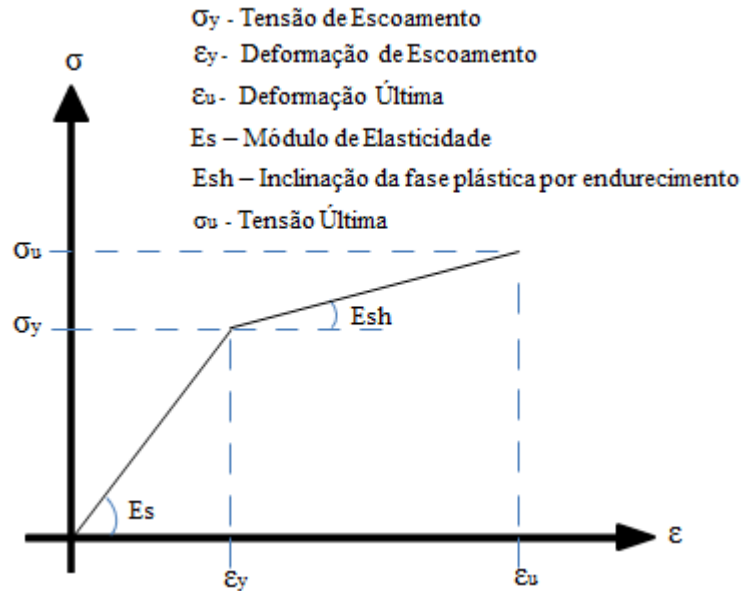


Fonte: Autor (2018)

O modelo elasto plástico mostrado na Figura 29, também é chamado de modelo elasto plástico com endurecimento linear, decorrente de deformações. Após o escoamento, em

geral, o material aço sofre um fenômeno chamado encruamento, onde a estrutura cristalina é modificada, dando um ganho de rigidez à peça.

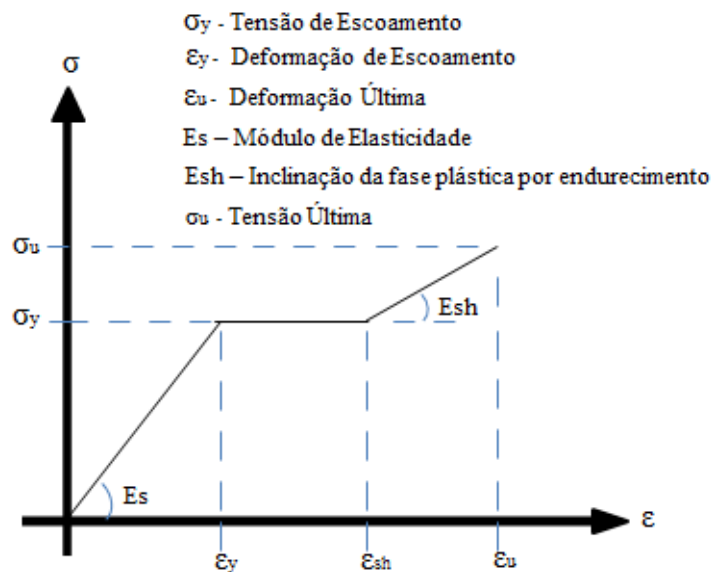
Figura 29 – Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito com endurecimento linear



Fonte: Autor (2018)

O material referente ao aço passivo pode ser modelado ainda como sendo tri-linear, apresentado na Figura 30. Este modelo além de apresentar um endurecimento por deformação mostra um patamar de escoamento bem definido.

Figura 30 – Modelo constitutivo para aço elasto plástico perfeito tri-linear

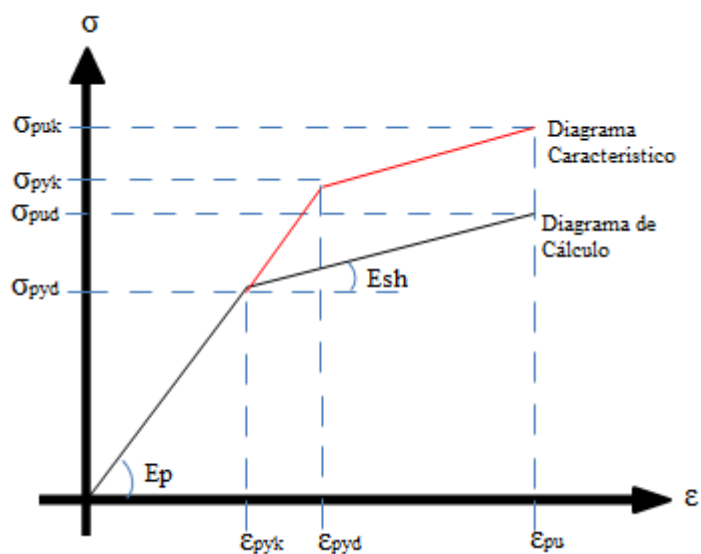


Fonte: Autor (2018)

### 4.3 Aço de protensão

Assim como o aço passivo, o aço de protensão apresenta um comportamento elástico. A NBR 6118 (2014) recomenda que se use o diagrama de tensão-deformação do aço de protensão mostrado na Figura 31. O diagrama bi linear proposto pela norma é simplificado, visto que o mesmo não representa a principal característica que o diferencia do aço de armadura passiva, que é o fato de não possuir patamar de escoamento definido.

Figura 31 – Modelo constitutivo da NBR 6118:2014 para o aço de protensão CP RB



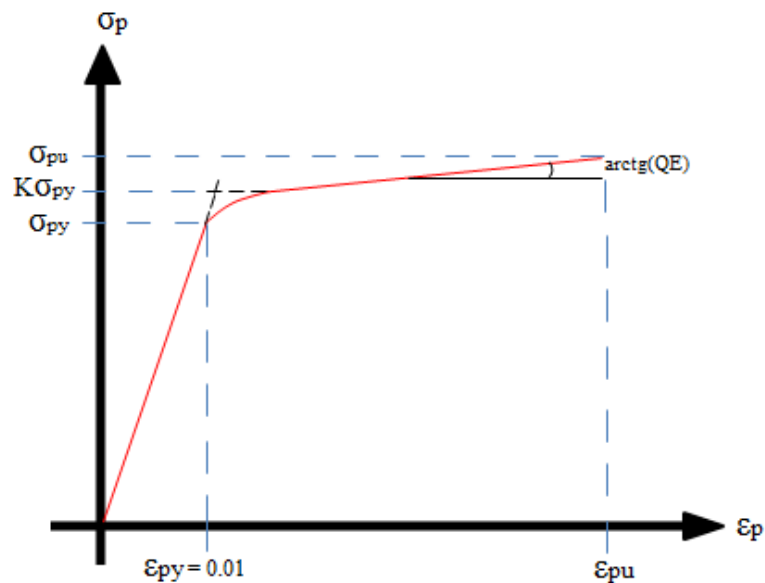
Fonte: Adaptado da NBR 6118:2014

A curva da NBR 6118:2014 é definida por um trecho inicial linear elástico, um segundo trecho na proximidade do escoamento do aço, em que o material vai perdendo gradativamente rigidez. Além da curva proposta pela norma brasileira, um modelo constitutivo idealizado por Menegotto e Pinto (1973) foi considerado neste trabalho. A Equação que representa este modelo pode ser vista em (93):

$$\sigma_p = \varepsilon_p E_p \left\{ Q + \frac{1-Q}{\left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon_p E_p}{K \sigma_{py}} \right)^R \right]^{\frac{1}{R}}} \right\} \leq \sigma_{pu} \quad (93)$$

A parcela  $\sigma_p$  é a tensão no aço de protensão,  $\varepsilon_p$  é a deformação no aço de protensão,  $E_p$  é o módulo de elasticidade inicial do aço de protensão,  $\sigma_{py}$  é a tensão de escoamento do aço de protensão, definida pela tensão corresponde à deformação de 0.01,  $\sigma_{pu}$  é a tensão última do aço de protensão e K, Q e R são coeficientes adimensionais que podem ser encontrados, a fim de aproximar a curva a resultados experimentais. A forma gráfica do comportamento idealizado por Menegotto e Pinto (1973) é ilustrada na Figura 32:

Figura 32 – Modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) para o aço de protensão



Fonte: Adaptado de Menegotto e Pinto (1973)

O coeficiente Q pode ser determinado através da Equação (94):

$$Q = \frac{\sigma_{pu} - K\sigma_{py}}{\varepsilon_{pu} - K\sigma_{py}} \quad (94)$$

Já o coeficiente R pode ser determinado a partir de um processo iterativo, utilizando a Equação (93), com a condição de que a tensão no aço de protensão ( $\sigma_p$ ) deve ser igual à tensão de escoamento ( $\sigma_{py}$ ) para deformação de 0,01, ou seja:

$$\sigma_p(\varepsilon_p = 0.01) = \sigma_{py} \quad (95)$$

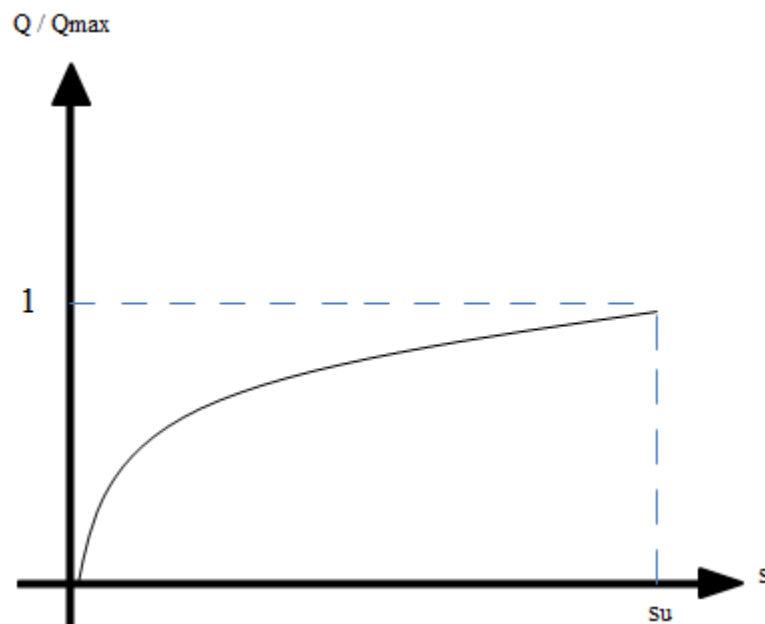
O coeficiente K pode ser determinado caso se tenha uma curva experimental do aço de protensão, a fim de aproximar a curva experimental da curva teórica. Segundo Mattock

(1979), para cordoalhas de sete fios, adotando valor de  $K = 1.04$ , a expressão apresenta em geral boa concordância com resultados experimentais.

#### 4.4 Conectores de cisalhamento

Um dos primeiros estudos a avaliar o comportamento de conectores de cisalhamento foi feito por Ollgaard *et al.* (1971). Os dados deste trabalho vêm sendo amplamente utilizado por diversos autores, cuja relação constitutiva dos elementos de ligação é representada por meio de uma equação exponencial (81). A Figura 33 ilustra o comportamento na conexão:

Figura 33 – Modelo constitutivo de Ollgaard *et al.* (1971) para conectores de cisalhamento



Fonte: Adaptado de Ollgaard *et al.* (1971)

O comportamento da força - deslizamento ( $Q \times s$ ) da curva na interface é definido como mostrado em (96)

$$Q = Q_{\max} (1 - e^{-\beta \cdot s})^{\alpha} \quad (96)$$

O termo  $Q_{\max}$  indica a força cortante máxima resistente de um conector isolado, que pode ser definido por experimentos ou através de normas, como mostra a Equação (97), presente na NBR 8800: 2008:

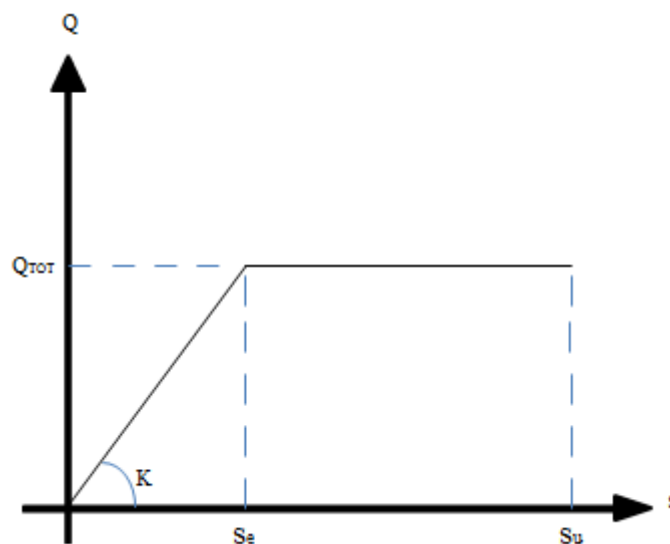
$$Q_{\max} = \frac{A_s \sqrt{f_c E_c}}{2} \quad (97)$$

