UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

O TEOREMA DE ESTABILIDADE DE LICHNEROWICZ PARA APLICAÇÕES HOLOMORFAS EM VARIEDADES KÄHLER

Fortaleza
2011

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

O TEOREMA DE ESTABILIDADE DE LICHNEROWICZ PARA APLICAÇÕES HOLOMORFAS EM VARIEDADES KÄHLER

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração:
Geometria Diferencial.
Orientador:
Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza
2011

C977t Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da

O Teorema de estabilidade de Lichnerowicz para aplicações holomorfas em variedades Kähler/ Antonio Wilson Rodrigues da Cunha.-2011.

84f.: enc.; 31cm.

Dissertação (mestrado)- Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2011.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Geometria Diferencial. 2. Aplicações holomorfas. 3. Espaços vetoriais. I. Título.

CDD 516.36

Dedico este trabalho a meus pais Antonio Rodrigues de Lima e Francisca da Silva da Cunha Lima, a todos meus irmãos e à minha noiva Ana Lucia Gomes Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter proporcionado esta grande fase de minha vida;

Aos meus pais e a meus irmãos pelo apoio e incentivo;

À meu primo José Rodrigues (o Zequia) e sua esposa Jesus, Tony e Maria Antônia, pela boa conversa e o grande incentivo que me deram;

Ao prof. Caminha, por todo apoio, incentivo e orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho;

Aos grandes amigos Cícero Aquino, Barnabé, Paulo Alexandre e João Xavier, cuja amizade e espelho foi importante na busca deste meu objetivo;

Aos amigos de Graduação da UFPI Daniel, Diego, Maurício, Gleyson, Humberto, Amorim, Djavan e José Venâncio, pela boa convivência;

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos meus grandes amigos Ernani, Kelton, Rondinelle, Damião, Chaves, Tiarlos, Alexandro, Isaias, Tiago Veras, Bill, Manuel Vieira, Halyson e Ederson, pela amizade e pela grande ajuda nas horas em que precisei durante todo esse tempo;

A Andréa Dantas, secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFC, por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

À a CAPES, pelo apoio financeiro;

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar um teorema devido a A. Lichnerowicz, que garante a estabilidade de aplicações holomorfas ou anti- holomorfas com domínio compacto entre variedades Kähler.

Palavras-chaves: Variedades complexas (Kähler), aplicações harmônicas e holomorfas, energia, variedade compacta.

Abstract

Our goal in this work is to present a theorem due to A. Lichnerowicz,which guarantees stability from applications holomorphic or antiholomorphic with compact domain between Kähler manifolds .

Keywords: Complex manifolds (Kähler), applications holomorphic and harmonic, energy, compact manifolds.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma demonstração de um teorema de A. Lichnerowicz [7] sobre a estabilidade de aplicações holomorfas ou anti-holomorfas $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre duas variedades Kähler, sendo $\mathcal{M}$ compacta. Seguimos essencialmente as referências [1] e [12].

O Capítulo 1 começa com um pequeno resumo da teoria de fibrados vetoriais, de acordo com o Capítulo 5 de [5], resumo este que será essencial para o material do Capítulo 2. Apresentamos ainda uma breve exposição sobre espaços vetoriais complexos, onde esclarecemos como se dá a complexificação de um espaço vetorial real. Por fim, definimos variedades complexas e aplicações holomorfas e anti-holomorfas entre tais objetos, destacando-se nesse sentido a seguinte

Proposição. Se J e J' são as estruturas quasi-complexas canônicas das variedades complexas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamete, então uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1 e holomorfa (resp. anti-holomorfa) se, e somente se, $df_p \circ J_p = J'_{f(p)} \circ df_p$ (resp. $df_p \circ J_p = -J'_{f(p)} \circ df_p$) para todo $p \in \mathcal{M}$.

Na Seção 1.5 encontramos ainda a definição de variedade Kähler, conceito este que será o nosso foco principal de nossa atenção.

O Capítulo 2 trata diretamente da teoria das aplicações harmônicas entre duas variedades Riemannianas. Em particular, na Seção 2.1 apresentamos a definição de segunda forma fundamental de uma aplicação suave entre variedades Riemannianas, destacando-se a seguinte

Proposição. Se $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação holomorfa ou anti-holomorfa entre variedades Kähler, então f é harmônica.

Ainda na Seção 2.1 destacamos a Proposição 2.20, a qual será utilizada diretamente para demonstrar o teorema principal. A Seção 2.2 traz a definição da energia de uma aplicação suave $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, dando ênfase às fórmulas para a primeira e segunda variações da energia, quando veremos que se tivermos uma aplicação suave f com energia finita, então será harmônica se, e somente se, for ponto crítico do funcional energia associado a qualquer variação própria. Na Seção 2.3 fazemos uma pequena revisão sobre o operador estrela de Hodge, frisando o Lema 2.37 pela sua utilidade na demonstração do teorema principal.

Por fim, no Capítulo 3 enunciamos e demonstramos o resultado principal dessa dissertação, conforme enunciado abaixo.

Teorema (Lichnerowicz). Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Kähler. Se $\mathcal{M}$ é compacta, então qualquer aplicação holomorfa ou anti-holomorfa $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação harmônica com energia mínima em sua classe de homotopia.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fibrados vetoriais

Nesta seção veremos um pouco da teoria de fibrados vetoriais.

Definição 1.1 (Fibrado vetorial). *Dada uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$, um* **fibrado vetorial** (*suave real – i.e., C^∞*) *sobre $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável E, juntamente com uma aplicação diferenciável e sobrejetiva $\pi : E \to \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \in \mathcal{M}$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial real k dimensional.*

(b) *Para cada $p \in \mathcal{M}$, existe uma vizinhança U de p em $\mathcal{M}$ e uma aplicação diferenciável $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tal que:*

   i. *Para cada $q \in U$, a restrição de Ψ a E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, munido com a estrutura canônica de espaço vetorial.*

   ii. *Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Psi : \pi^{-1}(U) \to U$.*

Nas notações acima, temos:

- $\mathcal{M}$ é a **base** e E é o **espaço total** do fibrado.
- E_p é a **fibra** de E sobre p, onde $p \in \mathcal{M}$.
- k é o **posto** de E (ou de π).

- Ψ é uma **trivialização local**, ou **carta de fibrado** de E sobre U.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to \mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$, uma **seção** do fibrado E (ou de π) é uma aplicação diferenciável $\sigma : \mathcal{M} \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$.

Temos também que,

- $\Gamma(E)$ denotará o espaço vetorial das seções de E.

- O suporte de σ é o subconjunto fechado de $\mathcal{M}$

$$supp(\sigma) = \overline{\{p \in \mathcal{M}; \sigma(p) \neq 0\}}.$$

- $\Gamma_c(E)$ denotará o conjunto das seções $\sigma \in \Gamma(E)$ de **suporte compacto**.

- $C^\infty(\mathcal{M})$ denotará o conjunto das funções suaves sobre $\mathcal{M}$.

Exemplo 1.2. Se $\pi : E \to \mathcal{M}$ é um fibrado vetorial sobre $U \subset \mathcal{M}$ aberto, então a restrição π_U a $\pi^{-1}(U)$ é um fibrado vetorial $\pi_U : \pi^{-1}(U) \to U$, o qual chamaremos o **fibrado induzido** ou a **retrição** de π a U. Quando não houver perigo de confusão, denotaremos por $E_{|U} = \pi^{-1}(U)$ a base do fibrado induzido e por $\Gamma(E_{|U})$ o seu espaço de seções.

Exemplo 1.3. O fibrado tangente $T\mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável n-dimensional, é um fibrado vetorial de posto n sobre $\mathcal{M}$. Denote $\Gamma(T\mathcal{M}) = \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Lema 1.4. *Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade suave, $k \in \mathbb{N}$ e, para cada $p \in \mathcal{M}$, E_p um espaço vetorial real $k-$dimensional; sejam também $E = \coprod_{p \in \mathcal{M}} E_p$ e $\pi : E \to \mathcal{M}$ a aplicação tal que $\pi(E_p) = \{p\}$. Suponha dados*

(a) *Uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\mathcal{M}$.*

(b) *Para cada $\alpha \in A$, uma bijeção $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a cada E_p é um isomorfismo linear entre E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, munido da estrutura canônica de espaço vetorial real $k-$dimensional.*

(c) *Para cada $\alpha, \beta \in A$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, uma aplicação suave $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k;\mathbb{R})$ tal que a composição $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ de $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$ para si mesmo tem a forma*

$$(\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1})(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v).$$

Então E tem uma única estrutura de variedade suave tal que $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial suave de posto k tendo as aplicações Ψ_α como trivializações locais.

Para uma prova do resultado acima veja Lema 5.5 de [5].

Exemplo 1.5. Seja $\pi : E \to \mathcal{M}$ um fibrado vetorial de posto k. O **fibrado dual** de E é o espaço topológico

$$E^* = \coprod_{p\in\mathcal{M}} E_p^*,$$

munido da estrutura de fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}$ induzida a partir daquela de E, conforme o Lema 1.4. De maneira mais precisa, seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\alpha : & \coprod_{p\in U_\alpha} E_p & \to & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ & (p,v) & \mapsto & (p, \tau_\alpha(p)v) \end{array}$$

é trivialização local para E, com aplicação de transição $g_{\alpha\beta}$ (sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$); definindo

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\alpha^* : & \coprod_{p\in U_\alpha} E_p^* & \to & U_\alpha \times (\mathbb{R}^k)^* \\ & (p,\varphi) & \mapsto & (p, (\tau_\alpha(p)^*)^{-1}\varphi) \end{array}$$

temos, no caso em que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} (\Psi_\alpha^* \circ (\Psi_\beta^*)^{-1})(p,\varphi) &= (p, (\tau_\alpha(p)^*)^{-1} \circ \tau_\beta(p)^*\varphi) \\ &= (p, (\tau_\beta(p) \circ \tau_\alpha(p)^{-1})^*\varphi) \\ &= (p, g_{\beta\alpha}(p)^*\varphi). \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de fazer acima, segue que as seções de E^* são da forma σ^*, com $\sigma \in \Gamma(E)$. Aqui entendemos σ^* como a seção que faz corresponder, a cada $p \in \mathcal{M}$, o funcional linear $\sigma_p^* : E_p \to \mathbb{R}$, dual algébrico de $\sigma_p \in E_p$.

Para prosseguirmos, temos as seguintes notações:

- $T^*\mathcal{M}$ é o **fibrado cotangente** sobre $\mathcal{M}$, ou seja, o dual do fibrado tangente.

- $\Gamma(T^*\mathcal{M})$ será danotado por $\Omega^1(\mathcal{M})$.

Definição 1.6. *Dados os fibrados vetoriais suaves $\pi_E : E \to \mathcal{M}$ e $\pi_F : F \to \mathcal{M}$, um* **homomorfismo** *de E para F é uma aplicação suave $\Psi : E \to F$ tal que $\pi_F \circ \Psi = \pi_E$ e $\Psi_{|E_p} : E_p \to F_p$ é uma transformação linear para todo $p \in \mathcal{M}$.*

Proposição 1.7. *Sejam $\pi_E : E \to \mathcal{M}$ e $\pi_F : F \to \mathcal{M}$ fibrados vetoriais suaves dados. Se $\widetilde{\Phi} : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é uma aplicação $C^\infty(\mathcal{M})$-linear, então existe um homomorfismo $\Phi : E \to F$ tal que $\widetilde{\Phi}(\eta) = \Phi \circ \eta$, para $\eta \in \Gamma(E)$.*

Para uma prova desta proposição veja Proposição 5.16 de [5].

Definição 1.8. *Sejam $\pi_E : E \to \mathcal{M}$ e $\pi_F : F \to \mathcal{M}$ fibrados vetoriais de posto k e l, respectivamente. Definimos o* **fibrado de homomorfismo** *por*

$$\mathrm{Hom}(E;F) = \coprod_{p\in M} \mathrm{Hom}(E_p;F_p),$$

onde $\mathrm{Hom}(E_p;F_p)$ *é o conjunto das transformações lineares de E_p para F_p.*

Dizemos ainda, que dois fibrados são **isomorfos** se existir um homomorfismo $\Psi : E \to F$ que é um difeomorfismo.

Considere $\pi_E : E \to \mathcal{M}$ e $\pi_F : F \to \mathcal{M}$ fibrados vetoriais sobre $\mathcal{M}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\alpha : & \coprod_{p\in U_\alpha} E_p & \to & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ & (p,v) & \mapsto & (p, \tau_\alpha(p)v) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \Psi_\alpha : & \coprod_{p\in U_\alpha} F_p & \to & U_\alpha \times \mathbb{R}^l \\ & (p,w) & \mapsto & (p, \theta_\alpha(p)w) \end{array}$$

são trivializações locais para E e F, com aplicações de transição $g_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$, respectivamente (com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$). Definimos o **produto tensorial** de E e F como sendo o espaço topológico

$$E \otimes F = \coprod_{p\in M} (E_p \otimes F_p),$$

munido com a estrutura de fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}$ induzida pelas trivializações

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\alpha \otimes \Psi_\alpha : & \coprod_{p\in U_\alpha} (E_p \otimes F_p) & \to & U_\alpha \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) \\ & \eta_p \otimes \xi_p & \mapsto & (p, (\tau_\alpha(p)\eta_p) \otimes (\theta_\alpha(p)\xi_p)) \end{array}.$$

Se $E_1, \ldots, E_m$ são fibrados sobre $\mathcal{M}$, uma seção de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ é um **campo tensorial** (ou **tensor**) sobre $\mathcal{M}$. Dado $U \subset \mathcal{M}$ domínio de trivializações locais para $E_1, \ldots, E_m$, com $\{\eta_{jk_1}, \ldots, \eta_{jk_j}\}$ referencial local para E_j, temos, por construção, que em U

$$\Gamma(E_1 \otimes \cdots \otimes E_m) \simeq \Gamma(E_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma(E_m). \tag{1.1}$$

Para o que segue, quando tivermos $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável, $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k$ e $\pi_{\mathcal{M}} : E \to \mathcal{M}$ é a projeção sobre o primeiro fator, então E é um fibrado vetorial de posto k sobre $\mathcal{M}$, chamado o **fibrado trivial** de posto k sobre $\mathcal{M}$.

Por simplicidade, se um fibrado vetorial $\pi : E \to \mathcal{M}$ de posto k for isomorfo ao fibrado trivial $\pi_1 : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^k \to \mathcal{M}$, diremos que π é **trivial**.

Definição 1.9. *Se E é um fibrado sobre $\mathcal{M}$, uma $k-$***forma diferencial** *sobre $\mathcal{M}$ com valores em E é uma seção do fibrado $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$.*

A definição acima é concistente pelo fato que localmente (confira isomorfismo (1.1))

$$\Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E) \simeq \Omega^k(\mathcal{M}) \otimes \Gamma(E). \tag{1.2}$$

Além disso, se $\omega \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ se escreve em $U \subset \mathcal{M}$ como $\omega = \omega_j \otimes \xi_j$, onde $\omega_j \in \Omega^k(U)$ e $\xi_j \in \Gamma(E_{|U})$, então, para $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) := \omega_j(X_1, \ldots, X_k) \otimes \xi_j \approx \omega_j(X_1, \ldots, X_k)\xi_j \in \Gamma(E_{|U}) \tag{1.3}$$

Para terminar esta seção, precisamos das definições que seguem.

Definição 1.10. *Uma* **métrica Riemanniana** *em um fibrado vatorial $\pi : E \to \mathcal{M}$ é uma aplicação $C^\infty(\mathcal{M})$-bilinear, simétrica e positiva definida*

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(\mathcal{M}).$$

Com esta definição, *todo fibrado vetorial $\pi : E \to \mathcal{M}$ admite uma métrica Riemanniana.* De fato, seja k o posto de π e fixe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $\mathcal{M}$ por vizinhanças coordenadas de $\mathcal{M}$, domínios de trivializações locais $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ para π. Se $\langle , \rangle$ denota a métrica canônica de $\mathbb{R}^k$ e $\{\varphi_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ de $\mathcal{M}$, defina, para $\eta, \xi \in \Gamma(E)$

$$g(\eta, \xi) = \varphi_\alpha(p)\langle \Psi_\alpha(\eta_p), \Psi_\alpha(\xi_p)\rangle.$$

Observe que usando as propriedades da partição da unidade, g satisfaz às propriedades da nossa definição acima, e portanto, é uma métrica Riemanniana em E.

Caso não tenha perigo de confusão, denotaremos $g(\eta, \xi)$ por $\langle \eta, \xi \rangle$. Temos ainda, que um referencial $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ em $U \subset \mathcal{M}$ para π é **ortonormal** se $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \delta_{ij}$.

Definição 1.11. *Uma* **conexão (linear)** *em um fibrado vetorial $\pi : E \to \mathcal{M}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear*

$$\begin{aligned} \nabla : \ \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, \eta) &\mapsto \nabla_X \eta \end{aligned} \tag{1.4}$$

satisfazendo, para $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *e* $\eta \in \Gamma(E)$, *as seguintes propriedades:*

(a) $\nabla_{fX}\eta = f\nabla_X\eta$.

(b) $\nabla_X f\eta = f\nabla_X\eta + X(f)\eta$.

Localmente, em um fibrado, temos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\eta_j = \Gamma_{ij}^l\eta_l, \tag{1.5}$$

onde $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ é um referencial local para $\pi : E \to \mathcal{M}$ e Γ_{ij}^l são os símbolos de Chistoffel da conexão ∇ em $U \subset \mathcal{M}$.

Lema 1.12. *Seja* $\pi : E \to \mathcal{M}$ *um fibrado vetorial sobre* $\mathcal{M}$, *munido de uma conexão linear* ∇.

(a) *Fixado* $\eta \in \Gamma(E)$, *a aplicação* $X \mapsto \nabla_X\eta$ *é* $C^\infty(\mathcal{M})-$*linear e seu valor em* $p \in M$ *só depende do valor de* X *em* p.

(b) *Fixado* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, *a aplicação* $\eta \mapsto \nabla_X\eta$ *é* $\mathbb{R}-$*linear e seu valor em* $p \in \mathcal{M}$ *só depende dos valores de* η *ao longo de uma curva tangente a* X *em* p.

Prova. Tome $U \subset \mathcal{M}^n$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}$, domínios de uma trivialização local para π com referencial local $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$. Se $X = a_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\eta = u_j\eta_j$, então

$$\begin{aligned}
\nabla_X\eta &= \nabla_{a_i\frac{\partial}{\partial x^i}}\eta = a_i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}u_j\eta_j \\
&= a_i(u_j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\eta_j + \frac{\partial}{\partial x^i}(u_j)\eta_j) \\
&= a_iu_j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\eta_j + a_i\frac{\partial}{\partial x^i}(u_j)\eta_j) \\
&= X(u_j)\eta_j + a_iu_j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\eta_j \\
&= X(u_l)\eta_l + a_iu_j\Gamma_{ij}^l\eta_l \\
&= (X(u_l) + a_iu_j\Gamma_{ij}^l)\eta_l.
\end{aligned}$$

O valor da expressão acima em p só depende do valor de X em p e de η ao longo de uma curva tangente a X em p. $\square$

Definição 1.13. *Seja* $\pi : E \to \mathcal{M}$ *um fibrado vetorial munido de uma métrica* $g = \langle , \rangle$. *Uma conexão* $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(\mathcal{M}) \to \Gamma(\mathcal{M})$ *é* **compatível com a métrica** *se, para todos* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *e* $\eta, \xi \in \Gamma(E)$, *tivermos*

$$X\langle \eta, \xi \rangle = \langle \nabla_X \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X \xi \rangle. \tag{1.6}$$

Definição 1.14. *Um* **fibrado vetorial Riemanniano** *é um fibrado vetorial* $\pi : E \to M$ *munido de uma métrica Riemanniana* g *e de uma conexão* ∇ *compatível com* g.

Observação 1.15. Se tomarmos ∇ a ser a conexão de Levi-Civita da variedade Riemanniana $\mathcal{M}^n$ e $p \in \mathcal{M}$ fixo, podemos escolher uma vizinhança U de p em $\mathcal{M}$ na qual fica definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Um tal referencial é dito ser **geodésico** em p.

Exemplo 1.16. A **soma de Whitney** dos fibrados E e F

$$E \oplus_W F = \coprod_{p \in M} (E_p \oplus F_p),$$

é um fibrado Riemanniano com métrica $g = \langle , \rangle$ e conexão ∇ tais que

$$\langle \eta_1 \oplus \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_E + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_F$$

e

$$\nabla_X (\eta \oplus \xi) = \nabla^E_X \eta \oplus \nabla^F_X \xi,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E)$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(F)$.

Exemplo 1.17. No fibrado de homomorfismo $\mathrm{Hom}(E, F)$ de E em F, definimos a métrica $g = \langle , \rangle$ para $\Phi, \Psi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E; F))$ por

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi(\eta_i), \Psi(\eta_i) \rangle_F,$$

onde $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ é um referencial ortonormal local para E.

