



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

COLORAÇÃO ACÍCLICA

FORTALEZA

2019

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

COLORAÇÃO ACÍCLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Silva Araújo

FORTALEZA

2019

PEDRO PAULO DE MEDEIROS

COLORAÇÃO ACÍCLICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Julio Cesar Silva Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Victor Almeida Campos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dra. Diana Sasaki Nóbrega
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)

AGRADECIMENTOS

À minha pequena família que mostrou que sempre podemos nos superar. Em particular à minha avó Maria José Paulo de Medeiros, que mesmo sem ter tido instrução formal, mostrou-me que o caminho para melhorar era através da educação. Sempre dando todo amor e carinho que durante todo o tempo em que estava do meu lado. Também ao meu tio Luiz Paulo de Medeiros que nunca me abandonou e a minha mãe Raimunda Maria Paulo de Medeiros por ter me dado a vida.

Ao Prof. Dr. Julio Cesar Silva Araújo, pelo apoio e exemplo de excelente profissional durante o meu caminho no mestrado em matemática. Ensinando-me sempre. Aos meus professores que me trouxeram inspiração e conhecimento, como a Profa. Dra. Ana Shirley e Prof. Dr. Victor Campos. Além de tantos outros profissionais da educação que participaram deste meu caminho acadêmico. Devo agradecer aos meus alunos que me incentivaram a cada dia, mostrando que sempre podemos aprender. Também agradeço à Universidade Federal do Ceará, à Capes e CNPq que forneceram meios para que eu pudesse continuar estudando.

Aos meus companheiros de curso de Matemática que em diversas vezes me concederam conhecimento e apoio. Tantos nomes que ficaria muito extenso para escrever aqui, cada um teve seu papel e fico muito grato por cada auxílio que me foi dado. E a cada amigo que ficou me dando forças. Serei para sempre grato. Por fim, e principalmente, à Lais que me apoiou a cada instante.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Apresentaremos o estado da arte para uma subárea de Coloração em Grafos conhecida como Coloração Acíclica. Dado um grafo G finito, temos uma k -coloração acíclica de G quando temos uma k -coloração própria para G tal que quaisquer duas classes de cor induzem em G uma floresta, ou seja, um subgrafo acíclico. O menor inteiro positivo k tal que G admite uma k -coloração acíclica é o número cromático acíclico de G , denotado por $\chi_a(G)$. Acreditamos que este seja o primeiro texto a resumir o estado da arte para este problema, mesmo considerando outras línguas. Apresentamos os resultados organizados por tipo. Primeiro, apresentamos aqueles relativos à limitantes para o número cromático acíclico, referentes à coloração acíclica em vértices, em arestas e coloração acíclica por listas em vértices e arestas. Em seguida, listamos os resultados referentes à complexidade computacional do problema de determinar se é possível colorir acíclicamente um grafo G com k cores, dados um grafo G e um inteiro positivo k . Por fim, apresentamos problemas em aberto para a pesquisa futura.

Palavras-chave: Combinatória. Teoria dos Grafos. Coloração em Grafos. Coloração Acíclica.

ABSTRACT

We present the state of the art for the sub-area of Graph Coloring known as Acyclic Coloring. Given a finite graph G , we have an acyclic k -coloring of G when we have a proper k -coloring of G such that any two color classes induce a forest, i.e an acyclic subgraph. The smallest positive integer k such that G admits an acyclic k -coloring is the acyclic chromatic index of G , denoted by $\chi_a(G)$. We believe this is the first text to resume the state of art of this problem, even if we consider other languages. We present the results organized by its type. First, we present those related to bounds on the acyclic chromatic number, related to acyclic vertex coloring, acyclic edge colorings and acyclic list colorings of vertices and edges. In the sequel, we list the results related to the computational complexity of the problem of determining whether it is possible to acyclically color a graph G with k colors, given a graph G and a positive integer k . Finally, we present some open problems for future research.

Keywords: Combinatorics. Graph Theory. Graph Coloring. Acyclic Coloring.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo que modela o problema das pontes de Königsberg.	10
Figura 2 – Exemplo de coloração acíclica. Observe que $\chi(G) = 3$ e $\chi_a(G) = 4$	12
Figura 3 – Exemplo de um grafo simples.	14
Figura 4 – Exemplo de um digrafo.	15
Figura 5 – Um grafo com uma 3-coloração própria em vértices.	17
Figura 6 – Exemplo de um grafo com coloração acíclica.	17
Figura 7 – Grafo modelando o Caso 2.	23
Figura 8 – Grafo modelando o Caso 3.1.	25
Figura 9 – Grafo modelando o Caso 3.2.	26
Figura 10 – Representação do 4-corte próprio maximal Q_0	27
Figura 11 – Grafo G	28
Figura 12 – Grafo H^*	28
Figura 13 – Neste ciclo de tamanho 4, observe que v_2v_4 é uma corda.	36
Figura 14 – S_3	41
Figura 15 – S_n^0	41
Figura 16 – Grafo de Petersen $P(5, 2)$	42
Figura 17 – Os três grafos cúbicos 3-conexos planares sem uma 3-coloração acíclica. . .	42
Figura 18 – Grafo no qual $\text{mad}(G) = 13/4$. Além disso, $\chi_a(G) = \chi_a^l(G) = 5$	49
Figura 19 – Um grafo de Halin construído a partir de uma árvore interna ao C_4	51
Figura 20 – Processo relativo à aresta $v_i v_j$	53
Figura 21 – Os três grafos cúbicos planares 3-conexos sem uma 3-coloração acíclica. . .	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela referente ao Caso 2.	24
Tabela 2 – Tabela referente ao Caso 3.1.	25
Tabela 3 – Tabela referente ao Caso 3.2.	26
Tabela 4 – Número cromático acíclico para o produto cartesiano de grafos.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	14
3	LIMITANTES	19
3.1	Grafos Planares.	19
<i>3.1.1</i>	<i>Coloração Acíclica em Vértices para Grafos Planares.</i>	<i>19</i>
<i>3.1.2</i>	<i>Coloração Acíclica em Arestas para Grafos Planares.</i>	<i>31</i>
<i>3.1.3</i>	<i>Coloração Acíclica por Listas para Grafos Planares.</i>	<i>34</i>
3.2	Resultados Gerais.	37
<i>3.2.1</i>	<i>Coloração Acíclica em Vértices.</i>	<i>38</i>
<i>3.2.1.1</i>	<i>Grafos em superfícies.</i>	<i>40</i>
<i>3.2.2</i>	<i>Outras classes de grafos.</i>	<i>41</i>
<i>3.2.3</i>	<i>Produtos de grafos.</i>	<i>43</i>
<i>3.2.4</i>	<i>Coloração Acíclica em Arestas.</i>	<i>45</i>
<i>3.2.5</i>	<i>Coloração Acíclica por Listas.</i>	<i>48</i>
<i>3.2.6</i>	<i>Coloração Acíclica por Listas em Arestas.</i>	<i>49</i>
4	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL	52
4.1	Complexidade para Coloração Acíclica em vértices.	52
4.2	Complexidade de Coloração Acíclica em Arestas.	55
5	CONCLUSÃO	57
5.1	Considerações.	57
5.2	Perguntas.	57
<i>5.2.1</i>	<i>Coloração Acíclica em Vértices.</i>	<i>57</i>
<i>5.2.2</i>	<i>Coloração Acíclica em Arestas.</i>	<i>58</i>
<i>5.2.3</i>	<i>Coloração Acíclica por Listas em Vértices.</i>	<i>59</i>
<i>5.2.4</i>	<i>Coloração Acíclica por Listas em Arestas.</i>	<i>60</i>
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, estudamos uma subárea de Teoria dos Grafos e aqui apresentamos o estado da arte para a uma variação do problema de Coloração em Grafos conhecida como Coloração Acíclica. Assim, faremos uma revisão bibliográfica relativa a este tema. Devemos citar que não encontramos nenhum trabalho deste gênero referente à Coloração Acíclica, mesmo em outras línguas. Esse é o fator principal que nos motivou a este trabalho.

A origem da Teoria dos Grafos remonta ao famoso problema das sete pontes de Königsberg, território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado. Este problema foi solucionado por Leonhard Euler em 1736, no artigo “*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*” (EULER, 1736). A cidade é cortada pelo Rio Prególia, formando um cenário com duas grandes ilhas ligadas por sete pontes (vide Figura 1). Um problema percorria a cidade: seria possível passar por todas as pontes sem repeti-las nenhuma vez?

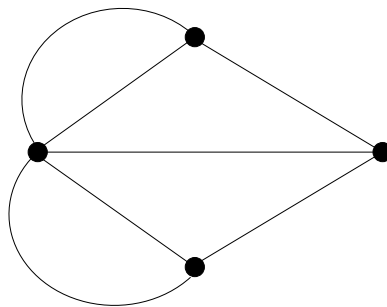


Figura 1 – Grafo que modela o problema das pontes de Königsberg.

O problema ganhou status de lenda na cidade. Leonhard Euler considerou cada volume de terra como um ponto e os uniu assim como eram unidos pelas pontes formando o que seria um grafo. Percebeu além disso que só seria possível caso houvesse uma quantidade par de pontes saindo de cada porção de terra, mostrando assim que havia uma relação entre Topologia e o que seria a Teoria dos Grafos.

Com o desenvolvimento da teoria, surgiram problemas sobre este novo objeto matemático, o grafo. Dentre estes, temos os problemas de coloração, que representam uma vasta área da Teoria dos Grafos. Tais problemas foram motivados inicialmente pelo problema das quatro cores (APPEL; HAKEN, 1977). O problema pode ser enunciado como: "é verdade que todo mapa pode ser colorido com quatro cores de modo que regiões com fronteira em comum recebam cores distintas?".

Inicialmente, em 1852, foi conjecturado por Francis Guthrie que a quantidade mínima

para se colorir um mapa era quatro, baseando-se na sua tentativa de colorir o mapa da Inglaterra. Após esse episódio o problema se tornou muito popular entre os matemáticos americanos e ingleses.

Como caracterizado em *Chromatic Graph Theory*, dos autores Gary Chartrand e Ping Zhang (CHARTRAND; ZHANG, 2008), o problema das quatro cores viria a se tornar um dos mais estudados na Teoria dos Grafos e tem fascinado diversos matemáticos desde sua formulação inicial, por se tratar de um problema de enunciado simples, mas que exigiu técnicas deveras avançadas para sua resolução.

Alfred Bray Kempe apresentou em 1879 uma demonstração para a conjectura de Guthrie, esta demonstração foi creditada como válida por dez anos, porém possuía um erro.

A modelagem de Kempe considerou cada estado ou país como um vértice de um grafo e ligando por uma aresta áreas fronteiriças. Mostrando assim que existe uma equivalência entre colorir o mapa e colorir o grafo associado, de forma que vértices adjacentes não sejam coloridos com a mesma cor. A ideia foi utilizada posteriormente para o desenvolvimento da prova final e para o avanço da área.

Após tornar isso público, cientistas mostraram interesse pela prova dada por Kempe. Um deles foi Peter Guthrie Tait, físico escocês, estudou a prova buscando uma demonstração mais simples que a apresentada, porém não obteve sucesso em suas tentativas.

Tait observou que poderia utilizar este resultado como lema para a prova do teorema das quatro cores, o que de fato realmente é verificado. Diversas tentativas ocorrem em sequência. Demorou-se mais de um século para ser provado em 1976 o teorema das quatro cores por Appel e Haken (APPEL; HAKEN, 1977) por meio de diversas análises de casos e auxílio de computadores na verificação dos mesmos.

Formalmente, dizemos que temos uma *k-coloração própria* de um grafo G quando vértices adjacentes de G são coloridos com cores distintas utilizando-se k cores. O *número cromático* de um grafo G é o menor inteiro positivo k tal que G admite uma *k-coloração própria* e é denotado por $\chi(G)$.

Um grafo G é dito *planar* se ele admite uma representação no plano, onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma curva poligonal simples entre os pontos que representam os vértices que a definem, sem cruzamentos de suas arestas. A observação de Kempe mencionada anteriormente é que cada mapa pode ser representado por um grafo planar. Logo, de modo mais formal, o Teorema das Quatro Cores afirma que se G é planar, então

$$\chi(G) \leq 4.$$

Neste caminho para a demonstração do Teorema das Quatro Cores, houve um grande avanço na área de coloração em grafos. Na literatura, foram definidas diversas variações do problema, cada uma com suas próprias motivações e aplicações práticas. Alguns exemplos de variações encontradas são: Colorações por Listas (THOMASSEN, 1994), b -Colorações (KRATOCHVÍL *et al.*, 2002), Coloração ponderada em Vértices e Arestas (GUAN; XUDING, 1997) e Colorações *Backbone* (WANG *et al.*, 2012).

Nesta dissertação, apresentamos o estado da arte da variação conhecida como Colorações Acíclicas. A noção de Coloração Acíclica foi inicialmente proposta por Grünbaum (GRÜNBAUM, 1973) com o foco em grafos planares. Neste trabalho, define-se que uma k -coloração própria como acíclica quando uma k -coloração própria de G , para quaisquer duas classes de cor induzem em G uma floresta, ou seja, um subgrafo induzido acíclico. O menor inteiro positivo k tal que G admite uma k -coloração acíclica é o *número cromático acíclico* de G , denotado por $\chi_a(G)$.

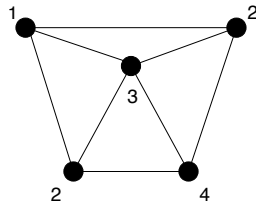


Figura 2 – Exemplo de coloração acíclica. Observe que $\chi(G) = 3$ e $\chi_a(G) = 4$.

Note no grafo colorido na Figura 2 que quaisquer duas cores induzem um subgrafo acíclico. Além disso, pode-se também observar por uma análise de casos que o seu número cromático acíclico é 4.

Existem aplicações na Ciência da Computação para Colorações Acíclicas. Por exemplo, Colorações Acíclicas podem ser usadas para se obter um limitante superior para o volume de um desenho de grade tridimensional de um grafo planar (DUJMOVIC *et al.*, 2005). Podemos também usar coloração acíclica para se obter cálculos eficientes de matrizes Hessianas (GEBREMEDHIN *et al.*, 2009).

Além disto, existem outros tipos de coloração definidos na literatura, como *Coloração Estrela* e *Coloração Harmônica*, que são restrições do problema de Coloração Acíclica. Dado um grafo G e uma coloração própria c para $V(G)$, dizemos que c é uma *coloração estrela* quando todo caminho com quatro vértices contido em G usa pelo menos 3 cores distintas. Já uma coloração própria nos vértices de grafo é dita harmônica quando arestas distintas são coloridas

com pares distintos de cores. Este texto apresenta apenas artigos sobre o caso mais geral de Colorações Acíclicas, não cobrindo artigos sobre os casos particulares de Colorações Estrela e Harmônica.

O texto está organizado por tipos de resultado: limitantes e complexidade computacional. No Capítulo 3, nós escolhemos destinar uma seção apenas para grafos planares, sobre os quais existe uma grande quantidade de resultados. Separamos a seção em Colorações Acíclicas em vértices, em arestas e por listas, aglutinando resultados relacionados. Nas outras seções, seguimos o mesmo padrão. No Capítulo 4, apresentamos o estado da arte relativo à Complexidade Computacional. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais com enfoque em possíveis caminhos para trabalhos futuros, apresentando perguntas em aberto.

2 PRELIMINARES

Este texto segue as definições dadas pelo livro *Introduction to Graph Theory* do autor Douglas B. West (WEST, 2000). A seguir, apresentamos os conceitos básicos necessários para o entendimento deste texto. Qualquer outra propriedade ou definição especial necessária para a compreensão de um problema no texto, será apresentada decorrente à necessidade.

Um *grafo* $G = (V, E)$ é formado por um conjunto de *vértices* $V(G)$ e *arestas* $E(G)$, e uma função que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices não necessariamente distintos. Esta função, denotada por φ , é chamada de *função de incidência*. Sejam $u, v \in V(G)$ e $e \in E(G)$ tais que a função $\varphi(e)$ associa a e o par u, v . Dizemos que a aresta e tem u e v como suas *extremidades* ou *extremos*. Além disso, dizemos que e *incide* em u e v . E u e v são *adjacentes*.

Se G é um grafo e existe uma aresta e cujas extremidades são ambas um mesmo vértice, então e é um *laço*. Quando o grafo possui arestas distintas com as mesmas extremidades, dizemos que possui *arestas múltiplas*. Um grafo é dito *multigrafo* se tem arestas múltiplas e *simples* quando não tem laços nem arestas múltiplas. Veja um exemplo na Figura 3.

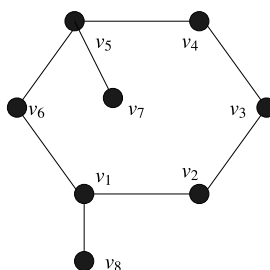


Figura 3 – Exemplo de um grafo simples.

Neste texto, todos os grafos estudados são simples, a menos que explicitamente seja dito o contrário. Portanto, usamos a notação usual de $e = uv$ para indicar que as extremidades da aresta e são u e v e não nos referiremos a função de incidência φ .

