UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JARDÊNIA SOBRINHO GOES

SOBRE GRUPOS UNICAMENTE COBERTOS

Fortaleza
2011

JARDÊNIA SOBRINHO GOES

SOBRE GRUPOS UNICAMENTE COBERTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério.

Fortaleza
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

G543s Goes, Jardênia Sobrinho
Sobre grupos unicamente cobertos / Jardênia Sobrinho Goes. - 2011
67 f. ; 31 cm

Dissertação(mestrado)-Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza 2011.
Área de Concentração: Álgebra
Orientação: Prof. Dr. José Robério Rogério

1. Teoria dos grupos. 2. Grupos finitos. 1. Título.
CDD 512.2

Dedico este trabalho aos meus pais: José Almir (in memorian) e Luzia; ao meu amado esposo Cícero e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Sou eternamente grata a todos aqueles que direta e indiretamente colaboraram para a conclusão dessa importante etapa da minha vida profissional e de realização pessoal através de diferentes manifestações de carinho e amizade a mim demonstrados ao longo de minha passagem pela Pós - Graduação na Universidade Federal do Ceará. Por mais essa conquista alcançada, agradeço especialmente:

A Deus, pela minha vida e por está comigo em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis, e por ter me guiado a mais esta conquista. Obrigada por cuidar de mim Senhor;

À Nossa Senhora das Graças (por quem sou devota), pela proteção e amparo. Com Maria Santíssima guiando meus passos, mesmos nos momentos de angústias e tristeza, me sinto fortalecida e podendo compreender que nem sempre o que pedimos a Deus é o que Ele tem planejado para nós e para os nossos;

Aos meus pais, pois através deles recebi o dom mais precioso do mundo concedido por Deus: a vida. Já por isso seria muito grata, mas eles foram além, revestiram-me de amor, carinho e dedicação. Semearam na criança todos os bons valores que me tranforrmou numa adulta responsável e consciente. Papai, José Almir, um homem trabalhador e digno, firme, justo, bom, amoroso, um grande incentivador e um exemplo de honestidade. Através de palavras, orações e abraços apertados, me deu muita força para superar as dificuldades que encontrei no início do mestrado, e embora não estivesse pessoalmente demonstrando sua torcida na etapa final dessa pesquisa, pois Deus o chamou, sei que na sua nova morada ao lado de Jesus ele intercedeu por mim dando-me a força necessária na conclusão desse trabalho. Ao meu amado e inesquecível pai sempre retribuirei o seu amor tão prontamente dedicado a mim e a toda família, com o meu eterno amor e gratidão. Mamãe, Luzia, a bondade, a simplicidade, a fortaleza em pessoa. Com sua sabedoria me ensina a caminhar, a me entregar a Jesus e aos seus ensinamentos. Com sua ternura e proteção de mãe sempre me apoiando e rezando por mim, me fez reerguer diante das dificuldades que encontrei na vida. Um exemplo de mãe e amiga acolhedora. Obrigada pelo apoio, compreensão, amor e carinho dedicados a mim. Te amo muito minha mãezinha;

Ao meu amado esposo Cícero, por todo amor, companheirismo, apoio e ajuda. Testemunha direta de toda essa luta e sem dúvida o grande motivador para a realização do presente trabalho, pois nos momentos mais difíceis demonstrou seu amor incondicional através de gestos de carinho e cuidado. Não posso estimar o quanto se dedicou a mim quando precisei, mas sei que os sentimentos que me levam a fazer esse agradecimento são - além do amor- a profunda admiração e respeito que o tenho. Sua presença e incentivo foram fundamentais para a conclusão dessa difícil jornada. Te amo!

À minha amada irmã Glardênia (Dênia), por ser parte da minha vida, por ser minha irmã-amiga, por torcer por mim, acreditar em mim, por ter segurado firme minhas ausências junto aos demais da nossa família, e por ter comemorado cada uma das minhas conquistas como se fossem (e de fato também são) dela, pois sem o seu apoio não teria realizado boa parte dos meus projetos de vida planejados até aqui;

À minha adorável irmã Valdênia, pelo apoio, amor e orações. Sua torcida por mim me contagia e me anima, te amo manhinha!

A todos os meus amados irmãos, pela compreensão, apoio, torcida e carinho;

Aos meus amados cunhados e cunhadas, sobrinhos e sobrinhas, pelo carinho e pela palavras de incentivo;

Às minhas amadas primas, tia Etelvina e tia Socorro, pelas carinhosas palavras de estímulo e de conforto;

À minha amada avó, Maria Luna, pelo seu amor, carinho e inúmeras orações;

Às minhas sinceras e leais amigas de infância: Keilla, Fernanda e Socorrinha que desde o início do curso de mestrado confiaram em mim, foram solidárias e companheiras nos momentos difíceis, principalmente nos últimos oito meses, e estiveram sempre presentes, através de telefonemas ou e-mails, na torcida para que tudo desse certo;

À minha querida e prestativa amiga Karmem Werusca, pela força, confiança,

palavras de incentivo e amizade.

Aos meus amados sogros, Pedro e Raimunda, pelas palavras de conforto e de apoio, por serem tão amorosos e carinhosos comigo;

Ao meu orientador, professor Dr. José Robério Rogério que generosamente aceitou meu pedido de orientação. Pela atenção, insentivo, apoio técnico e pessoal durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Por sua dedicação, disponibilidade e paciência em revisar todo o texto desta dissertação. Que Deus o abençõe!

Aos demais membros da banca por terem aceitado a tarefa de compô-la: ao professor Dr. Emanuel Augusto de Souza Carneiro (IMPA), pela sua honrosa presença e valorosos comentários sobre este trabalho que enriqueceram o mesmo; ao professor Dr. José Othon Dantas Lopes (UFC), pelo tempo reservado para a leitura deste trabalho e pelas sugestões apontadas. Agradeço também, por ter sido um professor dedicado, comprometido, atencioso, disponível e por ter fortalecido, através da disciplina que nos ministrou no curso de mestrado, a minha decisão de estudar Álgebra.

Aos colegas de mestrado e doutorado, em especial ao Diego, pela sua colaboração e suporte;

Aos professores e funcionários da Pós - Graduação de Matemática da Universidade Federal do Ceará, e em especial a secretária da Pós - Graduação, Andrea, por toda atenção, colaboração e pela prontidão em me auxiliar durante o período de mestrado nas questões administrativas;

À secretaria de Educação de Cultura do Piauí - SEDUC-PI, por sua importante e indispensável contribuição prestada durante esse período, dispensandome das funções de docente;

À Capes pela concessão da bolsa de mestrado.

Que Deus os recompense!

“A felicidade mantêm você doce;
Dores mantêm você humano;
Quedas te mantêm humilde;
Provações te mantêm forte;
Mas somente Deus te mantêm prosseguindo!”
(Autor desconhecido.)

RESUMO

Este trabalho é baseado no artigo "Uniquely Covered Groups"de M. A. Brodie, que investiga grupos finitos que possuem uma única cobertura irredundante por subgrupos próprios. O resultado principal obtido por M. A. Brodie assegura que um grupo finito e não nilpotente G é unicamente coberto se, e somente se, $G/Z(G)$ é um grupo não abeliano de ordem pq, onde p e q são primos distintos e $\langle x, Z(G)\rangle$ é cíclico para todo $x \in G$. Nosso propósito é apresentar a demonstração e uma aplicação deste teorema.

Palavras-chave: Teoria dos Grupos; Cobertura finita; Irredundante; Partição; Subgrupo maximal.

ABSTRACT

This work is based on the paper "Uniquely covered groups" due to M. A. Brodie, which investigates finite groups that have a single irredundant covering by subgroups. The main result obtained by M. A. Brodie asserts that a non-nilpotent finite group G is uniquely covered if and only if $G/Z(G)$ is a non-abelian group of order pq, where p and q are distinct primes and $\langle x, Z(G)\rangle$ is cyclic for every $x \in G$. Our purpose is to present the proof and an application of this theorem.

Keywords: Group Theory; Finite covering; Irredundant; Partition; Maximal subgroup.

Sumário

1 Introdução **10**

2 Nocões Elementares de Teoria dos Grupos **13**
2.1 Classes Laterais e Teorema de Lagrange 13
2.2 Subgrupos Normais e Grupos Cíclicos 16
2.3 Teoremas de Isomorfismos e o Teorema da Correspondência . . 21
2.4 Teoremas de Sylow 22
2.5 O Produto Semidireto 24
2.5.1 Produto Direto 24
2.5.2 Produto Semidireto 25

3 Preliminares **27**
3.1 Comutadores 27
3.2 Solubilidade e Nilpotência 29
3.3 Teorema de Schur-Zassenhaus e Aplicações 34

4 Grupos Unicamente Cobertos **37**
4.1 Definições e Exemplos 37
4.2 Algumas Propriedades Elementares 44
4.3 Grupos Nilpotentes Unicamente Cobertos 49
4.4 Grupos Não Nilpotentes Unicamente Cobertos 53
4.5 Grupos com r Coberturas Irredundantes 61

Capítulo 1

Introdução

Um conjunto $\mathcal{S}$ de subgrupos próprios de um grupo G é chamado de cobertura para G sempre que ocorrer $G = \bigcup_{H \in \mathcal{S}} H$. A cobertura $\mathcal{S}$ é chamada irredundante se nenhuma subcoleção de $\mathcal{S}$ cobre G.

Os primeiros resultados sobre cobertura de grupos surgiram na década de 20 num trabalho de G. Scorza [12]. Em meados dos anos 50, B. Neumann em [7] e [8] investigou coberturas de grupos por subconjuntos permutáveis e por classes laterais, respectivamente. Em 1988 M.A. Brodie e R.F. Chamberlim [3] obtiveram resultados sobre coberturas finitas por subgrupos normais.

Outros resultados interessantes, ainda nesse contexto, podem ser vistos no artigo [4] de J.H. Cohn. Neste artigo, o autor estima a quantidade mínima de subgrupos em uma cobertura irredundante.

Esta dissertação de mestrado é baseada no artigo de M.A. Brodie [2] publicado em 2003, que trata sobre os grupos finitos que têm exatamente uma cobertura irredundante por subgrupos próprios. Como exemplo desses tipos de grupos podemos citar: $C_2 \times C_2$, o qual é coberto pelos seus três subgrupos de ordem dois; o grupo quatérnio Q de ordem oito, que é escrito como união de seus três subgrupos cíclicos de ordem quatro; e S_3, o qual possui uma cobertura formada por seu subgrupo de ordem três e seus três subgrupos de ordem dois.

Mostraremos que esses grupos se dividem naturalmente em duas classes, a de grupos nilpotentes e a de grupos não nilpotentes. Apresentaremos agora os resultados principais do artigo de M.A. Brodie [2]. O primeiro deles caracteriza grupos nilpotentes finitos que possuem uma única cobertura. Mais precisamente, este resultado estabelece o seguinte

Teorema 1.1. *Seja G um grupo nilpotente finito unicamente coberto. Então G é isomorfo a um dos grupos Q, $Q \times C_n$, (n ímpar), $C_p \times C_p$ ou a $C_p \times C_p \times C_n$, onde (n,p)=1.*

Denotemos por Ψ a classe formada pelos grupos finitos que possuem uma única cobertura irredundante por subgrupos próprios juntamente com todos os subgrupos cíclicos finitos. De posse disto, podemos enunciar o segundo resultado.

Teorema 1.2. *Seja G um grupo finito não nilpotente. Então $G \in \Psi$ se, e somente se, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo não abeliano de ordem pq para primos distintos p e q, e $\langle x, Z(G)\rangle$ é cíclico para todo $x \in G$.*

O nosso texto foi dividido em três partes. No capítulo 2, desenvolvemos alguns tópicos básicos de teoria dos grupos que serão necessários posteriormente. A seção 2.1 traz a noção de classe lateral de um subgrupo e apresenta o Teorema de Poincaré, que é de simples demonstração e não menos importante neste trabalho. A seção 2.2 define os principais subgrupos que aparecem no texto. A seção 2.3 trata dos teoremas de isomorfismos, teorema da correspondência e de subgrupo característico, os quais são de grande utilidade na prova dos principais resultados deste trabalho. Nas seções 2.4 e 2.5, são abordados os teoremas de Sylow e produtos direto e semidireto de grupos, tópicos essenciais para a fundamentação do capítulo 4.

Nas duas primeiras seções do capítulo 3, apresentamos algumas propriedades básicas sobre comutadores e fazemos um breve estudo dos grupos nilpotentes, solúveis e supersolúveis, destacando alguns resultados básicos que nos serão fundamentais no capítulo final. Ainda na seção 2, apresentamos uma classificação de grupos, cuja ordem é uma potência de um número primo, que possuem um subgrupo cíclico o qual é maximal.

Teorema 1.3. *Um grupo de ordem p^n, p primo, possui um subgrupo cíclico de índice p se, e somente se, ele é um dos seguintes tipos:*

(i) *Um grupo cíclico de ordem p^n;*

(ii) *Um produto direto de um grupo cíclico de ordem* p^{n-1} *com um de ordem* p*;*

(iii) $\langle x, y; x^p = 1 = y^{p^{n-1}}, y^x = y^{1+p^{n-2}} \rangle,\ n \geq 3$*;*

(iv) *O grupo diedral* $D_{2^n},\ n \geq 3$*;*

(v) *O grupo quatérnio generalizado* Q_{2^n}*,* $n \geq 3$*;*

(vi) *O grupo semidiedral* $\langle x, y; x^2 = 1 = y^{2^{n-1}}, y^x = y^{2^{n-2}-1} \rangle,\ n > 3.$

Utilizamos fortemente este resultado para provarmos o teorema que caracteriza os grupos nilpotentes finitos que possuem uma única cobertura irredundante o qual apresentaremos na penúltima seção do capítulo 4. Finalizamos este capítulo apresentando um teorema de caracterização de grupos finitos que posuem um subgrupo maximal e abeliano. Usaremos tal resultado no último capítulo para provarmos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 1.4. *Se* $G \in \Psi$*, então* G *possui um subgrupo cíclico normal de índice primo.*

Completamos assim os pré-requisitos necessários para a compreensão dos resultados principais deste trabalho.

Na última parte, correspondente ao capítulo 4, apresentamos a prova dos resultados principais deste trabalho, bem como exibimos uma aplicação de um desses teoremas. Finalizamos esta dissertação apresentando um exemplo de um grupo abeliano finito que possui r coberturas irredundantes por subgrupos próprios, onde r é um número natural.

Capítulo 2

Nocões Elementares de Teoria dos Grupos

Neste capítulo estabeleceremos alguns conceitos e resultados da Teoria dos Grupos, que são necessários para leitura desta dissertação. Em geral não apresentaremos as demonstrações destes resultados, todavia indicaremos uma bibliografia na qual o leitor poderá consultá-las. Quando nos referirmos a um grupo G, estará implicito que é um grupo multiplicativo com elemento neutro 1.

2.1 Classes Laterais e Teorema de Lagrange

Proposição 2.1. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G.*

(i) *A relação "$\sim$" sobre G definida por "$a \sim b$ se, e somente se, $b^{-1}a \in H$" é uma relação de equivalência;*

(ii) *Se $a \in G$, então a classe de equivalência determinada por a é o conjunto $aH = \{ah; h \in H\}$.*

Demonstração. **(i)**

- Como $a^{-1}a = 1 \in H$, então $a \sim a$ e, portanto vale a reflexividade para "$\sim$";

- Se $a \sim b$, então $b^{-1}a \in H$. Mas, sendo H subgrupo de G, então $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H$. Isso mostra que $b \sim a$ e, portanto, que a simetria também se verifica para a relação definida acima;

- Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $b^{-1}a, c^{-1}b \in H$, daí, $c^{-1}a = (c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$ e, portanto, $a \sim c$, donde a transitividade também é satisfeita neste caso.
  $\therefore$ A relação " $\sim$ " é de equivalência.

(ii) Seja $\overline{a}$ a classe de equivalência do elemento a. Se $x \in \overline{a}$, então $x \sim a$, isto é $a^{-1}x \in H$. Daí, $a^{-1}x = h$, para algum $h \in H$. Portanto, $x = ah \in aH$. Por outro lado, se $x \in aH$, então $x = ah$, para um certo $h \in H$. Assim, $a^{-1}x = h \in H$ e, portanto, $x \sim a$, donde $x \in \overline{a}$.
$\therefore \overline{a} = aH$.

$\square$

Definição 2.2. *Para cada $a \in G$, a classe de equivalência aH definida pela relação " $\sim$ " introduzida na Proposição 2.1 é chamada classe lateral à esquerda de H em G que contém a.*

Decorre imediatamente da Proposição 2.1 que:

(1) Se $a \in G$, então $aH \neq \varnothing$;

(2) Se $a, b \in G$, então $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$;

(3) A união de todas as classes laterais à esquerda é igual a G.

De maneira análoga podemos demonstrar que a relação " $\sim$ " definida por " $a \sim b$ se, e somente se, $ab^{-1} \in H$" também é uma relação de equivalência sobre G. A classe de equivalência de um elemento $a \in G$ é o subconjunto $Ha = \{ha; h \in H\}$, que chamamos de classe lateral à direita de H em G que contém a.

