



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO HENRIQUE MARINHO PONTES

DIFUSÃO EM MEIOS DESORDENADOS

FORTALEZA

2018

JOÃO HENRIQUE MARINHO PONTES

DIFUSÃO EM MEIOS DESORDENADOS

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

FORTALEZA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P858d Pontes, João Henrique Marinho.

Difusão em meios desordenados / João Henrique Marinho Pontes. – 2018.
50 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira.

1. Sistemas desordenados. 2. Random Walk. 3. Percolação. I. Título.

CDD 530

JOÃO HENRIQUE MARINHO PONTES

DIFUSÃO EM MEIOS DESORDENADOS

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de Física,
da Universidade Federal do Ceará, como requi-
sito parcial para a obtenção do Título de Bacha-
rel em Física.

Aprovada em 03/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cláudio Lucas Nunes de Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. André Auto Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Saulo-Davi Soares e Reis
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos Meus Pais e Família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus familiares, em especial aos meus pais, Francineide Marinho Pontes e João Carlos Lima Pontes, minha irmã, Letícia, e minha namorada, Sara, por todo apoio que me proporcionaram.

Agradeço também ao professor Cláudio Lucas Nunes de Oliveira por sua orientação nos projetos de iniciação científica e durante a realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer a todo o corpo docente do Departamento de Física, em especial aos professores André Auto Moreira, Carlos William de Araújo Paschoal, Humberto de Andrade Carmona, José Ramos Gonçalves, Roberto Vinhaes Maluf Calvalcante, Ricardo Renan Landim e Saulo-Davi Soares e Reis.

Aos meus amigos da graduação Afonso Moura, Alyson Freitas, Antônio Edinaldo, Daniel Barbosa, Higor Monteiro, Johnathas D'arf, Kaique Billotta, Luan Mesquita, Pablo Motta, Victor Sales, William Cordeiro.

Por fim, quero agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelas bolsas de iniciação científica concedidas durante minha graduação.

RESUMO

O processo de difusão é amplamente abordado em sistemas físicos onde ocorre transporte de matéria em um meio. Em meios homogêneos, onde não há barreiras, a difusão é caracterizada como normal, pois as partículas tem um deslocamento quadrático médio que cresce linearmente com o tempo. Porém, em meios criticamente desordenados, quando as partículas estão presas dentro de um região com contornos fractais, a relação do deslocamento quadrático médio da partícula deixa de ser linear com o tempo, caracterizando o processo de difusão anômala. Diversos exemplos de meios desordenados podem ser encontrados na natureza e, por conta disso, o estudo do processo de difusão anômala tem grande aplicabilidade. Existem modelos estatísticos capazes de simular tanto o processo de difusão de partículas quanto a geometria de meio desordenado, gerando um objeto fractal. Neste trabalho utilizamos o modelo de percolação de modo a obter um fractal, que representa um meio criticamente desordenado, e utilizamos o modelo de *random walk* para simular o movimento aleatório de partículas que se difundem através deste meio. Assim, determinamos a correlação entre a geometria do sistema e o processo dinâmico de difusão, caracterizada pelos expoentes dinâmicos d_w , que representa a dimensão fractal do trajetória da partícula, e $\tilde{\mu}$, que representa a condutividade do meio. Obtivemos também a dimensão espectral do sistema, d_s , em um valor próximo ao previsto através da conjectura de Alexander-Orbach.

Palavras-chave: Sistemas Desordenados. Random Walk. Percolação.

ABSTRACT

The diffusion process is widely approached in physical systems where matter transport takes place in a medium. In homogeneous media, where there are no barriers, the diffusion is characterized as normal, because the particles have a mean square displacement that grows linearly with time. However, in critically disordered media, when the particles are trapped within a region with fractal contours, the relation of the mean square displacement of the particle ceases to be linear with time, characterizing the process of anomalous diffusion. Several examples of disordered media can be found in nature and, because of this, the study of the anomalous diffusion process has great applicability. There are statistical models capable of simulating both the process of diffusion of particles and the geometry of disordered medium, generating a fractal object. In this work we use the percolation model to obtain a fractal, which represents a critically disordered media, and we use the random walk model to simulate the random motion of particles that diffuse through this medium. Thus, we determine the correlation between the system geometry and the dynamic diffusion process, characterized by the dynamic exponents d_w , which represents the fractal dimension of the trajectory of the particle, and $\tilde{\mu}$, which represents the conductivity of the medium. We also obtained the spectral dimension of the system, d_s , in a value close to that predicted through the Alexander-Orbach conjecture.

Keywords: Desordered Systems. Random Walk. Percolation.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – (a) Representação esquemática de um <i>random walk</i> unidimensional.(b) Trajetórias de 5 partículas executando um <i>random walk</i> não-tendencioso ($u = w = 1/2$) após 100 passos.</p>	14
<p>Figura 2 – Comportamento do deslocamento quadrático médio com o tempo para passos de tamanho $l = 1$ ocorrendo em um tempo também unitário ($\tau = 1$) após 100.000 passos. Como esperado, a reta apresenta coeficiente angular igual a 1. Média obtida sobre um conjunto de 1000 realizações.</p>	16
<p>Figura 3 – Distribuição de probabilidade $P(x, t)$ para diferentes valores de tempo. Fica clara a influência do tempo na largura da distribuição.</p>	17
<p>Figura 4 – Trajetória de uma partícula executando um <i>random walk</i> em uma rede bidimensional quadrada para diferentes números de passos.</p>	20
<p>Figura 5 – Deslocamento quadrático médio de uma partícula se movendo em uma rede quadrada após 100.000 passos. Aqui usamos passos de tamanho $l = 2$ ocorrendo em um tempo $\tau = 2$. Como esperado, o valor do coeficiente angular da reta obtida é aproximadamente 2.</p>	21
<p>Figura 6 – (a) Representação esquemática do modelo utilizado na simulação de um <i>random walk</i> no espaço contínuo. (b) Trajetória de uma partícula após 1000 passos de tamanho $l = 1$.</p>	22
<p>Figura 7 – (a) Histograma do tamanho dos passos para uma distribuição gaussiana de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ (b) Trajetoria após 1000 passos de uma partícula realizando um <i>random walk</i> de passo gaussiano com os mesmos parâmetros usados no histograma.</p>	23
<p>Figura 8 – Deslocamento quadrático médio após 100.000 passos de uma partícula que se move com passos de comprimento gaussiano e direção aleatória. Aqui usamos os parâmetros $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\tau = 1$.</p>	24
<p>Figura 9 – Análise da influência dos parâmetros da distribuição gaussiana no coeficiente angular da reta. Em (a), mantemos a média da distribuição constante ($\mu = 0$) e variamos o valor do desvio-padrão, obtendo uma relação quadrática, como esperado. Em (b), invertemos a ordem dos parâmetros, fixando o desvio-padrão em $\sigma = 2$ e variando o valor da média. Novamente obtivemos uma relação quadrática para o coeficiente angular.</p>	24

Figura 10–(a) Histograma da distribuição de tamanho dos passos a partir de uma lei de potência de expoente $\alpha = 1,3$.(b) Trajetória de uma partícula seguindo a distribuição descrita acima após 1000 passos.	26
Figura 11 –Deslocamento quadrático médio em função do tempo para $\alpha = 1,3$. Essa curva apresenta o comportamento na forma da lei de potência $\langle r^2 \rangle = t^{1,69}$ (linha tracejada), caracterizando um processo superdifusivo.	26
Figura 12 –Construção da curvas de Koch para as seis primeiras gerações da curva, de cima para baixo[1].	28
Figura 13 –O conjunto de Mandelbrot é construído através da equação de iteração $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde z é um número complexo. Para um dado valor da constante complexa c e um valor inicial $z_0 = 0$, se o valor de $ z $ é menor que 2, então o ponto no plano complexo na posição c faz parte do conjunto de Mandelbrot. Na imagem podemos ver a característica de autossimilaridade, comum nos fractais.	29
Figura 14 –Diferença entre o tapete de Sierpinski (a) determinístico e (b) aleatório [2]. . .	30
Figura 15 –Representação do modelo de percolação em uma rede quadrada com $L=10$. Quadrados pretos representam sítios vazios enquanto os brancos representam sítios ocupados. Se o sítio em vermelho for ocupado, passará a existir um <i>cluster</i> que percola o sistema.	32
Figura 16 –Probabilidade de um sítio ocupado pertencer ao <i>cluster</i> percolante como função da probabilidade de ocupação p . Em (a), temos o gráfico obtido para uma rede quadrada de lado $L= 1024$ onde podemos ver o comportamento dado pela equação 3.5. Em (b), podemos ver a influência do valor de L na transição, notando que quanto maior é a rede mais abrupta é a transição. Do gráfico pode-se estimar um valor para o ponto crítico p_c como um valor próximo de 0,6.	33
Figura 17 –No limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) temos que $L^{-1} \rightarrow 0$, ou seja, o ponto crítico de percolação para uma rede infinita é numericamente igual ao coeficiente linear da reta obtida.	34
Figura 18 –Maior <i>cluster</i> para diferentes probabilidades de ocupação em uma rede quadrada de $L=1024$. Para $p = 0,58$ (a), o maior agregado ainda tem um tamanho pequeno quando comparado ao tamanho total do sistema. No momento em que o sistema atinge a criticalidade (b), $p = p_c$, o maior <i>cluster</i> atravessa o sistema e passa a ter um tamanho comparável ao tamanho da rede. Por fim, para $p = 0,61$ (c), o maior <i>cluster</i> já ocupa quase todo o sistema.	35

Figura 19 –Gráfico $M(L) \times L$. Em escalas logarítmicas a lei de potência, equação 3.3, se torna uma reta cujo coeficiente angular é numericamente igual à dimensão fractal do <i>cluster</i> percolante d_f	36
Figura 20 –Histograma para a distribuição de tamanho dos <i>clusters</i> para $p = p_c$ com caixas de tamanho em escala logarítmica, onde podemos ver que na criticalidade existem agregados de vários tamanhos com uma maior número de agregados pequenos.	36
Figura 21 –Em escala logarítmica, a relação mostrada pela equação 3.6 se torna uma reta cujo coeficiente angular é numericamente igual ao negativo do expoente de Fisher.	37
Figura 22 –(a) Trajetória de uma partícula executando um <i>random walk</i> (em vermelho) em um <i>cluster</i> de percolação. (b) Trajetória ampliada.	38
Figura 23 –Deslocamento quadrático médio como função do tempo para diferentes valores da probabilidade de ocupação p	39
Figura 24 –(a) Deslocamento quadrático médio com função do tempo com o sistema na criticalidade. Em (b), o gráfico é mostrado em escalas logarítmicas, apresentando o comportamento semelhante ao da reta tracejada obtida através de regressão linear.	40
Figura 25 –Média da distribuição de probabilidade, $P(r)$, realizada sobre processos de difusão em 1000 <i>clusters</i> percolantes.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	O MODELO DE <i>RANDOM WALK</i>	14
2.1	Modelo Unidimensional	14
2.1.1	Limite Gaussiano	16
2.1.2	Difusão	17
2.1.3	Condutividade	18
2.1.4	<i>Random Walk</i> em d dimensões	19
2.2	Varição no tamanho dos passos	22
2.2.1	Distribuição Gaussiana	23
2.2.2	Difusão anômala e Voos de Lévy	25
3	PERCOLAÇÃO	27
3.1	Introdução à geometria fractal	27
3.1.1	Fractais Determinísticos	28
3.1.2	Fractais Aleatórios	29
3.2	O modelo de Percolação	31
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	38
4.1	Dimensão Fractal da Trajetória	39
4.2	Condutividade em Fractais	41
4.3	Dimensão Espectral	42
4.4	Distribuição de Probabilidades	43
5	CONCLUSÃO	44
	APÊNDICE A - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL	45
	APÊNDICE B - LIMITE GAUSSIANO PARA A DISTRIBUIÇÃO BINO- MIAL	46
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Se uma gota de tinta é colocada em uma superfície de água em um copo, por exemplo, veremos que inicialmente a tinta se encontra concentrada no seu ponto de origem e, com o passar do tempo, ela se espalha fazendo com que toda a quantidade de água do copo esteja uniformemente colorida. Esse é um exemplo clássico de difusão, fenômeno caracterizado pelo transporte de matéria de um ponto a outro do espaço devido ao movimento aleatório de átomos ou moléculas, onde as partículas de um soluto são transportadas em um solvente devido à presença de um gradiente de concentração.

Macroscopicamente, esse movimento se dá na direção contrária ao gradiente de concentração, esse comportamento é mostrado através da primeira lei de Fick,

$$\mathbf{J} = -D\nabla\rho,$$

onde \mathbf{J} representa o fluxo de difusão, D é chamado de constante de difusão e ∇ indica o gradiente da concentração ρ . Assumindo a equação da continuidade, dada por,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

e combinando as equações acima, obtemos a segunda lei de Fick, também conhecida como equação de difusão,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\nabla^2\rho.$$

O evento macroscópico de difusão, por outro lado, pode ser descrito microscopicamente por um processo estatístico. Se, durante a difusão de uma gota de tinta em um copo com água, como no exemplo citado, pudéssemos analisar o movimento individual de uma partícula da tinta, veríamos que as colisões entre ela e as moléculas de água fazem com que as direções do seu movimento sejam aleatórias. Uma das maneiras de descrever esse movimento se dá através do modelo de *random walk*.

