



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PABLO CÉSAR BENEVIDES DE CARVALHO ROSSAS MOTTA

HIERARQUIA E COSMOLOGIA EM MODELO DE RANDALL-SUNDRUM

FORTALEZA

2018

PABLO CÉSAR BENEVIDES DE CARVALHO ROSSAS MOTTA

HIERARQUIA E COSMOLOGIA EM MODELO DE RANDALL-SUNDRUM

Monografia de Bacharelado apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M875h Motta, Pablo César Benevides de Carvalho Rossas.
Hierarquia e cosmologia em modelo de Randall-Sundrum / Pablo César Benevides de Carvalho Rossas
Motta. – 2018.
42 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

1. Randall-Sundrum. 2. Hierarquia. 3. Brana. 4. Cosmologia. 5. Inflação. I. Título.

CDD 530

PABLO CÉSAR BENEVIDES DE CARVALHO ROSSAS MOTTA

HIERARQUIA E COSMOLOGIA EM MODELO DE RANDALL-SUNDRUM

Monografia de Bacharelado apresentada à
Coordenação da Graduação do Curso de Física,
da Universidade Federal do Ceará, como requi-
sito parcial para a obtenção do Título de Bacha-
rel em Física.

Aprovada em 03/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Me. Antônio Sousa Ribeiro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais, amigos
professores e familiares

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Evelyn e Augusto que me ensinaram desde menino o prazer de aprender, e que estarão sempre ao meu lado não importando as circunstâncias. Aos meus irmãos Maria, Lulu e Levy por todo o afeto e carinho. Ao meu professor do ensino médio, Thiago Souza, que me revelou o mundo maravilhoso que é a física. A minha avó Lais, e a minha tia Alba, pelo almoço de todos os domingos e à tia Lu pela sobremesa. E a minha tia Celma, por ser sempre prestativa. Ao professor Geová, que me aceitou como aluno, eu ainda no começo da graduação, além de preparar as deliciosas Badernas. Ao meu amigo Raul Crowley, por estar sempre presente para sanar quase todas as minhas dúvidas, seja na sala ou mesmo no Vinil. Aos demais membros do Laricca, como: Ivan, Manel, Augusto, Leo e Otávio, pelas calorosas discussões. Aos meus companheiros: Daniel, João, Kaique e Johnathas que também estiveram nessa batalha que é entregar o TCC a tempo. Um grande abraço a Alehff, Tanakinha, Careca, Renan e Bushi. E a Alyson, Victor Sales, Luan, Edinaldo, Afonso, Higor, Coala e Diego, deixo meu “boa sorte”. Agradeço também aos demais professores do departamento de física da UFC; ao pessoal da coordenação, da cantina, da biblioteca e da limpeza. A quem cozinha aquela comida, às vezes maravilhosa, às vezes nem tanto, do RU. À turma do Caos: Lucas, Michel, Sol, Loirinha, Stanley e Ancelmo, por formarem o grupo aliado. Ao CNPq, pelo suporte financeiro. Ao pessoal que fica na acessoria/monitoria, seja estudando, jogando ou no ócio criativo. Aos demais estudantes, às novas gerações, a Jah, a Iemanjá e ao universo.

Nesta versão final do trabalho, reitero meus agradecimentos a Augusto Signorelli pela revisão do texto, assim como a Johnathas e Ivan pela revisão quanto a parte em língua inglesa.

RESUMO

Teorias de dimensões extras têm sido consideradas desde o início do século XX com Nordstrom e, em seguida, com Kaluza e Klein, e, ao longo dos anos, foram ressurgindo em novos contextos. Neste trabalho, iremos abordar de uma maneira didática o modelo proposto em 1999 por Randall e Sundrum que se propõe a explicar o chamado problema da hierarquia de gauge: a enorme discrepância entre a escala de energia eletrofraca e a da gravidade. Como nossa linguagem é a relatividade geral, dedicamos o primeiro capítulo para desenvolver seu formalismo, elucidando os tópicos necessários para a compreensão do que será abordado. Em seguida, introduziremos o modelo de Randall-Sundrum. Neste cenário, duas branas estão imersas em um espaço-tempo Anti-de-Sitter (4+1)-dimensional onde uma delas comporta os campos do modelo padrão. Discutimos a hierarquia de gauge para campos escalares, vetoriais e spinoriais. Por fim, abordamos a cosmologia, onde revisamos a cosmologia convencional (3+1)-dimensional dos universos de Friedmann-Robertson-Walker, e, em seguida, mostramos como podemos obter uma solução inflacionária no modelo de Randall-Sundrum. Limitamo-nos ao caso em que distância entre as branas está fixa.

Palavras-chave: Randall-Sundrum. Hierarquia. Brana. Cosmologia. Inflação.

ABSTRACT

Higher-dimensional theories have been considered since the early twentieth century by Nordström and then by Kaluza and Klein, and over the years, they have re-emerged in new contexts. In this work, we will discuss in a pedagogical manner the model presented in 1999 by Randall and Sundrum, which proposes an explanation to the so-called gauge hierarchy problem: the large discrepancy between the electroweak and the gravity scales of energy. As our language is general relativity, we devote the first chapter to developing its formalism, elucidating the topics necessary for understanding what will be addressed. Next, we introduce the Randall-Sundrum model. In this scenario, two branes are embedded in a (4+1)-dimensional Anti-Sitter spacetime, where one of them contains the fields of the standard model. We explore the gauge hierarchy for scalar, vector and spinorial fields. Finally, we discuss cosmology, where we review the (3+1)-dimensional conventional cosmology of the Friedmann-Robertson-Walker universes and then show how we can obtain an inflationary solution in the Randall-Sundrum model. We limit ourselves to the case where the distance between the branes is kept fixed.

Keywords: Randall-Sundrum. Hierarchy. Brane. Cosmology. Inflation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	UMA REVISÃO DE RELATIVIDADE GERAL	11
2.1	Fundamentos	11
2.2	Tensor de curvatura e equações de Einstein	14
2.3	A ação de Einstein-Hilbert	15
2.4	A contribuição da matéria	17
2.5	Formulação D-dimensional	19
3	O MODELO DE RANDALL-SUNDRUM	21
3.1	Uma construção intuitiva do modelo	21
3.2	Formulação via princípio variacional	24
3.3	Implicações físicas: hierarquia de gauge	26
4	ABORDAGEM COSMOLÓGICA	30
4.1	Uma revisão da solução FRW	30
4.2	O modelo de Randall-Sundrum com inflação	33
5	CONCLUSÃO	38
	APÊNDICE A - UNIDADES NATURAIS	39
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

A ideia de que podem existir mais dimensões que as nossas quatro usuais têm sido consideradas desde o início do século XX com Nordstrom e, em seguida, com Kaluza e Klein, em uma tentativa de unificar a gravidade e o eletromagnetismo. Ao longo dos anos, teorias com dimensões extras foram ressurgindo em novos contextos, combinando ideias de relatividade e mecânica quântica. Por exemplo, teorias que envolvem supersimetria, como teoria das supercordas, exigem mais de quatro dimensões. Ademais, consequências cosmológicas podem ser extraídas de alguns desenvolvimentos recentes, indicando que poderemos testar estes modelos com os dados cosmológicos que estão cada vez mais precisos.

Na teoria proposta por Kaluza e Klein o espaço-tempo apresenta cinco dimensões. Nesse cenário, a dimensão extra é compacta, isto é, finita e fechada em torno de si mesma como um círculo. Teorias mais recentes, como em supercordas, também consideram dimensões extras compactas, e a física 4-dimensional é recuperada a partir de um processo chamado de redução Kaluza-Klein, na qual a compactificação é feita em uma variedade de pequeno tamanho, geralmente da ordem de Plank.

Uma outra forma de se compactificar dimensões extras tem sido abordadas em desenvolvimentos recentes em teoria das cordas e em sua extensão teoria M. Nestes desenvolvimentos, considera-se que as partículas do modelo padrão estão confinadas em uma hiper-superfície, chamada *brana*, imersa em um espaço-tempo com dimensões superiores, chamado *bulk*. Apenas a gravidade e alguns tipos de matéria exótica podem se propagar no bulk. As restrições quanto ao tamanho das dimensões extras ficam mais brandas, uma vez que as partículas do modelo padrão se propagam em três dimensões. Esse tipo de mundo-brana emerge no modelo de Horava-Witten, em teoria das cordas, que constituiu uma base para os demais modelos de mundo brana desenvolvidos até agora. [6, 7]

Neste trabalho, iremos abordar o modelo proposto em 1999 por Randall e Sundrum [20] como uma tentativa de explicar o chamado problema da hierarquia de gauge. Tal problema constitui na enorme discrepância entre a escala de energia eletrofraca e a escala de Plank. De acordo com o modelo padrão, a quebra espontânea de simetria para a simetria eletrofraca é $\sim 10^3 \text{ GeV}$, o que significa que as massas dos campos de gauge estão nessa escala. Entretanto, para a gravidade, a escala de energia é de $\sim 10^{19} \text{ GeV}$, a escala de Plank. Essa discrepância $M_{\text{eletrofraca}}/M_{\text{Plank}} = 10^{-16}$ requer para os termos de massa um ajuste fino de 16 dígitos o que é um absurdo. Além de revelar uma imperfeição na teoria do modelo padrão, essa discrepância é um empecilho para uma unificação entre modelo padrão gravidade. [16]

Uma solução para esse problema usando a ideia de mundo-brana foi proposta inici-

almente por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali, 1998, [4, 5] no que se tornou conhecido por modelo ADD. Neste cenário, a brana está imersa em um espaço-tempo plano $(4+d)$ -dimensional, onde as d dimensões extras são compactas de raio r_c . A gravidade se propaga em $(4+d)$ dimensões com uma escala de energia fundamental M_* , de forma que para distâncias muito maiores que r_c a gravidade se comporta 4-dimensional, com $M_{Plank} = M_*^{2+d} r_c^d$. Como a gravidade não havia sido medida em escalas menores de um milímetro, r_c poderia ser uma fração de milímetro. Para um volume do espaço extra-dimensional suficiente poderíamos fazer a escala fundamental se equiparar a eletrofraca, e para isso requeríamos mais de uma dimensão extra. [6, 7]

Entretanto, o modelo ADD introduz uma nova hierarquia entre a escala fundamental da gravidade M_* e a escala de compactificação $1/r_c$. É nesse contexto que surge o modelo de Randall-Sundrum, onde se propõe uma geometria não-plana dobrada com uma métrica não-fatorizável, e a relação anterior para a escala de energia não é mais válida. Pode-se gerar a hierarquia com uma dimensão extra compacta sem a exigência de um r_c grande, de forma que podemos trazer todas as constantes fundamentais da teoria para a mesma escala de energia. O bulk é uma porção de uma geometria Anti-de-Sitter com duas branas na fronteira: Uma com tensão positiva, que chamamos de brana *oculta*, e a outra, com tensão negativa, que chamamos de *visível*, por ser aquela que comporta os campos do modelo padrão. [6, 7, 17, 20]

Em um segundo artigo [19], Raman e Sundrum mostram que sua métrica não fatorizável permite outra possibilidade: a dimensão extra pode não ser compacta. Nesse cenário só existiria uma única brana, aquela com tensão positiva. Apesar de não resolver o problema da hierarquia, esse modelo apresenta implicações cosmológicas interessantes [6]. Entretanto, nesta revisão introdutória, trataremos apenas o modelo de Randall-Sundrum tipo I (com duas branas).