Definição 2.3. *Seja H um subgrupo de G (notação: $H \leq G$). Dizemos que:*

(i) *$T \subseteq G$ é um transversal de H em G (à esquerda), se $G = \dot{\bigcup\limits_{t \in T}} tH$ e $t_1 \neq t_2$ implica $t_1H \neq t_2H$;*

(ii) *$S \subseteq G$ é um transversal de H em G (à direita), se $G = \dot{\bigcup\limits_{s \in S}} Hs$ e $s_1 \neq s_2$ implica $Hs_1 \neq Hs_2$.*

Definição 2.4. *Sejam G um grupo e $H \leq G$.*

(i) *A ordem de G, denotada por $|G|$, é o número de elementos de G;*

(ii) *A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda é o índice de H em G. Ele será denotado por $|G : H|$.*

Proposição 2.5. *Sejam G um grupo, $H \leq G$ e $x \in G$ qualquer, temos:*

(i) $|xH| = |H| = |Hx|$;

(ii) *(Lagrange). Se G é finito, então $|G| = |H||G : H|$.*

Demonstração. **(i)** De fato, sabemos que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se existe uma bijeção entre eles. E a função $\varphi : Hx \to H$, definida por $hx \mapsto h$ é claramente uma bijeção;

(ii) Considere $x_1H, \cdots, x_tH$ as classes laterais (à esquerda) distintas. Então, $|G : H| = t$. E devido a Proposição 2.1 temos : $G = x_1H \bigcup \cdots \bigcup x_tH$ e $x_iH \cap x_jH = \varnothing$, sempre que $i \neq j$. E portanto,

$$|G| = |x_1H| + \cdots + |x_rH| = \underbrace{|H| + \cdots + |H|}_{t \ vezes} = t|H|.$$

$\square$

Proposição 2.6 (Teorema do Índice). *Seja G um grupo. Se $K \leq H \leq G$, então $|G : K| = |G : H||H : K|$.*

Demonstração. Veja [6]. $\square$

Teorema 2.7 (Teorema de Poincaré). *Sejam H e K subgrupos de índice finito de um grupo G, então $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$, valendo a igualdade se $(|G : H|, |G : K|) = 1$.*

Demonstração. Veja [10]. $\square$

Proposição 2.8. *Sejam H e K subgrupos finitos de um grupo G. Então:*

(i) $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$;

(ii) *Se $(|H|, |K|) = 1$, então $H \cap K = \{1\}$.*

Demonstração. Veja [11]. $\square$

2.2 Subgrupos Normais e Grupos Cíclicos

Nesta seção apresentamos duas classes particulares de subgrupos de um grupo G, cujas propriedades são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 2.9. *Seja G um grupo.*

(i) *Para $x, y \in G$ definimos:*

- *a ordem de um elemento $x \in G$, que denotamos por $o(x)$, é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 1$. Quando não existe tal n, dizemos que $o(x) = \infty$;*
- *o subgrupo $C_G(x) = \{g \in G;\ xg = gx\}$ é chamado de centralizador de x em G;*
- *o conjugado de x por y é o elemento $x^y = y^{-1}xy$.*

(ii) *Seja $X \subset G$, o subgrupo $\langle X \rangle = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} \ldots\ x_k^{e_k};\ x_i \in X,\ e_i = \pm 1\}$ é chamado de subgrupo gerado por X. Se $X = \{x\}$, então $\langle X \rangle = \langle x \rangle$ é o subgrupo gerado pelo elemento x, e o chamamos de subgrupo cíclico.*

(iii) *Sejam $H \leq G$ e $g \in G$:*

- *o subgrupo $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg;\ h \in H\}$ é chamado de conjugado de H por g e denotamos por H^g. Dizemos que $K \leq G$ é um conjugado de H se $K = H^g$ para algum $g \in G$;*
- *o subgrupo $C_G(H) = \{g \in G; hg = gh, \forall h \in H\} = \bigcap\limits_{h \in H} C_G(h)$ é chamado de centralizador de H em G.*

Lema 2.10. *Se G é um grupo e $H \leq G$, então $|H| = |H^g|$ para todo $g \in G$.*

Demonstração. A aplicação $\varphi : H \to H^g$ definida por $h \mapsto g^{-1}hg$ é claramente uma bijeção. $\square$

Definição 2.11. *Dizemos que um subgrupo N de um grupo G é um subgrupo normal de G, se $xN = Nx$ para todo $x \in G$. Usaremos neste caso a notação $N \trianglelefteq G$.*

Proposição 2.12. *Seja G um grupo e $N \leq G$. São equivalentes:*

(i) $N \trianglelefteq G$;

(ii) $x^{-1}Nx = N \ \forall \ x \in G$;

(iii) $x^{-1}Nx \subseteq N \ \forall \ x \in G$.

Demonstração. Veja [1]. □

Proposição 2.13. *Seja G um grupo. Se $N \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{N} = \{xN; \ x \in G\}$, então $\dfrac{G}{N}$ é um grupo com a operação $(aN)(bN) = abN$.*

Demonstração. Veja [6]. □

Observação 2.14. *Um subgrupo de $\dfrac{G}{N}$ é da forma $\dfrac{H}{N}$, onde H é um subgrupo de G que contém N.*

Definição 2.15. *Sejam G um grupo e $H \leq G$.*

(i) *O centro de G é o subgrupo $Z(G) = \{g \in G; xg = gx, \forall \ x \in G\} = C_G(G)$;*

(ii) *O subgrupo $N_G(H) = \{g \in G; g^{-1}Hg = H\} = \{g \in G; H^g = H\}$, é chamado de normalizador de H em G;*

(iii) *O subgrupo $H_G = \bigcap_{y \in G} y^{-1}Hy$, é chamado de núcleo normal de H em G;*

(iv) *O subgrupo $H^G = \langle y^{-1}Hy; \ y \in G\rangle$, é chamado de fecho normal de H em G.*

Observação 2.16. *Facilmente se verifica que:*

- *$Z(G)$, H_G e H^G são subgrupos normais de G;*
- *$N_G(H)$ é o maior subgrupo de G no qual H é normal;*
- *$N_G(H) = G \Leftrightarrow H \lhd G$;*
- *H_G é o maior subgrupo normal de G contido em H e H^G é o menor subgrupo normal de G que contém H.*

Proposição 2.17. *Seja G um grupo.*

(i) *Se $H \leq G$, então o número de conjugados de H em G é igual ao índice de seu normalizador;*

(ii) *Seja G finito. Se $H < G$, então G não é a união de todos os conjugados de H, ou seja, $G \neq \bigcup_{g \in G} H^g$;*

(iii) *Se $H \leq K \leq G$, então $N_K(H) = N_G(H) \bigcap K$.*

Demonstração. (i) Seja $\mathcal{O} = \{H^g; g \in G\}$ a família de todos os conjugados de H, e seja $\mathcal{C} = \{N_G(H)g; g \in G\}$ a família de todas as classes laterais à direita de $N_G(H) = N$. Mostraremos que existe uma bijeção entre esses dois conjuntos. Para isto, defina a aplicação $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{C}$ por $\varphi(g^{-1}Hg) = Ng$. Temos que:

- φ é bem definida:
  De fato, se $a^{-1}Ha = b^{-1}Hb$ para algum $b \in G$, então $ba^{-1}Hab^{-1} = H$, ou seja, $(ab^{-1})^{-1}H(ab^{-1}) = H$ e ab^{-1} normaliza H, isto é, $ab^{-1} \in N$ e assim, $Na = Nb$;

- φ é injetiva:
  Suponha que $Na = \varphi(a^{-1}Ha) = \varphi(c^{-1}Hc) = Nc$ para algum $c \in G$. Então $ac^{-1} \in N$, ac^{-1} normaliza H, $(ac^{-1})^{-1}H(ac^{-1}) = H$ e $a^{-1}Ha = c^{-1}Hc$;

- φ é claramente sobrejetiva.

Portanto, φ é uma bijeção e $|\mathcal{O}| = |\mathcal{C}| = |G : N_G(H)|$.

(ii) Seja $|G : H| = n$, $|G| = m$ e $|G : N_G(H)| = c$. Já que $H \leq N_G(H)$, então pela Proposição 2.6 (Teorema do Índice) e pelo item anterior, $c \leq n$. Como a identidade é um elemento comum a todos os conjugados de H e $|H| = |H^g|$ para todo $g \in G$, segue que:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(|H^{g_1}| - 1) + \cdots + (|H^{g_c}| - 1)}_{c \text{ termos}} + 1 &= \underbrace{(|H| - 1) + \cdots + (|H| - 1)}_{c \text{ termos}} + 1 \\
&= c \cdot (|H| - 1) + 1 \\
&\leq n(|H| - 1) + 1 \\
&= m - (n - 1) \\
&< m
\end{aligned}$$

E com isso completamos a prova deste item.

(iii) Deixamos a prova deste item a cargo do leitor. □

Proposição 2.18.

(i) *Seja G um grupo e $H, N \leq G$ com $N \trianglelefteq G$. Então $N \cap H \trianglelefteq H$;*

(ii) *Seja G um grupo e $K \leq H \leq G$. Se $K \trianglelefteq G$, então $K \trianglelefteq H$;*

(iii) *Se G é um grupo abeliano, então todo subgrupo H de G é normal em G;*

(iv) *Seja G um grupo finito e p o menor divisor primo de $|G|$. Se $H \leq G$ e $|G : H| = p$, então $H \trianglelefteq G$;*

(v) *Seja $N \leq G$ com $|G : N| = 2$, então $N \trianglelefteq G$.*

Demonstração. Veja [6] e [11]. □

Sejam H e K dois subgrupos de um grupo G. Temos:

$$\langle H \cup K \rangle \supseteq HK := \{hk; h \in H \text{ e } k \in K\} \supseteq H \cup K.$$

Portanto, é claro que:

$$\langle H \cup K \rangle = HK \Leftrightarrow HK \leq G.$$

Veremos na proposição a seguir em que condições HK é um subgrupo de G.

Proposição 2.19. *Sejam H, K dois subgrupos de um grupo G.*

(i) *Então $HK \leq G$ se, e somente se, $HK = KH$;*

(ii) *Se H ou K for normal em G, então HK é um subgrupo de G;*

(iii) *Se H e K são subgrupos normais em G, então HK é um subgrupo normal de G.*

Demonstração. Veja [1]. □

Proposição 2.20. *Sejam G um grupo e H e K subgrupos de G com índices finitos. Se $(|G : H|, |G : K|) = 1$, então $G = HK$.*

Demonstração. Veja [6]. □

Definição 2.21. *Um grupo G será chamado grupo cíclico se, para algum elemento $g \in G$, se verificar a igualdade $G = \langle g \rangle$. Nessas condições, o elemento g é chamado gerador do grupo G.*

Proposição 2.22. *Seja G um grupo e $a \in G$, então:*

(i) *$o(a) = |\langle a \rangle|$, se $o(a) \neq \infty$;*

(ii) *Se $a^n = 1$, então $o(a) \mid n$;*

(iii) *Seja r um inteiro positivo. Se $o(a) = m$, então $o(a^r) = \dfrac{m}{(r,m)}$.*

Demonstração. Veja [6]. □

Exemplo 2.23. *Seja G um grupo. Se G tem ordem prima, então G é cíclico. De fato, seja $|G| = p$ onde p é um número primo. Se $g \in G$, $1 \neq g$ então $\langle g \rangle$ é um subgrupo de G. Assim, por Lagrange (cf. Proposição 2.5) $|\langle g \rangle|$ é um divisor de p e $|\langle g \rangle| > 1$. Portanto $|\langle g \rangle| = p$ e isso nos diz que $G = \langle g \rangle$.*

Proposição 2.24. *Seja $G = \langle a \rangle = \{1, a, ..., a^{n-1}\}$ um grupo cíclico finito de ordem n. Então:*

(i) *O elemento a^m é um gerador de G se, e somente se, $(m, n) = 1$;*

(ii) *Todo subgrupo H de G também é cíclico. Mais precisamente, $H = \langle a^m \rangle$ onde m é o menor inteiro positivo tal que $a^m \in H$. O subgrupo H tem ordem igual a n/m;*

(iii) *Se d é um divisor de n, então existe um único subgrupo H de G com ordem igual a d. Este subgrupo H é igual a $\langle a^{n/d} \rangle$;*

(iv) *Seja $N \trianglelefteq G$, então $\dfrac{G}{N}$ é cíclico.*

Demonstração. Veja [5]. □

Observação 2.25. *Segue diretamente do item (i) da Proposição acima, que se $G = \langle a \rangle$ e $|G| = p$, p primo, então a^m gera o grupo G com $1 \leq m \leq p - 1$.*

Definição 2.26. *Um subgrupo próprio M de um grupo finito G é dito ser maximal em G, quando M não está contido em qualquer outro subgrupo próprio de G.*
Denotaremos por $M \lessdot G$.

2.3 Teoremas de Isomorfismos e o Teorema da Correspondência

Definição 2.27. *Sejam G e K grupos. Uma aplicação $\varphi: G \longrightarrow K$ é um homomorfismo se $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para $a, b \in G$. O núcleo de φ é definido por*

$$Ker(\varphi) = \{g \in G;\ \varphi(g) = 1_K\}.$$

A imagem de φ é definida e denotada por $Im(\varphi) = \varphi(G)$. Um homomorfismo bijetivo é chamado de ***isomorfismo***. *Se existe tal isomorfismo, diremos que G é isomorfo a K e denotaremos por $G \cong K$.*

Teorema 2.28 (**Primeiro Teorema do Isomorfismo**). *Sejam G, H grupos e $\varphi: G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então,*

$$\frac{G}{Ker(\varphi)} \cong Im(\varphi).$$

Corolário 2.29 (**Segundo Teorema do Isomorfismo**). *Sejam G um grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, então $N \cap H \trianglelefteq H$, $N \trianglelefteq NH$ e $\dfrac{HN}{N} \cong \dfrac{H}{H \cap N}$.*

Corolário 2.30 (**Terceiro Teorema do Isomorfismo**). *Sejam G um grupo, $H \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$ e $H \leq N$. Então,*

$$\frac{G}{N} = \frac{G/H}{N/H}.$$

Teorema 2.31 (**Teorema da Correspondência**). *Se G é um grupo e $N \trianglelefteq G$, então existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de G que contêm N e os subgrupos de $\dfrac{G}{N}$. Por esta correspondência, subgrupos normais de G que contêm N correspondem a subgrupos normais de $\dfrac{G}{N}$ e vale a recíproca.*

As demonstrações dos resultados acima, podem ser encontradas em [6].

Definição 2.32. *Um automorfismo de um grupo G é um isomorfismo $\varphi: G \rightarrow G$. Um subgrupo H de G é chamado de característico em G, denotado por $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$, se $\varphi(H) = H$ para todo automorfismo φ de G.*

Lema 2.33. *Seja G um grupo e $H \leq G$.*

(i) *Se H é o único subgrupo de ordem n de G, então $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$;*

(ii) *Se $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$, então $H \trianglelefteq G$.*

Demonstração.

(i) Seja $\varphi : G \to G$ um automorfismo. Sabemos que $|\varphi(H)| = |H|$, e pela hipótese concluímos que $\varphi(H) = H$. Portanto, $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$.

(ii) Sendo $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$, segue que $\varphi(H) = H$ para todo automorfismo $\varphi : G \to G$. Consideremos em particular o automorfismo $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$ (conjugação por a). Disto segue que $a^{-1}Ha = H$ para todo $a \in G$, portanto $H \trianglelefteq G$.

□

Observação 2.34. *Note que todo subgrupo de um grupo cíclico finito G é característico em G.*

Lema 2.35. *Sejam G um grupo e $H, K \leq G$.*

(i) *Se $H \underset{car}{\trianglelefteq} K$ e $K \underset{car}{\trianglelefteq} G$, então $H \underset{car}{\trianglelefteq} G$;*

(ii) *Se $H \underset{car}{\trianglelefteq} K$ e $K \triangleleft G$, então $H \triangleleft G$.*

Demonstração. Veja [11]. □

2.4 Teoremas de Sylow

Teorema 2.36 (Primeiro Teorema de Sylow). *Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m r$ com $(p, r) = 1$. Então, para cada n, $0 \leq n \leq m$, existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^n$.*

Corolário 2.37. *Seja G um grupo finito e seja p um número primo. Seja p^m a maior potência de p que divide $|G|$. Então existe um subgrupo de G de ordem p^m.*

Definição 2.38. *Sejam G um grupo finito, p um primo e p^m a maior potência de p que divide $|G|$. Os subgrupos de G que têm ordem p^m (cuja existência está garantida pelo corolário acima) são chamados de $p-$subgrupos de* Sylow *de G.*

Escreveremos $P \in Syl_p(G)$ para dizer que P é um $p-$*subgrupo* de Sylow de G.

Definição 2.39. *Seja p um primo. Um grupo G (não necessariamente finito) no qual todo elemento tem sua ordem igual a uma potência de p é chamado um* $p - grupo$.

Corolário 2.40. *Seja p um primo. Um grupo finito G é um* $p - grupo$ *se, e somente se,* $|G|$ *é uma potência de p.*

Proposição 2.41. *Todo subgrupo H de índice primo p em um* $p - grupo$ *G é normal em G.*

Teorema 2.42 (Segundo Teorema de Sylow). *Sejam G um grupo finito, p um número primo e* n_p *o número de* $p - subgrupos$ *de Sylow de G. Então:*

(i) *Todos os* $p - subgrupos$ *de Sylow de G são conjugados entre si. Em particular, um* $p - subgrupo$ *de Sylow P de G é normal em G se, e somente se, P é o único* $p - subgrupo$ *de Sylow de G. Neste caso, P é um subgrupo característico de G;*

(ii) *Se H é um* $p - subgrupo$ *de G, existe um* $p - subgrupo$ *de Sylow P de G tal que* $H \subseteq P$*;*

(iii) *Se p é um* $p - subgrupo$ *de Sylow, temos* $n_p = |G : N_G(P)|$. *Em particular,* $n_p \mid |G : P|$.