O termo  $A_s$  é a área da seção transversal do conector,  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto e  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto à compressão. Os termos  $\beta$  e  $\alpha$  da Equação (81) são parâmetros constantes cujos valores são respectivamente 1 e 0.558 e 's' é o deslizamento relativo entre os materiais. A rigidez na interface pode ser calculada de acordo com a Equação (98):

$$K(s) = \frac{dQ(s)}{ds} \quad (98)$$

Em abordagens numéricas é vantajoso utilizar curvas simplificadas, como a bi-linear. Curvas como a proposta por Ollgaard *et al* (1971) podem apresentar problemas de singularidade ao se calcular a rigidez na interface de contato. Uma maneira simplificada de representar o comportamento força-deslizamento na interface de contato pode ser vista através da Figura 34:

Figura 34 – Modelo constitutivo bi-linear para conectores de cisalhamento



Fonte: Autor (2018)

O termo ' $Q_{TOT}$ ' é igual à força de cisalhamento total por metro, sendo igual a  $n \cdot Q_{max}$ , onde  $n$  é a quantidade de conectores existentes por metro,  $Q_{max}$  pode ser calculado conforme a Equação 82, porém normas como o Eurocode 4 (2004) e AISC LRDF (2016) provém de outras



equações para determinação da força cortante máxima resistente de um conector isolado, 's<sub>e</sub>' é o deslizamento que causa o escoamento da conexão e 's<sub>u</sub>' é o deslizamento que causa a ruptura. A rigidez (K) da interface pode ser definida através da Equação (99):

$$K = \frac{Q_{TOT}}{s_e} \quad (99)$$

A força atuante na interface ao longo do trecho ascendente pode ser definida através da Equação (100):

$$Q = K.s \quad (100)$$

## 5 TRAÇADO DO CAMINHO DE EQUILÍBRIO

O traçado da curva carga-deslocamento, também conhecida como ‘caminho de equilíbrio’ ou (*equilibrium paths*), permite visualizar o comportamento de estruturas ao longo de todos os níveis de carregamento impostos. Em uma abordagem experimental, normalmente utiliza-se prensas hidráulicas para aplicação de carga e os deslocamentos e deformações são captados por meio de dispositivos tecnológicos, como os LVDT’s (*Linear Variable Differential Transformers*) e os extensômetros, resultando em um gráfico carga - deslocamento.

Para obtenção dos caminhos de equilíbrio em uma abordagem numérica são utilizados métodos incrementais-iterativos. Estes métodos consistem em combinar uma etapa onde o parâmetro de controle (carga, deslocamento, comprimento de arco) é incrementado para estimar o próximo ponto do caminho de equilíbrio, seguido por uma etapa onde iterações são realizadas de forma a garantir que o equilíbrio apresentado em (101) seja satisfeito.

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (101)$$

Onde  $\mathbf{g}$  representa o vetor de forças internas globais referentes aos elementos de viga e de cabo e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas global. Em geral, sabe-se que as forças internas ( $\mathbf{g}$ ) sempre dependem dos deslocamentos da estrutura ( $\mathbf{u}$ ).

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} = 0 \quad (102)$$

O termo  $\mathbf{r}$  é o vetor dos resíduos,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{q}$  é a carga de referência e  $\lambda$  é um fator de proporcionalidade (fator de carga) que controla o nível de carregamento aplicado à estrutura. A solução que satisfaz o problema mostrado na Equação (102) exige a utilização de métodos numéricos, como o Método de Newton-Rapshon. Linearizando a Equação (102) através da série de Taylor, tomando somente a parte linear e igualando a zero, chega-se em:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} - \mathbf{q} \delta \lambda = 0 \quad (103)$$

Onde  $\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$  representa a matriz de rigidez tangente. Este sistema de equações lineares não possui solução, já que existem  $n+1$  incógnitas e apenas  $n$  equações. O termo  $n$  representa a quantidade de graus de liberdade da malha de elementos finitos, e a incógnita adicional consiste no fator de carga ' $\lambda$ '. Desta forma é necessário que haja mais uma equação para determinar o caminho de equilíbrio da estrutura. A seguir serão apresentados dois métodos para contornar este problema, o método do controle de carga e o método do controle de deslocamentos.

### 5.1 Método do controle de carga

A aplicação do método do controle de carga é bastante simples e intuitiva, propondo-se em simular o procedimento experimental utilizado em laboratórios. O procedimento consiste em aplicar certo nível de carga na estrutura e verificar os deslocamentos e deformações resultantes desta carga, repetindo este processo até que se atinja a carga de ruptura da peça. Para a determinação do equilíbrio da estrutura, devido à aplicação apenas da protensão, sem aplicação de carga externa, este método é considerado.

O método resume-se em adotar o fator de carga ( $\lambda$ ) como sendo constante durante cada passo, em outras palavras o incremento de carga ( $\delta\lambda$ ) é igual à zero. Reescrevendo a Equação (103), chega-se na equação que determina a variação dos deslocamentos em cada interação:

$$\mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}_i \quad (104)$$

O termo  $i$  representa a iteração do Método de Newton Rapshon. Após o cálculo do incremento de deslocamentos, os deslocamentos nodais são atualizados utilizando a expressão (105):

$$\mathbf{u}_{s+1} = \mathbf{u}_s + \delta \mathbf{u} \quad (106)$$

Os deslocamentos atualizados são utilizados para calcular o vetor de forças internas ( $\mathbf{g}$ ) e o novo resíduo ( $\mathbf{r}$ ), de acordo com a Equação (102) até que o resíduo se torne menor ou igual a uma tolerância definida pelo analista.

Nesse processo, o método do controle de carga é adotado para determinar a deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ), de modo que após a aplicação da protensão (ausência de carga externa), a deformação efetiva ( $\varepsilon_{pe}$ ) seja igual a dada no problema. Assim, para cada valor estimado da deformação inicial teórica, a deformação efetiva no cabo é calculada, através da solução do equilíbrio da viga.

O modelo de elementos finitos empregado neste trabalho considera a força que atua na viga como uma função da força do cabo e dos deslocamentos globais. Portanto, nenhuma informação sobre os deslocamentos relativos da viga e do cabo de protensão é conhecida, apenas a definição da deformação inicial de teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) que é mantida constante ao longo da análise.

## 5.2 Método do controle de deslocamentos

O Método do Controle de Deslocamentos é bastante utilizado na análise não linear de estruturas, tendo como principal vantagem em relação ao Método do Controle de Carga, a possibilidade de traçar curvas carga-deslocamento que apresentam pontos limites, em outras palavras, evitaria o fenômeno de *snap-through*. Este método foi inicialmente proposto por proposto inicialmente por Batoz e Dhatt (1979) e é utilizado neste trabalho quando a carga externa é aplicada a peça.

A metodologia abordada pelos autores consiste em adicionar uma equação de restrição ao problema. Esta equação é definida como uma função do fator de carga e dos deslocamentos:

$$a(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (107)$$

Linearizando a equação de restrição da mesma forma como feito em (103), se chega em:

$$a_{i,\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} + a_{i,\lambda} \delta \lambda = -a_i \quad (108)$$

De forma matricial, a equação do resíduo juntamente com a equação de restrição é apresentada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_{i,\mathbf{u}}^T & a_{i,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ a_i \end{bmatrix} \quad (109)$$

A solução deste sistema é possível desde que a matriz dos coeficientes não seja singular. Considerando as Equações (110) e (111), e substituindo a Equação (103) em (108), chega-se na equação que permite determinar o incremento do fator de carga (112):

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u}_q = \mathbf{q} \quad (110)$$

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u}_r = \mathbf{r} \quad (111)$$

$$\delta\lambda = \frac{a_{i,\mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u}_r - a_i}{a_{i,\mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u}_q + a_{i,\lambda}} \quad (112)$$

É interessante afirmar que a matriz de rigidez, a restrição e o resíduo são atualizados a cada iteração. O método do controle de deslocamentos consiste em fixar determinado valor a uma das componentes do vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), corresponde ao grau de liberdade escolhido, sendo esse deslocamento incrementado e fixado em cada passo. Logo, em cada passo, o deslocamento controlado ( $u^j$ ) é incrementado de acordo com a seguinte expressão:

$$u_{s+1}^j = u_s^j + \Delta u_p \quad (113)$$

O termo  $u_{s+1}^j$  é o deslocamento no grau de liberdade  $j$  do passo  $s+1$ ,  $u_s^j$  é o deslocamento no grau de liberdade  $j$  do passo  $s$  e  $\Delta u_p$  é o incremento de deslocamento prescrito pelo usuário a cada passo. A Equação de restrição pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a = \mathbf{u}^j - u_p = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} - u_p \quad (114)$$

O termo  $e_j$  representa um vetor unitário que indica a direção do deslocamento aplicado,  $u_p$  representa o valor do deslocamento controlado calculado no início do passo de acordo com a Equação (113).

Derivando a restrição mostrada em (114) em relação ao vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) e ao fator de carga ( $\lambda$ ), chega-se em (115) e (116):

$$a_{,u} = \mathbf{e}_j \quad (115)$$

$$a_{,\lambda} = 0 \quad (116)$$

Substituindo (115) e (116) na Equação (112), chega-se em (118):

$$\delta\lambda = \frac{\mathbf{e}_j \delta\mathbf{u}_r - a_i}{\mathbf{e}_j \delta\mathbf{u}_q} \quad (117)$$

$$\delta\lambda = \frac{\delta\mathbf{u}_r^j - a_i}{\delta\mathbf{u}_q^j} \quad (118)$$

Na primeira iteração, o resíduo pode ser considerado igual a zero, o que resulta em:

$$\delta\lambda = \frac{-a_i}{\delta\mathbf{u}_q^j} = \frac{u_p - \mathbf{u}^j}{\delta\mathbf{u}_q^j} = \frac{\Delta u_o}{\delta\mathbf{u}_q^j} \quad (119)$$

Nas iterações adiante a restrição é nula, devido à equação de restrição ser linear. Com isso o cálculo do incremento de carga nas demais iterações é definido pela Equação (120):

$$\delta\lambda = \frac{\delta\mathbf{u}_r^j}{\delta\mathbf{u}_q^j} \quad (120)$$

## 6 EXEMPLOS

O objetivo deste capítulo é verificar se a formulação desenvolvida neste trabalho representa bem o comportamento de vigas mistas protendidas considerando a possibilidade de deslizamento entre os materiais. Os elementos finitos e os modelos constitutivos apresentados anteriormente serão usados para avaliar o comportamento não linear físico e geométrico de algumas vigas ensaiadas de forma numérica e experimental por diferentes autores.

Alguns dos trabalhos experimentais / numéricos utilizados como base para esta pesquisa foram desenvolvidos entre os anos de 1989 e 2017, podendo citar alguns autores, como: Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989); Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990); Lorenc e Kubica (2006); Lou, Lopes e Lopes (2016) e Oliveira (2017).

A integração numérica ao longo do comprimento do elemento baseou-se na quadratura de Gauss com 3 pontos, adotou-se o método incremental-iterativo de controle de carga na etapa de aplicação da protensão e do método do controle de deslocamento para aplicação do carregamento, ambos com tolerância para convergência de  $1e-5$ .