Este trabalho é organizado da seguinte forma: como nossa linguagem é a relatividade geral, dedicamos o primeiro capítulo para desenvolver seu formalismo, elucidando os tópicos necessários para a compreensão do que será abordado. Em seguida, introduzimos o modelo de Randall-Sundrum de uma maneira mais simples e intuitiva para o leitor não-familiarizado com teorias de dimensões extras, para em uma seção seguinte introduzirmos os formalismos mais amplamente usados. Discutimos a hierarquia de gauge para campos escalares, vetoriais e spinoriais. Por fim, discutimos cosmologia, onde revisamos a cosmologia convencional 4-dimensional dos universos de Friedmann-Robertson-Walker e então mostramos como podemos obter uma solução inflacionária no modelo de Randall-Sundrum com duas branas como foi proposto por Hang Bae Kim e Hyung do Kim [15]. Nos limitamos ao caso em que distância entre as branas está fixa. O assunto é discutido em uma abordagem didática, acessível a qualquer leitor familiarizado com relatividade geral, e os cálculos são apresentados de forma detalhada.

2 UMA REVISÃO DE RELATIVIDADE GERAL

2.1 Fundamentos

A gravidade é a única interação fundamental da natureza que apresenta a propriedade da universalidade. Qualquer partícula imersa no campo gravitacional adquire a mesma aceleração e, conseqüentemente percorre a mesma trajetória. Isto independe de sua massa ou de qualquer outra característica intrínseca a ela. Devido a esse motivo, podemos descrever essa interação sem o uso de “forças”, mas como um efeito da estrutura do espaço-tempo. [2]

Como um guia de como essa deformação do espaço-tempo deve ser construída tomamos como base o Princípio da Equivalência de Einstein enunciado da seguinte forma: sempre haverá um sistema de coordenadas tal que a gravidade zera localmente [2, 14]. Fisicamente, se tomarmos uma região suficientemente pequena onde o campo gravitacional pode ser tido como constante, as leis da física em um referencial não-girante em queda livre são as mesmas de um referencial inercial sem gravidade. [21]

Como a relatividade especial descreve a física sem gravitação, requeremos que a métrica de Lorentz $\eta_{\mu\nu}$ e a simetria de Poincaré sejam válidas localmente. Isto sugere que essa deformação no espaço-tempo seja dada por uma mudança na métrica [2]. O espaço-tempo agora é curvo, e será dada por uma métrica mais geral:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

A condição de ser localmente Minkowski requer que a distribuição de sinal, ou assinatura, seja $(+ - - -)$ [21]. Podemos visualizar que em um ponto qualquer do espaço-tempo, um espaço de Minkowski pode ser introduzido tangente a esse ponto [14]. Estes espaços são denotados pseudo-riemannianos. Os espaços ditos propriamente riemannianos são aqueles localmente euclidianos [21].

Para que possamos construir teorias no espaço curvo dado pela eq. (2.1), é conveniente escrevermos em termos de quantidades que se transformem como tensores para uma transformação qualquer de coordenadas. Por exemplo, a equação do movimento da partícula livre

$$\frac{dU^\mu}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds} \partial_\nu U^\mu = 0 \quad (2.2)$$

só é válida no sistema de coordenadas localmente Minkowski. O fato dela não ser válida em coordenadas arbitrárias reside no fato de que a derivada parcial não se comporta como tensor.

O mesmo problema acontece para teorias de campo, como por exemplo para o campo escalar:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + M^2) \phi = 0 \quad (2.3)$$

Nesse sentido, é de nosso interesse introduzir um novo objeto ∇_μ que substitua a derivada e que seja covariante, o qual chamamos de derivada covariante. Com isso, temos uma regra (acoplamento mínimo) [2, 14] que permite a passagem de uma teoria do espaço de Minkowski para o espaço curvo através da substituição:

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$d^4x \longrightarrow d^4x \sqrt{-g} \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu \quad (2.6)$$

Para que possamos caracterizar a derivada covariante, primeiramente, precisamos definir um objeto denotado por símbolo de Christoffel. Este possui duas versões que são chamadas de primeira e segunda espécie respectivamente [21]:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} := \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}) \quad (2.7)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} := g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\nu\rho} \quad (2.8)$$

A partir da definição, vemos que ele apresenta simetria nos dois últimos índices:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \Gamma_{\mu\rho\nu} \quad \Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} \quad (2.9)$$

A seguir, uma outra propriedade interessante que pode ser facilmente verificada substituindo a definição (2.7) no lado direito da equação:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho} \quad (2.10)$$

Uma vez que já caracterizamos o símbolo de Christoffel e suas propriedades, vou enunciar sem prova que a derivada covariante de um tensor é da seguinte forma: (para uma demonstração veja por exemplo ref. [2, 14, 21] etc):

$$\nabla_\lambda F^\mu_\nu = \partial_\lambda F^\mu_\nu + F^\rho_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - F^\mu_\rho \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \quad (2.11)$$

Esta expressão pode ser generalizada para um tensor de ordem arbitrária F . Começamos com um termo de derivada parcial, e, em seguida, acrescentamos termos positivos para cada índice contravariante, substituindo-o em F por um índice mudo, que contrai com um Γ , que também

recebe o índice substituído. De forma similiar, acrescentamos termos negativos para cada índice covariante. [14, 21] É imediato, usando equações (2.11), (2.10) e a simetria do Símbolo de Christoffel, eq. (2.9), que o tensor métrico é “constante” no sentido de derivada covariante, isto é [14, 21]:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta^\mu_\nu = 0 \quad (2.12)$$

Podemos agora voltar para nosso problema original e generalizar as equações (2.2) e (2.3). Para a partícula clássica livre, temos:

$$\frac{dx^\nu}{ds} \nabla_\nu U^\mu = \frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0 \quad (2.13)$$

Essas curvas, chamadas de geodésicas, tem a propriedade de não variarem de direção analogamente às retas no espaço plano. [2]. Da mesma forma, a equação covariante para o campo escalar é dada por:

$$(\nabla_\mu \partial^\mu + M^2) \phi = 0 \quad (2.14)$$

Note que mantivemos a primeira derivada na forma ∂^μ pois a derivada covariante de um escalar se resume à própria derivada parcial, enquanto a segunda derivada está sendo aplicada em um vetor (o gradiente do escalar). Alternativamente, podemos generalizar as teorias de campo a partir das ações. Tomemos, por exemplo, as ações do campo escalar, vetorial e spinorial no espaço plano de Minkowski [2, 3, 14]

$$S_{escalar} = \frac{1}{2} \int d^4x [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M^2 \phi^2] \quad (2.15)$$

$$S_{vetorial} = -\frac{1}{4} \int d^4x [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + M^2 \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu] \quad (2.16)$$

$$S_{spinorial} = \int d^4x [i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - M\bar{\Psi} \Psi] \quad (2.17)$$

A generalização para o espaço curvo, usando as equações (2.4), (2.5) e (2.6), são dadas por [2, 14]:

$$S_{escalar} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M^2 \phi^2] \quad (2.18)$$

$$S_{vetorial} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + M^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu] \quad (2.19)$$

$$S_{spinorial} = \int d^4x \sqrt{-g} [i\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - M\bar{\Psi} \Psi] \quad (2.20)$$

A derivada covariante para o campo spinorial é, na verdade, dada por um acoplamento com uma conexão de spin, mas não nos preocupemos com isso. Apenas note que os termos com conexão se cancelam em $F_{\mu\nu}$, de forma que se mantém a expressão original:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \quad (2.21)$$

2.2 Tensor de curvatura e equações de Einstein

Nesta seção, vamos introduzir um objeto puramente geométrico que é responsável por descrever as propriedades de curvatura na geometria (pseudo)-riemanniana: O tensor de curvatura de Riemann. Optamos por defini-lo através do comutador das derivadas covariantes. Usando a equação (2.11), temos:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\lambda} = -R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} V^{\rho} \quad (2.22)$$

Onde o tensor de Riemann $R^{\lambda}_{\rho\mu\nu}$ é dado por:

$$R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} := \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \quad (2.23)$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}\partial_{\nu}g_{\rho\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\sigma}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}\partial_{\sigma}g_{\rho\nu}) + \Gamma_{\lambda\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \quad (2.24)$$

Este pode ser usado para distinguirmos espaços curvos, de parametrizações do espaço “plano” de Minkowski. De fato, existe um resultado rigoroso na geometria diferencial que diz que a condição de suas componentes zerarem é necessária e suficiente para que exista uma transformação global de coordenadas tal que deixa a métrica na forma $\eta_{\mu\nu}$ em todos os pontos [14]. Ainda, podemos notar, a partir das equações (2.23) e (2.24), que o tensor de Riemann apresenta algumas simetrias:

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\nu\mu} \quad (2.25)$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\lambda\nu\rho\mu} \quad (2.26)$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\rho} \quad (2.27)$$

$$R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\nu\rho\mu} = 0 \quad (2.28)$$

A validade dessas propriedades podem ser mais facilmente verificadas no sistema de coordenadas no qual o símbolo de Christoffel zera localmente. A existência dessas coordenadas é garantida pelo princípio da equivalência. Dessa forma, podemos eliminar os termos em que o símbolo de Christoffel aparece sem derivada nas equações (2.23) e (2.24). A primeira e a