Lema 2.43. *Sejam G um grupo finito e p um número primo. Sejam P um* $p - subgrupo$ *de Sylow de G e Q um* $p - subgrupo$ *qualquer de G. Então* $Q \cap N_G(P) = Q \cap P$.

Teorema 2.44 (Terceiro Teorema de Sylow). *Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem* $p^m r$, *com* $(p, r) = 1$. *Se* n_p *é o número de* $p - subgrupos$ *de Sylow de G. Então:*

(i) $n_p \mid r$;

(ii) $n_p \equiv 1 (mod\ p)$.

Corolário 2.45 (Argumento de Frattini). *Se* $N \trianglelefteq G$ *e* $P \in Syl_p(N)$, *então* $G = NN_G(P)$.

As demonstrações dos resultados enunciados nesta seção podem ser consultadas em [5] e [9].

2.5 O Produto Semidireto

2.5.1 Produto Direto

Sejam H e K grupos. Considere o conjunto $H \times K = \{(h,k); h \in H, k \in K\}$. Defina em $H \times K$ a seguinte operação:

$$(h,k) \odot (h_1,k_1) = (hh_1, kk_1),$$

$\forall\ h, h_1 \in H$ e $\forall\ k, k_1 \in K$. É possível mostrar que $(H \times K, \odot)$ é um grupo. Os subgrupos $H^* = \{(h,1); h \in H\}$ e $K^* = \{(1,k); k \in K\}$ são respectivamente isomorfos aos grupos H e K, para isto basta observar que as aplicacões $\varphi : H \to H^*$ e $\psi : K \to K^*$ definidas por $\varphi(h) = (h,1)$ e $\psi(k) = (1,k)$ são isomorfismos.

Proposição 2.46. *Sejam H e K grupos. Então os subgrupos H^* e K^* são subgrupos normais de $G = H \times K$ com $H \times K = H^*K^*$ e $H^* \cap K^* = \{1\}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que $g^{-1}H^*g = H^*$ para todo $g \in H \times K$, como $H^* \subseteq g^{-1}H^*g$, para todo g em $H \times K$, basta provarmos que também vale a inclusão contrária. Veja que

$$\begin{aligned}
(h,k)^{-1}(h,1)(h,k) &= (h^{-1},k^{-1})(h,1)(h,k) \\
&= (h^{-1}h, k^{-1}1)(h,k) \\
&= (h^{-1}hh, k^{-1}1k) \\
&= (h,1) \in H^* \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

$\therefore H^* \trianglelefteq G$. Analogamente mostra-se que $K^* \trianglelefteq G$.
Pela Proposição 2.19, segue que $H^*K^* \leq H \times K$. Seja $(h,k) \in H \times K$, temos $(h,k) = (h,1)(1,k) \in H^*K^*$.
$\therefore H \times K = H^*K^*$, com $H^* \cap K^* = \{1\}$. □

Reciprocamente temos:

Proposição 2.47. *Seja G um grupo tal que H e K são subgrupos normais de G com $G = HK$ e $H \cap K = \{1\}$. Então, $G \cong H \times K$.*

Demonstração. Veja [11]. □

Provaremos agora um resultado que nos será útil no capítulo 4.

Proposição 2.48. *Sejam* $G = H \times K$ *e* $L \leq G$*. Se* $(|H|, |K|) = 1$*, então* $L = (H \cap L) \times (K \cap L)$*.*

Demonstração. Suponha que $G = HK$, com $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ e $H \cap K = \{1\}$. Como $|G : H|$ e $|G : K|$ são relativamente primos, temos também , $|L : H \cap L|$ e $|L : K \cap L|$ relativamente primos. Logo, $L = (H \cap L)(K \cap L)$. Por outro lado, temos $H \cap L \trianglelefteq L$ (já que $H \trianglelefteq G$), $K \cap L \trianglelefteq L$ (já que $K \trianglelefteq G$) e $(H \cap L) \cap (K \cap L) = (H \cap K) \cap L = \{1\} \cap L = \{1\}$. Donde $L = (H \cap L) \times (K \cap L)$. □

Proposição 2.49. *Seja* H *e* K *grupos cíclicos. Então* $H \times K$ *é cíclico se, e somente se,* $(|H|, |K|) = 1$*.*

Demonstração. Veja [11]. □

2.5.2 Produto Semidireto

Apresentaremos agora uma generalização do Produto Direto.

Definição 2.50 (**Produto Semidireto**)**.** *Dizemos que* G *é o produto semidireto (interno) de* N *por* H *se* $N \trianglelefteq G$*,* $H \leq G$*,* $G = NH$ *e* $N \cap H = \{1\}$*.*

Notação: $G = N \rtimes H$.

Proposição 2.51. *Seja* $G = N \rtimes H$*, então:*

(i) $\dfrac{G}{N} \cong H$*;*

(ii) *Todo* $g \in G$ *se escreve de modo único como* $g = nh$*, onde* $n \in N$ *e* $h \in H$*;*

(iii) $N \cap N_G(H) = C_N(H)$*.*

Demonstração. **(i)** Segue diretamente do Segundo Teorema do Isomorfismo.

(ii) Suponhamos que $g = nh = n_1h_1$. Daí, $hh_1^{-1} = n^{-1}n_1 \in N \cap H = \{1\}$, isso implica que $hh_1^{-1} = 1 = n^{-1}n_1$. Portanto, $n = n_1$ e $h = h_1$.

(iii) Temos que $C_N(H) \subseteq N_G(H) \cap N$. Agora, sejam $g \in N_G(H) \cap N$ e $h \in H$, então:

- $g^{-1}h^{-1}g \in H$, pois g normaliza H;

- $h^{-1}gh \in N$, pois $N \trianglelefteq G$.
  E daí, $g^{-1}h^{-1}gh \in N \cap H = \{1\}$ e $gh = hg$. Logo, $g \in C_N(H)$.

Com isso concluímos a prova desta proposição.

□

Capítulo 3

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos alguns resultados clássicos que serão utilizados no capítulo seguinte deste trabalho.

3.1 Comutadores

Definição 3.1. *Seja G um grupo.*

(i) *Se $a, b \in G$, o comutador de a e b, denotado por $[a, b]$ é dado por $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$;*

(ii) *Se $H, K \subseteq G$, definimos o seguinte subgrupo:*

$$[H, K] := \langle [h, k]; h \in H, k \in K \rangle.$$

Em particular, o grupo $G' = [G, G]$ chama-se ***subgrupo comutador*** ou ***subgrupo derivado*** de G.

Indutivamente, podemos definir agora uma sequência de subgrupos da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} G^{(0)} & = & G \\ G^{(1)} & = & [G^{(0)}, G^{(0)}] = [G, G] = G' \\ G^{(i)} & = & [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}], \end{array}$$

isto é, $G^{(i)}$ é o subgrupo dos comutadores do grupo $G^{(i-1)}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Definição 3.2. *O subgrupo G definido acima chama-se o n-ésimo subgrupo derivado de G e a sequência*

$$G = G^{(o)} \supset G^{(1)} \supset ...G^{(n)} \supset ... \supset$$

chama-se a sequência derivada de G.

Proposição 3.3. *Seja G um grupo, então:*

(i) $G' \trianglelefteq G$;

(ii) $\dfrac{G}{G'}$ *é abeliano;*

(iii) G' *é o menor subgrupo normal de G com esta propriedade, isto é, se* $H \trianglelefteq G$ *é tal que* $\dfrac{G}{H}$ *é abeliano, então* $H \supseteq G'$;

(iv) $G' \underset{car}{\trianglelefteq} G$;

(v) *Se* $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ *e* $H \leq K$, *então* $\dfrac{K}{H} \leq Z\left(\dfrac{G}{H}\right)$ *se, e somente se,* $[G, K] \leq H$;

(vi) *Se* $N \trianglelefteq G$ *e* $N \leq H$, *então* $\left[\dfrac{G}{N}, \dfrac{H}{N}\right] = \dfrac{[G, H]N}{N}$.

Demonstração. Veja [5], [9] e [11]. □

Observação 3.4.

- *Pelos itens (i) e (ii) da proposição acima, temos* $\dfrac{G^{(i-1)}}{G^{(i)}}$ *é abeliano para todo i;*

- *Pelo item (iv) da proposição acima e pelo Lema 2.33, obtemos indutivamente que* $G^{(i)} \trianglelefteq G$ *para todo i.*

3.2 Solubilidade e Nilpotência

Definição 3.5. *Uma série de um grupo G é uma sequência de subgrupos G_i, tais que :*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G.$$

A série é dita ser subnormal se $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ e se $G_i \trianglelefteq G$, dizemos que a série é normal.

Definição 3.6. *Seja G um grupo.*

(1) *Diz-se que G é solúvel, se existe uma série subnormal*

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

tal que $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é abeliano para todo i;

(2) *Diz-se que G é nilpotente, se G possui uma série central, isto é, uma série normal*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

tal que, $\dfrac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_i}\right)$ para todo i;

(3) *Diz-se que G é supersolúvel, se existe uma série normal*

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

tal que, $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é cíclico para todo i.

Observação 3.7.

- *Todo grupo abeliano é nilpotente;*
- *Todo grupo nilpotente é solúvel;*
- *Todo grupo supersolúvel é solúvel.*

Exemplo 3.8. *Se G é um grupo supersolúvel, então G não é necessariamente nilpotente.*
De fato, seja $G = S_3$. Os subgrupos de S_3 são: $\{1\}$, S_3, $\langle(12)\rangle$, $\langle(13)\rangle$,

$\langle(23)\rangle$ e $\langle(123)\rangle$. Como $G_1 = \langle(123)\rangle \trianglelefteq S_3$, temos então a série normal (que também é subnormal):

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq S_3.$$

Como $\dfrac{S_3}{G_1}$ e $\dfrac{G_1}{\{1\}} \trianglelefteq G_1$ são cíclicos (o primeiro porque tem ordem prima), segue que S_3 é supersolúvel (consequentemente solúvel). Mas veja que esta série não é central, pois do contrário teríamos:

$$\frac{G_{0+1}}{G_0} \leq Z\left(\frac{S_3}{G_0}\right) \Rightarrow \frac{G_1}{\{1\}} \leq Z\left(\frac{S_3}{\{1\}}\right) \Rightarrow G_1 \leq Z(S_3) = \{1\},$$

um absurdo. Portanto, S_3 não é nilpotente.

Proposição 3.9. *Seja G um grupo solúvel. Se $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$ é uma série subnormal de G, onde todos os grupos quocientes $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ são abelianos, então $G^{(i)} \leq G_{n-i}$, para todo i. Em particular, $G^{(n)} = \{1\}$.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre i.
Para $i = 0$, $G^0 = G = G_{n-0} = G_n$. Suponha, por indução, que $G^{(i)} \leq G_{n-i}$.
Como $\dfrac{G_{n-i}}{G_{n-(1+i)}}$ é abeliano, pela Proposição 3.3 temos $(G_{n-i})' \leq G_{n-(1+i)}$.
Por outro lado, como supomos $G^{(i)} \leq G_{n-i}$, segue que:

$$G^{(1+i)} = (G^{(i)})' \leq (G_{n-i})' \leq G_{n-(1+i)}.$$

Portanto, o resultado segue. Em particular, para $i = n$, temos $G^{(n)} \leq G_{n-n} = G_0 = 1$, isto é, $G^{(n)} = \{1\}$. $\square$

Corolário 3.10. *Seja G um grupo. G é solúvel se, e somente se, existe $n \geq 0$ tal que $G^{(n)} = \{1\}$.*

Proposição 3.11. *Seja G um grupo.*

(i) *Se G é solúvel e $H \leq G$, então H é solúvel;*

(ii) *Se G é solúvel e $N \trianglelefteq G$, então $\dfrac{G}{N}$ é solúvel;*

(iii) *Se $N \trianglelefteq G$ e se ambos, N e $\dfrac{G}{N}$ são solúveis, então G é solúvel.*

Demonstração. Veja [11]. □

Definição 3.12. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. N é chamado de subgrupo normal maximal se:*

(i) $N \neq G$ *e*

(ii) $H \trianglelefteq G$ *e* $H \supseteq N \Rightarrow \ H = N$ *ou* $H = G$.

Notação: $N \lhd \cdot G$.

Definição 3.13. *Um grupo G é simples se G e $\{1\}$ são seus únicos subgrupos normais.*

Proposição 3.14. *Seja M um subgrupo normal de um grupo G. Então $M \lhd \cdot G$ se, e somente se, $\dfrac{G}{M}$ é um grupo simples.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\dfrac{G}{M}$ não é simples, então existe um subgrupo próprio não trivial $\dfrac{N}{M}$ tal que $\dfrac{N}{M} \lhd \dfrac{G}{M}$. Pelo Teorema da Correspondência, temos que $N \lhd G$. Por outro lado sabemos que $M < N$, ou seja, $M < N \lhd G$, um absurdo, pois por hipótese $M \lhd \cdot G$.
($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $N \lhd G$ tal que $M \leq N \leq G$, pelo Teorema da Correspondência, tem-se $\dfrac{N}{M} \lhd \dfrac{G}{M}$. Como $\dfrac{G}{M}$ é simples, então $\{\overline{1}\} = \dfrac{M}{M} = \dfrac{N}{M}$ ou $\dfrac{N}{M} = \dfrac{G}{M}$, logo $M = N$ ou $N = G$ e portanto $M \lhd \cdot G$. □

Proposição 3.15. *Seja G um grupo finito não trivial. Se G é simples e solúvel, então $|G| = p$, com p primo.*

Demonstração. Temos que $G' \trianglelefteq G$, então $G' = \{1\}$ ou $G' = G$. Se $G' = G$, então indutivamente teremos $G^{(n)} = G$ para todo n, um absurdo, já que G é solúvel e $G^{(n)} = 1$ para algum $n \geq 0$. Portanto, $G' = \{1\}$, ou seja, G é abeliano. Existe $x \in G$ tal que $x \neq 1$, então $H = \langle x \rangle \neq \{1\}$ e como $H \lhd G$, pois G é abeliano segue que $H = G$, ou seja, G é cíclico e claramente $|G| = p$. □

Proposição 3.16. *Seja G um grupo solúvel finito. Se M é um subgrupo normal maximal de G, então o índice de M em G é um número primo.*

Demonstração. Uma vez que $M \lhd \cdot G$, segue respectivamente das Proposições 3.11 e 3.14 que $\dfrac{G}{M}$ é simples e solúvel, portanto, da proposição anterior temos $|G : M| = \left|\dfrac{G}{M}\right| = p$. □

Proposição 3.17. *Seja G um grupo. Se $N \leq Z(G)$ e $\dfrac{G}{N}$ é nilpotente, então G é nilpotente.*

Demonstração. Como $\dfrac{G}{N}$ é nilpotente, então existe uma série normal

$$\{1\} = \frac{N}{N} \leq \frac{N_1}{N} \leq \ldots \leq \frac{N_r}{N} = \frac{G}{N}$$

em $\dfrac{G}{N}$, com $N_i \unlhd G$, já que $\dfrac{N_i}{N} \unlhd \dfrac{G}{N}$. Além disso, $\left[\dfrac{G}{N}, \dfrac{N_{i+1}}{N}\right] \leq \dfrac{N_i}{N}$ e daí $\dfrac{[N_{i+1}, G]N}{N} \leq \dfrac{N_i}{N}$ e assim $[N_{i+1}, G] \leq N_i$. Desse modo, como $N \leq Z(G)$, temos que $[N, G] = \{1\}$ e daí

$$\{1\} \leq N \leq N_1 \leq \ldots \leq N_r = G$$

é uma série central, e portanto, G é nilpotente.

□

Proposição 3.18. *Seja G um grupo.*

(i) *Se $G \neq \{1\}$ é nilpotente, então $Z(G) \neq \{1\}$;*

(ii) *Se $|G| = p^n$ com p primo, então G é nilpotente.*

Demonstração. Veja [11]. □

O resultado seguinte será muito útil no próximo capítulo.

Teorema 3.19 (**Caracterização dos Grupos Nilpotentes Finitos**). *Seja G um grupo finito, então são equivalentes:*

(i) *G é nilpotente;*

(ii) *Se $H < G$, então $H < N_G(H)$;*

(iii) *Se $M \lessdot G$, então $M \trianglelefteq G$;*

(iv) *Se $P \in Syl_pG$, então $P \lhd G$;*

(v) *$G = P_1 \times ... \times P_r$, onde $P_i \in Syl_{p_i}(G)$.*

Demonstração. Veja [9]. □

Definição 3.20. *Um subgrupo N de um grupo G é normal minimal se $\{1\} \neq N \lhd G$ e não existe K com $\{1\} < K \leq N$ e $K \trianglelefteq G$.*

Notação: $N \ \cdot\!\lhd G$.

Proposição 3.21. *Seja G um grupo supersolúvel.*

(i) *Se $N \cdot\!\lhd G$, então $|N| = p$, onde p é um número primo;*

(ii) *Se $M \lessdot G$, então $|G : M| = p$, onde p é um número primo.*

Demonstração. Veja [9]. □

Proposição 3.22. *Seja G um grupo. Se N é um subgrupo normal e cíclico de G, com N e $\dfrac{G}{N}$ supersolúveis, então G é supersolúvel.*

Demonstração. Como $\dfrac{G}{N}$ é supersolúvel, então

$$\{\bar{1}\} \leq \frac{N_1}{N} \leq ... \leq \frac{N_s}{N} = \frac{G}{N},$$

onde $\dfrac{N_i}{M} \trianglelefteq \dfrac{G}{N}$ e $\dfrac{N_{i+1}/N}{N_i/N}$ é cíclico para todo i. Pelo Teorema da Correspondência, $N_i \trianglelefteq G$ e além disso, $\dfrac{N_{i+1}/N}{N_i/N} \cong \dfrac{N_{i+1}}{N_i}$, logo $\dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ é cíclico. Assim, $\{1\} \leq N \leq N_1 \leq N_2 \leq ... \leq N_s = G$ é uma série normal de G onde $\dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ são cíclicos. Portanto G é supersolúvel. □

O próximo resultado, que será usado na demonstração do teorema que caracteriza os grupos nilpotentes finitos unicamente cobertos, é uma classificação dos $p-grupos$ que possuem um subgrupo cíclico que é maximal.