O *random walk* é um modelo utilizado na descrição de um grande número de sistemas desordenados cujo as variáveis são aleatórias e apresentam uma evolução temporal. Partindo de um modelo inicial bastante simples, como o caso de um movimento aleatório unidimensional, podem ser feitas diversas variações de modo a deixar o modelo mais geral. Por conta dessas variações, o *random walk* é, sem dúvidas, um dos modelos matemáticos com maior número de aplicações, sendo utilizado na modelagem de sistemas físicos [3], biológicos [4], econômicos [5] e em diversas outras áreas do conhecimento [6, 7].

Pode-se mostrar que um conjunto de partículas executando um movimento aleatório segundo o modelo de *random walk* descreve, no limite de espaço e tempo contínuos, um processo macroscópico de difusão. Para um processo de difusão normal, o deslocamento quadrático médio desse conjunto de partículas obedece à equação

$$\langle r^2 \rangle \sim t,$$

onde r é a posição de uma partícula em um sistema de coordenadas e t é o tempo. A média, $\langle \rangle$, é calculada sobre os valores de r de várias partículas.

Esse resultado é obtido através do modelo de *random walk* e em grande parte de suas variações. Uma exceção é uma variação do *random walk* chamada Voo de Lévy. Nesse modelo, o comprimento dos passos das partículas tem um valor aleatório dado por uma distribuição na forma de lei de potência, fazendo com que a relação do deslocamento quadrático médio com o tempo deixe de ser linear, caracterizando o fenômeno de difusão anômala.

Além do modelo de Voo de Lévy, a difusão em meios desordenados, como fractais, é também anômala e, devido a grande presença de objetos fractais na natureza, o seu estudo é de grande interesse científico, sendo utilizado na modelagem de diversos sistemas físicos [2].

Pierre Gilles de Gennes foi o primeiro a estudar o processo de difusão em *clusters* de percolação, criando o termo "formigas no labirinto" para descrevê-lo. Esse modelo pode ser aplicado também no estudo da difusão de partículas através de um fluido em um meio poroso, por exemplo [8]. Neste trabalho, utilizamos o modelo de percolação para gerar um objeto fractal e analisar como partículas se difundem em um meio limitado pelo contorno desse fractal.

2 O MODELO DE *RANDOM WALK*

2.1 Modelo Unidimensional

O modelo de *random walk* pode ser descrito, de uma maneira bastante simples, como o movimento aleatório de uma partícula em uma dimensão onde a cada passo de tempo a direção desse movimento é escolhida com probabilidade u para a direita e $w = 1 - u$ para a esquerda, como mostrado na Figura 1.

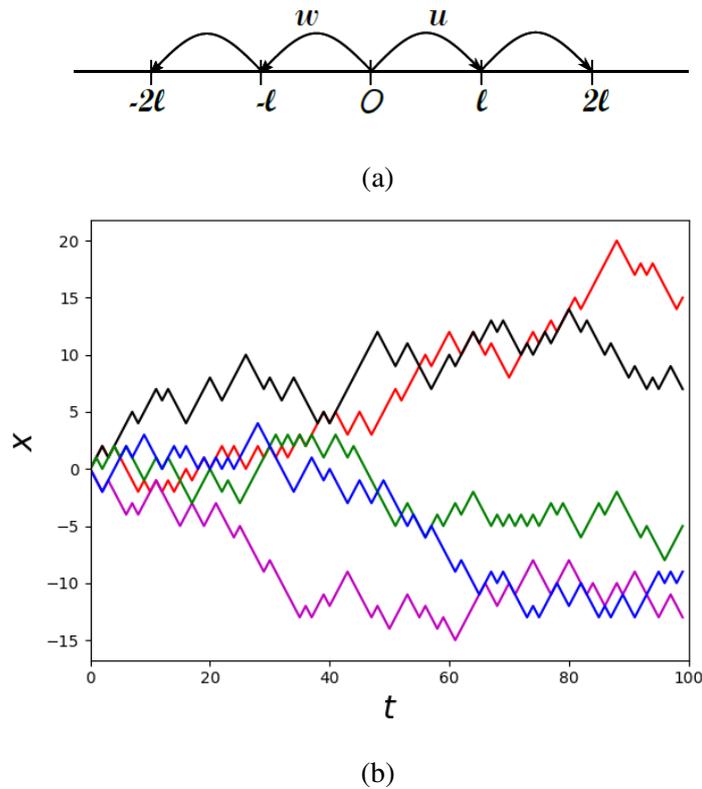


Figura 1: (a) Representação esquemática de um *random walk* unidimensional. (b) Trajetórias de 5 partículas executando um *random walk* não-tendencioso ($u = w = 1/2$) após 100 passos.

Como mostrado no Apêndice A, a probabilidade de, após N passos, observarmos N_1 para a direita é dada pela distribuição binomial

$$P_N(N_1) = \binom{N}{N_1} u^{N_1} w^{N-N_1}. \quad (2.1)$$

Assim, podemos calcular o valor médio de N_1 , como

$$\langle N_1 \rangle = u \frac{\partial}{\partial u} \left[(u + w)^N \right] = Nu, \quad (2.2)$$

e de forma semelhante, o número médio de passos para a esquerda é dado por

$$\langle N_2 \rangle = N - \langle N_1 \rangle = Nw.$$

Podemos usar novamente a operação $(u \partial/\partial u)$ para obtermos o valor médio de N_1^2 e N_2^2 ,

$$\begin{aligned} \langle N_1^2 \rangle &= \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \left[(u+w)^N \right] = uN + u^2 N(N-1), \\ \langle N_2^2 \rangle &= \left(w \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 \left[(u+w)^N \right] = wN + w^2 N(N-1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dessa forma, podemos calcular o deslocamento médio da partícula. Para isso, definimos o deslocamento efetivo da partícula como $m = N_1 - N_2$. Assim, após N passos, a partícula se encontra na posição $x = ml$, onde l é o comprimento de cada passo. Portanto, o deslocamento médio da partícula é dado por

$$\langle x \rangle = \langle m \rangle l = (\langle N_1 \rangle - \langle N_2 \rangle) l = Nl(u - w). \quad (2.4)$$

Logo, para um movimento não-tendencioso ($u = w = 1/2$), temos

$$\langle x \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Esse resultado mostra que, em média, as partículas tendem a se mover em torno do seu ponto de origem. Porém, visando compreender como essas partículas se movem à medida em que o número de passos aumenta, podemos obter o deslocamento quadrático médio $\langle x^2 \rangle$, de modo que

$$\langle x^2 \rangle = \langle m^2 \rangle l^2 = (\langle N_1^2 \rangle + \langle N_2^2 \rangle - 2\langle N_1 N_2 \rangle) l^2.$$

Usando as equações 2.3 e assumindo $u = w = 1/2$, é fácil mostrar que

$$\langle x^2 \rangle = Nl^2. \quad (2.6)$$

Supondo que cada passo ocorra em um tempo constante τ , o tempo total de movimento é $t = N\tau$. Assim,

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad (2.7)$$

onde $D = l^2/2\tau$ é conhecido como constante de difusão.

Desse modo, o deslocamento quadrático médio das partículas apresentam um comportamento linear com o tempo, como mostrado na Figura 2.

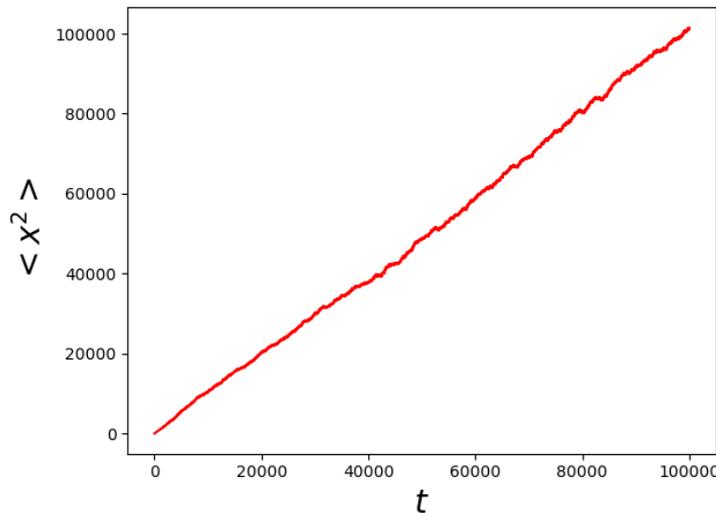


Figura 2: Comportamento do deslocamento quadrático médio com o tempo para passos de tamanho $l = 1$ ocorrendo em um tempo também unitário ($\tau = 1$) após 100.000 passos. Como esperado, a reta apresenta coeficiente angular igual a 1. Média obtida sobre um conjunto de 1000 realizações.

2.1.1 Limite Gaussiano

É interessante observar o comportamento da distribuição binomial à medida em que o número de passos aumenta. Nesse limite, podemos usar a aproximação de Stirling na forma

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \quad (2.8)$$

Então, como mostrado no Apêndice B, obtemos que, para um número grande de passos, a distribuição binomial, representada pela equação 2.1, tende para uma distribuição gaussiana na forma:

$$P(x, t) = P_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (2.9)$$

O valor da constante P_0 pode ser obtido através da normalização, por fim obtemos a forma completa de $P(x, t)$,

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (2.10)$$

Essa distribuição apresenta a forma de uma *distribuição gaussiana* centrada na origem e com desvio-padrão $\sigma = \sqrt{2Dt}$. A largura da gaussiana é diretamente ligada ao seu desvio-padrão e nesse caso ao tempo. Logo, no tempo $t = 0$ a probabilidade $P(x, t)$ apresenta-se como um caso limite da distribuição gaussiana quando $\sigma \rightarrow 0$, podendo ser escrita como $P(x, 0) = \delta(x)$, onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac. Isso significa que no tempo $t = 0$ a partícula com certeza encontra-se na origem e à medida em que o tempo aumenta, a probabili-

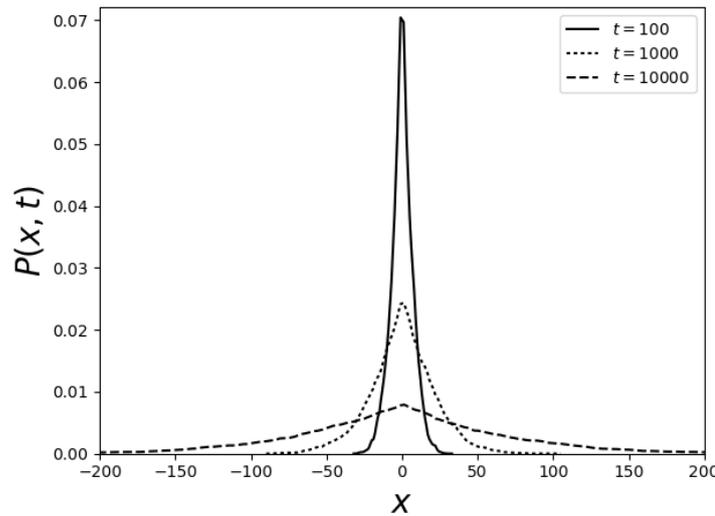


Figura 3: Distribuição de probabilidade $P(x, t)$ para diferentes valores de tempo. Fica clara a influência do tempo na largura da distribuição.

dade de encontrar a partícula distante da sua origem também aumenta.

Podemos obter novamente os valores médios apresentados nas equações 2.5 e 2.7 agora por meio da forma gaussiana, onde

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x, t)dx = 0, \quad (2.11)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2P(x, t)dx = 2Dt.$$

2.1.2 Difusão

Para explicar a conexão entre o modelo de *random walk* e os fenômenos de difusão, podemos assumir o fato de que, para se encontrar em uma dada posição x no tempo $t + \tau$ é preciso que a partícula ou esteja na posição $x - l$ no tempo t e se mova para a direita ou esteja na posição $x + l$ no tempo t e se mova para a esquerda. Assim, o movimento pode ser descrito através da seguinte equação estocástica

$$P(x, t + \tau) = uP(x - l, t) + wP(x + l, t). \quad (2.12)$$

Assumindo $u = w = 1/2$, podemos escrever a equação 2.12 como

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \frac{1}{2}[P(x - l, t) + P(x + l, t) - 2P(x, t)], \quad (2.13)$$

ou ainda,

$$\frac{P(x, t + \tau) - P(x, t)}{\tau} = \frac{l^2}{2\tau} \frac{P(x - l, t) + P(x + l, t) - 2P(x, t)}{l^2}. \quad (2.14)$$

Em um limite onde l e τ são muito pequenos, ou seja, fazendo $l, \tau \rightarrow 0$, obtemos a equação de difusão

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

É fácil ver, através de substituição direta, que a equação 2.10 é solução da equação de difusão. Assim, o fenômeno macroscópico de difusão pode ser entendido a partir de um processo microscópico, como partículas em movimento aleatório, em um limite de espaço e tempo contínuos.

