



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AMILCAR MONTALBAN SAYAGO

A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON E
APLICAÇÕES

FORTALEZA

2019

AMILCAR MONTALBAN SAYAGO

A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON E
APLICACÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S283m Sayago, Amilcar Montalbán.
A massa em termos dos tensores de Einstein e Newton e aplicações / Amilcar Montalbán Sayago. – 2019.
41 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Massa. 2. Centro de massa. 3. Tensores de Einstein e Newton. 4. Gráficos Euclidianos. 5. Teorema da massa positiva.. I. Título.

CDD 510

AMILCAR MONTALBAN SAYAGO

A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON E
APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria.

Aprovada em: 26 / 03 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luquesio Petrola de Melo Jorge
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Este trabalho é dedicado a meus amados pais
Nicolasa Sayago e Aparicio Montalbán.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à minha família, meus amados pais Nicolasa Sayago e Aparicio Montalbán, por todo amor, carinho, conselhos, pelo esforço para oferecer-me educação de qualidade e pelo apoio incondicional em todas as minhas escolhas; sem vocês nada disso seria possível. Aos meus irmãos Marcos Antonio, Juan Carlos e Luz Herlinda.

À minha namorada Hilda Huamán, por entender e suportar todo esse tempo distante e pela força nos momentos mais complicados durante o curso.

Ao meu orientador Frederico Vale Girão, pela sua orientação, motivação nos momentos difíceis, ajuda e colaboração para esta tese. Agradeço pela sua paciência e disponibilidade para as reuniões e seminários. Levo comigo a certeza de ter tido uma excelente formação sob sua orientação para a construção desse trabalho .

Ao professor Levi Lopes de Lima, pela orientação, conversas e discussões frutíferas que foram essenciais para a construção desse trabalho.

Aos professores Abdênago Alves de Barros, Jonatan Floriano da Silva, Luquesio Petrola de Melo Jorge e Diego de Sousa Rodrigues por terem aceitado participar da banca.

Ao corpo docente da Pós-Graduação em Matemática da UFC pelos conhecimentos repassados, dedicação na pesquisa, no ensino da matemática e pela gentileza que me deram.

Aos meus amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos), Adam Oliveira da Silva, Alexandre de Sousa, Antonio Aguiar, Antônio Grangeiro, Davi Ribeiro, Diego da Silva, Diego Sousa, Diego Eloi, Eddygledson Gama (Nino), Elisafã Braga, Elzimar Rufino, Emanuel Viana, Ernani de Sousa, Fabrício Oliveira, Fagner, Francisca Damiana, Halysen Baltazar, Israel Evangelista, Janielly, Jocel Faustino, J. Tiago Cruz e sua esposa Leidmar Vieira, José Danuso, Léo Ivo, Marcos Raniere, Neilha Marcia, Renivaldo Sena, Tiarlos Cruz, Wanderley Pereira e Wesley Vieira. Muito obrigado por esses anos de convivência, ajuda, pela força e pelas conversas.

À Andrea Dantas e à Jessyca Soares, secretárias da Pós-Graduação em Matemática da UFC, por toda competência e agilidade.

À Rocilda pela revisão deste trabalho e sugestões.

À CNPq pelo imenso apoio financeiro concedido a mim ao longo do doutoramento, sem o qual haveria sido muito difícil minha estadia em Fortaleza.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Mostra-se que a massa e o centro de massa de uma variedade riemanniana assintoticamente plana com bordo não compacto podem ser calculados como o limite, quando r vai para infinito, da integral, sobre a esfera coordenada de raio r , de expressões em termos dos tensores de Einstein e Newton da variedade. A expressão obtida para a massa é então usada para se obter uma nova demonstração, para gráficos euclidianos com bordo não compacto, do teorema da massa positiva e da desigualdade de Penrose.

Palavras-chave: Massa. Centro de massa. Tensores de Einstein e Newton. Gráficos Euclidianos. Teorema da massa positiva. Desigualdade de Penrose.

ABSTRACT

It is shown that the mass and the center of mass of an asymptotically flat Riemannian manifold with noncompact boundary can be computed as the limit, as r goes to infinity, of the integral, over the coordinate sphere of radius r , of expressions in terms of the Einstein and Newton tensors of the manifold. The expression obtained for the mass is then used to give a new proof, for noncompact Euclidean graphs, of the positive mass theorem and the Penrose inequality.

Keywords: Mass. Center of mass. Einstein and Newton tensors. Euclidean graphs. Positive mass theorem. Penrose inequality.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON	19
2.1	Prova dos Teoremas 1.2 e 1.3	23
3	APLICAÇÃO DA FÓRMULA PARA A MASSA EM TER- MOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON	29
3.1	Resultados auxiliares	29
3.2	Prova do Teorema 1.7	33
3.3	Desigualdade de Penrose	35
4	CONCLUSÃO	36
	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade riemanniana completa, orientada e suave. Dizemos que (M, g) é assintoticamente plana de ordem τ (com um fim) se existem um subconjunto compacto K de M e um difeomorfismo (chamado carta no infinito) $\Psi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r_0}(0)}$, para algum $r_0 > 0$, introduzindo coordenadas em $M \setminus K$, digamos $x = (x_1, \dots, x_n)$, de forma que, nessas coordenadas,

$$(g_{ij} - \delta_{ij}) + r g_{ij,k} + r^2 g_{ij,kl} = O(r^{-\tau}), \quad (1.1)$$

onde os g_{ij} 's são os coeficientes de g com respeito a x ,

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}, g_{ij,kl} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

e $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Observação 1.1. Ao longo do texto, abusaremos notação e denotaremos uma métrica em $M \setminus K$ e seu empurrado (*push forward* em inglês) por Ψ para $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r_0}(0)}$ pelo mesmo símbolo.

Sejam ω_{n-1} o volume da esfera unitária de dimensão $(n-1)$,

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}},$$

S_r a esfera coordenada euclidiana de raio r , $d\text{vol}_{S_r}^\delta$ a forma de volume de S_r (com respeito à métrica euclidiana δ), e $\nu = r^{-1}x$ o campo unitário normal (também com respeito a δ) a S_r que aponta para fora. Se $\tau > (n-2)/2$ e a curvatura escalar de (M, g) é integrável, então o limite

$$\mathbf{m}_g = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j d\text{vol}_{S_r}^\delta, \quad (1.2)$$

existe, é finito, e é um invariante geométrico, isto é, dois sistemas de coordenadas satisfazendo (1.1) fornecem o mesmo valor para (1.2) por BARTNIK (1986); CHRUSCIEL (1986a). O invariante \mathbf{m}_g , que foi introduzido por ARNOWITT, DESER, and MISNER (1960), e é chamado de *massa ADM* de (M, g) , provou-se extremamente útil em Análise Geométrica; ele atuou de forma crucial, por exemplo, na solução do famoso *problema de Yamabe* por SCHOEN (1984) (veja também LEE and PARKER (1987)).

Observação 1.2. Em geral, usaremos sobrescritos para indicar em relação a qual métrica um certo objeto está sendo considerado, mas quando não houver risco de confusão, poderemos omitir tal sobrescrito.

A expressão (1.2), por ser escrita em termos das derivadas da métrica até a

primeira ordem, obscurece o significado geométrico da mesma. É desejável, portanto, que a massa seja expressa em termos de objetos geométricos mais fundamentais.

Denotamos por Ric^g e R^g , respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar de (M, g) . O tensor

$$E^g = \text{Ric}^g - \frac{1}{2}R^g g \quad (1.3)$$

é conhecido como tensor de Einstein de (M, g) . Sabe-se que a massa ADM de (M, g) pode também ser calculada da seguinte forma por ASHTEKAR and HANSEN (1978); CHRUSCIEL (1986b):

$$\mathbf{m}_g = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_r}^g, \quad (1.4)$$

onde

$$d_n = \frac{1}{(n-1)(2-n)\omega_{n-1}},$$

μ^g é o campo unitário normal (com respeito a g) a S_r e que aponta para fora, e X é o campo

$$x^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.5)$$

o qual é Killing conforme com respeito a δ . Formula (1.4) também foi sugerida por Schoen (cf. HUANG (2009); CORVINO and POLLACK (2011)).

Suponha que $\tau > (n-2)/2$, que a curvatura escalar de (M, g) é integrável, e que $\mathbf{m}_g \neq 0$. Suponha também que as seguintes condições, conhecidas como *condições de Regge-Teitelboim*, e que chamaremos resumidamente de condições RT, são satisfeitas:

$$|g_{ij}^{\text{odd}}| = O(r^{-\tau-1}), \quad |g_{ij,k}^{\text{odd}}| = O(r^{-\tau-2}) \quad \text{e} \quad |R_g^{\text{odd}}| = O(r^{-2\tau-2}), \quad (1.6)$$

onde f^{odd} denota a parte ímpar da função f com respeito às coordenadas introduzidas pela carta no infinito. Sob essas condições, o limite

$$\mathbf{c}_g^\alpha = \frac{c_n}{\mathbf{m}_g} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} [x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j - (g_{i\alpha} \nu^i - g_{ii} \nu^\alpha)] d\text{vol}_{S_r}^\delta, \quad (1.7)$$

existe e é finito, para cada $\alpha \in \{1, \dots, n\}$. Além disso, o vetor

$$\mathbf{c}_g = (\mathbf{c}_g^1, \dots, \mathbf{c}_g^n) \quad (1.8)$$

é independente da carta no infinito (a menos de ações por isometrias euclidianas) e é denominado o centro de massa de (M, g) . O centro de massa \mathbf{c}_g foi introduzido por REGGE and TEITELBOIM (1974b,a), e por BEIG and Ó MURCHADHA (1987) (vide CORVINO (2000) e CORVINO and SCHOEN (2006)).

Semelhantemente a (1.4), uma outra maneira de calcular o centro de massa foi

sugerida por Schoen (cf. HUANG (2009)):

$$\mathbf{c}_g^\alpha = -\frac{d_n}{2\mathbf{m}_g} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} E^g(Y_{(\alpha)}, \mu^g) d\text{vol}_{S_r}^g, \quad (1.9)$$

onde, para cada $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, $Y_{(\alpha)}$ é o campo

$$|x|^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - 2x_\alpha x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

o qual, assim como X , é Killing conforme com respeito a δ .