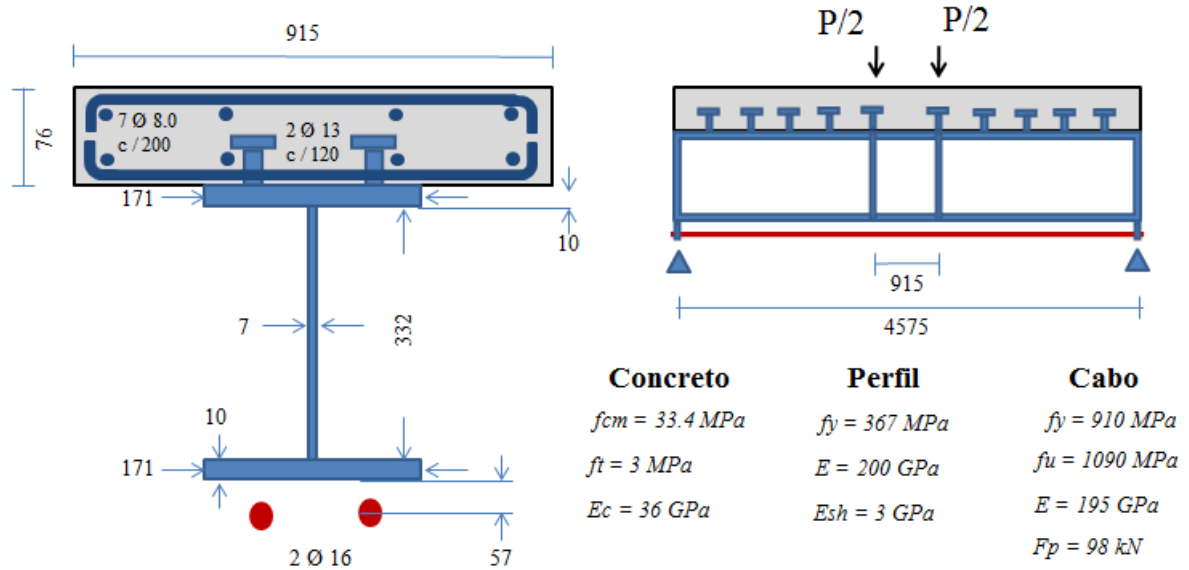
### 6.1 Vigas ensaiadas por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989)

Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) desenvolveram um estudo experimental para avaliar o comportamento de vigas mistas bi apoiadas de aço e concreto protendidas submetidas a momento fletor positivo e negativo.

#### 6.1.1 Viga bi apoiada (Momento positivo)

A viga em questão consta no trabalho dos autores como sendo a Viga A, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 35. Para a integração da seção transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8 para discretização da alma e 1 para cada mesa. O cabo de protensão desta viga tem traçado reto ao longo de todo o vão e está situado abaixo da mesa inferior, além disso, a viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo e nos pontos de aplicação de carga.

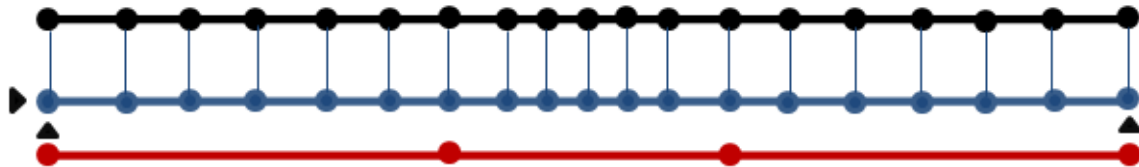
Figura 35 – Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



Fonte: Autor (2018)

A malha possui 18 elementos finitos de viga e 3 elementos finitos de cabo. A discretização está ilustrada na Figura 36.

Figura 36 – Malha de elementos da viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



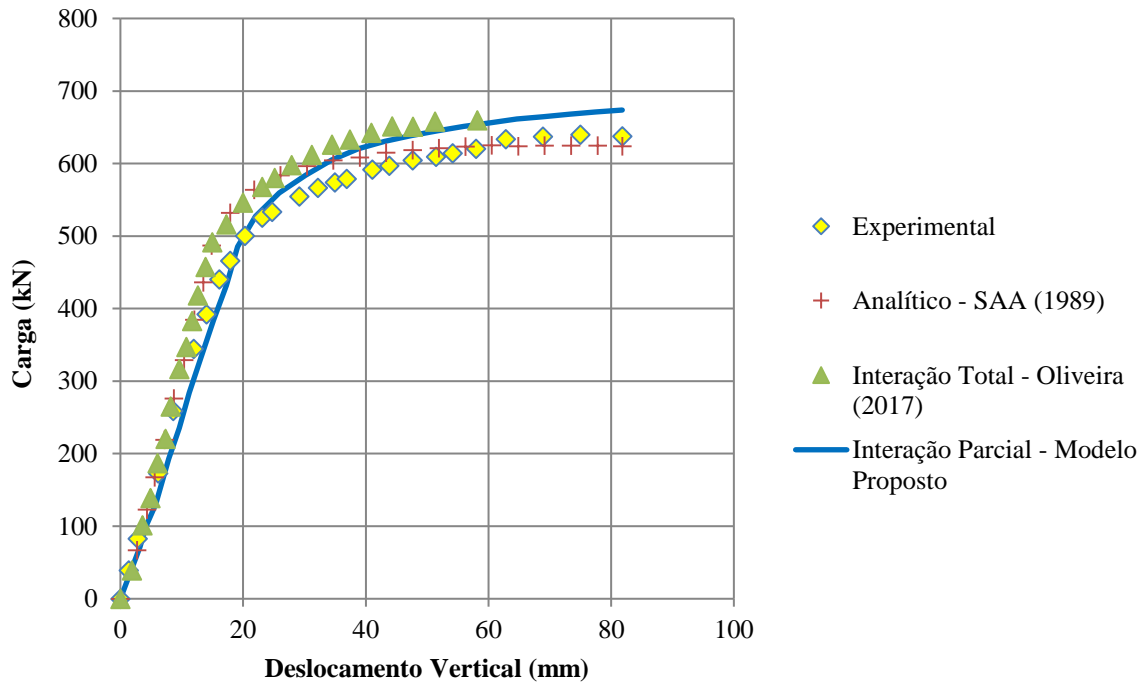
Fonte: Autor (2018)

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Zupan e Saje (2005), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e por fim, para representar o comportamento na interface de contato foi adotado o modelo bi linear. O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão.

A Figura 37 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo código em questão, os resultados experimentais e analíticos de Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) e os resultados numéricos de Oliveira (2017). Todos os resultados destes autores foram adicionados para comparação e validação da formulação.



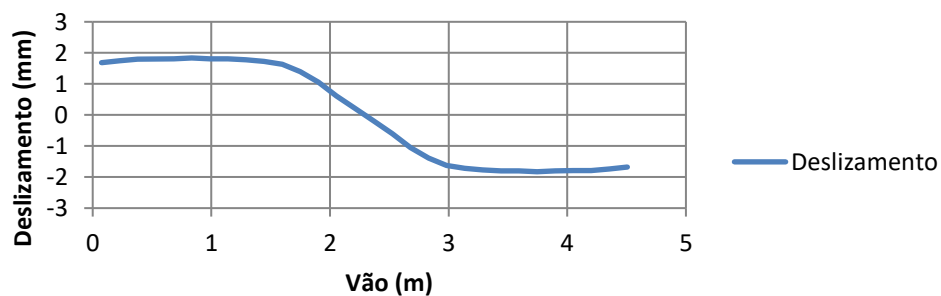
Figura 37 – Caminho de equilíbrio - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



Fonte: Autor (2018)

Os resultados da curva de equilíbrio ou *equilibrium paths* gerados pelo código em questão se mostraram bastantes satisfatórios. No trecho linear, a resposta, em comparação com os resultados experimentais dos autores se mostrou levemente mais flexível, já no trecho em que o comportamento da peça se torna não linear, o modelo proposto se apresentou um pouco mais rígido. As cargas últimas, do ensaio experimental e do modelo proposto foram concordantes, com valores respectivamente iguais a 641 kN e 673 kN, além do mais, o deslocamento máximo obtido pelo modelo proposto foi praticamente igual ao do experimento. A Figura 38 ilustra o deslizamento relativo gerado pelo modelo proposto.

Figura 38 – Deslizamento relativo (*slip*) - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)

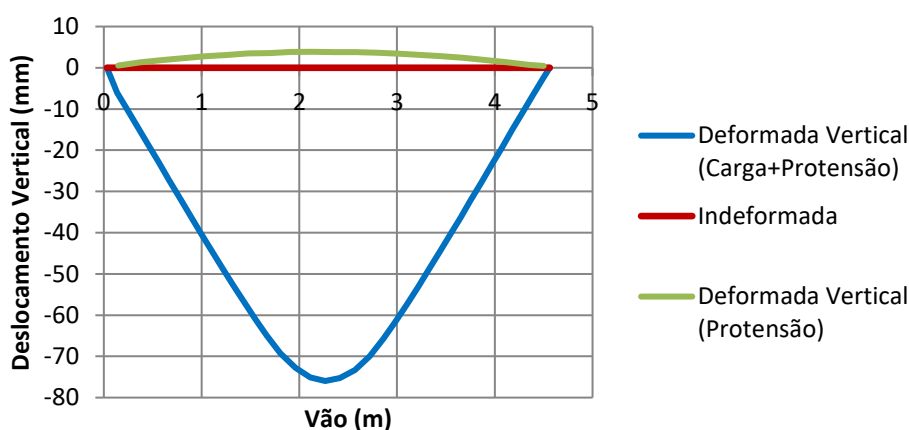


Fonte: Autor (2018)

O deslizamento relativo entre a laje de concreto e o perfil metálico apresentou um comportamento simétrico, em que os valores máximos estão situados nas extremidades da viga. É interessante notar que os valores do deslizamento são constantes próximos as extremidades da viga e tendem a zerar linearmente conforme se aproxima do meio do vão. Por mais que os valores medidos do deslizamento sejam bastante pequenos, estes influenciaram de forma considerável no traçado do caminho de equilíbrio, basta comparar com os resultados obtidos por Oliveira (2017).

Estes resultados fortalecem a hipótese de que vigas em que existe a possibilidade de escorregamento relativo são mais flexíveis, pois para um mesmo nível de carga, a hipótese de interação parcial apresenta um deslocamento maior do que a hipótese de interação total, principalmente no trecho linear (zona de atuação da maioria dos projetistas). A Figura 39 apresenta a configuração deformada da viga.

Figura 39 – Deformada vertical - Viga A (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



Fonte: Autor (2018)

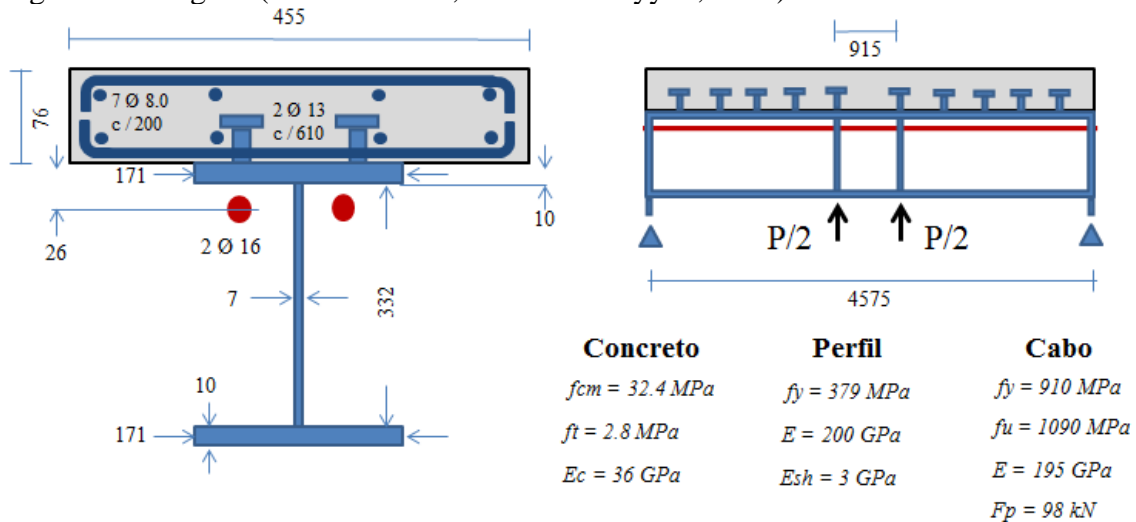
A configuração deformada no primeiro passo (aplicação da protensão) mostra que a viga deformou no sentido contrário da deflexão última, com o valor de 3.85 mm. Além disso, a configuração da deformada vertical é simétrica e possui valor máximo no meio do vão, tanto na etapa de aplicação de protensão, quanto na etapa de aplicação do carregamento.

### 6.1.2 Viga bi apoiada (Momento negativo)

A viga em questão consta no trabalho dos autores como sendo a Viga B, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 40. Para a integração da seção transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8

para discretização da alma e 1 para cada mesa. O cabo de protensão desta viga tem traçado reto ao longo de todo o vão e está situado 26 mm abaixo da laje. Esta viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo e nos pontos de aplicação de carga.