A conexão ∇ é definida por

$$(\nabla_X \Phi)\eta = \nabla^F_X \Phi(\eta) - \Phi \nabla^E_X \eta,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \eta \in \Gamma(E)$ e $\Phi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$.

Nas notações do exemplo acima, se $\Phi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T\mathcal{M}, F))$ definimos $\nabla\Phi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T\mathcal{M} \oplus_W T\mathcal{M}, F))$ pondo, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

$$(\nabla\Phi)(X, Y) = (\nabla_X \Phi)Y.$$

Definição 1.18. *No produto tensorial $E \otimes F$ definimos a métrica $g = \langle , \rangle$ e conexão ∇ por*

$$\langle \eta_1 \otimes \xi_1, \eta_2 \otimes \xi_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_E \cdot \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_F,$$

e

$$\nabla_X(\eta \otimes \xi) = (\nabla^E_X \eta) \otimes \xi + \eta \otimes (\nabla^F_X \xi),$$

para todos $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E)$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(F)$.

Para finalizar, vamos estender para fibrados vetoriais munidos com uma conexão linear, a noção de curvatura de uma variedade Riemanniana.

Definição 1.19. *Se ∇ é uma conexão no fibrado vetorial $\pi : E \to \mathcal{M}$, o* **operador de curvatura***, ou simplesmente a curvatura de E é a aplicação $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ dada por*

$$R(X, Y)\eta = \nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_Y \nabla_X \eta - \nabla_{[X,Y]}\eta.$$

1.2 Resumo de Álgebra Linear

Em tudo o que segue, i denota a unidade imaginária de $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais(reais ou complexos) considerados serão supostos de dimensão(real ou complexa) finita. Se V é um espaço real (resp complexo), denotamos sua dimensão real (resp complexa) por $\dim_{\mathbb{R}} V$ (resp $\dim_{\mathbb{C}} V$).

Se V é um espaço vetorial complexo, é imediato que V também pode ser visto como espaço vetorial real pela operação de restrição do corpo de escalares de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{R}$, o qual denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$, sempre que conveniente.

A transformação linear em V resultante da multiplicação por i pode ser vista, em $V_{\mathbb{R}}$, como um operador linear $J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ tal que $J^2 = -1$, onde $J^2 = J \circ J$ e $1 : V \to V$ denota o operador identidade. Nesse caso, sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V sobre $\mathbb{C}$, uma verificação direta garante que $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ é uma base de $V_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$, de maneira que

$$\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Exemplo 1.20. O conjunto $\mathbb{C}^n$ das n-uplas de números complexos, munido com as operações

$$(z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n)$$

e

$$\lambda(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n),$$

é um espaço vetorial complexo tal que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$. Visto como espaço vetorial real, temos que $\mathbb{C}^n$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ pela identificação

$$(z_1, \ldots, z_n) \approx (a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n),$$

onde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $z_j = a_j + ib_j$ para $1 \leq j \leq n$. Além disso, a transformação linear $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ induzida pela multiplicação por i em $\mathbb{C}^n$ é tal que

$$J(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \ldots, -y_n, x_n).$$

Vimos acima que um espaço vetorial complexo V gera (por restrição do corpo de escalares) um espaço vetorial real $V_{\mathbb{R}}$ de dimensão real par e munido de uma transformação linear $J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ tal que $J^2 = -1$. Essa situação é suficientemente importante para merecer a seguinte

Definição 1.21. *Uma* **estrutura complexa** *em um espaço vetorial real V é um operador linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -1$.*

Lema 1.22. *Se V é um espaço vetorial real munido de uma estrutura complexa $J : V \to V$, então $\dim V$ é par. Além disso, se $\dim V = 2n$ então,*

(a) Podemos escolher uma base $\{e_1, e_1', \ldots, e_n, e_n'\}$ para V tal que $Je_k = e_k'$ e $Je_k' = -e_k$ para todo $1 \leq k \leq n$.

(b) A operação de extensão de escalares $(a + ib)v := av + bJv$ torna V um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n. Além disso, nas notações do ítem (a), $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base de V sobre $\mathbb{C}$.

Prova. (a) Se $e_1 \in V \setminus \{0\}$, então $\{e_1, Je_1\}$ é L.I. Também, temos que $Je_1 \neq 0$ (já que $J(Je_1) = -e_1 \neq 0$). Por outro lado, se $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ forem tais que $ae_1 + bJe_1 = 0$, então

$$aJe_1 + bJ^2 e_1 = 0 \Rightarrow aJe_1 - be_1 = 0.$$

Daí, segue que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Desde que a igualdade acima implica que $a = b = 0$, temos uma contradição.

Se $e_2 \in V \setminus \mathbb{R}\langle e_1, Je_1\rangle$, então $Je_2 \in V \setminus \mathbb{R}\langle e_1, Je_1\rangle$, pois se $Je_2 = ae_1 + bJe_1$ teríamos

$$J^2e_2 = aJe_1 + bJ^2e_1 \Rightarrow -e_2 = aJe_1 - be_1 \Rightarrow e_2 = be_1 - aJe_1.$$

Mas, isto é um absurdo. Veja ainda que pelo mesmo argumento acima $\{e_2, Je_2\}$ é L.I., de sorte que $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ é L.I. em V.

Prosseguindo nesse sentido, concluímos que V tem dimensão par. Para concluir (a), basta fazer $e'_k = Je_k$.

(b) Munindo V com a operação do enunciado, as operações de espaço vetorial seguem de imediato. Para o que falta, se $\{e_1, e'_1, \ldots, e_n, e'_n\}$ é uma base de V (sobre $\mathbb{R}$) como em (a), então, sobre $\mathbb{C}$, temos $e'_k = Je_k = ie_k$ para $1 \leq k \leq n$, donde segue que $\dim_{\mathbb{C}} V \leq n$; por outro lado, se $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ são tais que $(a_k + ib_k)e_k = 0$ no espaço vetorial complexo V , então, sobre $\mathbb{R}$ temos

$$a_ke_k + b_ke'_k = a_ke_k + b_kJe_k = 0.$$

A expressão acima implica que $a_k = b_k = 0$ $\forall 1 \leq k \leq n$. Portanto, o subconjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ do espaço vetorial complexo V é L.I. sobre $\mathbb{C}$, e segue que $\dim_{\mathbb{C}} V \geq n$. $\square$

Se V é um espaço vetorial real qualquer (i.e., não necessariamente de dimensão par), o espaço produto (real) $V \times V$ admite a estrutura complexa

$$\begin{array}{rccc} J: & V \times V & \rightarrow & V \times V \\ & (u, v) & \mapsto & (-v, u) \end{array}.$$

Portanto, aplicando o item (b) do Lema 1.22, podemos ver $V \times V$ como um espaço vetorial complexo, o qual denotaremos por $V^{\mathbb{C}}$ e denominaremos a **complexificação** de V . Também pelo item (b) do Lema 1.22, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V sobre $\mathbb{R}$, então $\{e_1, \ldots, e_n\}$ também é base de $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$, de tal forma que

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Por simplicidade, escreveremos $u + iv$ para denotar o elemento (u, v) de $V^{\mathbb{C}}$. Assim, para $u, u', v, v' \in V$, temos

$$u + iv = u' + iv' \Leftrightarrow u = u' \quad e \quad v = v'.$$

Com isso, podemos operar em $V^{\mathbb{C}}$ como se estivesse em $\mathbb{C}$ da seguinte maneira, para $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$$

e

$$(\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u),$$

Se V é um espaço vetorial real, a inclusão

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^{\mathbb{C}} \\ u & \mapsto & u + i0 \end{array}$$

respeita as operações de V; de fato, tal inclusão é simplesmente a inclusão $u \mapsto (u, 0)$ de V em $V \times V$.

Exemplo 1.23. O espaço vetorial complexo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ introduzido no Exemplo 1.20 pode ser visto como a complexificação de $\mathbb{R}^n$.

Ainda em relação à complexificação de um espaço vetorial V , estendemos a operação de conjugação complexa a $V^{\mathbb{C}}$ definindo, para $u, v \in V$, o **conjugado** de $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ por

$$\overline{u + iv} = u - iv.$$

O operador $V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ assim obtido é linear com respeito à conjugação, i.é.,

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} \text{ e } \overline{\lambda a} = \bar{\lambda}\bar{a}.$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a, b \in V^{\mathbb{C}}$.

Se W é um subespaço (complexo) de $V^{\mathbb{C}}$, definimos o **subespaço conjugado** de W como sendo

$$\overline{W} = \{\bar{a}; a \in W\}.$$

i.é., $\overline{W}$ é a imagem de W em relação ao operador acima.

Agora considere V um espaço vetorial real munido de uma estrutura complexa J e tal que $\dim V = 2n$. O espaço vetorial complexo obtido a partir de V de acordo com o Lema 1.22 tem dimensão complexa n, ao passo que a complexificação de V tem dimensão complexa $2n$. O lema a seguir expõe a relação entre esses dois espaços vetoriais complexos.

Lema 1.24. *Se V é um espaço vetorial real munido de uma estrutura complexa J e tendo dimensão real $2n$, então:*

(a) *J se estende unicamente a um operador linear complexo sobre $V^{\mathbb{C}}$, também denotado por J, tal que $J^2 = -1$, onde 1 é o operador identidade de $V^{\mathbb{C}}$.*

(b) *Os subconjuntos V^+ e V^- de $V^{\mathbb{C}}$, definidos por*

$$V^+ = \{x \in V^{\mathbb{C}}; Jx = ix\} \quad e \quad V^- = \{x \in V^{\mathbb{C}}; Jx = -ix\},$$

são subespaços complexos n-dimensionais de $V^{\mathbb{C}}$, tais que $V^- = \overline{V^+}$ e $V^{\mathbb{C}} = V^+ \oplus V^-$

(c) *V^+ é isomorfo sobre $\mathbb{C}$ ao espaço vetorial complexo obtido a partir de V conforme prescrito no Lema 1.22.*

Prova. Obviamente V^+ e V^- são subespaços vetoriais complexos. Também é imediato que $V^- = \overline{V^+}$. O que não é tão imediato nos ítem (a) e (b) é que $\dim_{\mathbb{C}} V^+ = \dim_{\mathbb{C}} V^- = n$ e $V^{\mathbb{C}} = V^+ \oplus V^-$.

Assim, para finalizar o ítem (b) basta mostrar que $\dim_{\mathbb{C}} V^+ = \dim_{\mathbb{C}} V^- = n$ e $V^{\mathbb{C}} = V^+ + V^-$, uma vez que é imediato que $V^+ \cap V^- = \{0\}$. Considere pela Lema 1.22 uma base (real) $\{e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n\}$ de V tal $e'_k = Je_k$ e $e_k = -Je'_k$. Veja que

$$u_k = \frac{1}{2}(e_k - ie'_k) \Rightarrow \bar{u}_k = \frac{1}{2}(e_k + ie'_k), \ \ 1 \leq k \leq n.$$

e

$$e_k = u_k + \bar{u}_k \ \text{ e } \ e'_k = i(u_k - \bar{u}_k),$$

de tal forma que $\{u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ é base complexa de $V^{\mathbb{C}}$. Veja ainda que

$$\begin{aligned} Ju_k &= \frac{1}{2}(Je_k - iJe'_k) = \frac{1}{2}(J(-Je'_k) - iJ(Je_k)) \\ &= \frac{1}{2}(e'_k + ie_k) = \frac{1}{2}i(e_k - ie'_k) = iu_k. \end{aligned}$$

Logo, $u_k \in V^+$, e analogamente, $\bar{u}_k \in V^-$ para $1 \leq k \leq n$, como queriamos.

Para (c) defina a aplicação $I : V \to V^+$ por $I(u) = u$ para todo $u \in V$. É claro que I é $\mathbb{R}$-linear e injetiva. Além disso, segue da definição de multiplicação por i no espaço vetorial complexo e do fato de $u \in V^+$, que

$$I(iu) = I(Ju) = Ju = iu,$$

ou seja, I é $\mathbb{C}$-linear. Agora, como $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^+ = n$, o teorema do núcleo e da imagem garante que I é um $\mathbb{C}$-isomorfismo. $\square$

Dizemos que os elementos de V^+ são do **tipo holomorfo** e os de V^- são do **tipo anti-holomorfo**.

Definição 1.25. *Se V é um espaço vetorial munido de uma estrutura complexa J, dizemos que um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é* **Hermitiano** *se*

$$\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Daí, dizemos que $(V, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um **espaço vetorial Hermitiano**.

Lema 1.26. *Se V é um espaço vetorial Hermitiano, podemos escolher uma base ortonormal de V da forma $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$.*

Prova. Se $\dim V = 2n$, vamos fazer indução sobre n. Para $n = 1$ e $e_1 \in V$ unitário, temos

$$\langle Je_1, Je_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$$

e

$$\langle Je_1, e_1 \rangle = \langle J^2 e_1, Je_1 \rangle = \langle -e_1, Je_1 \rangle = -\langle Je_1, e_1 \rangle,$$

de sorte que $\langle Je_1, e_1 \rangle = 0$. Assim, $\{e_1, Je_1\}$ é uma base ortonormal de V.

Para $n > 1$, comecemos escolhendo um vetor unitário e_1 em V , de sorte que, como acima, $\{e_1, Je_1\}$ seja um conjunto ortonormal. Daí, se $\mathcal{B} = \{e_1, Je_1\}^\perp$ e $v \in \mathcal{B}$, então

$$\langle Jv, Je_1 \rangle = \langle v, e_1 \rangle = 0$$

e

$$\langle Jv, e_1 \rangle = \langle J^2 v, Je_1 \rangle = -\langle Jv, e_1 \rangle,$$

e logo, $\langle Jv, e_1 \rangle = 0$. Assim, $Jv \in \mathcal{B}$, e daí a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathcal{B}$ é um produto interno Hermitiano em $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ tem dimensão igual a $2(n-1)$, segue por hipótese de indução que $\mathcal{B}$ admite uma base ortonormal da forma $\{e_2, \ldots, e_n, Je_2, \ldots, Je_n\}$, de sorte que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, Je_1, Je_2, \ldots, Je_n\}$ é a base ortonormal procurada para V . $\square$

1.3 Variedades quasi-complexas

Definição 1.27. *Uma* **estrutura quasi-complexa** *J em uma variedade diferenciável $2n$-dimencional $\mathcal{M}$ é a escolha, para cada $p \in \mathcal{M}$, de uma estrutura complexa $J_p = T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$, a qual é diferenciável no seguinte sentido: para cada $p \in \mathcal{M}$ existem coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_{2n})$ definidas numa vizinhança U de p em $\mathcal{M}$ e tais que a matriz de J_p com respeito à base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\}$ de $T_p\mathcal{M}$ tem a forma*

$$J_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p = J_{kl}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big)_p,$$

onde $J_{kl} \in C^\infty(U)$ para todos $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq l \leq 2n$.

A estrutura quasi-complexa J está munida da propriedade de que $J^2 = -Id$. Com isto, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 1.28 (Variedade quase-complexa). *Uma variedade quasi-complexa é um par $(\mathcal{M}, J)$, onde $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável e J é uma estrutura quasi-complexa, ou seja, um campo tensorial tal que $J^2 = -Id$.*

Se $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional, o **fibrado tangente complexificado** de $\mathcal{M}$ é o produto tensorial

$$T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathcal{M} \times \mathbb{C}).$$

O espaço $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ denotará o espaço de seções de tal fibrado, de sorte que todo $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ pode ser escrito de maneira única como $\xi = X + iY$, com $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Um tal ξ é um **campo de vetores complexo** sobre $\mathcal{M}$, e seu valor ξ_p em $p \in \mathcal{M}$ é por definição

$$\xi_p = X_p + iY_p \in T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}.$$

Agora, seja $\mathcal{M}$ uma variedade quasi-complexa, com estrutura quasi-complexa J. Para $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, pondo $(JX)_p = J_pX_p$ para cada $p \in \mathcal{M}$ obtemos um campo $JX \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} J: \ \mathfrak{X}(\mathcal{M}) &\to \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ X &\mapsto JX \end{aligned}$$

define uma estrutura complexa no espaço vetorial real $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Tal estrutura se estende unicamente a uma aplicação linear de $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} & \to & \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \\ & X + iY & \mapsto & JX + iJY \end{array},$$

onde induz, de acordo com a Proposição 1.7, um endomorfismo $J : T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} \to T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$.

De acordo com o Lema 1.24, e denotando por

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\pm} = \{\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}; J\xi = \pm i\xi\}, \tag{1.7}$$

obtemos os subespaços complexos n-dimensionais $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$ de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ de maneira que

$$\overline{\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+} = \mathfrak{X}(\mathcal{M})^- \text{ e } \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+ \oplus \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-.$$

A decomposição em soma direta acima induz uma decomposição do fibrado tangente complexificado na soma de Whitney

$$T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T\mathcal{M}^+ \oplus_W T\mathcal{M}^-, \tag{1.8}$$

onde $T\mathcal{M}^+$ e $T\mathcal{M}^-$ são fibrados vetoriais de posto real n sobre $\mathcal{M}$, tais que $\Gamma(T\mathcal{M}^+) = \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e $\Gamma(T\mathcal{M}^-) = \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$. Observe que em (1.7), se $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ então

$$\xi = \xi^+ + \xi^-,$$

onde,

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+ \text{ e } \xi^- = \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-, \tag{1.9}$$

e daí, ξ^+ e ξ^- são chamados de *componentes do tipo holomorfo* (respect, *do tipo anti-holomorfo*). Com isso, obtemos

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+ = \{X - iJX; X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\} \tag{1.10}$$

e

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M})^- = \{X + iJX; X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})\} \tag{1.11}$$

Definição 1.29. *Seja $(\mathcal{M}, J)$ uma variedade quasi-complexa. O* **tensor de Nijenhius** *de $\mathcal{M}$ é o 2-tensor covariante N sobre $\mathcal{M}$, tal que*

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \tag{1.12}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Para o que segue, estenda o colchete de Lie de campos de vetores em $\mathcal{M}$ a campos de vetores complexos pondo

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']),$$

onde $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Feito estas considerações, podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 1.30. *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade quasi-complexa com estrutura quasi-complexa J, são equivalentes:*

(a) $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+ \Rightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, *para todos* $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

(b) $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^- \Rightarrow [\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$, *para todos* $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

(c) $N(X, Y) = 0$, *para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Prova. Primeiramente, estenda N a $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ por linearidade, ou seja,

$$N(\xi, \eta) = [J\xi, J\eta] - J[J\xi, \eta] - J[\xi, J\eta] - [\xi, \eta]. \tag{1.13}$$

(a)$\Leftrightarrow$(b): Tome $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$. Daí, $\overline{\xi}, \overline{\eta} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$. Logo, por (a) $[\overline{\xi}, \overline{\eta}] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$. Como $\overline{[\xi, \eta]} = [\overline{\xi}, \overline{\eta}]$, então $\overline{[\xi, \eta]} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$. Mas, isto implica que $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$. Analogamente, (b)$\Rightarrow$(a).

(a)$\Rightarrow$(c): Precisamos somente mostrar que $N(\xi, \eta) = 0$ para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$. Como $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ é soma direta de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$, basta mostrarmos que $N(\xi, \eta) = 0$ para $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\pm}$, já que $N(\xi, \eta)$ é linear em ξ e em η. Mas, assim, temos que considerar três casos:

- Se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, então $J\xi = i\xi$ e $J\eta = i\eta$. Usando a hipótese, temos $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, e daí, $J[\xi, \eta] = i[\xi, \eta]$. Assim, segue de (1.13) que

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta) &= [i\xi, \eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= i^2[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] - [\xi, \eta] \\ &= -[\xi, \eta] - i^2[\xi, \eta] - i^2[\xi, \eta] - [\xi, \eta] = 0. \end{aligned}$$

- Se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$, então $J\xi = -i\xi$ e $J\eta = -i\eta$. Como, por hipótese, $\overline{[\xi, \eta]} = [\overline{\xi}, \overline{\eta}] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, temos que $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$. Daí, $J[\xi, \eta] = -i[\xi, \eta]$. Novamente, usando (1.13) obtemos $N(\xi, \eta) = 0$.

- Se $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e $\eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$, então $J\xi = i\xi$ e $J\eta = -i\eta$. Novamente, usando (1.13), temos

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta) &= [i\xi, -i\eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, -i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= -i^2[\xi, \eta] - iJ[\xi, \eta] + iJ[\xi, \eta] - [\xi, \eta] = 0. \end{aligned}$$

  Da mesma forma, se $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$ e $\eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, obtemos $N(\xi, \eta) = 0$.