2.1.3 Condutividade

Para obtermos a equação de difusão (equação 2.15), assumimos um movimento não-tendencioso, ou seja, a probabilidade de um passo ser dado para a direita é a mesma de um passo ser dado para a esquerda. Porém, podemos considerar um modelo onde existe uma assimetria no movimento caracterizado por um parâmetro ϵ . Assim, temos que

$$u = \frac{1}{2} + \epsilon,$$

e

$$w = \frac{1}{2} - \epsilon.$$

Dessa forma, a equação 2.15 se torna

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (2.16)$$

onde D é a constante de difusão e v representa a velocidade de arrasto da partícula, de modo que

$$v = \frac{2\epsilon a}{\tau}.$$

Considerando a conservação da probabilidade, é válida a equação da continuidade, que, em uma dimensão, tem forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \quad (2.17)$$

onde $J = vP - D \frac{\partial P}{\partial x}$ representa uma corrente de probabilidade.

Se consideramos agora que as partículas possuem cargas elétricas de valor e que

se difundem com constante de difusão D em um metal e adicionamos um campo elétrico de módulo E no sistema, o movimento das partículas passa a ter uma direção preferencial fazendo com que elas atinjam uma velocidade terminal constante, v . De acordo com a Lei de Ohm, temos

$$J = nev = -\sigma E, \quad (2.18)$$

onde n é a densidade de carga por volume e σ é a condutividade do material.

No caso em que a posição das partículas no metal está restrita a valores positivos de x e o campo elétrico está na direção de x positivo, as cargas chegarão a um estado estacionário onde $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Assim,

$$D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - v \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

e, usando a equação 2.18, temos

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma E}{neD} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

A solução dessa equação é dada por:

$$P(x) = P_0 \exp\left(-\frac{\sigma E x}{neD}\right), \quad (2.20)$$

onde utilizamos como condição de contorno o fato de que as partículas se movem apenas na região em que $x > 0$, ou seja, $J(x = 0) = 0$.

Se o metal está à uma temperatura T , as cargas atingirão o equilíbrio térmico caracterizado pela distribuição de Boltzmann,

$$P_B(x) = P_{B_0} \exp\left(-\frac{Eex}{k_B T}\right), \quad (2.21)$$

onde o termo Eex representa a energia das cargas e k_B é a constante de Boltzmann.

Comparando as equações 2.20 e 2.21, temos a equação conhecida como relação de Einstein para a condutividade, dada por

$$\sigma = \frac{ne^2 D}{k_B T}. \quad (2.22)$$

2.1.4 *Random Walk* em d dimensões

O modelo até aqui desenvolvido, para $d = 1$, pode ser facilmente estendido para dimensões superiores. Supondo que a partícula se mova agora sobre uma rede d -dimensional,

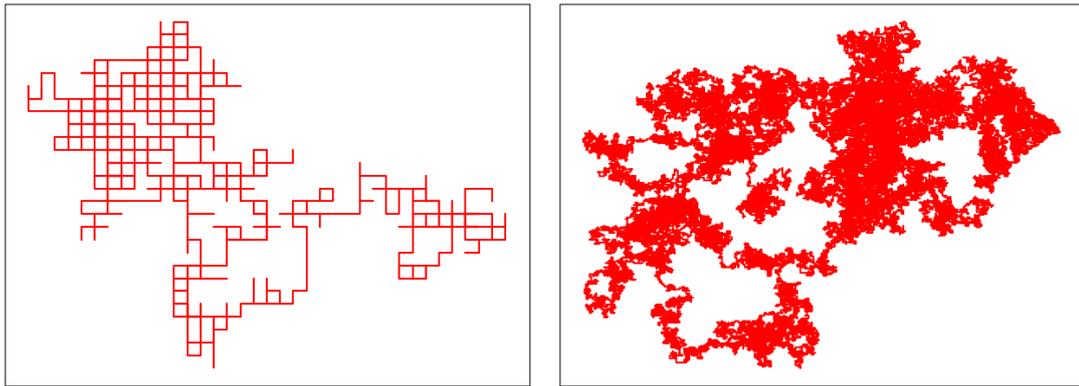
(a) 10^3 passos(b) 10^6 passos

Figura 4: Trajetória de uma partícula executando um *random walk* em uma rede bidimensional quadrada para diferentes números de passos.

cada passo de tamanho l pode ser representado pelo vetor

$$\mathbf{u}_i = l \mathbf{e}_i,$$

onde \mathbf{e}_i é o vetor unitário que aponta na direção do próximo sítio da rede a ser visitado.

Dessa forma, o deslocamento total da partícula é dado por

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^N \mathbf{u}_i. \quad (2.23)$$

Como cada passo tem sua direção escolhida aleatoriamente, temos que $\langle \mathbf{e}_i \rangle = 0$ e, conseqüentemente,

$$\langle \mathbf{r} \rangle = 0. \quad (2.24)$$

Podemos também escrever o deslocamento quadrático médio, como

$$r^2 = \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j.$$

Visto que $\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, temos que:

$$\langle r^2 \rangle = l^2 \sum_{i,j} \delta_{ij} = l^2 N \quad (2.25)$$

ou ainda,

$$\langle r^2 \rangle = 2dDt, \quad (2.26)$$

onde $D = l^2/2d\tau$ é a constante de difusão para um sistema d-dimensional. As equações 2.24 e

2.26 são as formas das equações 2.5 e 2.7 para dimensões superiores a 1.

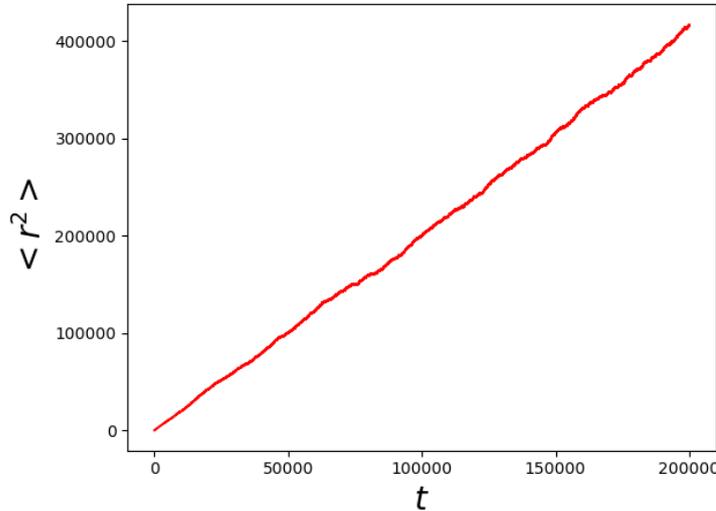


Figura 5: Deslocamento quadrático médio de uma partícula se movendo em uma rede quadrada após 100.000 passos. Aqui usamos passos de tamanho $l = 2$ ocorrendo em um tempo $\tau = 2$. Como esperado, o valor do coeficiente angular da reta obtida é aproximadamente 2.

Seguindo o mesmo procedimento para o movimento unidimensional, obtemos novamente a distribuição gaussiana para a probabilidade $P(r, t)$, na forma

$$P(r, t) = (4\pi Dt)^{-d/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \quad (2.27)$$

A distribuição acima, assim como no caso unidimensional, satisfaz a equação de difusão que pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = D\nabla^2 P(r, t), \quad (2.28)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano em d-dimensões.

De forma a tornar o modelo desenvolvido acima mais geral, podemos retirar a restrição do movimento da partícula ocorrer sobre uma rede, permitindo que a mesma se desloque uma distância l escolhendo aleatoriamente a direção do passo por meio de um ângulo θ entre 0 e 2π . Assim, a partícula pode se mover para qualquer ponto da circunferência de raio l , sendo a direção determinada pelo ângulo θ . Esse movimento é representado na Figura 3.

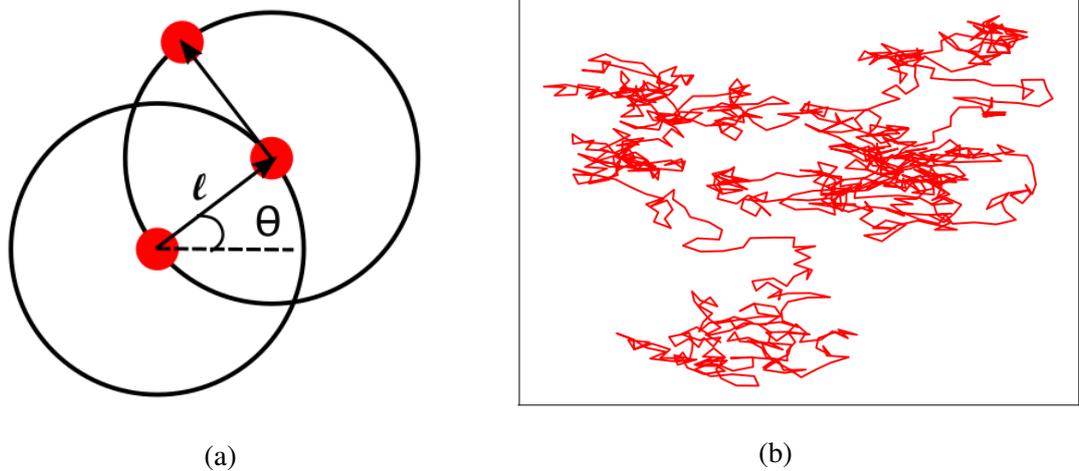


Figura 6: (a) Representação esquemática do modelo utilizado na simulação de um *random walk* no espaço contínuo. (b) Trajetória de uma partícula após 1000 passos de tamanho $l = 1$.

Apesar da trajetória se apresentar bastante diferente da mostrada na Figura 4, as equações 2.24 e 2.26 continuam sendo válidas para este tipo de movimento e podem ser obtidas de forma análoga.

2.2 Variação no tamanho dos passos

Até aqui desenvolvemos o modelo de modo que a direção do movimento, preso a uma rede ou não, fosse aleatória mas mantemos o comprimento do passo, l , fixo. Uma forma de tornar o modelo ainda mais geral seria a introdução de uma distribuição de probabilidades também para o tamanho do passo. Em uma dimensão, com l sendo dado por um valor aleatório seguindo uma distribuição de probabilidades $\varphi(l)$, temos que a probabilidade de encontrarmos a partícula na posição x no tempo $t + \tau$ é

$$P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - l, t) \cdot \varphi(l) dl. \quad (2.29)$$

Assumindo l e τ pequenos, podemos expandir a função $P(x, t)$ em série de Taylor em torno de $l, \tau = 0$, obtendo:

$$P(x, t) + \tau \frac{\partial P}{\partial t} = P(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(l) dl + \frac{\partial P}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} l \varphi(l) dl + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{2} \varphi(l) dl.$$

Se $\varphi(l)$ é uma distribuição normalizada e par ($\varphi(l) = \varphi(-l)$), temos que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{2\tau} \varphi(l) dl. \quad (2.30)$$

Assim, podemos definir a constante de difusão como

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{2\tau} \varphi(l) dl. \quad (2.31)$$

Essa abordagem é semelhante à utilizada por Einstein na descrição do movimento browniano em 1905 [3, 9, 10].

Para um tempo característico, τ , constante, teríamos a expressão,

$$D = \frac{\langle l^2 \rangle}{2\tau}, \quad (2.32)$$

mas também pode ser introduzida uma distribuição de probabilidade para o tempo característico, τ , em que cada passo ocorre. Um exemplo de utilização dessa variação ocorre na modelagem do movimento da bactéria E.Coli através de uma distribuição de Poisson para o tempo característico de cada passo [11].

2.2.1 Distribuição Gaussiana

Como um primeiro exemplo vamos abordar uma distribuição para o tamanho dos passos como uma gaussiana na forma

$$\varphi_{\mu,\sigma}(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.33)$$

onde μ e σ representam a média e o desvio-padrão da distribuição.

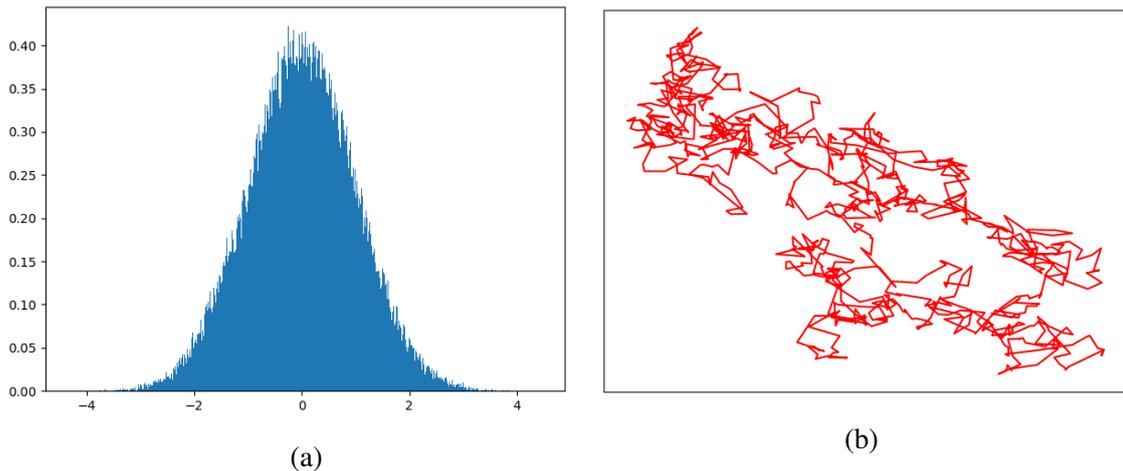


Figura 7: (a) Histograma do tamanho dos passos para uma distribuição gaussiana de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ (b) Trajetória após 1000 passos de uma partícula realizando um *random walk* de passo gaussiano com os mesmos parâmetros usados no histograma.