Figura 40 – Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)

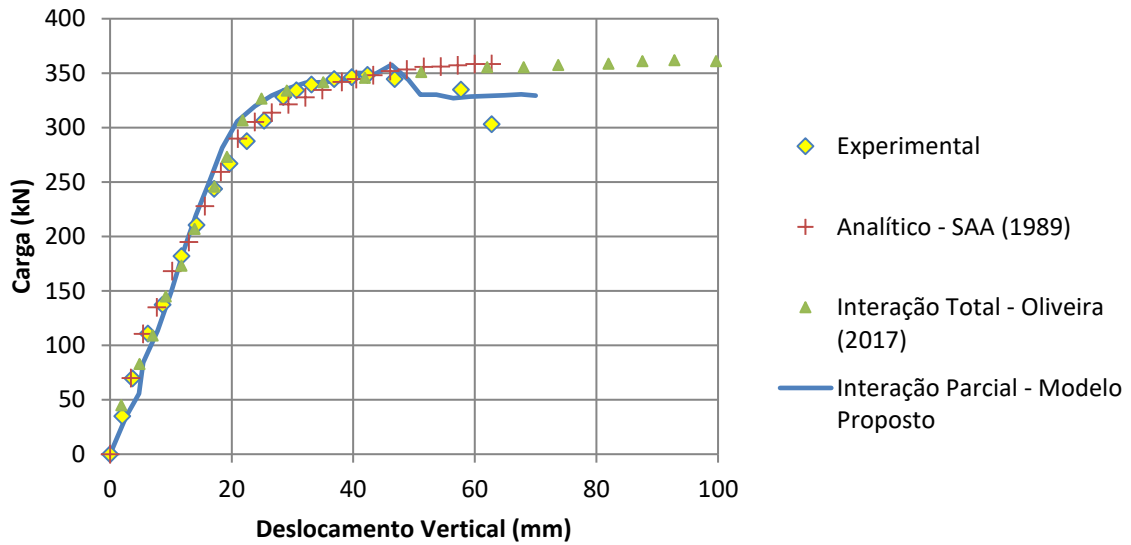


Fonte: Autor (2018)

A viga B possui a mesma malha da viga A, ilustrada na Figura 36. O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Hognestad (1951), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e para representar o comportamento na interface de contato foi adotado o modelo bi linear.

O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão. A Figura 41 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo código em questão, os resultados experimentais e analíticos de Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) e os resultados numéricos de Oliveira (2017). Todos os resultados destes autores foram adicionados para comparação e validação da formulação.

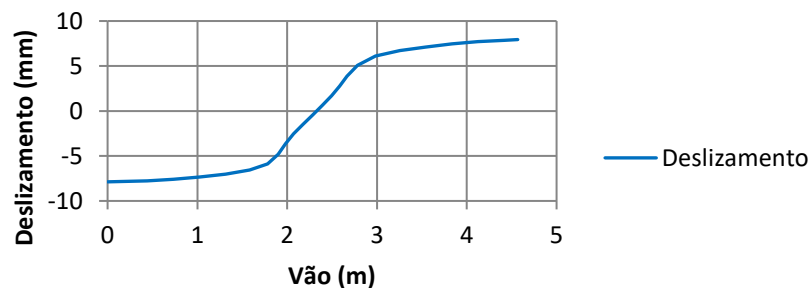
Figura 41 – Caminho de equilíbrio - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



Fonte: Autor (2018)

O caminho de equilíbrio gerado mostra uma boa concordância entre os resultados do modelo proposto e do experimento conduzido por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989). De forma semelhante à viga A, a viga B do modelo proposto se apresenta levemente mais flexível do que a viga modelada por Oliveira (2017), principalmente no início do trecho linear. Já no início da plastificação, a viga do modelo proposto se mostra um pouco mais rígida do que os experimentos. Em relação ao deslocamento máximo, o resultado obtido pelo código proposto alcançou um valor menor quando comparado ao resultado experimental. Em relação ao deslizamento relativo entre materiais, pode-se avaliar a Figura 42.

Figura 42 – Deslizamento relativo (*slip*) - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



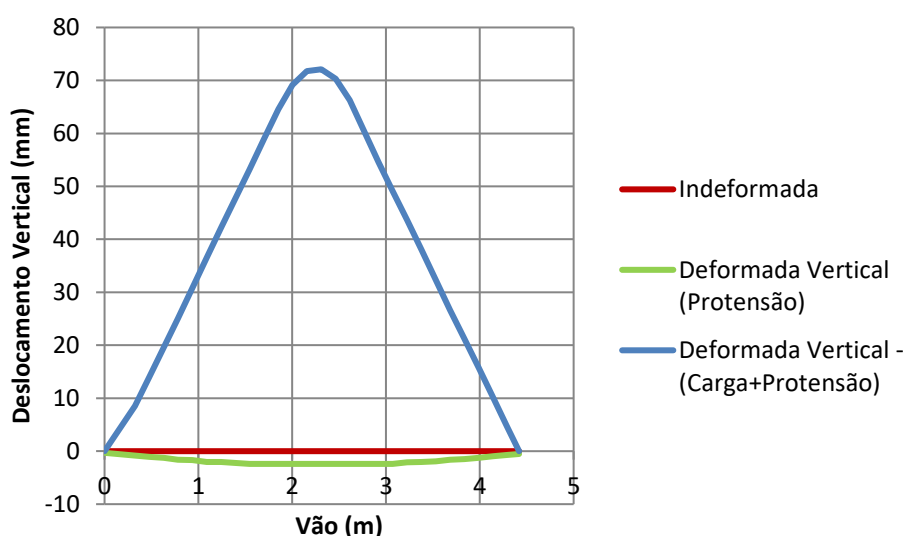
Fonte: Autor (2018)

De forma semelhante ao que aconteceu na viga A, o deslizamento relativo entre a viga e a laje de concreto se mostrou simétrico com valores máximos medidos nas extremidades,

porém, estes valores foram bastantes superiores devido à quantidade de conectores. O deslizamento tende a zerar de forma linear quando se aproxima do meio do vão, mais especificamente, na região em que a peça esta submetida à flexão pura. Isso pode ser explicado, pois a equação que determina  $s(x)$  é dependente da rotação da seção da viga ( $\theta$ ), cujos valores também tendem a zero ao se aproximarem do meio do vão.

A configuração deformada vertical da viga na etapa de protensão e de carregamento é apresentada na Figura 43.

Figura 43 – Deformada vertical - Viga B (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)



Fonte: Autor (2018)

A configuração deformada no primeiro passo (aplicação da protensão) mostra que a viga deformou no sentido contrário da deflexão última, com o valor de -2.40 mm. Além disso, a configuração da deformada vertical é simétrica e possui valor máximo no meio do vão, tanto na etapa de aplicação de protensão, quanto na etapa de aplicação do carregamento.

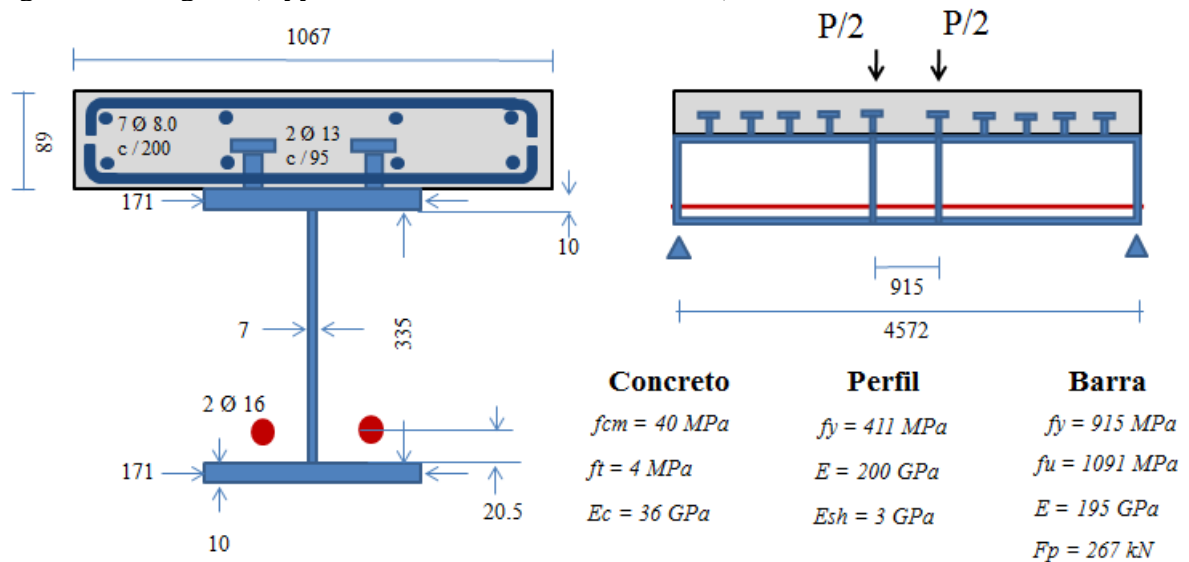
## 6.2 Vigas ensaiadas por Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990)

Os autores conduziram uma análise experimental / analítica de três vigas mistas protendidas bi apoiadas submetidas a momento positivo. Uma das vigas foi protendida através da adição de barras de aço, já as outras duas através da inserção de cabos de aço.

### 6.2.1 Viga bi apoiada (Protensão com Traçado Reto)

Esta viga está inserida no trabalho dos autores como sendo a Viga A, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 44. Para a integração da seção transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8 para discretização da alma e 1 para cada mesa. As barras de aço protendidas desta viga tem traçado reto ao longo de todo o vão e estão situadas 20.5 mm acima da mesa inferior. Esta viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo e nos pontos de aplicação de carga.

Figura 44 – Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

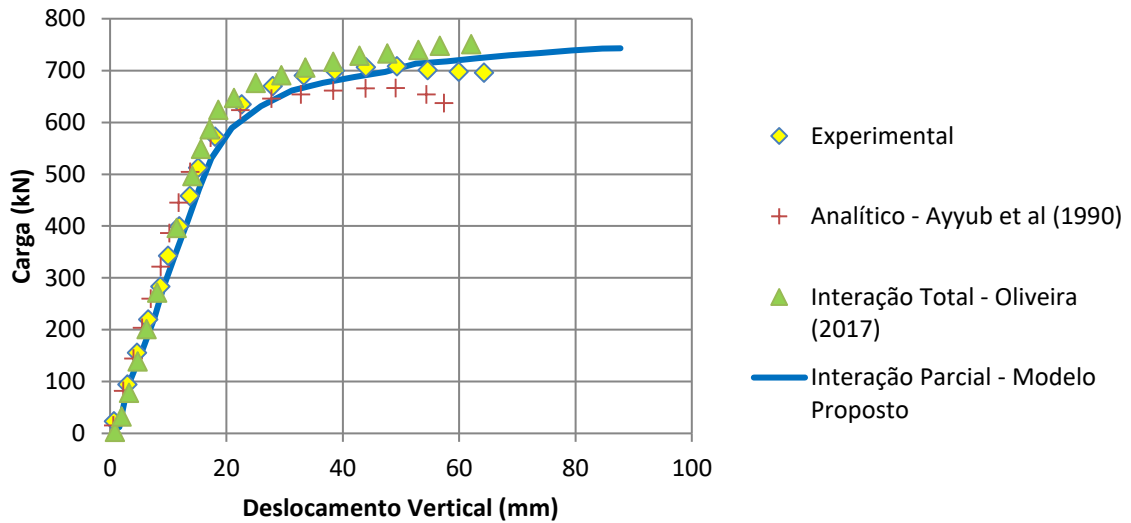


Fonte: Autor (2018)

A viga A possui a malha ilustrada na Figura 36. O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Zupan e Saje (2005), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e para representar o comportamento na interface de contato foi adotado o modelo bi linear.

O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão. A Figura 45 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo código em questão, os resultados experimentais e analíticos de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) e os resultados numéricos de Oliveira (2017). Todos os resultados destes autores foram adicionados para comparação e validação da formulação.

Figura 45 – Caminho de equilíbrio - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

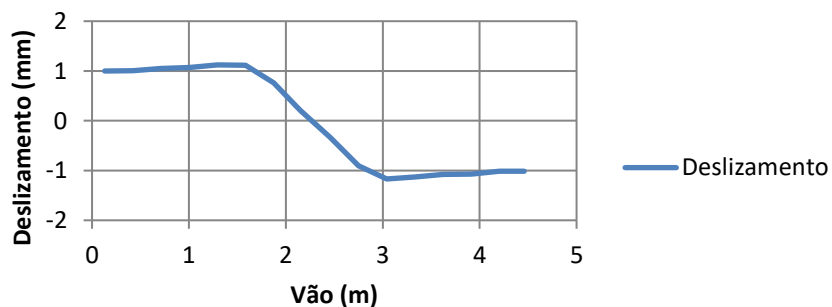


Fonte: Autor (2018)

Os resultados ilustrados na Figura 45 mostram que o modelo proposto representou bem o comportamento da estrutura. A formulação que considera a possibilidade de deslizamento relativo se mostrou mais flexível do que a apresentada por Oliveira (2017) ao longo de todo o caminho de equilíbrio. A carga última calculada (741 kN) foi um pouco maior do que a carga última do experimento (700 kN), além disso, o modelo proposto alcançou um deslocamento vertical máximo consideravelmente mais alto.