(c)$\Rightarrow$(a): Suponhamos que $N(X, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Vamos provar primeiro que $N(\xi, \eta) = 0$ para todos $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$. Com efeito, se $\xi = X + iY$ e $\eta = X' + iY'$, onde $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, então pela hipótese

$$N(\xi, \eta) = (N(X, X') - N(Y, Y')) + i(N(X, Y') + N(Y, X')) = 0.$$

Agora, se $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$, então $J\xi = i\xi$ e $J\eta = i\eta$. Logo, por (1.13) temos que

$$\begin{aligned} 0 = N(\xi, \eta) &= [i\xi, i\eta] - J[i\xi, \eta] - J[\xi, i\eta] - [\xi, \eta] \\ &= -2([\xi, \eta] + iJ[\xi, \eta]). \end{aligned}$$

Logo, $J[\xi, \eta] = i[\xi, \eta]$. Portanto, $[\xi, \eta] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$. $\square$

Definição 1.31. *Se $(\mathcal{M}, J)$ satisfazer qualquer um dos ítens da proposição acima, dizemos que J é* **completamente integrável**.

1.4 Formas diferenciais complexas

Considerando os conceitos de formas numa variedade diferenciável, agora, no sentido da Definição 1.9, trataremos de formas com valores complexos.

O **fibrado de k-formas diferenciais complexas** sobre uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$, de k-formas em $\mathcal{M}$ com valores no fibrado trivial $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$, é definido por

$$\Lambda^k \mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \Lambda^k \mathcal{M} \otimes (\mathcal{M} \times \mathbb{C}).$$

Seu espaço de seções é dado por $\Omega^k(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

Definição 1.32. *Uma k-forma diferencial complexa em $\mathcal{M}$ é um elemento ω de $\Omega^k(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.*

Dizemos que uma k-forma complexa ω é real se, e somente se, $\overline{\omega} = \omega$.

As operações de produto exterior e derivação exterior são estendidas por lineridade a k-formas com valores complexos pondo-se

$$(\eta_1 + i\theta_1) \wedge (\eta_2 + i\theta_2) = (\eta_1 \wedge \eta_2 - \theta_1 \wedge \theta_2) + i(\eta_1 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \eta_2)$$

para todas $\eta_1, \theta_1 \in \Omega^k(\mathcal{M}), \eta_2, \theta_2 \in \Omega^l(\mathcal{M})$, e

$$d(\eta + i\theta) = d\eta + id\theta,$$

Podemos ver ainda que, com as definições acima, o produto exterior $\wedge$ admite as propriedades

(a) associativo.

(b) anti-comutativo.

(c) $d^2 = 0$.

(d) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$.

para todas $\omega_1 \in \Omega^k(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ e $\omega_2 \in \Omega^l(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

Temos ainda, que para as mesmas $\omega, \omega_1, \omega_2$ como acima, vale

$$d\overline{\omega} = \overline{d\omega} \text{ e } \overline{\omega_1 \wedge \omega_2} = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2.$$

Considere agora $\mathcal{M}$ sendo uma variedade quasi-complexa de dimensão $2n$, com estrutura quasi-complexa J. Veja que se $k=1$ então

$$\Lambda^1\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \Lambda^1\mathcal{M} \otimes (\mathcal{M}\times\mathbb{C}) \simeq (T\mathcal{M}^{\mathbb{C}})^*.$$

Com isto, a decomposição (1.8) induz uma outra decomposição correspondente

$$\Lambda^1\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = \Lambda^1\mathcal{M}^+ \oplus_W \Lambda^1\mathcal{M}^-.$$

Assim, denotando por $\Omega^1(\mathcal{M})^+$ e $\Omega^1(\mathcal{M})^-$ os espaços de seções de $\Lambda^1\mathcal{M}^+$ e $\Lambda^1\mathcal{M}^-$, respectivamente, obtemos

$$\Omega^1(\mathcal{M})^+ = (\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+)^* \ \text{ e } \ \Omega^1(\mathcal{M})^- = (\mathfrak{X}(\mathcal{M})^-)^*. \tag{1.14}$$

Lembre que $\Omega^1(\mathcal{M}) \simeq \mathfrak{X}(\mathcal{M})^*$, e sendo J a estrutura quasi-complexa em $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos que a sua transposta J^t é uma estrutura quasi-complexa em $\Omega^1(\mathcal{M})$, e que por linearidade, ela se estende a $\Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ pondo

$$J^t(\eta + i\theta) = J^t\eta + iJ^t\theta$$

para todas $\eta,\theta \in \Omega^1(\mathcal{M})$. Daí, de (1.14) e (1.7) obtemos que

$$\Omega^1(\mathcal{M})^{\pm} = \{\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}; J^t\omega = \pm i\omega\}. \tag{1.15}$$

Da mesma maneira como para campos complexos, se $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ se escreve como $\omega = \omega^+ + \omega^-$, com $\omega^+ \in \Omega^1(\mathcal{M})^+$ e $\omega^- \in \Omega^1(\mathcal{M})^-$, então analogamente como em (1.9), temos

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega - iJ^t\omega) \ \text{ e } \ \omega^- = \frac{1}{2}(\omega + iJ^t\omega). \tag{1.16}$$

Também dizemos que as 1-formas complexas em $\Omega^1(\mathcal{M})^+$ (resp. em $\Omega^1(\mathcal{M})^-$) são **do tipo holomorfo** (resp. **do tipo anti-holomorfo**).

Lema 1.33. *Se $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})^{\pm}$ e $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mp}$, então $\omega(\xi) = 0$.*

Prova. Suponha que $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})^+$ e $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$. Daí, segue de (1.15) que

$$i\omega(\xi) = (J^t\omega)(\xi) = \omega(J\xi) = \omega(-i\xi) = -i\omega(\xi).$$

Assim, $\omega(\xi) = 0$.

Analogamente, segue o outro caso. □

Lembrando que $\overline{\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+} = \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$, segue diretamente da definição que

$$\overline{\Omega^1(\mathcal{M})^+} = \Omega^1(\mathcal{M})^-.$$

Dado um referencial $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ para $\Omega^1(\mathcal{M})^+$, então pelo que vimos acima, $\{\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n\}$ é um referencial para $\Omega^1(\mathcal{M})^-$. O mesmo ocorre com os duais, de maneira que, se $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é o referencial para $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ dual de $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, então $\{\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n\}$ é o referencial para $\Omega^1(\mathcal{M})^-$ dual de $\{\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n\}$. Logo, teremos

$$\eta_i(\xi_k) = \overline{\eta}_j(\overline{\xi}_k) = \delta_{ij}.$$

Usando o lema anterior obtemos ainda,

$$\eta_i(\overline{\xi}_k) = \overline{\eta}_j(\xi_k) = \delta_{ij}.$$

Assim, segue da discussão acima que

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n\}$$

é o referencial para $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ dual do referencial $\{\eta_1, \ldots, \eta_n, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n\}$ para $\Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

Proposição 1.34. *Dado um referencial $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ para $\Omega^1(\mathcal{M})^+$, o conjunto das k-formas complexas da forma*

$$\eta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{j_p} \wedge \overline{\eta}_{k_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\eta}_{k_q}, \tag{1.17}$$

com $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n, 1 \leq k_1 < \cdots < k_q \leq n$ e $p + q = l$, é um referencial para $\Omega^l(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$.

Para uma prova do resultado acima confira Lema 6.2 de [1].

Denotaremos o conjunto das l-formas complexas em $\mathcal{M}$ da forma (1.17) por $\Omega^{(p,q)}(\mathcal{M})$, para $p, q \geq 0$ inteiros fixos e tais que $p + q = l$. Assim, obtemos

$$\Omega^1(\mathcal{M})^+ = \Omega^{(1,0)}(\mathcal{M}) \text{ e } \Omega^1(\mathcal{M})^- = \Omega^{(0,1)}(\mathcal{M}),$$

de maneira que

$$\Omega^l(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=l} \Omega^{(p,q)}(\mathcal{M}).$$

Para terminar esta seção, precisamos saber quanto a orientabilidade de uma variedade quasi-complexa $\mathcal{M}$.

Teorema 1.35. *Toda variedade quasi-complexa é orientável.*

Prova. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade quasi-complexa $2n$-dimensional e $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ um referencial para $\Omega^{(1,0)}(\mathcal{M})$ sobre o aberto $U \subset \mathcal{M}$. O referencial para $\Omega^{(0,1)}(\mathcal{M})$ sobre U é $\{\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n\}$. Defina em U a $2n$-forma complexa ω por

$$\omega = i^n \eta_1 \wedge \overline{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \wedge \overline{\eta}_n. \tag{1.18}$$

Sendo $\{\eta_1, \ldots, \eta_n, \overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_n\}$ o referencial para $\Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ então $\omega \neq 0$ em $\Omega^1(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$. Veja ainda, que

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} &= \overline{i^n \eta_1 \wedge \overline{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \wedge \overline{\eta}_n} \\
&= \overline{i^n \eta_1} \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\eta}_n \wedge \eta_n \\
&= (-i)^n \overline{\eta}_1 \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\eta}_n \wedge \eta_n \\
&= (-i)^n (-1)^n \eta_1 \wedge \overline{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \wedge \overline{\eta}_n \\
&= \omega,
\end{aligned}$$

e assim, $\omega \in \Omega^{2n}(U) \backslash \{0\}$.

Tome agora outro referencial $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ para $\Omega^{(1,0)}(\mathcal{M})$ sobre U. Daí, se $\eta_j = a_{jk}\tau_k$, com $a_{jk} \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, então $\overline{\eta}_j = \overline{a}_{jk}\overline{\tau}_k$. De maneira análoga como acima, a expressão

$$\theta = i^n \tau_1 \wedge \overline{\tau}_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n \wedge \overline{\tau}_n$$

define uma $2n$-forma real não nula em U. Logo, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= i^n \eta_1 \wedge \overline{\eta}_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n \wedge \overline{\eta}_n \\
&= i^n (a_{1j_1}\tau_{j_1}) \wedge (\overline{a}_{1k_1}\overline{\tau}_{k_1}) \wedge \ldots \wedge (a_{nj_n}\tau_{j_n}) \wedge (\overline{a}_{nk_n}\overline{\tau}_{k_n}) \\
&= (a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n})(\overline{a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}}) i^n \tau_{j_1} \wedge \overline{\tau}_{k_1} \wedge \ldots \wedge \tau_{j_n} \wedge \overline{\tau}_{k_n} \\
&= \Big(\sum_J (\mathrm{sgn} K) a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}\Big)\Big(\sum_K (\mathrm{sgn} K)\overline{a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}}\Big)\theta \\
&= (\det(a_{jk})\det(\overline{a}_{jk}))\theta = (\det(a_{jk}\overline{a}_{jk}))\theta \\
&= (\det|a_{jk}|^2)\theta = |\det(a_{jk})|^2\theta.
\end{aligned}$$

Cobrindo $\mathcal{M}$ por abertos $U_j \subset \mathcal{M}$, domínios de trivializações locais para $\Omega^{(1,0)}(\mathcal{M})$, seja uma partição da unidade $\{\psi_j; j \geq 1\}$ subordinada à cobertura $\{U_j\}_{j\geq 1}$ de $\mathcal{M}$. Se $\omega_j \in \Omega^{2n}(U_j)\backslash\{0\}$ é definida em U_j como em (1.18), então, pelos cálculos acima

$$\omega = \psi_j \omega_j \in \Omega^{2n}(\mathcal{M})\backslash\{0\}.$$

Portanto, $\mathcal{M}$ é orientável. □

Assim, a **orientação canônica** para uma variedade quasi-complexa $\mathcal{M}$ com estrutura quasi-complexa J é aquela construida na prova do teorema acima.

1.5 Variedades complexas

Definição 1.36. *Uma* **variedade complexa** *M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional (dimensão real), munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ a mudança de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa de n variáveis complexas.

Uma variedade complexa de dimensão complexa 1 diz-se uma **superfície de Riemann**.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.37. O n-espaço Euclidiano complexo $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n); z_k \in \mathbb{C}\}$, com o atlas formado pela aplicação identidade, é uma variedade complexa de dimensão n.

Um exemplo não trivial é o seguinte:

Exemplo 1.38. *O n-espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$.* De fato, considere em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ a relação de equivalência $\sim$ que identifica $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ e $w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$ se existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $z_j = \lambda w_j$ $\forall 1 \leq j \leq n+1$. O espaço $\mathbb{CP}^n$ é o conjunto quociente de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ pela relação de equivalência $\sim$ munido com a topologia quociente.

Afirmo que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade complexa de dimensão complexa n. Com efeito, mostremos primeiro que é uma variedade topológica $2n$-dimensional. Para isto, veja que a projeção canônica $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ além de contínua, é aberta. De fato, tome $V \subset \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ aberto, e daí,

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{|\lambda|=1} F_\lambda(V),$$

onde $F_\lambda : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ é o homeomorfismo $F_\lambda(z) = \lambda z$, $\forall z \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$.

Considere então em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, os abertos da forma

$$V_j = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}; z_j \neq 0\}.$$

Daí, se $U_j = \pi(V_j)$ então $\pi^{-1}(U_j) = V_j$, e logo, pela definição de topologia quociente temos que U_j é aberto em $\mathbb{CP}^n$. Além disto, sendo

$$W_j = \{z_j = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in V_j; z_j = 1\}$$

temos $W_j \approx \mathbb{C}^n$ e (munindo W_j com a topologia induzida por V_j) temos que $\pi_{|W_j} : W_j \to U_j$ é contínua, aberta e bijetiva, o que implica em um homeomorfismo de W_j em U_j. Assim, $\mathbb{CP}^n$ é localmente Euclidiano de dimensão real $2n$, com cartas

$$\varphi_j = (\pi_{|W_j})^{-1} : U_j \to W_j \approx \mathbb{C}^n,$$

para $1 \leq j \leq n+1$. Assim, como $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ tem base enumerável e $\mathbb{CP}^n$ é localmente Euclidiano, segue do Lema 3.21 de [6] que $\mathbb{CP}^n$ tem base enumerável.

Agora falta ver que $\mathbb{CP}^n$ é Hausdorff. Para tanto, tome $z \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ e denote $\overline{z} = [z] = \pi(z) \in \mathbb{CP}^n$. Tome $\overline{z} \neq \overline{w}$ em $\mathbb{CP}^n$, uma de duas possibilidades ocorre:

(i) ou existe $1 \leq j \leq n+1$ tal que $\overline{z}, \overline{w} \in U_j$

(ii) ou $n = 1$ e $\overline{z} \in U_1$, $\overline{w} \in U_2$

Em (i) o homeomorfismo entre U_j e W_j garante que $\overline{z}$ e $\overline{w}$ podem ser separados por subconjuntos abertos de U_j, logo, de $\mathbb{CP}^n$. Em (ii) temos $\overline{z} = \pi(z)$, $z = (1, 0)$, e $\overline{w} = \pi(w)$, $w = (0, 1)$. Como π é aberta, basta mostrarmos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que as bolas Euclidianas $B_{\frac{1}{k}}(z)$, $B_{\frac{1}{k}}(w) \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ satisfazem

$$F_\lambda(B_{\frac{1}{k}}(z)) \cap B_{\frac{1}{k}}(w) = \emptyset \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Vamos supor, por contradição, que existam sequências $(z_k)_{k\geq 1}$ e $(w_k)_{k\geq 1}$ em $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, tais que

$$0 < |z_k - z|, |w_k - w| < \frac{1}{k}$$

e $w_k = \lambda_k z_k$ para algum $\lambda_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Então

$$|\lambda_k| = \frac{|w_k|}{|z_k|} \leq \frac{|w_k - w| + |w|}{|z| - |z - z_k|} < \frac{\frac{1}{k} + |w|}{-\frac{1}{k} + |z|} = \frac{\frac{1}{k} + 1}{-\frac{1}{k} + 1}.$$

e analogamente,

$$|\lambda_k| > \frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lambda_k \to \lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Fazendo $k \to \infty$ em $w_k = \lambda_k z_k$, obtemos $w = \lambda z$. Contradição.

Pelo que vimos acima, $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade topológica real de dimensão $2n$. Agora, veja que a mudança de coordenadas para $1 \leq j < k \leq n+1$

$$\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \to \varphi_k(U_j \cap U_k)$$

é dada por

$$\begin{aligned}
(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1})(z_1, \ldots, z_n) &= \varphi_k([(z_1, \ldots, z_{j-1}, 1, z_j, \ldots, z_n)]) \\
&= \varphi_k\Big(\Big[\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_k}, \frac{1}{z_k}, \frac{z_j}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big]\Big) \\
&= \Big(\frac{z_1}{z_k}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_k}, \frac{1}{z_k}, \frac{z_j}{z_k}, \ldots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \ldots, \frac{z_n}{z_k}\Big),
\end{aligned}$$

e sendo as funções coordenadas holomorfas, então a mudança de coordenadas é holomorfa. Portanto, $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade complexa.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa de dimensão n. Considere $\phi = (z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset \mathcal{M}$, onde $z_k = x_k + iy_k$. Daí, $(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ é um sistema de coordenadas reais para $\mathcal{M}$ em U. Dessa forma, temos que $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, (\frac{\partial}{\partial y_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p, (\frac{\partial}{\partial y_n})_p\}$ é base de $T_p\mathcal{M}$, para $p \in U$.

Agora, para $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$, definimos

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p := \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p - i\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)_p\Big\} \text{ e} \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big)_p := \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p + i\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)_p\Big\}.$$

Analogamente como na prova de (b) do Lema 1.24 obtemos que $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, (\frac{\partial}{\partial y_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p, (\frac{\partial}{\partial y_n})_p\}$ é base de $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$.

Lema 1.39. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa de dimensão complexa n. Se $(w_1, \ldots, w_n)$ e $(z_1, \ldots, z_n)$ são sistemas de coordenadas complexas em uma vizinhança de $p \in \mathcal{M}$, então*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p = \frac{\partial z_j}{\partial w_k}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_p \text{ e } \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p = \overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\Big)_p.$$

Prova. Como $z_k = x_k + iy_k$ e $w_k = u_k + iv_k$, então omitindo o ponto p, temos que pelas equações de Cauchy-Rimann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_j}{\partial w_k}\frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_j}{\partial w_k} + i\frac{\partial y_j}{\partial w_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} - i\frac{\partial x_j}{\partial v_k} + i\frac{\partial y_j}{\partial u_k} + \frac{\partial y_j}{\partial v_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} + i\frac{\partial y_j}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) - i\left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial y_j}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_k} - i\left(\frac{\partial y_j}{\partial v_k}\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial x_j}{\partial v_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - i\frac{\partial}{\partial v_k}\right) = \frac{\partial}{\partial w_k}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos a outra igualdade. □

Continuando com $\mathcal{M}$ sendo uma variedade complexa de dimensão n e $\phi = (z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset \mathcal{M}$, onde $z_k = x_k + iy_k$, denotaremos as extensões de $dx_k, dy_k \in T_p\mathcal{M}^*$ a $(T_p\mathcal{M}^*)^{\mathbb{C}}$ ainda por dx_k e dy_k. Definimos ainda

$$(dz_k)_p := (dx_k)_p + i(dy_k)_p \ \text{ e } \ (d\overline{z}_k)_p := (dx_k)_p - i(dy_k)_p$$

onde $\{(dz_1)_p, (d\overline{z}_1)_p, \ldots, (dz_n)_p, (d\overline{z}_n)_p\}$ é uma base de $(T_p\mathcal{M}^*)^{\mathbb{C}}$.

Seja $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1 e sejam

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p f := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial z_k}(p) \ \text{ e } \ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right)_p f := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \overline{z}_k}(p),$$

expressões que denotaremos simplesmente por $\frac{\partial f}{\partial z_k}(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(p)$, respct. Fazendo $f = u + iv$, onde $u, v : U \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1, definimos ainda

$$df_p := du_p + idv_p,$$

onde $du_p, dv_p \in T_p\mathcal{M}^*$ são as diferenciais usuais de u e v em $p \in U$.

Lema 1.40. *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Nas notações acima, temos*

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial z_k}(p)(dz_k)_p + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(p)(d\overline{z}_k)_p$$

Prova. Tome $f = u + iv$, com $u, v : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Omitindo o ponto p por conveniência, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial z_k}(p)(dz_k)_p + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k}(p)(d\overline{z}_k)_p = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)(dx_k + idy_k) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)(dx_k - idy_k) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}dy_k = \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)(dx_k) + \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} + i\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)(dy_k) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k + i\frac{\partial u}{\partial y_k}dy_k\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}dx_k\frac{\partial v}{\partial y_k}dy_k\right) \\
&= du + idv.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.41. *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa de dimensão n, dizemos que uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 é* **holomorfa** *se, para toda carta coordenada holomorfa $\phi : U \subset \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$, sua expressão em coordenadas*

$$f_{|U} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

é uma função holomorfa de n variáveis complexas.

O próximo lema dá um critério para uma função f como na definição acima ser holomorfa.