Teorema 3.23. *Um grupo de ordem p^n, com p primo, possui um subgrupo cíclico de índice p se, e somente se, ele é um dos seguintes tipos:*

(i) *Um grupo cíclico de ordem p^n;*

(ii) *Um produto direto de um grupo cíclico de ordem p^{n-1} com um de ordem p;*

(iii) $\langle x, y; x^p = 1 = y^{p^{n-1}}, y^x = y^{1+p^{n-2}} \rangle,\ n \geq 3;$

(iv) *O grupo diedral $D_{2^n},\ n \geq 3$;*

(v) *O grupo quatérnio generalizado $Q_{2^n},\ n \geq 3$;*

(vi) *O grupo semidiedral $\langle x, y; x^2 = 1 = y^{2^{n-1}}, y^x = y^{2^{n-2}-1} \rangle,\ n > 3$.*

Demonstração. Veja [9]. □

3.3 Teorema de Schur-Zassenhaus e Aplicações

Nesta seção teremos como objetivo principal apresentar um resultado que é uma aplicação do Teorema de Schur-Zassenhaus, com este propósito, nos limitaremos apenas a enunciar este importante teorema, assim como faremos com o resultado que o sucede. O leitor pode consultar as demonstrações desses resultados em [9].

Teorema 3.24 (**Schur-Zassenhaus**). *Seja G um grupo finito e $N \trianglelefteq G$ com $(|N|, |G:N|) = 1$. Então existe $H \leq G$ tal que $|H| = |G:N|$. Em particular $G = HN$ e $H \cap N = 1$, pois $(|N|, |H|) = 1$. Além disso dois quaisquer subgrupos de ordem $|G:N|$ são conjugados em G.*

Corolário 3.25 (**Teorema de Burnside-Transfer**). *Se G é um grupo finito e existe $P \in Syl_p(G)$ tal que $P \leq Z(N)$, $N = N_G(P)$, então existe $H \trianglelefteq G$ tal que $G = HP$, $H \cap P = \{1\}$. Em particular, se $C_G(P) = N_G(P)$, então existe $H \trianglelefteq G$ tal que $G = HP$ com $H \cap P = \{1\}$.*

Proposição 3.26. *Seja G um grupo finito. Se existe um subgrupo A de G maximal e abeliano, então G é solúvel.*

Demonstração. Suponha falsa a afirmação acima e seja G um contra-exemplo mínimo. Ou seja, se K é um grupo que cumpre as hipóteses desta proposição com $|K| < |G|$, então K é solúvel.
Considere o subgrupo $A_G = \bigcap\limits_{g\in\ G} A^g$, sabemos que este é o maior subgrupo normal em G contido em A. Analisemos duas situações:

(i) Se $A_G \neq 1$, então $\dfrac{A}{A_G}$ é um subgrupo abeliano de $\dfrac{G}{A_G}$ e $\dfrac{A}{A_G} \lessdot \dfrac{G}{A_G}$, logo $\dfrac{G}{A_G}$ satisfaz as hipóteses da Proposição e como $\left|\dfrac{G}{A_G}\right| < |G|$, segue $\dfrac{G}{A_G}$ é solúvel. Por outro lado, $A_G \leq A$ é abeliano, donde solúvel, portanto pela Proposição 3.11 G é solúvel, que é uma contradição.

(ii) Se $A_G = \{1\}$. Sejam $\pi = \{$ Primos que dividem $|A|\}$, $\pi' = \{$ Primos que não dividem $|A|\}$ e $p \in \pi$. Como A é abeliano, então todo subgrupo de A é normal, em particular um p-subgrupo de Sylow de A é normal e pelo Segundo Teorema de Sylow ele é único, ou seja, $Syl_p(A) = \{P_0\}$ e $A \leq N_G(P_0)$. Seja $P \in Syl_p(G)$ tal que $P_0 \leq P$. Então $P_0 = P \cap A$. Agora, como $A_G = \{1\}$ e $P_0 \leq A$ temos que $P_0 \ntrianglelefteq G$, assim $N_G(P_0) \neq G$ e pela maximilidade de A concluímos que $N_G(P_0) = A$. Portanto,

$$P_0 \ = \ P \cap A \ = \ P \cap N_G(P_0) \ = \ N_P(P_0).$$

Voltando ao fato $P_0 \leq P$, afirmamos que $P_0 = P$. Pois se $P_0 < P$, como P é nilpotente segue do Teorema 3.19 que $P_0 < N_P(P_0) = P_0$, um absurdo. Portanto $P_0 = P$ e $p \nmid |G : A|$, logo $(|A|, |G : A|) = 1$.
Por outro lado,

$$A \leq C_G(P) \leq N_G(P) = A, \ \ \forall\ P \in Syl_P(A).$$

Portanto, $C_G(P) = N_G(P) = A$ e pelo Teorema de Burnside-Transfer, existe $N_P \trianglelefteq G$ tal que $G = PN_P$ e $P \cap N_P = \{1\}$.
Seja $L = \bigcap\limits_{p\in\pi} N_P$. $L \trianglelefteq G$, já que é interseção finita de normais, então $\dfrac{G}{L} \cong \overline{H}$, onde $\overline{H}$ é um subgrupo de $\dfrac{G}{N_{P_1}} \times \ldots \times \dfrac{G}{N_{P_r}} \cong P_1 \times \ldots \times P_r$ e P_i é abeliano,

assim $\dfrac{G}{L}$ é um π-grupo abeliano e portanto $\dfrac{G}{L}$ é solúvel. Mas como p não divide $|N_P| = |G : P|$, temos que L é π'-grupo.
Podemos supor que $L \neq \{1\}$, pois caso contrário G é abeliano e portanto solúvel. Temos $A \leq AL \leq G$ e como $L \nsubseteq A$, (já $L \trianglelefteq G$ e $A_G = \{1\}$) e $A \lessdot G$, segue que $G = AL$. E mais, como A é π-grupo e L é π'-grupo, segue que $A \cap L = \{1\}$.
Seja $Q \in Syl_q(L)$, pelo Argumento de Fratini temos que $G = LN_G(Q)$.
Pelo Segundo Teorema do Isomorfismo $\dfrac{G}{L} \cong \dfrac{N_G(Q)}{N_G(Q) \cap L} = \dfrac{N_G(Q)}{N_L(Q)}$ e com isto concluímos que $(|L|, |N_G(Q) : N_L(Q)|) = 1$.
Note ainda que $N_L(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$ com $(|N_L(Q)|, |N_G(Q) : N_L(Q)|) = 1$. Assim, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus existe $X \leq N_G(Q)$ tal que $N_G(Q) = N_L(Q)X$ e $X \cap N_L(Q) = \{1\}$. Deste modo $G = LN_G(Q) = L(N_L(Q)X) = LX = LA$ com $X \cap L = \{1\}$, pois $|X| = |N_G(Q) : N_L(Q)| = |G : L|$ e $(|L|, |G : L|) = 1$. Novamente, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus, existe $g \in G$ tal que $X = A^g$ e assim X é maximal abeliano.
Agora temos que $Q \trianglelefteq N_G(Q)$, $X \leq N_G(Q)$, $X \lessdot G$ e $X \cap Q = \{1\}$. De modo que $X < QX \leq N_G(Q) \leq G$. Portanto $G = QX = N_G(Q)$ e com isto provamos que $Q \trianglelefteq G$, consequentemente $Q \trianglelefteq L$. Então mostramos que todo subgrupo de Sylow de L é normal, com isto L é nilpotente e em particular L é solúvel. Mostramos que $\dfrac{G}{L}$ e L são solúveis, logo G é solúvel pela Proposição 3.11, um absurdo pois G foi escolhido como o menor grupo não solúvel com um subgrupo maximal e abeliano .
Portanto, todo grupo finito com um subgrupo maximal abeliano é solúvel. $\square$

Capítulo 4

Grupos Unicamente Cobertos

Apresentaremos neste capítulo a caracterização de grupos finitos que possuem uma única cobertura irredundante por subgrupos próprios.

4.1 Definições e Exemplos

Nesta seção introduziremos conceitos pertinentes para o desenvolvimento do tema em estudo aqui neste trabalho.

Definição 4.1. *Um conjunto $\mathcal{S}$ de subgrupos próprios de um grupo G é chamado de cobertura para G sempre que ocorrer $G = \bigcup_{H \in \mathcal{S}} H$. A cobertura $\mathcal{S}$ é chamada irredundante se nenhuma subcoleção de $\mathcal{S}$ cobre G, ou seja, se $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ então, $G \neq \bigcup_{H \in \mathcal{S}'} H$.*

Um grupo finito G é ***unicamente coberto*** quando possui exatamente uma cobertura irredundante por subgrupos próprios.

Apresentaremos a seguir três grupos conhecidos que são unicamente cobertos:

(1) O grupo quatérnio, $Q = \langle a, b; a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^b = a^{-1} \rangle$.

De fato, como $\langle a \rangle \lhd Q$, pois $|Q : \langle a \rangle| = 2$, segue que:

$$Q = \langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle = \{1, a, a^2, a^3, b, b^3, ab, a^3b\}.$$

Por Lagrange as possíveis ordens dos elementos deste grupo são 2, 4 e 8, sendo Q não abeliano, donde não cíclico, assim descartamos a possibilidade de existir elemento de ordem 8, no entanto verifica-se facilmente que G possui elementos de ordens 2 e 4, a saber:

- Elementos de ordem 2: $a^2 = b^2$;
- Elementos de ordem 4: a, b, a^3, b^3, ab e a^3b.

Os subgrupos de Q gerados pelos elementos acima são:

- $K = \langle a^2 \rangle = \{1, a^2\} = \langle b^2 \rangle$;
- $H_1 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$;
- $H_2 = \langle b \rangle = \{1, b, b^2, b^3\}$;
- $H_3 = \langle a^3b \rangle = \{1, a^3b, b^2, ab\} = \langle ab \rangle$.

Note que $K \leq H_i$ e que $H_i \trianglelefteq Q$, pois $|Q : H_i| = 2$ para todo $i = 1, 2, 3$, e daí temos $H_1H_3, H_2H_3 \leq G$ e como $|H_1H_2| = |H_2H_3| = Q$, segue que $H_1H_2 = Q = H_2H_3$. E com isso concluímos que os únicos subgrupos próprios de Q são os descritos acima.
Assim, a cobertura

$$Q = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

é irredundante, pois $H_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} H_j$, e é claramente única.
Portanto, Q é ***unicamente coberto***.

(2) O grupo $C_2 \times C_2$.

Com efeito, seja $C_2 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = \{(1,1), (1,b), (a,1), (a,b)\}$. Todos os elementos deste grupo têm ordem 2, já que é não cíclico e $|C_2 \times C_2| = 4$. Temos então os seguintes subgrupos cíclicos de $C_2 \times C_2$:

- $H_1 = \langle (1,a) \rangle = \{(1,1), (1,a)\}$;
- $H_2 = \langle (1,b) \rangle = \{(1,1), (1,b)\}$;
- $H_3 = \langle (a,b) \rangle = \{(1,1), (a,b)\}$.

Como $H_i \trianglelefteq C_2 \times C_2$ para todo $i = 1, 2, 3$, temos $H_iH_j \leq C_2 \times C_2$. Mas $|H_iH_j| = |C_2 \times C_2|$ e portanto os únicos subgrupos próprios de $C_2 \times C_2$ são os cíclicos listados acima. Logo

$$C_2 \times C_2 = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

é claramente a única cobertura irredundante por subgrupos próprios deste grupo, isto é, $C_2 \times C_2$ é ***unicamente coberto***.

(3) O grupo simétrico S_3.

De fato, $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Sabemos que S_3 possui três elementos de ordem 2: (12), (13) e (23); 2 elementos de ordem 3: (123) e (132). Os subgrupos gerados por estes elementos são:

- $H_1 = \langle (12) \rangle = \{(1), (12)\}$;
- $H_2 = \langle (13) \rangle = \{(1), (13)\}$;
- $H_3 = \langle (23) \rangle = \{(1), (23)\}$;
- $H_4 = \langle (123) \rangle = \{(1), (123), (132)\} = \langle (132) \rangle$.

E assim,

$$S_3 = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$$

é uma cobertura irredundante de S_3, pois $H_i \nsubseteq \bigcup\limits_{i \neq j} H_j$. Por outro lado, como $H_4 \trianglelefteq S_3$, já que $|S_3 : H_4| = 2$, e $(|S_3 : H_4|, |S_3 : H_i|) = 1$ para todo $i = 1, 2, 3$, concluímos que $H_4H_i = S_3$, com $i = 1, 2, 3$ (note que $H_i \ntrianglelefteq S_3$ se $1 \leq i \leq 3$). Portanto a cobertura acima é única, e consequentemente temos S_3 ***unicamente coberto***.

Comparando os subgrupos que fazem parte da cobertura de cada um dos grupos acima, percebemos que são todos subgrupos maximais de seus respectivos grupos. Na seção 2 deste capítulo veremos que este fato não é coincidência.

Lema 4.2. *Um grupo finito G não pode ser escrito como união de dois de seus subgrupos próprios.*

Demonstração. Suponha que $G = H \cup K$, com $H \nleq K$ e $K \nleq H$. Tome $h \in H \setminus K$ e $k \in K \setminus H$, como $h, k \in G = H \cup K$, segue que $hk \in G = H \cup K$, e daí temos $hk \in H$ ou $hk \in K$. Suponha $hk \in H$, como $h^{-1} \in H$, segue que $h^{-1}(hk) \in H$, isso implica que $k \in H$, um absurdo. Com o mesmo raciocínio, mostra-se também que não pode ocorrer $hk \in K$. Portanto, segue o lema. □

Lema 4.3. *Seja G um grupo finito não cíclico. Então G possui uma única cobertura irredundante por subgrupos cíclicos.*

Demonstração. Seja $1 \neq x_1 \in G$. Por hipótese temos $G \neq \langle x_1 \rangle$, logo existe $x_2 \in G \setminus \langle x_1 \rangle$. Pelo lema anterior $G \neq \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle$, assim, existe $x_3 \in G \setminus \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle$. Portanto, temos duas possibilidades:

- $G = \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle$.
  Neste caso temos uma cobertura irredundante por construção;

- $G \neq \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle$.
  Neste caso, podemos encontrar $x_4 \in G \setminus \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle$ de modo que $G = \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle \cup \langle x_4 \rangle$ ou $G \neq \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle \cup \langle x_4 \rangle$. Se $G \neq \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \langle x_3 \rangle \cup \langle x_4 \rangle$, repetindo este processo um número finito de vezes, uma vez que G é finito, obtemos: $G = \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle x_k \rangle$. Logo, eliminando as possíveis redundâncias concluímos que:

  $$G = \langle \widetilde{x_1} \rangle \cup \langle \widetilde{x_2} \rangle \cup \cdots \cup \langle \widetilde{x_l} \rangle$$

  é uma cobertura irredundante de G.

Agora, se $G = \cup L_i = \cup T_i$ são duas coberturas irredundantes de G donde $L_i = \langle l_i \rangle$ e $T_i = \langle t_i \rangle$. Então, $l_i \in G = \cup T_i$, portanto $\langle l_i \rangle \subseteq \langle t_j \rangle$, para algum j. Por outro lado, $t_j \in G = \cup L_i$, daí $t_j \in L_k$, para algum k. Agora, se $k \neq i$, então $L_i = \langle l_i \rangle \subseteq \langle t_j \rangle \subseteq L_k$, um absurdo, já que $G = \cup L_i$ é irredundante. Portanto, $k = i$ e $T_j = L_i$. □

Definição 4.4. *Um subgrupo cíclico $\langle x \rangle$ de um grupo G é chamado de* **cíclico maximal***, quando não está contido em nenhum outro subgrupo cíclico de G.* Notação: $\langle x \rangle \lessdot_c G$.

Claramente temos que todo subgrupo cíclico que é maximal em um grupo G, é ***cíclico maximal***. Agora é interessante questionarmos se a recíproca desta afirmação é verdadeira. O exemplo a seguir nos mostra que em geral não é, mas na seção 3.2, onde abordaremos com mais ênfase sobre esse tipo de subgrupos, veremos em quais circunstâncias isto ocorre.

Exemplo 4.5. *Seja $G = C_{2^2} \times C_2 = \langle x, y; x^4 = 1 = y^2, x^y = x\rangle$. Existe um subgrupo cíclico maximal em G que não é maximal.*
De fato, como $\langle x\rangle \lhd G$, pois G é abeliano segue que

$$G = \langle x\rangle\langle y\rangle = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y =, x^3y\}.$$

Por Lagrange e pelo fato de G ser não cíclico, as possíveis ordens deste grupo são 2 ou 4. E assim,

- $(xy)^2 = (xy)(xy) = xxyy = x^2 \Rightarrow\ (xy)^4 = x^2x^2 = 1;$
- $(x^3y)^2 = x^3yx^3y = x^3x^3y^2 = x^6 = x^2 \Rightarrow\ (x^3y)^4 = x^2x^2 = 1;$
- $(x^2y)^2 = xyx^3y = x^2x^2y^2 = 1.$

$\therefore\ o(xy) = o(x^3y) = 4 = o(x)$ *e* $o(x^2y) = 2 = o(y).$

Daí,

- $H_1 = \langle y\rangle = \{1, y\};$
- $H_2 = \langle x^2y\rangle = \{1, x^2y\};$
- $N = \langle x^2\rangle = \{1, x^2\};$
- $N_1 = \langle x\rangle = \{1, x, x^2, x^3\} = \langle x^3\rangle;$
- $N_2 = \langle xy\rangle = \{1, xy, x^2, x^3y\} = \langle x^3y\rangle.$

Verifica-se facilmente que estes são os únicos subgrupos cíclicos de G, pois $H_iH_j, i \neq j$, possuem dois subgrupos de ordem 2 e como $|H_iN_j| = |G|$, segue $H_iN_j = G$. Assim, $\langle y\rangle \lessdot_c G$. Por outro lado, $\langle x^2\rangle\langle y\rangle \leq G$ é um subgrupo não cíclico de G, já que contém dois subgrupos de ordem 2, a saber: $\langle x^2\rangle$ e $\langle y\rangle$. Portanto $\langle y\rangle$ não é maximal.