última simetria são mais facilmente vistas a partir da primeira definição, e a segunda e terceira propriedade, a partir da segunda definição. [21]

Contrações sucessivas deste tensor dão origem a outras quantidades igualmente importantes para caracterizar a geometria do espaço-tempo na relatividade geral. São elas o tensor de Ricci e o escalar de Ricci:

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} \quad (2.29)$$

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (2.30)$$

Podemos notar que o tensor de Ricci é simétrico. Para isto, basta usarmos a propriedade eq. (2.28) e, em seguida, as (2.25) e (2.26) e fazer a contração. [21]

Já colocamos que o tensor de Riemann e suas contrações, tensor e escalar de Ricci, descrevem a curvatura do espaço-tempo. Para estabelecermos como a matéria causa essa distorção, devemos lembrar que na gravidade newtoniana, $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, a densidade ρ atua como fonte do campo gravitacional. Na relatividade, ρ não é mais um invariante, de forma que o tensor momento-energia a substitui representando a matéria. Como a conservação da energia requer $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$, a ideia de Einstein foi relacionar $T_{\mu\nu}$ com grandezas geométricas que possuem derivadas covariantes zero. [21] Além da própria métrica, eq. (2.12), o Tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ também satisfaz esta propriedade (para uma demonstração veja, por exemplo, [14]). Deste modo, a Equação de Einstein é dada como segue:

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

A constante de proporcionalidade κ , pode ser dada fazendo-se o limite newtoneano: $\kappa = 8\pi G$, sendo G a constante da gravitação universal de Newton. A constante Λ é chamada de constante cosmológica por motivos históricos e seu valor é tão pequeno que é desprezada em muitos contextos. Optamos por mantê-la para facilitar a conexão com a gravitação em dimensões extras.

2.3 A ação de Einstein-Hilbert

A Equação de Einstein, (2.31), fornece a dinâmica do campo $g_{\mu\nu}$ onde o termo fonte $T^{\mu\nu}$ é devido a interação com outros campos, que representam a matéria [14]. Estes podem ser: escalares, como o bóson de Higgs; vetoriais, como os campos de gauge das interações eletrofracas; ou spinoriais, como o spinor de Dirac. Suas lagrangeanas são funções do valor do campo e de sua primeira derivada $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi(x), \partial_{\mu}(x)]$. A interação correta entre os campos é dada a partir de uma ação total S invariante quanto às simetrias do sistema, de modo que as configurações de campo são tais que a ação é extremante, $\delta S = 0$ [3]. Em gravitação, a

simetria de nosso interesse é a de Poincaré. Sua validade local é assegurada pelo Princípio de Equivalência. Deste modo, é de nosso interesse introduzir a ação associada ao campo $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ que é chamada ação de Einstein-Hilbert [2]:

$$S_{EH}[g] = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (2.32)$$

Para simplificarmos nosso raciocínio, vamos, inicialmente, considerar que não há presença de matéria, de modo que a ação é dada exclusivamente pela (2.32), e, portanto, $\delta S_{EH} = 0$. Tomando o variacional e aplicando a regra da cadeia, temos [2]:

$$\frac{\delta S_{EH}[g]}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 2\Lambda) + \sqrt{-g} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} \right] \quad (2.33)$$

Pode ser provado (veja [14]), que o terceiro termo do lado direito da equação (2.33) corresponde a uma divergência total. O segundo pode ser simplificado, uma vez que:

$$\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} \quad (2.34)$$

O primeiro termo pode ser simplificado usando a seguinte identidade:

$$\ln |\det \mathbf{g}| = \text{tr} \ln |\mathbf{g}| \quad (2.35)$$

De modo que [2]:

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta(-g)}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta \exp[\text{tr} \ln \mathbf{g}]}{\delta g^{\rho\sigma}} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g) \text{tr} \frac{\delta \ln \mathbf{g}}{\delta g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\rho\sigma} \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.34) e (2.37) de volta na equação (2.33) temos:

$$\frac{\delta S_{EH}[g]}{\delta g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\rho\sigma} - \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) g_{\rho\sigma} \right] \quad (2.38)$$

Na ausência de matéria, vemos que a condição $\delta S_{EH} = 0$, nos impõe:

$$R_{\rho\sigma} - \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) g_{\rho\sigma} = 0 \quad (2.39)$$

Que é precisamente a equação de Einstein no vácuo.

2.4 A contribuição da matéria

Para que possamos incluir a interação da matéria, bastamos partir da ação total dada pela Ação de Albert-Hilbert somada à ação da matéria:

$$S_{mat} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat} \quad (2.40)$$

Onde a ação acima corresponde à generalização da ação usual dos campos no espaço de Minkowski para o espaço curvo, seguindo a regra do acoplamento mínimo como nos exemplos (2.18), (2.19) e (2.20). [14]. Entretanto, não devemos nos preocupar, por enquanto, com a forma funcional dessa lagrangeana. Como as configurações de campo são tais que a ação total deve extremante:

$$\delta S_{EH} + \delta S_{mat} = 0 \quad (2.41)$$

Uma vez que já conhecemos a contribuição da Ação de Einstein-Hilbert, podemos usar a equação (2.38), obtendo:

$$-\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} d^4x \left[R_{\rho\sigma} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda \right) g_{\rho\sigma} \right] \delta g^{\rho\sigma} + \delta S_{mat} = 0 \quad (2.42)$$

Comparando com a Equação de Einstein, eq. (2.31), podemos notar que o seu termo fonte surge naturalmente a partir do termo de interação com a matéria, de maneira que devemos defini-lo como [2]:

$$T_{\sigma\rho} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat})}{\delta g^{\rho\sigma}} \quad (2.43)$$

Precisamos nos atentar para a seguinte propriedade: ao levantarmos os índices a expressão troca de sinal [2]:

$$T^{\sigma\rho} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat})}{\delta g_{\rho\sigma}} \quad (2.44)$$

O que pode ser facilmente obtido ao tomarmos o variacional na equação abaixo:

$$g_{\lambda\mu} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu \Rightarrow g_{\mu\lambda} \delta g^{\lambda\nu} = -g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\lambda} \Rightarrow T_{\lambda\nu} \delta g^{\lambda\nu} = -T^{\lambda\mu} \delta g_{\mu\lambda} \quad (2.45)$$

Contudo, ainda não está claro que o objeto definido pela equação (2.43) de fato representa o *momento-energia* da matéria. O que entendemos por “momento-energia” de um campo é a corrente de Noether conservada devido a invariância da ação quanto a translações. Como a simetria de Poincaré é apenas local, devemos considerá-las dependentes da posição no

espaço-tempo [14]:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (2.46)$$

Então, devemos calcular a variação da ação quanto a essas transformações a partir das equações (2.43) e (2.44) [2]:

$$\delta S_{mat} = \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x \quad (2.48)$$

onde $\delta g_{\mu\nu}$ pode ser dado para ϵ^μ pequenos, por:

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x'^\rho - \epsilon^\mu) - g_{\mu\nu}(x^\rho) \quad (2.49)$$

$$= g'_{\mu\nu}(x'^\rho) - g_{\mu\nu}(x^\rho) - \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

Usando a lei de transformação de um tensor (veja ref. [21]):

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

$$= (\delta_\mu^\sigma - \partial_\mu \epsilon^\sigma) (\delta_\nu^\lambda - \partial_\nu \epsilon^\lambda) g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\nu} - \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

$$= -g_{\sigma\nu} \partial_\mu \epsilon^\sigma - g_{\mu\rho} \partial_\nu \epsilon^\rho - \epsilon^\rho \partial_\rho g^{\mu\nu} \quad (2.53)$$

Substituindo de volta na equação (2.48)(ii) [2]:

$$\delta S_{mat} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} [-g_{\rho\nu} \partial_\mu \epsilon^\rho - g_{\mu\rho} \partial_\nu \epsilon^\rho - \epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}] \quad (2.54)$$

Podemos usar a simetria do tensor $T^{\mu\nu}$ (a simetria está evidente nas equações (2.43) e (2.44) devido a simetria da métrica) para juntar os dois primeiros termos, e, então, integrando por partes o termo resultante, e, eliminando o termo de fronteira, temos:

$$\delta S_{mat} = - \int d^4x \epsilon^\rho \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} T_\rho^\nu) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} \right] \quad (2.55)$$

Aqui vamos usar a propriedade $\partial_\nu g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho}$, eq. (2.10), e, novamente, a propriedade de simetria do tensor momento-energia, e, em seguida, integramos por partes e usamos o fato que $\partial_\nu \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^\mu$ (ref. [2]), resultando [2]:

$$\delta S_{mat} = - \int d^4x \epsilon^\rho [\partial_\nu (\sqrt{-g} T_\rho^\nu) - \sqrt{-g} T_\nu^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\nu] \quad (2.56)$$

$$= - \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^\rho [\partial_\nu T_\rho^\nu + T_\rho^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\mu - T_\nu^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\nu] \quad (2.57)$$

$$= - \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon^\rho [\nabla_\nu T_\rho^\nu] \quad (2.58)$$

A arbitrariedade do ϵ^ρ e o fato de que a ação deve ser invariante quanto a translação, leva a que $T^{\nu\rho}$ satisfaça a lei de conservação covariante [2]:

$$\nabla_\nu T^{\nu\rho} = 0 \quad (2.59)$$

O que nos mostra que, de fato, este objeto pode ser interpretado como o tensor momento-energia dos campos de matéria.