Fórmulas (1.4) e (1.9) podem ser provadas via teoremas de densidade por CORVINO and SCHOEN (2006); SCHOEN and YAU (1981); HUANG (2009). Recentemente, provas que não utilizam tais teoremas foram dadas por MIAO and TAM (2016), através de um cálculo direto em coordenadas locais, e por HERZLICH (2016), usando uma fórmula integral tipo-Pohozaev–Schoen e a abordagem dada por MICHEL (2011) para os invariantes assintóticos .

Uma conjectura muito famosa na Relatividade Geral Matemática é o chamado *teorema da massa positiva* (TMP), cujo enunciado é o seguinte:

Conjetura 1.1. *Se (M^n, g) , $n \geq 3$, é uma variedade riemanniana assintoticamente plana de ordem $\tau > (n - 2)/2$ cuja curvatura escalar é não negativa e integrável, então a massa ADM de (M, g) é não negativa. Ademais, se a massa é zero, então (M, g) é isométrica ao espaço euclidiano (\mathbb{R}^n, δ) .*

O TMP foi provado por SCHOEN and YAU (1979) quando $n \leq 7$ e quando (M, g) é conformemente plana por SCHOEN and YAU (1988), e WITTEN (1981) quando M é espinorial (veja também PARKER and TAUBES (1982) e CHOQUET-BRUHAT (1984)). Recentemente, SCHOEN and YAU (2017) anunciaram uma demonstração que funciona para todo $n \geq 3$ e sem restrições topológicas . Quando (M, g) é um gráfico euclidiano, demonstrações muito elegantes (sem a rigidez) foram dadas por LAM (2011) (veja também DE LIMA and GIRÃO (2015)) para gráficos de codimensão um, e por MIRANDOLA and VITÓRIO (2015) para gráficos de codimensão arbitrária com fibrado normal plano (veja também GRANGEIRO (2017)). O caso de hipersuperfícies euclidianas (incluindo a rigidez) foi tratado em HUANG and WU (2013).

Observação 1.3. Note que, como uma hipersuperfície euclidiana é espinorial, o TMP para essa classe de variedades riemannianas segue também do resultado de Witten.

A desigualdade de Penrose (DP) é um melhoramento do TMP para o caso em que (M, g) possui um bordo compacto Λ o qual é uma hipersuperfície mínima *outermost* (mais externa, em tradução livre). A igualdade ocorre quando (M, g) é isométrica ao espaço (riemanniano) de Schwarzschild, o qual consiste da variedade diferenciável

$\mathbb{R}^n \setminus \{|x| < (2m)^{\frac{1}{n-2}}\}$ munida da métrica

$$g_m^{\text{Sch}} = \left(1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta,$$

onde $m > 0$ é um parâmetro, o qual coincide com a massa ADM deste espaço. A conjectura pode ser enunciada da seguinte forma:

Conjetura 1.2. *Se (M^n, g) , $n \geq 3$, é uma variedade riemanniana assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$ cuja curvatura escalar é não negativa e integrável, e $\Lambda = \partial M$ é uma hipersuperfície mínima outermost (não necessariamente conexa) de área $|\Lambda|$, então*

$$m_g \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Lambda|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Além disso, se a igualdade ocorre, então (M, g) é isométrica ao espaço riemanniano de Schwarzschild.

A DP foi provada por HUISKEN and ILMANEN (2001) para $n = 3$ e Λ conexo, e por BRAY (2001) para $n = 3$ e Λ não necessariamente conexo. Em BRAY and LEE (2009), demonstraram a DP quando $n \leq 7$, com a hipótese extra de M ser espinorial para a obtenção da rigidez. O caso de gráficos euclidianos de codimensão um foi tratado por LAM (2011) (veja também DE LIMA and GIRÃO (2015)) e generalizado por Mirandola e Vitória para gráficos euclidianos de codimensão arbitrária e fibrado normal plano (veja também GRANGEIRO (2017)). A rigidez para gráficos de codimensão um foi tratada em HUANG and WU (2015).

Vamos agora discutir mais detalhadamente o caso especial de gráficos euclidianos (de codimensão um). Seja Ω um subconjunto aberto e limitado (possivelmente vazio) de \mathbb{R}^n tal que $\Gamma = \partial\Omega$ é uma hipersuperfície compacta (e suave) de \mathbb{R}^n com uma quantidade finita de componentes conexas. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua tal que sua restrição a $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ é suave. Denote por f_i , f_{ij} e f_{ijk} a primeira, segunda e terceira derivadas parciais de f em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, respectivamente, onde $1 \leq i, j, k \leq n$. A aplicação f é dita assintoticamente plana de ordem τ se

$$|f_i(x)| + |x| |f_{ij}(x)| + |x|^2 |f_{ijk}(x)| = O(|x|^{-\tau/2}), \quad (1.10)$$

para cada tripla (i, j, k) com $1 \leq i, j, k \leq n$.

Assumimos que

$$M = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}, \quad (1.11)$$

o gráfico de f , é uma hipersuperfície suave com bordo (possivelmente vazio) e que a

métrica $\delta_{ij} + f_i f_j$, estende-se a uma métrica suave em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Denote por g a métrica em M induzida pela métrica euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} . Note que (M, g) é isométrica a $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta_{ij} + f_i f_j)$, e portanto, por (1.1) e (1.10), se f é assintoticamente plana de ordem τ , então (M, g) é assintoticamente plana de ordem τ .

Observação 1.4. O espaço de Schwarzschild pode ser realizado como o gráfico de uma função assintoticamente plana (vide LAM (2011)).

LAM (2011), mostrou o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$. Suponha que f é constante em cada componente conexa de $\Gamma = \partial\Omega$, que*

$$|Df| \rightarrow \infty \text{ quando } x \rightarrow \Gamma, \quad (1.12)$$

e que a curvatura escalar R^g do gráfico (M, g) de f é integrável. Então, vale a seguinte fórmula integral para a massa ADM de (M, g) :

$$\mathbf{m}_g = c_n \left(\int_M \phi R^g \, d\text{vol}_M + \int_\Gamma H^\delta \, d\text{vol}_\Gamma \right), \quad (1.13)$$

onde

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}}$$

e H^δ é a curvatura média de Γ como hipersuperfície de \mathbb{R}^n .

Observação 1.5. A condição (1.12) implica que $f(\Gamma)$ é uma hipersuperfície mínima *outermost* de (M, g) (vide LAM (2011)).

Se $\Gamma = \emptyset$, o TMP para gráficos (sem o resultado de rigidez) decorre diretamente de (1.13); no caso em que $\Gamma \neq \emptyset$, supondo Γ convexa (como hipersuperfície de \mathbb{R}^n), obtemos, com a ajuda da desigualdade de ALEXANDROV (1937, 1938), a DP para gráficos (novamente sem a rigidez). A demonstração de (1.13) dada por Lam consiste em escrever a curvatura escalar como o divergente de um campo e aplicar o teorema da divergência. Uma demonstração alternativa, utilizando (1.4), a qual vale para gráficos de codimensão arbitrária com fibrado normal plano, foi dada por GRANGEIRO (2017).

Observação 1.6. Devido a um resultado de GUAN and LI (2009), para se obter a DP a partir de (1.13), a condição de convexidade sobre Γ pode ser relaxada para Γ estrelada e com curvatura média positiva. Já um resultado de FREIRE and SCHWARTZ (2014) garante que a hipótese de convexidade sobre Γ pode ser relaxada para Γ êxterominimizante e com curvatura média positiva.

ALMARAZ, BARBOSA, and DE LIMA (2016) consideraram variedades rie-

mannianas com bordo não compacto. Semelhantemente ao caso sem bordo, existem, neste contexto, a noção de variedade assintoticamente plana e também a noção de massa. Para isto, no lugar de \mathbb{R}^n , deve-se considerar como espaço de referência o semi-espaço (superior) $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$; considere também, para $r_* > 0$, o conjunto $\mathbb{R}_{r_*,+}^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n; r > r_*\}$.

Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade riemanniana completa, orientada e suave, possuindo um bordo não compacto Σ . Dizemos que (M, g) é assintoticamente plana de ordem τ (com um fim) se existe um subconjunto compacto K de M e um difeomorfismo $\Psi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_{r_0,+}^n$, para algum $r_0 > 0$, introduzindo coordenadas em $M \setminus K$, digamos $x = (x_1, \dots, x_n)$, tais que, nessas coordenadas,

$$(g_{ij} - \delta_{ij}) + r g_{ij,k} + r^2 g_{ij,kl} = O(r^{-\tau}), \quad (1.14)$$

onde, como no caso sem bordo (ou com bordo compacto),

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}, \quad g_{ij,kl} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$$

e $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Seja (M, g) como no parágrafo anterior. Denotamos por H^g a curvatura média de Σ como hipersuperfície de M , calculada usando-se o campo normal unitário que aponta para dentro, o qual chamamos de ν^g . Como anteriormente, denotamos por R^g a curvatura escalar de (M, g) . Suponha que $\tau > (n-2)/2$ e que as curvaturas R^g e H^g são integráveis, isto é, $R^g \in L^1(M)$ e $H^g \in L^1(\partial M)$. A massa de (M, g) é definida por

$$\mathbf{m}_g = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_r^{n-2}} g_{\alpha n} \vartheta^\alpha d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^\delta \right], \quad (1.15)$$

onde $S_{r,+}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| = r\}$, $S_r^{n-2} = \{x \in \partial \mathbb{R}_+^n; |x| = r\}$, com $|\cdot|$ denotando a norma euclidiana, e onde $\mu = \mu^\delta$ e $\vartheta = \vartheta^\delta$ denotam os campos vetoriais unitários normais a $S_{r,+}^{n-1}$ e S_r^{n-2} , respectivamente, e que apontam para fora. Além disso, assumimos que índices denotados por letras romanas variam de 1 até n e que índices denotados por letras gregas variam de 1 até $n-1$. Foi mostrado em ALMARAZ, BARBOSA, and DE LIMA (2016) que o limite no lado direito de (1.14) existe, é finito, e é um invariante geométrico, ou seja, dois sistemas de coordenadas satisfazendo (1.14) fornecem o mesmo valor para (1.15).

Observação 1.7. O invariante (1.15) aparece de forma decisiva em ALMARAZ (2015) em conexão com a convergência global de um certo fluxo tipo-Yamabe considerado primeiramente por BRENDLE (2002), o qual, no limite, produz domínios com curvatura escalar nula e bordo de curvatura média constante.