Em duas dimensões, assumindo um tempo característico constante, temos que a constante de difusão como definida na equação 2.32 é

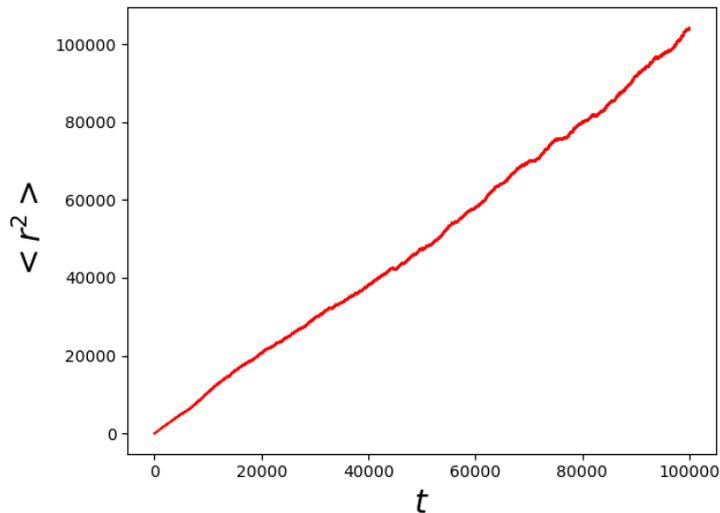


Figura 8: Deslocamento quadrático médio após 100.000 passos de uma partícula que se move com passos de comprimento gaussiano e direção aleatória. Aqui usamos os parâmetros $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\tau = 1$.

$$D = \frac{\langle l^2 \rangle}{4\tau} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{4\tau},$$

e dessa forma,

$$\langle r^2 \rangle = \left[\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\tau} \right] t \quad (2.34)$$

Para analisar o comportamento do coeficiente angular da reta mostrada no Figura 8, fixamos um dos parâmetros e variamos o outro. O resultado é mostrado na Figura 9.

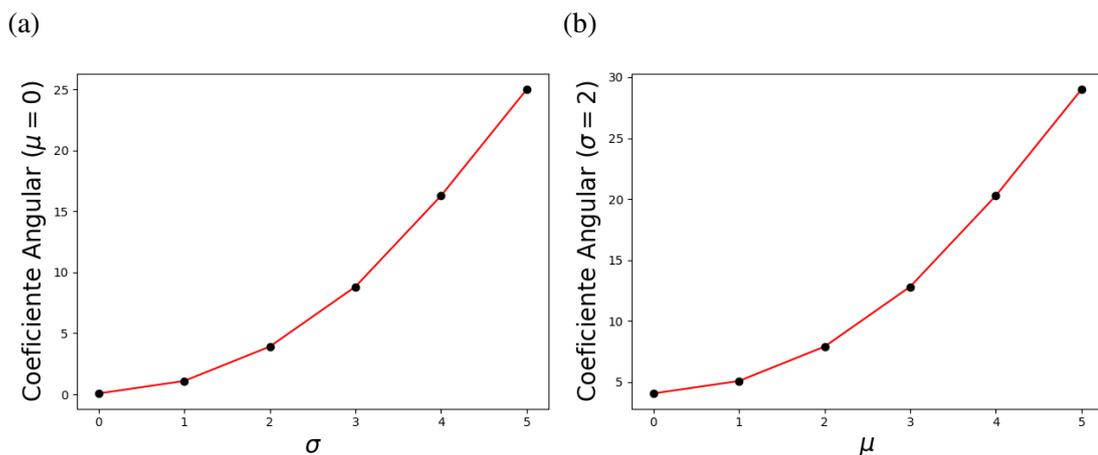


Figura 9: Análise da influência dos parâmetros da distribuição gaussiana no coeficiente angular da reta. Em (a), mantemos a média da distribuição constante ($\mu = 0$) e variamos o valor do desvio-padrão, obtendo uma relação quadrática, como esperado. Em (b), invertemos a ordem dos parâmetros, fixando o desvio-padrão em $\sigma = 2$ e variando o valor da média. Novamente obtivemos uma relação quadrática para o coeficiente angular.

Assim, a Figura 9 confirma o comportamento apresentado na equação 2.34.

2.2.2 Difusão anômala e Voos de Lévy

Nas últimas décadas tem aumentado o interesse no estudo de modelos de *random walk* onde o comprimento dos passos é dado por uma distribuição de probabilidade tal que $\langle l^2 \rangle \rightarrow \infty$. Nesse caso deixamos de ter uma difusão normal, onde $\langle r^2 \rangle$ depende linearmente do tempo, e passamos a estudar o processo de difusão anômala.

Na difusão anômala, a relação entre o deslocamento quadrático médio e o tempo é dada pela lei de potência

$$\langle r^2 \rangle \sim t^\gamma, \quad \gamma \neq 1, \quad (2.35)$$

podendo ser dividida em dois regimes: subdifusivo, onde $0 < \gamma < 1$ e superdifusivo, onde $1 < \gamma < 2$. O caso em que $\gamma = 1$ corresponde a difusão normal.

Uma das distribuições de passos que gera um processo de difusão anômala é a distribuição na forma de lei de potência, dada por

$$\varphi_\alpha(l) \sim l^{-\alpha-1}. \quad (2.36)$$

Assim, assumindo um valor constante para o tempo característico, a integral da equação 2.24 apresenta divergência para valores de α entre 0 e 2, fazendo com que $\langle l^2 \rangle \rightarrow \infty$ e a constante de difusão se torne indeterminada. Esse modelo é conhecido como *Voo de Lévy*, devido aos trabalhos do matemático francês Paul Lévy.

Embora seja utilizado na modelagem de diversos sistemas, o modelo de *voo de Lévy* permite que uma partícula percorra passos de grande comprimento em um pequeno intervalo de tempo, fazendo com que a velocidade da partícula apresente divergências. Uma solução para esse problema seria a fixação da velocidade da partícula, fazendo com que passos grandes ocorram em um tempo maior. Essa variação é conhecida como *Caminhada de Lévy*.

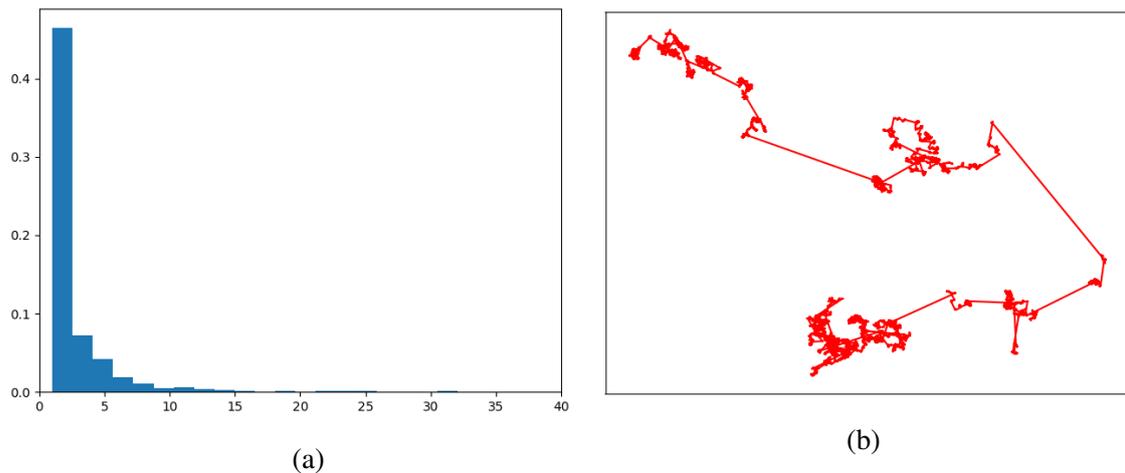


Figura 10: (a) Histograma da distribuição de tamanho dos passos a partir de uma lei de potência de expoente $\alpha = 1,3$. (b) Trajetória de uma partícula seguindo a distribuição descrita acima após 1000 passos.

Nota-se a partir de ambos os gráficos que passos de menor comprimento são privilegiados no movimento enquanto os de maior comprimento ocorrem com menor frequência.

Assim, como esperado, a relação entre o deslocamento quadrático médio com o tempo deixa de ser linear, tendo seu comportamento na forma de lei de potência como mostrado na equação 2.35. Essa relação é mostrada na Figura 11.

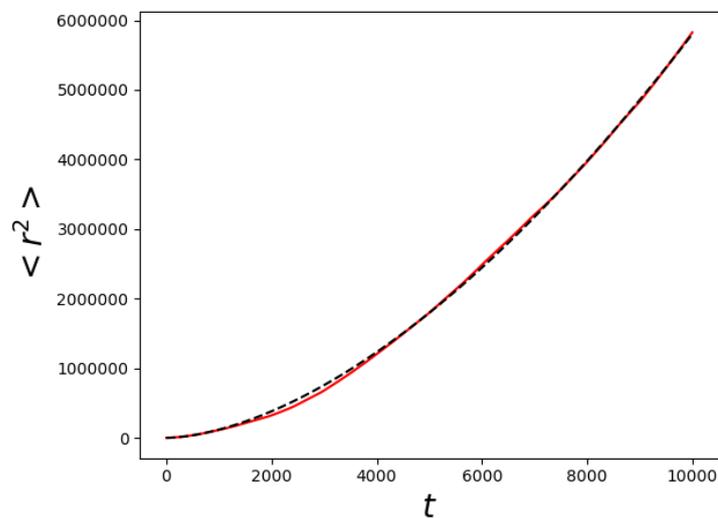


Figura 11: Deslocamento quadrático médio em função do tempo para $\alpha = 1,3$. Essa curva apresenta o comportamento na forma da lei de potência $\langle r^2 \rangle = t^{1,69}$ (linha tracejada), caracterizando um processo superdifusivo.

3 PERCOLAÇÃO

3.1 Introdução à geometria fractal

A geometria euclidiana, fundamentada em conceitos como pontos, retas, círculos, superfícies e sólidos, é tradicionalmente a mais utilizada na descrição de objetos na natureza, sendo esses conceitos base para o desenvolvimento de grande parte das teorias físicas. Porém, em diversas situações são encontrados na natureza objetos que, por serem muito irregulares, podem apenas ser aproximados através das definições da geometria euclidiana.

De fato, ao vermos a forma de uma montanha, por exemplo, podemos pensar em um cone como uma boa maneira de descrevê-la, ou ainda descrever uma nuvem através de uma esfera. Em alguns casos essa descrição pode ser uma boa aproximação para a forma real do objeto, entretanto, seria necessária uma nova geometria para descrevê-lo de maneira mais precisa. Com esse intuito, o matemático francês Benoît Mandelbrot desenvolveu o que ele mesmo chamou de geometria fractal.

Podemos descrever a irregularidade de um dado objeto através do conceito de dimensão de Hausdorff, também conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch, que serve como uma medida do tamanho local do espaço ocupado por um objeto. Se um objeto de tamanho linear $L(\delta)$ é dividido em $N(\delta)$ objetos de comprimento δ , podemos dizer que

$$N = \left(\frac{L}{\delta} \right)^{d_H},$$

onde d_H é a dimensão de Hausdorff, que pode ser obtida através da equação

$$d_H = \frac{\ln N}{\ln \frac{L}{\delta}}. \quad (3.1)$$

Na geometria euclidiana, os objetos apresentam dimensão topológica inteira, por exemplo, uma reta tem dimensão $d = 1$, uma figura plana tem dimensão $d = 2$, etc. Se dividirmos uma reta de comprimento L em segmentos de comprimento L/n , teríamos então n segmentos de reta, de modo que para uma reta a dimensão de Hausdorff é igual a 1. Da mesma forma, se dividirmos os lados de um quadrado de lado L em um fator n teríamos n^2 quadrados de lado L/n , resultando em $d_H = 2$. Esse comportamento ocorre em todos os objetos euclidianos, de modo que para um objeto euclidiano a dimensão de Hausdorff coincide com a dimensão topológica.

Mandelbrot apresentou duas características para fractais. A primeira define fractal como um conjunto no qual a sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a sua

dimensão topológica [12]. Dessa forma, os fractais passam a ser caracterizado por sua dimensão de Hausdorff, também chamada de dimensão fractal d_f . Para a maioria dos fractais o valor da dimensão fractal é não-inteiro, daí o nome fractal.