Denotamos por Ψ a classe formada por todos os grupos finitos unicamente cobertos juntamente com todos os grupos cíclicos finitos.

Definição 4.6. *Uma* **partição** *de um grupo G é uma coleção σ de subgrupos próprios de G tal que cada elemento de G, diferente da identidade, pertence a um e somente um subgrupo do conjunto σ. A partição é dita* ***completa*** *se cada um dos subgrupos de σ é ciclico. Se para cada H em σ, $H^g \in \sigma$, para todo $g \in G$, então dizemos que G possui uma partição* ***normal***.

Lema 4.7. *Seja G um grupo finito. Se $G = \dot{\bigcup} H_i$ é uma partição normal e H_i é maximal para todo i, então $H_i \lhd G$ para algum i.*

Demonstração. Sabemos que o número de conjugados de H_i é $|G : N_G(H_i)|$. Temos que $G = \cup H_i$ é uma partição normal, ou seja, dado $H_i \subseteq \cup H_i$, segue que todos os seus conjugados estão em $\cup H_i$. Assim,

$$G = (H_1 \cup ... \cup H_1^{g_{n_1}}) \cup (H_2 \cup ... \cup H_2^{g_{n_2}}) \cup ... \cup (H_t \cup ... \cup H_t^{g_{n_t}}).$$

Suponha que $H_i \ntriangleleft G$ para todo i. Sabemos que $H_i \leq N_G(H_i) < G$ e que $H_i \lessdot G$ para todo i, logo $H_i = N_G(H_i)$ (já que $N_G(H_i) = G \Leftrightarrow H_i \lhd G$). Com isso temos que o número de conjugados, n_i, de H_i é

$$n_i = |G : N_G(H_i)| = |G : H_i| = \frac{|G|}{|H_i|}.$$

Portanto,

$$n_i|H_i| = |G|. \tag{4.1}$$

Mas H_i é um subgrupo não trivial de G, logo $|H_i| \geq 2$, assim

$$n_i = \frac{|G|}{|H_i|} \leq \frac{|G|}{2}. \tag{4.2}$$

Temos ainda que:
$G = (H_1 \setminus \{1\}) \bigcup ... \bigcup (H_1^{g_{n_1}} \setminus \{1\}) \bigcup ... \bigcup (H_t \setminus \{1\}) \bigcup ... \bigcup (H_t^{g_{n_t}} \setminus \{1\}) \bigcup \{1\}$.
Os conjuntos $H_i \setminus \{1\}$ são disjuntos para todo i.
Portanto,

$$\begin{aligned} |G| &= |H_1 \setminus \{1\}| + ... + |H_1^{g_{n_1}} \setminus \{1\}| + ... + |H_t \setminus \{1\}| + ... + |H_t^{g_{n_t}} \setminus \{1\}| + 1 \\ &= [(|H_1| - 1) + ... + (|H_1^{g_{n_1}}| - 1)] + ... + [(|H_t| - 1) + ... + (|H_t^{g_{n_t}}| - 1)] + 1 \\ &= n_1(|H_1| - 1) + ... + n_t(|H_t| - 1) + 1 \\ &= n_1|H_1| - n_1 + ... + n_t|H_1| - n_t + 1 \end{aligned}$$

De (4.1) temos

$$\begin{aligned} |G| &= |G| - n_1 + ... + |G| - n_t + 1 \\ &= \underbrace{|G| + ... + |G|}_{t\ vezes} - n_1 + ... - n_t + 1 \\ &= t|G| - (n_1 + ... + n_t) + 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n_1 + ... + n_t &= t|G| - |G| + 1 \\ &= |G|(t-1) + 1 \end{aligned}$$

Reordenando os índices dos n_i's de modo que $n_1 \geq n_i$ para todo i, teremos:

$$|G|(t-1) + 1 = n_1 + ... + n_t \leq n_1 + ... + n_1 = tn_1.$$

De (4.2) obtemos

$$|G|(t-1) + 1 \leq t\frac{|G|}{2} \Rightarrow 1 \leq |G| \cdot \left(\frac{t}{2} + 1 - t\right) \Rightarrow t + 2 - 2t > 0 \Rightarrow 2 > t.$$

$\therefore$ $t = 1$, um absurdo pela Proposição 2.17. Portanto, segue o lema. $\square$

Considere a classe dos grupos unicamente cobertos e a classe dos grupos particionados. Embora os grupos $C_2 \times C_2$ e S_3 sejam ao mesmo tempo unicamente cobertos e particionados, dado que suas respectivas coberturas são formadas por subgrupos próprios disjuntos dois a dois, é importante ressaltar que nenhuma dessas classes é necessariamente subclasse da outra.
Por exemplo, o grupo quatérnio Q é unicamente coberto mas não é particionado, pois há interseção não trivial entre dois quaisquer de seus subgrupos próprios. Por outro lado, o grupo $C_2 \times C_2 \times C_2$, é particionado:
De fato,

$$\begin{aligned} C_2 \times C_2 \times C_2 &= \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \\ &= \{(1,1,1), (1,1,c), (1,b,1), (1,b,c), (a,1,1), (a,1,c), (a,b,1), \\ &\quad (a,b,c)\}. \end{aligned}$$

Todos os elementos tem ordem 2, daí temos:
$H_1 = \langle (1,1,c) \rangle = \{(1,1,1), (1,1,c)\}$; $H_2 = \langle (1,b,1) \rangle = \{(1,1,1), (1,b,1)\}$;
$H_3 = \langle (1,b,c) \rangle = \{(1,1,1), (1,b,c)\}$; $H_4 = \langle (a,1,1) \rangle = \{(1,1,1), (a,1,1)\}$;
$H_5 = \langle (a,1,c) \rangle = \{(1,1,1), (a,1,c)\}$; $H_6 = \langle (a,b,1) \rangle = \{(1,1,1), (a,b,1)\}$;
$H_7 = \langle (a,b,c) \rangle = \{(1,1,1), (a,b,c)\}$.
E veja que

$$C_2 \times C_2 \times C_2 = H_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} H_7,$$

é uma partição completa de $C_2 \times C_2 \times C_2$. Porém, mostraremos na seção 4.3 que este grupo não é unicamente coberto.

4.2 Algumas Propriedades Elementares

Nesta seção, investigaremos o papel de subgrupos maximais e subgrupos cíclicos maximais em grupos unicamente cobertos. Iniciemos com três lemas estabelecendo alguns fatos elementares sobre grupos unicamente cobertos e sobre cobertura finita irredundante.

Lema 4.8. *A classe Ψ é fechada a quociente.*

Demonstração. Seja $G \in \Psi$ e seja N um subgrupo normal de G. Se G é cíclico, então pela Proposição 2.24 temos que $\dfrac{G}{N}$ é cíclico, e daí $\dfrac{G}{N} \in \Psi$. Se G é unicamente coberto, temos duas situações a considerar:

- Se $\dfrac{G}{N}$ é cíclico, então não há o que fazer;
- Se $\dfrac{G}{N}$ é não cíclico, então $\dfrac{G}{N}$ possui pelo menos uma cobertura irredundante. Suponha que

$$\frac{G}{N} = \bigcup_{i=1}^{r} \frac{H_i}{N} \quad \text{e} \quad \frac{G}{N} = \bigcup_{j=1}^{s} \frac{K_j}{N}$$

sejam duas coberturas irredundantes distintas de $\dfrac{G}{N}$. Pelo Teorema da Correspondência segue que

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i \quad \text{e} \quad G = \bigcup_{j=1}^{s} K_j$$

são duas coberturas irredundantes distintas de G, um absurdo. Portanto, $\dfrac{G}{N}$ é unicamente coberto, ou seja, $\dfrac{G}{N} \in \Psi$ e Ψ é fechada a quociente. $\square$

Lema 4.9. *Se $G \in \Psi$ e $G = H \times K$, então pelo menos um dos subgrupos H, K de G é cíclico. Reciprocamente, se $H \in \Psi$ e K é cíclico com $(|H|, |K|) = 1$, então $H \times K \in \Psi$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha por absurdo que $G \in \Psi$, mas ambos H e K não são cíclicos. Então H e K possuem coberturas irredundantes $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ e $K = \bigcup_{j=1}^{s} K_j$ respectivamente. E daí, $G = H \times K = (\cup H_i) \times K = \cup(H_i \times K)$ e $G = H \times K = H \times (\cup K_j) = \cup(H \times K_j)$, são duas coberturas irredundantes distintas de G. De fato, já que as coberturas $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ e $K = \bigcup_{j=1}^{s} K_j$ são irredundantes, segue que $H_i \nsubseteq \bigcup_{i \neq l} H_l$ e $K_j \nsubseteq \bigcup_{t \neq j} K_t$. Portanto, $H_i \times K \nsubseteq \bigcup_{i \neq l}(H_l \times K)$ e $H \times K_j \nsubseteq \bigcup_{j \neq t}(H \times K_t)$. É claro que $H_i \times K \neq H \times K_j$, já que $H_i \subsetneq H$ e $K_j \subsetneq K$, para todo i e para todo j. Portanto, as coberturas $G = H \times K = (\cup H_i) \times K = \cup(H_i \times K)$ e $G = H \times K = H \times (\cup K_j) = \cup(H \times K_j)$ são de fato irredundantes e distintas. Um absurdo, pois G é unicamente coberto.
($\Leftarrow$) Assumiremos que $H \in \Psi$ e K é cíclico com $(|H|, |K|) = 1$. Mostraremos que $H \times K \in \Psi$. Analisemos dois casos:

(i) *H cíclico*
Como por hipótese K é cíclico e $(|H|, |K|) = 1$, segue que $H \times K$ é cíclico e daí teremos $H \times K \in \Psi$;

(ii) *H unicamente coberto*
Seja $H \times K = G = \cup L_i$ uma cobertura irredundante de G. Pela Proposição 2.48, $L_i = (L_i \cap H) \times (L_i \cap K)$. Se $H = \cup H_i$ é a única cobertura de H, então pelo Lema 4.3 todos os H_i's são cíclicos e daí $L_i = (L_i \cap H) \times (L_i \cap K) = H_i \times (L_i \cap K)$ é cíclico para todo i, pois K é cíclico.

Mostramos que qualquer cobertura irredundante $G = \cup L_i$ tem todos os $L_i's$ cíclicos e usando novamente o Lema 4.3, concluímos que G é unicamente coberto, ou seja $G \in \Psi$. $\square$

Como consequência do lema acima e das observações feitas na seção anterior, concluímos que os grupos $Q \times C_n$, n ímpar; e $S_3 \times C_n$, onde $(n,6)=1$, são unicamente cobertos.

Lema 4.10. *Seja G um grupo finito não cíclico. Então $G = \bigcup_{g \in G} \langle g \rangle$ é uma cobertura irredundante de G, onde a união é sobre todos os subgrupos cíclicos maximais de G.*

Demonstração. Segue do Lema 4.3 que $G = \bigcup_{g \in G} \langle g \rangle$ é uma cobertura irredundante de G e que $\langle g \rangle \lessdot_c G$. Caso exista um subgrupo cíclico maximal $\langle g_i \rangle$ que não seja membro desta cobertura, chegaríamos que o elemento g_i de G não seria coberto, uma contradição. Portanto, esta união é sobre todos os subrupos cíclicos maximais de G, e com isso completamos a prova do lema. $\square$

Proposição 4.11. *Seja G um grupo finito não cíclico. Então G é unicamente coberto se, e somente se, todo subgrupo cíclico maximal de G é maximal em G.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $\langle h \rangle \lessdot_c G$ mas não é maximal em G. Então $\langle h \rangle < H < G$, H não cíclico.
Afirmação: $G = H \cup \bigcup_{g \notin H} \langle g \rangle$, com $\langle g \rangle \lessdot_c G$, é uma cobertura irredundante de G.
De fato,

(i) Seja $a \in G$, consideremos três casos :

- $a \in \langle h \rangle$;
- $a \in \langle g \rangle$, com $g \in H$;
- $a \in \langle g \rangle$, com $g \notin H$.

Nos dois primeiros casos $a \in H$ e no último caso, a é coberto por um dos subgrupos cíclicos maximal de G. Portanto, $G = H \cup \bigcup_{g \notin H} \langle g \rangle$ é uma cobertura;

(ii) Se H é excluído, então $h \in G$ não será coberto, já que $\langle h \rangle \lessdot_c G$ e portanto não está contido em nenhum dos $\langle g \rangle$, $g \notin H$; se $\langle g \rangle$ for excluído para algum $g \notin H$, então g não será coberto. Assim, concluímos que a cobertura $G = H \cup \bigcup_{g \notin H} \langle g \rangle$ é irredundante.

Logo, G possui pelo menos duas coberturas irredundantes, a que acabamos de construir e aquela garantida pelo Lema 4.10, uma contradição, já que por hipótese G é unicamente coberto.

($\Leftarrow$) Sejam $G = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ uma cobertura irredundante de G e $\{\langle g_1\rangle, \langle g_2\rangle, ..., \langle g_r\rangle\}$ o conjunto dos subgrupos cíclicos maximais de G. Temos que $g_j \in \bigcup_{i=1}^{m} H_i$, $1 \leq j \leq r$ e daí $\langle g_j\rangle \subseteq H_i < G$ para algum i. Como $\langle g_j\rangle \lessdot G$, segue que $\langle g_j\rangle = H_i$. Note ainda que dois dos g_j não podem estar contidos no mesmo H_i, pois se $s \neq j$ e $\langle g_s\rangle \subsetneq H_i = \langle g_j\rangle$, teríamos $\langle g_s\rangle \subsetneq \langle g_j\rangle$, absurdo. Portanto $\langle g_i\rangle = H_i$ para $1 \leq i \leq r \leq m$, e daí

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} H_i = \bigcup_{i=1}^{r} \langle g_i\rangle \cup \bigcup_{i=r+1}^{m} H_i.$$

Pelo lema anterior, $G = \bigcup_{i=1}^{r} \langle g_i\rangle$ é também uma cobertura irredundante de G, donde

$$\bigcup_{i=1}^{r} \langle g_i\rangle = G = \bigcup_{i=1}^{r} \langle g_i\rangle \cup \bigcup_{i=r+1}^{m} H_i$$

e portanto $r = m$, pois caso contrário, como $\bigcup_{i=r+1}^{m} H_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \langle g_i\rangle$, teríamos $H_{r+1} \subsetneq H_i$, para algum $1 \leq i \leq r$, um absurdo, já que a cobertura $G = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ é irredundante. Portanto, só existe uma cobertura irredundante para G, ou seja, G é unicamente coberto. $\square$

Observe que as informações da Proposição 4.11 não são equivalentes a que todo subgrupo maximal de G seja cíclico. De fato, $C_2 \times C_2 \times C_3$ é unicamente coberto, pelo Lema 4.9, mas possui um subgrupo não cíclico $C_2 \times C_2$ que é maximal, pois tem índice primo.

Lema 4.12. *Seja G um grupo não abeliano em Ψ. Se $A < G$, A abeliano, então A é cíclico.*

Demonstração. Seja $a \in A$ e $x \in G$, tal que $a \in \langle x\rangle \lessdot_C G$. Suponha que A seja não cíclico, então existe $y \in A - \langle x\rangle$, e com isso temos $\langle y\rangle \not\lessdot \langle x\rangle$, e daí

$\langle x\rangle \subset \langle x, y\rangle \subseteq G$, pela maximalidade de $\langle x\rangle$ segue que $G = \langle x, y\rangle$.
Veja que:

- $a \in \langle x\rangle$, isto implica que $ax = xa$;
- $a, y \in A$, ou seja $ay = ya$.

Logo a comuta com todo elemento de $\langle x, y\rangle = G$, isto é, $a \in Z(G)$. Portanto, $A \leq Z(G)$. E como, $y \in A \leq Z(G)$, segue que $xy = yx$, donde G abeliano, um absurdo. Com isso concluímos a prova do lema. $\square$

Lema 4.13. *Se $G \in \Psi$, então G é solúvel.*

Demonstração. É imediato para o caso de G ser cíclico. Agora, se G é unicamente coberto, então todo subgrupo cíclico maximal (abeliano) de G é maximal. Portanto, pela Proposição 3.26, G é solúvel. $\square$

Lema 4.14. *Seja G um grupo não abeliano com $G \in \Psi$, então G é supersolúvel.*

Demonstração. Seja G um contra exemplo mínimo, ou seja se existir um grupo de ordem menor que $|G|$ que satisfaça as hipóteses do lema, então este grupo é supersolúvel. Temos que G é unicamente coberto e não é supersolúvel, no entanto, é solúvel. Considere a série derivada,

$$\{1\} = G^{(n)} \trianglelefteq G^{(n-1)} \trianglelefteq ... \trianglelefteq G^{(0)} = G$$

onde $\dfrac{G^{(i-1)}}{G^{(i)}}$ é abeliano e $G^{(i)} \trianglelefteq G$ para todo i. Seja $N = G^{(n-1)}$ o menor termo não trivial da série acima, como $\{1\} = G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] = N'$, segue que N é abeliano, donde cíclico, pelo Lema 4.12, e como é não trivial, teremos $\left|\dfrac{G}{N}\right| < |G|$ e $\dfrac{G}{N} \in \Psi$, portanto $\dfrac{G}{N}$ é supersolúvel, pois este grupo cumpre as hipóteses do lema e sua ordem é menor que a de G, e pela Proposição 3.22, segue que G é supersolúvel, um absurdo. Logo, não existe contra exemplo mínimo e portanto G é supersolúvel. $\square$

De posse das ferramentas introduzidas na primeira e segunda seção deste capítulo, estamos preparados para apresentar a classificação de grupos finitos que possuem uma única cobertura irredundante. Dividimos esta última parte do nosso trabalho em duas seções.