Seja $v \in V(G)$, definimos $N_G(v) = \{x \in V(G) \mid vx \in E(G)\}$ como a *vizinhança* do vértice v . Neste contexto, definimos o grau de um vértice $v \in V(G)$, $d_G(v)$ ou $d(v)$, como o número de incidências de arestas em v . Escrevemos $\delta(G)$ para representar o grau mínimo e $\Delta(G)$ o grau máximo de um vértice. Quando $\delta(G) = \Delta(G)$ dizemos que o grafo G é *regular*.

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* G , é um conjunto de vértices $V(G)$, um conjunto de *arcos* ou *arestas* $A(G)$ e uma função que associa a cada arco de G um par ordenado de

vértices (não necessariamente distintos). Seja $xy \in A(G)$, x é chamado de *cauda* e y é chamado de *cabeça*, sempre um arco dirige-se da cauda para a cabeça num digrafo (vide exemplo na Figura 4). Analogamente à definição de um grafo, definimos um *laço* e uma *aresta múltipla* em G .

Além disso, dado um vértice $v \in V(G)$, definimos como $d^-(v)$ como grau de entrada, a quantidade de arcos que tem v como cabeça e $d^+(v)$ como grau de saída, a quantidade de arcos que tem v como cauda. Analogamente, definimos $N^+(v)$ e $N^-(v)$, respectivamente, como a *vizinhança de sucessores* e *vizinhança de antecessores*.

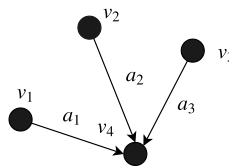


Figura 4 – Exemplo de um digrafo.

Dizemos que H é um subgrafo de um grafo G , denotado por $H \subseteq G$, quando H é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Quando $H \subseteq G$, dizemos que G contém H . H é *subgrafo induzido* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e as arestas em H são exatamente as arestas entre estes vértices em G , i.e., para quaisquer $u, v \in V(H)$, se $uv \in E(G)$, então $uv \in E(H)$. Um grafo G é dito *k-degenerado*, quando todo subgrafo $H \subseteq G$ tem ao menos um vértice com grau no máximo k .

Para um grafo simples G , definimos $\overline{G}$ como o seu *complementar*, onde $V(\overline{G}) = V(G)$ e $uv \in E(\overline{G})$ se, e somente se $uv \notin E(G)$. Dizemos que uma *clique* é um conjunto de vértices de um grafo, onde estes vértices são dois a dois adjacentes. Um conjunto *independente*, ou conjunto *estável*, é um conjunto de vértices onde estes são dois a dois não-adjacentes.

Dizemos que G e H são *isomorfos*, se existe uma função $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ se, e somente se $f(u)f(v) \in E(H)$. Quando isto ocorre, f é um *isomorfismo*. Denotamos por $G \cong H$. Define-se um *automorfismo* num grafo G , se conseguimos uma função $g : V(G) \rightarrow V(G)$, onde $uv \in E(G)$ se, e somente se $g(u)g(v) \in E(G)$.

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$, tal que $v_0, \dots, v_k \in V(G)$ e $e_1, \dots, e_k \in E(G)$, com $e_i = v_{i-1} v_i$. O comprimento de um passeio $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ é igual a k . Um *passeio fechado* é um passeio, tal que $v_0 = v_k$. Uma *trilha* é um passeio no qual você pode repetir vértices, mas não pode repetir aresta. Uma *trilha fechada* é uma trilha tal que inicia-se e termina-se no mesmo vértice.

Um *ciclo* é um passeio fechado cujo único vértice repetido é $v_0 = v_k$. Utilizamos a notação C_n ou n -ciclo, para um ciclo com n vértices. A *cintura* de um grafo G é o tamanho do menor ciclo que está contido em G . Definimos como um *ciclo Hamiltoniano* num grafo G , (se existe) um ciclo contido em G formado por todos os vértices do grafo.

Definimos um *caminho* num grafo simples, como um passeio em que não há repetição de vértice. Denotaremos um caminho com n vértices como P_n . Chamaremos de uv -caminho em um grafo, um caminho $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$, onde $v_0 = u$ e $v_k = v$. A *distância* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é comprimento do menor uv -caminho no grafo. Dois caminhos P^1 e P^2 entre $u, v \in V(G)$ distintos num grafo, são ditos *internamente disjuntos*, se $P^1 \cap P^2 = \{u, v\}$.

Dizemos que um grafo G é *conexo*, se dados quaisquer $x, y \in V(G)$, existe um xy -caminho em G , ligando x e y . Caso contrário, o grafo é dito desconexo. Uma *componente conexa* ou *componente* é um subgrafo conexo maximal (com relação à ordem parcial de subgrafo). Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$, definimos $G - S$ como o subgrafo formado pela remoção do conjunto S . Analogamente, seja $F \subseteq E(G)$, definimos como $G - F$ o subgrafo formado a partir da remoção do conjunto F .

Para um grafo G conexo, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *separador* ou um *corte de vértices* se $G - S$ tem mais de uma componente. A *conectividade* de um grafo G , denotada por $\kappa(G)$, é o menor inteiro k tal que G possui um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ satisfazendo: S é um separador de G ou $G - S$ possui apenas um vértice. G é dito k -conexo se $\kappa(G) \geq k$.

Analogamente, um conjunto desconectante $F \subseteq E(G)$ de um grafo conexo G é tal que $G - F$ possui mais de uma componente. A *conectividade em arestas* de G , denotada por $\kappa'(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto desconectante de G . G é k -aresta-conexo se $\kappa'(G) \geq k$.

Uma k -coloração nos vértices de um grafo simples G é uma função $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Uma k -coloração é própria se para toda aresta $uv \in E(G)$, temos $c(u) \neq c(v)$. Neste contexto, definimos como *classe de cor* o subconjunto de vértices que são coloridos com a mesma cor numa coloração própria em um grafo. Analogamente, uma *coloração parcial* nos vértices (respectivamente nas arestas) do grafo G , é uma coloração atribuída apenas a um subconjunto de vértices (respectivamente de arestas) do grafo.

O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor natural k , tal que G possui uma k -coloração própria.

Vea um grafo com uma 3-coloração própria na Figura 5.

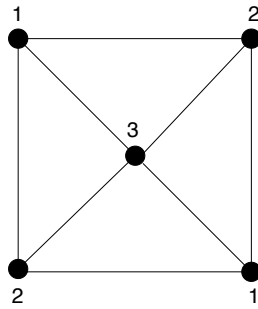


Figura 5 – Um grafo com uma 3-coloração própria em vértices.

O primeiro artigo que estabelece a definição de coloração acíclica é (GRÜNBAUM, 1973). Neste artigo, define-se para um grafo G uma k -coloração acíclica quando possuímos uma k -coloração própria c nos vértices tal que quaisquer duas classes de cor distintas de c induzem em G uma floresta. Denotamos como $\chi_a(G)$, o *número cromático acíclico* de G , o menor inteiro k tal que G possui uma k -coloração acíclica.

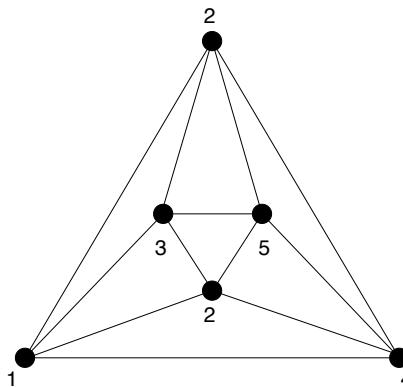


Figura 6 – Exemplo de um grafo com coloração acíclica.

Vamos observar o exemplo da Figura 6, o grafo foi colorido propriamente, observe que dadas quaisquer duas cores induzem em G subgrafos acíclicos. Logo, esta é uma coloração acíclica.

Uma k -coloração própria em arestas num grafo G é uma função $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tal que $c(e_i) \neq c(e_j)$, sempre que e_i e e_j são incidentes em um mesmo vértice. Denotado por $\chi'(G)$, o menor natural k tal que G possui uma k -coloração própria em arestas.

Analogamente, definimos o conceito de k -coloração acíclica em arestas, uma coloração própria em arestas com k cores em que duas classes de cor quaisquer não induzem ciclos em G . O *número cromático acíclico em arestas*, $\chi'_a(G)$, é o menor valor inteiro k tal que G possui

uma k -coloração acíclica em arestas.

Seja G um grafo e L uma função que atribui a cada vértice $v \in V(G)$ de G um subconjunto finito de números inteiros positivos. Dizemos que G é L -lista colorível se existe uma coloração própria c para os vértices do grafo G tal que $c(v) \in L(v)$, para todo $v \in V(G)$. Seguindo a nomenclatura em língua inglesa, se G é L -lista colorível para toda atribuição de listas L aos seus vértices tais que $|L(v)| \geq k$, para todo $v \in V(G)$, dizemos que G é k -choosable. O menor k tal que G é k -choosable é definido como o número cromático por listas de G , denotado por $ch(G)$ (no inglês, esse parâmetro é conhecido como *choice number*).

Um grafo G é dito *planar* se admite uma representação no plano (ou na esfera) sem interseção de arestas. Em tal representação, cada vértice é mapeado em um ponto do plano e cada aresta é representada por uma curva poligonal simples (sequência finita de segmentos de reta que não se intersectam) que começa e termina nos pontos associados às suas extremidades.

Um *grafo plano* é um grafo planar cujo conjunto de vértices já é um conjunto de pontos no plano e cujas arestas já são curvas poligonais simples que não se intersectam.

Uma *face* em um grafo plano é uma região maximal sem pontos de G . A *fronteira da face* é o conjunto de arestas de delimitam a face. O *grau de uma face* é o comprimento do menor passeio fechado na sua fronteira, chamado de $d_G(f)$.

Dizemos que um grafo G é *periplanar*, se G possui uma imersão plana onde todos os seus vértices estão em contato com a face externa. Um *grafo periplano* é uma imersão plana de um grafo periplanar. Uma *triangulação* é um grafo plano simples onde toda face consiste de um triângulo. Definimos um grafo G k -*planar* como um grafo tal que podemos imergi-lo no plano de forma que cada aresta pode ter no máximo k cruzamentos.

Definimos como uma *floresta* F um grafo que não possui ciclos. Um grafo T conexo sem ciclos é denominado *árvore*. Se $v \in T$ uma árvore e $d_T(v) = 1$, dizemos que v é uma *folha*. Uma *árvore geradora* é um subgrafo gerador que é também uma árvore.

Definimos $M \subseteq E(G)$ como um *emparelhamento* de um grafo G , se para todo $e_1, e_2 \in M$, e_1 e e_2 não possuem extremidades em comum. Dizemos que um emparelhamento *satura* um subconjunto S de vértices de G , se para cada $v \in S$, existir $e \in M$, tal que v é extremidade de e . Um emparelhamento M é *perfeito* se $V(G)$ é saturado por M .

3 LIMITANTES

Neste capítulo, apresentamos resultados relativos à limitantes encontrados na literatura sobre Colorações Acíclicas. Dedicamos a primeira seção a grafos planares, que concentram a maior parte dos resultados e, em seguida, apresentamos os resultados para as demais classes.

3.1 Grafos Planares.

3.1.1 Coloração Acíclica em Vértices para Grafos Planares.

Grünbaum definiu Coloração Acíclica no artigo (GRÜNBAUM, 1973), dedicou-se neste artigo primeiramente a provar que todo grafo planar pode ser colorido acíclicamente com 9 cores. A ideia geral da prova é simples e descrita a seguir, apesar de que a verificação de cada passo requer uma verificação cuidadosa. Grünbaum tomou um vértice $v_0 \in V(G)$ arbitrário e particionou os vértices do grafo a partir de sua distância relativa ao vértice v_0 , formando conjuntos V_j , onde $j = 0, \dots, k$, em que k representa a maior distância apresentada. Em seguida, ele argumenta que cada subgrafo induzido por um conjunto V_j pode ser colorido acíclicamente com 3 cores. Finalmente, ele usa as cores 1, 2 e 3 para colorir os conjuntos V_j , com $j \cong 0 \pmod{3}$; 4, 5 e 6, para os conjuntos V_j , com $j \cong 1 \pmod{3}$ e, finalmente, as cores 7, 8 e 9 para os conjuntos V_j , com $j \cong 2 \pmod{3}$. Por fim, argumentando que tal coloração é uma coloração acíclica de G .

Seja G um grafo que admite uma k -coloração própria c . Dizemos que c é uma k -coloração parcialmente acíclica do tipo $(k_1, \dots, k_s)$ se $k = k_1 + \dots + k_s$ e se existe uma partição do conjunto de cores de c em s partes C_{k_i} , com $i = 1, \dots, s$, que deve satisfazer duas condições, para todo $i = 1, \dots, s$, que são: $|C_{k_i}| = k_i$; e o conjunto de vértices coloridos com cores em C_{k_i} não induz ciclos bicoloridos dentre as cores de C_{k_i} em G .

Logo, se temos uma coloração (k_1, k_2) -parcialmente acíclica, ao observamos duas cores quaisquer do conjunto associado a k_1 , notamos que qualquer um destes pares gera um subgrafo acíclico de G . Observe que entre as cores utilizadas em k_1 e k_2 podem ocorrer ciclos entre duas classes de cor, sendo uma da parte associada a k_1 e outra a k_2 . Note também que uma k -coloração acíclica é uma (k) -coloração parcialmente acíclica.

No mesmo artigo, Grünbaum também conjectura que todo grafo planar pode ser colorido acíclicamente com 5 cores. Tendo em vista que a prova apresentada para o Teorema 3.1.1 é base para provas posteriores dentro do tema, resolvemos apresentar os detalhes.

Teorema 3.1.1 ((GRÜNBAUM, 1973)). *Todo grafo planar tem uma $(2,3)$ -coloração parcialmente acíclica.*

Para demonstrar o Teorema 3.1.1, Grünbaum prova um resultado ainda mais forte que apresentamos a seguir.

O primeiro detalhe não presente na demonstração é relacionado a cortes próprios. Se G é um grafo plano maximal, então um k -corte próprio C é um ciclo em G de tamanho k tal que $G - C$ é desconexo e C não corresponde a uma face de G . Note que, como G é uma triangulação, ou seja, um grafo plano maximal em arestas, $G - C$ possui exatamente duas componentes. Uma correspondendo aos vértices que estão no interior de C em G e a outra correspondendo aqueles que estão no exterior.

Lema 3.1.1. *Se G é um grafo plano triangulado que não é 4-conexo, então G possui um 3-corte próprio.*

Demonstração. Como G não é 4-conexo, isto implica que o grafo G tem um corte de cardinalidade menor ou igual 3. Suponhamos, por absurdo, que G tem um corte de tamanho 1. Seja $\{x\}$ este corte. Portanto, o grafo $G - \{x\}$ deve ter pelo menos duas componentes, digamos C_1 e C_2 . Não existe uma aresta entre C_1 e C_2 , ou seja, uma aresta uv onde $u \in C_1$ e $v \in C_2$. Porém, isso contradiz o fato de G ser triangulação. Por outro lado, se G tem um corte de cardinalidade 2, então seja $C = \{x, y\}$ um tal corte. Existem pelo menos 2 componentes C_1 e C_2 em $G - \{x, y\}$. Usando um argumento similar, conseguimos uma contradição por G ser uma triangulação.

Portanto, um corte em G tem que ter tamanho 3. Vamos então mostrar que existe um corte de tamanho 3 que é um triângulo e que este não constitui uma face do grafo. Vamos primeiro mostrar que todo 3-corte em um grafo plano maximal de conectividade 3 é um triângulo. Seja $S = \{x, y, z\}$ um corte mínimo de G . Primeiro, observe que, pela minimalidade de S , cada vértice de S possui ao menos um vizinho em cada componente de $G - S$. Logo, observe que $G - S$ não pode possuir três ou mais componentes, caso contrário G possuiria um $K_{3,3}$ como menor, contradizendo o Teorema de Wagner (vide Teorema 10.32 em (BONDY; MURTY, 2008)). Logo, $G - S$ possui exatamente duas componentes C_1 e C_2 . Sejam v_1 e v_2 dois vizinhos de x tais que $v_i \in V(C_i)$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Suponha, por absurdo e sem perda de generalidade, que $xy \notin E(G)$. Observe que como G é triangulado, a vizinhança de x é um ciclo C de G tal que C contém v_1 e v_2 , e C não contém nem x nem y . Tal ciclo define dois caminhos entre v_1 e v_2 e, mesmo que z pertença a um desses caminhos, obtemos uma contradição ao fato que $S = \{x, y, z\}$

desconecta a componente C_1 de C_2 . Resta apenas mostrar que existe um triângulo separador que não seja facial. Isso decorre diretamente de um teorema de Tutte, que afirma que todo ciclo grafo plano 3-conexo é separador se, e somente se, não corresponde a uma face (vide Teorema 10.27 em (BONDY; MURTY, 2008)). $\square$

Uma outra informação necessária, cuja demonstração é omitida, é apresentada a seguir. Para um grafo G , denote por $e_{j,k}$ para a quantidade de arestas $vw \in E(G)$ que satisfazem $\{d(v), d(w)\} = \{j, k\}$.