A segunda característica usada por Mandelbrot afirma que fractais são formas feitas de partes similares ao todo de alguma forma [13]. Isso significa que fractais apresentam a propriedade de autossimilaridade de modo que se ampliarmos uma parte do objeto encontramos uma figura idêntica à original. Alguns fractais podem ser gerados através de uma regra de iteração, sendo chamados de fractais determinísticos, enquanto outros são obtidos através de processos de natureza aleatória, sendo chamados de fractais aleatórios ou estocásticos.

3.1.1 Fractais Determinísticos

A construção de um fractal determinístico se dá, de maneira geral, primeiramente com um objeto inicial chamado *iniciador* que, através de uma regra fixa de substituição geométrica chamada *gerador*, sofre um processo de infinitas iterações.

Como exemplo, podemos usar uma reta como iniciador. Então, dividindo a reta em três partes iguais, substituímos o segmento do meio, cujo comprimento é $1/3$, por dois segmentos de reta de mesmo comprimento formando um triângulo equilátero de lado $1/3$ sem base. Agora temos quatro segmentos de reta de mesmo comprimento e em cada um deles realizamos o mesmo procedimento de divisão e formação de triângulos equiláteros sem base. O resultado obtido é conhecido como curva de Koch, é mostrado abaixo:

No caso da curva de Koch, a cada geração o comprimento dos segmentos de reta, δ ,

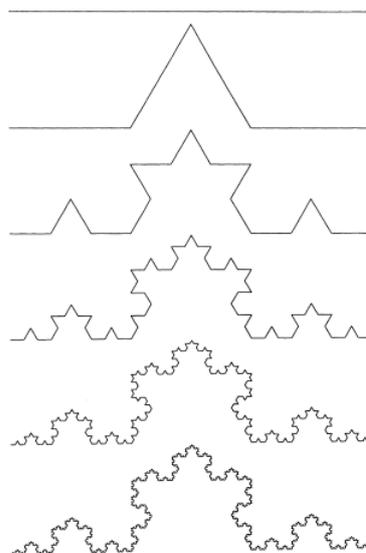


Figura 12: Construção da curvas de Koch para as seis primeiras gerações da curva, de cima para baixo[1].

é reduzido por um fator de 3, enquanto o número desses segmentos, N , aumenta por um fator de 4. Assim, como definido na equação 3.1,

$$d_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Em cada geração, a curva obtida pode ser esticada obtendo a forma de uma reta. Assim, a dimensão topológica da curva de Koch é igual a 1. Por definição, a curva de Koch é um fractal. Se repetirmos o processo de geração da curva infinitas vezes, obteremos uma curva de comprimento infinito, embora limitada à uma região finita do espaço. Assim, analisando o valor fracionário da dimensão fractal, temos que a curva de Koch é muito densa ou complexa quando comparada a uma linha reta, mas muito simples quando comparada à um objeto bidimensional.

Como a curva de Koch, existe um grande número de fractais determinísticos dentre os quais podemos citar o floco de neve de Koch onde o iniciador deixa de ser uma reta e passa a ser um triângulo equilátero, o tapete de Sierpinski e o conjunto de Mandelbrot, sendo o último mostrado abaixo.

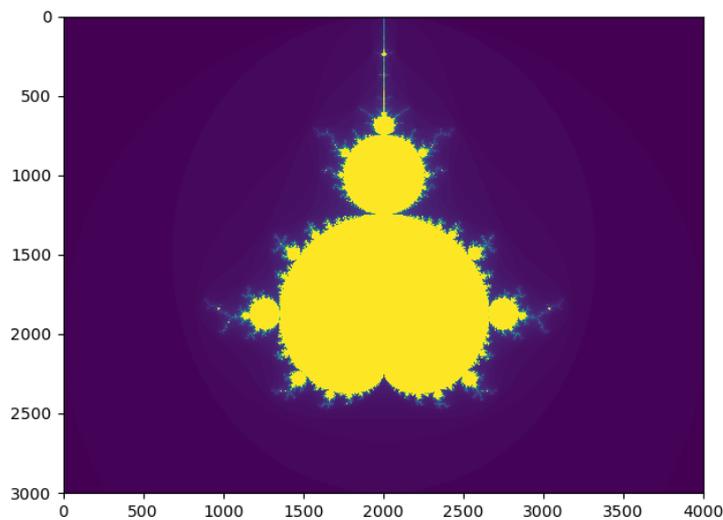


Figura 13: O conjunto de Mandelbrot é construído através da equação de iteração $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde z é um número complexo. Para um dado valor da constante complexa c e um valor inicial $z_0 = 0$, se o valor de $|z|$ é menor que 2, então o ponto no plano complexo na posição c faz parte do conjunto de Mandelbrot. Na imagem podemos ver a característica de autossimilaridade, comum nos fractais.

3.1.2 Fractais Aleatórios

Fractais não precisam ser gerados por regras determinísticas como nos exemplos acima. Podemos também adicionar uma aleatoriedade em sua formação fazendo com que, embora não seja exatamente autossimilar, o objeto continue apresentando uma característica fractal. Isso ocorre pois o objeto apresenta medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas

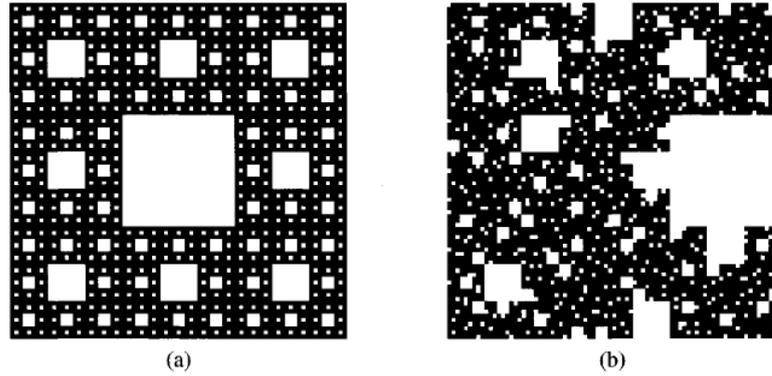


Figura 14: Diferença entre o tapete de Sierpinski (a) determinístico e (b) aleatório [2].

em diferentes escalas, ocorrendo o que é chamado de autossimilaridade aleatória. Neste caso, a média da geração de vários objetos aleatórios exibe propriedade autossimilar.

Um exemplo pode ser dado com o uso do fractal determinístico conhecido como tapete de Sierpinski. Nele temos como iniciador um quadrado, o qual é subdividido em 9 células menores sendo retirada a célula central. O processo é repetido para cada uma das células a cada geração. Podemos adicionar um termo aleatório ao gerador, fazendo com que a célula descartada seja qualquer uma das 9 disponíveis, onde a escolha é feita de maneira aleatória.

Na Figura 14(a), a propriedade de autossimilaridade é bastante explícita e podemos determinar a dimensão fractal, obtendo

$$d_f = \frac{\ln 8}{\ln 3}. \quad (3.2)$$

Na Figura 14(b), a autossimilaridade é estatística, o que significa dizer que a distribuição de buracos no objeto parece similar em todas as escalas de comprimento. Em fractais aleatórios, a massa do objeto $M(L)$ (quadrados pretos para o caso do tapete de Sierpinski) depende do comprimento linear L na forma [1]

$$M(L) \sim L^{d_f}. \quad (3.3)$$

Assim, os tapetes de Sierpinski, determinístico e aleatório, apresentam a mesma dimensão fractal, dada pela equação 3.2.

Sistemas em que alguns dos parâmetros definidos por variáveis aleatórias, chamados sistemas desordenados, acabam, em geral, produzindo fractais aleatórios. Se analisarmos, por exemplo, o desenho formado pela trajetória de uma partícula executando um *random walk*, como o mostrado na Figura 4, vemos que esse objeto também apresenta buracos em todas as escalas de tamanho fazendo com que o mesmo possa ser definido como um fractal aleatório de

dimensão fractal d_w . O valor da dimensão fractal pode ser obtido através da relação [2]

$$\langle r^2 \rangle \sim t^{2/d_w} \quad (3.4)$$

Como visto no Capítulo 2, para um processo de difusão normal temos $d_w = 2$, que, embora seja um valor inteiro, excede a sua dimensão topológica $d = 1$. Isso significa que, apesar de ser constituída por diversas retas, a trajetória de uma partícula executando um *random walk* tende a ocupar todo o plano após um longo período de tempo. Claramente, a dimensão fractal d_w tem valor diferente de 2 para o processo de difusão anômala.

3.2 O modelo de Percolação

Um outro exemplo de fractal estatístico gerado a partir de um sistema desordenado é obtido através do modelo de percolação. Este modelo, inicialmente proposto por Broadbent e Hammersley (1957) para descrever um fluido se espalhando aleatoriamente em um meio, é bastante utilizado em física estatística para simular sistemas onde ocorrem transições de fase, como por exemplo: Rede de resistores [14], epidemias [15], fogo em florestas [16] e influência social [17]. O modelo pode ser dividido em percolação de sítios e percolação de ligação.

O modelo de percolação de sítios consiste, inicialmente, em preencher os vértices, ou sítios, de uma dada rede com uma probabilidade p . Para isso, é atribuído a cada sítio um número aleatório entre 0 e 1. Se esse número for menor que o valor de p , dizemos que este sítio está ocupado, caso contrário o sítio está vazio. Em percolação de ligação, o mesmo processo de ocupação ocorre agora para as arestas das redes, gerando um comportamento semelhante, embora com algumas diferenças, ao modelo de percolação de sítios. Por conta dessa semelhança, podemos usar como exemplo o modelo de percolação de sítios, sendo os conceitos abordados neste facilmente estendidos para o modelo de percolação de ligação.

Para valores pequenos da probabilidade de ocupação p , poucos sítios serão ocupados formando vários agregados de sítios ocupados vizinhos (*clusters*), porém sendo a maioria desses de tamanho unitário. A medida em que aumentamos a probabilidade de ocupação, os *clusters* aumentam de tamanho e começam a se unir em agregados maiores, até que para $p = 1$ existe apenas um *cluster* que engloba todos os sítios da rede.

A proposta do modelo é estudar a transição de um estado localmente conectado, onde existem vários agregados pequenos isolados, para um estado globalmente conectado, onde apenas um *cluster* contém todos os sítios da rede. Essa transição é representada pelo surgimento de um *cluster* que atravessa o sistema de um extremo ao outro, chamado *cluster percolante*. O valor de p para o qual ocorre a transição é chamado probabilidade crítica ou ponto crítico de percolação, denotado por p_c . À medida que o parâmetro p se aproxima do ponto crítico, diversas

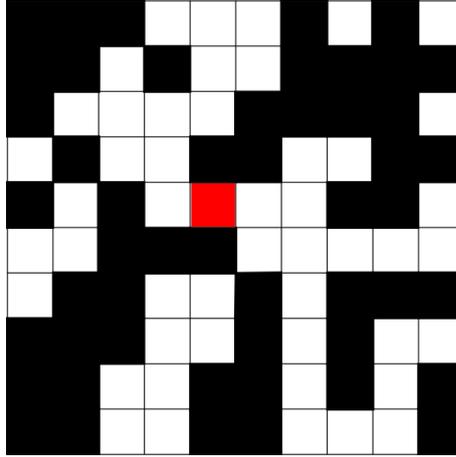


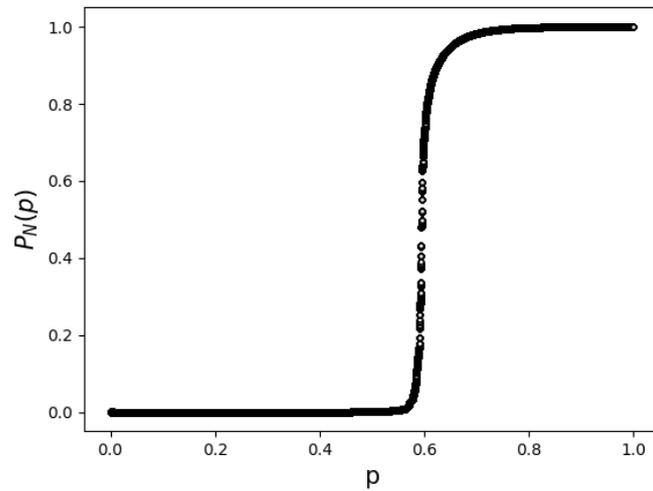
Figura 15: Representação do modelo de percolação em uma rede quadrada com $L=10$. Quadrados pretos representam sítios vazios enquanto os brancos representam sítios ocupados. Se o sítio em vermelho for ocupado, passará a existir um *cluster* que percola o sistema.

relações podem ser encontradas na forma de lei de potência, cujos expoentes são chamados expoentes críticos de percolação.