Lema 1.42. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa e $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Então f é holomorfa se, e somente se, para todo sistema de coordenadas complexas $(z_1, \ldots, z_n)$ em $U \subset \mathcal{M}$, tivermos $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$ em U, para $1 \leq k \leq n$.*

Prova. Identificando f com sua expressão nas coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$, temos pelas definições acima que

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y_k} + i\frac{\partial v}{\partial y_k}\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - i\frac{\partial v}{\partial y_k}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y_k} + i\frac{\partial v}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}$$

Como f é holomorfa se, e somente se, sua expressão em coordenadas satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, então, pelos cálculos acima

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0, \forall 1 \leq k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \forall 1 \leq k \leq n$$

Mas, isto é equivalente a f ser holomorfa. □

Não faremos aqui, mas é importante observar que as únicas funções holomorfas em variedades complexas , compactas e conexas são as funções constantes (confira teorema I.2.1 de [10]).

Agora, vamos olhar para aplicações entre variedades. Considere duas variedades complexas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ de dimensão complexa m e n, respectivamente, e uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1. Fixado $p \in \mathcal{M}$, podemos estender a diferencial (real)

$$(f_*)_p : T_p\mathcal{M} \to T_{f(p)}\mathcal{N}$$

a uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$(f_*)_p : T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} \to T_{f(p)}\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$$

pondo

$$(f_*)_p(u + iv) = (f_*)_p u + i(f_*)_p v,$$

para todos $u, v \in T_p\mathcal{M}$.

Agora, tendo em mente a definição de variedade quasi-complexa podemos definir os subespaços complexos n-dimensionais $T_p\mathcal{M}^+$ e $T_p\mathcal{M}^-$ de $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ como no Lema 1.24 obtendo

$$\overline{T_p\mathcal{M}^+} = T_p\mathcal{M}^- \text{ e } T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T_p\mathcal{M}^+ \oplus T_p\mathcal{M}^-,$$

onde

$$T_p\mathcal{M}^{\pm} = \{\xi \in T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}; J_p\xi = \pm i\xi\}.$$

Veja ainda que a prova do ítem (b) do Lema 1.24 garante que $\{(\frac{\partial}{\partial z_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial z_n})_p\}$ é uma base de $T_p\mathcal{M}^+$ e $\{(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})_p\}$ é uma base para $T_p\mathcal{M}^-$.

A próxima proposição garante que o espaço tangente a todo ponto de uma variedade complexa vem munido de uma estrutura complexa (no sentido da Definição 1.21) canônica.

Proposição 1.43. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa de dimensão complexa n e $(z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas complexas para $\mathcal{M}$ definido em um aberto $U \subset \mathcal{M}$. Então, para $p \in U$, o operador linear $J_p : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$ tal que*

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p \text{ e } J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \tag{1.19}$$

independe das coordenadas $z_k = x_k + iy_k$ escolhidas e define uma estrutura complexa em $T_p\mathcal{M}$.

Prova. Para começar, fixe um $p \in \mathcal{M}$ e uma carta coordenada $(z_1, \ldots, z_n)$ como no enunciado, e assim, J_p dado por (1.19), define uma estrutura complexa em $T_p\mathcal{M}$. Agora estenda J_p a um operador linear em $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ como no Lema 1.24, ou seja, ponha $J_p(u+iv) = J_pu+iJ_pv$, para todos $u, v \in T_p\mathcal{M}$. Faça $e_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p$ e $e_k' = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p$ na prova do ítem (b) do mesmo Lema. Logo, usando (1.19) temos que (em relação a J),

$$T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T_p\mathcal{M}^+ \oplus T_p\mathcal{M}^-,$$

onde $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_p\right\}$ é base para $T_p\mathcal{M}^+$ e $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right)_p\right\}$ é base para $T_p\mathcal{M}^-$.

Agora, tome outro sistema de coordenadas complexas $(w_1, \ldots, w_n)$ numa vizinhança de p em $\mathcal{M}$ e I_p a estrutura complexa de $T_p\mathcal{M}$, ou seja,

$$I_p\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p = i\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p \text{ e } I_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p = -i\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p.$$

Queremos que I_p coincida com J_p em $T_p\mathcal{M}$, e para isto, basta mostrarmos a coincidência em $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$. Assim, é suficiente mostrarmos, em relação à decomposição em soma direta $T_p\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T_p\mathcal{M}^+ \oplus T_p\mathcal{M}^-$ induzida por J, que $\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)_p \in T_p\mathcal{M}^+$ e $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\right)_p \in T_p\mathcal{M}^-$, pois com isso teremos

$$J_p\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p = i\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p = I_p\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p$$

e

$$J_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p = -i\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p = I_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p.$$

Para o que falta, o Lema 1.39 garante que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial w_k}\Big)_p = \frac{\partial z_j}{\partial w_k}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_p \in T_p\mathcal{M}^+$$

e

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{w}_k}\Big)_p = \overline{\frac{\partial z_j}{\partial w_k}}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\Big)_p \in T_p\mathcal{M}^-.$$

$\square$

Assim, se $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa, a estrutura quasi-complexa J construída na proposição anterior é denominada a **estrutura quasi-complexa canônica** de $\mathcal{M}$. A partir da discussão que fizemos no início da Seção 1.3, temos que

$$T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T\mathcal{M}^+ \oplus_W T\mathcal{M}^-. \tag{1.20}$$

Na expressão acima, $T\mathcal{M}^{+}$ e $T\mathcal{M}^{-}$ são chamados o **fibrado tangente holomorfo** e **fibrado tangente anti-holomorfo**, respectivamente, sobre $\mathcal{M}$. A decomposição (1.20) ainda induz uma decomposição dual

$$T^{*}\mathcal{M}^{\mathbb{C}} = T^{*}\mathcal{M}^{+} \oplus_{W} T^{*}\mathcal{M}^{-}.$$

Por definição,

$$T\mathcal{M}^{+} = \{X + iY; J(X + iY) = i(X + iY)\}$$

e

$$T\mathcal{M}^{-} = \{X + iY; J(X + iY) = -i(X + iY)\}$$

Assim,

$$JX + iJY = -Y + iX \;\text{ e }\; JX + iJY = Y - iX,$$

e daí,

$$\begin{cases} JX = -Y \\ JY = X \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} JX = Y \\ JY = -X \end{cases}$$

Aplicando J na segunda equação dos sistemas acima, obtemos $Y = -JX$ e $Y = JX$, respectivamente. Assim, temos as caracterizações

$$T\mathcal{M}^{+} = \{X - iJX; X \in T\mathcal{M}\} \tag{1.21}$$

$$T\mathcal{M}^{-} = \{X + iJX; X \in T\mathcal{M}\} \tag{1.22}$$

de maneira que $T\mathcal{M}^{-} = \overline{T\mathcal{M}^{+}}$, onde a barra indica a conjugação complexa. Também, podemos construir um isomorfimo real de $T\mathcal{M}^{+}$ (resp, $T\mathcal{M}^{-}$) em $T\mathcal{M}$, fazendo corresponder

$$X \leftrightarrow (X - iJX)(resp, X + iJX) \qquad \forall X \in T\mathcal{M}.$$

Usando a proposição anterior, temos um resultado que será de nosso interesse no final desta seção. Vejamos.

Proposição 1.44. *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa e J é sua estrutura quasi-complexa canônica, então J é completamente integrável.*

Para uma demonstração veja Proposição 2.95 de [1].

Agora, vamos à definição de holomorfia entre variedades complexas.

Definição 1.45. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades complexas de dimensões m e n, respectivamente. Uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1 é dita ser* **holomorfa** *se, para todas as cartas coordenadas complexas $\phi : U \subset \mathcal{M} \to \mathbb{C}^m$ e $\psi : V \subset \mathcal{N} \to \mathbb{C}^n$, com $f(U) \subset V$, a expressão em coordenadas de f*

$$\psi \circ f_{|U} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

for uma aplicação holomorfa entre abertos de $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$.

A próxima proposição será de grande utilidade, e vale resaltar que a maioria das literaturas trazem como definição.

Proposição 1.46. *Se J e J' são as estruturas quasi-complexas canônicas das variedades complexas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, então uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se, $df_p \circ J_p = J'_{f(p)} \circ df_p$ para todo $p \in \mathcal{M}$.*

Prova. Considere $(z_1, \dots, z_m)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ sistemas de coordenadas complexas em vizinhanças de $p \in \mathcal{M}$ e de $f(p) \in \mathcal{N}$, respectivamente, e

$$f(z_1, \dots, z_m) = (w_1(z_1, \dots, z_m), \dots, w_n(z_1, \dots, z_m))$$

é a expressão de f com respeito a tais coordenadas, temos (omitindo o ponto p, se necessário) que

$$\begin{aligned} df_p \circ J_p\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p &= df_p\Big(i\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p = i df_p\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p \\ &= i\Big(\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}\Big) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J'_{f(p)} \circ df_p\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p &= J'_{f(p)}\Big(\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}\Big) \\ &= i\Big(\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}\Big). \end{aligned}$$

Assim, se $df_p \circ J_p = J'_{f(p)} \circ df_p$ para todo $p \in \mathcal{M}$, então

$$\overline{\frac{\partial w_j}{\partial \overline{z}_k}} = \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial z_k} = 0,$$

para todos $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Daí, a expressão acima garante que f é holomorfa.

Por outro lado, se f é holomorfa então, pelos cálculos acima,

$$df_p \circ J_p\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p = J'_{f(p)} \circ df_p\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)_p.$$

Também, como nos cálculos acima temos

$$df_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\Big)_p = \frac{\partial w_j}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial}{\partial w_j} + \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial}{\partial \overline{w}_j},$$

segue que

$$df_p \circ J_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\Big)_p = J'_{f(p)} \circ df_p\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\Big)_p.$$

Portanto, $df_p \circ J_p = J'_{f(p)} \circ df_p$, para todo $p \in \mathcal{M}$. $\square$

Exemplo 1.47. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞, onde $J(x, y) = (-y, x)$ é a estrutura quasi-complexa do $\mathbb{R}^2$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} J \circ df = df \circ J \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a proposição acima estende a noção de função holomorfa usual.

Tendo em vista a Proposição 1.46, podemos definir ainda, que uma aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe C^1 entre variedades complexas é dita **anti-holomorfa** se, e somente se, $df_p \circ J_p = -J'_{f(p)} \circ df_p$, $\forall p \in \mathcal{M}$.

Para o que segue precisamos da seguinte

Definição 1.48. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ diz-se uma* **métrica Hermitiana** *se*

$$\langle J_p X, J_p Y \rangle = \langle X, Y \rangle \tag{1.23}$$

para $p \in \mathcal{M}$ e $X, Y \in T_p\mathcal{M}$.

Dada uma métrica Riemanniana qualquer $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathcal{M}$, podemos estendê-la a um 2-tensor simétrico

$$g = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \to C^{\infty}(\mathcal{M}; \mathbb{C})$$

pondo

$$g(X + iY, X' + iY') = (g(X, X') - g(Y, Y')) + i(g(X, Y') + g(X', Y)).$$

Veja que

$$h(\xi, \eta) = g(\xi, \overline{\eta})$$

define uma métrica Riemanniana em $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$.

Proposição 1.49. *Qualquer variedade complexa admite uma métrica Hermitiana.*

Prova. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana qualquer em $\mathcal{M}$. Defina

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle_R + \langle JX, JY \rangle_R, \tag{1.24}$$

para quaisquer $X, Y \in T_p\mathcal{M}$. Daí, veja que

$$\begin{aligned} \langle J_pX, J_pY \rangle &= \langle J_pX, J_pY \rangle_R + \langle J(J_pX), J(J_pY) \rangle_R \\ &= \langle J_pX, J_pY \rangle_R + \langle -X, -Y \rangle_R \\ &= \langle J_pX, J_pY \rangle_R + \langle X, Y \rangle_R \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, (1.24) é uma métrica Hermitiana em $\mathcal{M}$. □

Uma variedade complexa com uma métrica Hermitiana é chamada uma **variedade Hermitiana**.

Definição 1.50. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Hermitiana. A* **forma Kähler** *associada a $\mathcal{M}$ é a 2-forma ω definida por*

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle. \tag{1.25}$$

Observe que

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle = \langle J_p(JX), J_pY \rangle = -\langle X, JY \rangle = -\omega(Y, X).$$

Lema 1.51. *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade Hermitiana com dimensão (complexa) n e $p \in \mathcal{M}$, existem uma vizinhança $U \subset \mathcal{M}$ de p e um referencial ortonormal positivo em U da forma $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$.*

Prova. Seguindo o que fizemos no Lema 1.26, se e_1 é um campo unitário numa vizinhança $U_1 \subset \mathcal{M}$ de p, temos que $\langle Je_1, Je_1\rangle = \langle e_1, e_1\rangle = 1$ e

$$\langle Je_1, e_1\rangle = \langle J^2 e_1, Je_1\rangle = \langle -e_1, Je_1\rangle = -\langle Je_1, e_1\rangle,$$

logo $\langle Je_1, e_1\rangle = 0$ e, portanto, $\{e_1, Je_1\}$ forma um conjunto ortonormal em $\mathfrak{X}(U_1)$.

Diminuindo U_1, se necessário, tome, numa vizinhança $U_2 \subset U_1$ de p, um campo unitário e_2, ortogonal a ambos e_1 e Je_1. Uma repetição do argumento acima garante que o conjunto $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ é ortonormal em $\mathfrak{X}(U_2)$. Por fim, repetindo o argumento acima mais $n-2$ vezes, chegamos a um conjunto ortonormal $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$, definido numa vizinhança $U_n \subset \mathcal{M}$ de p. Basta então fazer $U = U_n$. $\square$

Definição 1.52. *Nas notações do lema acima dizemos que $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ é um* **referencial Hermitinano** *em U. O corefe-rencial associado $\{\omega_1, \omega_1', \ldots, \omega_n, \omega_n'\}$ é tal que*

$$\omega_j(X) = \langle X, e_j\rangle \text{ e } \omega_j'(X) = \langle X, Je_j\rangle$$

para todos $1 \le j \le n$ e $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Lema 1.53. *A expressão da forma Kähler ω de $\mathcal{M}$ em relação ao corefe-rencial de um referencial Hermitiano como acima é*

$$\omega = \sum_j \omega_j \wedge \omega_j'. \tag{1.26}$$

Prova. De fato, veja que

$$\omega(e_j, e_k) = \omega(Je_j, Je_k) = 0 \text{ e } \omega(e_j, Je_k) = -\omega(Je_j, e_k) = \delta_{jk}.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{j<k}\omega(e_j,e_k)\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{j<k}\omega(Je_j,Je_k)\omega'_j\wedge\omega'_k\\
&\quad+\sum_{j\le k}\omega(e_j,Je_k)\omega_j\wedge\omega'_k+\sum_{j<k}\omega(Je_j,e_k)\omega'_j\wedge\omega_k\\
&= \sum_{j\le k}\delta_{jk}\omega_j\wedge\omega'_k\\
&= \sum_{j}\omega_j\wedge\omega'_j
\end{aligned}$$

□

Definição 1.54 (**Variedade Kähler**). *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J, uma* **métrica Kähler** *em $\mathcal{M}$ é uma métrica Hermitiana g em $\mathcal{M}$ cuja forma Kähler é fechada. Nesse caso, $(\mathcal{M},J,g)$ é uma* **variedade Kähler**.

Exemplo 1.55. Com a estrutura quasi-complexa canônica e a métrica Euclidiana canônica, o espaço $\mathbb{C}^n$ é uma variedade Kähler, denominada o n-**espaço Euclidiano complexo**. De fato, tome $(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$ as coordenadas canônicas de $\mathbb{C}^n\approx\mathbb{R}^{2n}$. Daí,

$$\Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),J\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle=\delta_{jk}=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle.$$

Da mesma maneira,

$$\Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),J\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle,\ \Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),J\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)\Big\rangle=\Big\langle\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle.$$

Assim, a métrica canônica é Hermitiana. Agora, se ω é a forma Kähler correspondente, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)dx_j\wedge dx_k+\sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)dx_j\wedge dy_k\\
&\quad+\sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)dy_j\wedge dy_k\\
&= \sum_{j<k}\Big\langle\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle dx_j\wedge dx_k+\sum_{j<k}\Big\langle\frac{\partial}{\partial y_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle dx_j\wedge dy_k\\
&\quad-\sum_{j<k}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle dy_j\wedge dy_k\\
&= \sum_{j<k}\delta_{jk}dx_j\wedge dy_k=dx_j\wedge dy_j.
\end{aligned}$$

Logo, $d\omega=d(dx_j\wedge dy_j)=0$.

Proposição 1.56. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Hermitiana com estrutura quasi-complexa J e conexão de Levi-Civita ∇. Então $\mathcal{M}$ é uma variedade Kähler se, e somente se, $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.*

Prova. Considere os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ quaisquer. De (2.15) temos que

$$(d\omega)(X,Y,Z) = (\nabla_X\omega)(Y,Z) - (\nabla_Y\omega)(X,Z) + (\nabla_Z\omega)(X,Y) \tag{1.27}$$

Agora veja que,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= X\langle JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X JY, Z\rangle + \langle JY, \nabla_X Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle \\
&= \langle (\nabla_X J)Y, Z\rangle,
\end{aligned}$$

e por (1.27)

$$(d\omega)(X,Y,Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z\rangle - \langle (\nabla_Y J)X, Z\rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y\rangle. \tag{1.28}$$

Assim, se $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ então pela última relação acima temos que $d\omega = 0$, e assim, $\mathcal{M}$ é Kähler.

Reciprocamente, como $J^2 = -Id$, temos que

$$\nabla J^2 = 0 \Rightarrow (\nabla J)J + J\nabla J = 0. \tag{1.29}$$

Veja ainda que sendo N o tensor de Nijenhius de $\mathcal{M}$, temos

$$
\begin{aligned}
N(X,Y) &= [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y] \\
&= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - J(\nabla_{JX}Y) + J(\nabla_Y(JX)) - J(\nabla_X(JY)) \\
&+ J(\nabla_{JY}X) - [X,Y] \\
&= \nabla_{JX}(JY) - J(\nabla_{JX}(JY)) - \nabla_{JY}(JX) + J(\nabla_{JY}X) + J(\nabla_Y JX) \\
&- J(\nabla_X JY) - [X,Y] \\
&= (\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J(\nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY) \\
&- (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= (\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J(\nabla_Y JX) + \nabla_Y X - J(\nabla_X JY) \\
&- \nabla_X Y \\
&= (\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J(\nabla_Y JX - J(\nabla_Y X)) \\
&- J(\nabla_X JY - J(\nabla_X Y)) \\
&= (\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J((\nabla_Y J)(X)) - J((\nabla_X J)(Y)).
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

Agora, utilizando sucessivamente (1.28), (1.29) e a métrica de $\mathcal{M}$ sendo Hermitiana, de (1.30) obtemos que

$$
\begin{aligned}
& d\omega(X,Y,Z) - d\omega(JX,JY,Z) = \\
&= \langle(\nabla_X J)(Y),Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)(X),Z\rangle + \langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle - \langle(\nabla_{JX}J)(JY),Z\rangle \\
&+ \langle(\nabla_{JY}J)(JX),Z\rangle - \langle(\nabla_Z J)(JX),JY\rangle \\
&= \langle(\nabla_X J)(Y),Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)(X),Z\rangle + \langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle + \langle J((\nabla_{JX}J)(Y)),Z\rangle \\
&- \langle J((\nabla_{JY}J)(X)),Z\rangle + \langle J((\nabla_Z J)(X)),JY\rangle \\
&= \langle J((\nabla_{JX}J)(Y)),Z\rangle - \langle J((\nabla_{JY}J)(X)),Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)(X),Z\rangle \\
&+ \langle(\nabla_X J)(Y),Z\rangle + 2\langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle \\
&= \langle J((\nabla_{JX}J)(Y)) - J((\nabla_{JY}J)(X)) - (\nabla_Y J)(X) + (\nabla_X J)(Y),Z\rangle \\
&+ 2\langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle \\
&= \langle J((\nabla_{JX}J)(Y) - (\nabla_{JY}J)(X) + J(\nabla_Y J)(X) - J(\nabla_X J)(Y)),Z\rangle \\
&+ 2\langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle \\
&= 2\langle(\nabla_Z J)(X),Y\rangle + \langle JN(X,Y),Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim, se $d\omega = 0$ então

$$2\langle (\nabla_Z J)(X), Y\rangle + \langle JN(X,Y), Z\rangle = 0.$$

Como $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa então a Proposição 1.44 nos garante que J é completamente integrável, daí pela Proposição 1.30 temos que $N = 0$. Logo,

$$\langle (\nabla_Z J)(X), Y\rangle = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Portanto, $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. $\square$

Corolário 1.57. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Kähler de dimensão (complexa) n. Dado $p \in \mathcal{M}$, existem uma vizinhança $U \subset \mathcal{M}$ de p e um referencial Hermitiano em U geodésico em p.*

Prova. Tome uma bola normal $U \subset \mathcal{M}$ centrada em p e, pelo Lema 1.26, uma base Hermitiana $\{e_1, J_p e_1, \ldots, e_n, J_p e_n\}$ para $T_p\mathcal{M}$. Transportando paralelamente tais vetores ao longo dos raios geodésicos de U que partem de p, obtemos um referencial ortonormal $\{e_1, e_1', \ldots, e_n, e_n'\}$ em U, o qual é geodésico em p.