2.5 Formulação D-dimensional

Até o presente momento temos considerado implicitamente que o nosso espaço-tempo apresenta quatro dimensões, sendo uma temporal e três espaciais, onde usamos índices gregos minúsculos μ, ν, λ, \dots para percorrer as quatro coordenadas 0, 1, 2, 3. Contudo, podemos generalizar, sem dificuldades, para uma teoria D-dimensional. A mudança óbvia é substituir o elemento de volume d^4x por d^Dx nas equações (2.32) e (2.40). Mas, como queremos manter a ação com dimensão numérica 0 (veja apêndice (A)), a constante κ deverá mudar de unidade. Como $\kappa = 8\pi G$, e fazendo uso da equação (A.4), podemos re-escrever as equações (2.32) e (2.40) por:

$$S = - \frac{M_{Plank}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + S_{mat} \quad (2.60)$$

Para generalizarmos esta ação para uma métrica D-dimensional dada por $ds^2 = g_{AB}(x) dx^A dx^B$, onde os índices latinos maiúsculos A, B, C, \dots percorrem os índices 0, 1, 2, ..., $D-1$ ($D = 5$, nos capítulos subsequentes), devemos nos atentar que cada dx possui dimensão -1 , de modo que podemos generalizar a equação (2.60) afim de manter dimensionalidade da ação por [16]:

$$S = - \frac{M_*^{D-2}}{16\pi} \int d^Dx \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + S_{mat} \quad (2.61)$$

Onde M_* é a escala da teoria, e a nova constante Λ , ao contrário da constante cosmológica 4D efetiva, não tem obrigação de zerar ou mesmo ser pequena [13]. O momento-energia será dado

por:

$$T_{AB} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta g^{AB}} \quad (2.62)$$

De modo que, tomando $\delta S = 0$, chegamos a equação de Einstein:

$$R_{AB} - \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right)g_{AB} = \frac{8\pi}{M_*^{D-2}}T_{AB} \quad (2.63)$$

3 O MODELO DE RANDALL-SUNDRUM

3.1 Uma construção intuitiva do modelo

Supomos que o nosso mundo (3+1)-dimensional é uma (hiper)-superfície, uma 3-brana, imersa em um espaço-tempo com uma dimensão extra. Por conveniência vamos representar a métrica em um sistema de coordenadas dado pelas quatro coordenadas usuais x^μ do nosso universo, mais uma coordenada Z para parametrizar a dimensão extra, onde a definimos perpendicular à brana, a fim de não haver termos cruzados $dx^\mu dx^Z$ na nossa métrica [16]. Também precisamos que a métrica satisfaça a simetria global de Poincaré, visto que o mundo 4D proveniente dessa solução 5D deve parecer plano e estático [13]. Assim sendo, podemos tomar o *ansatz* a seguir [9, 10, 11, 13, 16, 17, 20]:

$$ds^2 = e^{2A(Z)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dZ^2 \quad (3.1)$$

onde devemos notar que sempre podemos fixar $g_{ZZ} = 1$ a partir de uma transformação de coordenada em Z [16]. A função $e^{2A(Z)}$ é escrita na forma de uma exponencial por conveniência, e é denotada de fator de dobra [13]. Ao substituir a equação (3.1) na equação (2.63) com $D = 5$ as equações de Einstein ficam reduzidas a [16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} - (3A'' + 6A'^2 + \Lambda) \delta_\nu^\mu = \frac{8\pi}{M_*^3} T_\nu^\mu \\ - (6A'^2 + \Lambda) = \frac{8\pi}{M_*^3} T_Z^Z \\ 0 = T_\mu^Z \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$- (6A'^2 + \Lambda) = \frac{8\pi}{M_*^3} T_Z^Z \quad (3.3)$$

$$0 = T_\mu^Z \quad (3.4)$$

É fácil ver que podemos substituir a segunda equação, eq. (3.3), na primeira, eq. (3.2), obtendo a equação abaixo, onde $T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$:

$$3A' = \frac{8\pi}{M_*^3} (T_Z^Z - T_0^0) \quad (3.5)$$

Aqui, convém considerarmos que toda a matéria está confinada na brana, de modo que, para fora da brana, impomos $T_{AB} = 0$, resultando as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6A'^2 + \Lambda = 0 \\ A'' = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$A'' = 0 \quad (3.7)$$

Que podem ser facilmente resolvidas:

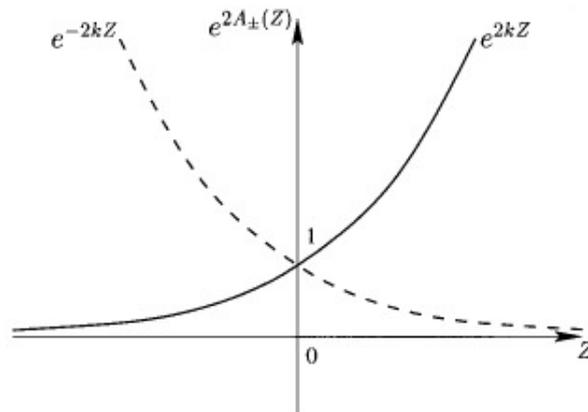
$$A'^2 = -\frac{\Lambda}{6} \Rightarrow A = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}}Z + A_0 \quad (3.8)$$

O termo A_0 pode ser eliminado através da transformação $dx^\mu \rightarrow e^{-A_0}dx^\mu$, de modo que a métrica se torna:

$$ds^2 = e^{\pm 2kZ} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dZ^2 \quad k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} \quad (3.9)$$

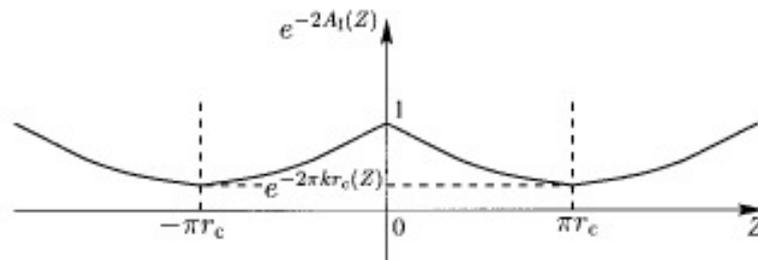
Esta solução só é compatível com $\Lambda < 0$, o que significa que o espaço-tempo tem geometria anti-de Sitter (AdS_5) [20]. Como ainda precisamos definir o sinal do fator de dobra, vamos analisar o comportamento das duas soluções possíveis em função da coordenada da dimensão extra.

Gráfico 1 – Grafico do fator de dobra positivo e negativo em função da coordenada da dimensão extra



Fonte: Ref. [16].

Gráfico 2 – Grafico do fator de dobra em função da coordenada da dimensão extra com os sinais ajustados para a compactificação



Fonte: Ref. [16].

Se quiséssemos que a dimensão extra fosse extensa, isto é, se prolongasse ao infinito nas duas direções, $-\infty < Z < +\infty$, o que é feito no modelo de Randall-Sundrum tipo II [19], a escolha natural seria atribuir o sinal positivo na região $Z < 0$ e negativo em $Z > 0$ para que

o fator de dobra não divirja no infinito. Contudo, no modelo tipo I estamos interessados que a dimensão extra esteja compacta em um círculo, de modo que necessitamos que a métrica seja periódica. Então, podemos restringir $A(Z) = -k|Z|$ no intervalo $-r_c\pi \leq Z \leq r_c\pi$, onde r_c é o raio de compactificação da dimensão extra, de maneira que o fator de dobra troque de sinal novamente no ponto diametralmente oposto a origem como mostra o gráfico (2). Formalmente, estamos lidando com a orbivariiedade ¹ S^1/Z_2 onde S^1 é a 1-esfera (círculo) e Z_2 é o grupo dos inteiros módulo 2, $Z_2 = \{-1, 0, 1\}$ [10, 13]. Então, é fácil ver que podemos escrever a derivada do fator de dobra no intervalo $-r_c\pi \leq Z \leq r_c\pi$ usando funções Heaviside θ :

$$A' = k[-\theta(-Z + r_c\pi) + \theta(-Z) - \theta(Z) + \theta(Z - r_c\pi)] \quad (3.10)$$

Podemos derivar a equação (3.10) para obter a expressão da derivada segunda de A [10, 11, 13, 20]:

$$A'' = -2k[\delta(Z) - \delta(Z - r_c\pi)] \quad (3.11)$$

Olhando novamente as equações de Einstein eq. (3.2) a (3.4) e a eq. (3.5), podemos achar o momento-energia a partir da equação (3.11). De fato, substituindo-a na equação (3.5) [16]:

$$-6k[\delta(Z) - \delta(Z - r_c\pi)] = \frac{8\pi}{M_*^3} (T_0^0 - T_Z^Z) \quad (3.12)$$

Mas substituindo a equação (3.8)(i) na equação (3.3), é fácil ver que $T_Z^Z = 0$, de modo que as componentes não nulas do momento-energia, $T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$, são dadas por [16]:

$$T_0^0 = \frac{3kM_*^3}{4\pi} [\delta(Z) - \delta(Z - r_c\pi)] \quad (3.13)$$

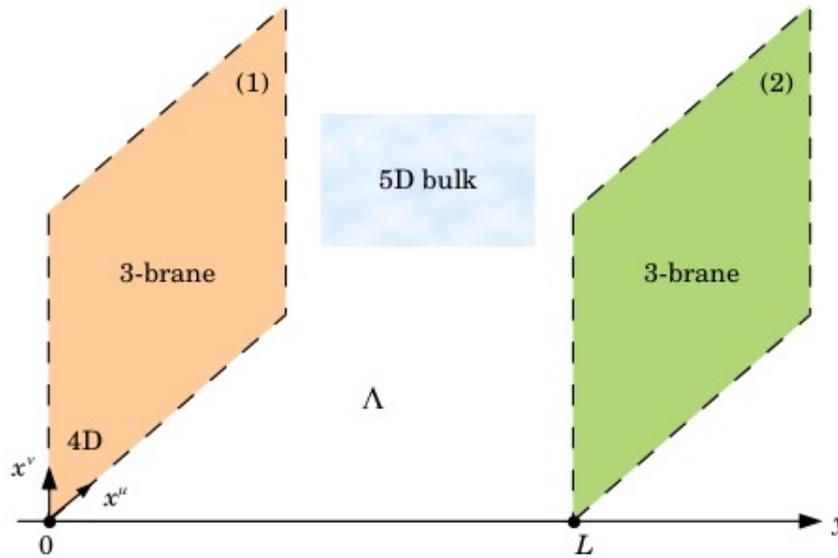
Ou, podemos escrever de uma maneira compacta uma componente qualquer do tensor momento-energia, usando deltas de Kronacker para indicar as componentes não nulas[16]:

$$T_B^A = \frac{3kM_*^3}{4\pi} [\delta(Z) - \delta(Z - r_c\pi)] \delta_\mu^A \delta_B^\nu \delta_\nu^\mu \quad (3.14)$$

A equação acima, (3.14), nos mostra que há, na verdade, duas branas, uma em $Z = 0$ e outra em $Z = r_c\pi$, paralelas entre si e separadas ao longo da dimensão extra (veja figura (1)). Uma delas é a que nós habitamos, que, por conveniências futuras, escolhemos que seja a $Z = r_c\pi$, e a denotamos *brana visível*, enquanto a outra, $Z = 0$, chamamos de *brana oculta*. Note que a existência da segunda brana foi necessária para que a dimensão extra seja compacta.