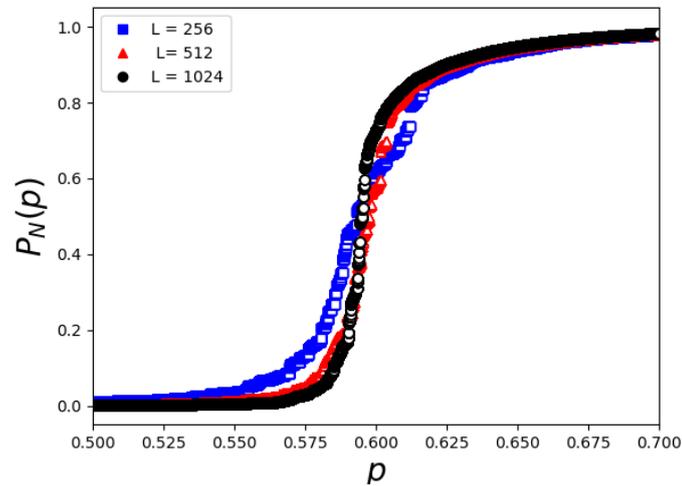
O sistema a ser simulado através do modelo de percolação determina a geometria da rede a ser utilizada, que por sua vez determina o valor do ponto crítico obtido. Entretanto, como afirma o princípio de universalidade, o comportamento dos *clusters* durante todo o processo de percolação independe da estrutura local da rede. Isso significa que, para uma dada dimensão, os expoentes críticos de percolação não dependem do tipo de rede utilizada. Neste trabalho, como exemplo, usaremos redes bidimensionais quadradas de lado L .

Para um número grande de sítios, a probabilidade $P_N(p)$ de que um sítio ocupado pertença ao agregado percolante deve ser tal que

$$\begin{cases} P_N(p) = 0, & \text{se } p < p_c, \\ P_N(p) = 1, & \text{se } p > p_c. \end{cases} \quad (3.5)$$



(a)



(b)

Figura 16: Probabilidade de um sítio ocupado pertencer ao *cluster* percolante como função da probabilidade de ocupação p . Em (a), temos o gráfico obtido para uma rede quadrada de lado $L=1024$ onde podemos ver o comportamento dado pela equação 3.5. Em (b), podemos ver a influência do valor de L na transição, notando que quanto maior é a rede mais abrupta é a transição. Do gráfico pode-se estimar um valor para o ponto crítico p_c como um valor próximo de 0,6.

Em sistemas finitos, como as redes quadradas usadas nas simulações, não se tem, em geral, um ponto crítico bem definido. É preciso então analisar o sistema no limite termodinâmico, ou seja, fazer uma extrapolação para obter o valor do ponto crítico p_c para uma rede infinita. Para isso, obtem-se o ponto crítico de percolação como função do inverso do comprimento linear da rede quadrada, $p_c(L^{-1})$, cujo comportamento é mostrado na Figura 17.

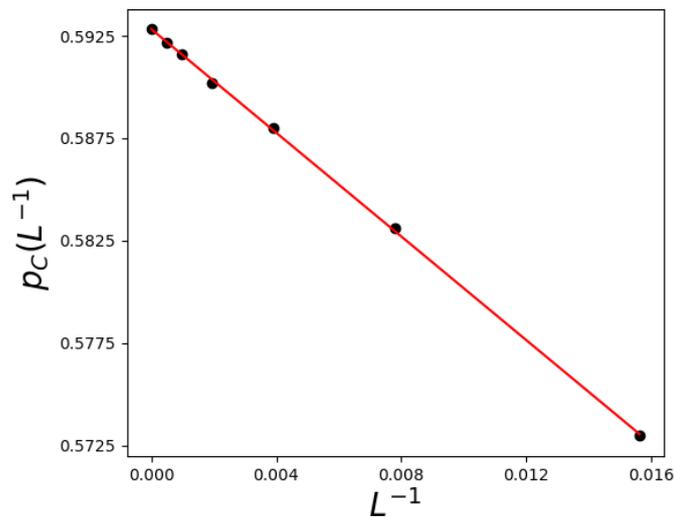


Figura 17: No limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) temos que $L^{-1} \rightarrow 0$, ou seja, o ponto crítico de percolação para uma rede infinita é numericamente igual ao coeficiente linear da reta obtida.

Dessa forma, obtemos o valor do ponto crítico para uma rede quadrada infinita,

$$p_c(L \rightarrow \infty) = 0,592831 \pm 0,000081.$$

Como observado na Figura 17, quando aumentamos o tamanho da rede a transição tende a se localizar no ponto $p = p_c(L \rightarrow \infty)$. A margem de erro apresentada é devida ao método de regressão linear utilizado para obtermos o coeficiente linear da reta.

Na criticalidade, onde $p = p_c$, o *cluster* percolante é bastante ramificado e apresenta buracos de vários tamanhos, mostrando um comportamento característico de um fractal.

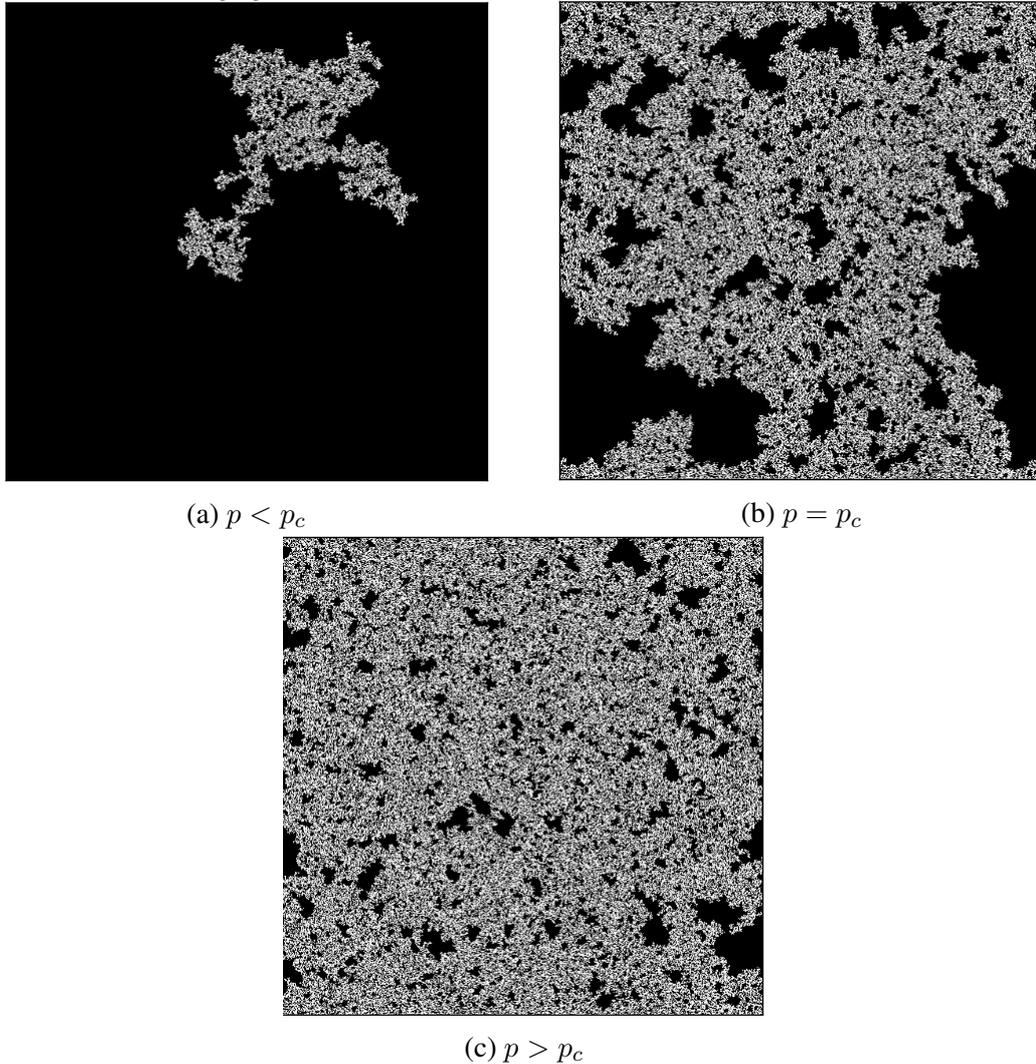


Figura 18: Maior *cluster* para diferentes probabilidades de ocupação em uma rede quadrada de $L=1024$. Para $p = 0,58$ (a), o maior agregado ainda tem um tamanho pequeno quando comparado ao tamanho total do sistema. No momento em que o sistema atinge a criticalidade (b), $p = p_c$, o maior *cluster* atravessa o sistema e passa a ter um tamanho comparável ao tamanho da rede. Por fim, para $p = 0,61$ (c), o maior *cluster* já ocupa quase todo o sistema.

Como vimos na seção anterior, diferentemente de objetos geométricos euclidianos, onde a “massa”(M) do objeto obedece à lei de potência $M(L) \sim L^d$, onde d é a dimensão euclidiana, objetos fractais apresentam “massa” como função do comprimento linear da rede também na forma de uma lei de potência dada pela equação 3.3.

Então, podemos analisar o comportamento da “massa”(número de sítios pertencentes ao *cluster*) do maior agregado como uma função do comprimento linear da rede, como mostrado abaixo

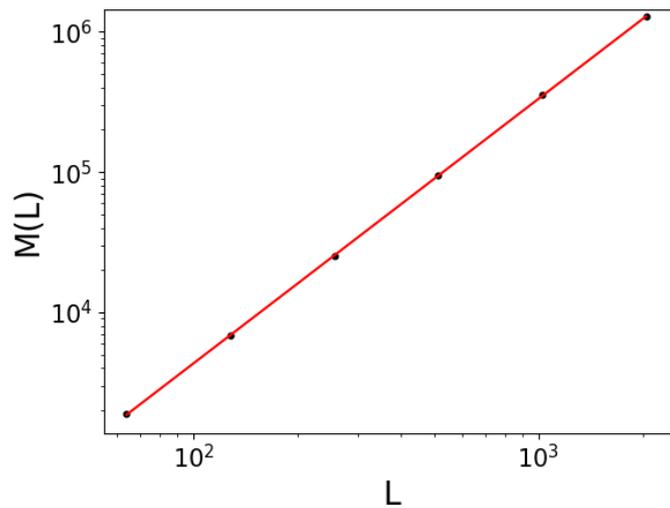


Figura 19: Gráfico $M(L) \times L$. Em escalas logarítmicas a lei de potência, equação 3.3, se torna uma reta cujo coeficiente angular é numericamente igual à dimensão fractal do *cluster* percolante d_f .

Dessa forma, usando o método de regressão linear, podemos obter o valor da dimensão fractal

$$d_f = 1,887228 \pm 0,002867.$$

Além da relação da massa com o tamanho da rede, diversas relações na forma de lei de potência são obtidas na criticalidade. Como exemplo, podemos avaliar o comportamento da distribuição de tamanho dos *clusters* na criticalidade, ou seja, o número N_s de *clusters* com s sítios.

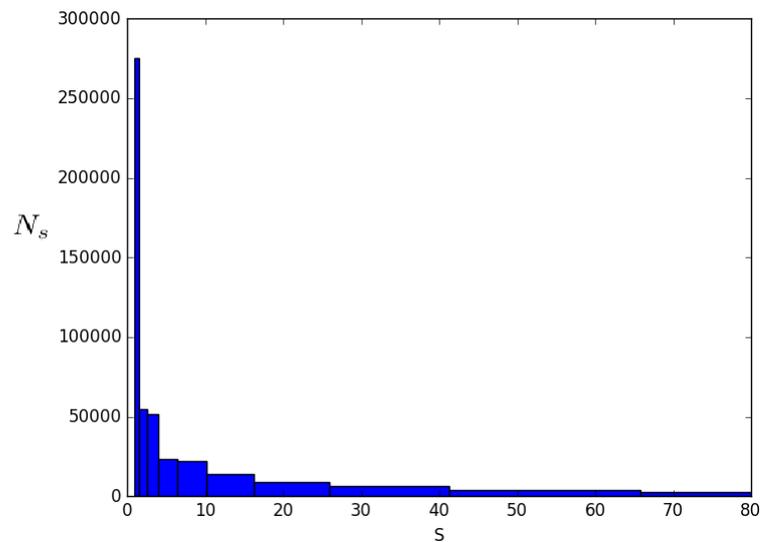


Figura 20: Histograma para a distribuição de tamanho dos *clusters* para $p = p_c$ com caixas de tamanho em escala logarítmica, onde podemos ver que na criticalidade existem agregados de vários tamanhos com uma maior número de agregados pequenos.