Vamos mostrar que $e_k' = Je_k$ em U, para $1 \leq k \leq n$. Com efeito, dado $q \in U$, considere a geodésica radial $\gamma : [0,1] \to U$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Usando a proposição anterior temos

$$\frac{D}{dt} Je_k = \nabla_{\gamma'} Je_k = J\nabla_{\gamma'} e_k = 0.$$

Assim, Je_k é paralelo ao longo de γ. Como

$$e_k'(p) = J_p e_k = (Je_k)(p),$$

então pela unicidade do transporte paralelo obtemos que $e_k' = Je_k$ ao longo de γ, e daí, em particular, $e_k' = Je_k$ em q. Como q é arbitrário, segue que $e_k' = Je_k$ em U. $\square$

Capítulo 2

Aplicações Harmônicas

Neste capítulo vamos apresentar os rudimentos da teoria de aplicações harmônicas necessários ao entendimento do teorema de Lichnerowicz 3.6. Seguimos essencialmente a referência [12].

2.1 Aplicações harmônicas

Ao longo desta seção, $\mathcal{M}$ denota uma variedade Riemanniana n-dimensional sem bordo e com conexão de Levi-Civita $\nabla^{\mathcal{M}}$, e E um fibrado vetorial Riemanniano sobre $\mathcal{M}$, com métrica $\langle , \rangle_E$ e conexão ∇^E. Para dar início a esta seção, comecemos com a definição de fibrado induzido sobre $\mathcal{M}$ por uma aplicação suave f.

Seja $f : \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave entre variedades Riemannianas, $\pi_F : F \to \mathcal{N}$ um fibrado vetorial suave de posto k. Considerando o Lema 1.4, definimos um fibrado $\pi_E : E \to \mathcal{M}$, dito **induzido** por f sobre $\mathcal{M}$, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ {\scriptstyle \pi_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \underset{f}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

(a) Ponhamos

$$E = \coprod_{p \in \mathcal{M}} F_{f(p)} \approx \{(p, v); p \in \mathcal{M}, v \in F_{f(p)}\}$$

e $\pi_E(E_p) = p$ para cada $p \in \mathcal{M}$.

(b) Tome uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $\mathcal{N}$ tal que, para cada $\alpha \in A$, tenhamos uma trivialização local $\Psi_\alpha : \pi_F^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times \mathbb{R}^k$ para F. Se $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ então $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$ e $\Psi_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{p\in U_\alpha} F_{f(p)}$. Denotando por $\pi_2 : V_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ a projeção sobre o segundo fator, definimos $\Phi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ por

$$\Phi_\alpha(p, v) = (p, (\pi_2 \circ \Psi_\alpha)(f(p), v)),$$

obtendo uma bijeção de $\pi_E^{-1}(U_\alpha)$ em $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ que é um isomorfismmo linear se restrita a E_p, pois $\Psi_\alpha : F_{f(p)} \to \{f(p)\} \times \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear.

(c) Para $\alpha, \beta \in A$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$.

Para o que segue, denotaremos o fibrado induzido pela aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ por $f^{-1}F$.

Dado um aberto $V \subset \mathcal{N}$, domínio de uma seção local $\eta : V \to F$ para F, uma **seção local** de $f^{-1}F$ é uma aplicação $\sigma : U \to f^{-1}F$, com $U = f^{-1}(V)$, dada por

$$\sigma(p) = (p, \widetilde{\eta}(f(p))),$$

onde $\widetilde{\eta}(q) \in F_q$ para cada $q \in V$. Vamos denotá-la simplesmente por $\eta \circ f$.

Podemos tornar o fibrado $f^{-1}F$ um fibrado Riemanniano quando F é um fibrado vetorial Riemanniano de acordo com próxima proposição.

Proposição 2.1. *Seja F um fibrado vetorial Riemanniano com métrica $\langle , \rangle_F$ e conexão ∇^F, $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ um referencial local para F sobre o aberto V e $\mathcal{N}$ e $U = f^{-1}(V)$.*

(a) *Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(f^{-1}F)$ são dadas em U por $\sigma_1 = a_i(\eta_i \circ f)$ e $\sigma_2 = b_j(\eta_j \circ f)$, então*

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := a_i b_j (\langle \eta_i, \eta_j \rangle_F \circ f)$$

independe do referencial $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ e define uma métrica Riemanniana em $f^{-1}F$.

(b) *Se $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $\sigma \in \Gamma(f^{-1}F)$ é dada em U por $\sigma = a_i(\eta_i \circ f)$, então*

$$(\nabla_X \sigma)(p) := X(a_i)(p)(\eta_i \circ f)(p) + a_i(p)(\nabla^F_{(f_*)_p X_p} \eta_i) \circ f$$

independe do referencial $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ e define uma conexão em $f^{-1}F$.

Além disso, $(f^{-1}F, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ é um fibrado Riemanniano.

Para uma prova do resultado acima veja Proposição 1.41 de [1].

Agora, dada $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ suave e o fibrado $f^{-1}T\mathcal{N}$ sobre $\mathcal{M}$, induzido por f a partir do fibrado tangente de $\mathcal{N}$, um referencial local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para $T\mathcal{N}$ sobre o aberto $V \subset \mathcal{N}$ é um conjunto de n campos de vetores suaves em V, L.I. em cada ponto. Podemos escrever duas seções v e w de $f^{-1}T\mathcal{N}$ na forma $v = a_i(e_i \circ f)$ e $w = b_j(e_j \circ f)$.

Denotando por ∇ tanto a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{N}$ quanto a conexão de $f^{-1}T\mathcal{N}$, temos para $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $v \in \Gamma(f^{-1}T\mathcal{N})$ dado como acima que

$$(\nabla_X v)(p) = X(a_i)(p)(e_i \circ f)(p) + a_i(p)(\nabla_{(f_*)_p X_p} e_i) \circ f.$$

No caso em que o referencial é geodésico em $f(p)$, temos

$$(\nabla_X v)(p) = X(a_i)(p)(e_i \circ f)(p). \tag{2.1}$$

Lema 2.2. *Sejam $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave, $p \in \mathcal{M}, X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $v \in \Gamma(f^{-1}T\mathcal{N})$. Se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ é uma curva integral de X que passa por p em $t = 0$, então*

$$(\nabla_X v)(p) = \left.\frac{Dv}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2.2}$$

onde, no segundo membro da igualdade acima, $\frac{D}{dt}$ denota a derivada covariante em $\mathcal{N}$ ao longo da curva $f \circ \gamma$, $v = v(t)$ é um campo ao longo da mesma e $\left.\frac{D}{dt}\right|_{t=0}$ é visto como um elemento de $(f^{-1}T\mathcal{N})_p$.

Para uma prova do lema acima, veja Lema 1.42 de [1].

Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, denotamos por f_*X a seção de $f^{-1}T\mathcal{N}$ tal que

$$(f_*X)(p) = (p, (f_*)_p X_p), \tag{2.3}$$

para todo $p \in \mathcal{M}$. Com as notações e convenções do Lema acima, obtemos que

$$(\nabla_X f_* Y)(p) = \left.\frac{D}{dt}((f_*)_{\gamma(t)} Y_{\gamma(t)})\right|_{t=0}. \tag{2.4}$$

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos a igualdade acima como

$$\nabla_X f_* Y = \nabla_{f_* X} f_* Y, \tag{2.5}$$

convencionando-se que seu segundo membro denota o segundo membro de (2.4).

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, e df a 1-forma com valores no fibrado vetorial induzido $f^{-1}T\mathcal{N}$ definida por

$$df(X) = f_*X,$$

a qual é uma seção do fibrado vetorial $T\mathcal{M} \otimes f^{-1}T\mathcal{N}$. Temos ainda que $\nabla_X df \in \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes f^{-1}T\mathcal{N})$, onde ∇ é a conexão induzida no fibrado vetorial $T^*\mathcal{M} \otimes f^{-1}T\mathcal{N}$. Quando não houver confusão, denote ainda por ∇ para indicar diferentes conexões em fibrados diferentes.

Tendo em vista a discussão acima, temos a

Definição 2.3. *A* **segunda forma fundamental** *de f é a seção B_f do fibrado de homomorfismo $Hom(T\mathcal{M} \oplus_W T\mathcal{M}; f^{-1}T\mathcal{N})$ tal que*

$$B_f(X, Y) = (\nabla_X df)(Y) = \nabla_X f_*Y - f_*\nabla_X Y, \tag{2.6}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Observe que B_f é linear em X e Y. Além disso, ela é simétrica como veremos na proposição a seguir. Mas, primeiramente, recorde (cf Seção 3.3 de [3]) que se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ é uma superfície parametrizada, então em $\varphi(s, t)$ que

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial s}. \tag{2.7}$$

Proposição 2.4. *Se $f : \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ é uma aplicação suave, então, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos*

$$B_f(X, Y) = B_f(Y, X).$$

Em particular, $B_f(X, Y)$ só depende em p de X_p e Y_p.

Prova. Observe que

$$B_f(X, Y) = B_f(Y, X) \Leftrightarrow \nabla_X f_*Y - \nabla_Y f_*X = f_*[X, Y]$$

Com efeito, para provar a igualdade acima, fixe um $p \in \mathcal{M}$ e considere primeiro o caso em que $X = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ e $Y = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, onde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ é uma superfície parametrizada. Note que

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0.$$

Veja ainda que por (2.4) temos

$$\nabla_X f_*Y = \frac{D}{ds}\Big((f_*)_{\varphi(s,t)}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big),$$

em que no segundo membro $\frac{D}{ds}$ denota a derivada direcional com respeito à superfície parametrizada $f \circ \varphi : U \to \mathcal{N}$. Daí

$$\nabla_X f_* Y = \frac{D}{ds}\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t}$$

e, de maneira análoga,

$$\nabla_Y f_* X = \frac{D}{dt}\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial s}.$$

Assim, segue de (2.7) que

$$\nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X = \frac{D}{ds}\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t} - \frac{D}{dt}\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial s} = 0.$$

Agora, no caso geral, tome os campos $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, onde $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ são os campos coordenados em uma vizinhança em $\mathcal{M}$. Assim, veja que

$$\begin{aligned} f_*[X,Y] &= f_*\Big[a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] \\ &= f_*\Big(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \\ &= a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} f_* \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\nabla_X f_* Y = a_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \Big(b_j f_* \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} f_* \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

De forma análoga,

$$\nabla_Y f_* X = a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j f_* \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

No entanto, o primeiro caso nos garante que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \frac{\partial}{\partial x_i}$. Logo,

$$\nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X = a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = f_*[X,Y].$$

$\square$

Definição 2.5. *Uma aplicação suave $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é dita* **totalmente geodésica** *se $B_f = 0$.*

No que segue, precisamos da definição que será crucial no restante do nosso trabalho.

Definição 2.6. *O* **campo de tensão** *da aplicação $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é o traço $\tau(f)$ da segunda forma fundamental B_f em $\mathcal{M}$.*

Simbolicamente, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset \mathcal{M}$, então $\tau(f)$ é seção de $f^{-1}T\mathcal{N}$ dada em U por

$$\tau(f) = B_f(e_i, e_i) = (\nabla_{e_i} df)(e_i). \tag{2.8}$$

Agora, temos a definição principal desta Seção.

Definição 2.7. *Uma aplicação suave $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é dita ser* **harmônica** *se $\tau(f) = 0$ em $\mathcal{M}$.*

Exemplo 2.8. Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ e faça $\mathcal{N} = \mathbb{R}$. Então, f é harmônica no sentido da Definição 2.7 se, e somente se, é harmônica no sentido usual.

De fato, tendo em consideração que a conexão de $f^{-1}T\mathbb{R}$ é a derivada direcional usual de funções, temos

$$\begin{aligned} \tau(f) &= (\nabla_{e_i} df)e_i = \nabla_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\ &= \Delta f. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Exemplo 2.9. Uma imersão isométrica $f : \mathcal{M} \to \overline{\mathcal{M}}$ é harmônica se, e somente se, é uma imersão mínima, i.e., $H = 0$.

Com efeito, denote por ∇ as conexões de $\mathcal{M}$ e $f^{-1}T\overline{\mathcal{M}}$, e por $\overline{\nabla}$ a de $\overline{\mathcal{M}}$. Lembre que toda imersão é localmente um mergulho. Daí, dado $p \in \mathcal{M}$ podemos escolher uma vizinhança aberta $U \subset \mathcal{M}$ de p tal que $f_{|U}$ seja uma mergulho. Veja ainda que sendo f isométrica obtemos

$$\nabla_X f_* Y = \overline{\nabla}_{f_* X} f_* Y.$$

Fixando em U um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$, sendo H o vetor curvatura média de f, segue da Proposição 2.6 de [1] que

$$
\begin{aligned}
\tau(f) &= (\nabla_{e_i} df)e_i \\
&= \nabla_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i \\
&= \overline{\nabla}_{f_* e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i \\
&= (\overline{\nabla}_{f_* e_i} f_* e_i)^{\perp} \\
&= mH.
\end{aligned}
$$

Proposição 2.10. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação holomorfa (anti-holomorfa) entre variedades Kähler. Então f é uma aplicação harmônica.*

Prova. Para o caso holomorfo, seja B_f a segunda forma fundamental da aplicação f, a qual é uma forma quadrática simétrica em $T\mathcal{M}$ com valores em $f^{-1}T\mathcal{N}$. Lembre que

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X (JY) - J(\nabla_X Y).$$

Agora, sendo J e J' estruturas quasi-complexas de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, então aplicando as Proposições 1.46 e 1.56 obtemos

$$
\begin{aligned}
B_f(X, JY) &= (\nabla_X df)(JY) \\
&= \nabla_X f_* JY - f_* \nabla_X JY \\
&= \nabla_X J' f_* Y - f_* J \nabla_X Y \\
&= J' \nabla_X f_* Y - J' f_* \nabla_X Y \\
&= J'(\nabla_X f_* Y - f_* \nabla_X Y) \\
&= J' B_f(X, Y).
\end{aligned}
$$

Como $B_f(X, Y)$ é simétrica em X e Y então

$$B_f(JX, Y) = J' B_f(X, Y). \tag{2.10}$$

Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são Kähler, escolha um referencial local hermitiano $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$. Daí, por (2.10) obtemos,

$$
\begin{aligned}
\tau(f) &= B_f(Je_j, Je_j) + B_f(e_j, e_j) \\
&= (J'^2 B_f(e_j, e_j)) + B_f(e_j, e_j) \\
&= -B_f(e_j, e_j) + B_f(e_j, e_j) = 0.
\end{aligned}
$$

O caso anti-holomorfo é análogo. $\square$

Definição 2.11. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional com conexão de Levi-Civita ∇. A* **métrica de Gramm** *em $\Lambda^k\mathcal{M}$ é definida, para $\omega, \eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$, por*

$$\langle \omega, \eta \rangle_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_p(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\eta_p(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal para $T\mathcal{M}$ numa vizinhança de p em $\mathcal{M}$

Seja $\pi : E \to \mathcal{M}$ um fibrado vetorial Riemanniano sobre uma variedade Riemanniana $\mathcal{M}$. Considere o fibrado vetorial $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$. Toda seção $\omega \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ é chamada uma **k-forma diferencial exterior** com valores em E.

Se $\omega \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, lembre que anteriormente escrevemos $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ para denotar a seção de E obtida por intermédio da identificação (1.3), ou seja,

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) = \omega_j(X_1, \ldots, X_k)\xi_j, \tag{2.11}$$

se $\omega = \omega_j \otimes \xi_j$, com $\omega_j \in \Omega^k(U)$ e $\xi_j \in \Gamma(E_{|U})$.

A identificação acima se estende à métrica $\langle , \rangle$ e à conexão ∇ usuais em $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$, ou seja, se $\theta \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial em um aberto de $\mathcal{M}$, então

$$\langle \omega, \theta \rangle = \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \rangle_E. \tag{2.12}$$

De fato, seja $\theta = \theta_j \otimes \zeta_j$, com $\theta_j \in \Omega^k(U)$ e $\zeta_j \in \Gamma(E_{|U})$. Denote as métricas envolvidas por $\langle , \rangle$, caso não tenha perigo de confusão. Daí, segue das Definições 2.11 e 1.18 que

$$\begin{aligned}
\langle \omega, \theta \rangle &= \langle \omega_j, \theta_j \rangle \langle \xi_j, \zeta_j \rangle_E \\
&= \langle \omega_j(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}), \theta_j(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \rangle \langle \xi_j, \zeta_j \rangle_E \\
&= \langle \omega_j(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\xi_j, \theta_j(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\zeta_j \rangle_E \\
&= \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \rangle_E.
\end{aligned}$$

De acordo com a Definição 1.18 a conexão induzida em $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$ é dada como segue.

Definição 2.12. *Seja $\omega = \omega' \otimes s \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ com $\omega' \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M})$ e $s \in \Gamma(E)$. Para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, definimos a conexão induzida em $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$ por*

$$\nabla_X\omega = (\nabla_X\omega') \otimes s + \omega' \otimes \nabla_X s. \tag{2.13}$$

Com a definição acima, temos a seguinte

Proposição 2.13. *Dados os campos $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos que*

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_k) = \nabla^E_X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_j \omega(X_1, \ldots, \nabla^{\mathcal{M}}_X X_j, \ldots, X_k). \tag{2.14}$$

Prova. Segue de (2.13) que

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_k) \\
= \; & (\nabla_X \omega')(X_1, \ldots, X_k) \otimes s + \omega'(X_1, \ldots, X_k) \otimes \nabla^E_X s \\
= \; & \nabla_X(\omega'(X_1, \ldots, X_k)) \otimes s + \sum_j \omega'(X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_k) \otimes s \\
& + \nabla_X(\omega'(X_1, \ldots, X_k) \otimes s) - \nabla_X(\omega'(X_1, \ldots, X_k)) \otimes s \\
= \; & \nabla_X(\omega'(X_1, \ldots, X_k) \otimes s) - \sum_j \omega'(X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_k) \otimes s \\
= \; & \nabla^E_X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_j \omega(X_1, \ldots, \nabla^{\mathcal{M}}_X X_j, \ldots, X_k).
\end{aligned}$$

□

Para o que segue, precisamos estender o operador derivação exterior para fibrados Riemannianos. O próximo resultado nos dá uma pequena idéia de como fazer isso.

Proposição 2.14. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Se $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$, então*

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = (-1)^{i-1}(\nabla_{X_i}\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1}). \tag{2.15}$$

Prova. Segue diretamente da Proposição (12.19) de [5], que

$$\begin{aligned}
& d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) \\
= \; & \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Usando que $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i$ deduzimos

$$
\begin{aligned}
& d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) \\
= & \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i, X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}) \\
= & \sum_i (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1})) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{i} \omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\underbrace{\nabla_{X_i}X_j}_{j},\ldots,X_{k+1}) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{j} \omega(X_1,\ldots,\underbrace{\nabla_{X_j}X_i}_{i},\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}) \\
= & \sum_i (-1)^{i-1} (\nabla_{X_i}\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{k+1}).
\end{aligned}
$$

□

Agora, considerando (2.15), temos a definição

Definição 2.15. *Se $\mathcal{M}$ é uma variedade Riemanniana e E um fibrado vetorial Riemanniano sobre $\mathcal{M}$, a* **diferencial exterior**

$$d : \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{k+1}\mathcal{M} \otimes E)$$

é definida, para $\omega \in \Gamma(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$, por

$$d\omega(X_1,\ldots,X_{k+1}) = (-1)^{j-1}(\nabla_{X_j}\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+1}), \tag{2.16}$$

onde $X_1,\ldots,X_{k+1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e ∇ denota a conexão de $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$.

Observe que não é cláro que a igualdade $d^2\omega = 0$ ainda é verdadeira. Vejamos o próximo lema.

Lema 2.16. *Se $\omega \in \Gamma(\Lambda^k M \otimes E)$, então*

$$d^2\omega(X_1,\ldots,X_{k+2}) = (-1)^{i+j}(R(X_i,X_j)\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{k+2}),$$

onde a soma no segundo membro acima se estende aos pares ordenados (i,j) tais que $i<j$.