4.3 Grupos Nilpotentes Unicamente Cobertos

Nesta seção apresentaremos a classificação dos grupos finitos nilpotentes que possuem uma única cobertura irredundante. Para os $p-grupos$, tem-se o seguinte.

Teorema 4.15. *Seja G um p-grupo finito unicamente coberto. Então G é isomorfo ao $p-grupo$ abeliano $C_p \times C_p$ ou ao grupo quatérnio Q de ordem 8.*

Demonstração. Temos por hipótese que $|G| = p^n$. Se $\langle a \rangle$ é um subgrupo cíclico maximal de G, então pela Proposição 4.11, $\langle a \rangle$ é maximal em G, ou seja, $|\langle a \rangle| = p^{n-1}$. Temos então um $p-grupo$ que possui um subgrupo cíclico que é maximal em G e a classificação de $p-grupos$ com um subgrupo cíclico e maximal foi apresentada no capítulo 3, mais precisamente no Teorema 3.23. Baseado neste resultado, as possibilidades para G são:

(i) Grupo cíclico de ordem p^n;

(ii) $\langle a, b; a^{p^{n-1}} = 1 = b^p, a^b = a^{1+p^{n-2}} \rangle$;

(iii) Produto direto de um grupo cíclico de ordem p^{n-1} com um de ordem p;

(iv) Grupo diedral D_{2^n}, $n \geq 3$;

(v) Grupo quatérnio generalizado Q_{2^n}, $n \geq 3$;

(vi) Grupo semidiedral, $\langle a, b; a^{2^{n-1}} = 1 = b^2 = a^b = a^{2^{n-2}-1} \rangle$, $n > 3$.

Portanto, para completarmos a prova deste teorema, nos restringimos a verificar quais dos grupos acima são unicamente cobertos.

$*$ G não pode ser do tipo (i), já que é um grupo unicamente coberto;

$*$ Seja H um grupo tipo (ii). H é não abeliano, pois $a^b = a^{1+p^{n-2}} \neq a$. Suponha H unicamente coberto, então pela Proposição 4.12, todo subgrupo abeliano de H é cíclico. Considere o subgrupo $A = \langle a^p \rangle \langle b \rangle$ de H, como $(a^p)^b = (a^b)^p = (a^{1+p^{n-2}})^p = a^{p+p^{n-1}} = a^p$, segue que A é abeliano, donde cíclico. Mas isso não pode ocorrer, pois existem dois subgrupos cíclicos em

A de ordem p, a saber $\langle a^{p^{n-2}}\rangle$ e $\langle b\rangle$. Portanto H não pode ser unicamente coberto, e com isso $G \ncong H$;

$*$ Seja H do tipo (iii). $H = C_{p^{n-1}} \times C_p = \langle x, y; x^{p^{n-1}} = 1 = y^p, x^y = x\rangle, n \geq 2$. Como $\langle x\rangle \bigcap \langle y\rangle = \{1\}$ e $\langle x\rangle, \langle y\rangle \trianglelefteq H$, pois H é abeliano, teremos
$H = \langle x\rangle \times \langle y\rangle = \{1, x, ..., x^{p^{n-1}-1}, xy, ..., xy^{p-1}, ..., x^{p^{n-1}-1}y, ..., x^{p^{n-1}-1}y^{p-1}\}$.

- Se $p^{n-1} > p$, isto é $n > 2$, então $\langle y\rangle \lessdot_C G$ e $\langle y\rangle$ não é maximal.
De fato, como $y \notin \langle x\rangle$, basta mostrarmos que $y \notin \langle x^i y^j\rangle$. Se $y \in \langle x^i y^j\rangle$, com $1 \leq i \leq p^{n-1} - 1$ e $1 \leq j \leq p - 1$, então $y = (x^i y^j)^t = x^{it} y^{jt}$.
$\therefore x^{it} = y^{1-jt}$ e como $\langle x\rangle \bigcap \langle y\rangle = \{1\}$, segue que $x^{it} = 1 = y^{1-jt}$.
Daí temos:

  (1) $p^{n-1} | it$;

  (2) $p | 1 - jt$.

  De (2), temos que
$$1 - jt = pm, \ m \in \mathbb{Z}.$$
$$\Downarrow$$
$$1 = pm + jt$$
$$\Downarrow$$
$$(p, t) = 1.$$
  Logo, em (1) temos, $p^{n-1} |\ i$, um absurdo, pois $i < p^{n-1}$. Portanto, $\langle y\rangle$ não está contido em nenhum cíclico de H, isto é, $\langle y\rangle \lessdot_c H$. Por outro lado, $\langle y\rangle < \langle x^p\rangle\langle y\rangle$ e assim $\langle y\rangle$ não é maximal em H. Portanto, para $n > 2$, H não é unicamente coberto e por isso $H \ncong G$.

- Se $n = 2$, $H = C_p \times C_p$ e como mostramos na seção 1 deste capítulo, H é unicamente coberto, isto é, $H \cong G$.

$*$ Seja H do tipo (iv). $H = D_{2^n} = \langle a, b; a^{2^n} = 1 = b^2, a^b = a^{-1}\rangle$ $n \geq 3$. Como $\langle a\rangle \lhd H$, pois $|H : \langle a\rangle| = 2$, segue que
$$H = \langle a\rangle\langle b\rangle = \{1, a, a^2, ..., a^{2^n-1}, b, ab, ..., a^{2^n-1}b\}.$$
Temos que $a^b = a^{-1}$, assim $(a^i)^b = (a^b)^i$ e daí $b^{-1}a^i b = (a^{-1})^i = a^{-i}$, isto é, $a^i b = ba^{-i}$ com $1 \leq i \leq 2^n - 1$. Logo, $o(a^i b) = o(y) = 2$, já que

$(a^ib)^2 = (a^ib)(ba^{-i}) = 1$. Observe que $\langle b\rangle \lessdot_c H$, mas $\langle b\rangle$ não é maximal em H. De fato, como $b \notin \langle a\rangle$ e também $b \notin \langle a^ib\rangle$, uma vez que $o(a^ib) = 2$, segue $\langle b\rangle \lessdot_c H$. Agora, considere o subgrupo $\langle a^{2^{n-1}}, b\rangle$, já que $\langle a^{2^{n-1}}\rangle$ é característico em $\langle a\rangle$, pelo Lema 2.33, e $\langle a\rangle \lhd H$, segue do Lema 2.35 que $\langle a^{2^{n-1}}\rangle \lhd H$. Assim, $\langle a^{2^{n-1}}, b\rangle = \langle a^{2^{n-1}}\rangle\langle b\rangle \supset \langle b\rangle$, ou seja, $\langle b\rangle$ não é maximal em H. Portanto H não é unicamente coberto, donde concluímos que $H = D_{2^n} \ncong G$.

$*$ Seja H do tipo (v). $H = Q_{2^n} = \langle x, y; x^{2^{n-1}} = 1, x^{2^{n-2}} = y^2, x^y = x^{-1}\rangle$, $n \geq 3$. Como $\langle x\rangle \lhd H$ (pois $|H : \langle x\rangle| = 2$), temos

$$H = \langle x\rangle\langle y\rangle = \{1, x, ..., x^{n^{n-1}-1}, y, xy, ..., x^{2^{n-1}-1}y\}.$$

Observe que os elementos y , x^iy, com $1 \leq i \leq 2^{n-1}-1$ têm ordem 4. De fato, a relação $x^iy = yx^{-i}$, com $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$ obtida no item anterior, nos diz que $(x^iy)^2 = y^2$, e isso implica que $(x^iy)^4 = (y^2)^2 = 1$, com $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$. Portanto $o(y) = o(x^iy) = 4$ para todo $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$.
Agora note que:

- Se $n > 3$, então $\langle y\rangle \lessdot_c H$ mas $\langle y\rangle$ não é maximal em H.
  Com efeito. Suponha que $y \in \langle x^iy\rangle$, para $i \neq 2^{n-2}$. Como $|\langle y\rangle| = |\langle x^iy\rangle|$, segue que $\langle y\rangle = \langle x^iy\rangle$, isso implica que $x^iy = y^t$ para algum inteiro t, isto é, $x^i = y^{t-1}$. Mas $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1, y^2\}$, então $x^i = 1$ ou $x^i = y^2$. Se $x^i = 1$, então $2^{n-1} \mid i$, um absurdo, já que $1 \leq i \leq 2^{n-1}-1$; e como supomos $i \neq 2^{n-2}$, temos $x^i \neq y^2$. E com isso concluímos que $\langle y\rangle \lessdot_c H$. Agora note que $y^x = x^{-1}yx = (x^2)^{-1}y \notin \langle y\rangle$, portanto $\langle y\rangle \ntriangleleft H$, e como H é nilpotente segue que $\langle y\rangle$ não é maximal em H, e por isso temos que H não é unicamente coberto;

- Se $n = 3$, mostramos na seção 4.1 que $H = Q_{2^n}$ é unicamente coberto.

Portanto, $Q_{2^n} \cong G$ se, e somente se, $n = 3$.

$*$ Se H é do tipo (vi). $H = \langle a, b; a^{2^{n-1}} = 1 = b^2 = a^b = a^{2^{n-2}-1}\rangle$, $n > 3$.
Veja que H é não abeliano, pois $a^b = a^{2^{n-2}-1} \neq a$. Suponha que H seja unicamente coberto e considere o subgrupo $A = \langle a^{2^{n-2}}\rangle\langle b\rangle$, como $|A| = 2^2$, segue que A é abeliano, donde cíclico pelo Lema 4.12, um absurdo, pois $\langle x^{2^{n-2}}\rangle$ e $\langle y\rangle$ são dois subgrupos de ordem 2 em A. Portanto, H não pode ser unicamente coberto e daí $H \ncong G$.

Concluímos finalmente que $G \cong C_p \times C_p$ ou $G \cong Q$. $\square$

O próximo resultado, é uma generalização dos grupos nilpotentes finitos que são unicamente cobertos.

Teorema 4.16. *Seja G um grupo nilpotente finito unicamente coberto. Então G é isomorfo a um dos grupos Q, $Q \times C_n$, (n ímpar), $C_p \times C_p$ ou a $C_p \times C_p \times C_n$, onde (n,p)=1.*

Demonstração. Sendo G um $p-grupo$, segue do teorema anterior que $G \cong Q$ ou $G \cong C_p \times C_p$. Considere agora, G um grupo nilpotente que não seja $p-grupo$. O Teorema da Caracterização dos Nilpotentes Finitos nos diz que se $P \in Syl_pG$, então $P \trianglelefteq G$ e

$$G = P_1 \times P_2 \times ... \times P_r,$$

onde $P_i \in Syl_{p_i}G$. Pelo Segundo Teorema de Sylow, $\{P_i\} = Syl_{p_i}G$ com $i = 1, ..., r$; ou seja, $(|P_i|, |P_j|) = 1$ para todo $i \neq j$.
Por hipótese G é unicamente coberto, logo pelo Lema 4.9, pelo menos um P_i, $1 \leq i \leq r$, é cíclico.
Afirmação 1: Apenas um P_i é não cíclico.
De fato, primeiramente observamos que os P_i*'s* não podem ser todos cíclicos, pois isto contrariaria a hipótese de G ser não cíclico. Suponha que dois dos P_i's sejam não cíclicos, digamos P_1 e P_2. Então

$$G = P_1 \times P_2 \times C_n.$$

Mas sabemos que $\dfrac{G}{C_n} \cong P_1 \times P_2$, agora pelo Lema 4.8 tem-se que $P_1 \times P_2 \cong \dfrac{G}{C_n} \in \Psi$ e pelo Lema 4.9, P_1 ou P_2 (ou ambos) é cíclico, uma contradição. Aplicando este raciocínio para uma quantidade $n = 3, 4, ..., r-1$ de subgrupos P_i*'s*, chega-se a mesma contradição. Portanto, a afirmação segue.
Podemos supor, sem perda de generalidade, que P_1 é o subgrupo não cíclico. Daí temos

$$P_2 \times ... \times P_r \cong C_n, \quad \text{onde} \quad n = \prod_{i=2}^{r} |P_i|,$$

e então,

$$G = P_1 \times C_n \tag{4.3}$$

Como $\dfrac{G}{C_n} \cong P_1$, pelo Lema 4.8 segue que $P_1 \in \Psi$. Portanto, P_1 é unicamente coberto, já que é não cíclico e pelo teorema anterior,

$$P_1 \cong C_p \times C_p \quad \text{ou} \quad P_1 \cong Q \tag{4.4}$$

Por (4.3) e (4.4) concluímos que:

$$G = P_1 \times C_n \cong C_p \times C_p \times C_n, \text{ com } (n,p) = 1$$

ou

$$G = P_1 \times C_n \cong Q \times C_n,$$

onde n é ímpar. Com isso finalizamos a prova do teorema. □

4.4 Grupos Não Nilpotentes Unicamente Cobertos

Um grupo ser nilpotente não é condição necessária para que seja unicamente coberto. Apresentaremos nesta seção uma descrição de grupos não nilpotentes que são unicamente cobertos. Para tanto, usaremos a noção de partição de grupos. Iniciaremos com três lemas que nos serão bastante úteis na prova do principal teorema deste trabalho.

Lema 4.17. *Seja $G \in \Psi$ com G não abeliano, e seja $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ a única cobertura de G. Então $Z(G) = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$.*

Demonstração. Como $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ é a única cobertura de G, segue do Lema 4.10 que os H_i's são subgrupos cíclicos maximais de G, donde abelianos . Seja $x \in \bigcap_{i=1}^{r} H_i$. Tome $g \in G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, logo $g \in H_i$ para algum i, assim, x comuta com g. Como g foi tomado arbitrariamente em G, concluímos que $x \in Z(G)$. E daí,

$$\bigcap_{i=1}^{r} H_i \subseteq Z(G) \tag{4.5}$$

Agora, se $z \in Z(G)$ e $z \notin H_i = \langle a_i \rangle$, para algum i, então $\langle a_i \rangle \subsetneq \langle a_i, z \rangle \subseteq G$ e $\langle a_i \rangle \lessdot G$, e daí $\langle a_i, z \rangle = G$, portanto G é abeliano, uma contradição. Logo

$$Z(G) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} H_i, \tag{4.6}$$

o lema segue imediatamente de (4.3) e (4.4). $\square$

Lema 4.18. *Seja $G \in \Psi$ com G não nilpotente, e seja $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ a cobertura única de G. Então $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo sem centro com partição completa.*

Demonstração. Sabemos que $Z(G) \lhd G$. Daí, pelo Lema 4.8 segue que $\dfrac{G}{Z(G)} \in \Psi$, mais precisamente $\dfrac{G}{Z(G)}$ é unicamente coberto, já que $\dfrac{G}{Z(G)}$ é não nilpotente (e portanto não cíclico), pois do contrário, teríamos pela Proposição 3.17 que G é nilpotente. Assim, $\dfrac{G}{Z(G)} = \bigcup_{i=1}^{r} \dfrac{H_i}{Z(G)}$, é a única cobertura de $\dfrac{G}{Z(G)}$. Sendo $\dfrac{G}{Z(G)}$ não abeliano, segue do lema anterior que,

$$Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \bigcap_{i=1}^{r} \frac{H_i}{Z(G)} = \frac{Z(G)}{Z(G)} = \{1\} \tag{4.7}$$

Agora provaremos que $\dfrac{G}{Z(G)}$ possui uma partição completa.

Como $\overline{G} = \dfrac{G}{Z(G)} = \bigcup_{i=1}^{r} \dfrac{H_i}{Z(G)} = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{H}_i$ é a única cobertura de $\overline{G}$, segue do Lema 4.10 que os subgrupos $\overline{H}_i$ *'s* são cíclicos maximais em $\overline{G}$, ou seja, $H_i \nsubseteq H_j$ para todo $i \neq j$. Portanto o subgrupo $\langle \overline{H}_i, \overline{H}_j \rangle \leq \overline{G}$, com $i \neq j$ contém propriamente os subgrupos $\overline{H}_i$ e $\overline{H}_j$, isto é,

$$\overline{H_i} < \langle \overline{H}_i, \overline{H}_j \rangle \leq \overline{G}.$$

Por outro lado, o Lema 4.11 nos garante que $\overline{H}_i \lessdot \overline{G}$, e assim

$$\langle \overline{H}_i, \overline{H}_j \rangle = \overline{G}. \tag{4.8}$$

Se $\overline{g} \in \overline{H_i} \cap \overline{H_j} \subset \overline{H_i}, \overline{H_j}$, então $\overline{g}$ comuta com todos elementos de $\overline{H_i}$ e de $\overline{H_j}$ e por (4.6) segue que $\overline{g} \in Z(\overline{G}) = \{\overline{1}\}$. Portanto, $\overline{H_i} \cap \overline{H_j} = \{\overline{1}\}$ para todo $i \neq j$, e com isso provamos que $\dfrac{G}{Z(G)} = \overline{G} = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{H_i} = \bigcup_{i=1}^{r} \dfrac{H_i}{Z(G)}$ é uma partição completa de $\dfrac{G}{Z(G)}$, já que os $\dfrac{H_i}{Z(G)}$'s são subgrupos cíclicos de $\dfrac{G}{Z(G)}$ para todo i. □

Lema 4.19. *Se $G \in \Psi$, então G possui um subgrupo cíclico normal de índice primo.*

Demonstração. Sabemos do Lema 4.13 que G é solúvel. Seja G cíclico com $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ e p_i primo. Note que $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ divide $|G|$ e como G é cíclico, segue que existe um único $H < G$, tal que $|H| = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, donde $|G : H| = p_1$ e $H \lhd G$, já que G é abeliano.

