UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TIAGO CAÚLA RIBEIRO

VARIEDADES COM CURVATURA PRESCRITA: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE, RIGIDEZ E BIFURCAÇÃO

FORTALEZA
2012

TIAGO CAÚLA RIBEIRO

VARIEDADES COM CURVATURA PRESCRITA: RESULTADOS DE EXISTÊNCIA, UNICIDADE, RIGIDEZ E BIFURCAÇÃO

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração:
Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.

FORTALEZA
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

R372v Ribeiro, Tiago Caúla

Variedades com curvatura prescrita: resultados de existência, unicidade, rigidez e bifurcação / Tiago Caúla Ribeiro. − 2012.

88 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) − Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientação: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades riemannianas. 1. Título.

CDD 516.36

Dedico este trabalho aos meus irmãos Aluizio, Mônica e Gabriela.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Aluizio e Isvalde, pelo amor e fé inabaláveis.

À minha esposa Izabel, pela alegria que me traz todos os dias.

Aos meus irmãos Aluizio, Mônica e Gabriela, pelo incentivo.

Ao meu orientador professor Levi Lopes de Lima, por me conduzir e apresentar a tão belos temas para a pesquisa matemática.

Aos professores Frederico Vale, Gregório Pacelli, Newton Luís e Paolo Piccione, por aceitarem o convite para participar da banca e pelas valiosas sugestões.

Aos professores da Pós-graduação em Matemática da UFC. Em especial, a Lev Birbrair e Antonio Caminha, pela serenidade científica.

Aos amigos Alexandre Fernandes e Ulisses Parente, pelo equilíbrio gerado de nossas discussões.

Aos colegas Flávio França, Jonatan Floriano, Jobson de Queiroz, Cícero Aquino, Gleydson Ricarte, Marco Antonio e Damião Júnior.

Aos secretários da Pós-graduação em Matemática da UFC, Andréa Costa e Carlos Adriano, pela eficiência e prestabilidade.

À Capes e a CNPq, pelo apoio financeiro.

“Haja ou não deuses, deles somos servos."

Fernando Pessoa

RESUMO

Apresentamos vários resultados de existência, unicidade, rigidez e bifurcação para o problema da prescrição de diversas estruturas geométricas em variedades Riemannianas, entre os quais incluem-se: i) deformação e rigidez para estruturas 2k-Einstein em variedades com $(2k-2)$-curvatura seccional constante; ii) deformação conforme de métricas no contexto do problema de Yamabe para curvaturas de Gauss-Bonnet; iii) unicidade, bifurcação e rigidez local no âmbito do problema de Yamabe para as funções simétricas dos autovalores do tensor de Schouten.

ABSTRACT

We present several results of existence, uniqueness, rigidity and bifurcation for the problem of prescribing various geometric structures on Riemannian manifolds, among which include: i) deformation and rigidity for 2k-Einstein structures on manifolds with constant $(2k-2)$-sectional curvature; ii) conformal deformation of metrics in the context of the Yamabe Problem for Gauss-Bonnet curvatures; iii) uniqueness, bifurcation and local rigidity in scope of the Yamabe Problem for symmetric functions of eigenvalues of the Schouten tensor.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Noções preliminares de Geometria Diferencial e Análise Global **5**
2.1 Fibrados vetoriais 5
2.2 Conexões e curvatura em fibrados vetoriais 7
2.3 Geometria Riemanniana 10
2.4 Os tensores de Lovelock e as curvaturas de Gauss-Bonnet 13
2.5 Formas duplas 16
2.6 Operadores e complexos diferenciais 19
2.7 Funcionais geométricos 24

3 Rigidez de estruturas $2k$-Einstein **31**
3.1 O caso Einstein 31
3.2 Rigidez de estruturas $2k$-Einstein 38
3.3 Linearizando o tensor $2k$-Ricci 42
3.4 Demonstrando os teoremas de rigidez 53

4 O problema de Yamabe para curvaturas de Gauss-Bonnet **57**
4.1 O problema de Yamabe e suas generalizações 57
4.2 Linearizando a curvatura de Gauss-Bonnet 60
4.3 Demonstrando o Teorema 4.1.3 62