Lema 3.1.2. *Se G é uma grafo plano maximal de grau mínimo $\delta(G) \geq 5$, então temos $e_{5,5} > 0$ ou $e_{5,6} \geq 60$.*

Demonstração. Chamaremos de v_k o número de vértices de grau k de G . Suponhamos que $e_{5,5} = 0$, ou seja, que não temos uma aresta com ambas extremidades possuindo grau igual a 5.

Obtemos que existem $5v_5$ arestas que possuem vértice de grau 5. Observando a outra extremidade destas arestas, observe que a restrição $e_{5,5} = 0$ nos fornece que se $v \in V(G)$ e $d_G(v) = 7$, temos que ele é adjacente no máximo a 3 vértices de grau 5.

Analogamente, concluímos por paridade que:

$$5v_5 \leq e_{5,6} + 3v_7 + 4v_8 + 4v_9 + 5v_{10} + \dots$$

Utilizaremos a seguir a Relação de Euler:

$$n - m + f = 2$$

onde n, m e f são, respectivamente, o número de vértices, de arestas e de faces de G .

Como G é um grafo triangulado, toda face tem grau 3. Além disso, sabemos que $\sum d(f) = 2m$ e que $\sum d(v) = 2m$. Como o triplo do número de faces é igual ao somatório do grau das faces, assim:

$$n - m + f = 2$$

$$3n - 3m + 3f = 6$$

$$3n - 3m + 2m = 6$$

$$3n - m = 6$$

$$6n - 2m = 12$$

$$6(v_5 + v_6 + v_7 + \dots) - \sum_{v \in V(G)} d(v) = 12$$

$$6v_5 + 6v_6 + 6v_7 + \dots - (5v_5 + 6v_6 + 7v_7 + \dots) = 12$$

$$v_5 + \sum_{k \geq 7} 6v_k - \sum_{k \geq 7} kv_k = 12$$

$$12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)v_k = v_5$$

Utilizando o fato de $5v_5 \leq e_{5,6} + 3v_7 + 4v_8 + 4v_9 + 5v_{10} + \dots$, assim:

$$5v_5 \leq e_{5,6} + \sum_{k \geq 7} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor v_k$$

$$5v_5 = 60 + \sum_{k \geq 7} (5k - 30)v_k$$

$$e_{5,6} \geq 60 + \sum_{k \geq 7} (5k - 30)v_k - \sum_{k \geq 7} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor v_k$$

$$e_{5,6} \geq 60 + \sum_{k \geq 7} (5k - 30 - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor)v_k$$

Por indução, observamos que o termo $5k - (30 - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ é sempre maior igual a zero para $k \geq 7$. Concluimos que $e_{5,6} \geq 60$. $\square$

Teorema 3.1.2 ((GRÜNBAUM, 1973)). *Seja G um grafo plano triangulado e c uma coloração parcial G com um triângulo facial de G pré-colorido. Então, existe uma $(2,3)$ -coloração acíclica c' de G que estende c .*

Demonstração. Vamos nomear esta face triangular pré-colorida como *triângulo distinto*. A prova será por indução no número de vértices de G . Como caso base, podemos tomar $n(G) \leq 5$. Qualquer $n(G)$ -coloração de G que estenda a coloração do triângulo distinto será própria e será

uma $(2,3)$ -coloração parcialmente acíclica. Logo, assumimos que o grafo G tem pelo menos 6 vértices.

Vamos separar por casos e em seguida argumentamos que esses casos são suficientes.

Caso 1: Analisaremos primeiro o caso em que G não é 4-conexo. Pelo Lema 3.1.1, G possui um 3-corte próprio S . Sejam C_1 e C_2 as duas componentes de $G - S$. Denote por C_i^* o subgrafo de G induzido por $V(C_i) \cup S$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Sem perda de generalidade, considere que o *triângulo distinto* pertence a C_1^* . Como C_1^* e C_2^* têm menos vértices que G , uma vez que S é um corte próprio, podemos aplicar a hipótese de indução a cada. Como podemos fazer uma pré-coloração à um triângulo distinto, vamos pré-colorir o corte S , com as mesmas cores que foram aplicadas a S quando aplicamos a hipótese de indução para obtermos a $(2,3)$ -coloração em C_1^* . Podemos aplicar novamente a hipótese de indução em C_2^* . Agora unindo C_1^* e C_2^* , provaremos que as colorações obtidas agora formam uma $(2,3)$ -coloração para G .

Suponhamos que exista um ciclo bicolorido, com relação ao subconjunto de cores de tamanho 2 ou com relação ao subconjunto de tamanho 3. Se este ciclo existe, em consequência da hipótese de indução, temos que este ciclo deve ir de C_1 para C_2 e obrigatoriamente deve passar por S . Como este ciclo bicolorido passa por S , temos que a cor de um dos vértices de S pode ser ignorado, mas isto implica que, se restringirmos este ciclo à C_1^* , obtemos um ciclo bicolorido, gerando uma contradição à $(2,3)$ -coloração de C_1^* obtida pela hipótese indutiva.

Caso 2: Vamos considerar agora o caso em que existe $v \in V(G)$ de grau igual a 4 que não pertence ao triângulo distinto. Seja $\{p, q, r, s\}$ o conjunto formado pela vizinhança do vértice v .

Vamos construir uma $(2,3)$ -coloração acíclica para G . Para isto, definamos um grafo G^* , formado a partir de G . Deletamos v e traçamos uma aresta entre dois vértices diagonalmente opostos da vizinhança de v , digamos entre p e r (veja a Figura 7).

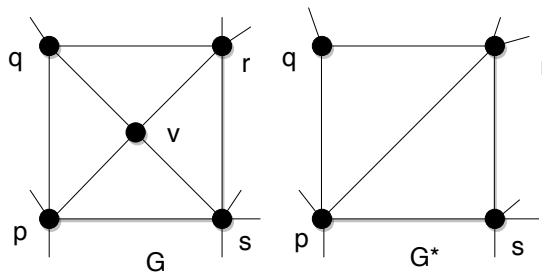


Figura 7 – Grafo modelando o Caso 2.

Usando a hipótese indutiva, mostraremos que conseguimos uma $(2,3)$ -coloração

para o grafo G , a partir da coloração obtida para o grafo G^* , que possui um vértice a menos.

Utilizaremos os caracteres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ para representar as cores utilizadas nos vértices p, q, r, s e v . Assim, observe a Tabela 1 com as possíveis colorações de G^* nas quatro primeiras colunas, uma parte das cores formada por $\{\alpha, \beta\}$ e a outra por $\{\gamma, \delta, \varepsilon\}$, formando a $(2, 3)$ -partição. Cada linha da Tabela 1 representa a coloração obtida pela hipótese indutiva para G^* e, na última coluna, qual a cor deve ser aplicada a v para garantir que a coloração de G^* pode ser utilizada para obter uma $(2, 3)$ -coloração acíclica de G . A partir da linha 2, é uma simples verificação que a cor apresentada para v na última coluna de fato pode ser utilizada em G , mantendo-se as mesmas cores da coloração de G^* obtida pela hipótese indutiva.

Vamos analisar o caso da primeira linha da Tabela 1, no qual a cor de v não pode ser decidida sem uma análise de casos e, talvez, mesmo uma recoloração de parte de G^* . Seja $H \subseteq G^*$ subgrafo maximal conexo colorido apenas com as cores α e β que contém os vértices p e r . Como G^* tem uma $(2, 3)$ -coloração parcialmente acíclica, as cores α e β não induzem ciclos. Logo, H é uma árvore que contém a aresta pr .

Caso H não possua um vértice do triângulo distinto, então podemos trocar as cores de α e β da subárvore $H - pr$ que contém r e atribuir a cor β a v . Caso tenhamos um vértice do triângulo distinto em H , se tal vértice pertença à subárvore de $H - pr$ que contém p , a mesma argumentação anterior trocando cores da subárvore que contém r é suficiente. Caso contrário, trocamos as cores da subárvore de $H - pr$ que contém p e colorimos v com a cor α .

Tabela 1 – Tabela referente ao Caso 2.

p	q	r	s	v
α	γ	β	γ	observe o texto.
α	γ	β	δ	ε
α	β	γ	β	ε
α	β	γ	δ	ε
α	δ	γ	δ	β
α	δ	γ	ε	β
γ	α	δ	α	ε
γ	α	δ	β	ε
γ	α	δ	ε	β
γ	ε	δ	ε	β

Caso 3: Suponha que G é 4-conexo e que G possui uma aresta vw que possui uma extremidade de grau 5 e outra de grau 5 ou 6 e, além disso, nem v , nem w pertencem ao triângulo distinto.

De modo análogo ao caso anterior, vamos construir um grafo G^* com menos vértices do que G , e usar uma $(2, 3)$ -coloração parcialmente acíclica de G^* para conseguirmos uma

(2,3)-coloração parcialmente acíclica para G .

Caso 3.1: Suponha que v e w têm grau 5. Para obtermos G^* , removemos os vértices v e w e identificamos os vértices p e p' (veja Figura 8).

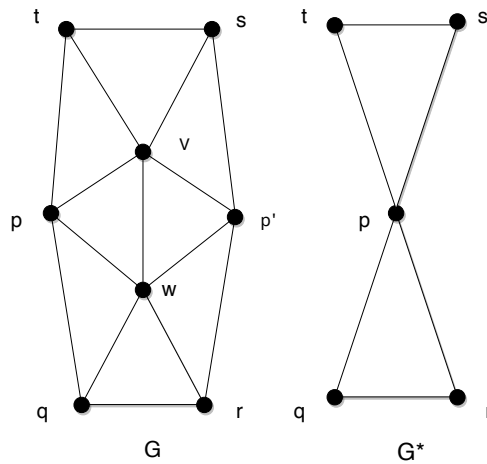


Figura 8 – Grafo modelando o Caso 3.1.

Na Tabela 2, estabelecemos, para as possíveis colorações de G^* , quais cores devem ser aplicadas em v e w para obter-se uma (2,3)-coloração parcialmente acíclica de G .

p	q	r	s	t	v	w
γ	δ	ϵ	c	d	α	β
γ	δ	ϵ	α	$\neq$	c	α
γ	α	δ	c	a	b	ϵ
γ	α	$\neq$	a	c	b	d
γ	α	β	a	b	δ	ϵ
α	β	γ	β	c	d	e
α	β	γ	c	β	d	e
α	β	γ	c	d	β	δ
α	γ	δ	c	d	β	ϵ

Tabela 2 – Tabela referente ao Caso 3.1.

Utilizamos as letras a e b representando quando pode-se aplicar uma das cores α ou β . Para indicar a ocorrência de uma cores γ , δ e ϵ , utilizamos as letras c , d e e . Para representar uma cor qualquer, utilizamos o símbolo $\neq$.

Caso 3.2: Suponha que v e w têm graus 5 e 6, respectivamente. Para obtermos G^* , novamente removemos os vértices v e w e identificamos os vértices q com q' e r com r' (veja Figura 9).

No segundo caso, vamos omitir os vértices v e w , identificando os vértices q, q', r e r' . Utilizaremos as cores α e β para uma partição e γ, δ e ϵ formando outra partição.

Novamente, para resumir a análise de casos dentre as possíveis colorações de G^* ,

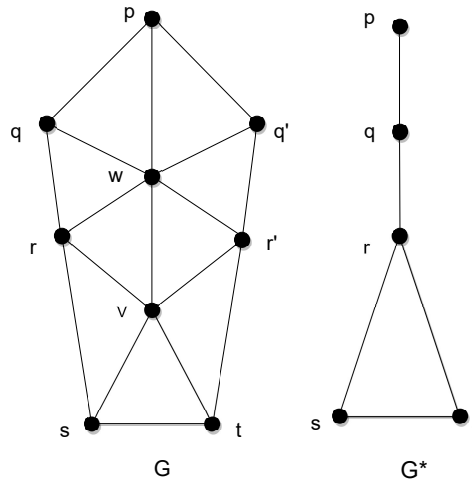


Figura 9 – Grafo modelando o Caso 3.2.

apresentamos na Tabela 3 quais cores devem ser atribuídas a v e w em cada caso, para obter-se uma $(2, 3)$ -coloração parcialmente acíclica para G .

p	q	r	s	t	v	w
$\neq$	$\neq$	α	β	γ	ε	δ
$\neq$	$\neq$	α	γ	δ	β	c
c	d	α	β	γ	δ	β
α	β	α	$\neq$	γ	ε	γ
α	β	γ	α	β	δ	ε
α	γ	δ	α	β	γ	β
γ	$\neq$	c	α	β	d	β
a	γ	δ	α	c	β	ε
c	α	γ	a	δ	ε	β
γ	δ	c	α	d	β	α
c	$\neq$	γ	δ	ε	a	b
c	d	a	γ	δ	ε	β

Tabela 3 – Tabela referente ao Caso 3.2.

Agora finalizaremos a prova do teorema, argumentando que os três casos anteriores são suficientes.

Dada a análise feita no Caso 1, podemos supor que o grafo G é 4-conexo. Logo, observe que o grau mínimo de G é $\delta(G) \geq 4$. Se G é 4-conexo e tem um vértice de grau 4 que não é pertencente ao triângulo distinto, então obtemos o caso apresentado no item 2. Logo, podemos também supor que todo vértice de grau 4, caso exista, pertence ao triângulo distinto. Suponha que existe em G um vértice com grau 4 pertencente ao triângulo distinto.

Então, observe existe um corte próprio Q_0 de tamanho 4 que engloba o triângulo distinto. Englobar aqui significa que o triângulo distinto pertence à união de Q_0 com os vértices da componente interior do corte. Como há um 4-corte próprio que engloba o triângulo distinto,

suponha, sem perda de generalidade, que Q_0 é maximal com relação ao número de faces em seu interior. Pela maximalidade de Q_0 , observe que cada vértice de Q_0 tem pelo menos dois vizinhos na sua componente externa.

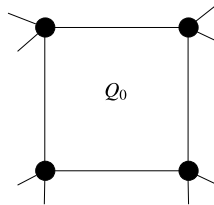


Figura 10 – Representação do 4-corte próprio maximal Q_0 .

Vamos agora construir um novo grafo H a partir de G , deletando os vértices que estão internos relativamente ao corte Q_0 e os substituímos por uma cópia dos vértices que estão na componente externa ao corte Q_0 .

Neste processo, ainda obtemos um grafo planar triangulado H que não possui um triângulo distinto. Portanto, também não possui vértices de grau menor ou igual a 4. Além disso, como tínhamos pelo menos duas arestas saindo de Q_0 , neste processo temos que cada vértice de Q_0 tem grau pelo menos 6 em H . Pelo Lema 3.1.2, existe em H alguma aresta $(5,5)$ ou pelo menos 60 arestas $(5,6)$. Observe que então G possuía pelo menos uma aresta $(5,5)$ ou pelo menos uma aresta $(5,6)$ na componente exterior de Q_0 . Tal aresta portanto não possui extremidade no triângulo distinto. Consequentemente, obtemos o caso estudado no caso 3.

Finalmente, suponha que o grafo G é 4-conexo, mas não tem vértice de grau 4.

Vamos construir um novo grafo H^* da seguinte maneira: como temos que o grau de cada vértice é pelo menos 5, tomamos o triângulo distinto, que corresponde a uma face de G , e copiamos o restante do grafo G que está em seu exterior e colamos no interior do triângulo distinto (veja Figuras 11 e 12).

Isto implica que o grafo H^* é plano maximal e que os vértices do triângulo distinto têm grau pelo menos 8 em H^* . As arestas $(5,5)$ ou $(5,6)$ de H^* são do mesmo tipo que as encontradas em G . Como cada vértice do triângulo distinto tem grau pelo menos 8, tais arestas não tem interseção com o triângulo distinto, recaindo no caso analisado no item 3.

Concluimos que, qualquer que seja o caso, é possível obtermos uma $(2,3)$ -coloração parcialmente acíclica para o grafo G , como queríamos demonstrar.

Está provado o teorema. □

Grünbaum também mostrou que existem grafos planos que não podem ser coloridos

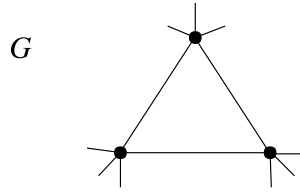


Figura 11 – Grafo G .

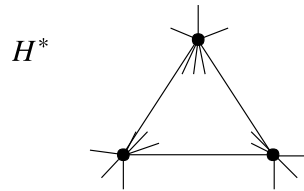


Figura 12 – Grafo H^* .

com uma $(2, 2)$ -coloração acíclica, nem uma $(1, 3)$ -coloração acíclica. O autor deixa a conjectura que afirma que se G é um grafo plano, então G tem uma 5-coloração acíclica. Ainda vale salientar que, em seu artigo, Grünbaum acreditava que não seria possível provar o Teorema das Quatro Cores.