¹Quociente entre uma variedade e um grupo discreto. [18]

Figura 1 – Figura esquemática mostrando as duas branas, oculta e visível, separadas por uma distância $L = r_c\pi$ ao longo da dimensão extra



Fonte: ref. [13]

As branas pertencem a um espaço-tempo 5-dimensional (bulk) com uma dimensão extra compacta com métrica para $-r_c\pi \leq Z \leq r_c\pi$ dada por: [9, 10, 11, 13, 16, 17, 20]

$$ds^2 = e^{-2k|Z|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dZ^2 \quad (3.15)$$

3.2 Formulação via princípio variacional

Na seção anterior determinamos o tensor momento-energia consistente com as simetrias do problema. Mas sabemos da seção (2.4) que o momento-energia provém de uma ação de matéria. Afim de elucidar sua origem física, vamos mostrar, nesta seção, como podemos obtê-lo por princípio variacional. A ação total composta pela ação de Einstein-Hilbert, eq (2.61), com a ação de matéria devido às duas branas fornecerá as equações de Einstein com o momento-energia correto, eq. (3.14), onde, nessa abordagem, a solução (3.15) é obtida de forma imediata resolvendo-as com as condições de contorno da simetria da orbifoldidade S^1/Z_2 e aquelas discutidas no início da seção anterior.

Como já discutimos a solução, vamos focar nossa discussão, agora, na construção da ação da matéria e na obtenção do momento-energia. Para iniciarmos, vamos, primeiramente, definir $g_{\mu\nu}^{vis}$ e $g_{\mu\nu}^{ocu}$ como segue [11, 20]:

$$g_{\mu\nu}^{vis}(x^\rho) := g_{\mu\nu}(x^\rho, Z = r_c\pi) \quad (3.16)$$

$$g_{\mu\nu}^{ocu}(x^\rho) := g_{\mu\nu}(x^\rho, Z = 0) \quad (3.17)$$

A ação da matéria pode ser separada nas contribuições devido à brana visível e à oculta, S_{vis} e S_{ocu} respectivamente:

$$S_{mat} = S_{vis} + S_{ocu} \quad (3.18)$$

Onde [11, 20]:

$$S_{vis} = \int d^5x \delta(Z - r_c\pi) \sqrt{-g_{vis}} [\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}] \quad (3.19)$$

$$S_{ocu} = \int d^5x \delta(Z) \sqrt{-g_{ocu}} [\mathcal{L}_{ocu} - V_{ocu}] \quad (3.20)$$

Incluimos em cada ação um termo extra de energia de vácuo V_{vis} e V_{ocu} associado às branas visível e oculta respectivamente. Estes termos funcionam como fonte de gravidade, de modo que, mesmo no vácuo, a 3-brana seja capaz de dobrar o espaço tempo [11, 20] e garantir que a dimensão extra seja compacta. Para calcularmos a variação dessas ações, podemos usar a equação (2.37):

$$\delta\sqrt{-g_{vis}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta g^{AB} \quad (3.21)$$

Obtendo, então, a variação da ação de matéria contida na brana visível:

$$\delta S_{vis} = \frac{1}{2} \int d^5x \delta(Z - r_c\pi) \sqrt{-g_{vis}} [T_{\mu\nu}^{vis} + V_{vis} g_{\mu\nu}^{vis}] \quad (3.22)$$

Onde definimos $T_{\mu\nu}^{vis}$ como sendo o tensor momento-energia associado aos campos presentes na brana visível:

$$T_{\mu\nu}^{vis} := \frac{2}{\sqrt{-g_{vis}}} \frac{\delta(\sqrt{-g_{vis}} \mathcal{L}_{vis})}{\delta g_{\mu\nu}^{vis}} \quad (3.23)$$

Definindo $T_{\mu\nu}^{ocu}$ de maneira análoga à equação (3.23) obtemos a variação da ação de matéria contida na brana oculta:

$$\delta S_{ocu} = \frac{1}{2} \int d^5x \delta(Z) \sqrt{-g_{ocu}} [T_{\mu\nu}^{ocu} + V_{ocu} g_{\mu\nu}^{ocu}] \quad (3.24)$$

De modo que, usando a versão 5-dimensional da (2.38), obtemos a equação de Einstein abaixo, onde comparando com a equação (2.63) podemos reconhecer no lado direito o tensor momento-energia total devido às contribuições dos campos e das energias de vácuo:

$$G_{AB} - \Lambda g_{AB} = \frac{8\pi}{M_*^3} [\delta(Z - r_c\pi) (V_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} + T_{\mu\nu}^{vis}) + \delta(Z) (V_{ocu} g_{\mu\nu}^{ocu} + T_{\mu\nu}^{ocu})] \delta_A^\mu \delta_B^\nu \quad (3.25)$$

Como não podemos especificar como a matéria está distribuída na brana, vamos considerar o

caso da ausência de matéria (vácuo) nas duas branas:

$$T_{\mu\nu}^{vis} = T_{\mu\nu}^{ocu} = 0 \quad (3.26)$$

Desta maneira obtemos [11]:

$$G_B^A - \Lambda \delta_B^A = \frac{8\pi}{M_*^3} [\delta(Z - r_c \pi) V_{vis} + \delta(Z) V_{ocu}] \delta_B^A \quad (3.27)$$

Substituindo as expressões dos tensores de Einstein e fazendo a substituição análoga à feita para obter a equação (3.5), obtemos as equações análogas as (3.3) e (3.5) mas com o termo de momento-energia [10, 11, 13, 20]:

$$\begin{cases} -(6A'^2 + \Lambda) = 0 & (3.28) \\ -3A'' = \frac{8\pi}{M_*^3} [\delta(Z - r_c \pi) V_{vis} + \delta(Z) V_{ocu}] & (3.29) \end{cases}$$

Novamente a equação (3.28) leva à (3.8), onde a solução consistente com a orbivarietade S^1/Z_2 é a dada pela equação (3.10), conforme discutido na seção anterior. Desse modo, substituindo eq. (3.11) em eq. (3.29), obtemos os valores das energias de vácuo [9, 10, 11, 13, 17, 20]:

$$V_{ocu} = -V_{vis} = \frac{3kM_*^3}{4\pi} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.27) obtemos o tensor momento-energia encontrado na seção anterior, eq. (3.14). Note que enquanto a brana oculta apresenta densidade de energia e tensão positiva a brana visível apresenta densidade de energia e tensão negativa.

3.3 Implicações físicas: hierarquia de gauge

O modelo de Randall-Sundrum se propõe explicar a enorme diferença entre as escalas de energia do Modelo Padrão e da gravidade. Nesta seção vamos obter os parâmetros da teoria efetiva 4-dimensional: A escala de Plank M_{Plank} e os parâmetros de massa dos campos 4D em termos das constantes fundamentais, que supomos estar todas na mesma escala fundamental M_* .

Primeiramente, é de nosso interesse saber como uma teoria gravitacional 4D efetiva na escala de Plank pode emergir desse cenário 5-dimensional. A nossa métrica dada pela eq. (3.15) não leva em conta a presença de matéria (além da energia de vácuo) na brana, de forma que a métrica efetiva é do espaço de Minkowski 4-dimensional. Vamos assumir, que ao incluir flutuações gravitacionais, a métrica toma a forma [9, 10, 11, 13, 17, 20]:

$$ds^2 = e^{-2k|Z|} [\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu - dZ^2 \quad (3.31)$$

Onde a métrica efetiva é:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

Como a métrica da teoria fundamental se relaciona com a efetiva por $g_{\mu\nu} = e^{-2|Z|}\bar{g}_{\mu\nu}$, temos que os jacobianos se relacionam por $\sqrt{-g} = e^{-4k|Z|}\sqrt{-\bar{g}}$ e, também, podemos ver que $\Gamma_{\mu\nu\rho} = e^{-2k|Z|}\bar{\Gamma}_{\mu\nu\rho}$ e $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu}$, de forma que o escalar de Ricci é dado por $R = e^{2k|Z|}\bar{R} + \dots$ [11, 16] Portanto, podemos substituir o jacobiano e o escalar de Ricci da parte gravitacional da ação (2.61) em termos das grandezas efetivas, obtendo [9, 10, 11, 13, 16, 20]:

$$\begin{aligned} S &\supset -\frac{M_*^3}{16\pi} \int d^4x \int_{-r_c\pi}^{r_c\pi} dZ e^{-2k|Z|} \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} \\ &\supset \frac{M_*^3}{16\pi k} [1 - e^{-2kr_c\pi}] \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Comparando com a ação 4-dimensional onde a escala da teoria é a escala de Plank, nós temos que [9, 10, 11, 13, 16, 17, 20]:

$$M_{Plank}^2 = \frac{M_*^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}] \quad (3.34)$$

Queremos que todas as constantes fundamentais, M_* , k , $1/r_c$ estejam na mesma escala de energia. Portanto, para valores razoáveis de kr_c , o termo exponencial se torna desprezível, e a escala da teoria coincide com a escala de Plank [16]:

$$M_{Plank} \simeq M_* \simeq k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6}} \quad (3.35)$$

Enquanto a exponencial não tem efeito significativo para determinar a escala da teoria, veremos que ela tem um efeito crucial para gerar a hierarquia das massas.[20] Vamos tomar como um primeiro exemplo o bóson de Higgs confinado na brana visível, cuja ação devidamente acoplada com a gravidade está posta a seguir [9, 10, 11, 13, 16, 17, 20]:

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \left[g_{vis}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - \lambda (|\phi|^2 - v_0^2)^2 \right] \quad (3.36)$$