Agora considere o caso de G ser unicamente coberto, onde $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ é sua única cobertura. Como $H_i \lessdot G$ para todo i e G é solúvel, então pela Proposição 3.16 é suficiente mostrarmos que $H_i \lhd G$ para algum i.

Podemos admitir que G é não nilpotente, pois sendo G nilpotente, todo subgrupo maximal de G é normal, e daí terá índice primo. Portanto, G satisfaz as hipóteses do lema anterior, já que é não abeliano e daí podemos analisar as seguintes situações para G :

. Se G é um grupo sem centro $\left(\dfrac{G}{Z(G)} = \dfrac{G}{\{1\}} = G\right)$, então, pelo Lema 4.18, G possui uma partição completa, ou seja, G é escrito como união disjunta de subgrupos cíclicos.

Se $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ é a cobertura única de G, então note que

$$\bigcup_{i=1}^{r} H_i^a = \left(\bigcup_{i=1}^{r} H_i\right)^a = G^a = G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i, \ \forall \ a \in G.$$

Ora, mas a cobertura $G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$ é única, assim para cada H_i da cobertura e cada $a \in G$, H_i^a é membro da cobertura, e a cobertura de G é uma partição normal. Portanto, pelo Lema 4.7 concluímos que existe $H_i \lhd \cdot G$, donde $|G : H_i| = p$.

. Se G possui centro, então, pelo Lema 4.18, $\dfrac{G}{Z(G)} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} \dfrac{H_i}{Z(G)}$ é um grupo sem centro e, pelo Lema 4.8, $\dfrac{G}{Z(G)} \in \Psi$, mais precisamente $\dfrac{G}{Z(G)}$ é unicamente coberto, já que é não nilpotente. Logo, pelo caso anterior, existe $\dfrac{H_i}{Z(G)} \lhd \cdot \dfrac{G}{Z(G)}$ com $\left|\dfrac{G}{Z(G)} : \dfrac{H_i}{Z(G)}\right| = q$, q primo. pelo Teorema da Correspondência temos que $H_i \lhd \cdot\ G$, e com isso fializamos a prova do lema.

□

Agora podemos apresentar o resultado principal desta dissertação.

Teorema 4.20. *Seja G um grupo finito não nilpotente. Então $G \in \Psi$ se, e somente se, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo não abeliano de ordem pq para primos distintos p e q, e $\langle x, Z(G)\rangle$ é cíclico para todo $x \in G$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha $G \in \Psi$. G é unicamente coberto, já que não nilpotente, donde não cíclico e, pelo Lema 4.18, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo sem centro em Ψ. Agora, pelo Lema 4.19 temos que $\overline{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ possui um subgrupo cíclico normal $\overline{H} = \dfrac{H}{Z(G)}$ de índice primo p. Ou seja, $\left|\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}}\right| = |\overline{G} : \overline{H}| = p$ e isso implica que $\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}}$ é cíclico. Seja $\overline{b}\,\overline{H}$ um gerador de $\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}}$, onde $\overline{b} \in \overline{G}$ - $\overline{H}$ e $\overline{b}^p \in \overline{H}$, pois $\overline{H} = (\overline{bH})^p = \overline{b}^p\overline{H}$. Como $\overline{H} = \langle \overline{a}\rangle \leq \langle \overline{a}, \overline{b}\rangle \leq \overline{G}$, com $\overline{a} \in \overline{G}$, e $\overline{H} \lessdot \overline{G}$, já que $|\overline{G} : \overline{H}| = p$. Então, $\overline{H} = \langle \overline{a}, \overline{b}\rangle$ ou $\langle \overline{a}, \overline{b}\rangle = \overline{G}$, mas $\overline{b} \notin \overline{H}$, portanto, $\overline{G} = \langle \overline{a}, \overline{b}\rangle = \langle \overline{a}\rangle\langle \overline{b}\rangle$, pois $\langle \overline{a}\rangle = \overline{H} \lhd \overline{G}$. Agora, como $\overline{b}^p \in \overline{H} = \langle \overline{a}\rangle$, segue que $\overline{b}^{\,p}$ comuta com todo elemento de $\langle \overline{a}\rangle$, logo $\overline{b}^{\,p}$ comuta com todo elemento de $\langle \overline{a}\rangle\langle \overline{b}\rangle = \overline{G}$, ou seja $\overline{b}^{\,p} \in Z(\overline{G})$, portanto $\overline{b}^{\,p} = \overline{1}$ e $o(\overline{b}) = p$.
E assim, $\overline{G} = \langle \overline{a}\rangle \rtimes \langle \overline{b}\rangle$, pois $\langle \overline{a}\rangle \cap \langle \overline{b}\rangle = \{\overline{1}\}$, visto que $|\langle \overline{b}\rangle| = p$ e $\langle \overline{b}\rangle \nsubseteq \langle \overline{a}\rangle$.
Afirmação 1: $\langle \overline{b}\rangle \lessdot \overline{G}$.
De fato, mostraremos primeiramente, que $\langle \overline{b}\rangle \lessdot_c \overline{G}$. Suponha que $\langle \overline{b}\rangle \leq \langle \overline{x}\rangle$. Note que $\overline{x} \notin \overline{H}$, pois caso contrário $\overline{b} \in \langle \overline{x}\rangle \subseteq \overline{H}$. Então, $\overline{x}\overline{H}$ é um gerador

de $\dfrac{\overline{G}}{\overline{H}}$ e $\overline{x}^p \in \overline{H} = \langle \overline{a} \rangle$, portanto $\overline{x}^p$ comuta com $\overline{b}$ e com $\overline{a}$, logo $\overline{x}^p \in Z(\overline{G})$, ou seja $\overline{x}^p = \overline{1}$ e $o(\overline{x}) = p$. E com isso concluímos $\langle \overline{b} \rangle = \langle \overline{x} \rangle$. Portanto, $\langle \overline{b} \rangle \lessdot_c \overline{G}$. Por outro lado, $\dfrac{G}{Z(G)} = \overline{G}$ é não abeliano, já que é não nilpotente, pois do contrário, G seria nilpotente pela Proposição 3.17. E como $\overline{G} \in \Psi$, segue que $\overline{G}$ é unicamente coberto e pela Proposição 4.11 $\langle \overline{b} \rangle$ é maximal em $\overline{G}$, logo a afirmação segue.
Agora, pela Proposição 4.14 temos que $\overline{G}$ é supersolúvel. Portanto, da afirmação acima e da Proposição 3.21 concluímos que $|\overline{G} : \langle \overline{b} \rangle| = q$, para algum primo q distinto de p, pois se $p = q$ teríamos $|\overline{G}| = |\overline{b}| \cdot |\overline{G} : \overline{b}| = p^2$ e aí $\overline{G}$ seria abeliano. Portanto,

$$\left| \frac{G}{Z(G)} \right| = |\overline{G}| = |\langle \overline{b} \rangle| \cdot |\overline{G} : \langle \overline{b} \rangle| = pq.$$

Seja $G = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} H_i$ cobertura única de G, pelo Lema 4.17 temos que $Z(G) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} H_i$. Tome $x \in G$, então $x \in H_i$ para algum i, e como $Z(G) < H_j$ para todo j, segue que $\langle x, Z(G) \rangle \leq H_i$ e já que H_i é cíclico, temos $\langle x, Z(G) \rangle$ cíclico para todo $x \in G$. Portanto, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é um grupo não abeliano de ordem pq e $\langle x, Z(G) \rangle$ é cíclico para todo $x \in G$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, assumiremos $\overline{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ não abeliano de ordem pq e $\langle x, Z(G) \rangle$ é cíclico para todo $x \in G$. Podemos supor $p < q$, logo pelo Terceiro Teorema de Sylow, temos:

- $\overline{G}$ contém um único q - subgrupo de Sylow $\overline{H}_1$ o qual é normal, maximal e cíclico, pois tem ordem prima;

- $\overline{G}$ contém ou um p - subgrupo de Sylow ou q p-subgrupos de Sylow. Se $\overline{G}$ possui um único p-subgrupo de Sylow $\overline{K}$, então este é normal e cíclico, e como $\overline{G} = \overline{H_1 K}$, onde $\overline{H_1} \cap \overline{K} = \{\overline{1}\}$, teríamos $\overline{G} = \overline{H_1} \times \overline{K}$ cíclico, donde abeliano, um absurdo. Portanto, $\overline{G}$ possui q p-subgrupos de Sylow de ordem p, digamos, $\overline{H}_2$, ... , $\overline{H}_{q+1}$, os quais são cíclicos, pois têm ordem p e são maximais pois têm índice q.

Portanto,
$$\overline{G} = \overline{H}_1 \cup \overline{H}_2 \cup ... \cup \overline{H}_{q+1}$$
é a única cobertura irredundante de $\overline{G}$.
Seja $H_i < G$ tal que $\overline{H_i} = \dfrac{H_i}{Z(G)} = \langle g_i Z(G)\rangle$. Então $G = \bigcup_{i=1}^{q+1} H_i$ é irredundante e $H_i = \langle g_i, Z(G)\rangle$ é cíclico para todo $i = 1, ..., q+1$.
Agora, sendo $\dfrac{H_i}{Z(G)}$ maximal para todo i, segue do Teorema da Correspondência que cada H_i é maximal em G e portanto, pela Proposição 4.11, $G = \bigcup_{i=1}^{q+1} H_i$ é a única cobertura de G.
E com isso completamos a prova do teorema. □

Como aplicação do Teorema 4.20 temos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.21. *Seja G um grupo de ordem 20 tal que $G = \langle a, b; a^5 = 1 = b^4; a^b = a^{-1}\rangle$. Então G é unicamente coberto.*
De fato, como $(|G : \langle a\rangle|, |G : \langle b\rangle|) = 1$, segue do Lema 2.20 que $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$. Daí temos

$$\begin{aligned} G \;=\; & \{1, a, a^2, a^3, a^4, b, b^2, b^3, ab, ab^2, ab^3, a^2b, a^2b^2, a^2b^3, a^3b, a^3b^2, a^3b^3, a^4b, \\ & a^4b^2, a^4b^3\}. \end{aligned}$$

$*$ *G é não abeliano, pois $a^b = a^{-1} \neq a$ e valem as seguintes relações:*

- $a^b = a^{-1} \Rightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow ba = a^{-1}b$;
- $(a^i)^b = (a^b)^i = (a^{-1})^i = a^{-i} \Rightarrow \; a^ib = ba^{-i} \Rightarrow ba^i = a^{-i}b$;

$*$ *Note que:*

- $(a^i)^{b^2} = b^{-2}a^ib^2 = b^{-1}a^{-i}b = b^{-1}ba^i = a^i$ *para todo* $i = 1, ..., 4$. *Portanto, b^2 comuta com a^i para todo i, logo b^2 comuta com todos os elementos de $\langle a\rangle\langle b\rangle = G$, ou seja $b^2 \in Z(G)$.*

$*$ *Agora vejamos as ordens dos elementos de G.*

- $(a^ib)^2 = (a^ib)(a^ib) = ba^{-i}a^ib = b^2 \Rightarrow (a^ib)^4 = b^2b^2 = 1$.
  $\therefore\; o(a^ib) = 4, \; 1 \leq i \leq 4$;

- $(a^ib^2)^2 = (a^ib^2)(a^ib^2) = a^{2i} \Rightarrow (a^ib^2)^4 = a^{4i} \Rightarrow (a^ib^2)^5 = b^2 \Rightarrow (a^ib^2)^{10} = 1.$
$\therefore\ o(a^ib^2) = 10,\ 1 \leq i \leq 4;$

- $(a^ib^3)^2 = (a^ib^3)(a^ib^3) = a^iba^ib = a^ibba^{-i} = b^2 \Rightarrow (a^ib^3)^4 = b^2b^2 = 1.$
$\therefore\ o(a^ib^3) = 4,\ 1 \leq i \leq 4.$

$*$ *Temos então o seguinte:*

- *elementos de ordem 2:* b^2;
- *elementos de ordem 4:* $b, b^3, ab, a^2b, a^3b, a^4b, ab^3, a^2b^3, a^3b^3, a^4b^3$;
- *elementos de ordem 5:* a, a^2, a^3, a^4;
- *elementos de ordem 10:* $ab^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2$.

$*$ *Os subgrupos gerados pelos elementos acima são:*

- $H = \langle b^2 \rangle = \{1, b^2\}$;
- $M_1 = \langle b \rangle = \{1, b, b^2, b^3\} = \langle b^3 \rangle$;
- $M_2 = \langle ab \rangle = \{1, ab, b^2, ab^3\} = \langle ab^3 \rangle$;
- $M_3 = \langle a^2b \rangle = \{1, a^2b, b^2, a^2b^3\} = \langle a^2b^3 \rangle$;
- $M_4 = \langle a^3b \rangle = \{1, a^3b, b^2, a^3b^3\} = \langle a^3b^3 \rangle$;
- $M_5 = \langle a^4b \rangle = \{1, a^4b, b^2, a^4b^3\} = \langle a^4b^3 \rangle$;
- $N_1 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4\} = \langle a^2 \rangle = \langle a^3 \rangle = \langle a^4 \rangle$;
- $N_2 = \langle ab^2 \rangle = \{1, ab^2, a^2, a^3b^2, a^4, b^2, a, a^2b^2, a^3, a^4b^2\} = \langle a^2b^2 \rangle = \langle a^3b^2 \rangle = \langle a^4b^2 \rangle$.

Note que os subgrupos M_i' *s são 2- subgrupos de Sylow de* G*, logo pelo Segundo Teorema de Sylow* $M_i \ntrianglelefteq G$ *para todo* $i = 1, ..., 5$*. Por outro lado,* $M_i \lessdot G$ *para todo* i*. Portanto, pelo Teorema da Caracterização dos Nilpotentes Finitos,* G *é não nilpotente.*
Afirmação 1: $Z(G) = \langle b^2 \rangle$.
De fato, como $\langle b^2 \rangle \leq Z(G)$*, segue que* $|Z(G)| \geq 2$*, e as possibilidades para* $|Z(G)|$ *são: 2 ou 4 ou 10;*

- *Se* $|Z(G)| = 4$, *então* $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = |G : Z(G)| = 5$, *e daí* $\dfrac{G}{Z(G)}$ *seria cíclico donde nilpotente e, pela Proposição 3.17, G seria nilpotente, um absurdo;*

- *Se* $|Z(G)| = 10$, *então* $\left|\dfrac{G}{Z(G)}\right| = |G : Z(G)| = 2$, *e daí* $\dfrac{G}{Z(G)}$ *seria cíclico donde nilpotente e, pela Proposição 3.17, G seria nilpotente, um absurdo.*

Logo, só pode ocorrer $|Z(G)| = 2$ *e com isto encerramos a prova desta afirmação.*
Segue imediatamente da Afirmação acima que

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |G : Z(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{20}{2} = 2 \cdot 5.$$

Por outro lado, $\dfrac{G}{Z(G)}$ *é não abeliano, pois caso contrário, pela Proposição 3.17, G seria nilpotente. Então, para mostramos que G é unicamente coberto, pelo Teorema 4.20, é suficiente mostrar que* $\langle g, Z(G)\rangle$ *é cíclico para todo* $g \in G$.
Já que os elementos de G são da forma $a^i b^j$, *com* $0 \leq i \leq 4$ *e* $0 \leq j \leq 3$, *temos que:*

- $\langle a^i, Z(G)\rangle = \langle a^i, b^2\rangle = \langle a^i\rangle\langle b^2\rangle = \langle a\rangle\langle b^2\rangle \cong \langle a\rangle \times \langle b^2\rangle$;

- $\langle a^i b, Z(G)\rangle = \langle a^i b, b^2\rangle = \langle a^i b\rangle$, *para todo* $i = 1, 2, 3, 4$, *pois* $b^2 = (a^i b)^2$;

- $\langle a^i b^2, Z(G)\rangle = \langle a^i b^2, b^2\rangle = \langle a^i, b^2\rangle \cong \langle a\rangle \times \langle b^2\rangle$;

- $\langle a^i b^3, Z(G)\rangle = \langle a^i b^3, b^2\rangle = \langle a^i b, b^2\rangle = \langle a^i b\rangle$;

- $\langle b^j, Z(G)\rangle = \langle b^j, b^2\rangle \leq \langle b\rangle$, *para todo* $j = 1, 2, 3$.

Portanto, $\langle g, Z(G)\rangle$ *é cíclico para todo* $g \in G$ *e G é unicamente coberto.*

4.5 Grupos com r Coberturas Irredundantes

Finalizaremos nosso trabalho deixando a seguinte pergunta: *Para um inteiro fixo $r > 1$, podemos determinar os grupos com exatamente r coberturas irredundantes por subgrupos próprios?*

Para motivá-los a investigação deste questionamento, mostraremos que para qualquer inteiro $r \geq 1$, existe um grupo com exatamente r coberturas irredundantes por subgrupos próprios. Mas antes introduziremos um resultado que será útil na construção do exemplo.