Existe também a noção de centro de massa para uma variedade assintoticamente plana (M, g) , de ordem τ , com bordo não compacto Σ . Suponha que $\tau > (n-2)/2$

e que, $rR^g \in L^1(M)$ e $rH^g \in L^1(\partial M)$. O centro de massa de (M, g) é o vetor

$$\mathbf{c}_g = (\mathbf{c}_g^1, \dots, \mathbf{c}_g^{n-1}),$$

dado por

$$\mathbf{c}_g^\alpha = \frac{c_n}{\mathbf{m}_g} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} [x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j - (g_{i\alpha} \nu^i - g_{ii} \nu^\alpha)] d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_r^{n-2}} x^\alpha g_{\beta n} \vartheta^\beta d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^\delta \right], \quad (1.16)$$

para todo $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$.

A conjectura a seguir é a versão do TMP para variedades assintoticamente planas com bordo não compacto.

Conjetura 1.3. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com bordo não compacto Σ e assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$. Suponha que a curvatura escalar R^g de (M, g) , assim como a curvatura média H^g de Σ são integráveis. Se $R^g \geq 0$ e $H^g \geq 0$, então $\mathbf{m}_g \geq 0$. Além disso, se $\mathbf{m}_g = 0$, então (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}_+^n, δ) .*

Casos especiais desta conjectura foram demonstrados por ESCOBAR (1992) e RAULOT (2011). Recentemente, ALMARAZ, BARBOSA, and DE LIMA (2016) demonstraram que esta conjectura é verdadeira em todos os casos em que vale o TMP. Em particular, ela vale para $3 \leq n \leq 7$ e para M espinorial.

Assim como no caso sem bordo, é desejável que se obtenha uma expressão para a massa (1.15) em termos mais geométricos. Nossos dois primeiros resultados principais consistem em mostrar que o elegante método utilizado em HERZLICH (2016) pode ser adaptado para expressar \mathbf{m}_g e \mathbf{c}_g em termos dos tensores de Einstein e Newton; este último é definido da seguinte forma:

$$J^g = \Pi^g - H^g g, \quad (1.17)$$

onde Π^g é a segunda forma fundamental de Σ , definida com respeito a ν^g , o campo unitário normal que aponta para dentro. Como no caso sem bordo, esses tensores devem ser avaliados no campo radial $X = r\partial r$. Mais precisamente, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.2. *Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto Σ e tal que as curvaturas $R^g \in L^1(M)$ e $H^g \in L^1(\partial M)$. A seguinte igualdade ocorre:*

$$\mathbf{m}_g = d_n \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right]. \quad (1.18)$$

Observação 1.8. O Teorema 1.2 também foi provado, de forma independente, por X.

Chai CHAI (2018), utilizando coordenadas locais.

Teorema 1.3. *Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto Σ , satisfazendo $\mathfrak{m}_g \neq 0$ e tal que $rR^g \in L^1(M)$ e $rH^g \in L^1(\partial M)$. Então o centro de massa de (M, g) é o vetor $\mathfrak{c}_g = (\mathfrak{c}_g^1, \dots, \mathfrak{c}_g^{n-1})$ dado por:*

$$\mathfrak{c}_g^\alpha = -\frac{d_n}{2\mathfrak{m}_g} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(Y_{(\alpha)}, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(Y_{(\alpha)}, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right], \quad (1.19)$$

para todo $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$.

Como no caso em que o espaço de referência é o \mathbb{R}^n , podemos considerar variedades riemannianas assintoticamente planas com bordo não compacto que são dadas por gráficos de funções que possuem um decaimento apropriado.

Seja Ω um (possivelmente vazio) subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}_+^n \setminus \{x \in \mathbb{R}_+^n; x_n = 0\}$, tal que $\Gamma = \partial\Omega$ é uma hipersuperfície compacta, suave e com uma quantidade finita de componentes conexas. Seja $f : \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que sua restrição a $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{\Omega}$ é suave. Denote por f_i, f_{ij} e f_{ijk} a primeira, segunda e terceira derivadas parciais de f em $\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{\Omega}$, respectivamente, onde $1 \leq i, j, k \leq n$. A aplicação f é dita assintoticamente plana de ordem τ se

$$|f_i(x)| + |x||f_{ij}(x)| + |x|^2|f_{ijk}(x)| = O(|x|^{-\tau/2}), \quad (1.20)$$

para cada tripla (i, j, k) com $1 \leq i, j, k \leq n$.

Assumimos, ao longo desta tese, que

$$M = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega\}, \quad (1.21)$$

o gráfico de f , é uma hipersuperfície com bordo a qual é suave e tal que a métrica $\delta_{ij} + f_i f_j$ estende-se a uma métrica suave em $\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega$. Denote por g a métrica induzida em M pela métrica euclidiana em $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$. Note que (M, g) é isométrica a $(\mathbb{R}_+^n \setminus \Omega, \delta_{ij} + f_i f_j)$, e portanto, por (1.20) e (1.21), se f é assintoticamente plana de ordem τ , então (M, g) é assintoticamente plana de ordem τ .

Denote por \bar{f} a restrição a $\partial\mathbb{R}_+^n$ da função assintoticamente plana $f : \mathbb{R}_+^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que o gráfico de \bar{f} é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n = \partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$, cuja segunda forma fundamental (com respeito ao vetor $\tilde{\eta} = -\bar{D}\bar{f} + e_{n+1}$) é denotada por \bar{A} . Temos também que o gráfico de f é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} , cuja segunda forma fundamental (com respeito ao vetor $N = -Df + e_{n+1}$) é denotada por A . Indicaremos por $\nabla, \bar{\nabla}$ as conexões de $M, \partial M$, e \hat{J} denota o tensor J com um índice levantado.

Semelhantemente a LAM (2011), Barbosa e Meira obtiveram a primeira parte do Teorema 1.5, isto é, a parte que trata apenas da desigualdade, sem a rigidez, como

consequência direta de uma fórmula integral para a massa. O enunciado preciso é o seguinte:

Teorema 1.4. . *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função assintoticamente plana, sobre $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e de classe C^2 até o bordo, com ordem $\tau > \frac{n-2}{2}$. Seja $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij} + f_i f_j)$ o gráfico de f . Nós supomos os seguintes itens:*

- $f_n = \partial f / \partial x_n \geq 0$ sobre $\partial \mathbb{R}^n$ e $\partial_n = (e_n, f_n)$ é normal ao bordo não compacto (isso ocorre quando $f_n = 0$ sobre $\partial \mathbb{R}^n$, por exemplo);
- $R^g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $R^g \geq 0$;
- A curvatura média H^g do bordo de $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij} + f_i f_j)$, visto como uma subvariedade de $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij} + f_i f_j)$ é tal que $H^g \geq 0$ (com respeito ao campo normal, unitário e que aponta para dentro) e $H^g \in L^1(\partial \mathbb{R}^n)$;
- A segunda forma fundamental escalar \tilde{h} (com respeito ao campo normal, unitário e que apontando para cima) do bordo de $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij} + f_i f_j)$, visto como uma subvariedade de $(\mathbb{R}^n, \delta) = (\partial \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \delta)$ é tal que $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_i) \in L^1(\partial \mathbb{R}^n)$. Aqui, $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ é o i -ésimo vetor da base canônica e $\bar{\partial}_i = (\bar{e}_i, f_i)$ é um campo de vetores tangentes.

Então,

$$\mathbf{m}_g = c_n \left[\int_{\mathbb{R}^n} R^g dx_\delta + \int_{\partial \mathbb{R}^n} \frac{H^g}{\sqrt{1 + (f_n)^2}} (2 + |Df|^2) dx_\delta + \int_{\partial \mathbb{R}^n} f_n \sqrt{1 + |\bar{D}f|^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_i) \right) \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} dx_\delta \right], \quad (1.22)$$

onde $\bar{D}\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1})$. Em particular, a massa \mathbf{m}_g será não negativa.

Em BARBOSA and MEIRA (2018), utilizando técnicas semelhantes às usadas em LAM (2011), Barbosa e Meira demonstraram a Conjectura 1.3 no caso especial de gráficos. Mais precisamente, eles mostraram o seguinte:

Teorema 1.5. *Seja (M, g) o gráfico de uma função suave e assintoticamente plana $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ de ordem $\tau > (n-2)/2$. Suponha que $f_n = 0$ ao longo de $\partial \mathbb{R}_+^n$, que $R^g \in L^1(M)$ e que $R^g \geq 0$. Suponha também que $H^g \in L^1(\partial M)$ e $H^g \geq 0$. Então, $\mathbf{m}_g \geq 0$. Além disso, se $\mathbf{m}_g = 0$, então (M, g) é isométrica a (\mathbb{R}_+^n, δ) .*

Outra consequência do Teorema 1.4, em conjunto com a desigualdade de Alexandrov–Fenchel, é o seguinte teorema:

Teorema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x_n = 0\}$, $n \geq 3$ um conjunto aberto, limitado, com bordo suave, médio-convexo. Suponha que $\partial \Omega$ seja êxtero-minimizante ou que cada componente conexa de Ω seja estrelada. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave assintoticamente plana, e de classe C^2 até o bordo, constante ao longo de cada componente conexa de $\partial \Omega$ e tal que*

$|Df| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \Gamma$. Suponha também que $f_n = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}_-^n$, a curvatura escalar do gráfico é não negativa, as curvaturas médias dos bordos compactos são não negativas, e que a curvatura média do bordo não compacto (vista como uma subvariedade do gráfico) é não negativa. Então

$$\mathbf{m}_g \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad (1.23)$$

onde $|\Gamma|$ é o $(n-1)$ -volume de $\partial\Omega$.

O Teorema 1.5 é um corolário do nosso terceiro resultado principal, que consiste de uma fórmula integral para \mathbf{m}_g , semelhante à fórmula (1.22). Diferentemente do método usado em BARBOSA and MEIRA (2018), nossa demonstração parte da fórmula (1.18) para a massa. Assim, conseguimos uma nova demonstração para o Teorema 1.5.

Teorema 1.7. *Seja (M, g) o gráfico de uma função suave e assintoticamente plana $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ de ordem $\tau > (n-2)/2$. Suponha que $R^g \in L^1(M)$ e que $H^g \in L^1(\partial M)$. Então*

$$\mathbf{m}_g = c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + 2 \int_{\partial M} \phi H^g d\text{vol}_{\partial M}^g + \frac{2}{n-2} \int_{\partial M} \phi \left\langle A(\nabla f) - \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}), \hat{J}(X) \right\rangle d\text{vol}_{\partial M}^g \right], \quad (1.24)$$

onde \bar{g} é a restrição de g a Σ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica induzida em Σ pela métrica euclidiana,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + \dots + f_n^2}}.$$

O seguinte corolário, que segue de (1.24), implica o Teorema 1.5 (sem o resultado de rigidez).