É interessante notar que a Viga A ensaiada por Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) é bastante semelhante à Viga A ensaiada por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989), contudo, existem diferenças, uma delas é a quantidade de conectores de cisalhamento. O deslizamento da viga de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) é mostrado na Figura 46.

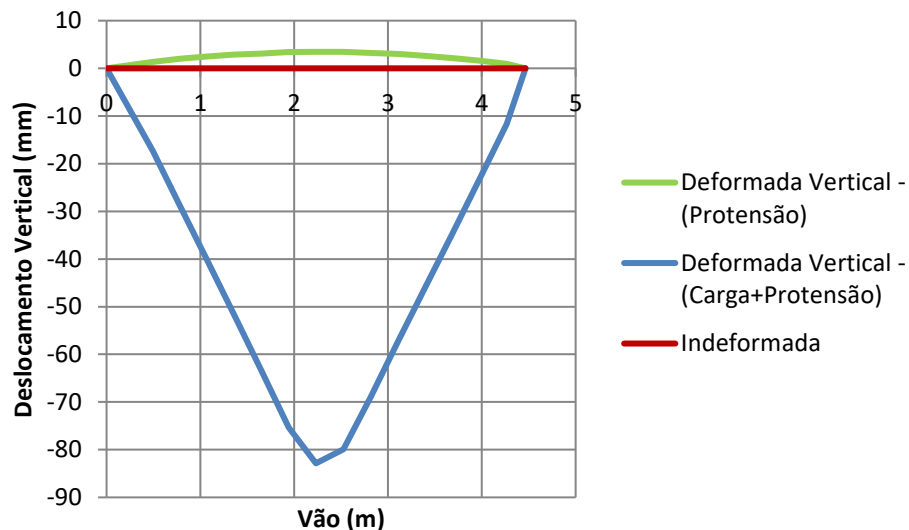
Figura 46- Deslizamento relativo (*slip*) - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)



Fonte: Autor (2018)

A Figura 46 ilustra o efeito do grau de interação da interface. O deslizamento relativo da viga em questão é bem inferior ao da viga A, ensaiada anteriormente por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989). Isso pode ser explicado baseando-se na quantidade de conectores utilizados, em outras palavras, na rigidez da interface adotada para cada ensaio. Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) utilizaram pares de conectores de cisalhamento a cada 120 mm, já Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) utilizaram pares dos mesmos conectores a cada 95 mm, acarretando em uma interface mais rígida. A Figura 47 mostra a configuração deformada vertical da viga na etapa de protensão e de carregamento.

Figura 47 – Deformada vertical - Viga A (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)



Fonte: Autor (2018)

A configuração deformada no primeiro passo (aplicação da protensão) mostra que a viga deformou no sentido contrário da deflexão última, com o valor de 3.46 mm. Os deslocamentos da viga em questão (mesmo com uma carga de protensão 2,7 vezes maior) se mostraram menores do que os deslocamentos no primeiro passo da viga A de Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989). Isso pode mostrar que a rigidez na interface tem influência nos efeitos da aplicação da protensão.

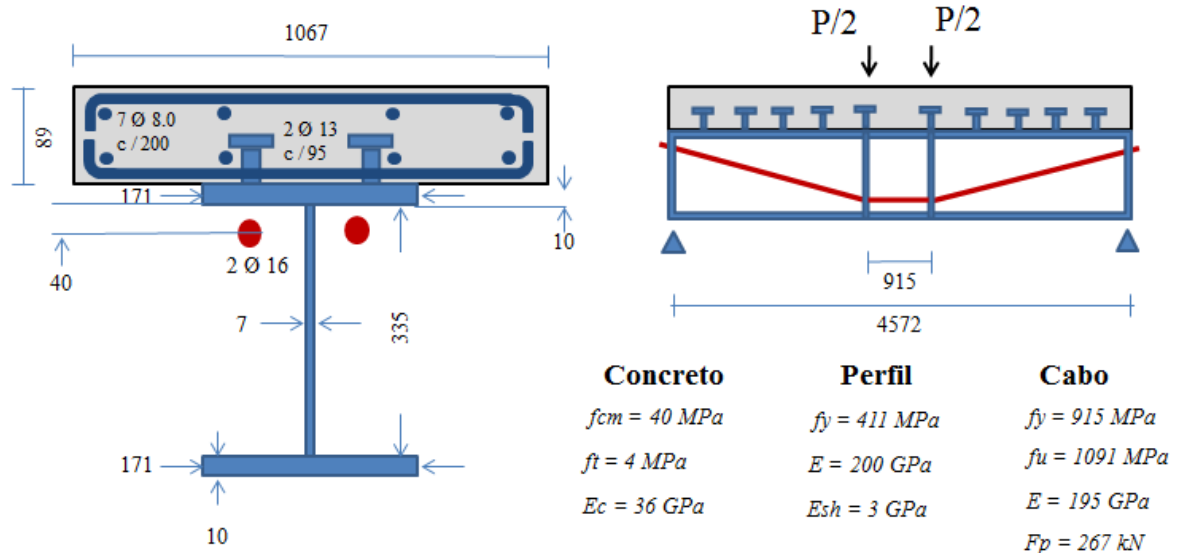
### 6.2.2 Viga bi apoiada (Protensão com Traçado Poligonal)

A viga em questão está referenciada no trabalho dos autores como sendo a Viga C, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 48. Para a integração da seção



transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8 para discretização da alma e 1 para cada mesa. Os cabos de protensão desta viga tem traçado poligonal. Esta viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo e nos pontos de aplicação de carga.

Figura 48 – Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

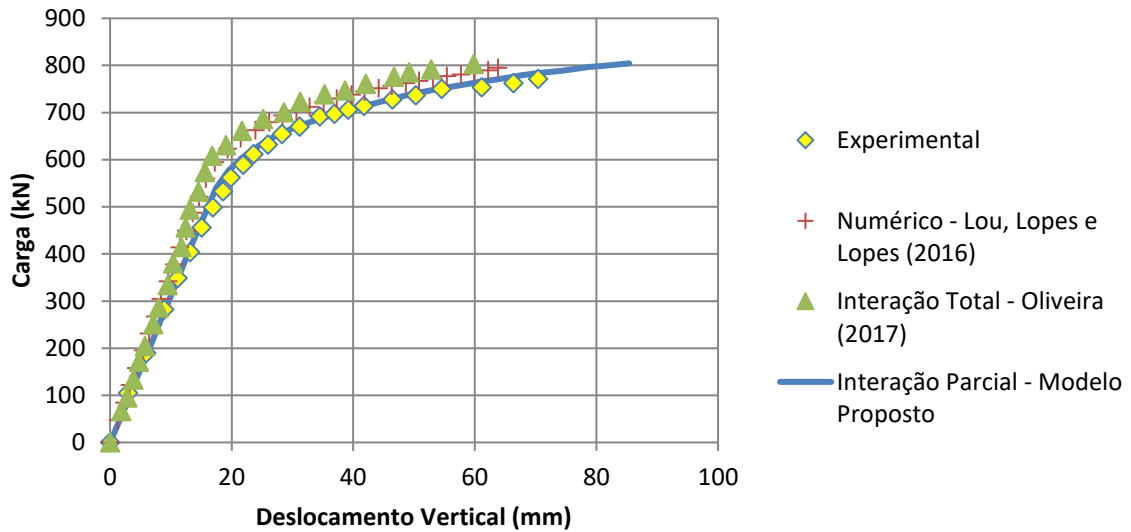


Fonte: Autor (2018)

A viga A possui a malha ilustrada na Figura 36. O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Zupan e Saje (2005), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e para representar o comportamento na interface de contato foi adotado o modelo bi linear.

O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão. A Figura 49 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo código em questão, os resultados experimentais de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990), os analíticos de Lou, Lopes e Lopes (2016) e os resultados numéricos de Oliveira (2017). Todos os resultados destes autores foram adicionados para comparação e validação da formulação.

Figura 49 – Caminho de equilíbrio - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

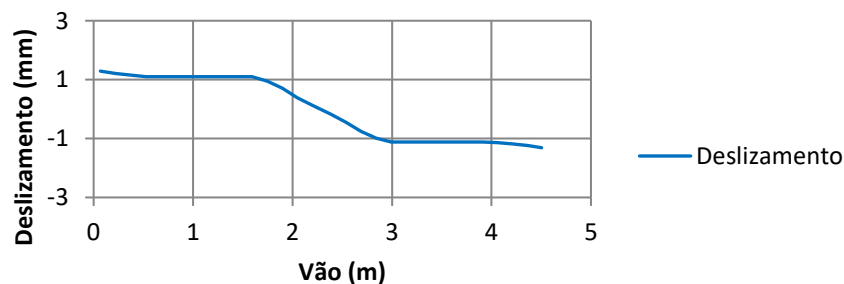


Fonte: Autor (2018)

O resultado gerado pelo programa mostra que a viga modelada representou com bastante eficiência a viga do experimento. Quando comparado com os resultados que consideram a hipótese de interação total de Lou, Lopes e Lopes (2016) e Oliveira (2017), nota-se uma peça mais flexível ao longo de todo o caminho de equilíbrio. A carga última mostrada pelo modelo proposto (801 kN) foi levemente mais alta do que a do ensaio experimental (770 kN), e da mesma forma como a viga A, mostrada anteriormente, a deflexão máxima no meio do vão alcançada pelo código em questão, foi maior.

Outro ponto discutível é o traçado do cabo. A viga A de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) alcançou uma carga última de 700 kN – (Ensaio Experimental) e 741 kN (Modelo Proposto) para as mesmas condições de materiais e geometria da viga C. Isso fortalece a hipótese de que o traçado poligonal do cabo é mais efetivo do que o traçado reto para melhorar o comportamento último da peça.

Figura 50- Deslizamento relativo (*slip*) - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

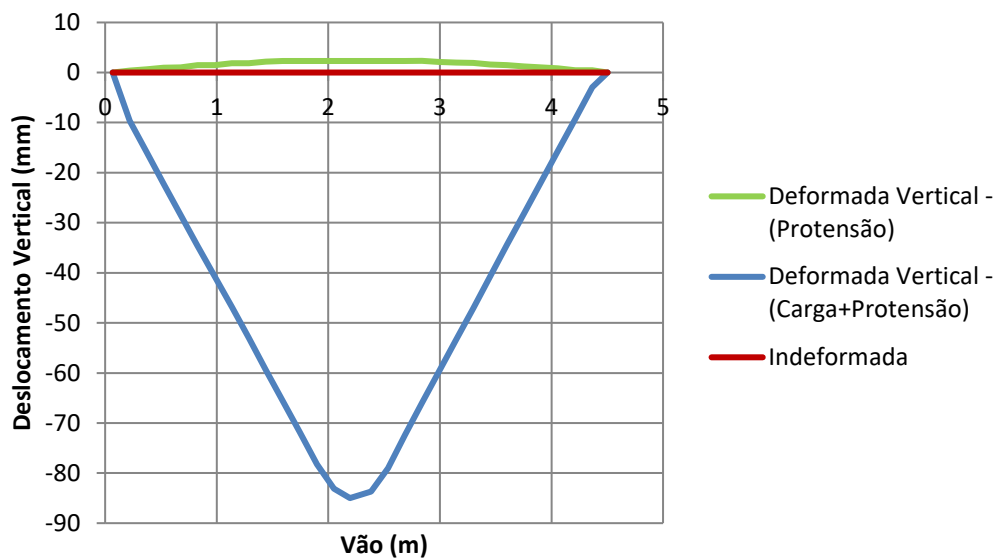


Fonte: Autor (2018)

Em relação ao deslizamento relativo, as vigas com traçado de cabo poligonal e reto apresentaram praticamente o mesmo comportamento. A única diferença notável consiste nos pequenos picos de deslizamentos nas extremidades da viga C, que foram levemente superiores ao da viga A. Esse efeito pode ser explicado devido à excentricidade dos cabos nos pontos extremos serem diferentes em ambas as vigas.

A Figura 51 mostra a configuração deformada vertical da viga na etapa de protensão e de carregamento.

Figura 51 – Deformada vertical - Viga C (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)



Fonte: Autor (2018)

É interessante notar que a deformada vertical na etapa de aplicação da protensão apresenta valores inferiores para um traçado poligonal do cabo. O cabo com traçado reto apresentou uma deflexão de 3.46 mm, já o cabo com traçado poligonal, para uma mesma carga de protensão, apresentou uma deflexão de 2.32 mm. Em relação ao alcance da deflexão última, não existiram diferenças consideráveis entre os valores para uma viga com traçado reto de cabo e para uma com traçado poligonal.