A conjectura de Grünbaum foi provada por Borodin em 1979:

Teorema 3.1.3 ((BORODIN, 1979)). *Seja G um grafo planar, então G possui uma 5-coloração acíclica.*

A demonstração do Teorema 3.1.3 segue uma extensa análise de casos que preferimos não colocá-la aqui. Borodin também conseguiu melhorar esse limitante, sob a hipótese de que a cintura do grafo é suficientemente grande:

Teorema 3.1.4 ((BORODIN, 1999)). *Se G é um grafo planar com cintura pelo menos 5, então $\chi_a(G) \leq 4$.*

Teorema 3.1.5 ((BORODIN, 1999)). *Se G é um grafo planar com cintura pelo menos 7, então $\chi_a(G) \leq 3$.*

Os Teoremas 3.1.4 e 3.1.5 são os melhores limitantes que encontramos na literatura com estas restrições. Em seguida, provando perguntas feitas por Grünbaum, o artigo (WEGNER,

1973) constrói dois exemplos: um grafo planar com 11 vértices que não admite $(1, 3)$ -coloração parcialmente acíclica (e argumenta que esta é a menor quantidade de vértices de um tal exemplo), e um grafo planar que não admite $(1, 1, 2)$ -coloração parcialmente acíclica.

A seguir (KOSTOCHKA; MEL'NIKOV, 1976) provaram que grafos que não possuem uma 4-coloração acíclica podem ser encontrados entre os grafos bipartidos planares 3-degenerados. Um grafo G é k -degenerado se todo subgrafo $H \subseteq G$ possui um vértice de grau no máximo k .

Um grafo G é dito 1-planar se existe uma representação no plano (ou na esfera) onde cada aresta possui no máximo um cruzamento com outra aresta. Observe que podemos dar como exemplo o $K_{3,3}$ como um grafo 1-planar.

Teorema 3.1.6 ((BORODIN *et al.*, 2001)). *Todo grafo 1-planar pode ser colorido aciclicamente utilizando 20 cores.*

Definimos uma k -subdivisão de um grafo G , um grafo G' obtido pela substituição de cada aresta de G por um caminho com no máximo k vértices internos. Os vértices internos são os vértices da divisão de G' . Há alguns trabalhos que estudam o número cromático acíclico de subdivisões de grafos planares.

Teorema 3.1.7 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *Seja G um grafo plano. Então existe uma 1-subdivisão G' de G que é aciclicamente 3-colorível.*

Este resultado foi melhorado posteriormente, com a limitação no número de subdivisões realizadas:

Teorema 3.1.8 ((MONDAL *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo planar com $n \geq 3$ vértices. Então, G tem uma 1-subdivisão G' com no máximo $2n - 5$ vértices de divisão que é 3-colorível aciclicamente.*

No lugar da existência de uma subdivisão, também foi demonstrado resultado similar quando se considera todas as 1-subdivisões:

Teorema 3.1.9 ((MONDAL *et al.*, 2013)). *Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, existe um grafo planar com $t = 7 \times 4^k + 2$ vértices tal que, para qualquer uma de suas 1-subdivisões que for 3-colorível aciclicamente, essa subdivisão contém pelo menos $(9t - 8)/7$ vértices de divisão.*

Com relação a subdivisões de grafos com número cromático acíclico igual a 4, temos resultados similares:

Teorema 3.1.10 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *Seja G um grafo plano. Então existe uma 1-subdivisão G' de G que é 4-colorível aciclicamente, onde o número máximo de subdivisões em G' é no máximo $2n - 6$.*

Teorema 3.1.11 ((MONDAL *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo planar com $n \geq 3$ vértices tem uma 1-subdivisão G' com no máximo $n - 3$ vértices de divisão que é 4-colorível aciclicamente.*

Quando falamos sobre subdivisões em grafos, em (MONDAL *et al.*, 2011), os autores sugerem caminhos para a continuidade de seu trabalho, buscando colorações acíclicas para grafos planos com poucos *vértices de divisão*. Eles questionam:

Conjectura 3.1.1 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *Qual seria a constante positiva mínima c tal que todo grafo planar triangulado com n vértices tem uma k -coloração acíclica, $k \in \{3, 4\}$, com no máximo cn vértices de divisão?*

Há ainda na literatura um outro resultado relacionado a grafos planares que necessita de algumas definições adicionais. Escrevemos como $\mathcal{M}^4$ o conjunto dos grafos planares maximais, ou seja, triangulados, que possuem exatamente quatro vértices de grau ímpar. Seja $\mathcal{G}^4$ a subclasse dos grafos de $\mathcal{M}^4$ que possuem grau mínimo 4 e o subgrafo induzido pelos vértices de grau ímpar contém um ciclo de tamanho 4. Usaremos $\mathcal{G}_n^4$ para representar os grafos com n vértices em $\mathcal{G}^4$.

Já havia sido provado por (ZHU *et al.*, 2016) que todo grafo planar maximal aciclicamente colorido com 4 cores possui pelo menos 4 vértices ímpares. O artigo também estabelece condições necessárias para que um grafo maximal planar 4-conexo com exatamente 4 vértices ímpares seja 4-colorível aciclicamente.

Seja f uma k -coloração de um grafo G e considere um conjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$. Diz-se que a coloração f é *localmente equitativa* com relação a V' se $|V_i \cap V'| = |V_j \cap V'|$, para quaisquer duas classes de cor distintas V_i e V_j de f , com $V_i \cap V' \neq \emptyset$ e $V_j \cap V' \neq \emptyset$. Também é dito que V' pode ser *colorido equitativamente*.

Teorema 3.1.12 ((ZHU *et al.*, 2018)). *Seja $G \in \mathcal{M}^4$ um grafo maximal planar aciclicamente 4-colorível, sendo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ seus quatro vértices ímpares. Então, para qualquer 4-coloração acíclica de G , temos que $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é colorido equitativamente.*

3.1.2 Coloração Acíclica em Arestas para Grafos Planares.

Os autores em (WAN; XU, 2014) reúnem diversos resultados sobre coloração acíclica. Nesse contexto, muitos dos resultados buscam mostrar a conjectura estabelecida por (ALON *et al.*, 2001):

Conjectura 3.1.2. *Seja G um grafo planar. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Como resultado geral, temos os seguintes limitantes:

Teorema 3.1.13 ((YU *et al.*, 2009)). *Se G é um grafo planar, então $\chi'_a(G) \leq \max\{2\Delta(G) - 2, \Delta(G) + 22\}$.*

Tal resultado foi melhorado posteriormente:

Teorema 3.1.14 ((BASAVARAJU *et al.*, 2011)). *Para todo grafo G planar, temos que $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 12$.*

O resultado 3.1.15 é muito importante. Estabelecendo um limitante superior próximo do valor estabelecido por Alon em sua conjectura para coloração acíclica em arestas para grafos planares, sem adicionar hipótese alguma.

Teorema 3.1.15 ((WANG; ZHANG, 2016)). *Seja G um grafo planar, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 6$.*

Entretanto, a maioria dos resultados se baseia em conseguir limitantes para grafos planares com cintura restrita. Com relação à cintura pelo menos 4, temos os seguintes limitantes:

Um resultado mais forte foi obtido em 2012:

Teorema 3.1.16 ((QIAOJUN *et al.*, 2012)). *Se G é um grafo planar com cintura pelo menos 4, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Já com respeito a cintura pelo menos 5, mais uma vez a conjectura de Alon *et al.* é verificada:

Teorema 3.1.17 ((HOU *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo planar com cintura pelo menos 5, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Adicionando mais uma restrição ao maior grau do grafo, é ainda possível economizar mais uma cor:

Teorema 3.1.18 ((HOU et al., 2013)). *Seja G um grafo planar com cintura pelo menos 5 e com $\Delta(G) \leq 9$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G)$.*

Há ainda na literatura diversos outros resultados com restrições em ciclos do grafo planar dado como entrada. Observe que há diferenças entre não ter ciclos de respectivos tamanhos e não ter cintura de dado tamanho.

Teorema 3.1.19 ((BOROWIECKI; FIEDOROWICZ, 2010)). *Se G é um grafo planar que não contém ciclos de tamanho 4, 6, 8 e 9, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Este teorema foi melhorado dois anos depois:

Teorema 3.1.20 ((HOU et al., 2012)). *Se G é um grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e 6, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Os mesmos autores, ainda provaram que:

Teorema 3.1.21 ((HOU et al., 2012)). *Se G é um grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e 5, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Proibindo apenas ciclos com 4 vértices, um limitante superior com uma cor a mais foi obtido:

Teorema 3.1.22 ((WANG; SHENG, 2014)). *Se G é um grafo planar sem ciclos de tamanho 4, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

No teorema a seguir, vemos diversas condições suficientes sobre o grau máximo e a cintura de um grafo planar G para que o mesmo admita uma $\Delta(G)$ -coloração acíclica por arestas.

Teorema 3.1.23 ((HUDÁK et al., 2012)). *Seja G um grafo planar com cintura g e grau máximo $\Delta(G)$. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G)$, se é válido as seguintes condições:*

1. $\Delta(G) \geq 3$ e $g \geq 12$ ou
2. $\Delta(G) \geq 4$ e $g \geq 8$ ou
3. $\Delta(G) \geq 5$ e $g \geq 7$ ou
4. $\Delta(G) \geq 6$ e $g \geq 6$ ou
5. $\Delta(G) \geq 10$ e $g \geq 5$.

Há alguns resultados na literatura que lidam com restrições de vizinhança entre ciclos. Estes resultados são apresentados a seguir:

Teorema 3.1.24 ((WANG *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo planar sem ciclos de tamanho 3 adjacente a ciclos de tamanho 4, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Teorema 3.1.25 ((WANG *et al.*, 2014)). *Seja G um grafo planar sem ciclos de tamanho 3 adjacente a um ciclo de tamanho 6. Então, $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Em 2014 também foi apresentado o resultado:

Teorema 3.1.26 ((WANG; ZHANG, 2014)). *Se G é um grafo planar sem triângulos adjacentes a ciclos de tamanho 3 e 4 e todo ciclo de tamanho 5 tem no máximo três arestas contidas em triângulos, então G admite uma coloração acíclica em arestas com $\Delta(G) + 2$ cores.*

Caso o grafo não possua triângulos que se intersectam, temos:

Teorema 3.1.27 ((WANG; ZHANG, 2014)). *Se G é um grafo planar sem triângulos que se intersectam, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Teorema 3.1.28 ((WAN; XU, 2014)). *Seja G um grafo planar sem i -ciclos e j -ciclos adjacentes com $i, j \in \{3, 4, 5\}$. Então, $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Teorema 3.1.29 ((WAN; XU, 2014)). *Seja G um grafo planar sem i -ciclos e j -ciclos adjacentes com $i, j \in \{3, 4, 6\}$. Então, $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Aqui relembremos a definição de um grafo 1-planar. Dizemos que um grafo G é 1-planar se podemos desenhá-lo no plano de modo que cada aresta tem no máximo um cruzamento de aresta.

Teorema 3.1.30 ((SONG; MIAO, 2015)). *Seja G um grafo 1-planar sem triângulos. Então, $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 22$.*

Dois anos mais tarde, este resultado foi melhorado:

Teorema 3.1.31 ((CHEN *et al.*, 2017)). *Se G é um grafo 1-planar livre de triângulos, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 16$.*

Há ainda um resultado para a subclasse de grafos periplanares:

Teorema 3.1.32 ((MUTHU *et al.*, 2007b)). *Seja G um grafo periplanar de grau máximo $\Delta(G)$. Então, $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Finalmente, foi estudada também uma generalização do problema de coloração acíclica em arestas definida como segue. Uma coloração própria nas arestas de um grafo G é *r-acíclica* se todo ciclo C contido em G é colorido com pelo menos $\min\{|C|, r\}$ cores. O *índice cromático r-acíclico* é o número mínimo necessário para produzir uma coloração *r-acíclica* nas arestas. Uma coloração 2-acíclica nas arestas coincide com uma coloração própria. Além disso, uma coloração 3-acíclica nas arestas é uma coloração acíclica nas arestas como definimos inicialmente. Para essa generalização, temos os seguintes resultados:

Teorema 3.1.33 ((ZHANG *et al.*, 2012)). *O índice cromático 4-acíclico de todo grafo plano G é no máximo $37\Delta(G)$.*

Teorema 3.1.34 ((ZHANG *et al.*, 2012)). *O índice cromático 4-acíclico de um grafo G periplanar é no máximo $2\Delta(G)$.*

Seja G um grafo, dizemos que G é um grafo série-paralelo se G não possui K_4 menor. Zhang *et al.* também conjecturam:

Conjectura 3.1.3. *O índice cromático 4-acíclico de todo grafo série-paralelo G é no máximo $2\Delta(G)$.*

3.1.3 Coloração Acíclica por Listas para Grafos Planares.

Sabemos por (THOMASSEN, 1994) que todo grafo planar é 5-choosable e, além disso, (VOIGT, 1993) provou que existem grafos planares que não são 4-choosable.

Definimos o *número cromático acíclico por listas* de G , denotado por $\chi_{a,l}(G)$, como o menor k tal que G é aciclicamente k -choosable, ou seja, é L -lista colorível aciclicamente, para qualquer atribuição de listas L aos seus vértices satisfazendo $|L(v)| \geq k$, para todo $v \in V(G)$.

É conhecido que:

Teorema 3.1.35 ((BORODIN *et al.*, 2002)). *Todo grafo planar é aciclicamente 7-choosable.*

Borodin *et al.* ainda conjecturaram que todo grafo planar é aciclicamente 5-choosable. No caso de periplanares, foi provado que:

Teorema 3.1.36 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo periplanar é aciclicamente 3-choosable.*

Ainda no artigo (MONTASSIER *et al.*, 2006b), os autores estabelecem diversas relações entre o grau médio máximo de um grafo e o seu número cromático acíclico por listas.

Como veremos a seguir, os teoremas apresentados são estabelecidos a partir de certas restrições dadas aos grafos planares, conseguindo resultados próximos ao que é esperado pela conjectura de Borodin *et al.*

Mickaël Montassier escreveu artigos com diversos resultados relativos a coloração acíclica por listas. Como:

Teorema 3.1.37 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo planar com cintura no mínimo 8 é aciclicamente 3-choosable.*

Teorema 3.1.38 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo planar com cintura no mínimo 6 é aciclicamente 4-choosable.*

Teorema 3.1.39 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo planar com cintura no mínimo 5 é aciclicamente 5-choosable.*

Conjectura 3.1.4 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Todo grafo G planar com cintura pelo menos 5 é aciclicamente 3-choosable.*

Foi estabelecido um resultado próximo a esta conjectura:

Teorema 3.1.40 ((MONTASSIER, 2007)). *Todo grafo planar com cintura pelo menos 5 é aciclicamente 4-choosable.*

No caso de grafos planares com cintura pelo menos 7, foi provado que:

Teorema 3.1.41 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Seja G um grafo planar com $Mad(G) < \frac{14}{5}$ e com cintura pelo menos 7. Então G é aciclicamente 3-choosable.*

Como corolário do teorema anterior, podemos apresentar que se G é um grafo planar com cintura pelo menos 7, então G é aciclicamente 3-choosable. Note que este resultado melhora o Teorema 3.1.37.

Há ainda outros resultados na literatura com restrições sobre ciclos que o grafo planar dado como entrada pode possuir.

Teorema 3.1.42 ((MONTASSIER *et al.*, 2007)). *Todo grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e 5 são aciclicamente 5-choosable.*

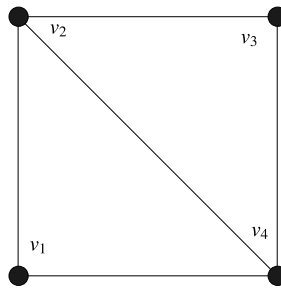


Figura 13 – Neste ciclo de tamanho 4, observe que v_2v_4 é uma corda.

Uma *corda* é uma aresta entre dois vértices não consecutivos de um ciclo.

Ao proibirem a presença de ciclos com 8 vértices contendo uma corda triangular, os autores em (CHEN; RASPAUD, 2010) melhoraram o limitante em uma unidade.

Teorema 3.1.43 ((CHEN; RASPAUD, 2010)). *Grafos planares que não possuem ciclos de tamanho 4 e 5 nem ciclos de tamanho 8 contendo uma corda triangular são aciclicamente 4-choosable.*

Teorema 3.1.44 ((MONTASSIER et al., 2007)). *Todo grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e 6 são aciclicamente 5-choosable.*

Teorema 3.1.45 ((CHEN; WANG, 2008)). *Todo grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e sem triângulos com distância menor que 3 é aciclicamente 5-choosable.*

Teorema 3.1.46 ((HOCQUARD; MONTASSIER, 2009)). *Para todo grafo planar G sem ciclos de tamanho 4 a 12, então G é aciclicamente 3-choosable.*

Um ciclo é dito *cordal*, se o mesmo possuir uma corda.