5 Unicidade e bifurcação para o problema σ_2-Yamabe **66**
5.1 Uma introdução ao problema: existência, unicidade e compacidade 66
5.2 Um resultado de unicidade para $n = 3$ 74
5.3 Rigidez local e bifurcação no problema σ_2-Yamabe 78

Bibliografia **85**

Capítulo 1

Introdução

Embora o tensor de curvatura R seja o invariante central em Geometria Riemanniana, reconhece-se que este objeto é deveras complicado do ponto de vista algébrico, o que inviabiliza sobremaneira o estudo de propriedades geométricas diretamente definidas a partir de R. Por exemplo, a constância das curvaturas seccionais já implica que a variedade Riemanniana em questão é uma forma espacial e isto leva a fortes restrições topológicas em dimensão $n \geq 3$. Por outro lado, o completo entendimento do problema geral de prescrever, mesmo que localmente, as curvaturas seccionais como uma função definida na Grassmaniana dos planos tangentes parece estar além do alcance da tecnologia atual. Estes exemplos certamente reforçam a alternativa de estudar invariantes Riemannianos obtidos a partir de R por meio de construções algébricas naturais (produtos tensoriais, contrações, etc.), os mais simples entre estes sendo o tensor de Ricci e a curvatura escalar. Desta perspectiva, o problema de determinar as estruturas Riemannianas satisfazendo à condição de que algum destes invariantes é *constante* no sentido apropriado destaca-se por sua evidente naturalidade. O objetivo deste trabalho é precisamente apresentar alguns resultados inéditos para este problema no contexto de alguns invariantes Riemannianos com este tipo de configuração.

A primeira classe de invariantes aqui considerados pode ser descrita em termos do conceito de *forma dupla*, que nada mais é que um elemento da álgebra

$$\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X) = \mathcal{A}^{\bullet}(X) \otimes_{\mathcal{D}(X)} \mathcal{A}^{\bullet}(X),$$

onde X é uma variedade diferenciável, $\mathcal{D}(X)$ é o anel das funções suaves em X e

$$\mathcal{A}^{\bullet}(X) = \oplus_{r\geq 0}\mathcal{A}^{r}(X)$$

é a $\mathcal{D}(X)$-álgebra graduada das formas diferenciais; veja a Seção 2.5 para detalhes. Claramente, a álgebra das formas duplas é naturalmente bi-graduada:

$$\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X) = \oplus_{r,s\geq 0}\mathcal{A}^{r,s}(X).$$

Note que se g é uma métrica Riemanniana em X, então $g \in \mathcal{A}^{1,1}(X)$ e seu tensor de curvatura $R_g \in \mathcal{A}^{2,2}(X)$, o que decorre das simetrias de R_g. Mais ainda, existe um *operador de contração* c_g, que é na verdade o adjunto da operação de multiplicação por g. De posse desta terminologia, o tensor de Ricci de g pode ser expresso como

$$\mathrm{Ric}_g = c_g R_g,$$

de modo que soa natural considerar, para $k \geq 1$, o tensor $2k$-*Ricci* dado por

$$\mathcal{R}_g^{(2k)} = c^{2k-1}R_g^k, \tag{1.1}$$

um elemento de $\mathcal{A}^{1,1}(X)$ que é simétrico em suas entradas em virtude das simetrias de R_g. Neste contexto, uma métrica é $2k$-*Einstein* se cumpre $\mathcal{R}_g^{(2k)} = \lambda g$ para alguma constante λ. É importante observar que, a exemplo do caso Einstein ($k = 1$), esta condição sobre g admite uma interpretação variacional (Proposição 2.7.8).

Classicamente, o estudo de métricas de Einstein é um tópico honorável em Geometria Riemanniana [Be]. Em particular, mostra-se que o espaço de módulos de tais estruturas sempre aparece, para uma variedade diferenciável *compacta* X, em famílias de dimensão finita. Mais ainda, em alguns casos verifica-se que tais estruturas apresentam fenômenos de rigidez local. Isto acontece, por exemplo, se (X, g) é uma forma espacial esférica, o que pode ser interpretado como uma extensão de um famoso teorema de rigidez demonstrado por Calabi [Ca], ou ainda se (X, g) é uma forma espacial hiperbólica, o que pode ser visto como uma versão local de um famoso teorema de rigidez global de Mostow [Mo].