Para escrevermos em termos das grandezas efetivas, devemos usar que $g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu}$, o que também implica na relação $\sqrt{-g_{vis}} = e^{-4kr_c\pi} \sqrt{-\bar{g}}$. Daí, obtemos a relação a seguir, onde, na segunda linha, fazemos a transformação de renormalização $\phi \rightarrow e^{kr_c\pi} \phi$:

$$S_{vis} \supset \int d^4x e^{-4kr_c\pi} \sqrt{-\bar{g}} \left[e^{2kr_c\pi} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - \lambda (|\phi|^2 - v_0^2) \right] \quad (3.37)$$

$$\supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - \lambda (|\phi|^2 - e^{-2kr_c\pi} v_0^2) \right] \quad (3.38)$$

Daí a massa efetiva sofre uma supressão exponencial [9, 10, 11, 13, 16, 17, 20]:

$$\bar{v} = e^{-kr_c\pi} v_0 \quad (3.39)$$

Sabemos que a massa efetiva está na escala eletrofraca, da ordem 1TeV, ou 10^3GeV . Ao tomarmos a massa fundamental na escala de Plank, da ordem 10^{19}GeV , obtemos a relação[13, 16]:

$$kr_c = \frac{16 \ln 10}{\pi} \approx 12 \quad (3.40)$$

O que é consistente com a ideia de k e $1/r_c$ terem a mesma escala de energia. A conclusão é que todas as constantes fundamentais inclusas as massas das partículas do modelo padrão, estão na mesma escala de energia, a escala de Plank, e, a hierarquia entre a escala eletrofraca surge naturalmente ao usar uma teoria efetiva, devido a fatores puramente geométricos. Portanto, de fato, o modelo de Randall-Sundrum resolve o problema de hierarquia. Vale ressaltar que na brana oculta, $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{ocu}$, as massas efetivas permanecem na escala fundamental. É por isso que a brana oculta também é chamada de brana Plank, enquanto a brana visível de brana TeV. [13]

Vamos testar a teoria para mais dois exemplos: um campo de gauge A^μ , como os que constituem a interação eletrofraca [3]; e o campo de Dirac Ψ , que descreve férmions de spin 1/2 como o elétron [3]. Primeiramente, para o campo de gauge, ao considerarmos que sua massa fundamental esteja na escala de Plank, podemos escrever [16]:

$$\begin{aligned} S_{vis} &\supset -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \left[g_{vis}^{\mu\nu} g_{vis}^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} + M_{Plank}^2 g_{vis}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right] \\ &\supset -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-4kr_c\pi} \left[e^{4kr_c\pi} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} + e^{2kr_c\pi} M_{Plank}^2 \bar{g}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right] \\ &\supset -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} + e^{-2kr_c\pi} M_{Plank}^2 \bar{g}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Onde obtemos a mesma relação de hierarquia [16]:

$$\bar{M}_{gauge} = e^{-kr_c\pi} M_{Plank} \quad (3.42)$$

Para o f3ermion, temos [16]:

$$S_{vis} \supset \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} [\bar{\Psi} \gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu \Psi + M_{Plank} \bar{\Psi} \Psi] \quad (3.43)$$

Onde γ^a s3ao as matrizes de Dirac e $\bar{\Psi} = \gamma^0 \Psi^\dagger$ [3] e os *vielbein*² e_a^A , com $a = 0, 1, 2, 3, 4$ constituem um quintupletto de vetores ortonormais que geram o espa3o de Minkowski M_5 tangente 3a variedade, isto 3e: $g_{AB} = \eta_{ab} e_A^a e_B^b$ [14, 16]. Mas o *vierbein* da teoria efetiva \bar{e}_μ^a 3e dado por $e_\mu^a = e^{kr_c\pi} \bar{e}_\mu^a$, uma vez que:

$$g_{\mu\nu}^{vis} = \eta_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = e^{-2kr_c\pi} \bar{g}_{\mu\nu} = e^{-2kr_c\pi} \eta_{\mu\nu} \bar{e}_a^\mu \bar{e}_b^\nu \quad (3.44)$$

De modo que temos que [16]:

$$S_{vis} = e^{-3kr_c\pi} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} [\bar{\Psi} \gamma^a \bar{e}_a^\mu \nabla_\mu \Psi + e^{-kr_c\pi} M_{Plank} \bar{\Psi} \Psi] \quad (3.45)$$

O termo de $e^{-3kr_c\pi}$ 3e eliminado ao fazermos a renormaliza33o $\Psi \rightarrow e^{-\frac{3}{2}kr_c\pi} \Psi$, e, portanto, obtemos que a massa efetiva do f3ermion obedece a mesma rela33o de hierarquia [16]:

$$\bar{M}_{fermion} = e^{-kr_c\pi} M_{Plank} \quad (3.46)$$

²Os termos vielbein e vierbein s3ao emprestados da l3ngua alem3e e significam ‘‘muitas pernas’’ e ‘‘quatro pernas’’ respectivamente. [14]

4 ABORDAGEM COSMOLÓGICA

4.1 Uma revisão da solução FRW

Os modelos cosmológicos atuais se baseiam na ideia de que o universo é *homogêneo*, isto é, aparenta o mesmo em toda a sua extensão. Essa premissa, conhecida por *princípio copernicano*, é tomada como válida em larga escala onde podemos tomar a densidade de momento-energia aproximadamente constante [8]. Também assumimos que o universo aparenta o mesmo em todas as direções, o que chamamos de *isotropia*. E, uma vez que assumimos a homogeneidade, a isotropia em um ponto implica na isotropia em todos os pontos [2]. A validade de ambas as conjecturas são manifestadas em diferentes observações. Na contagem do número de galáxias, observações em raios- x , raios- γ e, principalmente, na radiação cósmica de fundo em microondas [8].

As condições de homogeneidade e isotropia requerem que a parte espacial tenha curvatura constante. Existem três tipos de espaços 3-dimensionais com essa característica: a 3-esfera S^3 , espaço fechado com curvatura constante; espaço hiperbólico aberto $S^{(3,2)}$ (ou esfera de raio imaginário) cuja curvatura é negativa; espaço euclidiano E^3 com curvatura zero. Estes três espaços podem ser postos juntos com a ajuda de um parâmetro k , na qual $k = 1$ para S^3 ; $k = -1$ para o $S^{(3,2)}$; e $k = 0$ para o E^3 :

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

A homogeneidade também nos permite fixar $g_{00} = -1$ de modo a haver um “tempo universal”, o mesmo em todos os pontos do espaço [2]. Também, devemos acrescentar um fator de escala $a(t)$ para dar conta da expansão do universo [12], de forma que a métrica assume o *ansatz* [2, 8, 12, 21, 22]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.2)$$

Neste capítulo, estamos usando a assinatura $(-+++)$ como é comum no estudo de cosmologia. O espaço acima pode, equivalentemente, ser expresso em um sistema de coordenadas “cartesianas” [1]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dx_i^2 + k \frac{dx_i^2}{1 - kx_i^2} \right] \quad (4.3)$$

Devemos modelar a matéria e a energia presente no universo como um fluido per-

feito homogêneo e istrópico [2, 8, 12, 22]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

no referencial comóvel, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, temos [2, 8, 12, 22]:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (4.5)$$

Substituímos a métrica (4.3) e o momento-energia (4.5) nas equações de Einstein (2.31) e obtemos duas equações independentes, que dão a dinâmica da evolução do universo em termos do fator de escala [2, 8, 12, 22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = 8\pi G \rho \\ -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \Lambda = 8\pi G p \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

Podemos substituir a eq. (4.6) em eq. (4.7) de modo a eliminar o termo quadrático de derivada primeira, obtendo [2, 8, 12, 22]:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (4.8)$$

As equações (4.6) e (4.8) constituem, juntas, as chamadas equações de Friedmann, e as métricas da forma (4.2) definem universos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [8]. Naturalmente, ρ e p são funções do tempo e são tais que o momento-energia satisfaz a equação de continuidade. Por exemplo, para o universo plano, $k = 0$, ($\Gamma_{0\mu}^\alpha = \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^\alpha \delta_\mu^j \delta_j^i$ nas coordenadas “cartesianas”) é válido que [8, 12, 22]:

$$\nabla_\mu T_0^\mu = 0 \Rightarrow \quad (4.9)$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \Rightarrow \quad (4.10)$$

$$a^{-3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho a^3) = -3 \frac{\dot{a}}{a} p \quad (4.11)$$

O universo plano, $k = 0$, é o mais interessante das três possibilidades. Além de ser mais fácil de se trabalhar, atualmente, existem fortes evidências, baseadas em medições da radiação cósmica de fundo, de que esse é de fato o formato do universo [8], de forma que vamos tomar como verdade.

A priori podemos considerar duas contribuições ao momento-energia a da matéria em si e a da radiação. Além, é claro, da contribuição da constante cosmológica ou energia de vácuo, que também atua como um termo fonte. De acordo como a teoria padrão, o universo

inicia-se com uma singularidade, o *Big-Bang*, e então se expande, passando por um período inicial dominado por radiação, e, em seguida, por um período dominado por matéria. Observações mais recentes de uma expansão acelerada também podem indicar um período dominado por vácuo (constante cosmológica) [12]. Vamos achar uma solução para cada caso, considerando que o termo dominante fornece a única contribuição, isto é, desprezamos os outros termos.