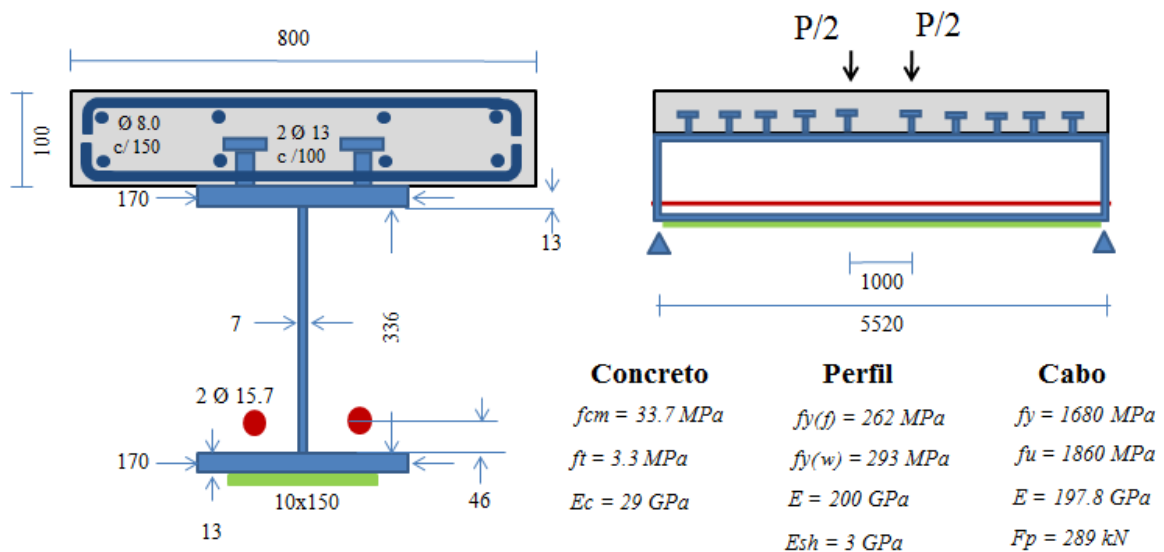
### 6.3 Vigas ensaiadas por Lorenc e Kubica (2006)

O trabalho realizado por Lorenc e Kubica (2006) consiste no ensaio experimental de várias vigas mistas bi apoiadas protendidas, sendo que os perfis metálicos destas vigas são reforçados à flexão por meio da adição de uma chapa de aço na mesa inferior. A seguir duas destas vigas serão modeladas numericamente.

#### 6.3.1 Viga bi apoiada reforçada (Protensão com Traçado Reto)

A viga em questão está referenciada no trabalho dos autores como sendo a Viga B4, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 52. Para a integração da seção transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8 para discretização da alma e 1 para cada mesa. Os cabos de protensão desta viga tem traçado reto. Esta viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo.

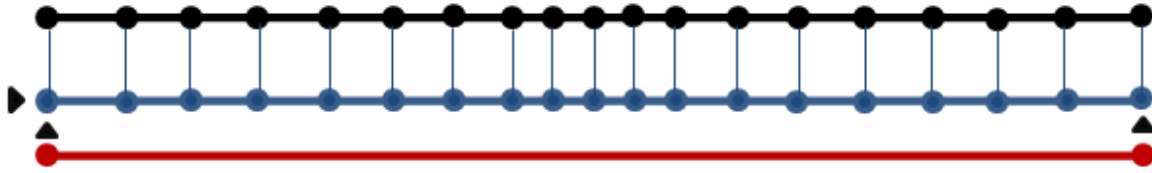
Figura 52 – Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006)



Fonte: Autor (2018)

Os cabos de protensão da viga B4 possui traçado reto, além de existir uma chapa de aço ao longo de toda a região de momento positivo. Os autores calcularam a tensão de escoamento do aço do perfil de forma individual, para as mesas e para a alma. A malha de elementos finitos considerada para esta viga está dividida em 18 elementos de viga e 1 elemento de cabo, como ilustra a Figura 53.

Figura 53 – Malha de elementos finitos da viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006)

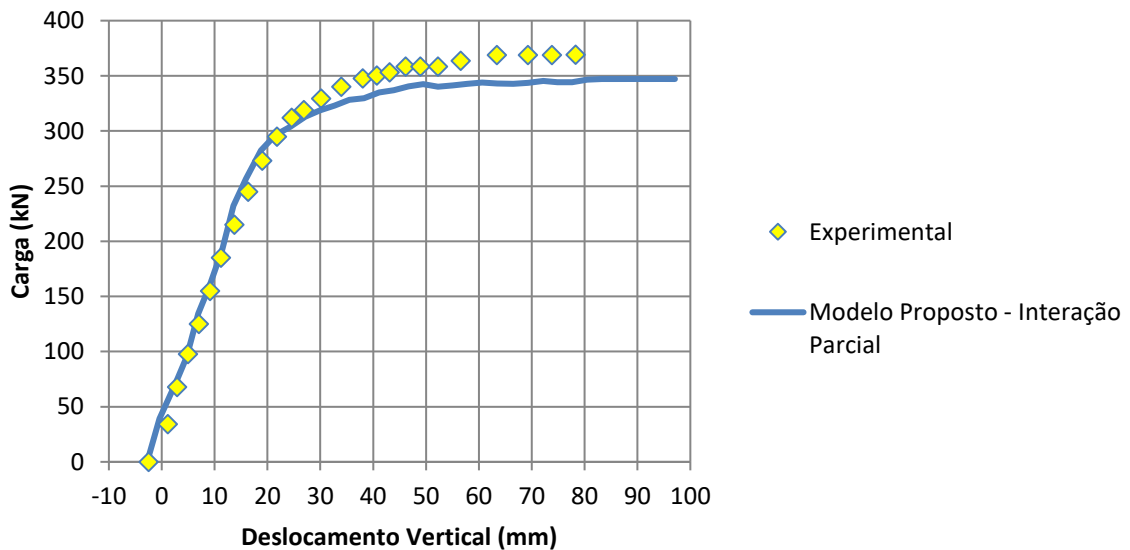


Fonte: Autor (2018)

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Hognestad (1951), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e para representar o comportamento na interface de contato foi adotado o modelo bi linear.

O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão. A Figura 54 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo código em questão, os resultados experimentais de Lorenc e Kubica (2006) foram adicionados para comparação e validação dos resultados.

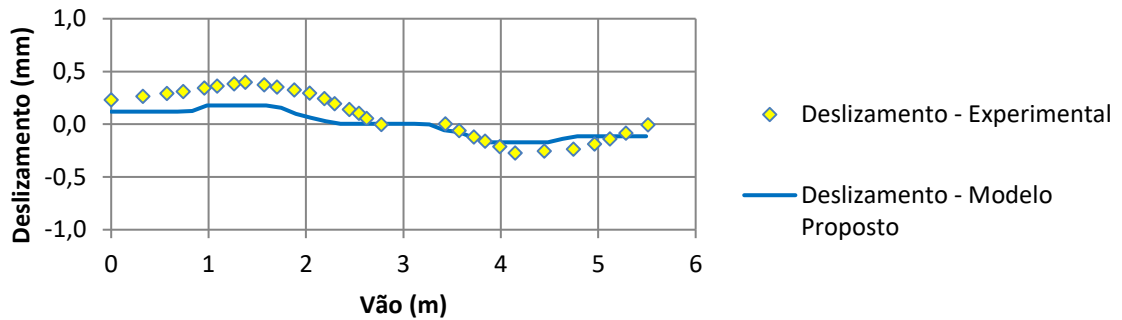
Figura 54 – Caminho de equilíbrio - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006)



Fonte: Autor (2018)

Quando os resultados do código são comparados com os resultados experimentais, nota-se uma boa concordância. No trecho linear, as respostas são basicamente iguais, já no início do trecho não linear, a resposta do modelo proposto é mais flexível. O pico de carga atingido (349 kN) foi similar ao observado no experimento (372 kN), muito embora o deslocamento vertical máximo tenha sido superior.

Figura 55- Deslizamento relativo (*slip*) - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006)

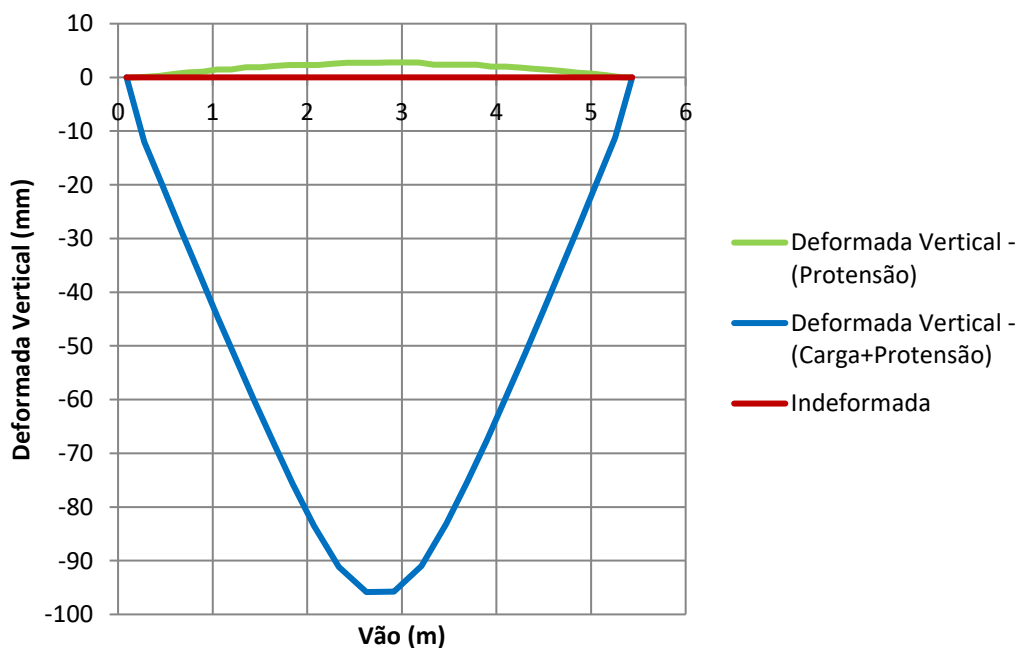


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 55 pode-se observar o deslizamento ao longo do comprimento da viga. Lorenc e Kubica (2006) mediram o deslizamento real da viga ensaiada, e quando comparado as resposta do modelo proposto, nota-se grande semelhança das curvas, por mais que a interface de contato da simulação numérica seja ligeiramente mais rígida. É interessante notar que mesmo em uma análise experimental, os deslizamentos tendem a zerar conforme se aproxima do meio do vão.

A Figura 56 mostra a configuração deformada vertical da viga na etapa de protensão e de carregamento.

Figura 56 – Deformada vertical - Viga B4 (Lorenc e Kubica, 2006)



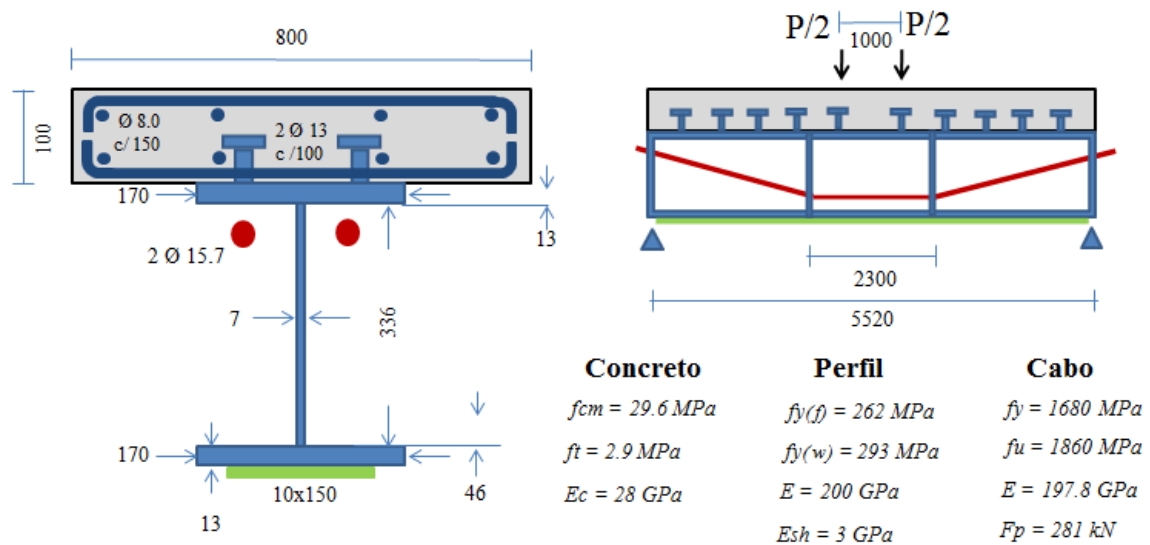
Fonte: Autor (2018)

Avaliando o gráfico da Figura 56, nota-se que o houve uma deflexão de 2.77 mm durante o *step* de aplicação de protensão. Já em relação à deflexão máxima, a viga modelada chegou a 96 mm, valor relativamente mais alto do que a deflexão máxima obtida pelos experimentos.