Como $\mathcal{R}_g^{(2k)}$ é homogêneo de grau k em R_g (ou, equivalentemente, nas derivadas de segunda ordem de g), resulta que o símbolo principal da linearização de (1.1) depende de R_g para $k \geq 2$. Note que, em contraste, para $k = 1$ este símbolo depende das derivadas de g até primeira ordem, de forma que a equação linearizada é elíptica num *gauge* apropriado; na verdade, esta é a informação que justifica o resultado de finitude acima mencionado. Assim, para $k \geq 2$, a linearização não é em geral elíptica e a questão de exibir exemplos de variedades $2k$-Einstein onde a elipticidade é restaurada, com a consequente finitude local da dimensão do espaço de módulos de tais estruturas, adquire fundamental importância.

Neste trabalho isolamos uma classe de variedades Riemanninas para as quais este programa é satisfatoriamente executado. Mais precisamente, se $n \geq 4$ e $2 \leq k < n/2$, denotemos por $\mathcal{H}_{n,k}$ a classe das variedades Riemannianas fechadas que são $2k$-Einstein e satisfazem a condição de curvatura

$$R_g^{k-1} = \mu_k g^{2k-2}, \quad \mu_k \neq 0, \tag{1.2}$$

que significa que a variedade em questão possui $(2k-2)$-curvatura seccional *constante*; veja a Proposição 2.5.7. Assim, a classe $\mathcal{H}_{n,k}$ contém todas as formas espaciais exceto aquelas localmente planas (isto é, que satisfazem $R_g = 0$). Nosso primeiro resultado (Teorema 3.2.7) garante que se $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$, então o espaço de módulos de estruturas $2k$-Einstein em X, representado por $\mathfrak{E}^{(2k)}(X)$, possui dimensão finita em $\langle g \rangle$, a classe de g, o que obtém-se como consequência do fato que a linearização de (1.1) em (X, g) é elíptica num *gauge* apropriado. Na verdade, um resultado bem mais preciso a respeito da estrutura local de $\mathfrak{E}^{(2k)}(X)$ em torno de $\langle g \rangle$ é obtido no Teorema 3.2.15. Complementa-se ainda esta informação com o Teorema 3.2.9, que exibe exemplos de variedades em $\mathcal{H}_{n,k}$ que são rígidas, como variedades $2k$-Einstein, sob uma hipótese adicional envolvendo condições no maior e menor autovalor de $\overset{\circ}{R}_g$, a ação natural de R_g em $\mathcal{A}^{1,1}(X)$. Esta subclasse de exemplos inclui as formas espacias esféricas e hiperbólicas (Corolário 3.2.14), de forma que os resultados clássicos acima citados sobre rigidez destas formas espaciais como estruturas de Einstein estendem-se para o caso $2k$-Einstein.

Uma contração adicional de $\mathcal{R}_g^{(2k)}$ produz a chamada $2k$*-curvatura de Gauss-Bonnet*,

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{1}{(2k)!} c_g \mathcal{R}_g^{(2k)}, \tag{1.3}$$

um invariante escalar de g que é homogêneo de ordem k em suas derivadas de segunda ordem. Estes invariantes gozam de notável ubiquidade em Geometria, aparecendo em situações que vão desde a expressão para o volume de tubos de Weyl [G] até às fórmulas cinemáticas de Chern [Ch]. Note que $\mathcal{S}_g^{(2)} = \kappa_g/2$, onde $\kappa_g = c_g \mathrm{Ric}_g$ é a curvatura escalar de g. Ora, classicamente, a curvatura escalar desempenha um papel fundamental em Geometria Conforme, em conexão com o famoso problema de Yamabe [LP]. É natural, por conseguinte, formular o problema corresponde para as curvaturas de Gauss-Bonnet: dada uma métrica g em X, existe g' conforme a g tal que $\mathcal{S}_{g'}^{(2k)}$ é constante? Este problema, que é também de cunho variacional, somente foi considerado na literatura no caso em que g é localmente conformemente plana [LL], [GW], pois aí ele é equivalente ao problema σ_k-Yamabe (Proposição 4.1.1). Neste trabalho, apresentamos os primeiros exemplos de variedades (X, g) com tensor de Weyl *não*-identicamente nulo para as quais este problema possui solução positiva. Mais precisamente, se $\mathcal{H}'_{n,k}$ representa a subclasse das variedades (X, g) em $\mathcal{H}_{n,k}$ isometricamente distintas das esferas redondas, então demonstra-se (Teorema 4.1.3) que qualquer métrica suficientemente próxima de g é conformemente equivalente a uma métrica com $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet constante.