Corolário 1.1. *Sob as hipóteses do Teorema 1.7, se*

$$\left\langle A(\nabla f) - \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}), \hat{J}(X) \right\rangle \geq 0,$$

então $\mathbf{m}_g \geq 0$. Em particular, se $f_n = 0$ ao longo de Σ , então $\mathbf{m}_g \geq 0$.

Diferentemente do método usado em BARBOSA and MEIRA (2018), nossa demonstração para a Desigualdade de Penrose (1.23) parte da fórmula (1.18) para a massa. Assim, conseguimos uma nova demonstração para o Teorema 1.6.

2 A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON

Como observado na Intradução, na presença de uma carta no infinito Ψ podemos identificar $M \setminus K$ com $\mathbb{R}_{r_0,+}^n$. Isso nos permite definir para $r_0 < r < r'$, $M_{r,r'} = \{x \in M \setminus K; r \leq |x| \leq r'\}$, $\Sigma_{r,r'} = \{x \in \partial(M \setminus K); r \leq |x| \leq r'\}$ e as esferas coordenadas $S_{r,+}^{n-1} = \{x \in M \setminus K; |x| = r\}$, de modo que

$$\partial M_{r,r'} = S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_{r,r'} \cup S_{r',+}^{n-1}.$$

Representamos por μ^δ o campo unitário normal (com respeito a δ) a $S_{r,+}^{n-1}$ e que aponta para fora de $S_{r,+}^{n-1}$. Além disso, consideramos a esfera coordenada $S_r^{n-2} = \partial S_{r,+}^{n-1} \subset \partial(M \setminus K)$, dotada de seu campo conormal unitário exterior ϑ^δ , o qual é tangente a Σ . Definimos $e = g - \delta$, onde escrevemos $\delta = \Psi * \delta$ para simplificar a notação, e definimos a 1-forma

$$\mathbb{U}_{e,w}^\delta = w(\operatorname{div}^\delta e - d\operatorname{tr}^\delta e) - \nabla^\delta w \lrcorner e + \operatorname{tr}^\delta e dw, \quad (2.1)$$

onde w é uma função em \mathbb{R}_+^n . Finalmente, representaremos por $\eta^\delta = -\nu^\delta$ o campo vetor normal unitário exterior a longo de Σ .

O seguinte resultado foi provado em (ALMARAZ, BARBOSA, and DE LIMA, 2016).

Teorema 2.1. *Se (M, g) é assintoticamente plana como acima, então a quantidade*

$$\mathfrak{m}_g = c_n \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{e,1}^\delta(\mu^\delta) d\operatorname{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta - \int_{S_r^{n-2}} e(\eta^\delta, \vartheta^\delta) d\operatorname{vol}_{S_r^{n-2}}^\delta \right],$$

é finita e seu valor não depende de qual carta no infinito é escolhida, onde 1 aqui denota a função identicamente igual a 1.

Observação 2.1. Para que a massa esteja bem definida, não é necessário assumir um controle pontual de segunda ordem na métrica, como em (1.14) acima; um controle de primeira ordem é suficiente (veja MICHEL (2011)) para uma discussão sobre este ponto bastante sutil no caso sem fronteiras). No entanto, para os nossos propósitos, esta suposição extra é crucial, pois não só implica que $H^g = O(r^{-\tau-1})$ mas também que ambos Ric^g e R^g são $O(r^{-\tau-2})$.

Uma pequena variação na prova do Teorema 2.1 nos permite definir o centro de massa de uma variedade assintoticamente plana com bordo não compacto.

Teorema 2.2. *Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana com $\mathfrak{m}_g \neq 0$ e assuma, além disso, que ambos $\int_\Sigma r H^g d\operatorname{vol}_\Sigma^g$ e $\int_M r R^g d\operatorname{vol}_M^g$ são finitos, onde a coordenada radial*

assintótica foi suavemente estendida a toda a M . Então, para todo $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$, a quantidade

$$\mathbf{c}_g^\alpha = \frac{c_n}{\mathbf{m}_g} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{e,x_\alpha}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r,+}^\delta} - \int_{S_r^{n-2}} x_\alpha e(\eta^\delta, \vartheta^\delta) d\text{vol}_{S_r^\delta} \right],$$

é finita. Além disso, o vetor $\mathbf{c}_g = (\mathbf{c}_g^1, \dots, \mathbf{c}_g^{n-1})$ não depende da carta escolhida no infinito (a menos de movimentos rígidos euclidianos) e é denominado o centro de massa de (M, g) .

Observação 2.2. Sabe-se que o centro de massa \mathbf{c}_g também é bem definido se, em vez das condições de integrabilidade sobre R^g e H^g no Teorema 2.2 acima, assumirmos as condições de Regge-Teitelboim (RT). Mais precisamente, for $x = (x', x_n) \in M \setminus K$, onde $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, defina a involução $\tau : M \setminus K \rightarrow M \setminus K$ por $\tau(x', x_n) = (-x', x_{n-1})$, de modo que para cada função f em $M \setminus K$, podemos considerar sua parte ímpar

$$f^{odd}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(\tau x)).$$

Então, dizer que (M, g) satisfaz as condições RT significa que

$$|g_{ij}^{odd}| + r|\partial_k g_{ij}^{odd}| = O(r^{-\tau-1}), \quad (R^g)^{odd} = O(r^{-2\tau-2}), \quad (H^g)^{odd} = O(r^{-2\tau-1});$$

(veja CEDERBAUM, CORTIER, and SAKOVICH (2016); CORVINO and WU (2008); HERZLICH (2016)) para discussões no caso sem bordo.

Nós seguimos (HERZLICH, 2016) de perto para $r > 4r_0$ consideramos a função *cut-off* $\chi = \chi_r(r')$ em $M \setminus K$ que se anula para $r' \leq \frac{r}{2}$, é igual a 1 para $r' \geq \frac{3r}{4}$ e satisfaz as estimativas

$$|\nabla \chi| \leq Cr^{-1}, \quad |\nabla^2 \chi| \leq Cr^{-2}, \quad |\nabla^3 \chi| \leq Cr^{-3},$$

para algum $C > 0$ independente de r . Em seguida, definimos uma métrica em $M_r = M_{r/4,r}$ por

$$h = (1 - \chi)\delta + \chi g, \tag{2.2}$$

que é então estendida para toda a M da maneira óbvia.

O próximo ingrediente da prova do Teorema 1.2 é uma identidade integral do tipo Pohozaev-Schoen cuja versão infinitesimal apresentamos agora. Um caso especial desse resultado aparece em (HERZLICH, 2016, Lema 2.1); veja também (BARBOSA, DE LIMA, and FREITAS, 2016) para outra variante dessa identidade. Escolhemos aqui apresentar este material com total generalidade, pois acreditamos que ele pode ser útil em outros contextos também. Assim, vamos considerar (N, γ) uma variedade riemanniana de dimensão p e tomar um 2-tensor covariante simétrico $T = T_{ij} \in \mathcal{S}^2(N, \gamma)$ e um campo vetorial $Y = Y^i \in \mathcal{X}(N)$, onde $i, j = 1, \dots, p$.

Proposição 2.1. *Tem-se que*

$$\operatorname{div}^\gamma(Y \lrcorner T) = \langle \operatorname{div}^\gamma T, Y \rangle_\gamma + \langle T, \widetilde{\operatorname{div}}_+^\gamma Y \rangle_\gamma + \frac{1}{p} \operatorname{div}^\gamma Y \operatorname{tr}^\gamma T, \quad (2.3)$$

onde $\operatorname{div}_+^\gamma : \mathcal{X}(N) \rightarrow \mathcal{S}^2(N, \gamma)$ é adjunta, em L^2 , da aplicação divergência $\operatorname{div}^\gamma : \mathcal{S}^2(N, \gamma) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ e o til significa a parte livre de traço.

Demonstração. Calculando no centro de um sistema de coordenadas normais, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\gamma(Y \lrcorner T)_j &= (T_{ij} Y_i)_{,j} \\ &= T_{i,j} Y_i + T_{ij} Y_{i,j} \\ &= T_{i,j} Y_i + \frac{1}{2} T_{ij} (Y_{i,j} + Y_{j,i}), \end{aligned}$$

onde a vírgula significa derivação covariante. Em notação livre de índices, isso significa que

$$\operatorname{div}^\gamma(Y \lrcorner T) = \langle \operatorname{div}^\gamma T, Y \rangle_\gamma + \frac{1}{2} \langle T, \mathcal{L}_Y \gamma \rangle_\gamma,$$

onde \mathcal{L} é a derivada de Lie. De

$$\operatorname{div}_+^\gamma Y = \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y \gamma,$$

nós temos

$$\operatorname{div}^\gamma(Y \lrcorner T) = \langle \operatorname{div}^\gamma T, Y \rangle_\gamma + \langle T, \operatorname{div}_+^\gamma Y \rangle_\gamma.$$

Além disso, de

$$(\operatorname{div}_+^\gamma Y)_{ij} = \frac{1}{2} (Y_{i,j} + Y_{j,i}),$$

temos

$$\operatorname{tr}^\gamma \operatorname{div}_+^\gamma Y = \operatorname{div}^\gamma Y,$$

de modo que

$$\widetilde{\operatorname{div}}_+^\gamma Y = \operatorname{div}_+^\gamma Y - \frac{1}{p} (\operatorname{div}^\gamma Y) \gamma.$$

Portanto,

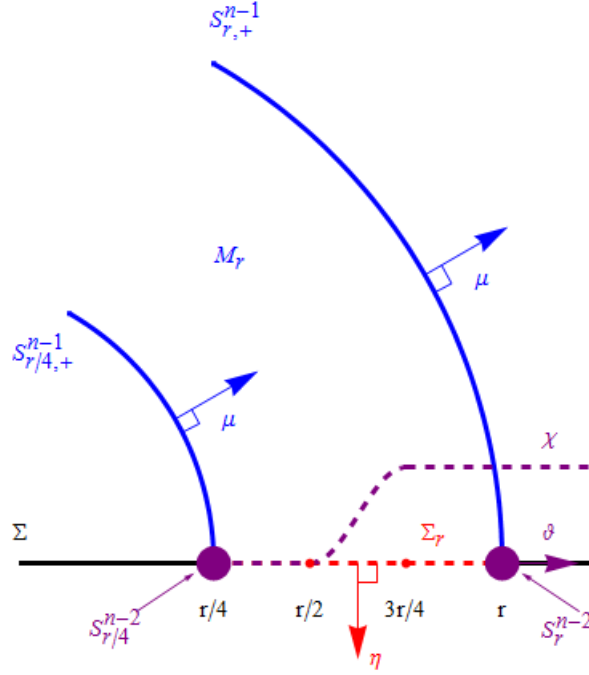
$$\operatorname{div}^\gamma(Y \lrcorner T) = \langle \operatorname{div}^\gamma T, Y \rangle_\gamma + \langle T, \widetilde{\operatorname{div}}_+^\gamma Y \rangle_\gamma + \frac{1}{p} \operatorname{div}^\gamma Y \operatorname{tr}^\gamma T.$$

□

Observação 2.3. Denote por Q o termo restante (quadrático) na fórmula de Taylor para a curvatura escalar $R^h = R^\delta + \dot{R}^\delta(h) + Q(\delta, h)$, onde a linearização da curvatura escalar em δ é

$$\dot{R}^\delta(h) = \operatorname{div}^\delta(\operatorname{div}^\delta(h) - d(\operatorname{tr}^\delta h)) + \langle \operatorname{Ric}^\delta, h \rangle,$$

veja (HERZLICH, 2016, equação (1.2)).