Teorema 3.1.47 ((ZHANG; XU, 2009)). *Todo grafo planar G sem ciclos de tamanho 4, nem ciclos cordais de tamanho 6 é aciclicamente 5-choosable.*

Como consequência do teorema anterior, no mesmo trabalho é provado que:

Teorema 3.1.48 ((ZHANG; XU, 2009)). *Seja G um grafo planar sem ciclos de tamanho 4 e 5; ou de tamanhos 4 e 6; ou ainda ciclos de tamanho 3 e 4. Então, G é aciclicamente 5-choosable.*

Mais tarde este resultado foi fortalecido:

Teorema 3.1.49 ((BORODIN; IVANOVA, 2012)). *Todo grafo planar G sem ciclos de tamanho 4 e 5, é aciclicamente 4-choosable.*

Teorema 3.1.50 ((WANG *et al.*, 2014)). *Seja G um grafo plana sem ciclos de tamanho 4 adjacentes a ciclos de tamanho i , onde $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, então G é aciclicamente 6-choosable.*

Borodin et al. conseguem provar a conjectura deixada por (CHEN; WANG, 2008), esta era uma versão “enfraquecida” da conjectura a seguir:

Conjectura 3.1.5 ((BORODIN *et al.*, 2002)). *Todo grafo planar é aciclicamente 5-choosable.*

Como apresentamos a seguir:

Teorema 3.1.51 ((BORODIN; IVANOVA, 2007)). *Todo grafo planar sem ciclos de tamanho 4 é aciclicamente 5-choosable.*

Este resultado dado por (CHEN; RASPAUD, 2010) é o mesmo obtido por (MONTASSIER *et al.*, 2006a). Contudo, a prova é feita de forma distinta.

Teorema 3.1.52 ((CHEN; RASPAUD, 2010);(MONTASSIER *et al.*, 2006a)). *Se G é um grafo planar que não contém $\{4, 5, 7\}$ -ciclos, então $\chi_{a,l}(G) \leq 4$. Mais ainda, se G é um grafo planar que não contém $\{4, 5, 8\}$ -ciclos, então $\chi_{a,l}(G) \leq 4$.*

Ainda sobre colorações acíclicas por listas em vértices de grafos planares com restrições de ciclos, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.53 ((BORODIN; IVANOVA, 2010)). *Um grafo planar é aciclicamente 5-choosable, se não contém um i -ciclo adjacente a um j -ciclo, com $3 \leq j \leq 5$, se $i = 3$ e $4 \leq j \leq 6$ se $i = 4$.*

Uma conjectura deixada por (BORODIN; IVANOVA, 2010) afirma que todo grafo planar G sem ciclos adjacentes de tamanho máximo 4 é aciclicamente 4-choosable. Além disso, se G não tem ciclos adjacentes de tamanho máximo 6, então G é aciclicamente 3-choosable.

No teorema a seguir, relembremos a definição de número cromático por listas, escrevendo como $\chi_{a,l}$ o menor inteiro k para o que o grafo G é aciclicamente k -choosable.

Teorema 3.1.54 ((SHU *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo periplanar com $\Delta(G) \geq 5$ então o número cromático por listas é igual a $\chi_{a,l} = \Delta(G)$.*

3.2 Resultados Gerais.

Nesta seção, apresentamos outros resultados conhecidos sobre limitantes de colorações acíclicas que não são necessariamente relacionados a grafos planares. Mais uma

vez, apresentamos os resultados por tipo de coloração acíclica (em vértices, em arestas, etc.), agrupando os que são relacionados.

3.2.1 Coloração Acíclica em Vértices.

Apresentamos primeiro alguns limitantes gerais encontrados na literatura.

Teorema 3.2.1 ((ALON, 1991)). *Existem grafos G com grau máximo d tais que $\chi_a(G) = \Omega\left(\frac{d^{4/3}}{(\log d)^{1/3}}\right)$.*

Outro resultado apresentado foi:

Teorema 3.2.2 ((ALON, 1991)). *Se G é um grafo com grau máximo d , então $\chi'_a(G) = O(d)$, se $d \rightarrow \infty$.*

A demonstrações dos Teoremas ??, 3.2.1 e 3.2.2 utilizam o Lema Local de Lovász (ERDŐS; LOVÁSZ, 1974).

Um limitante inferior geral é:

Teorema 3.2.3 ((JAMISON; MATTHEWS, 2005)). *Seja G um grafo. Temos que:*

$$\chi_a(G) > \frac{|E(G)|}{|V(G)|} + 1.$$

Há ainda alguns resultados com restrições nos graus dos vértices do grafo dado como entrada.

Teorema 3.2.4 ((ZHAO *et al.*, 2014)). *Todo grafo com grau máximo 6 pode ser colorido aciclicamente com 10 cores.*

O resultado apresentado por (ZHAO *et al.*, 2014) é um fortalecimento direto dos resultados que afirmavam que se G tem grau máximo 6, podemos colorido com 11 cores (HOCQUARD, 2011). Um outro resultado com relação ao maior grau de um vértice é o seguinte:

Teorema 3.2.5 ((BASAVARAJU; CHANDRAN, 2009a)). *Seja G um grafo com n vértices e $m \leq 2n - 1$ arestas. Se $\Delta(G) \leq 4$, então $\chi_a(G) \leq 6$.*

Quando buscarmos colorir grafos com grau máximo $\Delta(G) \leq 5$, temos:

Teorema 3.2.6 ((FERTIN; RASPAUD, 2008)). *Seja G um grafo tal que $\Delta(G) \leq 5$, podemos colorir aciclicamente o grafo com 9 cores.*

Posteriormente este resultado foi aprimorado:

Teorema 3.2.7 ((YADAV *et al.*, 2011)). *Os vértices de um grafo G com grau máximo $\Delta(G) \leq 5$, podem ser coloridos aciclicamente com 8 cores em tempo $O(n)$, onde n é a quantidade de vértices de G*

Além disto, com relação a limitantes inferiores, sabe-se que existem grafos G com grau máximo igual a 5 onde tem-se $\chi_a(G) = 6$. Isto ocorre, por exemplo, para o K_6 . Observe que temos uma lacuna entre estes dois limitantes. Este ainda é um problema em aberto desafiador.

Outro problema que permanece aberto e que foi apresentado em (SKULRATTANA-KULCHAI, 2004) como a seguir:

Conjectura 3.2.1 ((SKULRATTANAKULCHAI, 2004)). *Seja G um grafo com $3 < \Delta(G) < 7$. Então G possui uma 4-coloração acíclica.*

Uma *grade d -dimensional* $G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)$ de tamanho $n_1, n_2, \dots, n_d$ é o grafo com vértices $V(G_d(n_1, \dots, n_d)) = [1, \dots, n_1] \times [1, \dots, n_2] \times \dots \times [1, \dots, n_d]$ e cujo conjunto de arestas é $E(G_d(n_1, \dots, n_d)) = \{uv \mid u = (u_1, \dots, u_d), v = (v_1, \dots, v_d) \text{ e existe } i_0 \in \{1, \dots, d\} \text{ tal que } \forall i \neq i_0 (u_i = v_i, \text{ e } |u_{i_0} - v_{i_0}| = 1)\}$. Note que uma grade d -dimensional $G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)$ corresponde ao grafo obtido pelo produto Cartesiano de d caminhos de comprimento $n_1, \dots, n_d$.

Teorema 3.2.8 ((FERTIN *et al.*, 2003)). *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ com $n_i \geq 2$, para qualquer $1 \leq i \leq d$. Para $G_d(n_1, \dots, n_d)$ de dimensão d , temos*

$$\chi_a(G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)) \leq d + 1.$$

Teorema 3.2.9 ((FERTIN *et al.*, 2003)). *Sejam $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ e $d \geq 2$. Para toda grade $G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)$, se $\sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i} \leq 1$. Então*

$$\chi_a(G_d(n_1, n_2, \dots, n_d)) = d + 1.$$

Em (FERTIN *et al.*, 2003), os autores supunham que podiam aplicar o método de coloração desenvolvido no artigo para ser estendido para outros tipos de coloração além da acíclica. Deixam também um problema em aberto:

Conjectura 3.2.2 ((FERTIN *et al.*, 2003)). *Qual o valor exato para $\chi_a(H_d)$, onde H_d é o hipercubo de dimensão d ?*

Por fim, sabemos que valem os limitantes para o hipercubo de dimensão d :

Teorema 3.2.10 ((FERTIN *et al.*, 2003)). *Para todo hipercubo H_d de dimensão $d \geq 1$, temos que*

$$\lceil \frac{d+3}{2} \rceil \leq \chi_a(H_d) \leq d+1.$$

Por fim, buscando achar limitantes para coloração acíclica em vértices, o artigo (FERTIN *et al.*, 2002) utilizam o conceito de *feedback vertex set* ou *FVS* para se obter limitantes para o número cromático acíclico de um grafo. Assim, *feedback vertex set* de um grafo conexo $G = (V, E)$ é definido a partir de um subconjunto dos vértices V' , gerando o grafo G' induzido por $V \setminus V'$. Assim, *MFVS* ou *Minimum Feedback Vertex Set* num grafo G , é um *FVS* de cardinalidade mínima, denotada por $\bar{V}(G)$. Achar um *MFVS* em um grafo G qualquer, é *NP*-difícil. Vários trabalhos foram feitos para desenvolver métodos para achar limites para *MFVS* em famílias de grafos como as grades d -dimensionais, toros e hipercubos. O autor prova o seguinte lema:

Lema 3.2.1 ((FERTIN *et al.*, 2002)). *Seja G um grafo não trivial $|\bar{V}(G)| \geq \chi_a(G)$.*

Implica um limitante superior para o problema de coloração acíclica em vértices.

3.2.1.1 Grafos em superfícies.

No artigo (ALON *et al.*, 1996) os autores trabalham com coloração acíclica relativa à superfícies com diferentes gêneros. Assim, o *número cromático acíclico de uma superfície S* , é o menor inteiro k não-negativo tal que o grafo G possui uma imersão em S e G tem uma k -coloração acíclica.

Resultante do Teorema das Quatro Cores, como visto em (RINGEL; YOUNGS, 1969), lembramos que se a Característica de Euler da superfície é γ , então seu número cromático acíclico é igual a $\theta(\gamma^{\frac{1}{2}})$. Borodin conjecturou que para superfícies diferentes do plano, o número cromático acíclico é igual ao número cromático. Albertson e Berman (ALBERTSON; BERMAN, 1978) provaram que o número cromático acíclico de uma superfície com gênero g é no máximo $4g + 4$.

Teorema 3.2.11 ((ALON *et al.*, 1996)). *O número cromático acíclico da Garrafa de Klein é pelo menos 7.*

Teorema 3.2.12 ((ALON *et al.*, 1996)). *Se G é um grafo simples imerso em uma superfície S com Característica de Euler $-\chi \leq 0$, então $\chi_a(G) \leq 100\gamma^{\frac{4}{7}} + 10000$.*

Estabeleceram também um limitante inferior:

Teorema 3.2.13 ((ALON *et al.*, 1996)). *Para toda superfície com $\gamma \geq 0$, existe um grafo G imerso em uma superfície orientável com Característica de Euler igual a $-\gamma$, tal que $\chi_a(G) \geq \frac{\gamma^{\frac{4}{7}}}{(3\log\gamma)^{\frac{1}{7}}}$.*

3.2.2 Outras classes de grafos.

Como apresentado no artigo (THILAGAVATHI, 2010), definimos o grafo de *Dutch-Windmill*, D_3^m , também conhecido como grafo da amizade. O obtemos a partir de m cópias do ciclo C_3 , com um vértice em comum.

Chamamos de *n-Sunlet*, ou S_n , o grafo com $2n$ vértices obtido a partir do ciclo com n -vértices, construído criando-se uma cópia para cada vértice de C_n , depois disso, cria-se uma aresta entre cada vértice original e sua respectiva cópia. Observe a Figura 14.

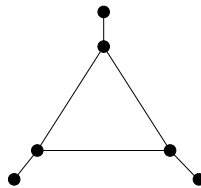


Figura 14 – S_3 .

Um grafo é dito como uma *Coroa* S_n^0 , ou em inglês, *Crown*, o grafo construído a partir de $K_{n,n}$, um emparelhamento perfeito. Observe a Figura 15.

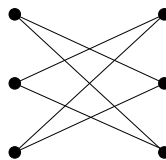


Figura 15 – S_n^0 .

Definimos num grafo G , o *central graph* $C(G)$ como o grafo obtido pela subdivisão de cada aresta de G exatamente uma vez e unindo todos os vértices não adjacentes de G em $C(G)$.

Teorema 3.2.14 ((THILAGAVATHI, 2010)). *Seja D_3^m o grafo de Dutch-Windmill, Então*

$$\chi_a(C(D_3^m)) = 2m = \Delta(G).$$

Teorema 3.2.15 ((THILAGAVATHI, 2010)). *Seja S_n o grafo n -Sunlet, então $\chi_a(C(S_n)) = 2n - 2$.*

Definimos o grafo de Petersen generalizado $P(n, k)$ como o grafo possuindo vértices

$$V(P(n, k)) = \{v_i, v'_i | 0 \leq i \leq n - 1\}$$

e arestas

$$E(P(n, k)) = \{v_i v_{i+1}, v_i v'_i, v'_i v'_{i+k} | 0 \leq i \leq n - 1\}.$$

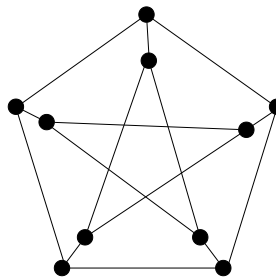


Figura 16 – Grafo de Petersen $P(5, 2)$.

Teorema 3.2.16 ((ZHU *et al.*, 2014)). *$P(n, 1)$ para $n \geq 5$ é aciclicamente 3-colorível.*

Para esses grafos, foi provado que:

Teorema 3.2.17 ((ZHU *et al.*, 2014)). *$P(n, k)$ é aciclicamente 3-colorível, exceto para $P(4, 1)$ e $P(5, 2)$.*

No artigo (ZHU *et al.*, 2014), é deixado para o leitor uma conjectura:

Conjectura 3.2.3 ((ZHU *et al.*, 2014)). *Um grafo G cúbico planar 3-conexo, não é aciclicamente 3-colorível se, e somente se G é um dos três grafos apresentados na Figura 17.*

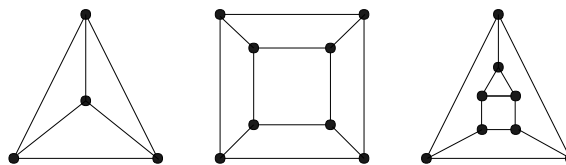


Figura 17 – Os três grafos cúbicos 3-conexos planares sem uma 3-coloração acíclica.

Há muitos trabalhos na literatura sobre produtos de grafos e colorações acíclicas em vértices. Estes resultados são apresentados a seguir.

3.2.3 Produtos de grafos.

Listamos a seguir diversos resultados sobre coloração acíclica em vértices para produtos de grafos. Sejam G e H dois grafos onde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $V(H) = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$. O *produto cartesiano* de G por H definido como $G \square H$ o grafo onde $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ e, dados os vértices $(a, b), (x, y) \in V(G \square H)$, temos que (a, b) é adjacente a (x, y) se, e somente se $ax \in E(G)$ e $b = y$ ou $by \in E(H)$ e $a = x$. No texto, quando for citado produto, considera-se como produto cartesiano.

Teorema 3.2.18 ((JAMISON *et al.*, 2006)). *Seja $G = T_1 \square \dots \square T_n$ o grafo resultante do produto das árvores $T_1, \dots, T_n$. Então*

$$\lceil \frac{n+3}{2} \rceil \leq \chi_a(G) \leq n+1.$$

Como consequência do resultado anterior, os autores obtiveram que:

Teorema 3.2.19 ((JAMISON *et al.*, 2006)). *O número cromático acíclico do produto de duas árvores não triviais é igual a 3 e o de três árvores não triviais é igual a 4.*

Robert E. Jamison e Gretchen L. Matthews apresentaram provas de diversos teoremas e corolários sobre o produto de grafos, investigando também colorações que são próximas à coloração acíclica. Tais resultados são resumidos na Tabela 4. Observamos que P_m é o caminho com $m \geq 2$ vértices.

Tipo de Grafo	Grafo	Número Cromático Acíclico
Grade	$P_n \square P_m$	3
Cilindro	$P_n \square C_m$	3, se $n \neq 4$ 4, caso contrário
Toróide	$C_m \square C_n$ $C_3 \square C_3$	4, se $(m, n) \neq (3, 3)$ 5

Tabela 4 – Número cromático acíclico para o produto cartesiano de grafos.

Em (JAMISON; MATTHEWS, 2005) também foi observado que podemos utilizar o Teorema 3.2.3 para provar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.20. *Sejam $G_1, \dots, G_d$ grafos arbitrários. O número cromático acíclico do produto dos grafos $G_1 \square \dots \square G_d$, satisfaz*

$$\chi_a(G_1 \square \dots \square G_d) > \sum_{i=1}^d \frac{|E(G_i)|}{|V(G_i)|} + 1.$$

No artigo (JAMISON; MATTHEWS, 2008), os autores estudam o produto de grafos completos, $\mathbb{H}(s_1, \dots, s_t) = K_{s_1} \square \dots \square K_{s_t}$, com $2 \leq s_1 \leq s_t$, denominando-o como grafo de Hamming. Observe que da definição de $\mathbb{H}(s_1, \dots, s_t)$ diz-se que o grafo tem dimensão t . Os autores apresentam tabelas para diversos valores do número cromático acíclico para *grafos de Hamming*. Um limitante geral que vale salientar, é o seguinte:

Teorema 3.2.21 ((JAMISON; MATTHEWS, 2008)). *Para $t \geq 3$, temos que*

$$\chi_a(\mathbb{H}(s_1, \dots, s_t)) \leq \binom{t}{2} s_t^2.$$

Define-se *coloração à distância 2* de um grafo G como uma coloração própria na qual quaisquer três vértices pertencentes a um caminho de tamanho 2 são coloridas com cores distintas. Os autores denotaram o número cromático à distância 2 do grafo G , escrevendo-o como $\chi(G^2)$, o menor k inteiro tal que o grafo possui uma coloração à distância 2 com k cores. Relembrando que G^2 de um grafo G é o grafo com a mesma quantidade de vértices de G , mas tem dois vértices adjacentes se, e somente se estes dois vértices tem distância no máximo 2 em G . O número cromático a distância 2 é o número cromático de G^2 .