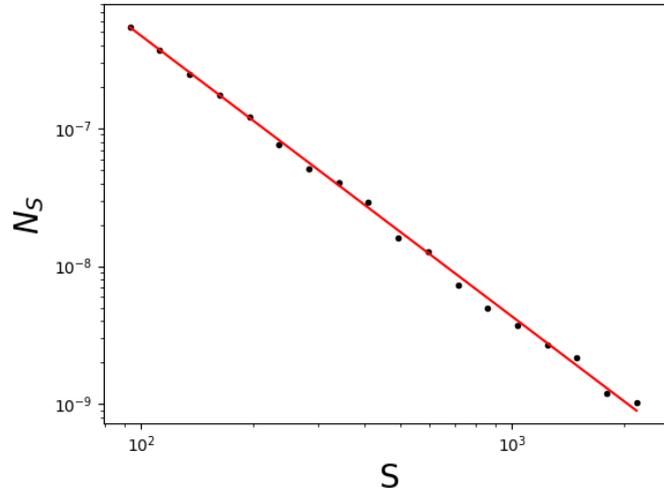


Figura 21: Em escala logarítmica, a relação mostrada pela equação 3.6 se torna uma reta cujo coeficiente angular é numericamente igual ao negativo do expoente de Fisher.

O gráfico apresenta a forma de uma lei de potência do tipo [8]

$$N_s \sim s^{-\tau}. \quad (3.6)$$

Onde τ é conhecido como expoente de Fisher e pode ser facilmente obtido através do uso de escalas logarítmicas e do método de regressão linear, como mostrado abaixo:

Assim, obtemos o valor do expoente de Fisher como:

$$\tau = 2,047799 \pm 0,028866.$$

Esse resultado obedece a relação analítica, mostrada em [8], entre os expoentes críticos τ e d_f e a dimensão euclidiana, d , do sistema,

$$\tau = 1 + \frac{d}{d_f}$$

Por serem expoentes críticos, a dimensão fractal e o expoente de Fisher não apresentam dependência com a geometria da rede utilizada dependendo apenas da dimensão da mesma.

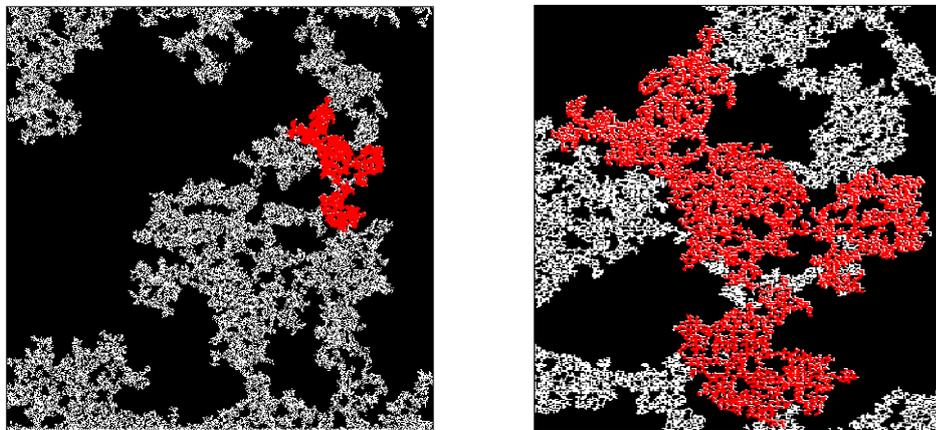
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Até aqui, vimos exemplos de sistemas que apresentam aleatoriedade, ou desordem, de maneiras diferentes. Primeiramente, podemos citar a desordem do tipo *annealed*. Nesse tipo de sistema os parâmetros aleatórios do modelo mudam com o tempo, podendo assim ser entendido como uma aleatoriedade dinâmica. Um exemplo desse tipo de desordem foi descrito no Capítulo 2, quando apresentamos o modelo de *random walk*, modelo este onde a cada intervalo de tempo uma nova direção de movimento é escolhida aleatoriamente.

Por outro lado, temos a desordem do tipo *quenched*, onde não há dependência temporal nos parâmetros aleatórios do sistema. Como exemplo deste tipo de desordem podemos citar o modelo de percolação, abordado no Capítulo 3. No modelo, a aleatoriedade se encontra na ocupação de sítios de uma rede, não envolvendo assim uma evolução temporal.

O objetivo deste trabalho é analisar como o processo de difusão das partículas é afetado quando a sua trajetória é limitada por um contorno fractal, especificamente o *cluster* percolante obtido no modelo de percolação. Esse modelo, estudado inicialmente por Pierre Gilles de Gennes, é conhecido como “formigas no labirinto”. Dessa forma, podemos relacionar características dos modelos que representam desordens do tipo *annealed* e *quenched*.

Para simularmos esse processo de difusão, usamos o modelo de percolação para obter um *cluster* e então fizemos com que a partícula se encontrasse em um sítio ocupado desse *cluster*, escolhido aleatoriamente, fazendo com que o seu movimento ocorra apenas para um de seus quatro primeiros vizinhos. Assim, caso o sítio escolhido faça também parte do *cluster*, esse sítio é dito permitido e a partícula passa a ocupá-lo. Caso contrário, a partícula permanece parada no sítio de origem.



(a)

(b)

Figura 22: (a) Trajetória de uma partícula executando um *random walk* (em vermelho) em um *cluster* de percolação. (b) Trajetória ampliada.

4.1 Dimensão Fractal da Trajetória

Usando esse modelo, traçamos o gráfico do deslocamento quadrático médio das partículas como função do tempo para os regimes subcrítico ($p < p_c$), crítico ($p = p_c$) e supercrítico ($p > p_c$), obtendo o comportamento mostrado na Figura 23.

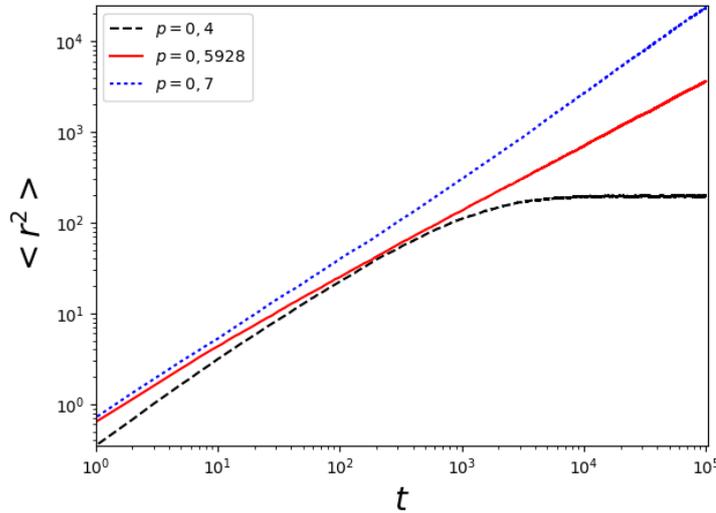
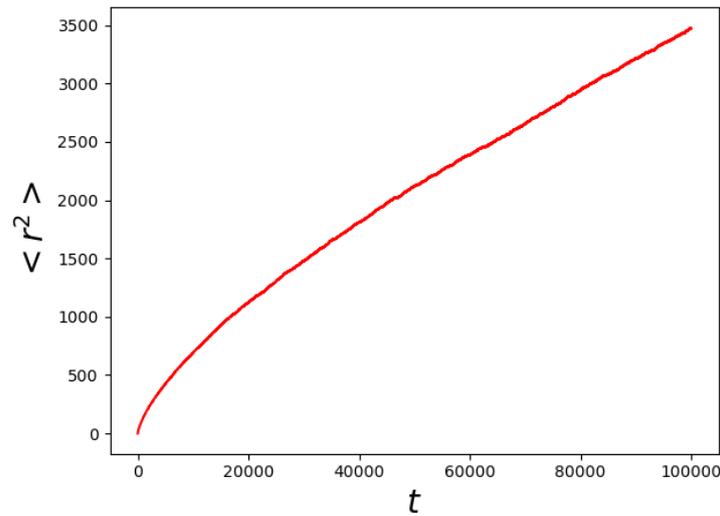


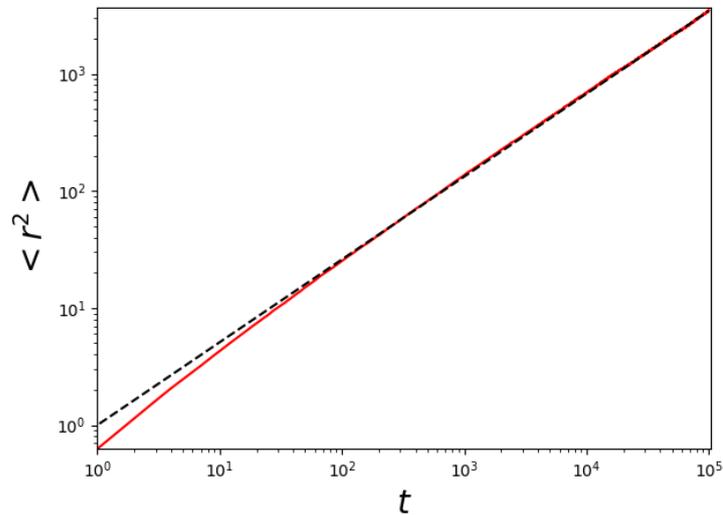
Figura 23: Deslocamento quadrático médio como função do tempo para diferentes valores da probabilidade de ocupação p .

No regime subcrítico, o tamanho do *cluster* é bem menor que o do sistema, assim a trajetória da partícula é limitada fazendo com que o deslocamento quadrático médio tenda a uma constante depois de um longo período de tempo. No regime supercrítico, o *cluster* percolante já ocupa quase todo o sistema fazendo com que a relação do deslocamento quadrático médio com o tempo seja linear assim caracterizando um processo de difusão normal.

Porém, na criticalidade o *cluster* percolante é um fractal cuja dimensão fractal, como obtida no capítulo 3, com $d_f \approx 1,89$. Nesse caso, a relação do deslocamento quadrático médio com o tempo é representada por uma lei de potência de expoente γ , como mostrado na equação 2.35, caracterizando um processo de difusão anômala. Esse comportamento é mostrado na Figura 24(a).



(a)



(b)

Figura 24: (a) Deslocamento quadrático médio com função do tempo com o sistema na criticalidade. Em (b), o gráfico é mostrado em escalas logarítmicas, apresentando o comportamento semelhante ao da reta tracejada obtida através de regressão linear.

Dessa forma, obtemos valor do expoente dessa lei de potência, que é igual ao coeficiente angular da reta obtida em escalas logarítmicas na Figura 24(b) ,

$$\gamma = 0,707581 \pm 0,000015, \quad (4.1)$$

que caracteriza o processo como subdifusivo. Então, a partir da equação 3.4, obtemos a dimensão fractal da trajetória da partícula

$$d_w = 2,826531 \pm 0,000060. \quad (4.2)$$

No capítulo 2, vimos que o movimento aleatório de uma partícula em um espaço

dado por uma rede euclidiana leva a um processo de difusão normal, onde o deslocamento quadrático médio da partícula depende linearmente do tempo. Entretanto, no desenvolvimento teórico, assumimos o fato de que $\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, ou seja, assumimos que todos os sítios são equivalentes e, portanto, pode ser facilmente provado que a correlação entre dois passos diferentes é nula.

Porém, para um rede limitada por um contorno fractal, os sítios não são todos equivalentes, visto que o número de sítios inacessíveis à partícula varia com a posição da mesma. Dessa forma, a correlação entre dois passos diferentes passa a ser não nula, $\langle \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \rangle \neq 0$. Em última análise, o fato da correlação entre dois passos diferentes ser não-nula é responsável por um comportamento anômalo.

4.2 Condutividade em Fractais

Como mostrado no capítulo 2, a condutividade de um meio está diretamente relacionada com a constante de difusão através da relação de Einstein (equação 2.22). Porém, em um processo de difusão anômala D deixa de ser um valor constante e passa a variar à medida em que a difusão ocorre. Assim, é esperado que a condutividade de um fractal dependa do seu tamanho linear na forma da lei de potência [2]

$$\sigma(L) \sim L^{-\tilde{\mu}}, \quad (4.3)$$

onde $\tilde{\mu}$ é chamado coeficiente de condutividade.

Em um fractal, a dependência da condutividade, mostrada na equação 2.22, com o comprimento linear ocorre apenas na densidade $n(L)$ e no valor de $D(L)$. A densidade em um fractal é dada por

$$n(L) = \frac{M(L)}{L^d} \sim \frac{L^{d_f}}{L^d} \sim L^{d_f-d}, \quad (4.4)$$

E, como o tempo necessário para a partícula percorrer uma distância $L = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ em um fractal é proporcional à L^{d_w} , temos que o valor de $D(L)$ depende de L na forma

$$D(L) = \frac{L^2}{t} \sim \frac{L^2}{L^{d_w}} \sim L^{2-d_w}. \quad (4.5)$$

Assim, usando as equações 4.4 e 4.5, temos que

$$\sigma(L) \sim n(L)D(L) \sim L^{2-d+d_f-d_w}. \quad (4.6)$$

Comparando as equações 4.3 e 4.6, obtemos uma expressão para o expoente de

condutividade, dada por

$$\tilde{\mu} = d - 2 + d_w - d_f. \quad (4.7)$$

Logo, para o caso em que $d = 2$, temos

$$\tilde{\mu} = d_w - d_f = 0,939303 \pm 0.002867. \quad (4.8)$$

Para um rede euclidiana, temos que $d_w = 2$ e $d_f = d$ resultando em um expoente de condutividade nulo, mostrando que a condutividade não depende do valor de L como é visto na relação de Einstein.