Proposição 2.2. *Com a notação acima,*

$$\mathfrak{m}_g = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{M_r} R^h d\text{vol}_{M_r}^\delta + 2 \int_{\Sigma_r} H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta \right], \quad (2.4)$$

onde $\Sigma_r := \Sigma_{r/4,r}$.

Demonstração. Usando (2.1) temos, $\mathbb{U}_{h,1}^\delta = \text{div}^\delta(h) - d(\text{tr}^\delta h)$ ou $\mathbb{U}_{h,1}^\delta = h_{ij,j} - h_{jj,i}$. Da Observação 2.3 temos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &= \int_{M_r} R^h d\text{vol}_{M_r}^\delta \\ &= \int_{M_r} (R^\delta + \dot{R}^\delta(h) + Q(\delta, h)) d\text{vol}_{M_r}^\delta \\ &= \int_{M_r} Q(\delta, h) d\text{vol}_{M_r}^\delta + \int_{S_{r/4,+}^{n-1} \cup S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_r} \mathbb{U}_{h,1}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{\partial M_r}^\delta \\ &= \int_{M_r} Q(\delta, h) d\text{vol}_{M_r}^\delta + \int_{S_{r/4,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{\delta,1}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r/4,+}^{n-1}}^\delta \\ &\quad + \int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{g,1}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{\Sigma_r} \mathbb{U}_{h,1}^\delta(\eta^\delta) d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta \\ &= \int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{g,1}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{\Sigma_r} \mathbb{U}_{h,1}^\delta(\eta^\delta) d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1). \end{aligned}$$

Tem-se também

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{K}_2 &= \int_{\Sigma_r} 2H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta \\ &= \int_{\Sigma_r} (2h_{na,a} - h_{aa,n}) d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1). \end{aligned}$$

Ao longo de Σ_r , como $\eta^n = -1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{h,1}^\delta(\eta^\delta) &= (h_{ij,j} - h_{jj,i})\eta^i \\ &= (h_{nj,j} - h_{jj,n})\eta^n \\ &= h_{na,a} - h_{aa,n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 + 2\mathfrak{K}_2 &= \int_{S_{r,+}^{n-1}} \mathbb{U}_{g,1}^\delta(\mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{\Sigma_r} h_{na,a} d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1) \\ &= \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i})\mu^i d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^\delta + \int_{S_r^{n-2}} h_{na}\vartheta^a d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^\delta + o(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathfrak{m}_g = c_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{M_r} R^h d\text{vol}_{M_r}^\delta + 2 \int_{\Sigma_r} H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta \right].$$

□

Usaremos as proposições 2.1 e 2.2 para demonstrar os teoremas 1.2 e 1.3.

2.1 Prova dos Teoremas 1.2 e 1.3

Prova do Teorema 1.2. Integramos (2.3) no meio anel, n -dimensional (M_r, h) , onde h é a métrica de interpolação em (2.2). Tomamos T para ser

$$E^h = \text{Ric}^h - \frac{R^h}{2}h,$$

o tensor de Einstein de h , de modo que

$$\text{div}^h E^h = 0, \quad \text{tr}^h E^h = \frac{2-n}{2}R^h,$$

e tomamos Y para ser X . Integrando a equação (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M_r} \text{div}^h(X \lrcorner E^h) d\text{vol}_{M_r}^h &= \int_{M_r} \langle \text{div}^h E^h, X \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h + \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\text{div}_+^h X} \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{M_r} \text{div}^h X \text{tr}^h E^h d\text{vol}_{M_r}^h. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência ao lado esquerdo tem-se

$$\int_{\partial M_r} E^h(X, \mu^h) d\text{vol}_{M_r}^h = \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h + \frac{2-n}{2n} \int_{M_r} R^h \text{div}^h X d\text{vol}_{M_r}^h.$$

Considerando $\partial M_r = S_{r/4,+}^{n-1} \cup S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_r$, temos

$$\int_{S_{r/4,+}^{n-1} \cup S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_r} E^h(X, \mu^h) d\text{vol}_{\partial M_r}^h = \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h + \frac{2-n}{2n} \int_{M_r} R^h \text{div}^h X d\text{vol}_{M_r}^h.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{S_{r/4,+}^{n-1}} E^h(X, \mu^h) d\text{vol}_{M_r}^h + \int_{S_{r,+}^{n-1}} E^h(X, \mu^h) d\text{vol}_{M_r}^h + \int_{\Sigma_r} E^h(X, \eta^h) d\text{vol}_{\Sigma_r}^h \\ = \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h + \frac{2-n}{2n} \int_{M_r} R^h \text{div}^h X d\text{vol}_{M_r}^h. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.2) e $\chi = 0$, tem-se $h = \delta$. Visto que

$$\begin{aligned} \int_{S_{r/4,+}^{n-1}} E^h(X, \mu^h) d\text{vol}_{S_{r/4,+}^{n-1}}^h &= \int_{S_{r/4,+}^{n-1}} E^\delta(X, \mu^\delta) d\text{vol}_{S_{r/4,+}^{n-1}}^\delta \\ &= 0, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{\Sigma_r} E^h(X, \eta^h) d\text{vol}_{\Sigma_r}^h &= \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{M_r}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{2n} \int_{M_r} \text{div}^h X \cdot R^h d\text{vol}_{M_r}^h. \end{aligned}$$

Consideramos agora o campo vetor radial $X = r\partial_r$, de modo que

$$\text{div}^\delta X = n, \quad \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X = 0, \quad (2.5)$$

a última identidade sendo devida ao fato de que X é conforme relativamente a δ . Como em (HERZLICH, 2016), notamos que, como $g = \delta + O(r^{-\tau})$, então

$$\begin{aligned} h &= \chi g + (1-\chi)\delta \\ &= \chi(\delta + O(r^{-\tau})) + (1-\chi)\delta \\ &= \delta + \chi O(r^{-\tau}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando (2.5) e procedendo novamente como em (HERZLICH, 2016), notamos que, quando $r \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \int_{M_r} \operatorname{div}^h X \cdot R^h d\operatorname{vol}_{M_r}^h &= \int_{M_r} \operatorname{div}^\delta X \cdot R^h d\operatorname{vol}_{M_r}^\delta + o(1) \\ &= n \int_{M_r} R^h d\operatorname{vol}_{M_r}^\delta + o(1), \end{aligned}$$

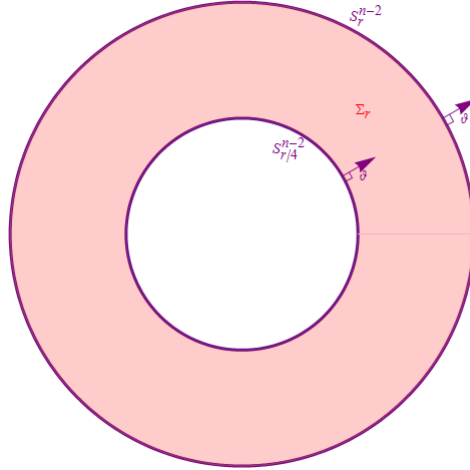
onde usamos o decaimento na curvatura escalar descrita na Observação 2.1. Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^h X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{M_r}^h &= \int_{M_r} \langle E^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^\delta X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{M_r}^\delta + o(1) \\ &= o(1), \end{aligned}$$

que finalmente dá

$$\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\operatorname{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{\Sigma_r} E^h(X, \eta^h) d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h = \frac{2-n}{2} \int_{M_r} R^h d\operatorname{vol}_{M_r}^\delta + o(1). \quad (2.7)$$

Nós agora integramos (2.3) sobre outra configuração, a saber, o anel $(n-1)$ -dimensional Σ_r , cuja fronteira é $\partial\Sigma_r = S_{r/4}^{n-2} \cup S_r^{n-2}$.