Prova. Como ambos os membros da igualdade acima são $C^\infty(\mathcal{M})$-multilineares, basta verificá-la em $p \in \mathcal{M}$, supondo ainda que $X_1, \ldots, X_{k+2}$ são elementos de um referencial geodésico em $p \in \mathcal{M}$. Assim, temos $[X_i, X_j](p) = 0$, e por (2.14), segue que, em p

$$
\begin{aligned}
& d^2\omega(X_1, \ldots, X_{k+2}) = d(d\omega(X_1, \ldots, X_{k+2})) \\
= \; & (-1)^{j-1}(\nabla_{X_j} d\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_j \ldots, X_{k+2}) \\
= \; & (-1)^{j-1}\nabla_{X_j} d\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_j \ldots, X_{k+2}) \\
& - \sum_i (-1)^{j-1} d\omega(X_1, \ldots, \nabla_{X_i} X_j, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+2}) \\
= \; & \sum_{i<j} (-1)^{i+j-2} \nabla_{X_j}(\nabla_{X_i}\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j \ldots, X_{k+2}) \\
& + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-2} \nabla_{X_j}(\nabla_{X_i}\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, \widehat{X}_i \ldots, X_{k+2}) \\
= \; & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}\omega - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j \ldots, X_{k+2}) \\
= \; & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (R(X_i, X_j)\omega)(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+2}).
\end{aligned}
$$

□

Definição 2.17. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma veriedade orientada. O* **operador codiferencial** δ : $\Gamma_c(\Lambda^{k+1}\mathcal{M} \otimes E) \to \Gamma_c(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ *é definido por*

$$\delta\omega(X_1, \ldots, X_k) = -(\nabla_{e_i}\omega)(e_i, X_1, \ldots, X_k), \tag{2.17}$$

onde $\{e_i\}$ é uma referencial ortonormal local na vizinhança dada e $\Gamma_c(\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E)$ denota o espaço das k-formas diferenciais exterior de suporte compacto com valores em E.

Vamos estabelecer uma relação entre d e δ. Mas, para isto, precisamos da definição seguinte.

Definição 2.18. *Sejam as k-formas diferencial exterior ω e θ. Definimos o produto interno global entre elas por*

$$(\omega, \theta) := \int_{\mathcal{M}} \langle \omega, \theta \rangle d\mathcal{M}. \tag{2.18}$$

Lema 2.19. *Seja $\mathcal{M}$ orientada e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal positivo em $U \subset \mathcal{M}$, com co-referencial associado $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Se $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathcal{M})$, então temos em U que*

$$d\eta = \omega_j \wedge \nabla_{e_j}\eta. \tag{2.19}$$

Prova. Observe que (2.19) independe do referencial ortonormal escolhido. Assim, basta que verifiquemos em $p \in \mathcal{M}$. Para isto, tome um referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ numa vizinhança de p, geodésico em p.

Considere $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ o co-referencial associado e escreva

$$\eta = (-1)^{i-1} a_i \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Uma vez que $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = 0$ para $1 \leq k \leq n$, temos $\omega_{ij} = 0$ em p. Logo, pela Proposição 1.30 de [2] temos que, em p, $d\omega_j = \omega_{ik} \wedge \omega_j = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
d\eta &= (-1)^{i-1} d(a_i \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n) \\
&= (-1)^{i-1} da_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i-1} e_j(a_i) \omega_j \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= e_i(a_i) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= e_i(a_i) d\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, ainda no ponto p, temos $\nabla_{e_i}\omega_j = 0$, já que

$$(\nabla_{e_i}\omega_j)(e_l) = e_i(\omega_j(e_l)) - \omega_j(\nabla_{e_i} e_l) = 0$$

em p, $\forall 1 \leq k \leq n$. Assim, também em p, segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_j}\eta &= \nabla_{e_j}(-1)^{i-1} a_i \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i-1} \nabla_{e_j} a_i \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i-1} e_j(a_i) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&\quad + (-1)^{i-1} a_i \nabla_{e_j} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= (-1)^{i-1} e_j(a_i) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n.
\end{aligned}$$

Portanto , em p,

$$\begin{aligned}
\omega_j \wedge \nabla_{e_j}\eta &= \omega_j \wedge (-1)^{i-1} e_j(a_i) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= e_i(a_i) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
&= e_i(a_i) d\mathcal{M},
\end{aligned}$$

isto conclui a demonstração. □

Feito estas considerações, temos a relação entre os operadores d e δ na seguinte proposição.

Proposição 2.20. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana orientada e compacta, e $\pi : E \to \mathcal{M}$ um fibrado vetorial Riemanniano. Então, os operadores d e δ são adjuntos com respeito ao produto interno definido acima.*

Prova. Segue de (2.14) que o segundo membro de (2.17) independe do referencial escolhido. Assim, escolha um referencial ortonormal local positivo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ numa vizinhança de $p \in \mathcal{M}$ e geodésico em p. Tome ainda $\omega \in \Gamma_c(\Lambda^k \mathcal{M} \otimes E)$ e $\theta \in \Gamma_c(\Lambda^{k+1} \mathcal{M} \otimes E)$. Veja que de (2.14) e (2.16), temos

$$\begin{aligned}
\langle d\omega, \theta \rangle &= \langle d\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= \langle (\nabla_{e_{i_j}} \omega)(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= (-1)^{j-1} \langle \nabla_{e_{i_j}} \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= (-1)^{j-1} e_{i_j} \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&\quad -(-1)^{j-1} \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \nabla_{e_{i_j}} \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle.
\end{aligned}$$

Vamos provar que a segunda parcela acima é igual a $\langle \omega, \delta\theta \rangle$. Com efeito, novamente por (2.14),temos

$$\begin{aligned}
\langle \omega, \delta\theta \rangle &= \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \delta\theta(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), -(\nabla_{e_{i_j}} \theta)(e_{i_j}, e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= -\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \nabla_{e_{i_j}} \theta(e_{i_j}, e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \\
&= -(-1)^{j-1} \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \nabla_{e_{i_j}} \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle,
\end{aligned}$$

como queriamos.

Para a primeira parcela, seja $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ o co-referencial de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e defina $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathcal{M})$ por

$$\eta = \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Veja que a $(n-1)$-forma η está bem definida, pois tomando $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n\}$ outro referencial ortonormal positivo na mesma vizinhança de p, com $\widetilde{e}_j = a_{ij} e_j$, daí, $(a_{ij})_{n \times n}$ é ortogonal com determinante igual a 1; sendo $\{\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_n\}$ o co-referencial correspondente, temos $\omega_j = a_{ji}\widetilde{\omega}_j$ e daí,

$$\eta = \langle \omega(\widetilde{e}_{i_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{e}}_{i_j} \ldots, \widetilde{e}_{i_{k+1}}), \theta(\widetilde{e}_{i_1}, \ldots, \widetilde{e}_{i_{k+1}})\rangle \widetilde{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\widetilde{\omega}}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\omega}_n.$$

Agora, pelo Lema anterior, $d\eta = \omega_l \wedge \nabla_{e_l}\eta$, e ainda pela prova do mesmo lema, obtemos $(\nabla_{e_l}\omega_i)(p) = 0$. Logo, em p

$$\begin{aligned}
& \nabla_{e_l}\eta \\
= \; & \nabla_{e_l}\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
= \; & e_l\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
& + \langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \nabla_{e_l}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n) \\
= \; & e_l\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n.
\end{aligned}$$

Logo, ainda em p,

$$\begin{aligned}
& d\eta = \omega_l \wedge \nabla_{e_l}\eta \\
= \; & \omega_l \wedge e_l\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
= \; & (-1)^{j-1} e_{i_j}\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \\
= \; & (-1)^{j-1} e_{i_j}\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle d\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Substituindo os cálculos acima em $\langle d\omega, \theta\rangle$, obtemos que (à princípio em p, e logo em toda $\mathcal{M}$) vale

$$\begin{aligned}
\langle d\omega, \theta\rangle d\mathcal{M} \;\; = \;\; & (-1)^{j-1} e_{i_j}\langle \omega(e_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_j}, \ldots, e_{i_{k+1}}), \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})\rangle d\mathcal{M} \\
& + \langle \omega, \delta\theta\rangle d\mathcal{M} = d\eta + \langle \omega, \delta\theta\rangle d\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Integrando em $\mathcal{M}$ e usando e Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_{\mathcal{M}} \langle d\omega, \theta\rangle d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} d\eta d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} \langle \omega, \delta\theta\rangle d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} \langle \omega, \delta\theta\rangle d\mathcal{M}.$$

O resultado segue de (2.18). $\square$

Agora que já conhecemos os operadores d e δ, podemos dar uma definição muito importante.

Definição 2.21. *O* **operador de Hodge-Laplace** *em* $\Lambda^k\mathcal{M} \otimes E$ *é o operador*

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

Uma k-forma ω com valores em E é **harmônica** *se* $\Delta\omega = 0$.

Proposição 2.22. *Se M^n é compacta e orientada, então:*

(a) *O operador de Hodge-Laplace em $\Lambda^k M \otimes E$ é auto-adjunto e positivo semi-definido.*

(b) *Uma $k-$forma $\omega \in \Gamma_c(\Lambda^k M \otimes E)$ é harmônica se e só se $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$.*

Prova. Tome $\omega, \theta \in \Gamma_c(\Lambda^k M \otimes E)$. Daí, pela Proposição 2.20 temos

$$\begin{aligned}
(\Delta\omega, \theta) &= \int_{\mathcal{M}} \langle (d\delta + \delta d)\omega, \theta\rangle d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathcal{M}} \langle d\delta\omega, \theta\rangle d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} \langle \delta d\omega, \theta\rangle d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathcal{M}} \langle \delta\omega, \delta\theta\rangle d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} \langle d\omega, d\theta\rangle d\mathcal{M} \\
&= (\delta\omega, \delta\theta) + (d\omega, d\theta).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Trocando ω por θ e θ por ω em (2.20), concluimos que

$$(\Delta\theta, \omega) = (\delta\theta, \delta\omega) + (d\theta, d\omega) = (\Delta\omega, \theta).$$

Logo, Δ é auto-adjunto.

Agora, fazendo $\theta = \omega$ em (2.20), obtemos

$$(\Delta\omega, \omega) = (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega) \geq 0. \tag{2.21}$$

Assim, Δ é positivo semi-definido.

Para o ítem (b), se $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$, então

$$\Delta\omega = (d\delta + \delta d)\omega = d\delta\omega + \delta d\omega = 0.$$

Reciprocamente, se ω é harmônica (i.e., $\Delta\omega = 0$), então por (2.21) que $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$. $\square$

Definição 2.23. *O* **traço-Laplaciano** *de E é o operador $\nabla^2 : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, definido no aberto $U \subset \mathcal{M}$ por*

$$\nabla^2 \eta = \nabla^E_{e_i} \nabla^E_{e_i} \eta - \nabla^E_{\nabla^{\mathcal{M}}_{e_i} e_i} \eta,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um refencial ortonormal em U.

Podemos ver o traço-Laplaciano como uma generalização natural do Laplaciano ordinário para fibrados vetoriais suaves quaisquer, pois se $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ é o fibrado trivial de posto 1 sobre $\mathcal{M}$ e $f \in C^\infty \mathcal{M}$, a definição acima nos dá

$$\nabla^2 f = e_i(e_i(f)) - (\nabla^{\mathcal{M}}_{e_i} e_i) f = \Delta f.$$

2.2 Primeira e segunda variações da energia

Ao longo desta seção $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ denotarão veriedades Riemannianas de dimensões m e n, com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}}$, respectivamente, sendo $\mathcal{M}$ orientada pelo elemento de volume $d\mathcal{M}$. Aqui, faremos uma relação entre o campo de tensão e a energia de uma aplicação suave $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave. A **densidade de energia** da aplicação f é a função suave

$$e(f) = \frac{1}{2} |df|^2, \tag{2.22}$$

onde $|df|^2$ denota a norma de Hilbert-Schmidt de df.

Em particular, dado um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ no aberto $U \subset \mathcal{M}$, temos

$$e(f) = \frac{1}{2} \langle (f_*)(e_i), (f_*)(e_i) \rangle_{\mathcal{N}}. \tag{2.23}$$

Para o próximo resultado, recorde (cf Lema 4.1, Capitulo 4 de [3]) que se $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{N}$ é uma superfície parametrizada, V é um campo de vetores oa longo de ψ e $R_{\mathcal{N}}$ é o operador de curvatura de $\mathcal{N}$, então

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R_{\mathcal{N}} \Big(\frac{\partial \psi}{\partial s}, \frac{\partial \psi}{\partial t} V \Big). \tag{2.24}$$

Lema 2.24. *Sejam $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave, $R_{\mathcal{N}}$ o operador curvatura de $\mathcal{N}$ e R o operador curvatura de $f^{-1} T\mathcal{N}$. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$, temos*

$$(R(X, Y) f_* Z)(p) = (p, R_{\mathcal{N}}((f_*)_p X_p, (f_*)_p Y_p) Z_p) \tag{2.25}$$

Prova. Como ambos os lados de (2.25) é C^∞-multilinear, basta provarmos no caso em que $X_{\varphi(s,t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ e $Y_{\varphi(s,t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, onde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$ é uma superfície parametrizada em $\mathcal{M}$, tal que $\varphi(0,0) = p$.

Aplicando duas vezes (2.4), obtemos

$$(\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} f_* Z)(p) = \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}(f_*)_{\varphi(s,t)} Z_{\varphi(s,t)}\Big|_{s,t=0},$$

onde $\frac{D}{\partial s}$ e $\frac{D}{\partial t}$ no lado direito acima denotam derivadas direcionais com respeito à superfície parametrizada $f \circ \varphi : U \to \mathcal{N}$. De maneira análoga,

$$(\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} f_* Z)(p) = \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}(f_*)_{\varphi(s,t)} Z_{\varphi(s,t)}\Big|_{s,t=0}.$$

Como $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$, temos por (2.24) que, em p

$$\begin{aligned}
R\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big) f_* Z &= \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} f_* Z - \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} f_* Z \\
&= \Big(\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}(f_*)_{\varphi(s,t)} Z_{\varphi(s,t)} - \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}(f_*)_{\varphi(s,t)} Z_{\varphi(s,t)}\Big)\Big|_{s,t=0} \\
&= R_{\mathcal{N}}\Big(\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial s}, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial t}\Big)(f_*)_{\varphi(s,t)} Z_{\varphi(s,t)}\Big|_{s,t=0} \\
&= R_{\mathcal{N}}\Big((f_*)_p \frac{\partial \varphi}{\partial s}, (f_*)_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big)(f_*)_p Z_p \\
&= R_{\mathcal{N}}((f_*)_p X_p, (f_*)_p Y_p)(f_*)_p Z_p.
\end{aligned}$$

□

Daqui em diante, sempre que não houver perigo de confusão, escreveremos a igualdade do lema acima da forma

$$R(X,Y)f_*Z = R_{\mathcal{N}}(f_*X, f_*Y)f_*Z. \tag{2.26}$$

Definição 2.25 (Energia). *Se $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ for uma aplicação suave tal que sua densidade de energia $e(f)$ é integrável em $\mathcal{M}$, definimos a* **energia** *de f como sendo o número real*

$$E(f) = \int_{\mathcal{M}} e(f) d\mathcal{M}. \tag{2.27}$$

Observação 2.26. *Se $\mathcal{M}$ for compacta então a energia é finita.*

De fato, quando $\mathcal{M}$ é compacta a função continua $e(f)$ atinge máximo e mínimo. Assim, para todo $p \in \mathcal{M}$ temos $0 \leq e(f)(p) \leq \lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí, integrando em $\mathcal{M}$, obtemos $0 \leq E(f) \leq \lambda \int_{\mathcal{M}} d\mathcal{M} < \infty$. Logo, a energia está bem definida.

Definição 2.27. *Uma* **variação** *de f é uma aplicação suave*

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

tal que $F(0, \cdot) = f$.

Denotaremos $f_t = F(t, \cdot)$ e, em particular, $f_0 = f$.

Dizemos que uma variação $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $f = f_0$ é **própria** se existir um compacto $K \subset \mathcal{M}$ tal que $f_t \equiv f$ em $\mathring{K}^c$, para todo t. Assim, se f tem energia finita, então

$$E(f_t) = \int_{\mathring{K}^c} e(f_t) dM + \int_{\mathring{K}} e(f_t) dM, \tag{2.28}$$

e daí, fica bem definida uma função suave

$$\begin{array}{rccc} E: & (-\epsilon, \epsilon) & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & E(f_t) \end{array}.$$

denominada o **funcional energia** associado à f_t.

Definição 2.28. *O* **campo variacional** *de uma variação própria $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é a seção compactamente suportada $\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0}$ de $f^{-1}T\mathcal{N}$, tal que*

$$\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0}(p) \approx \left(p, \left.\frac{d}{dt} f_t(p)\right|_{t=0}\right).$$

Na definição acima, no segundo membro, $\left.\frac{d}{dt} f_t(p)\right|_{t=0} \in T_{f(p)}\mathcal{N}$ denota o vetor velocidade da curva $t \mapsto f_t(p)$ no instante $t = 0$.

O próximo resultado é devido a Eells-Sampson [4], e nos dá uma relação entre o campo de tensão e a energia de f.

Teorema 2.29 (Primeira variação da energia). *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave com energia finita. Se $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma variação própria de f com campo variacional v, então*

$$\left.\frac{d}{dt} E(f_t)\right|_{t=0} = -\int_{\mathcal{M}} \langle \tau(f), v \rangle d\mathcal{M}. \tag{2.29}$$

Prova. Observe inicialmente que se $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é a variação própria em questão (de maneira que $f_t(\cdot) = F(t, \cdot)$), então, como fibrado Riemanniano, $f_t^{-1}T\mathcal{N}$ é a restrição de $F^{-1}T\mathcal{N}$ a $\{t\} \times \mathcal{M} \approx \mathcal{M}$.

Agora, fixe um ponto $p \in \mathcal{M}$ e um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_m\}$ numa vizinhança aberta $U \subset \mathcal{M}$ de p, geodésico em p. Considere $\frac{\partial}{\partial t}$ o campo canônico em $\mathbb{R}$ e o estenda juntamente com os campos e_i paralelamente em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$. Daí, obtemos o referencial móvel $\{\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \ldots, e_m\}$, tal que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = 0 \ \text{ e } \ \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0. \tag{2.30}$$

Em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ obtemos de (2.23) que $e(f_t) = \frac{1}{2}\langle (f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)\rangle$. Daí, por (2.30) e pela simetria da segunda forma fundamental de $F^{-1}T\mathcal{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e(f_t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle (f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)\rangle = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (f_t)_* e_i, (f_t)_* e_i\rangle \\
&= \langle (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} df_t) e_i, (f_t)_* e_i\rangle + \langle (f_t)_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i, (f_t)_* e_i\rangle \\
&= \langle (\nabla_{e_i} df_t) \frac{\partial}{\partial t}, (f_t)_* e_i\rangle \\
&= \langle (\nabla_{e_i} (f_t)_* \frac{\partial}{\partial t}, (f_t)_* e_i\rangle - \langle (f_t)_* \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t}, (f_t)_* e_i\rangle \\
&= \langle (\nabla_{e_i} \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Fixado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e um referencial ortonormal $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_m\}$ no aberto $V \subset \mathcal{M}$, tome um campo de vetores global W_t em $\mathcal{M}$ cuja expressão local é

$$W_t = \langle \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* \widetilde{e}_j\rangle \widetilde{e}_j.$$

Observe que a expressão do segundo membro acima independe do referencial escolhido, e daí W_t fica bem definido como campo suave em $\mathcal{M}$. Como o referencial é geodésico em p, temos que, em p

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} W_t &= \left\langle \nabla_{e_i} W_t, e_i \right\rangle = \left\langle \nabla_{e_i} (\langle \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* e_j \rangle e_j), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle e_i \langle \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* e_j \rangle e_j + \langle \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* e_j \rangle \nabla_{e_i} e_j, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \langle \nabla_{e_i} \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* e_j \rangle e_j + \langle \frac{df_t}{dt}, \nabla_{e_i} (f_t)_* e_j \rangle e_j, e_i \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt} e(f_t) + \left\langle \frac{df_t}{dt}, (\nabla_{e_i} df_t) e_i \right\rangle + \left\langle \frac{df_t}{dt}, (f_t)_* \nabla_{e_i} e_i \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt} e(f_t) + \left\langle \frac{df_t}{dt}, (\nabla_{e_i} df_t) e_i \right\rangle \\
&= \frac{d}{dt} e(f_t) + \left\langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Como as duas expressões obtidas acima independem de p (pois p é fixo), então a igualdade

$$\operatorname{div} W_t = \frac{d}{dt} e(f_t) + \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t) \rangle$$

vale em toda a variedade $\mathcal{M}$.