A última classe de invariantes aqui considerada envolve a conhecida decomposição do tensor curvatura em componentes irredutíveis com respeito à ação do grupo ortogonal:

$$R_g = A_g \odot g + W_g,$$

onde

$$A_g = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{\kappa_g}{2(n-1)}g\right),$$

é o tensor de Schouten, $\odot$ é o produto de Kulkarni-Nomizu e W_g é o tensor de Weyl; veja a Seção 2.3. Como W_g é invariante conforme, é natural considerar o problema de deformar conformemente uma métrica de tal forma a tornar constante alguma função simétrica elementar $\sigma_k(A_g)$ nos autovalores de A_g. Este é o famoso *problema σ_k-Yamabe* [V], que reduz-se ao problema de Yamabe clássico quando $k = 1$. Consideraremos aqui somente o caso $k = 2$, que sempre é de natureza variacional (Teorema 5.1.1), e estenderemos para este contexto alguns resultados recentes estabelecidos em [dLPZ1] e [dLPZ2] para o problema de Yamabe. Mais precisamente, no produto de esferas $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$, munido com a métrica $g_\lambda = g_0 \oplus \lambda g_0$, $\lambda > 0$, onde g_0 é a métrica redonda, verificamos que existe uma sequência dupla de valores de λ nos quais a família (g_λ) apresenta bifurcação, sendo localmente rígida nos demais valores de λ (Teorema 5.3.7). Apresentamos ainda um resultado de unicidade *global* em formas espacias tri-dimensionais isometricamente distintas da esfera redonda (Teorema 5.2.1), que estende um caso especial de um teorema de Viaclovsky [V2].

Capítulo 2

Noções preliminares de Geometria Diferencial e Análise Global

Neste capítulo, apresentamos as noções de Geometria Diferencial e Análise Global utilizadas neste trabalho. Nosso objetivo aqui é primordialmente recordar estes resultados e fixar notação e terminologia, de modo que, como regra geral, as demonstrações serão omitidas. Quando não mencionadas explicitamente no texto, referências detalhadas sobre os fatos aqui descritos podem ser encontradas em [Be], [GHL], [Jo], [Kl] e [Sa].

2.1 Fibrados vetoriais

Seja $\mathcal{E}$ um fibrado vetorial real sobre uma variedade diferenciável X de dimensão $n \geq 3$, que sempre suporemos, salvo menção explícita em contrário, *fechada*, isto é, compacta e com bordo vazio. Recordemos que, para cada $p \in X$, a *fibra* de $\mathcal{E}$ sobre p é o conjunto $\mathcal{E}_p = \pi^{-1}(p)$, onde $\pi : \mathcal{E} \to X$ é a projeção fibrada. Note que $\mathcal{E}_p$ é um espaço vetorial real, cuja dimensão não varia com p (se supusermos que X é conexa, o que sempre faremos a seguir). Esta dimensão comum é, por definição, o *posto* de $\mathcal{E}$, representado por $\mathfrak{p}(\mathcal{E})$.

Uma *seção* de $\mathcal{E}$ é uma aplicação suave $\eta : X \to \mathcal{E}$ satisfazendo $\pi \circ \eta = \mathrm{Id}_X$. O espaço vetorial das seções de $\mathcal{E}$ será denotado por $\Gamma(\mathcal{E})$.

Dados fibrados vetoriais $\mathcal{E} \to X$ e $\mathcal{E}' \to X'$, uma *aplicação fibrada* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ leva fibras em fibras e é linear quando restrita a cada uma delas. Se $X = X'$ e $f|_X = \mathrm{Id}_X$, diremos que f é um *homomorfismo fibrado*. Mais especificamente, se f é um isomorfismo linear quando restrito às fibras, diremos que f é um *isomor-*

fismo fibrado, caso em que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são *isomorfos*. Neste caso, necessariamente, $\mathfrak{p}(\mathcal{E}) = \mathfrak{p}(\mathcal{E}')$. Em particular, se $\mathcal{E}$ é isomorfo ao fibrado produto $X \times \mathbb{R}^s$, para algum $s \geq 1$, diremos que $\mathcal{E}$ é *trivial*.