Um teorema que estabelece uma relação entre o número cromático acíclico e o número *cromático à distância 2* de um grafo é transcrito a seguir.

Teorema 3.2.22 ((JAMISON; MATTHEWS, 2008)). *Para dois grafos quaisquer G e H , vale*

$$\chi_a(G \square H) \leq \chi_a(\chi(G^2), \chi_2(H)),$$

onde $\chi_a(\chi_2(G), \chi_2(H)) = \chi_a(\mathbb{H}(\chi_2(G), \chi_2(H)))$, ou seja, o número cromático acíclico do produto cartesiano de dois grafos completos com $\chi_2(G)$ e $\chi_2(H)$ vértices.

Sejam $G = (V_1, E_1)$ e $H = (V_2, E_2)$ grafos com $V_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$. O *produto direto* $G \times H$ é o grafo com vértices $V(G \times H) = V_1 \times V_2$ e onde o vértice (u_i, v_j) é adjacente a (u_l, v_k) , se u_i é adjacente a u_l em G e v_j é adjacente a v_k em H . Um dos mais notórios problemas em aberto para o produto de grafos é a conjectura de Hedetniemi que afirma que dados dois grafos G e H vale $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Esta conjectura foi parcialmente provada por (EL-ZAHAR; SAUER, 1985), onde o autor prova que o número cromático do produto direto de dois grafos 4 cromáticos é 4. O teorema abaixo mostra que a versão desta conjectura não é válida para χ_a .

Teorema 3.2.23 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Sejam T_1 e T_2 duas árvores. Então*

$$\chi_a(T_1 \times T_2) = \min\{\Delta(T_1) + 1, \Delta(T_2) + 1\}.$$

Teorema 3.2.24 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Seja G um grafo, então*

$$\chi_a(G \times K_2) \geq \sqrt{\frac{\chi_a(G) + 1/8}{2}} + \frac{1}{4}.$$

Provando o seguinte lema, dados quaisquer grafos G e H , temos $\chi_a(G \times H) \geq \min\{\Delta(G) + 1, \Delta(H) + 1\}$. A partir desta afirmação, pode-se concluir que não é possível estabelecermos um limitante superior para $\chi_a(G \times H)$ em função de $\chi_a(G)$ e $\chi_a(H)$. Por outro lado, em (SPACAPAN; TEPEH, 2008) sugere-se um problema ao leitor: seria possível achar um limitante superior apertado para $\chi_a(G \times H)$ em função de $\Delta(G)$ e $\Delta(H)$?

Teorema 3.2.25 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *O número cromático acíclico do produto direto de grafos completos é*

$$\chi_a(K_m \times K_n) = \begin{cases} n, & \text{se } m = 1, \\ 5, & \text{se } m = n = 3, \\ 6, & \text{se } m = 4 \text{ e } n = 3, \\ 2m - 1, & \text{se } m > 4 \text{ e } n = 3 \\ mn - m - 2, & \text{se } m \geq n \geq 4. \end{cases}$$

Além disso, são deixados as seguintes perguntas:

Conjectura 3.2.4 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Seria verdade que para algum $c > 0$, conseguimos $\chi_a(G \times K_2) \geq c\chi_a(G)$?*

Conjectura 3.2.5 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Se G e H são grafos arbitrários, então $\chi_a(G \times H) \geq \min\{\chi_a(G), \chi_a(H)\}$?*

3.2.4 Coloração Acíclica em Arestas.

Nesta subseção, vamos apresentar resultados relativos à coloração acíclica em arestas, dividindo-os por resultados relacionados.

A conjectura apresentada por (ALON *et al.*, 2001), afirma :

Conjectura 3.2.6 ((ALON *et al.*, 2001)). *Seja grafo G com grau máximo $\Delta(G)$. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Alon et al. demonstram que a conjectura é válida se a cintura for suficientemente grande:

Teorema 3.2.26 ((ALON *et al.*, 2001)). *Existe $c > 0$ do qual sendo $g(G)$ a cintura do grafo G , se $g(G) \geq c\Delta(G) \log(\Delta(G))$, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Observamos, como nos resultados para grafos planares, o autor buscando atribuir uma limitação relacionada à cintura do grafo. O resultado anterior foi melhorado, como veremos mais a frente.

Ainda no mesmo trabalho, foi demonstrado um limitante independente da cintura do grafo de entrada:

Teorema 3.2.27 ((ALON *et al.*, 2001)). *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi'_a(G) \leq 64\Delta(G)$.*

Este resultado foi aprimorado por:

Teorema 3.2.28 ((MUTHU *et al.*, 2007a)). *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi'_a(G) \leq \lceil 9.62(\Delta(G) - 1) \rceil$.*

Por fim, foi estabelecido o resultado:

Teorema 3.2.29 ((ESPERET; PARREAU, 2013)). *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi'_a(G) \leq 4\Delta(G)$.*

Agora voltando a trabalhar com grafos com cintura limitada, temos os resultados:

Teorema 3.2.30 ((MUTHU *et al.*, 2007a)). *Se a cintura de um grafo G é pelo menos 9, então $\chi'_a(G) \leq 6\Delta(G)$.*

Teorema 3.2.31 ((NDRECA *et al.*, 2012)). *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G) \geq 3$ e com cintura g , então*

1. *Se $g \geq 5$, então $\chi'_a(G) \leq \lceil 6.42(\Delta(G) - 1) \rceil$.*
2. *Se $g \geq 7$, então $\chi'_a(G) \leq \lceil 5.77(\Delta(G) - 1) \rceil$.*

3. Se $g \geq 53$, então $\chi'_a(G) \leq \lceil 4.52(\Delta(G) - 1) \rceil$.
4. Se $g \geq \lceil 25.84\Delta(G)\log\Delta(G) \cdot (1 + \frac{4.1}{\log\Delta(G)}) \rceil$, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.
5. Por fim, $\chi_a(G) \leq \lceil 6,59\Delta(G)^{\frac{4}{3}} + 3.3\Delta(G) \rceil$

Caso tenhamos um grafo 4-regular sem triângulos temos:

Teorema 3.2.32 ((SHU *et al.*, 2017)). *Seja G um grafo livre de triângulos 4-regular, então $\chi'_a(G) \leq 6$.*

No mesmo ano, obtemos um fortalecimento para 3.2.32:

Teorema 3.2.33 ((WANG *et al.*, 2017)). *Se G é um grafo 4-regular, então $\chi'_a(G) \leq 6$.*

Também encontramos na literatura limitantes relacionados ao maior grau médio:

Teorema 3.2.34 ((BASAVARAJU *et al.*, 2011)). *Para um grafo G com $\Delta(G) \geq 19$ e $\text{mad}(G) \leq \frac{10}{3}$. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G)$.*

Para um grafo *série-paralelo*, temos o resultado:

Teorema 3.2.35 ((HOU *et al.*, 2009)). *Seja G um grafo série-paralelo. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Outro resultado para a coloração r -acíclica:

Teorema 3.2.36 ((ZHANG *et al.*, 2012)). *O índice cromático 4-acíclico de um grafo G série-paralelo é $\max\{2\Delta(G), 3\Delta(G) - 4\}$.*

Aqui reunimos resultados isolados para grafos 2-degenerados e grafos que não possuem componentes K_4 ou $K_{3,3}$.

Teorema 3.2.37 ((MANU; SUNIL, 2012)). *Seja G um grafo 2-degenerado com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Teorema 3.2.38 ((FIAMCÍK, 1984)). *Se $\Delta(G) \leq 3$ e nenhuma componente de G é o grafo completo K_4 ou o grafo bipartido completo $K_{3,3}$, então $\chi'_a(G) \leq 4$. Além disso $\chi'_a(K_4) = \chi'_a(K_{3,3}) = 5$.*

Em seguida, tivemos o resultado:

Teorema 3.2.39 ((ANDERSEN *et al.*, 2012)). *Seja G um grafo conexo diferente de um K_4 ou $K_{3,3}$ com $\Delta(G) \leq 3$. Então $\chi'_a(G) \leq 4$.*

Finalmente, apresentamos a seguir alguns resultados para classes de grafos mais restritas. Há alguns resultados para grafos (quase) bipartidos completos.

Teorema 3.2.40 ((BASAVARAJU; CHANDRAN, 2009b)). $\chi'_a(K_{p,p}) \leq p + 2 = \Delta(G) + 2$, onde p é um número primo ímpar.

Teorema 3.2.41 ((BASAVARAJU; CHANDRAN, 2009b)). Para todo primo $p > 2$, se G é um grafo obtido pela remoção de apenas uma aresta de $K_{p,p}$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1 = p + 1$.

Dizemos que um grafo G é t -totalmente subdividido se ele é obtido de um grafo H reordenando suas arestas caminhos dois a dois internamente disjuntos de tamanho $t + 1$. Quando um grafo G é 1-totalmente subdividido o chamamos simplesmente de totalmente subdividido.

Teorema 3.2.42 ((FIEDOROWICZ; HAŁUSZCZAK, 2012)). Seja G um grafo totalmente subdividido. Então:

$$\chi'_a(G) = \begin{cases} \Delta(G), & \text{se } \Delta(G) \geq 3 \text{ ou } G \text{ é acíclico} \\ 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.2.5 Coloração Acíclica por Listas.

Uma k -árvore é um grafo formado a partir de um grafo completo com $k + 1$ vértices e então adicionamos repetitivamente, de modo que cada vértice v adicionado tem exatamente k vizinhos U dos quais, os $k + 1$ vértices formados por U e v formam uma clique.

Teorema 3.2.43 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). Toda k -árvore é $(k + 1)$ -choosable aciclicamente.

Relativamente a grafos k -degenerados sabemos:

Teorema 3.2.44 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). Todo grafo k degenerado é $(k + 1)$ -choosable aciclicamente.

No mesmo trabalho, os autores reúnem resultados que relacionam grau médio máximo e suas respectivas colorações acíclicas por listas.

Teorema 3.2.45 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). Todo grafo G com $\text{mad}(G) < 8/3$ é 3-choosable aciclicamente.

Teorema 3.2.46 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo G com $\text{mad}(G) < 19/6$ é 4-choosable aciclicamente.*

Teorema 3.2.47 ((MONTASSIER *et al.*, 2006b)). *Todo grafo G com $\text{mad}(G) < 24/7$ é 5-choosable aciclicamente.*

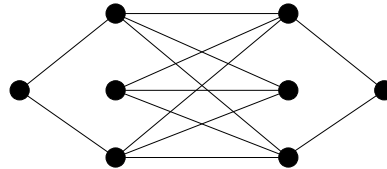


Figura 18 – Grafo no qual $\text{mad}(G) = 13/4$. Além disso, $\chi_a(G) = \chi_a^l(G) = 5$.

O resultado a seguir é um fortalecimento para o resultado que afirma que todo grafo planar com cintura pelo menos 8 é 3-choosable aciclicamente (MONTASSIER *et al.*, 2006b).

Teorema 3.2.48 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Para todo grafo G com $\text{mad}(G) < \frac{14}{5}$ e com cintura pelo menos 7 é 3-choosable aciclicamente.*

Como corolário ao teorema acima, podemos concluir que todo grafo com cintura 7 é 3-choosable aciclicamente. Além disso, é apresentado uma conjectura que afirma:

Conjectura 3.2.7 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Todo grafo planar com cintura $g \geq 5$ é 3-choosable aciclicamente.*

3.2.6 Coloração Acíclica por Listas em Arestas.

Nesta subseção vamos apresentar resultados relativos à coloração acíclica por listas em arestas, dividindo-os por resultados relacionados. Como será visto há uma pequena quantidade de artigos referentes ao tema.

Seja G um grafo. Analogamente, definiremos como $\chi'_{a,l}$ o índice cromático acíclico por listas, o menor k inteiro tal que G possui uma coloração acíclica por listas em arestas de tamanho k .

Sabemos que para grafos periplanares vale:

Teorema 3.2.49 ((SHU *et al.*, 2013)). *Seja G um grafo periplanar com $\Delta(G) \geq 5$, então $\chi'_{a,l} = \Delta(G)$.*

Outro artigo foi escrito com resultados sobre coloração acíclica por listas em arestas. No artigo (HSIN-HAO; KO-WEI, 2012) os autores reúnem diversos resultados referentes a coloração acíclica por listas em arestas. Utilizaremos as definições apresentadas no artigo. Seja G um grafo. Se para $v \in V(G)$ temos $d(v) = 1$, v é dito uma *folha*. Seja $e = uv$ uma aresta do grafo G . Chamaremos de $N_0(e)$ o conjunto $\{u, v\}$. Definimos como Δ_0^G a aplicação $\Delta_0^G = \max\{d_G(x) \mid x \in N_0(e)\}$, definida em $E(G)$. Vemos que $\Delta_0^G \leq \Delta(G)$ para cada aresta $E(G)$. Usaremos $\Delta_0 = \Delta_0^G$, quando não houver ambiguidade.

Teorema 3.2.50 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Se G é um grafo periplanar. Então G é $(\Delta_0 + 1)$ -aresta choosable aciclicamente.*

Teorema 3.2.51 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Seja G um grafo periplanar com no máximo uma face de tamanho 3 ou 4, então G é aciclicamente $\max\{\Delta_0, 3\}$ -aresta choosable aciclicamente.*

Com relação à grafos conexos, temos:

Teorema 3.2.52 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Se G é um grafo conexo com $\Delta \leq 3$ e $\delta(G) \geq 2$, então G é aciclicamente $(\Delta_0 + 1)$ -aresta choosable aciclicamente.*

Seja G um grafo e seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ disjunto do grafo G . Então, a família de grafos G_C é construído como segue. Para cada vértice v_i de C , nós adicionamos no máximo uma nova aresta $v_i v'_i$, onde $v_i \in V(G)$. Qualquer grafo que é construído dessa forma é denominado de *anexar ciclo*.

Chamaremos de $N_1(e) = \{x \mid e = uv, \text{ com } xu \in E(G) \text{ ou } xv \in E(G)\}$. Definimos como Δ_1^G a aplicação $\Delta_1^G = \max\{d_G(x) \mid x \in N_1(e)\}$. Quando não houver perigo de ambiguidade, escrevemos $\Delta_1(e) = \Delta_1^G(e)$.

Assim, com relação à anexar ciclos, tem-se os seguintes resultados:

Teorema 3.2.53 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Seja G_C um grafo formado pelo anexar de um ciclo $C = (v_1, v_2, \dots, v_l)$. Seja L uma lista nas arestas de G_C tal que $|L(e)| \geq \max\{\Delta_1(e) + 1, 5\}$ para cada aresta e que não está em G . se G tem uma L -coloração acíclica em arestas, então G_C também possui.*

Dizemos que H é um *grafo de Halin*, se H é um grafo plano obtido pelo desenho de uma árvore no plano, tal que T não tem vértice de grau 2 e $|V(T)| > 2$, desenhando um ciclo C através de todas as folhas de T . Escrevemos $H = T \cup C$.

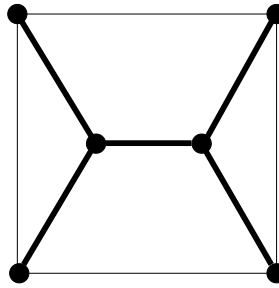


Figura 19 – Um grafo de Halin construído a partir de uma árvore interna ao C_4

Teorema 3.2.54 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Se $G = T \cup C$ é um grafo de Halin, com $G \neq K_4$, Então $\chi'_{a,l}(G) \leq \Delta + 1$.*

Vale ressaltar que o artigo produzido por (HSIN-HAO; KO-WEI, 2012) tem diversos corolários resultantes dos teoremas citados acima. É leitura obrigatória para quem pretende trabalhar com coloração acíclica por listas em arestas. Por fim, em (HSIN-HAO; KO-WEI, 2012) os autores sugerem conjecturas com relação à coloração acíclica por listas em arestas:

Conjectura 3.2.8 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Seja G um grafo. Então $\chi'_{a,l} = \chi'_a(G)$.*

Lembramos que há outra conjectura relativa ao número cromático acíclico em arestas:

Conjectura 3.2.9 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)).

se G é um grafo e $\Delta(G)$ seu grau máximo, $\chi_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. Doravante, os autores propõem que $\chi'_{a,l} \leq \Delta(G) + 2$.

4 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Neste capítulo, vamos apresentar resultados referentes à coloração acíclica do ponto de vista de complexidade computacional. Vale ressaltar que várias demonstrações de limitantes apresentadas do capítulo anterior implicam em algoritmos polinomiais para se colorir um grafo acíclicamente. Este capítulo vai conter resultados explícitos relativos a algoritmos para coloração acíclica.