Lema 4.22. *Seja G um grupo abeliano finito e n um inteiro positivo, então os subconjuntos $G^n = \{g^n \ ; \ g \in G\}$ e $G[n] = \{g \in G \ ; \ g^n = 1\}$ são subgrupos de G e $\dfrac{G}{G[n]} \cong G^n$.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \in G$, então é fácil ver que $g_1^n, g_2^n \in G^n$. Agora note que

$$g_1^n \cdot (g_2^n)^{-1} = g_1^n \cdot (g_2^{-1})^n = (g_1 \cdot g_2^{-1})^n \in G^n.$$

Mas então $G^n \leq G$.
Considere $g_1, g_2 \in G[n]$, logo

$$(g_1 \cdot g_2^{-1})^n = g_1^n \cdot (g_2^{-1})^n = g_1^n \cdot (g_2^n)^{-1} = 1$$

donde concluímos que $G[n] \leq G$.
Como G é abeliano, segue que $G^n, G[n] \trianglelefteq G$.
Agora seja $\varphi : G \to G^n$ dada por $\varphi(a) = a^n$. Logo, para quaisquer $a, b \in G$ temos que $\varphi(ab) = (ab)^n = a^n b^n$, isto é, φ é um homomorfismo. Por outro lado, temos $Ker(\varphi) = \{a; a^n = 1\} = G[n]$. Portanto, pelo Primeiro Teorema dos Isomorfismos, $\dfrac{G}{G[n]} \cong G^n$. □

Exemplo 4.23. *O grupo $H \cong C_{p^r} \times C_p$ possui exatamente r coberturas irreduntantes por subgrupos próprios.*
Faremos indução sobre r para provarmos este fato. Para $r = 1$, temos $H \cong C_p \times C_p$ que é unicamente coberto pelo Teorema 4.16.
***Afirmação 1**: H contém exatamente p subgrupos cíclicos de ordem p^r.*
De fato, um elemento não trivial de H tem a forma (a^i, b^j), onde $1 \leq i \leq p^{r-1}$, $1 \leq j \leq p-1$ e $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$.

(i) *$o(a^i, b^j) = p^r$ se, e somente se, $p \nmid i$, ou seja, $(i,p) = 1$.*
Para verificarmos isso, basta analisarmos como se comporta a primeira componente do par (a^i, b^j), pois $(b^j)^{p^\alpha} = 1$, para todo $j = 1, ..., p-1$ e para todo $\alpha = 1, ..., r$. Note que:
$p^r = o(a^i) = \dfrac{p^r}{(p^r, i)} \Leftrightarrow (p^r, i) = 1 \Leftrightarrow (p, i) = 1.$
$\therefore o(a^i, b^j) = p^r \Leftrightarrow (p, i) = 1$ *com* $1 \leq i \leq p^{r-1}$.

(ii) *$\langle (a^i, b^j) \rangle = \langle (a, b^m) \rangle$ onde $j \equiv im (mod\ p)$.*
De fato, como $(i,p) = 1$, segue-se que existe m tal que $j \equiv mi (mod\ p)$. Daí, $j = mi + pk$, logo $(a^i, b^j) = (a^i, b^{mi}) = (a, b^m)^i$. Portanto, $(a^i, b^j) \in \langle (a, b^m) \rangle$. Como $o(a^i, b^j) = p^r = o(a, b^m)$, concluímos que $\langle (a^i, b^j) \rangle = \langle (a, b^m) \rangle$.

(iii) *Sejam $(a, b^i), (a, b^j) \in H$, com $i \neq j$. Então $\langle (a, b^i) \rangle \neq \langle (a, b^j) \rangle$.*
De fato, suponha $\langle (a, b^i) \rangle = \langle (a, b^j) \rangle$ com $i \neq j$. Então $(a, b^i) \in \langle (a, b^j) \rangle$, logo $(a, b^i) = (a, b^j)^t = (a^t, (b^j)^t)$, para algum inteiro t. Daí, $a = a^t$ e $b^i = (b^j)^t$, disto segue que $a^{t-1} = 1$ e portanto p^r divide $t-1$, ou seja, $t = sp^r + 1$, para algum inteiro s, donde, $b^i = (b^j)^{sp^r+1} = (b^p)^{p^{r-1}s}(b^j) = b^j$, um absurdo.

Concluímos que os subgrupos cíclicos de ordem p^r em H são:

$$\langle (a,1) \rangle, \langle (a,b) \rangle, \langle (a,b^2) \rangle, ..., \langle (a, b^{p-1}) \rangle,$$

que são exatamente p subgrupos. Portanto, segue a afirmação.
Garantimos ainda que estes subgrupos são maximais em H, pois têm índice p primo, portanto fazem parte de qualquer cobertura irredundante de H.
***Afirmação 2**: Os elementos x de $\langle (a, b^i) \rangle$ de ordem p^s com $s < r$, são da forma $(a^t, 1)$.*
Com efeito, se $x \in \langle (a, b^i) \rangle$ e $o(x) = p^s$, então $x = (a, b^i)^t$ para algum inteiro t e $x^{p^s} = (a^{tp^s}, (b^i)^{tp^s}) = (a^{tp^s}, (b^p)^{itp^{s-1}}) = (a^{tp^s}, 1)$.
$\therefore a^{tp^s} = 1 \Rightarrow p^r | tp^s \Rightarrow p^{r-s} | t \Rightarrow t = mp^{r-s}$, *para algum inteiro m.*
Daí teremos $x = (a^t, b^{it}) = (a^t, b^{imp^{r-s}}) = (a^t, (b^p)^{p^{r-s-1}mi}) = (a^t, 1)$.
***Afirmação 3**: $H^pH[p]$ é o único subgrupo de H que é isomorfo a $C_{p^{r-1}} \times C_p$ e contém todos os elementos de ordem menor que p^r.*
De fato, é claro que $H^pH[p] \leq H$ onde

- $H^p = \{(a^i, b^j)^p; (a^i, b^j) \in H\}$
  $= \{(a^{pi}, b^{pj}); (a^i, b^j) \in H\}$
  $= \{(a^{pi}, 1); (a^{pi}, 1) \in H$ *com* $0 \leq i \leq p^{r-1} - 1\}$.

Como
$p = o(a^i) = \dfrac{p^r}{(p^r, i)} \Leftrightarrow (p^r, i) = p^{r-1} \Leftrightarrow i = sp^{r-1},\ 0 \leq s \leq p-1,$
temos

- $H[p] \begin{array}{l} = \{(a^i, b^j); o(a^i, b^j) = p\} \\ = \{(a^{p^{r-1}s}, b^j), 0 \leq s \leq p-1\ ,\ 0 \leq j \leq p-1\}. \end{array}$

Um elemento de $H^pH[p]$ é da forma:

$(a^{pi}, 1)\cdot(a^{tp^{r-1}}, b^j) = (a^{p(p^{r-2}t+i)}, b^j) = (a^{pk}, b^j);\ 0 \leq k \leq p^{r-1}-1\ \ e\ \ 1 \leq j \leq p-1.$

Note ainda que $H^pH[p]$ é um subgrupo próprio de H, já que $(a, b^j) \notin H^pH[p]$.

Agora, vamos a prova da afirmação:

(i) $H^pH[p] \cong C_{p^{r-1}} \times C_p$.
A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : C_{p^{r-1}} \times C_p & \to & H^pH[p], \\ (a^{pi}, b^j) & \mapsto & (a^{pi}, b^j) \end{array}$$

é um isomorfismo.
Com efeito,
.φ *é um homomorfismo:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi((a^{pi}, b^j)\cdot(a^{pi'}, b^{j'})) & = & \varphi(a^{p(i+i')}, b^{j+j'}) \\ & = & (a^{p(i+i')}, b^{j+j'}) \\ & = & (a^{pi}, b^j)(a^{pi'}, b^{j'}) \\ & = & \varphi(a^{pi}, b^j)\cdot\varphi(a^{pi'}, b^{j'}) \end{array}$$

.φ *é claramente injetiva;*
.φ *é sobrejetiva;*
Como φ é injetiva segue que $p^r = |C_{p^{r-1}} \times C_p| \leq |H^pH[p]| < |H| = p^{r+1}$, e isso implica que $|H^pH[p]| = p^r$. Portanto, $H^pH[p] \cong C_{p^{r-1}} \times C_p$.

(ii) $H^pH[p]$ *contém todos os elementos de ordem menor que p^r em H.*
De fato, seja $(a^i, b^j) \in H$ com $o(a^i, b^j) = p^\alpha$, $\alpha < r$, ou seja $(1,1) = (a^i, b^j)^{p^\alpha} = (a^{ip^\alpha}, b^{jp^\alpha})$.
$\therefore a^{ip^\alpha} = 1 \Rightarrow p^r | ip^\alpha \Rightarrow p^{r-\alpha} | i \Rightarrow i = sp^{r-\alpha}$, *para algum s inteiro.*

Daí,

$a^i = a^{sp^{r-\alpha}} = a^{(\overbrace{sp^{r-\alpha-1}}^{k})p}$

$\therefore (a^i, b^j) = (a^{kp}, b^j) = (a^{kp}, 1) \cdot (1, b^j) \in H^pH[p].$

(iii) *Unicidade de* $H^pH[p]$.
Seja $K \cong C_{p^{r-1}} \times C_p$ *contendo todos os elementos de ordem menor que* p^r *de* H. *Então ,* $H^pH[p] \subseteq K$ *(já que todo elemento de* $H^pH[p]$ *tem ordem menor que* p^r*) e como* $|H^pH[p]| = p^r = |C_{p^{r-1}} \times C_p| = |K|$, *segue que* $K = H^pH[p]$.

Observe que $H = H^pH[p] \cup \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle$, *onde* $\langle c_i \rangle = \langle (a, b^j) \rangle$ *com* $1 \leq j \leq p-1$, *é irredundante. De fato, é claro que* $\langle c_i \rangle \nsubseteq H^pH[p]$. *Agora, se* $H^pH[p] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle$, *então* $H = \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle$ *e* $|H| = \left| \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle \right| < \sum_{i=1}^{p} |\langle c_i \rangle|$, *pois* $1 \in \langle c_i \rangle \cap \langle c_j \rangle$, *portanto* $p^{r+1} < p \cdot (p^r)$. *Absurdo.*

Por indução $C_{p^{r-1}} \times C_p$ *tem* $r-1$ *coberturas irredundantes. Cada uma destas* $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k$ *com os* p *subgrupos* $\langle c_i \rangle$ *de ordem* p^r *forma uma cobertura para* H.
Afirmação 4: *Quaisquer duas coberturas irredundantes distintas de* $H^pH[p]$, *produzem duas coberturas irredundantes distintas para* H.
De fato, sejam

$$C_1 : H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_s = H^pH[p] \text{ e } C_2 : K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n = H^pH[p]$$

duas coberturas irredundantes distintas de $H = H^pH[p]$. *Então,*

$$\widetilde{C_1} : H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_s \cup \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle = H \text{ e } \widetilde{C_2} : K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n \cup \bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle = H$$

são duas coberturas para H. *Essas duas coberturas se tornarão irredundantes quando eliminamos os possíveis* H_i*'s e* K_i*'s que estão em* $\bigcup_{i=1}^{p} \langle c_i \rangle$.
Perceba que:
(i) *Os subgrupos não cíclicos de* C_i *não são eliminados.*

De fato, estes subgrupos são da forma $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$*, com* $o(x) = p^{\alpha}$ *e* $o(y) = p^{\beta}$ *e* $\alpha, \beta < r$.

- *Se* $x, y \in \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$*, então* $x = (a^t, 1)$ *e* $y = (a^k, 1)$*, portanto* $\langle x\rangle \times \langle y\rangle \subseteq \langle (a,1)\rangle$*, contrariando o fato de* $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$ *ser não cíclico;*
- *Seja* $H_j = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$*, sendo* C_1 *irredundante, existe* $h \in H_j \setminus \bigcup_{i\neq j} H_i$ *e* $h \notin \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$*. Se* $h \in \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$*, então* $h = (a^t, 1) = (a^{ps}, 1) = (a^p, 1)^s \in \langle (a^p, 1)\rangle$*, mas* $|\langle (a^p,1)\rangle| = p^{r-1}$ *e então* $\langle (a^p, 1)\rangle \lessdot H^p H[p]$*, portanto* $\langle (a^p, 1)\rangle$ *deve fazer parte de toda cobertura irredundante de* $H^pH[p]$*, ou seja,* $\langle (a^p,1)\rangle = H_i$ *para algum* $i \neq j$*, visto que* H_j *é não cíclico e daí* $h \in H_i$ *com* $i \neq j$*, o que contraria* $h \notin \bigcup_{i\neq j} H_i$*. Portanto* $H_j \nsubseteq \bigcup_{i\neq j} H_i \cup \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$.

De modo análogo mostra-se que $K_j = \langle \widetilde{x}\rangle \times \langle \widetilde{y}\rangle \nsubseteq \bigcup_{i\neq j} K_i \cup \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$.

Como as coberturas C_1 *e* C_2 *são distintas, então existe* H_z *em* C_1*, para algum* z*, tal que* $H_z \neq K_j$ *para todo* j*. Do mesmo modo, existe um* K_l *em* C_2*, para algum* l*, tal que* $K_l \neq H_i$ *para todo* i.

(ii) H_z *e* K_l *não estão simultaneamente em* $\bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$.

De fato, temos dois casos a considerar:
Caso (1) Um dos subgrupos H_z *ou* K_l *não é cíclico.*
Neste caso, um dos subgrupos H_z *ou* K_l *não está contido em* $\bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$ *(pelo item (i)) ;*
Caso (2) H_z *e* K_l *são ambos cíclicos.*
Suponha $H_z, K_l \subseteq \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$*, então* $H_z = \langle (a^t,1)\rangle$ *e* $K_l = \langle (a^s, 1)\rangle = \langle g\rangle$*. Claramente ocorrerá* $H_z \subseteq K_l$ *ou* $K_l \subseteq H_z$*, pois* $o(\langle a,1\rangle) = p^r$*. Suponha* $H_z \subseteq K_l = \langle g\rangle$*, logo* $g \in H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_s = H^pH[p]$*. Se* $\langle g\rangle \subset H_2 \cup H_3 \cup ... \cup H_s$*, então* $H_z \subset H_2 \cup H_3 \cup ... \cup H_s$*, um absurdo pois* C_1 *é irredundante, logo* $H_z = K_l$*, o que contraria a hipótese. De modo análogo mostra-se que* $K_l \nsubseteq H_z$.

Portanto as novas coberturas A_1 e A_2 de H obtidas ao eliminar as possíveis redundâncias de $\widetilde{C_1}$ e de $\widetilde{C_2}$, são irreduntantes e distintas pelo item (ii).

Da Afirmação 4 concluímos que H possui $r-1$ coberturas irredundantes do tipo A_1 que juntamente com aquela obtida inicialmente formam no total r coberturas irredundantes para H.
Reciprocamente, qualquer cobertura irredundante de H consiste dos p subgrupos de ordem p^r e de subgrupos de $H^pH[p]$ cobrindo aqueles elementos de H que não pertecem a $\bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$.
Seja $H = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_s \cup \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle$ uma cobertura irredundante de H, é claro que a ordem de qualquer elemento de H_i, para todo i, é menor que p^r, logo $H_i \subset H^pH[p]$ para todo i.
Daí,

$$H^pH[p] = (H_1 \cup ... \cup H_s \cup \bigcup_{i=1}^{p}\langle c_i\rangle) \cap H^pH[p] = H_1 \cup ... \cup H_s \cup \bigcup_{i=1}^{p}(\langle c_i\rangle \cap H^pH[p]),$$

eliminando possivelmente alguns subgrupos do tipo $\langle c_i\rangle \cap H^pH[p]$ obtemos uma cobertura irredundante de $H^pH[p]$. De modo que qualquer cobertura irredundante de H é do tipo descrito acima (na primeira parte da prova).

Referências Bibliográficas

[1] BASTOS, G.G. *Notas de álgebra*. Fortaleza, Premius - Edições Livro Técnico, 2002.

[2] BRODIE, M.A. Uniquely covered groups. *Algebra Colloquium*, v. 10, p. 101-108, 2001.

[3] BRODIE, M.A. ; CHAMBERLAIN, R.F; KAPPE, L.C. Finite coverings by normal subgroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v.104, p. 669-674, 1988.

[4] COHN, J. H. E. On n-sum groups. *Math Scand.*, v. 75, p. 44-58, 1994.

[5] GARCIA, A. ; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[6] HUNGERFORD, T.W. *Algebra*. New York: Springer-Verlag, 2000.

[7] NEUMANN, B.H. Groups covered by permutable subsets. *Journal of London Mathematical Society*, v. 29, p. 227-242, 1954.

[8] NEUMANN, B.H. Groups covered by finitely many cosets. *Publ. Math. Debrecen*, v. 3, p. 227-242, 1954.

[9] ROBINSON, D.J.S. *A course in the theory of groups*. New York: Springer-Verlag, 1996.

[10] ROBINSON, D.J.S. *An introduntion to abstract algebra*. Berlin: Walter de Gruyter, 2003.

[11] ROTMAN, J.J. *An Introduction to the theory of groups*. New York: Springer-Verlaq, 1995.

[12] SCORZA, G. Gruppe che possone pensarsi come somma di tre sottogruppi. *Boll. Un. Mat. Ital.*, v. 5, p. 216-218, 1926.