Desta vez nós tomamos T para ser $J^h = \Pi^h - H^h h$, o tensor de Newton de Σ em relação a h , de modo que

$$\operatorname{tr}^h J^h = (2-n)H^h, \quad \operatorname{div}^h J^h = \operatorname{Ric}^h(\eta, \cdot),$$

com a última identidade sendo apenas a aplicação da equação de Codazzi; veja a prova de (BARBOSA, DE LIMA, and FREITAS, 2016, Teorema 14). Tomamos também Y como

$r\partial_r|_{\Sigma_r}$, que ainda denotamos por X . Integrando a equação (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \operatorname{div}^h(X \lrcorner J^h) d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle \operatorname{div}^h J^h, X \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h + \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^h X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_{\Sigma_r} \operatorname{div}^h X \operatorname{tr}^h J^h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência ao lado esquerdo tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma_r} J^h(X, \vartheta^h) d\operatorname{vol}_{\partial\Sigma_r}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle \operatorname{div}^h J^h, X \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h + \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^h X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{(n-1)} \int_{\Sigma_r} H^h \operatorname{div}^h X d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h. \end{aligned}$$

Considerando $\partial\Sigma_r = S_{r/4}^{n-2} \cup S_r^{n-2}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{S_{r/4}^{n-2} \cup S_r^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\operatorname{vol}_{\partial\Sigma_r}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle \operatorname{div}^h J^h, X \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h + \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^h X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{(n-1)} \int_{\Sigma_r} H^h \operatorname{div}^h X d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{S_{r/4}^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\operatorname{vol}_{S_{r/4}^{n-2}}^h + \int_{S_r^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\operatorname{vol}_{S_r^{n-2}}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle \operatorname{div}^h J^h, X \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h \\ &\quad + \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\operatorname{div}_\dagger^h X} \rangle_h d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h + \frac{2-n}{(n-1)} \int_{\Sigma_r} H^h \operatorname{div}^h X d\operatorname{vol}_{\Sigma_r}^h. \end{aligned}$$

De (2.2) tem-se $h = \delta$ em $S_{r/4}^{n-2}$. Assim,

$$\begin{aligned} J^h(X, \vartheta^h) &= J^\delta(X, \vartheta^\delta) \\ &= \Pi^\delta(X, \vartheta^\delta) - H^\delta \delta(X, \vartheta^\delta) \\ &= \langle \nabla_X \eta^\delta, \vartheta^\delta \rangle - H^\delta \delta(X, \vartheta^\delta) \\ &= r \langle \nabla_{\partial_r} \eta^\delta, \partial_r \rangle - r H^\delta \delta(\partial_r, \partial_r) \\ &= r H^\delta - r H^\delta \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{S_{r/4}^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\operatorname{vol}_{S_{r/4}^{n-2}}^h = 0.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \int_{S_r^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle \text{div}^h J^h, X \rangle_h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h + \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h \\ &\quad + \frac{2-n}{(n-1)} \int_{\Sigma_r} H^h \text{div}^h X d\text{vol}_{\Sigma_r}^h. \end{aligned}$$

Considerando o campo radial $X = r\partial_r|_{\Sigma_r}$, temos

$$\text{div}^\delta X = n-1, \quad \langle \text{div}^h J^h, X \rangle = \text{Ric}^h(X, \eta^h), \quad \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X = 0. \quad (2.8)$$

A última identidade é válida pois $X|_\Sigma$ é conforme relativamente a $\delta = \delta|_\Sigma$. Como em (HERZLICH, 2016), notamos que, como $g = \delta + O(r^{-\tau})$, então de (2.6), (2.8) e $r \rightarrow +\infty$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \text{div}^h X \cdot H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h &= \int_{\Sigma_r} \text{div}^\delta X \cdot H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1) \\ &= (n-1) \int_{\Sigma_r} H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1), \end{aligned}$$

onde usamos o decaimento na curvatura escalar descrita na Observação 2.1. Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^h X \rangle_h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h &= \int_{\Sigma_r} \langle J^h, \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^\delta X \rangle_h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta + o(1) \\ &= o(1), \end{aligned}$$

que finalmente dá

$$\int_{S_r^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^h = \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^h(X, \eta^h) d\text{vol}_{\Sigma_r}^h + \frac{2-n}{2} \int_{\Sigma_r} 2H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h + o(1).$$

Como X é tangente a Σ ,

$$E^h(X, \eta^h) - \text{Ric}^h(X, \eta^h) = -\frac{R^h}{2} \langle X, \eta^h \rangle_h = 0,$$

ou seja,

$$E^h(X, \eta^h) = \text{Ric}^h(X, \eta^h).$$

Logo,

$$\int_{S_r^{n-2}} J^h(X, \vartheta^h) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^h = \int_{\Sigma_r} E^h(X, \eta^h) d\text{vol}_{\Sigma_r}^h + \frac{2-n}{2} \int_{\Sigma_r} 2H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^h + o(1). \quad (2.9)$$

Usando (2.7) e (2.9) acabamos com

$$\begin{aligned} & d_n \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right] \\ &= c_n \left[\int_{M_r} R^h d\text{vol}_{M_r}^\delta + 2 \int_{\Sigma_r} H^h d\text{vol}_{\Sigma_r}^\delta \right] + o(1). \end{aligned}$$

Portanto, por (2.4),

$$\mathbf{m}_g = d_n \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right].$$

□

Prova do Teorema 1.3. A prova é obtida essencialmente pelo mesmo argumento acima, onde agora usamos

$$\text{div}^\delta Y_{(\alpha)} = -2nx_\alpha, \quad \widetilde{\text{div}}_{\dagger}^\delta Y_{(\alpha)} = 0, \quad (2.10)$$

a última identidade sendo devida ao fato de $Y_{(\alpha)}$ ser conforme relativamente a δ . □

3 APLICAÇÃO DA FÓRMULA PARA A MASSA EM TERMOS DOS TENSORES DE EINSTEIN E NEWTON

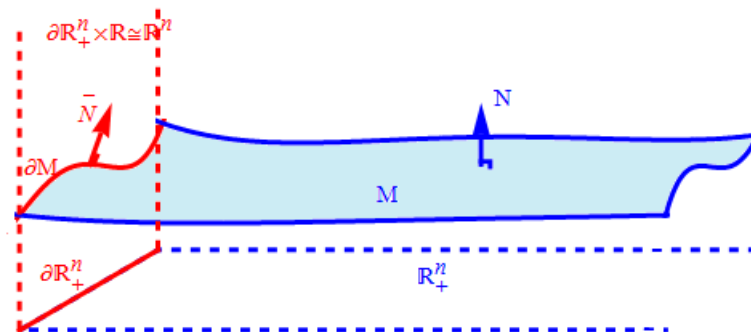
3.1 Resultados auxiliares

Considere os conjuntos \mathbb{R}_+^n , $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}_+^{n+1}$ e $\partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$. Denotamos, respectivamente, as métricas euclidianas desses espaços por δ , $\tilde{\delta}$ e $\bar{\delta}$, e suas conexões de Levi-Civita por D , \tilde{D} e \bar{D} .

Seja $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função assintoticamente plana. Denotemos por M o gráfico de f e por g a métrica induzida em M por $\tilde{\delta}$. A restrição de g a ∂M será denotada por \bar{g} . As conexões de Levi-Civita de g e \bar{g} serão denotadas por ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente. Denote por \bar{f} a restrição de f a ∂M . Note que $(\partial M, \bar{g})$ pode ser vista como o gráfico de \bar{f} munido da métrica induzida por $\bar{\delta}$.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Abusando notação e chamando pelos mesmos símbolos as restrições de $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n$, obtemos a base canônica de \mathbb{R}^n . Abusando notação mais uma vez e chamando pelos mesmos símbolos as restrições de $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}\}$ a $\partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$, obtemos uma base para este espaço.

É de fácil verificação que os campos de vetores $\partial_i = e_i + f_i e_{n+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, nos dão um *frame* para o fibrado tangente de M e que o campo de vetores $N = -Df + e_{n+1}$ é normal a M (note que N não é unitário). De modo análogo, os campos de vetores $\bar{\partial}_\alpha = e_\alpha + f_\alpha e_{n+1}$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, nos dão um *frame* para o fibrado tangente de ∂M e o campo de vetores $\bar{N} = -\bar{D}\bar{f} + e_{n+1}$ é normal a ∂M (note que \bar{N} não é unitário). Denotamos por A o operador de forma com respeito a N e por \bar{A} o operador de forma com respeito a \bar{N} .



Como na Introdução,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}}.$$

De modo análogo, denotamos por $\bar{\phi}$ a função

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\bar{D}f|^2}}.$$

A seguir, denotamos por V^\top a projeção de um campo de vetores V em \mathbb{R}^{n+1} sobre o fibrado tangente de M e denotamos por W^t a projeção de um campo de vetores W em $\partial\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}$ sobre o fibrado tangente de ∂M .

Lema 3.1. *Seja M o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se os seguintes resultados:*

- i. $e_{n+1}^\top = \nabla f$ e $e_{n+1}^t = \bar{\nabla} \bar{f}$.
- ii. $\nabla \phi = -\phi A(\nabla f)$ e $\bar{\nabla} \bar{\phi} = -\bar{\phi} \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f})$.
- iii. $\bar{\nabla} \phi = -\phi A(\nabla f) - \nu(\phi)\nu$.

Demonstração.

- i. Sejam $\hat{N} = (-f_1, \dots, -f_n, 1)/\sqrt{1 + |Df|^2}$ e $\tilde{N} = (-f_1, \dots, -f_{n-1}, 0, 1)/\sqrt{1 + |\bar{D}\bar{f}|^2}$, temos

$$\begin{aligned} \nabla f &= g^{ij} f_i \partial_j \\ &= (\delta^{ij} - \phi^2 f_i f_j) f_i (e_j + f_j e_{n+1}) \\ &= \delta^{ij} f_i e_j - \phi^2 f_i f_j f_i e_j + \delta^{ij} f_i f_j e_{n+1} - \phi^2 f_i f_i f_j f_j e_{n+1} \\ &= Df + |Df|^2 e_{n+1} - \phi^2 |Df|^2 Df - \phi^2 |Df|^4 e_{n+1} \\ &= \phi^2 Df + (1 - \phi^2) e_{n+1} \\ &= e_{n+1} - \phi^2 (-Df + e_{n+1}) \\ &= e_{n+1} - \langle \hat{N}, e_{n+1} \rangle \hat{N} \\ &= e_{n+1}^\top \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{f} &= \bar{g}^{\alpha\beta} f_\alpha \partial_\beta \\ &= (\bar{\delta}^{\alpha\beta} - \bar{\phi}^2 f_\alpha f_\beta) f_\alpha (e_\beta + f_\beta e_{n+1}) \\ &= \bar{\delta}^{\alpha\beta} f_\alpha e_\beta - \bar{\phi}^2 f_\alpha f_\beta f_\alpha e_\beta + \bar{\delta}^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta e_{n+1} - \bar{\phi}^2 f_\alpha f_\alpha f_\beta f_\beta e_{n+1} \\ &= \bar{D}\bar{f} + |\bar{D}\bar{f}|^2 e_{n+1} - \bar{\phi}^2 |\bar{D}\bar{f}|^2 \bar{D}\bar{f} - \bar{\phi}^2 |\bar{D}\bar{f}|^4 e_{n+1} \\ &= \bar{\phi}^2 \bar{D}\bar{f} + (1 - \bar{\phi}^2) e_{n+1} \\ &= e_{n+1} - \bar{\phi}^2 (-\bar{D}\bar{f} + e_{n+1}) \\ &= e_{n+1} - \langle \tilde{N}, e_{n+1} \rangle \tilde{N} \\ &= e_{n+1}^t. \end{aligned}$$

ii. Seja $e_{n+1} = (0, \dots, 1)$, então

$$\langle N, e_{n+1} \rangle = 1/\sqrt{1 + |Df|^2} = \phi.$$

Definamos $\hat{N} = \phi N$ e um vetor $v \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se que

$$\begin{aligned} v(\phi) &= v\langle \hat{N}, e_{n+1} \rangle \\ &= \langle \tilde{D}_v \hat{N}, e_{n+1} \rangle + \langle \hat{N}, \tilde{D}_v e_{n+1} \rangle \\ &= \langle \tilde{D}_v \hat{N}, e_{n+1} \rangle \\ &= \langle \tilde{D}_v \phi \hat{N}, e_{n+1} \rangle \\ &= v(\phi) \langle N, e_{n+1}^\top \rangle + \phi \langle \tilde{D}_v N, e_{n+1}^\top \rangle \\ &= \phi \langle -A(v), e_{n+1}^\top \rangle \\ &= \phi \langle v, -A(e_{n+1}^\top) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de M tem-se que

$$v_1(\phi)v_1 + \dots + v_n(\phi)v_n = \nabla\phi.$$

Logo

$$\phi \langle v_1, -A(\nabla f) \rangle v_1 + \dots + \phi \langle v_n, -A(\nabla f) \rangle v_n = \nabla\phi.$$