Agora, sendo F própria podemos escolher $K \subset \mathcal{M}$ compacto tal que $f_t = f$ em $\mathring{K}^c$, de tal maneira que $W_t = 0$ em $\mathring{K}^c$. Assim, por (2.28) e pela regra de Leibniz de diferenciação sob o sinal de integral (uma vez que K é compacto) e o Teorema da Divergência, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(f_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathring{K}} e(f_t) d\mathcal{M} = \int_{\mathring{K}} \frac{d}{dt} e(f_t) d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathring{K}} \operatorname{div} W_t d\mathcal{M} - \int_{\mathring{K}} \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t) \rangle d\mathcal{M} \\
&= -\int_{\mathring{K}} \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t) \rangle d\mathcal{M} \\
&= -\int_{\mathcal{M}} \langle \frac{df_t}{dt}, \tau(f_t) \rangle d\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Portanto, em $t = 0$

$$\frac{d}{dt} E(f_t) \Big|_{t=0} = -\int_{\mathcal{M}} \langle v, \tau(f) \rangle d\mathcal{M}.$$

$\square$

O teorema acima nos mostra que se tivermos uma aplicação suave f com energia finita então será harmônica se, e somente se, for ponto crítico do funcional energia associado a qualquer variação própria f_t de f.

Fixada uma função $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ harmônica com energia finita, queremos investigar se ela é um mínimo do funcional energia $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ associado à variação própria

$f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Assim, devemos calcular $\frac{d^2E}{dt^2}(0)$. Para isto, o próximo resultado devido independentimente a Smith [11] e Mazet [8] será de grande interesse em nosso estudo.

Teorema 2.30 (Segunda variação da energia). *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação harmônica e $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$. Se f_t é uma variação de f com campo variacional v, então*

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla^2 v + R_{\mathcal{N}}(v, f_*e_i)f_*e_i, v\rangle d\mathcal{M}, \tag{2.31}$$

onde ∇^2 é o traço-Laplaciano de $f^{-1}T\mathcal{N}$, $R_{\mathcal{N}}$ é o operador curvatura de $\mathcal{N}$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é um referencial ortonormal local qualquer em $\mathcal{M}$.

Prova. Como na prova de (2.29), veja que se $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é a variação própria em questão (de maneira que $f_t(\cdot) = F(t, \cdot)$), então, como fibrado Riemanniano, $f_t^{-1}T\mathcal{N}$ é a restrição de $F^{-1}T\mathcal{N}$ a $\{t\} \times \mathcal{M} \approx \mathcal{M}$. Assim, segue de (2.29) que

$$\begin{aligned} \frac{d^2E}{dt^2} &= -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{M}} \langle \tau(f_t), \frac{df_t}{dt}\rangle d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt}\langle \tau(f_t), \frac{df_t}{dt}\rangle d\mathcal{M} \\ &= -\int_{\mathcal{M}} \langle \frac{D}{dt}\tau(f_t), \frac{df_t}{dt}\rangle dM - \int_{\mathcal{M}} \langle \tau(f_t), \frac{D}{dt}\frac{df_t}{dt}\rangle d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Como f é harmônica, fazendo $t = 0$ (logo, $f_0 = f$), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2E}{dt^2}\Big|_{t=0} &= -\int_{\mathcal{M}} \langle \frac{D}{dt}\tau(f_t)\Big|_{t=0}, v\rangle d\mathcal{M} - \int_{\mathcal{M}} \langle \tau(f), \frac{D}{dt}\frac{df_t}{dt}\Big|_{t=0}\rangle d\mathcal{M} \\ &= -\int_{\mathcal{M}} \langle \frac{D}{dt}\tau(f_t)\Big|_{t=0}, v\rangle d\mathcal{M} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, fixe um $p \in \mathcal{M}$ e um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_m\}$ numa vizinhança aberta $U \subset \mathcal{M}$ de p, geodésico em p. Da mesma maneira como no Teorema 2.29 denote por $\frac{\partial}{\partial t}$ o campo canônico em $\mathbb{R}$ e estenda $\frac{\partial}{\partial t}$ a campos e_i paralelamente em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$, obtendo assim, o referencial móvel $\{\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \ldots, e_n\}$, satisfazendo as condições (2.30). Logo, $\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right] = 0$, e daí, no ponto p

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\tau(f_t) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau(f_t) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}((\nabla_{e_i}df_t)e_i) \\ &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_i}df_t)e_i + (\nabla_{e_i}df_t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}e_i \\ &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{e_i}df_t - \nabla_{e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, e_i]}df_t)e_i + (\nabla_{e_i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i \\ &= (R(\frac{\partial}{\partial t}, e_i)df_t)e_i + \nabla_{e_i}((\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i) - (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)\nabla_{e_i}e_i \\ &= (R(\frac{\partial}{\partial t}, e_i)df_t)e_i + \nabla_{e_i}((\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i), \end{aligned}$$

onde R é o operador curvatura de $F^{-1}T\mathcal{N}$. Agora, vamos analisar o lado direito da equação acima em $t=0$. Denotando ainda por $\widetilde{R}$ o operador de curvatura de $(-\epsilon,\epsilon)\times\mathcal{M}$, temos pela própria definição de $\widetilde{R}$ que $\widetilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},e_i)e_i=0$. Daí, pelo Lema 2.24 obtemos

$$\begin{aligned}
(R(\frac{\partial}{\partial t},e_i)df_t)e_i\big|_{t=0} &= R(\frac{\partial}{\partial t},e_i)(f_t)_*e_i\big|_{t=0}-(f_t)_*(\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial t},e_i)e_i)\big|_{t=0}\\
&= R_{\mathcal{N}}((f_t)_*\frac{\partial}{\partial t},(f_t)_*e_i)(f_t)_*e_i\big|_{t=0}\\
&= R_{\mathcal{N}}(v,f_*e_i)f_*e_i.
\end{aligned}$$

Veja ainda que, sendo a segunda forma fundamental de $F^{-1}T\mathcal{N}$ simétrica, usando novamente (2.30) temos que, em p,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}((\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}df_t)e_i)\big|_{t=0} &= \nabla_{e_i}((\nabla_{e_i}df_t)\frac{\partial}{\partial t})\big|_{t=0}\\
&= \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}(f_t)_*\frac{\partial}{\partial t}-(f_t)_*\nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial t})\big|_{t=0}\\
&= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}v=\nabla^2 v.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{D}{dt}\tau(f_t)\Big|_{t=0}=R_{\mathcal{N}}(v,f_*e_i)f_*e_i+\nabla^2 v.$$

Portanto, segue de (2.32) que

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0}=-\int_{\mathcal{M}}\langle R_{\mathcal{N}}(v,f_*e_i)f_*e_i+\nabla^2 v,v\rangle d\mathcal{M}.$$

□

Definição 2.31. *Nas notações do teorema acima, dada uma aplicação $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ harmônica, definimos a* **forma do índice** *de f como sendo a forma bilinear $I:\Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})\times\Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})\to\mathbb{R}$ tal que*

$$I(v,w)=\int_{\mathcal{M}}\langle J(v),w\rangle d\mathcal{M}, \tag{2.33}$$

onde $J:\Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})\to\Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$ dado por

$$J(\cdot)=-\nabla^2-R_{\mathcal{N}}(\cdot,f_*e_i)f_*e_i$$

é o **operador de Jacobi** *associado a f.*

Se pensarmos na segunda variação de energia de geodésicas, as seções $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$ tais que $Jv = 0$ são os **campos de Jacobi** associados a f.

Dada $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ harmônica, $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$ e f_t uma variação de f com campo variacional v e funcional energia E, temos por (2.31)

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0} = I(v,v) = \int_{\mathcal{M}} \langle J(v), v\rangle d\mathcal{M}.$$

Agora, chegamos à definição do que é uma aplicação harmônica ser estável.

Definição 2.32 (**Estabilidade**). *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação harmônica. Se $I(v,v) \geq 0$ para toda seção $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$, dizemos que f é* **estável***; caso contrário, se existe $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathcal{N})$ tal que $I(v,v) < 0$, dizemos que f é* **instável**.

Um exemplo de aplicação harmônica estável é o seguinte

Exemplo 2.33. Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana orientada e $f : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Então f é estável como aplicação harmônica.

Com efeito, se $v \in \Gamma_c(f^{-1}T\mathbb{R}^{n+1})$ então pela segunda variação da energia e pela Proposição 4.19 de [1] temos

$$\begin{aligned} I(v,v) &= \frac{d^2}{dt^2}E(f_t)\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{M}} \langle -\nabla^2 v - R_{\mathbb{R}^{n+1}}(v, f_* e_i) f_* e_i, v\rangle d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \langle -\nabla^2 v, v\rangle = -(\nabla^2 v, v) \\ &= \int_{\mathcal{M}} |\nabla v|^2 d\mathcal{M} \geq 0. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 2.9 f é harmônica, e portanto, f é uma aplicação estável.

Um exemplo mais interessante será dado pelo Teorema 3.6, que é o resultado principal deste trabalho. Para terminar este capítulo, faremos uma breve revisão do operador estrela de Hodge, que é o conteúdo da próxima seção.

2.3 Alguns resultados sobre o operador estrela de Hodge

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana orientada. O **operador estrela de Hodge** de $\mathcal{M}$ é definido pela aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(\mathcal{M}) & \to & \Omega^{n-k}(\mathcal{M}) \\ \omega & \mapsto & *\omega \end{array},$$

a qual é um operador $C^\infty(\mathcal{M})$-linear satisfazendo

$$\langle \eta, *\omega \rangle = \langle \omega \wedge \eta, d\mathcal{M} \rangle,$$

para todas $\omega, \eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$.

Lema 2.34. *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal positivo em $U \subset \mathcal{M}^n$, com coreferencial $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Se $\sigma = (i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ é uma permutação de $(1, 2, \ldots, n)$ tal que $i_1 < \cdots < i_k$ e $j_1 < \cdots < j_{n-k}$, então*

$$*(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}) = \varepsilon_\sigma \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_{n-k}},$$

onde ε_σ denota o sinal da permutação σ.

Prova. Pela fórmula de expansão ortonormal aplicada a $\Lambda^{n-k} T_p\mathcal{M}$ com respeito à base ortonormal $\{\omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{n-k}}; 1 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_{n-k} \leq n\}$

$$\begin{aligned}
*(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}) &= \langle *(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}), \omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{n-k}} \rangle \omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{n-k}} \\
&= \langle \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{n-k}}, d\mathcal{M} \rangle \omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{n-k}} \\
&= \langle \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_{n-k}}, d\mathcal{M} \rangle \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
&= \langle \varepsilon_\sigma d\mathcal{M}, d\mathcal{M} \rangle \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
&= \varepsilon_\sigma \omega_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_{n-k}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.35. *Seja $* : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{n-k}(\mathcal{M})$ o operador estrela de Hodge. Então*

(a) $** = (-1)^{k(n-k)} : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^k(\mathcal{M})$. *Em particular, $*$ é bijetivo.*

(b) Para $\omega, \eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$, temos que $\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle d\mathcal{M}$. Em particular, $\omega \wedge *\omega = |\omega|^2 d\mathcal{M}$.

Para uma demonstração deste resultado veja Proposição 6.9 de [1].

Proposição 2.36. *Se $\mathcal{M}^n$ é uma variedade Riemanniana fechada e orientada, então*

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d* : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{M}).$$

Prova. Denotando por $\delta' : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ o operador do segundo membro da igualdade acima, pela unicidade do operador adjunto basta mostrarmos que

$$(d\omega, \eta)_2 = (\omega, \delta'\eta)_2,$$

para todos $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M}), \eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$, onde $(\cdot,\cdot)_2$ denota o produto interno de L^2 em $\Omega^k(\mathcal{M})$. Pelo ítem (b) da proposição acima, é equivalente a mostrarmos que

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge *\eta = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge *\delta'\eta,$$

para todos $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M}), \eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$. Para ver isto, mostraremos inicialmente que

$$*\delta' = (-1)^k d* : \omega \in \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{n-k+1}(\mathcal{M}). \tag{2.34}$$

De fato, para $\eta, \omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$, o ítem (a) da proposição acima garante que

$$\begin{aligned} *\delta'\eta &= (-1)^{n(k+1)+1} * *d * \eta \\ &= (-1)^{n(k+1)+1}(-1)^{(n-k+1)(k-1)} d * \eta \\ &= (-1)^k d * \eta, \end{aligned}$$

como queriamos.

Agora, usando (2.34), temos

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge *\eta) &= d\omega \wedge *\eta + (-1)^{k-1}\omega \wedge d * \eta \\ &= d\omega \wedge *\eta - \omega \wedge *\delta'\eta. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema de Stokes, obtemos

$$0 = \int_{\mathcal{M}} d(\omega \wedge *\eta) = \int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge *\eta - \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge *\delta'\eta.$$

Logo,

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega \wedge *\eta = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge *\delta'\eta.$$

□

Lema 2.37. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Hermitiana de dimensão (complexa) n, com forma Kähler $\omega^{\mathcal{M}}$. Se $* : \Omega^2(\mathcal{M}) \to \Omega^{2n-2}(\mathcal{M})$ denota o operador de Hodge, então*

$$*\omega^{\mathcal{M}} = \frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n-1}.$$

Prova. Considere um referencial hermitiano $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ num aberto $U \subset \mathcal{M}$, o qual é positivo em relação à orientação canônica. Agora, se $\{\omega_1, \omega'_1, \dots, \omega_n, \omega'_n\}$ é o coreferencial do referencial considerado, então por (1.26) temos que

$$\omega^{\mathcal{M}} = \omega_j \wedge \omega'_j.$$

Pelo Lema 2.34, obtemos

$$\begin{aligned} *\omega^{\mathcal{M}} &= *(\omega_j \wedge \omega'_j) = \varepsilon_\sigma \omega_j \wedge \omega'_j \\ &= \sum_j (\omega_1 \wedge \omega'_1) \wedge \dots \wedge (\widehat{\omega_j \wedge \omega'_j}) \wedge \dots \wedge (\omega_n \wedge \omega'_n). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Novamente por (1.26), temos

$$\begin{aligned} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n-1} &= \underbrace{(\omega_1 \wedge \omega'_1 + \dots + \omega_n \wedge \omega'_n) \wedge \dots \wedge (\omega_1 \wedge \omega'_1 + \dots + \omega_n \wedge \omega'_n)}_{n-1} \\ &= (\omega_{j_1} \wedge \omega'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\omega_{j_{n-1}} \wedge \omega'_{j_{n-1}}). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Para ver explicitamente a última $(2n-2)$-forma acima, denotemos por $\mathcal{P}_k$ o conjunto das $(n-1)!$ permutações $\sigma = (j_1, \dots, j_{n-1})$ de $\{1, \dots, \widehat{k}, \dots, n\}$. Como $\omega_{j_l} \wedge \omega'_{j_l}$ é uma 2-forma e $\sigma \in \mathcal{P}_k$, obtemos

$$(\omega_{j_1} \wedge \omega'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\omega_{j_n} \wedge \omega'_{j_n}) = (\omega_1 \wedge \omega'_1) \wedge \dots \wedge (\widehat{\omega_k \wedge \omega'_k}) \wedge \dots \wedge (\omega_n \wedge \omega'_n). \tag{2.37}$$

Logo, por (2.37), (2.35) e (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n-1} &= (\omega_{j_1} \wedge \omega'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\omega_{j_{n-1}} \wedge \omega'_{j_{n-1}}) \\ &= \sum_k \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} (\omega_{j_1} \wedge \omega'_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\omega_{j_{n-1}} \wedge \omega'_{j_{n-1}}) \\ &= \sum_k (n-1)! (\omega_1 \wedge \omega'_1) \wedge \dots \wedge (\widehat{\omega_k \wedge \omega'_k}) \wedge \dots \wedge (\omega_n \wedge \omega'_n) \\ &= (n-1)! * \omega^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

□

Com isto, temos as ferramentas necessárias para provar o teorema de Lichnerowicz, que será o conteúdo do próximo capítulo.

Capítulo 3

O Teorema de Lichnerowicz

3.1 Energias parciais

Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades quasi-complexas com suas estruturas quasi-complexas J e J', respectivamente. Seja $f : (\mathcal{M}, J) \to (\mathcal{N}, J')$ uma aplicação suave. A **diferencial complexificada** $f_* : \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{X}(\mathcal{N})^{\mathbb{C}}$ é dada pela relação

$$X + iY \mapsto f_*.X + if_*.Y, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

e ela determina as **diferenciais parciais** como segue. Denote por i_+ e i_- as inclusões de $T\mathcal{M}^+$, $T\mathcal{M}^-$ em $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ e, π_+, π_- as projeções de $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}$ em $T\mathcal{N}^+, T\mathcal{N}^-$, respectivamente. Definimos

$$\partial f = \pi_+ \circ f_* \circ i_+ : T\mathcal{M}^+ \to T\mathcal{N}^+$$

$$\overline{\partial} f = \pi_+ \circ f_* \circ i_- : T\mathcal{M}^- \to T\mathcal{N}^+$$

$$\partial \overline{f} = \pi_- \circ f_* \circ i_+ : T\mathcal{M}^+ \to T\mathcal{N}^-$$

$$\bar{\partial} \bar{f} = \pi_- \circ f_* \circ i_- : T\mathcal{M}^- \to T\mathcal{N}^-.$$

Pelo que vimos na Seção 1.3, para $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ denote por $\xi^+ \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e $\xi^- \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-$ as componentes de ξ do tipo holomorfo e anti-holomorfo, respectivamente. Lembre que

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \text{ e } \xi^- = \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi), \tag{3.1}$$

donde vale $\overline{\xi^+} = \overline{\xi}^-$.

Veja que usando uma notação análoga em $\mathfrak{X}(\mathcal{N})^{\mathbb{C}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(f_*\xi^+)^+ &= \frac{1}{2}(f_*\xi^+ - iJ'f_*\xi^+) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(f_*\xi - iJ'f_*\xi) - \frac{1}{2}iJ'(f_*\xi - iJ'f_*\xi)\Big) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}f_*\xi - \frac{1}{2}iJ'f_*\xi - \frac{1}{2}iJ'f_*\xi + \frac{1}{2}f_*\xi) \\
&= \frac{1}{2}(f_*\xi - iJ'f_*\xi) = (\partial f)\xi.
\end{aligned}$$

Assim, de maneira análoga à expressão acima, obtemos

$$(\partial\overline{f})\xi = (f_*\xi^+)^-,\ (\overline{\partial}f)\xi = (f_*\xi^-)^+ \text{ e } (\overline{\partial}\,\overline{f})\xi = (f_*\xi^-)^-.$$

Da discussão acima, obtemos ainda que:

$$\bar{\partial}\bar{f} = \overline{\partial f} \qquad \partial\bar{f} = \overline{\bar{\partial} f}. \tag{3.2}$$

De fato,

$$\overline{(\partial f)}\xi = \overline{(\partial f)\overline{\xi}} = \overline{(f_*\overline{\xi}^+)^+} = \overline{f_*\overline{\xi}^+}^- = (\overline{f_*\overline{\xi}}^-)^- = (f_*\xi^-)^- = (\overline{\partial}\,\overline{f})\xi.$$

De forma totalmente análoga, segue a outra igualdade.

Por construção,

$$f_* \,|_{T\mathcal{M}^+} = \partial f + \partial\bar{f} \text{ e } f_* \,|_{T\mathcal{M}^-} = \overline{\partial f + \partial\bar{f}}. \tag{3.3}$$

Com efeito, sabemos que $T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} = T\mathcal{N}^+ \oplus T\mathcal{N}^- = \pi_+(T\mathcal{N}^{\mathbb{C}}) \oplus \pi_-(T\mathcal{N}^{\mathbb{C}})$. Assim, dado $X \in T\mathcal{M}^+$ temos

$$\begin{aligned}
f_*(X) &= f_* \circ i_+(X) \in T\mathcal{N}^{\mathbb{C}} \\
&\Rightarrow f_*(X) = \pi_+(f_* \circ i_+(X)) + \pi_-(f_* \circ i_+(X)) \\
&\Rightarrow f_*(X) = \partial f(X) + \partial\bar{f}(X).
\end{aligned}$$

A outra igualdade é análoga.

Agora, seja $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ dado por $\xi = X - iJX$, com $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Pelo que vimos acima, temos

$$\begin{aligned}
(\partial f)\xi &= (f_*\xi^+)^+ = \frac{1}{2}(f_*\xi - iJ'f_*\xi) \\
&= \frac{1}{2}(f_*(X - iJX) - iJ'f_*(X - iJX)) \\
&= \frac{1}{2}(f_*X - if_*JX - iJ'f_*X - J'f_*JX).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(\partial f)\xi = \frac{1}{2}((f_*X - J'f_*JX) - i(f_*JX + J'f_*X)). \tag{3.4}$$

Analogamente,

$$(\partial \bar{f})\xi = \frac{1}{2}((f_*X + J'f_*JX) - i(f_*JX - J'f_*X)). \tag{3.5}$$

Lembrando que f é holomorfa se, e somente se, $f_*J = J'f_*$, e anti-holomorfa se, e somente se, $f_*J = -J'f_*$, temos a seguinte

Proposição 3.1. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave. Então f é holomorfa (resp, anti-holomorfa) se, e somente se, $\partial \bar{f} \equiv 0$ (resp, $\partial f \equiv 0$).*

Demonstração. Suponha que $\partial \bar{f} \equiv 0$. Dados $\xi = X - iJX$, com $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, temos por (3.5) que

$$f_*X - if_*JX = -iJ'f_*X - J'f_*JX,$$

donde

$$f_*JX = J'f_*X, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Logo, f é holomorfa.