### 6.3.2 Viga bi apoiada reforçada (Protensão com Traçado Poligonal)

A viga em questão está referenciada no trabalho dos autores como sendo a Viga B3, e possui as dimensões e os materiais apresentados na Figura 57. Para a integração da seção transversal, a laje de concreto foi dividida em 4 fatias de espessura constante, o perfil em 10 fatias, sendo 8 para discretização da alma e 1 para cada mesa. Os cabos de protensão desta viga tem traçado poligonal. Esta viga possui enrijecedores nos pontos de ancoragem do cabo, e na região onde a inclinação do cabo é zero.

Figura 57 – Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006)



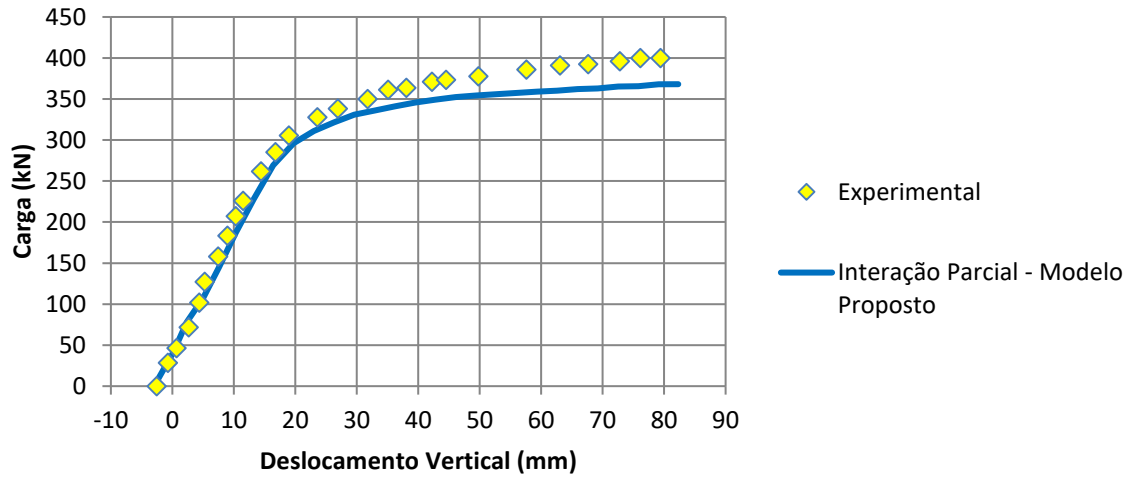
Fonte: Autor (2018)

O modelo constitutivo adotado para o concreto foi o de Hognestad (1951), para o aço passivo foi considerado o modelo elasto plástico perfeito com endurecimento linear, em relação ao aço de protensão, o modelo constitutivo de Menegotto e Pinto (1973) foi utilizado e para o comportamento na interface de contato foi considerado o modelo bi linear.

O deslocamento vertical foi medido em um nó situado no meio do vão. A Figura 58 ilustra o caminho de equilíbrio gerado pelo código proposto. Além dos dados gerados pelo

código em questão, os resultados experimentais de Lorenc e Kubica (2006) foram adicionados para comparação e validação dos resultados.

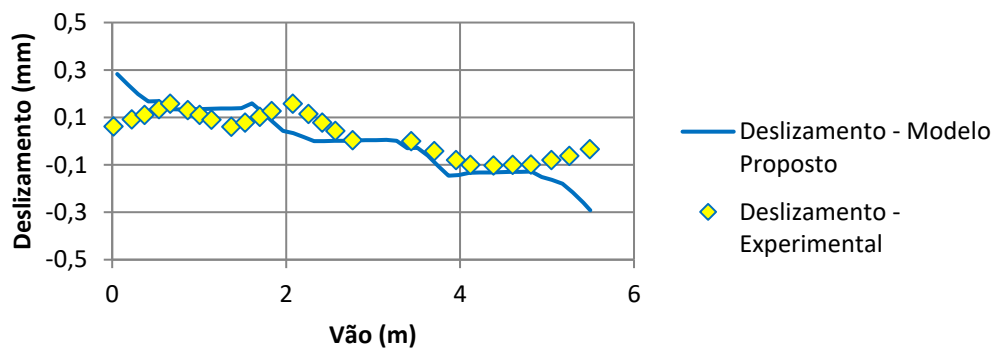
Figura 58 – Caminho de equilíbrio - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006)



Fonte: Autor (2018)

A viga do modelo proposto alcançou uma carga última (368 kN) ligeiramente menor do que a carga última do experimento (400 kN). Além disso, a viga do ensaio numérico representou bem o deslocamento vertical máximo da viga de Lorenc e Kubica (2006). Em relação à curva carga – deslocamento, a viga do modelo proposto se mostrou levemente mais flexível do que a viga do ensaio experimental, principalmente no trecho não linear. O deslizamento relativo entre a laje de concreto e o perfil metálico, pode ser visto na Figura 59.

Figura 59 - Deslizamento relativo (*slip*) - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006)



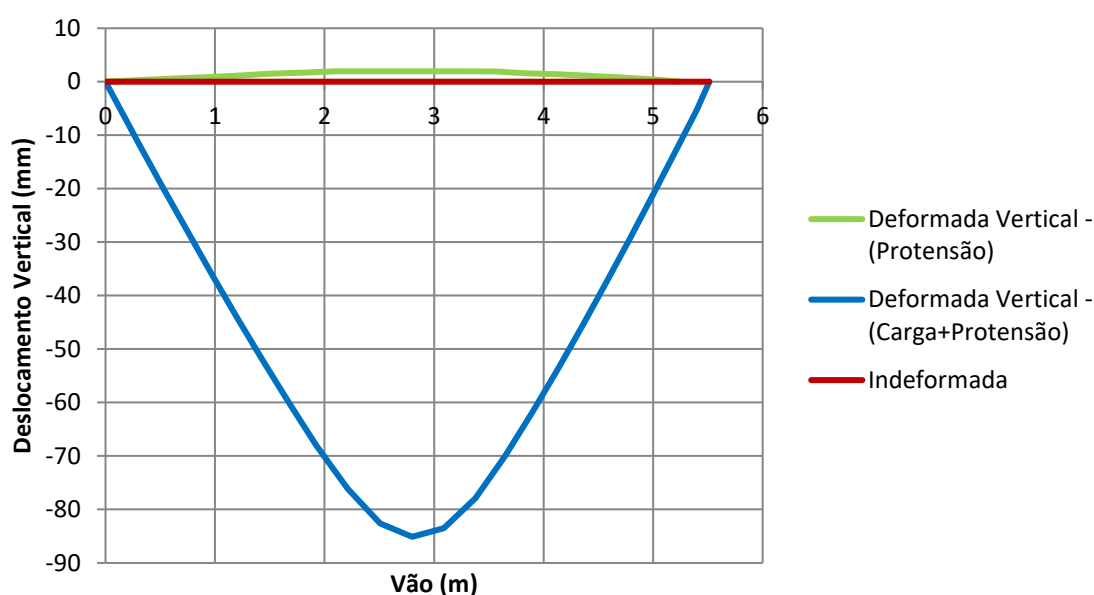
Fonte: Autor (2018)



O deslizamento relativo resultante do código proposto foi bem representativo quando comparado aos da análise experimental, com exceção do deslizamento na região dos apoios. Da mesma forma como ocorreu na viga C de Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990), a curva da Figura 61 apresenta picos de valores nas extremidades, região de ancoragem dos cabos de protensão, e vão reduzindo conforme se aproxima da zona de flexão pura.

Por fim, a configuração deformada da viga em questão é apresentada na Figura 60.

Figura 60 – Deformada vertical - Viga B3 (Lorenc e Kubica, 2006)



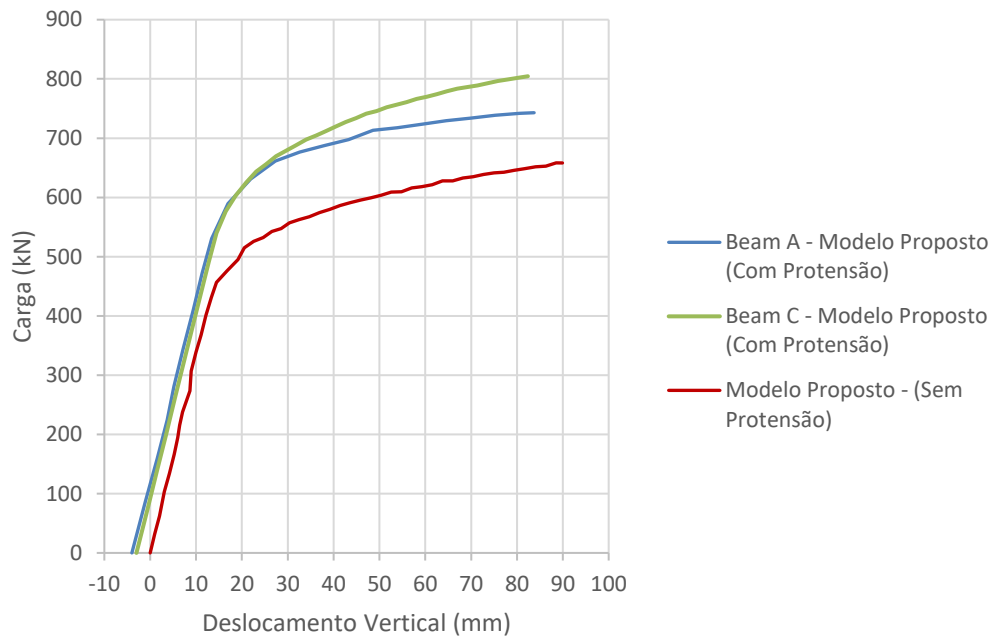
Fonte: Autor (2018)

O deslocamento máximo alcançado pelo programa (85 mm) foi bastante representativo quando comparado ao deslocamento máximo mostrado pelo experimento (80 mm). Já o deslocamento vertical resultante da aplicação de protensão (1.94 mm) foi menor do que o deslocamento vertical da viga B4 (2.76 mm), cujo traçado do cabo é reto.

#### 6.4 Vigas sem protensão

Este tópico apresenta a comparação do comportamento estrutural entre duas vigas analisadas por Ayyub et al (1990) com e sem protensão. Quando a protensão é retirada, as vigas A e C ensaiada pelos autores, se tornam idênticas, isso explica o fato de existir apenas uma curva representando as vigas sem protensão. A Figura 61 ilustra o efeito que a aplicação da protensão tem sobre vigas mistas com interação parcial.

Figura 61 – Caminho de Equilíbrio das vigas A e C de Ayyub et al (1990)

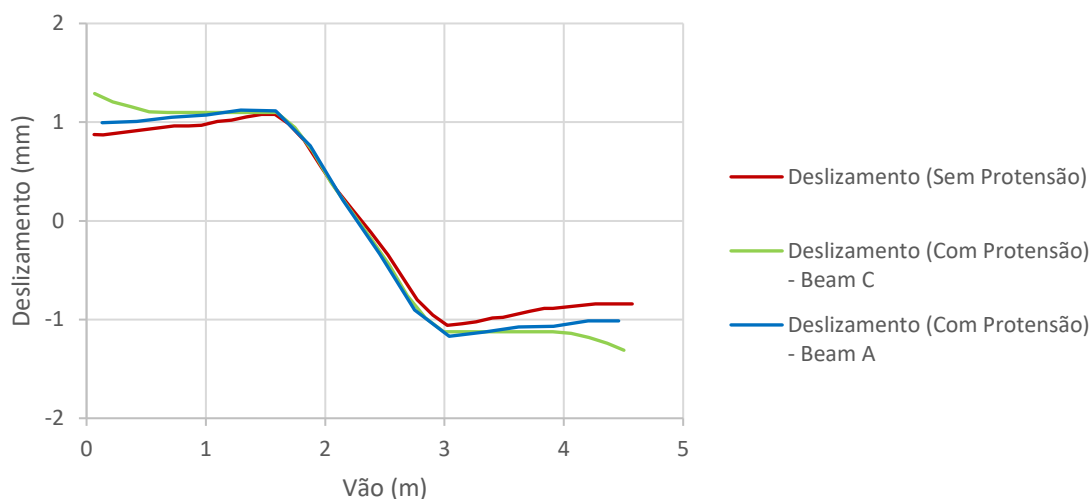


Fonte: Autor (2018)

É notória a diferença existente entre as cargas últimas das vigas protendidas e sem protensão. O resultado gerado pelo programa para a carga última das vigas sem protensão ficou em torno de 660 kN, enquanto a carga última da viga A (Traçado do cabo reto) ficou em torno de 742 kN e a carga última da viga C (Traçado do cabo poligonal) ficou em torno de 804 kN. Em relação ao traçado do caminho de equilíbrio, nota-se que a inclinação do trecho linear, ou seja, da rigidez inicial das peças com e sem protensão é bastante semelhante, porém as vigas com protensão apresentam comportamento linear mesmo em situações de cargas mais elevadas.