Portanto,

$$\nabla\phi = -\phi A(\nabla f).$$

Agora para $\bar{\nabla}\bar{\phi} = -\bar{\phi}\bar{A}(\bar{\nabla}f)$ é análogo.

iii. Seja $\{\nu, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ uma base ortonormal de M tem-se que

$$\nabla\phi - \bar{\nabla}\bar{\phi} = \nu(\phi)\nu + w_1(\phi)w_1 + \dots + w_{n-1}(\phi)w_{n-1} - w_1(\phi)w_1 - \dots - w_{n-1}(\phi)w_{n-1}.$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}\bar{\phi} = -\phi A(\nabla f) - \nu(\phi)\nu.$$

□

Se T é um 2-tensor covariante simétrico, denotamos por \hat{T} o tensor obtido pelo levantamento de um índice de T .

Proposição 3.1. *Se T é um 2-tensor covariante simétrico em M e V é um campo de vetores em M , tem-se que $\text{div}(\hat{T}(V)) = \text{div}(T)(V) + g^{ij}T(\nabla_{\partial_i}V, \partial_j)$.*

Demonstração. Fixando V podemos definir a 1-forma ω , por $\omega(Z) = \langle \hat{T}(V), Z \rangle$ de tal

modo que $\text{div}(\hat{T}(V)) = \text{div}(\omega)$. Temos:

$$\begin{aligned}
\text{div}(\omega) &= g^{ij} \nabla_{\partial_i} \omega_j \\
&= g^{ij} \partial_i \omega_j - g^{ij} \omega(\nabla_{\partial_i} \omega_j) \\
&= g^{ij} \partial_i T(V, \partial_j) - g^{ij} T(V, \nabla_{\partial_i} \partial_j) \\
&= g^{ij} \partial_i T(V, \partial_j) - g^{ij} T(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) - g^{ij} T(V, \nabla_{\partial_i} \partial_j) + g^{ij} T(\nabla_{\bar{\partial}_i} V, \partial_j) \\
&= \text{div}(T)(V) + g^{ij} T(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j).
\end{aligned}$$

□

O seguinte Lema foi mostrado por GRANGEIRO (2017).

Lema 3.2. *Sendo (M, g) o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se*

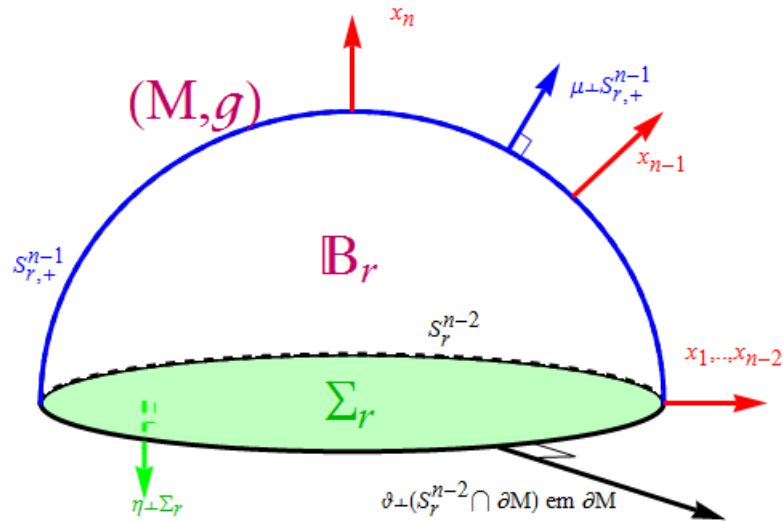
$$g^{ij} E(\nabla_{\partial_i}(\phi X), \partial_j) = \phi \text{tr}^g E.$$

Lembre-se que para codimensão 1 o fibrado normal é sempre plano.

Trocando M por ∂M e o tensor de Einstein E pelo tensor de Newton J , com $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n-1$, onde \hat{J} denota o tensor J com um índice levantado. Temos a seguinte versão do lema anterior:

Lema 3.3. *Sendo (M, g) o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se*

$$\bar{g}^{\alpha\beta} J(\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_\alpha} \bar{\phi} X, \bar{\partial}_\beta) = \bar{\phi} \text{tr}^{\bar{g}} J.$$



3.2 Prova do Teorema 1.7

Nesta seção iremos apresentar a prova do Teorema 1.7.

Demonstração. Fazendo $E^g = \text{Ric}^g - \frac{1}{2}R^g g$, $J^g = \Pi^g - H^g g$ e $\bar{g} = g|_{\partial M^n}$, temos

$$\text{tr}^g J^g = (2 - n)H^g$$

e

$$\text{div}^g J^g = \text{Ric}^g(\eta, \cdot).$$

Além disso,

$$\mathbf{m}_g = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1}} E^g(X, \mu^g) d\text{vol}_{S_{r,+}^{n-1}}^g + \int_{S_r^{n-2}} J^g(X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right], \quad (3.1)$$

onde tem-se que $\partial B_{r,+}^n = S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_r$ e $\partial \Sigma_r = S_r^{n-2}$.

Agora, de (3.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_g = d_n \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{S_{r,+}^{n-1} \cup \Sigma_r} E^g(\phi X, \mu^g) d\text{vol}_{\partial B_{r,+}^n}^g - \int_{\Sigma_r} E^g(\phi X, \mu^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\ \left. + \int_{S_r^{n-2}} J^g(\phi X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right]. \quad (3.2) \end{aligned}$$

De (3.2), Lema 3.1, Proposição 3.1, Lema 3.2 e Lema 3.3 temos

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_g &= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} J^g(\phi X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right] \\ &= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-2}} \frac{\phi}{\bar{\phi}} J^g(\bar{\phi} X, \vartheta^g) d\text{vol}_{S_r^{n-2}}^g \right] \\ &= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \text{div}(\hat{J}(\bar{\phi} X)) + \langle \bar{\nabla}(\frac{\phi}{\bar{\phi}}), \hat{J}(\bar{\phi} X) \rangle_g \right) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\
&\quad - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Sigma_r} \frac{\phi}{\bar{\phi}} \text{Ric}^g(\bar{\phi} X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g + \int_{\Sigma_r} \frac{\phi}{\bar{\phi}} \bar{\phi} \text{tr}^g J d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right) \\
&\quad \left. - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \langle \bar{\nabla}(\frac{\phi}{\bar{\phi}}), \hat{J}(\bar{\phi} X) \rangle_g d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right] \\
&= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right. \\
&\quad - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Sigma_r} \text{Ric}^g(\phi X, \eta^g) d\text{vol}_{\Sigma_r}^g + \int_{\Sigma_r} \phi \text{tr}^g J d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right) \\
&\quad \left. - \frac{2}{n-2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \langle \bar{\nabla}(\frac{\phi}{\bar{\phi}}), \hat{J}(\bar{\phi} X) \rangle d\text{vol}_{\Sigma_r}^g \right] \\
&= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + 2 \int_{\partial M} \phi H^g d\text{vol}_{\partial M}^g \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{n-2} \int_{\partial M} \langle \bar{\nabla}(\frac{\phi}{\bar{\phi}}), \hat{J}(\bar{\phi} X) \rangle d\text{vol}_{\partial M}^g \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando o Lema 3.1 tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_g &= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + 2 \int_{\partial M} \phi H^g d\text{vol}_{\partial M}^g \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{n-2} \int_{\partial M} \left\langle \frac{1}{\bar{\phi}^2} (-\bar{\phi} \phi A(\nabla f) + \phi \bar{\phi} \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}) - \bar{\phi} \nu(\phi) \nu), \hat{J}(\bar{\phi} X) \right\rangle d\text{vol}_{\partial M}^g \right].
\end{aligned}$$

Como

$$\langle \nu, \hat{J}(X) \rangle = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_g &= c_n \left[\int_M \phi R^g d\text{vol}_M^g + 2 \int_{\partial M} \phi H^g d\text{vol}_{\partial M}^g \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n-2} \int_{\partial M} \phi \langle A(\nabla f) - \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}), \hat{J}(X) \rangle d\text{vol}_{\partial M}^g \right].
\end{aligned}$$

□

Prova do Corolário 1.1. Do Teorema 1.7, o Corolário 1.1 está demonstrado.

Em particular, se $f_n = 0$, então

$$\begin{aligned}
\langle A(\nabla f) - \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}), \hat{J}(X) \rangle &= \langle \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}) - \bar{A}(\bar{\nabla} \bar{f}), \hat{J}(X) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

3.3 Desigualdade de Penrose

Agora vamos enunciar alguns resultados auxiliares.

Proposição 3.2. (Guan e Li, 2009, Teorema 2). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ seja um conjunto limitado e estrelado. Suponha também que $\Gamma = \partial\Omega$ seja suave e médio-convexo, isto é, que seja 1-convexo. Denote por H^δ a curvatura média de $\partial\Omega$ com respeito ao campo normal, unitário e interior a Ω e por $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma bola unitária. Então,*

$$\frac{1}{2n\omega_n} \int_{\Gamma} H^\delta \, d\text{vol}_{\Gamma} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Além disso, a igualdade ocorreria se, e somente se, Ω for uma bola.