Por outro lado, se f é holomorfa então

$$\begin{aligned}(\partial \bar{f})\xi &= \frac{1}{2}((f_*X + iJ'f_*JX) - i(f_*JX - J'f_*X)) \\ &= \frac{1}{2}(f_*X + J'(J'f_*X)) = \frac{1}{2}(f_*X - f_*X) = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\partial \bar{f} \equiv 0$.

O caso anti-holomorfo é análogo usando-se (3.4). □

Na Seção 1.5 vimos, após definição de métrica Hermitiana, que se $\mathcal{M}$ é uma variedade Hermitiana $2n$-dimensional com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se estende por linearidade a $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$.

Seja agora $\Theta : T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} \to T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ um homomorfismo de fibrados e $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n\}$ um referencial ortonormal para $\mathfrak{X}(\mathcal{M})^{\mathbb{C}}$ sobre o aberto $U \subset \mathcal{M}$ (com $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+$ e em relação à métrica $\langle \cdot, \bar{\cdot} \rangle$ de $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$). A **norma de Hilbert-Schmidt** de Θ é dada por

$$|\Theta|^2 = \sum_{j=1}^{n} (|\Theta\xi_j|^2 + |\Theta\overline{\xi}_j|^2).$$

Tomando um referencial Hermitiano $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ para $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ sobre U (veja Lema 1.51) podemos fazer uma escolha natural pondo

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j - iJe_j) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^+, \text{ e } \overline{\xi}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_j + iJe_j) \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})^-,$$

para $1 \leq j \leq n$.

Proposição 3.2. *Seja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma aplicação suave, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Hermitianas com estruturas quasi-complexas J e J', respectivamente. Então*

$$e(f) = |\partial f|^2 + |\partial \bar{f}|^2. \tag{3.6}$$

Prova. Escolha um referencial local Hermitiano $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ em $U \subset \mathcal{M}$. Daí, temos o correspondente referencial ortonormal holomorfo $\eta_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_j - iJe_j)$ e o referencial anti-holomorfo $\overline{\eta}_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_j + iJe_j)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
|\partial f|^2 &= \langle \partial f(\eta_j), \overline{\partial f}(\bar{\eta_j})\rangle = \langle \frac{1}{2}(f_*\eta_j - iJ'f_*\eta_j), \frac{1}{2}(f_*\bar{\eta_j} + iJ'f_*\bar{\eta_j})\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle f_*(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j - iJe_j)) - iJ'f_*(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j - iJe_j)), f_*(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j + iJe_j)) \\
&+ iJ'f_*(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_j + iJe_j))\rangle \\
&= \frac{1}{8}\langle f_*e_j - if_*Je_j - iJ'f_*e_j - J'f_*Je_j, f_*e_j + if_*Je_j + iJ'f_*e_j - J'f_*Je_j\rangle \\
&= \frac{1}{8}(\langle f_*e_J, f_*e_j\rangle + i\langle f_*e_j, f_*Je_j\rangle + i\langle f_*e_j, J'f_*e_j\rangle - \langle f_*e_j, J'f_*Je_j\rangle \\
&- i\langle f_*Je_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle + \langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle + i\langle f_*Je_j, J'f_*Je_j\rangle \\
&- i\langle J'f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle J'f_*e_j, f_*Je_j\rangle + \langle J'f_*e_j, J'f_*e_j\rangle + i\langle J'f_*e_j, J'f_*Je_j\rangle \\
&- \langle J'f_*Je_j, f_*e_j\rangle - i\langle J'f_*Je_j, f_*Je_j\rangle - i\langle J'f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle \\
&+ \langle J'f_*Je_j, J'f_*Je_j\rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle - \langle f_*e_j, J'f_*Je_j\rangle + \langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle - \langle J'f_*e_j, J'^2f_*Je_j\rangle + \langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle + \langle J'f_*e_j, f_*Je_j\rangle + \langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle) \\
&= \frac{1}{4}(\langle f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle + 2\langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Analogamente, temos

$$|\partial \bar{f}|^2 = \frac{1}{4}(\langle f_*e_j, f_*e_j\rangle + \langle f_*Je_j, f_*Je_j\rangle - 2\langle f_*Je_j, J'f_*e_j\rangle). \tag{3.8}$$

Portanto,

$$|\partial f|^2 + |\partial \bar{f}|^2 = \frac{1}{2}(\langle f_* e_j, f_* e_j\rangle + \langle f_* Je_j, f_* Je_j\rangle) = e(f), \tag{3.9}$$

já que $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ é um referencial em $\mathcal{M}$. $\square$

Definição 3.3. *Definiremos as* **densidades parciais de energia** *como sendo*

$$e'(f) = |\partial f|^2 \qquad e \qquad e''(f) = |\partial \bar{f}|^2. \tag{3.10}$$

Se $\mathcal{M}$ é compacta, definimos

$$E'(f) = \int_{\mathcal{M}} e'(f) d\mathcal{M} \tag{3.11}$$

e

$$E''(f) = \int_{\mathcal{M}} e''(f) d\mathcal{M}. \tag{3.12}$$

Segue das propriedades de integração e da Proposição 3.2 que

$$E(f) = E'(f) + E''(f). \tag{3.13}$$

Chamamos $E'(f)$ e $E''(f)$ de **energias parciais** da aplicação f.

O seguinte corolário será de grande utilidade futuramente.

Corolário 3.4. *f é holomorfa (resp, anti-holomorfa) se, e somente se, $E''(f) \equiv 0$ (resp, $E'(f) \equiv 0$).*

Prova. Ora, se f é holomorfa então $\partial \bar{f} \equiv 0$. Logo,

$$E''(f) = \int_{\mathcal{M}} e''(f) d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} |\partial \bar{f}|^2 d\mathcal{M} = 0.$$

Por outro lado, se $E''(f) \equiv 0$ então

$$\int_{\mathcal{M}} |\partial \bar{f}|^2 d\mathcal{M} = 0.$$

Logo, $\partial \bar{f} \equiv 0$, e portanto, f será holomorfa.

O caso anti-holomorfo é análogo para E'. $\square$

3.2 O teorema de Lichnerowicz

Agora, estamos prontos para provar o resultado principal. Mas, antes disso, temos a seguinte

Definição 3.5. *A* **ação** *de f é definida por*

$$K(f) = E'(f) - E''(f). \tag{3.14}$$

Usando (3.7) e (3.8) obtemos ainda

$$K(f) = \int_{\mathcal{M}} \langle f_* Je_j, J' f_* e_j \rangle d\mathcal{M}, \tag{3.15}$$

onde $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ é um referencial local Hermitiano em $\mathcal{M}$.

Agora sejam $\omega^{\mathcal{M}}$ e $\omega^{\mathcal{N}}$ as respectivas formas Kähler das variedades kähler $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ com referencial local Hermitiano $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$. Veja que

$$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = \langle Je_i, e_j \rangle = 0 \\ \omega(Je_i, Je_j) = \langle J(Je_i), Je_j \rangle = -\langle e_i, Je_j \rangle = 0 \\ \omega(e_i, Je_j) = \langle Je_i, Je_j \rangle = \delta_{ij} \end{cases}. \tag{3.16}$$

Teorema 3.6 (Lichnerowicz). *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Kähler. Se $\mathcal{M}$ é compacta, então qualquer aplicação holomorfa ou anti-holomorfa $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação harmônica com energia mínima em sua classe de homotopia.*

Lema 3.7. *Sejam $\omega^{\mathcal{M}}$ e $\omega^{\mathcal{N}}$ as formas Kähler em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Então*

$$K(f) = \int_{\mathcal{M}} \langle f^* \omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{M}, \tag{3.17}$$

onde em $\Omega^2(\mathcal{M})$ no membro à direita da equação acima é a métrica de Gramm.

Prova. De fato, considere um referencial Hermitiano local $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$. Assim, segue de (3.16) e pela definição de métrica de Gramm em $\Omega^2(\mathcal{M})$ que

$$\begin{aligned} \langle f^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}} \rangle &= \sum_{i,j} f^*\omega^{\mathcal{N}}(e_i, e_j)\omega^{\mathcal{M}}(e_i, e_j) + \sum_{i,j} f^*\omega^{\mathcal{N}}(e_i, Je_j)\omega^{\mathcal{M}}(e_i, Je_j) \\ &\quad + \sum_{i,j} f^*\omega^{\mathcal{N}}(Je_i, Je_j)\omega^{\mathcal{M}}(Je_i, Je_j) \\ &= \sum_{i,j} f^*\omega^{\mathcal{N}}(e_i, Je_j)\delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j} \omega^{\mathcal{N}}(f_* e_i, f_* Je_j)\delta_{ij} \\ &= \langle J' f_* e_i, f_* Je_i \rangle. \end{aligned}$$

Logo, substituindo em (3.15) obtemos,

$$K(f) = \int_{\mathcal{M}} \langle f^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}} \rangle d\mathcal{M}.$$

$\square$

Lema 3.8 (lema de homotopia). *Seja $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ uma homotopia suave entre as variedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, indexada por $t \in [0,1]$. Se ω é uma $k-$forma fechada em $\mathcal{N}$ então*

$$\frac{d}{dt} f_t^*\omega = d\bigg(f_t^* \iota_{(f_{t*}\frac{\partial}{\partial t})}\omega \bigg),$$

onde ι_X denota a contração na direção do campo X.

Prova. Sejam ω uma k-forma fechada em $\mathcal{N}$, $v = f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}$ e, para $p \in \mathcal{M}$ fixado, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel numa vizinhança $U \subset \mathcal{M}$ de p, geodésico em p. Denote por ∇ a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{M}$ e as conexões nos fibrados de formas diferenciais sobre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ (aquelas compatíveis com a métrica de Gramm). Fixando campos $X_1, \ldots, X_k \in \{e_1, \ldots, e_n\}$, temos por (2.15) que, no ponto p

$$\begin{aligned}
d(f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,X_k) &= (-1)^{j-1}(\nabla_{X_j} f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k) \\
&= (-1)^{j-1}X_j((f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k)) \\
&\quad +(-1)^j(f_t^*\iota_v\omega)(\nabla_{X_j}X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k)+\cdots \\
&\quad \cdots+(-1)^j(f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,\nabla_{X_j}X_k) \\
&= (-1)^{j-1}X_j((f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k)).
\end{aligned}$$

Veja que, para $q \in U$, temos

$$\begin{aligned}
(f_t^*\iota_v\omega)_q(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k) &= (\iota_v\omega)_{f_t(q)}(f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k) \\
&= \omega_{f_t(q)}(v, f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k).
\end{aligned}$$

Assim, teremos que, em p

$$\begin{aligned}
& d(f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,X_k)\\
= \;& (-1)^{j-1}X_j((f_t^*\iota_v\omega)(X_1,\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_k))\\
= \;& (-1)^{j-1}f_{t*}X_j(\omega_{f_t(q)}(v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k))\\
= \;& (-1)^{j-1}(\nabla_{f_{t*}X_j}\omega)(v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k)\\
& +(-1)^{j-1}\omega(\nabla_{f_{t*}X_j}v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k)\\
& +\sum_{l<j}(-1)^{j-1}\omega(v,f_{t*}X_1,\ldots,\nabla_{f_{t*}X_j}f_{t*}X_l,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k)\\
& +\sum_{l>j}(-1)^{j-1}\omega(v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,\nabla_{f_{t*}X_j}f_{t*}X_l,\ldots,f_{t*}X_k).
\end{aligned}$$

Na primeira soma acima, temos novamente por (2.15)

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& d\omega(v,f_{t*}X_1,\ldots,f_{t*}X_k)\\
=\;& (\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1,\ldots,f_{t*}X_k)\\
& +(-1)^{j}(\nabla_{f_{t*}X_j}\omega)(v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& (-1)^{j-1}(\nabla_{f_{t*}X_j}\omega)(v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k)\\
& =(\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1,\ldots,f_{t*}X_k).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Na segunda soma, permutando os termos, temos

$$\begin{aligned}
& (-1)^{j-1}\omega(\nabla_{f_{t*}X_j}v,f_{t*}X_1,\ldots,\widehat{f_{t*}X_j},\ldots,f_{t*}X_k)\\
& =\omega(f_{t*}X_1,\ldots,\nabla_{f_{t*}X_j}v,\ldots,f_{t*}X_k)\\
& =\omega(f_{t*}X_1,\ldots,\nabla_v f_{t*}X_j+[f_{t*}X_j,v],\ldots,f_{t*}X_k).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Na última soma troquemos j por l e denotemos por S a combinação das últimas duas.

Daí, temos no ponto p que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l<j}(-1)^{j-1}\omega(v, f_{t*}X_1, \ldots, \nabla_{f_{t*}X_j} f_{t*}X_l, \ldots, \widehat{f_{t*}X_j}, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &\quad + \sum_{j>l}(-1)^{l-1}\omega(v, f_{t*}X_1, \ldots, \widehat{f_{t*}X_l}, \ldots, \nabla_{f_{t*}X_l} f_{t*}X_j, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= \sum_{l>j}(-1)^{j-1}\omega(v, f_{t*}X_1, \ldots, \nabla_{f_{t*}X_j} f_{t*}X_l, \ldots, \widehat{f_{t*}X_j}, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &\quad \sum_{j>l}(-1)^{j}\omega(v, f_{t*}X_1, \ldots, \nabla_{f_{t*}X_l} f_{t*}X_j, \ldots, \widehat{f_{t*}X_j}, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= \sum_{l<j}(-1)^{j-1}\omega(v, f_{t*}X_1, \ldots, [f_{t*}X_j, f_{t*}X_l], \ldots, \widehat{f_{t*}X_j}, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $S = 0$, (3.18) e (3.19) na expressão $d(f_t^*\iota_v\omega)(X_1, \ldots, X_k)$, teremos em p

$$\begin{aligned} d(f_t^*\iota_v\omega)(X_1, \ldots, X_k) &= (\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &\quad +\omega(f_{t*}X_1, \ldots, \nabla_v f_{t*}X_j + [f_{t*}X_j, v], \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= (\nabla_v\omega)(f_{t*}X_1, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &\quad +\omega(f_{t*}X_1, \ldots, \nabla_v f_{t*}X_j, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= \nabla_v\omega(f_{t*}X_1, \ldots, f_{t*}X_k) \\ &= \nabla_v f_t^*\omega(X_1, \ldots, X_k) \\ &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} f_t^*\omega)(X_1, \ldots, X_k) + f_t^*\omega(X_1, \ldots, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X_j, \ldots, X_k) \\ &= (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} f_t^*\omega)(X_1, \ldots, X_k), \end{aligned}$$

onde usamos que $[f_{t*}X_j, f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}] = f_{t*}[X_j, \frac{\partial}{\partial t}]$ e $[X_j, \frac{\partial}{\partial t}] = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X_j = 0$.

Como, $\frac{d}{dt} f_t^*\omega = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} f_t^*\omega$, o resultado segue. □

Proposição 3.9. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Kähler, com $\mathcal{M}$ compacta. Se $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $t \in [0, 1]$, é uma homotopia suave e $K(f_t)$ é sua ação, então a aplicação $t \mapsto K(f_t)$ é constante, i.e. $K(f_t)$ é um invariante homotópico.*

Prova . Seja $\theta_t = f_t^*\iota_{f_{t*}\frac{\partial}{\partial t}}\omega$. Como $\mathcal{M}$ é compacta podemos usar a regra de Leibniz de derivação sobre o sinal da integral em (3.17) para obtermos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K(f_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{M}} \langle f_t^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt}\langle f_t^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left(\left\langle \frac{d}{dt} f_t^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}} \right\rangle + \langle f_t^*\omega^{\mathcal{N}}, \frac{d}{dt}\omega^{\mathcal{M}}\rangle \right) d\mathcal{M} \\
&= \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{d}{dt} f_t^*\omega^{\mathcal{N}}, \omega^{\mathcal{M}} \right\rangle d\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Pelo lema anteior,

$$\frac{d}{dt}K(f_t) = \int_{\mathcal{M}} \langle d\theta_t, \omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M},$$

e pela Proposição 2.20, teremos

$$\frac{d}{dt}K(f_t) = \int_{\mathcal{M}} \langle \theta_t, \delta\omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M}.$$

Mas, pela Proposição 2.36, obtemos

$$\frac{d}{dt}K(f_t) = \int_{\mathcal{M}} \langle \theta_t, - * d * \omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} \langle \theta_t, *d * \omega^{\mathcal{M}}\rangle d\mathcal{M}.$$

Agora, usando que $\omega^{\mathcal{M}}$ é fechada e o Lema 2.37, temos

$$\frac{d}{dt}K(f_t) = -\int_{\mathcal{M}} \langle \theta_t, *d(\frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n-1})\rangle d\mathcal{M} = 0.$$

□

Prova (do teorema de Lichnerowicz). Considere o caso holomorfo (o anti-holomorfo é análogo). A harmonicidade da f segue da Proposição 2.10. Como f é holomorfa, temos pelo Corolário 3.4 $E^{''}(f) = 0$. Assim, se $f_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, com $t \in [0,1]$ é uma homotopia suave tal que $f_0 = f$, então pela proposição anterior que,

$$\begin{aligned}
E(f) &= E(f_o) \\
&= E^{'}(f_0) + E^{''}(f_0) \\
&= E^{'}(f_0) - E^{''}(f_0) \\
&= K(f_0) = K(f_t) \\
&= E'(f_t) - E''(f_t) \\
&\leq E'(f_t) + E''(f_t) = E(f_t).
\end{aligned}$$

□

Observe que o Teorema de Lichnerowicz garante que $I(v, v) \geq 0$. Portanto, ele garante que toda aplicação holomorfa(anti-holomorfa) entre variedades Kähler é uma aplicação harmônica estável.

Corolário 3.10. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades Kähler, com $\mathcal{M}$ compacta, $f_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ holomorfa, e $f_1 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ anti-holomorfa. Então f_0 e f_1 não podem ser homotópicas a menos que sejam constantes.*

Prova. Com efeito, se f_0 é homotópica a f_1, então pela Proposição 3.9 e Corolário 3.4 obtemos,

$$\begin{aligned} E(f_0) &= E'(f_0) + E''(f_0) = E'(f_0) - E''(f_0) = K(f_0) \\ &= K(f_1) = E'(f_1) - E''(f_1) = -E'(f_1) - E''(f_1) \\ &= -(E'(f_1) + E''(f_1)) = -E(f_1). \end{aligned}$$

Mas, pela Observação 2.26

$$E(f_1) \geq 0 \Rightarrow -E(f_1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq E(f_0) = -E(f_1) \leq 0.$$

Logo,

$$E(f_0) = E(f_1) = 0.$$

Portanto, f_0 e f_1 devem ser constante. $\square$

Observação 3.11. Na Proposição 3.9 obtemos $\frac{d}{dt}K(f_t) = 0$. Daí,

$$\frac{d}{dt}E'(f_t) = \frac{d}{dt}E''(f_t).$$

Também, pela definição de $K(f_t)$ e sendo $E(f_t) = E'(f_t) + E''(f_t)$, temos

$$\begin{cases} K(f_t) + E(f_t) = 2E'(f_t) \\ E(f_t) - K(f_t) = 2E''(f_t) \end{cases}$$

Assim, temos

$$\frac{d}{dt}E'(f_t) = \frac{d}{dt}E''(f_t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(f_t).$$

Portanto, todo ponto crítico de $E(f_t)$(**energia funcional**) coincide com o das energias parciais.

Referências Bibliográficas

[1] CAMINHA, A. *Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas*. In XVI Escola de Geometria Diferencial, Universidade de São Paulo, USP, 2010.

[2] ———. *Tópicos de Geometria Diferencial*. (Preprint).

[3] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.(Projeto Euclides).

[4] EELLS, J.; SAMPSON, J. H. *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*. Amer. J. Math. v.86, p. 106-160, 1964.

[5] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 2003.

[6] ———. *Introduction to Topological Manifolds*. Nova Iorque: Springer-Verlag,2000.

[7] LICHNEROWICZ, A. *Applications harmoniques et variétés Kahleriennes*. London: Academic Press, 1970, p. 341-402.(Symposia Mathematics, v. 3)

[8] MAZET, E. *La formule da la variation seconde de l'énergie au voisinage d'une application harmonique*. J. Diff. Geom. v. 8, p. 309-328, 1974.

[9] MATSUSHIMA, Y. *Differentiable Manifolds*. New York: Marcel Dekker, 1972.

[10] SEBASTIANI, M. *Introdução à geometria analítica complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004 (Projeto Euclides).

[11] SMITH, R. T. *The second variation formula for harmonic mappings*. Proc. Amer. Math. Soc. v. 47, p. 229-236, 1975.

[12] XIN, Y. *Geometry of Harmonic Maps*. Boston: Birkhäuser, c1996.(Progress in Nonlinear Differential Equations, v. 23).