Começemos pelo universo dominado por radiação. Primeiramente, note que o momento-energia eletromagnético possui traço zero [8]:

$$T_{\mu}^{\mu} = F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\mu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 0 \quad (4.12)$$

Desse modo, é fácil ver que para o momento-energia dado pela (4.5) é satisfeita a equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$, o que pela eq. (4.10) leva a [8, 12, 22]:

$$\dot{\rho} + 4\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow a^4\rho = \text{cte} \quad (4.13)$$

Portanto, podemos substituir na eq (4.6), desprezando a contribuição da constante cosmológica e tomando $k = 0$, a equação (4.13), de forma a obter [8, 22]:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^4}{3a^4}} \quad (4.14)$$

Definimos o parâmetro de Hubble [2, 8, 12, 21, 22]:

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (4.15)$$

Definindo $a_0 = 1$ para um dado t_0 , podemos notar pela própria eq. (4.6) que, sendo $H_0 = H(t_0)$, temos [8, 12, 22]:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (4.16)$$

Ao substituir (4.16) na equação (4.14) e resolvê-la, impondo $a(0) = 0$ no Big-Bang, obtemos a seguinte métrica para o universo dominado por radiação [8, 22]:

$$ds^2 = -dt^2 + \sqrt{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (4.17)$$

Quanto à matéria, vamos considerá-la como um fluido formado por partículas não colidentes e não relativísticas, o que significa basicamente que $p = 0$ em eq. (4.5). Também chamada de poeira, a matéria é formada, por exemplo, por um grande número de galáxias e estrelas comuns, onde podemos considerar a pressão desprezível em relação a densidade de energia [8]. Também devemos considerar que o termo de densidade de energia seja somnante

em relação ao de constante cosmológica, de modo que a eq. (4.6) pode ser lida [8, 22]:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a^3}} \quad (4.18)$$

Onde usamos a equação (4.11) com $p = 0$. Note que $\rho \propto a^{-3}$ pode ser interpretado como a energia se diluindo à medida que o universo expande, mantendo $\int \rho dV = \text{cte}$. Novamente, resolvemos usando a equação (4.16), impondo $a_0 = 1$ e usando a condição de contorno $a(0) = 0$ no Big-Bang. Portanto, a métrica para o universo dominado por matéria é [8, 22]:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (4.19)$$

Como a contribuição da constante cosmológica é fixa, eventualmente, ela irá ser dominante em relação a matéria que se dilui. Acreditamos, que já estamos vivendo em um período de transição, pois se observa uma expansão acelerada do universo, equanto as métricas (4.17) e (4.19) apresentam fatores de escala com concavidade negativa, representando uma expansão desacelerada do universo [12, 2]. A equação de Freedmann (4.6) com constante cosmológica dominante se torna [2, 8]:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow a(t) = e^{\pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \quad (4.20)$$

O sinal positivo é escolhido em conformidade com o universo em expansão. Daí, a métrica para o universo dominado por vácuo é [2, 8]:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (4.21)$$

4.2 O modelo de Randall-Sundrum com inflação

Pretendemos generalizar o modelo de Randall-Sundrum afim de obter uma solução de larga escala, que incorpore o efeito da expansão inflacionária do universo. Novamente, assumimos que vivemos em um bulk (4+1)-dimensional que contém duas branas, visível e oculta, onde a matéria está confinada. Por simplicidade, vamos procurar soluções nas quais as branas são planas, de forma que podemos partir da seguinte métrica:

$$ds^2 = -n^2(t, \phi) dt^2 + a^2(t, \phi) \delta_{ij} dx^i dx^j + b^2(t, \phi) d\phi^2 \quad (4.22)$$

O momento-energia total deve ser dado pelas energias de vácuo mais a matéria e radiação presentes em cada brana. Vamos considerar a versão completa do momento-energia que aparece em eq. (3.25), onde os termos $T_{\mu\nu}^{ocu}$ e $T_{\mu\nu}^{vis}$ correspondem aos fluidos perfeitos da seção anterior, eq. (4.5). O lado esquerdo das equações de Einstein são obtidas quando calcu-

lamos os tensores de Einstein para a métrica acima, de maneira que obtemos quatro equações independentes correspondentes às componentes 00 , ii , $\phi\phi$, 0ϕ respectivamente [15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{n^2} \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{3}{b^2} \left[\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right] - \Lambda = \\ \frac{8\pi}{M_*^3 b} \left[\delta(\phi) (V_{ocu} - \rho_{ocu}) + \delta\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) (V_{vis} - \rho_{vis}) \right], \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n^2} \left[2 \frac{\ddot{a}\ddot{b}}{ab} - \frac{\dot{a}}{a} \left(2 \frac{\dot{n}}{n} - \frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{n}}{n} - 2 \frac{\dot{a}}{a} \right) \right] \\ - \frac{1}{b^2} \left[\frac{n''}{n} + 2 \frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(2 \frac{n'}{n} + \frac{a'}{a} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) \right] - \Lambda = \\ \frac{8\pi}{M_*^3 b} \left[\delta(\phi) (V_{ocu} + p_{ocu}) + \delta\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) (V_{vis} + p_{vis}) \right], \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\frac{3}{n^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{n}}{n} - \frac{\dot{a}}{a} \right) \right] - \frac{3}{b^2} \frac{a'}{a} \left(\frac{n'}{n} + \frac{a'}{a} \right) - \Lambda = 0, \quad (4.25)$$

$$3 \left(\frac{\dot{a} n'}{a n} + \frac{\dot{b} a'}{b a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) = 0 \quad (4.26)$$

Novamente requeremos que a dimensão extra esteja atrelada a orbivariiedade S^1/Z^2 .

E, para que as três funções n , a e b obedeam à simetria, estas podem possuir derivadas primeiras descontínuas e, conseqüentemente, derivadas segundas do tipo função delta (quando $\phi = 0$ e $\phi = \pi$) e daí o o termo fonte tipo delta. Tomemos, primeiramente, a brana oculta. Quando integramos as equações (4.23) a (4.26) de $\int_{0^-}^{0^+} d\phi$, só vai importar os termos de derivada segunda em relação a ϕ , no lado esquerdo das equações; e os termos com $\delta(\phi)$, no lado direito. De maneira que temos as seguintes condições de contorno [15]:

$$\frac{a'}{a} \Big|_{0^-}^{0^+} = -\frac{8\pi}{3M_*^3} b(t, 0) (V_{ocu} - \rho_{ocu}) \quad (4.27)$$

$$\frac{n'}{n} \Big|_{0^-}^{0^+} = -\frac{8\pi}{3M_*^3} b(t, 0) (V_{ocu} - 2\rho_{ocu} + 3p_{ocu}) \quad (4.28)$$

Fazemos o mesmo para a brana visível, integrando $\int_{\pi^-}^{\pi^+} d\phi = -\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi$:

$$\frac{a'}{a} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = +\frac{8\pi}{3M_*^3} b(t, 0) (V_{vis} - \rho_{vis}) \quad (4.29)$$

$$\frac{n'}{n} \Big|_{-\pi}^{+\pi} = +\frac{8\pi}{3M_*^3} b(t, 0) (V_{ocu} - 2\rho_{vis} + 3p_{vis}) \quad (4.30)$$

Vamos considerar que os termos de energia de vácuo são dominantes em relação à matéria e à radiação contidas nas branas. Nesse caso, as condições de contorno acima se tornam as mesmas para n e a o que sugere que as funções sejam iguais. Então, vamos procurar soluções separáveis $n = a = g(t) f(\phi)$. Ao substituirmos na equação (4.26) obtemos $\dot{b} = 0$, de forma que o raio da dimensão extra está fixo: $b = cte = r_c$. Façamos uma transformação de coordenada $g(t) dt \rightarrow dt$ de forma que, agora, $n = f(\phi)$ e $a = g(t) f(\phi)$. A métrica é, então, dada por ¹:

$$ds^2 = f(\phi)^2 [-dt^2 + g(t) \delta_{ij} dx^i dx^j] + r_c^2 d\phi^2 \quad (4.31)$$

Naturalmente, a função $f(\phi)$ é o novo fator de dobra, e a função $g(t)$ é um fator de escala. Para encontrarmos essas funções, primeiramente, podemos re-escrever as componentes 00 e ii das equações de Einstein, eqs. (4.23) e (4.24), para a métrica (4.31). A primeira igualdade, fornece a solução para g :

$$\frac{3}{f^2} \left(\frac{\dot{g}}{g} \right)^2 = 2\frac{\ddot{g}}{g} + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\dot{g}}{g} \right)^2 = \frac{3}{r_c^2} \left[\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right] + \Lambda + \text{termo fonte} \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{g}}{g} = \text{cte} = H_0 \Rightarrow g(t) = e^{H_0 t} \quad (4.33)$$

A componente $\phi\phi$, eq (4.25), fornece uma equação para f , que podemos simplificar usando (4.33)(ii) e (3.9)(ii):

$$6 \left[\frac{1}{f^2} \left(\frac{\dot{g}}{g} \right)^2 - \frac{1}{r_c^2} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right] - \Lambda = 0 \Rightarrow \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{f'}{f} \right)^2 - k^2 f^2 - H_0^2 = 0 \quad (4.35)$$

A equação abaixo é a solução da equação (4.35), (verifique) onde tomamos $|\phi|$ para garantir a

¹Soluções em que o raio da dimensão extra não está fixo podem ser encontradas através de funções não separáveis

simetria da orbivarietade. [15]

$$f(\phi) = \frac{H_0}{k} \sinh(-kr_c|\phi| + c_0) \quad (4.36)$$

Agora, podemos, facilmente, calcular as energias de vácuo. Primeiramente, para a brana oculta, substituindo a equação (4.36) em (4.27) e (4.28), de forma que obtemos:

$$\frac{a'}{a} \Big|_{0^-}^{0^+} = \frac{n'}{n} \Big|_{0^-}^{0^+} = \frac{f'}{f} \Big|_{0^-}^{0^+} = -2kr_c \coth c_0 = \frac{8\pi r_c}{3M_*^3} V_{ocu} \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow V_{ocu} = \frac{3kM_*^3}{4\pi} \coth c_0 \quad (4.38)$$

A energia de vácuo da brana visível é encontrada de maneira análoga usando as condições de contorno (4.29) e (4.30):

$$V_{vis} = -\frac{3kM_*^3}{4\pi} \coth(-kr_c\pi + c_0) \quad (4.39)$$

Obtivemos tensão positiva para a brana oculta e negativa para a brana visível, como já esperávamos. Contudo, ao contrário do que encontramos para o modelo estático(3.30), as energias de vácuo não são mais iguais em módulo. Como a função $\coth x$ é decrescente e definida apenas para $|x| > 1$, nós temos a seguinte relação para c_0 positivo [15]:

$$-V_{vis} > V_{ocu} > \frac{3kM_*^3}{4\pi} := V_0 \quad (4.40)$$

Onde V_0 é o módulo das energias de vácuo para o modelo estático, eq. (3.30). É fácil ver que quando $c_0 \rightarrow \infty$, recuperamos os valores estáticos $V_{ocu}, -V_{vis} \rightarrow V_0$. Além disso, podemos ver que o raio da dimensão extra pode ser escrito em termos das energias de vácuo. Ao isolarmos c_0 e $c_0 - kr_c\pi$ nas equações (4.38) e (4.39), obtemos:

$$r_c = \frac{1}{2k\pi} \ln \left[\frac{(V_0 + V_{ocu})(-V_{vis} - V_0)}{(-V_{vis} + V_0)(V_{ocu} - V_0)} \right] \quad (4.41)$$