Uma *métrica* em $\mathcal{E}$ é uma regra que a cada $p \in X$ associa um produto interno $\langle\, , \rangle_p$ em $\mathcal{E}_p$ que depende suavemente de p. Um par $(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle)$ é chamado um *fibrado Riemanniano*. Em particular, se $\mathcal{E} = TX$, o fibrado tangente de X, então $\langle\, , \rangle$ é o que se convenciona chamar uma *métrica Riemanniana* em X. Neste caso, diz-se que o par $(X, \langle\, , \rangle)$ é uma *variedade Riemanniana*.

Se $\eta, \eta' \in \Gamma(\mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é métrico e X é variedade Riemanniana, então define-se seu *produto interno* L^2 por

$$(\eta, \eta') = \int_X \langle \eta, \eta' \rangle \nu_g,$$

onde ν_g é o elemento de volume induzido pela métrica Riemanniana g[1].

É notável que as construções usuais de Álgebra Linear estendem-se naturalmente à categoria dos fibrados vetoriais. Assim, dados fibrados $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ sobre a *mesma* variedade X, podemos formar sua *soma direta* $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$, seu *produto tensorial* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$, o fibrado de homomorfismos $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, etc. Mais ainda, os isomorfismos canônicos associados às fibras típicas traduzem-se em isomorfismos correspondentes para fibrados. Por exemplo, $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}' \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, onde $\mathcal{E}^* = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \underline{\mathbb{R}})$ é o *fibrado dual* de $\mathcal{E}$[2]. Em particular, se começarmos com TX, podemos dualizar para obter o *fibrado cotangente* T^*X, e se fizermos o produto tensorial de q cópias de TX e r cópias de T^*X obtemos o fibrado $\otimes^{(q,r)}TX$; neste caso, $\mathcal{T}^{(q,r)}(X) = \Gamma(\otimes^{(q,r)}TX)$ é o espaço dos tensores do tipo (q, r) sobre X.

Efetuando a operação de *anti-simetrização* a $\otimes^{(0,r)}TX$ obtém-se o fibrado exterior $\Lambda^r(X)$, cujas seções são as r-formas diferenciais sobre X. Mais geralmente, na presença de uma fibrado auxilar $\mathcal{E}$, podemos considerar $\Lambda^r(X) \otimes \mathcal{E}$, o fibrado das r-formas sobre X com valores em $\mathcal{E}$. Neste contexto, escreveremos $\mathcal{A}^r(X; \mathcal{E}) = \Gamma(\Lambda^r(X) \otimes \mathcal{E})$; note que $\mathcal{A}^0(X; \mathcal{E}) = \Gamma(\mathcal{E})$. Em particular, se $\mathcal{E} = \underline{V}$, para algum espaço vetorial V, escreveremos $\mathcal{A}^r(X; V) = \mathcal{A}^r(X; \mathcal{E})$. Nesta notação, $\mathcal{A}^r(X) = \mathcal{A}^r(X; \underline{\mathbb{R}})$.

Podemos ainda aplicar a operação de *simetrização* a $\otimes^{(0,r)}TX$, obtendo assim o fibrado $\mathrm{Sym}^r(X)$, de modo que $S^r(X) = \Gamma(\mathrm{Sym}^r(X))$ é o espaço dos tensores covariantes simétricos de grau r. Desse modo, um elemento $g \in S^2(X)$, que é positivo definido em cada ponto de X, nada mais é que uma métrica Riemanniana.

[1] Evidentemente, estamos supondo aqui que X está orientada.

[2] Em geral, se V é um espaço vetorial, representaremos por $\underline{V}$ o fibrado vetorial trivial sobre X com fibra típica V.

Observemos ainda que existe uma outra maneira de criar novos fibrados a partir de fibrados já existentes: se $f : X' \to X$ é uma aplicação suave e $\mathcal{E} \to X$, então existe o *fibrado induzido* $f^*\mathcal{E} \to X'$. *Grosso modo*, $(f^*\mathcal{E})_{p'}$ identifica-se a $\mathcal{E}_{f(p')}$, $p' \in X'$. Finalmente, cumpre mencionar que, dadas métricas nos fibrados $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, etc., todos os fibrados construídos a partir destes através dos vários procedimentos descritos acima possuem estruturas naturais de fibrados Riemannianos.