Em relação a deflexão última, as vigas sem protensão alcançaram valores ligeiramente maiores do que as vigas com protensão. O deslizamento que ocorreu nestas vigas é ilustrado através da Figura 62.

Figura 62 – Deslizamento das vigas A e C de Ayyub et al (1990)



Fonte: Autor (2018)

Os deslizamentos na interface das vigas com e sem protensão são semelhantes, principalmente quando se compara a viga A (Traçado reto) com as vigas sem protensão. As diferenças máximas são encontradas nas regiões de apoio das vigas e conforme se aproxima do meio do vão (região de flexão pura), os valores para o deslizamento vão se tornando praticamente iguais. Esse efeito leva a crer que a protensão não influencia efetivamente na configuração dos deslizamentos em regiões de flexão pura. A Tabela 1 mostra um comparativo entre as cargas últimas alcançadas pelo código desenvolvido, bem como as obtidas nos ensaios experimentais realizados pelos autores.

Tabela 1 – Cargas Últimas

Cargas Últimas				
Viga	Traçado do Cabo	Modelo Proposto (kN)	Experimento (kN)	Dif. Perc.
Viga A - SAA (1989)	Reto	673	641	4,75%
Viga B - SAA (1989)	Reto	329	303	7,90%
Viga A - ASS (1990)	Reto	743	696	6,33%
Viga C - ASS (1990)	Poligonal	804	770	4,23%
Viga B4 - LK (2006)	Reto	347	369	-6,34%
Viga B3 - LK (2006)	Poligonal	368	400	-8,70%

Fonte: Autor (2018).

Nota-se uma boa concordância de resultados, as diferenças percentuais entre as cargas dos ensaios experimentais em comparação com as obtidas pelo código, não chegam a ultrapassar 10%.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho consistiu em avaliar numericamente vigas mistas de aço e concreto protendidas em que há possibilidade de escorregamento relativo entre os materiais, tendo como abordagem uma análise não linear física e geométrica baseada no método dos elementos finitos. Ao todo, foram analisadas 6 vigas mistas com diferentes configurações de geometria e materiais.

O foco deste trabalho se restringiu a implementações computacionais e modelagens numéricas, sendo assim, não foram explorados aqui aspectos normativos e construtivos referentes a técnica de protensão em vigas mistas, o que deixa esses pontos livres para serem avaliados em trabalhos futuros.

Quando se compara os resultados gerados pelo programa em questão com os resultados presentes na literatura, nota-se que os modelos implementados foram capazes de representar bem os problemas em estudo, mesmo que o elemento finito de pórtico plano considerado aqui seja mais simples do que modelos que abordam elementos finitos bi e tri dimensionais.

Em relação aos modelos constitutivos dos materiais, aqueles que apresentaram melhor resposta para este estudo foram os modelos de Hognestad (1951) e Zupan e Saje (2005), para o concreto, para o aço de protensão o modelo de Menegotto e Pinto (1973) foi bastante representativo e por fim, para representar o comportamento do aço passivo e dos conectores de cisalhamento, as curvas simplificadas mostraram boas respostas.

Os resultados ilustraram que as vigas mistas protendidas com interação parcial são mais flexíveis do que as com interação total. A protensão externa pode melhorar o significativamente a carga última de vigas mistas, mesmo quando se admite a possibilidade de ocorrer deslizamentos na interface. Além disso, o traçado poligonal do cabo de protensão é mais eficiente do que um cabo com traçado reto, no quesito carga última. Não distante, notou-se que mesmo minimamente, a protensão tem efeitos sobre o escorregamento relativo ocorrente entre a viga e a laje de concreto.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se que o modelo apresentado pode ser ampliado para análise de vigas mistas protendidas considerando as perdas ao longo do tempo, além disso pode ser desenvolvido um estudo para avaliar um traçado ótimo para o cabo de protensão.

## REFERÊNCIAS

- AYYUB, B. M.; SOHN, Y. G.; SAADATMANESH, H. Prestressed composite girders under positive moment. **Journal of Structural Engineering**. v. 166, n.11, p. 2931-2951. 1990.
- ALVA, G. M. S.; MALITE M. Comportamento estrutural e dimensionamento de elementos mistos aço-concreto. **Cadernos de Engenharia de Estruturas São Carlos – Universidade de São Paulo**. 2ed. São Carlos, 2005.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BARBIERI, R. A. **Modelo numérico para análise à flexão de elemento estruturais com protensão aderente e não aderente**. 2003. 305f. Tese de doutorado em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.
- BERGAN, P. G.; HOLAND, I. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 17, n.18, p. 443-467, 1979.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**. v. 74, n.1, 1979.
- BATHE, K. J. Prentice Hall, Pearson Education. **Finite element procedures**. 1st ed. Watertown. 1996.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 2002.
- CHEN, S. Experimental study of prestressed steel-concrete composite beams with external tendons for negative moments. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 61, n.3 p. 1613-1630. 2005.
- CHEN, S.; WANG, X.; JIA, Y. A comparative study of continuous steel-concrete composite beams prestressed with external tendons: Experimental investigation. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 65, n. 4, p. 1480-1489. 2009.
- CHEN, S.; JIA, Y. Numerical investigation of inelastic buckling of steel-concrete composite beams prestressed with external tendons. **Thin-Walled Structures**. v. 48, n. 4, p. 233-242. 2010.
- CHAVES, I. A. **Viga mista de aço e concreto constituída por perfil formado a frio preenchido**. 2009. 100f. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- DESAYI, P., Krishnan S. Equation for the stress–strain curve of concrete. **ACI Journal Proceedings**. Farmington Hills, ACI, v. 61, n. 3, p. 345-350, 1964.
- DALL'ASTA, A. D.; DEZI, L. Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams: Analytical model. **Journal of Structural Engineering**. v. 124, n. 5, p. 588-597, 1998

DALL'ASTA A, ZONA A. Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection. **Finite Element Anal Design**. 2004.

DALL'ASTA, A. D.; RAGNI L.; ZONA N.; Steel-concrete composite beams prestressed by external tendons: effects of material and geometric nonlinearities. **Advanced Steel Construction** v.2, n.1, p.53-70, 2006.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). Eurocode 4. **Design of composite steel and concrete structures**, 1994.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). Eurocode 2: **Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. 2004.

FERREIRA, A. C. **Vigas metálicas protendidas: Análise estática, modal e de ruptura do cabo de protensão e aplicativo computacional para projeto**. 2007.100f. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Tecnologia – Universidade de Brasília. Brasília, 2007.

FAFITIS, A. Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, Arizona, v. 127, n. 7, p. 840-846, July, 2001.

GRIFFIS, L.G. The 1994 T.R. High Lecture. Composite frame construction. **National Steel Construction Conference**. Pennsylvania, 1994.

HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. **Bulletin Series no. 399, Bulletin no. I**, University of Illinois Engineering Experiment Station, 1951.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto: Concreto protendido**. 1ed. Rio de Janeiro, 1983.

LORENCE, W.; KUBICA, E. Behavior of composite beams prestressed with external tendons: Experimental study. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 62, n.1, p. 1353-1366. 2006.

LOU, T; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. **Computers and Structures**, v. 28, n.3, p. 1919-1926, 2006.

LOU, T; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v. 119, n. 12, p. 166- 176, 2013.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Interaction between time-dependent and second order effects of externally posttensioned members. **Journal of Bridge Engineering**. v. 20, n.11, p. 1-8, 2015.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Numerical modeling of externally prestressed steel-concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 121, n.4, p. 229-236, 2016.

MALITE, M. **Sobre cálculo de vigas mistas aço-concreto: ênfase em edifícios.** 1990. 122f. Dissertação de Mestrado-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1990.

MENEGOTTO, M.; PINTO P. E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames, including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. **IABSE preliminary report for symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on well-defined repeated loads,** Lisbon. v.12, n.2, p 15–22, 1973.

MATTOCK, Alan H. Flexural strength of prestressed concrete sections by programmable calculator. **PCI Journal.** January - February, v.11, n.4, p 11–22.1979.

MUNIZ, C. F. D. G. **Modelos numéricos para análise de elementos estruturais mistos.** 2005.121f. Dissertação de Mestrado-Escola de Minas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2005.

MACHADO, W. G. **Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial.** 2012. 92f. Dissertação de Mestrado-Escola de Minas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2012.

MOREIRA, L. S. **Análise não linear via elementos finitos de vigas de concreto com protensão não aderente.**2016. 110f. Dissertação de Mestrado – Programa de pós-graduação em engenharia civil: estruturas e construção civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2016.

NEWMARK, N. M. SIESS C. P, VIEST I. M. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. **Proc Soc Exp Stress Anal.** 1951.

NIE, J; TAO, M.; CAI, C. S.; LI, S. Analytical and numerical modeling of prestressed continuous steel-concrete composite beams. **Journal of Structural Engineering.** v. 137, n12, p. 1405-1418. 2011.

NELSEN, A. C. H. **Comportamento estrutural de vigas mistas de aço e concreto com proteção externa.** 2013. 211f. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

Ollgaard, J.G., Slutter, R.G. and Fisher, J.W. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete, **AISC Engineering Journal.**, v.2, n.1, p. 55-64, 1971.

OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A. **Composite steel and concrete structural members.** 5ed. Ed. Pergamon, 1995.

OLIVEIRA, C. E. M, **Análise não linear geométrica de vigas-colunas com interação parcial.** 2011. 121f. Dissertação de Mestrado-Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

OLIVEIRA, M.V.X. **Análise numérica de vigas mistas protendidas.**2017. 89f. Dissertação de Mestrado – Programa de pós-graduação em engenharia civil: estruturas e construção civil. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, Fortaleza, 2017.

QUEIROZ, G.; PIMENTA, R. J.; DA MATA, L. A. C. **Elementos das estruturas mistas de aço e concreto**. Editora O Lutador. 1ed. Belo Horizonte, 2001.

REIS, F. J. C. **Influência do nível de protensão na deformação de estruturas executadas com protensão externa**. 2013. 111f. Dissertação de Mestrado-COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

SAADATMANESH, H.; ALBRECHT, P.; AYYUB, B. M. Experimental study of prestressed composite beams. **Journal of Structural Engineering**. v. 115, n. 9, p. 2348-2363. Tucson, 1989.

SILVA, R. J. C. **Punção em lajes cogumelo protendidas com cordoalhas não aderentes e pilares de dimensões diferentes**. 2005. 200f. Tese de Doutorado – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília. Brasília, 2005.

SOUSA JR, J. B. M.; OLIVEIRA, C. E. M.; SILVA, A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 66. n.4, p. 223-243 2010.

SOUZA, D. A. Estruturas mistas de aço e concreto. **56º Congresso Brasileiro do Concreto**. Natal, 2014.

TAO, Z.; HAN, L. H.; ZHAO, X. L. (2004). Behaviour of concrete-filled double skin (CHS inner and CHS outer) steel tubular stub columns and beam-columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 60, n.13, p. 1129 – 1158. 2004.

ZONG Z., WEI C.; CHENG. Experimental research of steel-concrete beams with u-shape steel section[J]. **Building Structure**. v. 6, n. 3, p. 1121 – 1152. 2003.

ZUPAN, D. & SAJE, M. Analytical integration of stress field and tangent material modulus over concrete cross-sections. **Computers and Structures**. v. 83, n.4, p. 2368-2380, 2005.

ZONA, A.; RAGNI, L. & DALL'ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite Elements in Analysis and Design**. v. 44, n.11, p. 910-919. 2008.