Pelas equações (4.36), (4.33) nossa métrica é:

$$ds^2 = \left(\frac{H_0}{k} \right)^2 \sinh^2(-kr_c|\phi| + c_0) [-dt^2 + e^{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j] + r_c^2 d\phi^2 \quad (4.42)$$

Recuperamos a solução estática no limite $H_0 \rightarrow 0, c_0 \rightarrow \infty$ mantendo fixa a razão $\frac{H_0}{2k} e^{c_0} \rightarrow 1$. Claramente, o parâmetro H_0 não é físico, podendo ser re-definido arbitrariamente a partir de uma transformação de coordenada $t \rightarrow \lambda t$. Por simplicidade, vamos fixar $H_0 = k$ com $\lambda = \frac{k}{H_0}$. Contudo, o verdadeiro parâmetro de Hubble, tal como definido na seção anterior, deve ser dado

em um sistema de coordenadas em que na métrica 4-dimensional $g_{00} = -1$, ou seja:

$$ds_{(4)}^2 = -dt^2 + e^{2H(\phi)t} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (4.43)$$

Pela transformação $\sinh(-kr_c|\phi| + c_0)t \rightarrow t$ obtemos um parâmetro de Hubble dependente da dimensão extra:

$$H(\phi) = k \operatorname{csch}(-kr_c|\phi| + c_0) \quad (4.44)$$

Usando as equações (4.38), (4.39), obtemos para as branas:

$$H_{ocu} = H(0) = \frac{4\pi}{3M_*^3} \sqrt{V_{ocu}^2 - V_0^2} \quad (4.45)$$

$$H_{vis} = H(\pi) = \frac{4\pi}{3M_*^3} \sqrt{V_{vis}^2 - V_0^2} \quad (4.46)$$

O valor experimental $H_{vis} \lesssim 10^{-60} M_{Plank}$ do parâmetro de Hubble, extremamente pequeno comparado com a escala da teoria, indica que o valor da energia de vácuo deve ser bem próximo do seu análogo estático. Logo, podemos fazer a aproximação $-V_{vis} + V_0 \approx 2V_0$, e, pela eq. (4.40), também podemos fazer $V_{ocu} + V_0 \approx 2V_0$. De modo que podemos aproximar o raio da dimensão extra, eq. (4.41), a:

$$r_c \approx \frac{1}{2k\pi} \ln \left[\frac{-V_{vis} - V_0}{V_{ocu} - V_0} \right] \quad (4.47)$$

Do mesmo modo, nós temos que:

$$\ln \frac{H_{vis}}{H_{ocu}} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{V_{vis}^2 - V_0^2}{V_{ocu}^2 - V_0^2} \right] \quad (4.48)$$

$$\approx \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-V_{vis} - V_0}{V_{ocu} - V_0} \right] \approx kr_c\pi \quad (4.49)$$

Logo, o parâmetro de Hubble para a brana oculta deve ser [15]:

$$H_{ocu} = e^{-kr_c\pi} H_{vis} \lesssim 10^{-76} M_{Plank} \quad (4.50)$$

Onde usamos $e^{-kr_c\pi} = 10^{-16}$ em conformidade com a solução do problema da Hierarquia. Essa diferença da ordem de 10^{-16} revelam pelas equações (4.45) e (4.46) que a energia de vácuo da brana oculta precisa ser ajustada em relação a constante cosmológica com uma precisão 10^{-16} vezes maior do que a visível. Isso significa que o problema da hierarquia é substituído por um ajuste fino entre a constante cosmológica e as energias de vácuo.

5 CONCLUSÃO

Vimos que o modelo de Randall-Sundrum fornece uma única escala de energia fundamental, a escala de Plank, para todos os parâmetros da teoria, sejam eles geométricos ou atrelados as massas das partículas do modelo padrão. A escala eletrofraca surge quando adotamos uma teoria 4-dimensional efetiva para os campos contidos na brana visível, enquanto a gravidade, que se propaga em todas as direções, permanece na escala de Plank. A hierarquia, portanto, é explicada devido a efeitos puramente geométricos. Neste cenário, o bulk é uma porção de um espaço tempo Anti-de-Sitter 5-dimensional. Como temos duas 3-branas na fronteira, a simetria de translação é, necessariamente, quebrada. Requerimos a existência de duas branas para que a dimensão extra possa ser compacta. Verificamos a geração da hierarquia para o bóson de Higgs, campos de gauge da interação eletrofraca e o férmion de Dirac. Respectivamente campo escalares, vetoriais e spinoriais.

Encontramos uma solução inflacionária no contexto de Randall-Sundrum, onde podemos recuperar a solução original em um limite estático. A expansão, tanto na brana visível como na oculta, se dá devido a pequenas diferenças entre os valores das energias de vácuo e o valor estático que é dado em termos da constante cosmológica do bulk. Desta forma, o problema da hierarquia é, na verdade, substituído por um novo ajuste fino entre as energias de vácuo e a constante cosmológica do bulk.

APÊNDICE A - UNIDADES NATURAIS

Todas as grandezas mecânicas podem ser expressas em termos de unidades de massa, posição e tempo. Por exemplo, a unidade de força pode ser expressa por $[F] = [MLT^{-2}]$ e a de energia $[E] = [ML^2T^{-2}]$. Em teoria de campos, é conveniente expressar essas grandezas em um sistema *natural* de unidades, nas quais as constantes fundamentais \hbar e c tomam o valor da unidade, isto é: $\hbar = c = 1$. Nestas unidades, velocidade e ação tornam-se adimensionais: $[V] = [c] = [LT^{-1}] = 1$, que implica $[L] = [T]$, e $[S] = [\hbar] = [ML^2T^{-1}] = 1$, o que implica $[M] = [L^{-1}] = [T^{-1}]$. Então, fica claro que as grandezas mecânicas podem ser expressas em unidades de potências de massa, e o expoente passa a ser chamado de “unidade numérica”. [2] A tabela (1) mostra alguns exemplos de grandezas físicas e suas unidades.

Também nos convém definir a massa, o comprimento e o tempo de Plank em termos das constantes fundamentais \hbar , c e G [23]:

$$M_{Plank} := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 2,17 \cdot 10^{-5} \text{g} \quad (\text{A.1})$$

$$l_{Plank} := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 1,61 \cdot 10^{-33} \text{cm} \quad (\text{A.2})$$

$$t_{Plank} := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{s} \quad (\text{A.3})$$

Estes números representam as escalas nas quais efeitos de uma gravidade quântica relativística se tornam significativas [23]. Assim, alguns autores preferem usar unidades nas quais $\hbar = c = G = 1$, chamadas unidades de Plank. Nelas, a massa, comprimento ou tempo igual a *um* representam as escalas acima. Entretanto, vamos preferir não fixar G , para que possamos deixar explícita a escala da teoria:

$$G = M_{Plank}^2 = l_{Plank}^{-2} = t_{Plank}^{-2} \quad (\text{A.4})$$

grandeza	dimensão usual	dimensão natural	dimensão numérica
massa	M	M	+1
comprimento	L	M^{-1}	-1
tempo	T	M^{-1}	-1
velocidade	L^1T^{-1}	M^0	0
força	MLT^{-2}	M^2	+2
energia	ML^2T^{-2}	M^1	+1
ação	ML^2T^{-1}	M^0	+0
G de Newton	$M^{-1}L^3T^{-2}$	M^{-2}	-2
$T_{\mu\nu}$	$ML^{-1}T^{-2}$	M^4	+4
$g_{\mu\nu}$	$M^0L^0T^0$	M^0	0
$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	L^{-1}	M^1	+1
$R_{\mu\nu\rho}^\lambda$	L^{-2}	M^2	+2

Tabela 1: Dimensões usuais, naturais e numéricas de algumas grandezas físicas. Adaptado de ref. [2]

REFERÊNCIAS

- [1] Deriving the friedmann equations from general relativity. <http://hep.itp.tuwien.ac.at/wrasetm/files/2018S-FriedmannFromGR.pdf>.
- [2] R. Aldrovandi and J.G Pereira. *An Introduction to General Relativity*. IFT, 2004.
- [3] R. Aldrovandi and J.G Pereira. *Notes for a Course on Classical Fields*. IFT, 2008.
- [4] Ignatios Antoniadis, Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a tev. *Physics Letters B*, 436(3-4):257–263, 1998.
- [5] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and Gia Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, 429(3-4):263–272, 1998.
- [6] Philippe Brax and Carsten van de Bruck. Cosmology and brane worlds: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 20(9):R201, 2003.
- [7] Philippe Brax, Carsten van de Bruck, and Anne-Christine Davis. Brane world cosmology. *Reports on Progress in Physics*, 67(12):2183, 2004.
- [8] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- [9] Csaba Csaki. Extra dimensions and branes. In *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection (In 3 Volumes)*, pages 967–1060. World Scientific, 2005.
- [10] Allan Gonçalves da Silva. O modelo de randall sundrum e generalizações. Master’s thesis, UFABC, 2014.
- [11] Raimundo Ivan de Oliveira Junior. Modelos de randall sundrum e estabilização do raio da dimensão extra. Master’s thesis, UFC, 2017.
- [12] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Academic Press, San Diego, CA, 2003.
- [13] Maxime Gabella. The randall-sundrum model. www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf, 6(9), 2006.
- [14] Maurizio Gasperini. *Theory of Gravitational interactions*. Springer, 2013.
- [15] Hang Bae Kim and Hyung Do Kim. Inflation and gauge hierarchy in randall-sundrum compactification. *Physical Review D*, 61(6):064003, 2000.
- [16] Yoonbai Kim, Chong Oh Lee, Ilbong Lee, and JungJai Lee. Brane world of warp geometry: An introductory review. *arXiv preprint hep-th/0307023*, 2003.
- [17] Roy Maartens and Kazuya Koyama. Brane-world gravity. *Living Reviews in Relativity*, 13(1):5, 2010.
- [18] Lars Nilse. Classification of 1d and 2d orbifolds. In *AIP Conference Proceedings*, volume 903, pages 411–414. AIP, 2007.

- [19] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690, 1999.
- [20] Lisa Randall and Raman Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370, 1999.
- [21] Wolfgang Rindler. *Relativity: special, general, and cosmological*, 2003.
- [22] Balša Terzić. <http://www.nicadd.niu.edu/~bterzic/PHYS652/index.htm>.
- [23] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 2004.