4.1 Complexidade para Coloração Acíclica em vértices.

Cronologicamente iniciou-se o estudo da complexidade do problema de coloração acíclica num grafo no artigo (COLEMAN; CAI, 1986). Nele, é enunciado o problema de decisão de coloração *cíclica* (CCDP, sigla oriunda do inglês *Cyclic Coloring Decision Problem*) como sendo: dados um inteiro positivo $p \geq 3$ e um grafo arbitrário G , existe uma p -coloração cíclica para os vértices de G ? Para os autores, uma k -coloração própria de um grafo G é dita uma k -coloração *cíclica* se pelo menos 3 cores são usadas em cada ciclo de G . Portanto, note que uma k -coloração cíclica para (COLEMAN; CAI, 1986) é simplesmente uma k -coloração acíclica, como definida aqui e em diversos textos da literatura.

Teorema 4.1.1 ((COLEMAN; CAI, 1986)). *Seja $p \geq 3$ um inteiro positivo qualquer e um grafo arbitrário G , o problema de decidir se G possui uma p -coloração acíclica é NP-completo.*

Demonstração. Inicialmente, devemos mostrar que nosso problema pertence à classe NP . Seja G um grafo qualquer e c uma p -coloração neste grafo. Devemos ser capazes de verificar se c é uma coloração acíclica. Tomamos cada par de classes de cor. Analisamos se este par induz ou não no grafo G uma floresta. Note que é possível concluir esta operação em tempo polinomial e, portanto, o problema pertence a NP .

Na próxima etapa, reduzimos o problema de, dados um inteiro $p \geq 3$ e um grafo G , decidir se G admite uma p -coloração própria dos vértices de G , o qual é bem conhecido como um problema NP -completo (GAREY D.S. JOHNSON, 1976), ao problema de decisão de coloração acíclica.

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer e $p \geq 3$ um inteiro e defina $|V| = n$ e $|E| = m$. Vamos construir um grafo $G' = (V', E')$ a partir de G tal que G admite p -coloração própria se, e somente se, G admite p -coloração acíclica.

Dada uma aresta $e_l = (v_i, v_j) \in E$, definimos um grafo bipartido G'_l , com vértices:

$$\{v_i, v_j, w_1^{(l)}, \dots, w_p^{(l)}\}$$

e com arestas

$$(v_i, w_k^{(l)}), (v_j, w_k^{(l)}), \text{ para cada } k \in \{1, \dots, p\}$$

O grafo G' será obtido de G pela substituição de cada aresta e_l pelo grafo bipartido associado, ou seja:

$$V' = V \cup \{w_k^{(l)} : 1 \leq k \leq p \text{ e } 1 \leq l \leq m\}, E' = \cup_{l=1}^m E(G'_l).$$

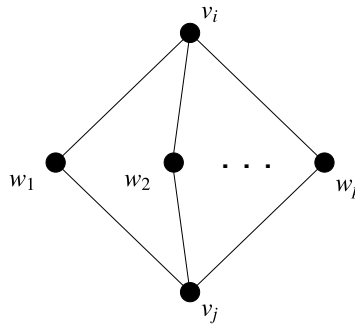


Figura 20 – Processo relativo à aresta $v_i v_j$

Note que a transformação de G em G' ocorre em tempo polinomial.

Vamos mostrar que se G pode ser colorido com p cores através de uma aplicação ϕ , teremos coloração acíclica ϕ' com p cores para o grafo G' . Seja ϕ uma p -coloração própria de G . Para cada vértice $v \in V$, defina $\phi'(v) = \phi(v)$. Além disso, para cada grafo G'_l relativo à aresta $e_l = v_i v_j \in E$, atribua a todos vértices $w_j^{(l)}$, com $j = 1, \dots, p$ uma mesma cor de modo que seja diferente de $\phi'(v_i)$ e $\phi'(v_j)$. Agora mostraremos que a coloração ϕ' é uma p -coloração acíclica em G' . Observe, que por construção, se temos um ciclo C em G' , então C deve conter um caminho $(v_i, w_k^{(l)}, v_j)$, para algum $1 \leq l \leq m$ e $1 \leq k \leq p$ com $v_i v_j \in E$. Observe que ϕ' atribui 3 cores distintas para cada caminho dessa forma e, consequentemente, todo ciclo usa pelo menos 3 cores.

Agora vamos assumir que ϕ' é uma p -coloração acíclica de G' . Vamos definir $\phi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, p\}$ tal que $\phi(v_i) = \phi'(v_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Observe que ϕ é uma p -coloração de G . Devemos mostrar que ϕ é própria. Por absurdo, suponha que $\phi(v_i) = \phi(v_j)$,

para alguma aresta $e_l = v_i, v_j \in E$. Como ϕ' é uma p -coloração acíclica, então ϕ' deve atribuir uma cor diferente para cada w_k^l , $1 \leq k \leq p$, caso contrário haveria um ciclo em G_l' . Isto significa que ϕ' usa pelo menos $p + 1$ cores, contradizendo a hipótese de ϕ' ser uma p -coloração. $\square$

Este resultado foi reforçado, considerando colorações acíclicas para grafos com $\Delta(G) \leq 7$. Provou-se que:

Teorema 4.1.2 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *Seja G tal que $\Delta(G) \leq 7$. Decidir se G possui uma 4-coloração acíclica é NP-completo.*

Em 2005, os autores Fertin e Raspaud apresentam os seguintes resultados:

Teorema 4.1.3 ((FERTIN; RASPAUD, 2005)). *Existe um algoritmo para se colorir aciclicamente qualquer grafo de ordem n e grau máximo $\Delta(G)$ com tempo $O(n\Delta(G)^2)$. O algoritmo usa no máximo:*

1. $\frac{\Delta(G)(\Delta(G)-1)}{2} + 1$ cores para qualquer $\Delta(G) \geq 4$ par.
2. $\frac{\Delta(G)(\Delta(G)-1)}{2}$ cores para qualquer $\Delta(G) \geq 5$ ímpar.

Teorema 4.1.4 ((FERTIN; RASPAUD, 2005)). *Existe um algoritmo para se colorir aciclicamente qualquer grafo de ordem n e grau máximo $\Delta(G) \geq 6$ com tempo $O(n\Delta(G)^2)$. O algoritmo usa no máximo:*

1. $\frac{\Delta(G)(\Delta(G)-1)}{2}$ cores para qualquer $\Delta(G)$ par.
2. $\frac{\Delta(G)(\Delta(G)-1)}{2} - 1$ cores para qualquer $\Delta(G) \geq 5$ ímpar.

Em 2007, vemos que surge o seguinte resultado relativo à inaproximabilidade do problema:

Teorema 4.1.5 ((GEBREMEDHIN *et al.*, 2007)). *Existe um $\varepsilon > 0$ fixo tal que aproximar o número cromático acíclico $\chi_a(G)$ de um grafo G de um fator $O(n^\varepsilon)$ é NP-difícil, onde n é o número de vértices de G .*

Com relação a algoritmos, há um trabalho sobre uma generalização de cografos. Como definido por (BABEL; OLARIU, 1998), um grafo G é do tipo $(q, q-4)$ se nenhum subconjunto de vértices com tamanho no máximo q induz mais do que $q-4$ P_4 's distintos. Assim cografos e grafos P_4 -esparos são, respectivamente, os grafos $(4, 0)$ ou $(4, 0)$ -grafos e $(5, 1)$ ou $(5, 1)$ -grafos. Dizemos que um grafo é P_4 -tidy, se para todo P_4 induzido por $\{u, v, x, y\}$, existe no máximo um vértice z para o qual $\{u, v, x, y, z\}$ induz mais de um P_4 .

A classe de cografos tem a peculiaridade de que o número cromático acíclico coincide com o número cromático estrela, como provado em (LYONS, 2011). Em (CAMPOS *et al.*, 2011), os autores apresentam resultados que vão além de coloração acíclica, com resultados referentes à coloração harmônica e estrela. Para coloração acíclica temos:

Teorema 4.1.6 ((CAMPOS *et al.*, 2011)). *Seja q um inteiro fixo. Existe um algoritmo linear para se obter $\chi_a(G)$, para G sendo um grafo P_4 -tidy ou $(q, q - 4)$ -grafo.*

4.2 Complexidade de Coloração Acíclica em Arestas.

Com relação à coloração acíclica em arestas, temos apenas alguns resultados isolados referentes à complexidade:

Teorema 4.2.1 ((ALON; ZAKS, 2002)). *Seja G um grafo qualquer. Determinar se $\chi'_a(G) \leq 3$ é NP-completo.*

Teorema 4.2.2 ((ALON; ZAKS, 2002)). *Seja G um grafo, $\Delta(G)$ seu grau máximo e g sua cintura. As arestas de G podem ser coloridas acíclicamente em tempo polinomial usando $\Delta(G) + 2$ cores, contanto que se satisfaça $g > c\Delta(G)^3$, onde c é uma constante apropriada.*

Em (SUBRAMANIAN, 2006), é apresentado um algoritmo guloso para encontrar uma coloração acíclica em arestas para um grafo qualquer em tempo polinomial. Tal algoritmo implica em um limitante não-linear, relativamente a $\Delta(G)$.

Teorema 4.2.3 ((SUBRAMANIAN, 2006)). *Sejam G um grafo e $\Delta(G)$, m e n , respectivamente, seu grau máximo, número de arestas e número de vértices. Aplicando o Algoritmo Guloso Acíclico, obtemos uma coloração acíclica em arestas com tempo $O(mn\Delta(G)^2(\log \Delta(G))^2)$, usando-se no máximo $5\Delta(G)(\log \Delta(G) + 2)$ cores.*

Abaixo apresentamos o *Algoritmo Guloso Acíclico*:

Algoritmo 1: Algoritmo Guloso Acíclico(SUBRAMANIAN, 2006)

Entrada: $G = (V, E)$ **Saída:** Coloração Acíclica em Vértices

```
1 Defina  $c = 0, C = \emptyset$ . enquanto existirem arestas não coloridas faça
2   | escolha um vértice  $u$  para o qual o número de arestas não coloridas incidentes a ele é
   | maximalizada
3 fim
4 se existe uma aresta não colorida  $\{u, v\}$  incidente a  $u$  e uma cor  $b \in C$  da qual (i)  $b$  não é
   | usada para qualquer das arestas incidentes a  $u$  ou  $v$  e (ii) colorindo  $\{u, v\}$  com a cor  $b$ 
   | não produz um ciclo bicolorido então
5   | a cor  $C(\{u, v\}) = a$ , onde  $a$  é a menor cor dessas cores possíveis  $b$ 
6 fim
7 senão
8   | escolha uma aresta não colorida  $\{u, v\}$  incidente a  $u$  e introduza uma nova cor  $c + 1$  e
   | defina  $C(\{u, v\}) = c + 1, C = C \cup \{c + 1\}$  e  $c = c + 1$ 
9 fim
```

5 CONCLUSÃO

5.1 Considerações.

Neste trabalho, apresentamos o estado da arte relativa à coloração acíclica. Esperamos que nosso texto seja valioso para futuros trabalhos e que possa ser uma referência à pesquisa. Esta síntese de resultados é feita em língua portuguesa, o que acreditamos não ter sido feito até então, mesmo para outras línguas. Pretendemos dar sequência ao trabalho e apresentar contribuições num futuro breve.

No Capítulo 3, apresentamos limitantes para o problema de Coloração Acíclica. Os resultados, em sua maior parte, propõem limitantes para grafos planares com cintura restrita. Deixamos os resultados que se relacionam encadeados, de forma que favoreça a leitura e sua aplicação para pesquisa.

No Capítulo 4, são introduzidos resultados referentes à complexidade deste problema de colorir grafos com uma coloração acíclica. Apresentamos os resultados de *NP*-completude e os algoritmos de forma explícita. Analogamente, tomamos cuidado para que o texto favoreça a aplicação à pesquisa.

Assim, é fundamental nestas palavras finais indicarmos possíveis caminhos para que sejam desenvolvidos novos resultados. Portanto, separamos algumas das perguntas em aberto na seção a seguir.

5.2 Perguntas.

Separamos as perguntas por tipos de coloração, deixando-as em ordem cronológica.

5.2.1 Coloração Acíclica em Vértices.

Os autores em (FERTIN *et al.*, 2003) questionam:

Conjectura 5.2.1 ((FERTIN *et al.*, 2003)). *Qual o valor exato para $\chi_a(H_d)$, onde H_d é o hipercubo de dimensão d ?*

Existem algumas perguntas em aberto, como sugerido em (SPACAPAN; TEPEH, 2008) ao leitor:

Conjectura 5.2.2 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Seria possível achar um limitante superior apertado para $\chi_a(G \times H)$ em função de $\Delta(G)\Delta(H)$?*

Além disso, temos:

Conjectura 5.2.3 ((SPACAPAN; TEPEH, 2008)). *Para algum $c > 0$, conseguimos $\chi_a(G \times K_2) \geq c\chi_a(G)$?*

Sabemos por (YADAV *et al.*, 2011) que grafos com grau máximo $\Delta(G) = 5$ podem ser coloridos aciclicamente com 8 cores, um aprimoramento ao resultado apresentado por (FERTIN; RASPAUD, 2008). Apesar disto, com relação a limitantes inferiores, sabe-se que existe grafo G com grau máximo igual a 5 onde tem-se $\chi_a(G) = 6$, por exemplo o K_6 . Observe que existe uma lacuna entre estes dois limitantes. (MONDAL *et al.*, 2011) no fim de seu artigo, sugerem caminhos para dar continuidade ao seu trabalho, buscando colorações acíclicas para grafos planos com poucos vértices de divisão:

Conjectura 5.2.4 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *qual seria a constante positiva mínima c tal que todo grafo planar triangulado com n vértices com no máximo cn vértices de divisão tem uma k -coloração acíclica, para $k \in \{3, 4\}$?*

Já sabemos que testar se um grafo pode ser colorido aciclicamente com 4 cores é NP -completo para grafos com o grau máximo 7, como visto no Teorema 4.1.2.

Conjectura 5.2.5 ((MONDAL *et al.*, 2011)). *Podemos obter uma 4-coloração acíclica para grafos G com $3 < \Delta(G) < 7$?*

No artigo (ZHU *et al.*, 2014), existe uma conjectura que afirma:

Conjectura 5.2.6 ((ZHU *et al.*, 2014)). *Um grafo G cúbico planar 3-conexo, não é aciclicamente 3-colorível se e, somente se G é um dos três grafos apresentados na Figura 21.*

5.2.2 Coloração Acíclica em Arestas.

Com relação à coloração acíclica em arestas, a conjectura de (ALON *et al.*, 2001):

Conjectura 5.2.7 ((ALON *et al.*, 2001)). *Seja G um grafo. Então seu número cromático acíclico em aresta é $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

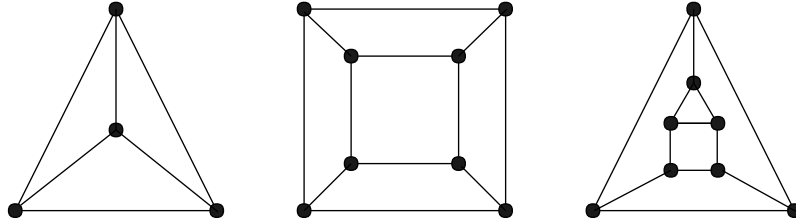


Figura 21 – Os três grafos cúbicos planares 3-conexos sem uma 3-coloração acíclica.

Acredita-se que a afirmativa seja verdadeira, em consequência de que vários resultados parciais existentes na literatura.