4.3 Dimensão Espectral

Em um *cluster* percolante, o número de sítios acessíveis em um raio L é dado por L^{d_f} , enquanto o tempo necessário para uma partícula se deslocar a uma distância $L = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ é dado por L^{d_w} . Assim, como d_w é maior que d_f , para um período suficiente de tempo, a partícula visitará a maioria dos pontos do meio sendo cada ponto visitado diversas vezes. Nesse caso, o movimento é dito recorrente, visto que para um longo período de tempo a partícula certamente voltará ao seu ponto de origem.

Dessa forma, é esperado que a probabilidade, $P(0, t)$, da partícula se encontrar na sua origem após um determinado tempo seja inversamente proporcional ao volume explorado por ela, ou seja,

$$P(0, t) \sim \frac{1}{V} = \frac{1}{L^{d_f}}.$$

Assim, temos que,

$$P(0, t) \sim t^{-\frac{d_f}{d_w}} = t^{-\frac{d_s}{2}}, \quad (4.9)$$

onde $d_s = 2d_f/d_w$ é chamado de dimensão espectral. A dimensão espectral relaciona a geometria do sistema, representada por d_f , com a dinâmica do processo de difusão, representado por d_w . Para uma rede euclidiana, onde $d_f = d$ e $d_w = 2$, a dimensão espectral coincide com a dimensão euclidiana do sistema. De fato, se analisarmos o comportamento da distribuição de probabilidade gaussiana obtida para redes euclidianas (equação 2.10) para $r = 0$, temos,

$$P(0, t) \sim t^{-\frac{d}{2}},$$

mostrando que, em um meio fractal, a dimensão espectral tem função equivalente à dimensão euclidiana em meio homogêneo (redes euclidianas).

Assim o valor da dimensão espectral pode ser obtido através dos valores da dimensão fractal do *cluster* percolante e da dimensão da trajetória da partícula, ambos obtidos anteriormente, como

$$d_s = 1,331122 \pm 0.002029.$$

Em 1982, Alexander e Orbach [18] estimaram que o valor da dimensão espectral é igual a $4/3$ para qualquer $d > 1$. Para $d \geq 6$, a dimensão espectral é exatamente $4/3$ enquanto que para $2 \leq d < 6$ o valor é bastante próximo do valor proposto.

4.4 Distribuição de Probabilidades

Por fim, obtemos a distribuição de probabilidade $P(r, t)$ da partícula ser encontrada à uma distância r em um dado tempo t . No caso de um processo de difusão normal, vimos, no capítulo 2, que esta distribuição é dada por uma curva gaussiana na forma da equação 2.10. Já em um processo de difusão em um meio fractal, é esperado que a forma da distribuição mude.

Assim, obtivemos a Figura 25 para a probabilidade da partícula se encontrar à uma distância r após 10^6 passos para uma partícula realizando um movimento aleatório em um *cluster* de percolação, obtendo uma curva bastante diferente de uma gaussiana característica de um processo de difusão normal.

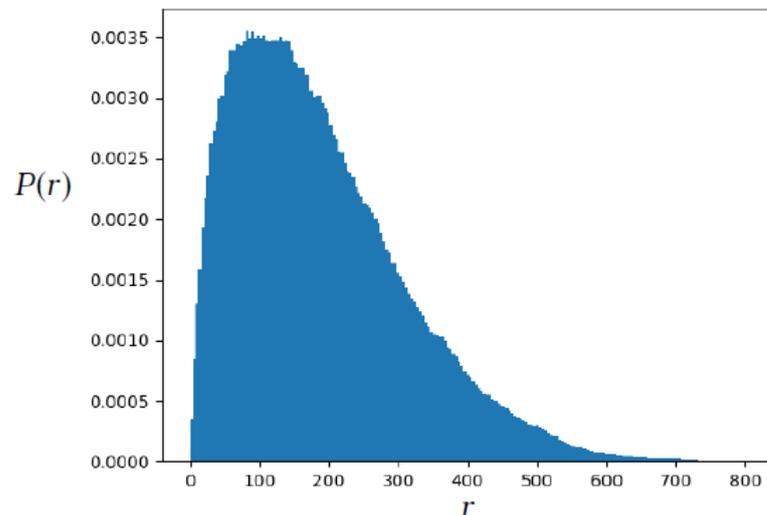


Figura 25: Média da distribuição de probabilidade, $P(r)$, realizada sobre processos de difusão em 1000 *clusters* percolantes.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos simular o processo de difusão em um meio desordenado, conectando os modelos de percolação e *random walk*. Vimos que o modelo de percolação pode ser utilizado para descrever um meio desordenado quando a probabilidade de ocupação dos sítios da rede encontra-se em um valor crítico, p_c , que caracteriza o surgimento de um agregado de sítios ocupados que atravessa o sistema, chamado *cluster* percolante. Essa estrutura apresenta buracos de diversos tamanhos e várias ramificações, sendo caracterizado como um fractal cuja dimensão fractal é $d_f = 1,888$.

Então, usando o modelo de *random walk*, simulamos o movimento de partículas em redes bidimensionais com a restrição de que os pontos do espaço acessíveis à partícula são os sítios ocupados pertencentes ao *cluster* percolante. Assim, analisamos que o movimento dessas partículas levam à um processo de difusão anômala, onde a relação do deslocamento quadrático médio com o tempo é representada na forma de uma lei de potência de expoente γ . Esse expoente está relacionado com a dimensão fractal da trajetória da partícula, cujo valor obtido foi $d_w = 2,827$.

Em sequência, mostramos que a condutividade de um material não-homogêneo apresenta uma dependência com o tamanho linear da rede, diferentemente do valor constante obtido na equação de condutividade de Einstein para meios homogêneos. A relação entre a condutividade e o tamanho linear da rede é dada novamente por uma lei de potência, cujo expoente $\tilde{\mu}$, chamado de expoente de condutividade, foi determinado como $\tilde{\mu} = 0,939$.

Por fim obtivemos a forma da distribuição de probabilidade da partícula se encontrar à uma distância r da origem, mostrando que o comportamento gaussiano mostrado em meios homogêneos deixa de acontecer.

Os valores dos expoentes dinâmicos obtidos neste trabalho estão de acordo com os encontrados na literatura [2, 8] dentro de uma margem de erro menor que 5%. Portanto, os resultados aqui obtidos mostram o comportamento que diferencia o processo de difusão em meios desordenados da difusão normal.

APÊNDICE A - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Em um *random walk* unidimensional, como o descrito na seção 2.1, após N passos, a probabilidade de uma única sequência de N_1 passos para a direita e $N_2 = N - N_1$ passos para a esquerda é dada por

$$u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}\dots u^{(N_1)} w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}\dots w^{(N_2)} = u^{N_1}w^{N_2},$$

enquanto o número de sequências dessa forma é dado pelo fator combinatório

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!N_2!}.$$

Logo, a probabilidade de após N passos termos N_1 para a direita é dada pela distribuição binomial,

$$P_N(N_1) = \binom{N}{N_1} u^{N_1} w^{N-N_1}. \quad (\text{A.1})$$

Essa distribuição já se encontra devidamente normalizada, visto que

$$\sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) = \sum_{N_1=0}^N \binom{N}{N_1} u^{N_1} w^{N-N_1} = (u + w)^N = 1. \quad (\text{A.2})$$

O valor médio do número de passos para a direita é, por definição,

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N N_1 P_N(N_1) = \sum_{N_1=0}^N \binom{N}{N_1} N_1 u^{N_1} w^{N-N_1}. \quad (\text{A.3})$$

O lado direito da equação pode ser reescrito como

$$u \frac{\partial}{\partial u} \left[\sum_{N_1=0}^N P_N(N_1) \right],$$

e assim,

$$\langle N_1 \rangle = u \frac{\partial}{\partial u} \left[(u + w)^N \right] = Nu. \quad (\text{A.4})$$

Os demais valores médios apresentados na Seção 2.1 são obtidos de maneira análoga, utilizando o operador $(u \partial/\partial u)$.

APÊNDICE B - LIMITE GAUSSIANO PARA A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Como as probabilidades u e w são sempre menores que 1, temos que a equação 2.1 obedece à seguinte condição,

$$\begin{aligned} P_N(0) &= w^N \rightarrow 0 \\ P_N(N) &= u^N \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Assim, pode-se afirmar que a distribuição de probabilidade apresenta um valor máximo para $N_1 = \tilde{N}_1 = kN$ com $0 < k < 1$. Para analisarmos o valor desse máximo torna-se mais conveniente trabalhar com o logaritmo natural dessa distribuição $g(N_1) = \ln P_N(N_1)$ que varia mais lentamente. Uma vez que o logaritmo natural é uma função monotônica crescente, deve apresentar o mesmo máximo da função $P_N(N_1)$. Próximo ao ponto de máximo, N_1 e $N - N_1$ se tornam tão grandes quanto o N , assim podemos usar a aproximação de Stirling na forma

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \quad (\text{B.2})$$

Dessa forma, temos

$$g(N_1) = N \ln N - N_1 \ln N_1 - (N - N_1) \ln(N - N_1) + N_1 \ln u + (N - N_1) \ln w. \quad (\text{B.3})$$

O valor para o qual $g(N_1)$ é máxima é \tilde{N}_1 tal que $\left. \frac{\partial g}{\partial N_1} \right|_{N_1=\tilde{N}_1} = 0$. Assim, temos

$$-\ln \tilde{N}_1 + \ln(N - \tilde{N}_1) + \ln u - \ln w = 0$$

e, portanto,

$$\tilde{N}_1 = Nu = \langle N_1 \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Logo, para N grande, o valor mais provável coincide com o valor médio. Podemos avaliar também o valor da segunda derivada de $g(N_1)$, de modo que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial N_1^2} = - \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N - N_1} \right). \quad (\text{B.5})$$

Assim, podemos expandir a função em torno do ponto de máximo usando a expansão em série de Taylor até a segunda ordem, dada por

$$g(N_1) = g(\tilde{N}_1) + (N_1 - \tilde{N}_1) \frac{\partial g}{\partial N_1} \Big|_{N_1=\tilde{N}_1} + \frac{1}{2} (N_1 - \tilde{N}_1)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial N_1^2} \Big|_{N_1=\tilde{N}_1},$$

$$\ln P_N(N_1) = \ln P_N(\tilde{N}_1) - \frac{1}{2Nuw} (N_1 - \tilde{N}_1)^2.$$

Dessa forma, usando a função exponencial em toda a equação, temos:

$$P_N(N_1) = P_0 \exp\left(-\frac{1}{2Nuw} (N_1 - \tilde{N}_1)^2\right). \quad (\text{B.6})$$

Sabendo que $N_1 = \frac{N-m}{2}$ e usando algumas das definições citadas na Seção 2.1.1, é fácil ver que:

$$P(x, t) = P_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (\text{B.7})$$

REFERÊNCIAS

- [1] Jens Feder. *Fractals*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] Daniel Ben-Avraham and Shlomo Havlin. *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*. Cambridge university press, 2000.
- [3] Albert Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 322(8):549–560, 1905.
- [4] Edward A Codling, Michael J Plank, and Simon Benhamou. Random walk models in biology. *Journal of The Royal Society Interface*, 5(25):813–834, 2008.
- [5] Paul H Cootner. The random character of stock market prices. 1964.
- [6] George H Weiss and Robert J Rubin. Random walks: theory and selected applications. *Advances in Chemical Physics*, pages 363–505, 1982.
- [7] Leo Grady. Random walks for image segmentation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 28(11):1768–1783, 2006.
- [8] Dietrich Stauffer and Ammon Aharony. *Introduction To Percolation Theory*. CRC Press, 1994.
- [9] Silvio RA Salinas. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(2):263–269, 2005.
- [10] JM Silva and JAS Lima. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Rev. Bras. Ens. Fs*, 29:25–35, 2007.
- [11] Howard C Berg. *Random walks in biology*. Princeton University Press, 1993.
- [12] Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, volume 1.
- [13] Benoit B Mandelbrot. Self-affine fractal sets, i: the basic fractal dimensions. In *Fractals in physics*, pages 3–15. Elsevier, 1986.
- [14] L. de Arcangelis, S. Redner, and A. Coniglio. Anomalous voltage distribution of random resistor networks and a new model for the backbone at the percolation threshold. *Phys. Rev. B*, 31:4725–4727, Apr 1985.
- [15] Cristopher Moore and Mark EJ Newman. Epidemics and percolation in small-world networks. *Physical Review E*, 61(5):5678, 2000.
- [16] Christopher L. Henley. Statics of a “self-organized” percolation model. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2741–2744, Oct 1993.
- [17] Sorin Solomon, Gerard Weisbuch, Lucilla de Arcangelis, Naeem Jan, and Dietrich Stauffer. Social percolation models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 277(1):239–247, 2000.

- [18] Alexander, S. and Orbach, R. Density of states on fractals : “ fractons ”. *J. Physique Lett.*, 43(17):625–631, 1982.
- [19] M Sahimi. *Applications Of Percolation Theory*. CRC Press, 1994.