Proposição 3.3. (Freire e Schwartz, 2014, Teorema 5, item(V)). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto (nã necessariamente conexo) limitado, com bordo suave, médio-convexo e êxtero-minimizante. Denote por H^δ a curvatura média de $\Gamma = \partial\Omega$ com respeito ao campo normal, unitário que aponta para dentro de Ω . Então,*

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Gamma} H^\delta \, d\text{vol}_{\Gamma} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (3.4)$$

Além disso, a igualdade ocorreria se, e somente se, cada componente conexa de Ω for uma bola redonda.

Lema 3.4. (Huang e Wu, 2015, Proposição 5.2, item(V)). *Seja a_1, \dots, a_k números reais não negativo e $0 \leq \beta \leq 1$. Então,*

$$\sum_{i=1}^k a_i^\beta \geq \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^\beta$$

Se, $0 \leq \beta \leq 1$, então a igualdade se mantém, se e somente se, no máximo um elemento de $\{a_1, \dots, a_k\}$ for diferente de zero.

Prova do Teorema 1.6. A nova demonstração para o Teorema 1.6. Usaremos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial M_\varepsilon} E(\phi X, \mu^g) \, d\text{vol}_{\partial M_\varepsilon} = 2(n-2) \int_{\Gamma} H^\delta \, d\text{vol}_{\Gamma},$$

(veja GRANGEIRO (2017)), (1.18), Teorema 1.7, Corolario 1.1 e (3.4). □

4 CONCLUSÃO

Na primeira parte da tese obtivemos que a massa e o centro de massa de uma variedade riemanniana assintoticamente plana com bordo não compacto podem ser calculados como o limite, quando r vai para infinito, da integral, sobre a esfera coordenada de raio r , de expressões em termos dos tensores de Einstein e Newton da variedade. Na segunda parte da tese aplicamos a expressão da massa obtida na primeira parte para obter uma nova demonstração, para gráficos euclidianos com bordo não compacto, do teorema da massa positiva e da desigualdade de Penrose.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDROV, A.D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. **Rec. Math. Moscou, n. Ser.**, v. 2, p. 1205–1238, 1937.
- ALEXANDROV, A.D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper. **Rec. Math. Moscou, n. Ser.**, v. 3, p. 27–46, 1938.
- ALMARAZ, Sérgio. Convergence of scalar-flat metrics on manifolds with boundary under a Yamabe-type flow. **J. Differ. Equations**, v. 259, n. 7, p. 2626–2694, 2015.
- ALMARAZ, Sérgio; BARBOSA, Ezequiel; DE LIMA, Levi Lopes. A positive mass theorem for asymptotically flat manifolds with a non-compact boundary. **Commun. Anal. Geom.**, v. 24, n. 4, p. 673–715, 2016.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Energy and the criteria for radiation in general relativity. **Phys. Rev. (2)**, v. 118, p. 1100–1104, 1960.
- ASHTEKAR, Abhay; HANSEN, R. O. A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I. Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity. **J. Math. Phys.**, v. 19, n. 7, p. 1542–1566, 1978. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.523863>.
- BARBOSA, Ezequiel; DE LIMA, Levi Lopes; FREITAS, Allan. The generalized Pohozaev-Schoen identity and some geometric applications. **arXiv preprint arXiv:1607.03073**, 2016.
- BARBOSA, Ezequiel; MEIRA, Adson. A positive mass theorem and Penrose inequality for graphs with noncompact boundary. **Pac. J. Math.**, v. 294, n. 2, p. 257–273, 2018.
- BARTNIK, Robert. The mass of an asymptotically flat manifold. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 39, n. 5, p. 661–693, 1986. URL <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160390505>.
- BEIG, R.; Ó MURCHADHA, N. The Poincaré group as the symmetry group of canonical general relativity. **Ann. Physics**, v. 174, n. 2, p. 463–498, 1987. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(87\)90037-6](http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(87)90037-6).
- BRAY, Hubert L. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. **J. Differential Geom.**, v. 59, n. 2, p. 177–267, 2001. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090349428>.
- BRAY, Hubert L.; LEE, Dan A. On the Riemannian Penrose inequality in dimensions

less than eight. **Duke Math. J.**, v. 148, n. 1, p. 81–106, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2009-020>.

BRENDLE, Simon. A generalization of the Yamabe flow for manifolds with boundary. **Asian J. Math.**, v. 6, n. 4, p. 625–644, 2002.

CEDERBAUM, Carla; CORTIER, Julien; SAKOVICH, Anna. On the center of mass of asymptotically hyperbolic initial data sets. **Annales Henri Poincaré**. Springer, 2016, v. 17, p. 1505–1528.

CHAI, Xiaoxiang. Two quasi-local masses evaluated on surfaces with boundary. **arXiv e-prints**, arXiv:1811.06168, 2018.

CHOQUET-BRUHAT, Yvonne. Positive-energy theorems. **Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983)**, North-Holland, Amsterdam, p. 739–785. 1984.

CHRUŚCIEL, Piotr. Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view. *Topological properties and global structure of space-time (Erice, 1985)*, Plenum, New York, v. 138 of **NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.**, p. 49–59. 1986a.

CHRUŚCIEL, Piotr T. A remark on the positive-energy theorem. **Classical Quantum Gravity**, v. 3, n. 6, p. L115–L121, 1986b. URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/3/L115>.

CORVINO, Justin. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Comm. Math. Phys.**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000. URL <http://dx.doi.org/10.1007/PL00005533>.

CORVINO, Justin; POLLACK, Daniel. Scalar curvature and the Einstein constraint equations. **Surveys in geometric analysis and relativity**, Int. Press, Somerville, MA, v. 20 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, p. 145–188. 2011.

CORVINO, Justin; SCHOEN, Richard M. On the asymptotics for the vacuum Einstein constraint equations. **J. Differential Geom.**, v. 73, n. 2, p. 185–217, 2006. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1146169910>.

CORVINO, Justin; WU, Haotian. On the center of mass of isolated systems. **Classical and Quantum Gravity**, v. 25, n. 8, p. 085008, 2008.

DE LIMA, Levi Lopes; GIRÃO, Frederico. The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 9, p. 6247–6266, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-05902-3>.

ESCOBAR, José F. The Yamabe problem on manifolds with boundary. **J. Differ. Geom.**, v. 35, n. 1, p. 21–84, 1992.

FREIRE, Alexandre; SCHWARTZ, Fernando. Mass-capacity inequalities for conformally flat manifolds with boundary. **Commun. Partial Differ. Equations**, v. 39, n. 1, p. 98–119, 2014.

GRANGEIRO, Filho A. **A massa e o centro de massa de gráficos**. 2017, 44 p. URL <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/29086>. Tese (Doutorado em Matemática) – Centro de Ciências – Universidade Federal do Ceará.

GUAN, Pengfei; LI, Junfang. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. **Adv. Math.**, v. 221, n. 5, p. 1725–1732, 2009. URL <https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.03.005>.

HERZLICH, Marc. Computing asymptotic invariants with the Ricci tensor on asymptotically flat and asymptotically hyperbolic manifolds. **Ann. Henri Poincaré**, v. 17, n. 12, p. 3605–3617, 2016. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00023-016-0494-5>.

HUANG, Lan-Hsuan. On the center of mass of isolated systems with general asymptotics. **Classical Quantum Gravity**, v. 26, n. 1, p. 015012, 25, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/1/015012>.

HUANG, Lan-Hsuan; WU, Damin. Hypersurfaces with nonnegative scalar curvature. **J. Differential Geom.**, v. 95, n. 2, p. 249–278, 2013. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1376053447>.

HUANG, Lan-Hsuan; WU, Damin. The equality case of the Penrose inequality for asymptotically flat graphs. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 1, p. 31–47, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06090-X>.

HUISKEN, Gerhard; ILMANEN, Tom. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. **J. Differential Geom.**, v. 59, n. 3, p. 353–437, 2001. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090349447>.

LAM, Mau-Kwong George. **The Graph Cases of the Riemannian Positive Mass and Penrose Inequalities in All Dimensions**. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2011, 88 p. URL http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:3454195. Thesis (Ph.D.)–Duke University.

LEE, John M.; PARKER, Thomas H. The Yamabe problem. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 17, n. 1, p. 37–91, 1987. URL <https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183553962>.

MIAO, Pengzi; TAM, Luen-Fai. Evaluation of the ADM mass and center of mass via the Ricci tensor. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 144, n. 2, p. 753–761, 2016. URL

<http://dx.doi.org/10.1090/proc12726>.

MICHEL, B. Geometric invariance of mass-like asymptotic invariants. **Journal of Mathematical Physics**, v. 52, n. 5, p. 052504, 2011. URL <https://doi.org/10.1063/1.3579137>.

MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. **Comm. Anal. Geom.**, v. 23, n. 2, p. 273–292, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2015.v23.n2.a2>.

PARKER, Thomas; TAUBES, Clifford Henry. On Witten’s proof of the positive energy theorem. **Comm. Math. Phys.**, v. 84, n. 2, p. 223–238, 1982. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103921154>.

RAULOT, Simon. Green functions for the Dirac operator under local boundary conditions and applications. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 39, n. 4, p. 337–359, 2011.

REGGE, T.; TEITELBOIM, C. Improved Hamiltonian for general relativity. **Physics Letters B**, v. 53, n. 1, p. 101 – 105, 1974a. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269374903554>.

REGGE, Tullio; TEITELBOIM, Claudio. Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. **Ann. Physics**, v. 88, p. 286–318, 1974b. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(74\)90404-7](http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(74)90404-7).

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature. **Invent. Math.**, v. 92, n. 1, p. 47–71, 1988. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01393992>.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. Positive Scalar Curvature and Minimal Hypersurface Singularities. **ArXiv e-prints**, 2017.

SCHOEN, Richard. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. **J. Differential Geom.**, v. 20, n. 2, p. 479–495, 1984. URL <https://doi.org/10.4310/jdg/1214439291>.

SCHOEN, Richard; YAU, Shing Tung. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. **Comm. Math. Phys.**, v. 65, n. 1, p. 45–76, 1979. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103904790>.

SCHOEN, Richard; YAU, Shing Tung. The energy and the linear momentum of space-times in general relativity. **Comm. Math. Phys.**, v. 79, n. 1, p. 47–51, 1981. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908887>.

WITTEN, Edward. A new proof of the positive energy theorem. **Comm. Math. Phys.**, v. 80, n. 3, p. 381–402, 1981. URL

<http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103919981>.