Foi estudada também uma generalização do problema de coloração acíclica em arestas denominada como r -acíclica, já apresentada neste texto. Zhang et al., em (ZHANG *et al.*, 2012) conjecturam:

Conjectura 5.2.8 ((ZHANG *et al.*, 2012)). *O índice cromático 4-acíclico de todo grafo série-paralelo G é no máximo $2\Delta(G)$.*

5.2.3 Coloração Acíclica por Listas em Vértices.

Quando falamos em coloração acíclica por listas num grafo, (BORODIN *et al.*, 2010) apresentam:

Conjectura 5.2.9 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Todo grafo planar G com cintura $g \geq 5$ é aciclicamente 3-choosable.*

Outra conjectura deixada por (BORODIN; IVANOVA, 2010):

Conjectura 5.2.10 ((BORODIN *et al.*, 2010)). *Todo grafo planar G sem ciclos adjacentes de tamanho máximo 4 é aciclicamente 4-choosable. Além disso, conjecturaram também que se G não tem ciclos adjacentes de tamanho máximo 6, então G é aciclicamente 3-choosable.*

5.2.4 *Coloração Acíclica por Listas em Arestas.*

Inicialmente devemos observar que há uma diminuta quantidade de artigos referentes à coloração acíclica por listas em arestas. Sua quase totalidade encontra-se em (HSIN-HAO; KO-WEI, 2012). No mesmo artigo, os autores sugerem conjecturas com relação à coloração acíclica por listas em arestas:

Conjectura 5.2.11 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *O número cromático acíclico por listas em arestas coincide com o número cromático acíclico por arestas, explicitamente: seja G um grafo, então $\chi'_{a,l} = \chi'_a(G)$.*

Conjectura 5.2.12 ((HSIN-HAO; KO-WEI, 2012)). *Se G é um grafo e $\Delta(G)$ seu grau máximo. Então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. Doravante, os autores propõem que $\chi'_{a,l} \leq \Delta(G) + 2$.*

REFERÊNCIAS

- ALBERTSON, M. O.; BERMAN, D. M. An acyclic analogue to heawood's theorem. **Glasgow Mathematical Journal**, Cambridge University Press, v. 19, n. 2, p. 163–166, 1978.
- ALON; ZAKS. Algorithmic aspects of acyclic edge colorings. **Algorithmica**, v. 32, n. 4, p. 611–614, 2002.
- ALON, C. M. B. R. N. Acyclic coloring of graphs. **Random Structures & Algorithms**, v. 2, n. 3, p. 277–288, 1991.
- ALON, N.; MOHAR, B.; SANDERS, D. P. On acyclic colorings of graphs on surfaces. **Israel Journal of Mathematics**, v. 94, n. 1, p. 273–283, 1996.
- ALON, N.; SUDAKOV, B.; ZAKS, A. Acyclic edge colorings of graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 37, n. 3, p. 157–167, 2001.
- ANDERSEN, L. D.; MáCAJOVÁ, E.; MAZÁK, J. Optimal acyclic edge-coloring of cubic graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 71, p. 353–364, 2012.
- APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. part i: Discharging. **Illinois J. Math.**, v. 21, n. 3, p. 429–490, 1977.
- BABEL, L.; OLARIU, S. On the structure of graphs with few p4s. **Discrete Applied Mathematics**, v. 84, n. 1, p. 1 – 13, 1998.
- BASAVARAJU, M.; CHANDRAN, L.; COHEN, N.; HAVET, F.; MÜLLER, T. Acyclic edge-coloring of planar graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, v. 25, n. 2, p. 463–478, 2011.
- BASAVARAJU, M.; CHANDRAN, L. S. Acyclic edge coloring of graphs with maximum degree 4. **Journal of Graph Theory**, v. 61, n. 3, p. 192–209, 2009.
- BASAVARAJU, M.; CHANDRAN, L. S. A note on acyclic edge coloring of complete bipartite graphs. **Discrete Mathematics**, v. 309, n. 13, p. 4646 – 4648, 2009.
- BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory**. 1st. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- BORODIN, A. V. K. e. D. R. W. O. V. Acyclic colourings of planar graphs with large girth. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 60, n. 2, p. 344 – 352, 1999.
- BORODIN, O. On acyclic colorings of planar graphs. **Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 211 – 236, 1979.
- BORODIN, O.; CHEN, M.; IVANOVA, A.; RASPAUD, A. Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7. **Discrete Mathematics**, v. 310, n. 17, p. 2426 – 2434, 2010.
- BORODIN, O.; KOSTOCHKA, A.; RASPAUD, A.; SOPENA, E. Acyclic colouring of 1-planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 114, n. 1, p. 29 – 41, 2001.
- BORODIN, O. V.; FLAASS, D. G. F.-D.; KOSTOCHKA, A. V.; RASPAUD, A.; SOPENA, E. Acyclic list 7-coloring of planar graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 40, n. 2, p. 83–90, 2002.

- BORODIN, O. V.; IVANOVA, A. O. Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles. **Siberian Mathematical Journal**, v. 52, n. 3, p. 411–425, 2007.
- BORODIN, O. V.; IVANOVA, A. O. Acyclic 5-choosability of planar graphs without adjacent short cycles. **Journal of Graph Theory**, v. 68, n. 2, p. 169–176, 2010.
- BORODIN, O. V.; IVANOVA, A. O. Acyclic 4-choosability of planar graphs with no 4- and 5-cycles. **Journal of Graph Theory**, v. 72, n. 4, p. 374–397, 2012.
- BOROWIECKI, M.; FIEDOROWICZ, A. Acyclic edge colouring of planar graphs without short cycles. **Discrete Mathematics**, v. 310, n. 9, p. 1445 – 1455, 2010.
- CAMPOS, V.; SALES, C. L.; MAIA, K.; MARTINS, N.; SAMPAIO, R. Restricted coloring problems on graphs with few p_4 's. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 37, p. 57 – 62, 2011.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic Graph Theory**. 1st. ed. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2008.
- CHEN, J.; WANG, T.; ZHANG, H. Acyclic chromatic index of triangle-free 1-planar graphs. **Graphs and Combinatorics**, v. 33, n. 4, p. 859–868, 2017.
- CHEN, M.; RASPAUD, A. On acyclic 4-choosability of planar graphs without short cycles. **Discrete Mathematics**, v. 310, n. 15, p. 2113 – 2118, 2010.
- CHEN, M.; WANG, W. Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles. **Discrete Mathematics**, v. 308, n. 24, p. 6216 – 6225, 2008.
- COLEMAN, T.; CAI, J. The cyclic coloring problem and estimation of sparse hessian matrices. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, v. 7, n. 2, p. 221–235, 1986.
- DUJMOVIC, V.; MORIN, P.; WOOD, D. Layout of graphs with bounded tree-width. **SIAM Journal on Computing**, v. 34, n. 3, p. 553–579, 2005.
- EL-ZAHAR, M.; SAUER, N. The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4. **Combinatorica**, v. 5, n. 2, p. 121–126, 1985.
- ERDŐS, P.; LOVÁSZ, L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. **Coll Math Soc J Bolyai**, v. 10, p. 609–627, 1974.
- ESPERET, L.; PARREAU, A. Acyclic edge-coloring using entropy compression. **European Journal of Combinatorics**, v. 34, n. 6, p. 1019 – 1027, 2013.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, v. 8, p. 128–140, 1736.
- FERTIN, G.; GODARD, E.; RASPAUD, A. Minimum feedback vertex set and acyclic coloring. **Information Processing Letters**, Elsevier, v. 84, n. 3, p. 131–139, 2002.
- FERTIN, G.; GODARD, E.; RASPAUD, A. Acyclic and k-distance coloring of the grid. **Information Processing Letters**, v. 87, n. 1, p. 51 – 58, 2003.
- FERTIN, G.; RASPAUD, A. Acyclic coloring of graphs of maximum degree δ . In: **2005 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05)**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 389–396.

- FERTIN, G.; RASPAUD, A. Acyclic coloring of graphs of maximum degree five: Nine colors are enough. **Information Processing Letters**, v. 105, n. 2, p. 65 – 72, 2008.
- FIAMCÍK, J. Acyclic chromatic index of a subdivided graph. **Archivum Mathematicum**, v. 20, p. 69–82, 1984.
- FIEDOROWICZ, A.; HAŁUSZCZAK, M. Acyclic chromatic indices of fully subdivided graphs. **Information Processing Letters**, v. 112, n. 13, p. 557 – 561, 2012.
- GAREY D.S. JOHNSON, L. S. M. Some simplified np-complete graph problems. **Theoretical Computer Science**, v. 1, n. 3, p. 237–267, 1976.
- GEBREMEDHIN, A. H.; TARAFDAR, A.; MANNE, F.; POTHEN, A. New acyclic and star coloring algorithms with application to computing hessians. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 29, n. 3, p. 1042–1072, 2007.
- GEBREMEDHIN, A. H.; TARAFDAR, A.; POTHEN, A.; WALTHER, A. Efficient computation of sparse hessians using coloring and automatic differentiation. **INFORMS Journal on Computing**, v. 21, n. 2, p. 209–223, 2009.
- GRÜNBAUM, B. Acyclic colorings of planar graphs. **Israel Journal of Mathematics**, v. 14, n. 4, p. 390–408, Dec 1973.
- GUAN, D.; XUDING, Z. A coloring problem for weighted graphs. **Information Processing Letters**, v. 61, n. 2, p. 77 – 81, 1997.
- HOCQUARD, H. Graphs with maximum degree 6 are acyclically 11-colorable. **Information Processing Letters**, v. 111, n. 15, p. 748 – 753, 2011.
- HOCQUARD, H.; MONTASSIER, M. Acyclic choosability of planar graphs: a steinberg like approach. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 34, p. 199 – 205, 2009.
- HOU, J.; LIU, G.; WU, J. Acyclic edge coloring of planar graphs without small cycles. **Graphs and Combinatorics**, v. 28, n. 2, p. 215–226, 2012.
- HOU, J.; WANG, W.; ZHANG, X. Acyclic edge coloring of planar graphs with girth at least 5. **Discrete Applied Mathematics**, v. 161, n. 18, p. 2958 – 2967, 2013.
- HOU, J.; WU, J.; LIU, G.; LIU, B. Acyclic edge colorings of planar graphs and series parallel graphs. **Science in China Series A: Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 605–616, 2009.
- HSIN-HAO, L.; KO-WEI, L. Acyclic list edge coloring of graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 72, n. 3, p. 247–266, 2012.
- HUDÁK, D.; KARDOŠ, F.; LUŽAR, B.; SOTÁK, R.; ŠKREKOVSKI, R. Acyclic edge coloring of planar graphs with δ colors. **Discrete Applied Mathematics**, v. 160, n. 9, p. 1356–1368, 2012.
- JAMISON, R.; MATTHEWS, G. L. Acyclic colorings of products of cycles. **Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications**, v. 54, p. 1–11, 2005.
- JAMISON, R. E.; MATTHEWS, G. L. On the acyclic chromatic number of hamming graphs. **Graphs and Combinatorics**, v. 24, n. 4, p. 349–360, 2008.

JAMISON, R. E.; MATTHEWS, G. L.; VILLALPANDO, J. Acyclic colorings of products of trees. **Information Processing Letters**, v. 99, n. 1, p. 7 – 12, 2006.

KOSTOCHKA, A.; MEL'NIKOV, L. Note to the paper of grünbaum on acyclic colorings. **Discrete Mathematics**, v. 14, n. 4, p. 403 – 406, 1976.

KRATOCHVÍL, J.; TUZA, Z.; VOIGT, M. On the b-chromatic number of graphs. In: **Graph-Theoretic Concepts in Computer Science**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 310–320.

LYONS, A. Acyclic and star colorings of cographs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 159, n. 16, p. 1842 – 1850, 2011.

MANU, B.; SUNIL, C. L. Acyclic edge coloring of 2-degenerate graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 69, n. 1, p. 1–27, 2012.

MONDAL, D.; NISHAT, R. I.; RAHMAN, S. Acyclic coloring with few division vertices. **Journal of Discrete Algorithms**, v. 23, p. 42 – 53, 2013.

MONDAL, D.; NISHAT, R. I.; WHITESIDES, S.; RAHMAN, M. S. Acyclic colorings of graph subdivisions. In: ILIOPOULOS, C. S.; SMYTH, W. F. (Ed.). **Combinatorial Algorithms**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 247–260.

MONTASSIER, M. Acyclic 4-choosability of planar graphs with girth at least 5. In: _____. **Graph Theory in Paris: Proceedings of a Conference in Memory of Claude Berge**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 299–310.

MONTASSIER, M. .; RASPAUD, A.; WANG, W. Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths. In: **Topics in Discrete Mathematics**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 473–491.

MONTASSIER, M.; OCHEM, P.; RASPAUD, A. On the acyclic choosability of graphs. **Journal of Graph Theory**, v. 51, p. 281–300, 2006.

MONTASSIER, M.; RASPAUD, A.; WANG, W. Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles. **Journal of Graph Theory**, v. 54, n. 3, p. 245–260, 2007.

MUTHU, R.; NARAYANAN, N.; SUBRAMANIAN, C. Improved bounds on acyclic edge colouring. **Discrete Mathematics**, v. 307, n. 23, p. 3063 – 3069, 2007.

MUTHU, R.; NARAYANAN, N.; SUBRAMANIAN, C. R. Acyclic edge colouring of outerplanar graphs. In: KAO, M.-Y.; LI, X.-Y. (Ed.). **Algorithmic Aspects in Information and Management**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 144–152.

NDRECA, S.; PROCACCI, A.; SCOPPOLA, B. Improved bounds on coloring of graphs. **European Journal of Combinatorics**, v. 33, n. 4, p. 592 – 609, 2012.

QIAOJUN, S.; WEIFAN, W.; YIQIAO, W. Acyclic chromatic indices of planar graphs with girth at least 4. **Journal of Graph Theory**, v. 73, n. 4, p. 386–399, 2012.

RINGEL, G.; YOUNGS, J. Solution of the heawood map-coloring problem—case 8. **Journal of Combinatorial Theory**, v. 7, n. 4, p. 353 – 363, 1969.

- SHU, Q.; WANG, Y.; MA, Y.; WANG, W. Acyclic edge coloring of 4-regular graphs without 3-cycles. **Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society**, v. 42, p. 285–296, 2017.
- SHU, Q.; WANG, Y.; WANG, W. Acyclic list edge coloring of outerplanar graphs. **Discrete Mathematics**, v. 313, n. 3, p. 301 – 311, 2013.
- SKULRATTANAKULCHAI, S. Acyclic colorings of subcubic graphs. **Information Processing Letters**, v. 92, n. 4, p. 161–167, 2004.
- SONG, W. Y.; MIAO, L. Y. Acyclic edge coloring of triangle-free 1-planar graphs. **Acta Mathematica Sinica, English Series**, v. 31, n. 10, p. 1563–1570, 2015.
- SPACAPAN, S.; TEPEH, A. On acyclic colorings of direct products. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, v. 28, p. 323–333, 2008.
- SUBRAMANIAN, C. Analysis of a heuristic for acyclic edge colouring. **Information Processing Letters**, v. 99, n. 6, p. 227 – 229, 2006.
- THILAGAVATHI, S. B. A note on acyclic colouring of central graphs. **International Journal of Computer Applications**, v. 7, n. 2, p. 28–30, 2010.
- THOMASSEN, C. Every planar graph is 5-choosable. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 62, n. 1, p. 180 – 181, 1994.
- VOIGT, M. List colourings of planar graphs. **Discrete Mathematics**, v. 120, n. 1, p. 215 – 219, 1993.
- WAN, M.; XU, B. Acyclic edge coloring of planar graphs without adjacent cycles. **Science China Mathematics**, v. 57, n. 2, p. 433–442, 2014.
- WANG, T.; ZHANG, Y. Acyclic edge coloring of graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 167, p. 290 – 303, 2014.
- WANG, T.; ZHANG, Y. Further result on acyclic chromatic index of planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 201, p. 228 – 247, 2016.
- WANG, W.; BU, Y.; MONTASSIER, M.; RASPAUD, A. On backbone coloring of graphs. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 23, n. 1, p. 79–93, 2012.
- WANG, W.; GE, Z.; NULL, C. M. Acyclic 6-choosability of planar graphs without adjacent short cycles. **SCIENCE CHINA Mathematics**, v. 57, n. 1, p. 197–209, 2014.
- WANG, W.; MA, Y.; SHU, Q.; WANG, Y. Acyclic edge coloring of 4-regular graphs (ii). **Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society**, p. 1–8, 2017.
- WANG, Y.; SHENG, P. Improved upper bound for acyclic chromatic index of planar graphs without 4-cycles. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 27, n. 3, p. 519–529, 2014.
- WANG, Y.; SHU, Q.; WANG, W. The acyclic edge coloring of planar graphs without a 3-cycle adjacent to a 4-cycle. **Discrete Applied Mathematics**, v. 161, n. 16, p. 2687 – 2694, 2013.
- WANG, Y.; SHU, Q.; WU, J.-L.; ZHANG, W. Acyclic edge coloring of planar graphs without a 3-cycle adjacent to a 6-cycle. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 28, n. 3, p. 692–715, 2014.

WEGNER, G. Note on a paper of b. grünbaum on acyclic colorings. **Israel Journal of Mathematics**, v. 14, n. 4, p. 409–412, 1973.

WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.

YADAV, K.; VARAGANI, S.; KOTHAPALLI, K.; VENKAIAH, V. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 5. **Discrete Mathematics**, v. 311, n. 5, p. 342 – 348, 2011.

YU, D.; HOU, J.; LIU, G.; LIU, B.; XU, L. Acyclic edge coloring of planar graphs with large girth. **Theoretical Computer Science**, v. 410, n. 47, p. 5196 – 5200, 2009.

ZHANG, H.; XU, B. Acyclic 5-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor chordal 6-cycles. **Discrete Mathematics**, v. 309, n. 20, p. 6087 – 6091, 2009.

ZHANG, X.; WANG, G.; YU, Y.; LI, J.; LIU, G. On r -acyclic edge colorings of planar graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 160, n. 13, p. 2048 – 2053, 2012.

ZHAO, Y.; MIAO, L.; PANG, S.; SONG, W. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree six. **Discrete Mathematics**, v. 325, p. 17–22, 2014.

ZHU, E.; LI, Z.; SHAO, Z.; XU, J.; LIU, C. Acyclic 3-coloring of generalized petersen graphs. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 31, n. 2, p. 902–911, 2014.

ZHU, E.; LI, Z.; SHAO, Z.; XU, J. Acyclically 4-colorable triangulations. **Information Processing Letters**, v. 116, n. 6, p. 401 – 408, 2016.

ZHU, E.; LI, Z.; SHAO, Z.; XU, J. On acyclically 4-colorable maximal planar graphs. **Applied Mathematics and Computation**, v. 329, p. 402 – 407, 2018.