2.2 Conexões e curvatura em fibrados vetoriais

A menos que um fibrado vetorial $\mathcal{E} \to X$ seja trivial, não existe em geral nenhuma maneira natural de identificar as fibras de $\mathcal{E}$ sobre pontos distintos. Na verdade, para efetuar tal identificação, algum tipo de estrutura adicional faz-se necessária. A estratégia consiste então em, inicialmente, prescrever uma maneira de derivar seções de $\mathcal{E}$ e daí efetuar a identificação ao longo de curvas conectando os pontos em questão por meio de seções com derivada nula. Isto dá origem tanto ao conceito geométrico de transporte paralelo quanto ao seu correspondente analítico descrito na definição a seguir.

Definição 2.2.1. *Uma* conexão *num fibrado vetorial $\mathcal{E}$ sobre X é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $\nabla : \mathcal{A}^0(X;\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(X;\mathcal{E})$ satisfazendo a* regra de Leibniz*:*

$$\nabla(f\eta) = df \otimes \eta + f\nabla\eta, \tag{2.1}$$

onde $\eta \in \Gamma(\mathcal{E})$ e $f \in \mathcal{D}(X)$, o anel de funções suaves sobre X.

Recordando que $\mathcal{A}^1(X;\mathcal{E}) = \Gamma(T^*X \otimes \mathcal{E}) = \Gamma(\mathrm{Hom}(TX,\mathcal{E}))$, obtemos, para $x \in \mathcal{X}(X) = \Gamma(TX)$, a *derivada covariante* $\nabla_x : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ com (2.1) substituído por

$$\nabla_x(f\eta) = x(f)\eta + f\nabla_x\eta, \quad \nabla_{fx}\eta = f\nabla_x\eta.$$

Definição 2.2.2. *Se $\mathcal{E}$ é Riemanniano, então dizemos que ∇ é* compatível *com a métrica se vale*

$$x\langle\eta_1,\eta_2\rangle = \langle\nabla_x\eta_1,\eta_2\rangle + \langle\eta_1,\nabla_x\eta_2\rangle, \;\; x \in \mathcal{X}(X), \eta_1,\eta_2 \in \Gamma(\mathcal{E}). \tag{2.2}$$

Neste ponto, é conveniente recordar que qualquer métrica Riemanniana em X induz uma *única* conexão ∇ em TX, que é a um só tempo compatível e *simétrica* no sentido que

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x,y], \qquad x,y \in \mathcal{X}(X). \tag{2.3}$$

Esta é a famosa *conexão de Levi-Civita*.

Em geral, sempre consideraremos triplas $(\mathcal{E}, \nabla, \langle\, , \rangle)$, com a conexão compatível com a métrica. É importante observar ainda que os fibrados derivados do tipo $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$, etc., podem ser munidos de conexões naturais sempre que os fibrados originais possuem conexões. Mais ainda, estas conexões são compatíveis com as métricas naturais sempre que as conexões dos fibrados originais são compatíveis com as respectivas métricas. Em particular, os diversos fibrados tensoriais possuem conexões compatíveis naturalmente induzidas a partir da conexão de Levi-Civita.

Uma conexão ∇ em $\mathcal{E}$ pode ser estendida a uma aplicação em duas etapas

$$\mathcal{A}^0(X;\mathcal{E}) \xrightarrow{d_0^\nabla = \nabla} \mathcal{A}^1(X;\mathcal{E}) \xrightarrow{d_1^\nabla} \mathcal{A}^2(X;\mathcal{E}), \tag{2.4}$$

onde

$$d_1^\nabla(\alpha \otimes \eta) = d\alpha \otimes \eta - \alpha \wedge \nabla\eta, \;\; \alpha \otimes \eta \in \mathcal{A}^1(X;\mathcal{E}),$$

e d é a derivada exterior. Denotando a composição em (2.4) por R^∇, verifica-se facilmente que

$$R^\nabla(f\eta) = fR^\nabla(\eta), \qquad f \in \mathcal{D}(X).$$

Além disso, vale

$$R^\nabla_{x,y}\eta = \nabla_x\nabla_y\eta - \nabla_y\nabla_x\eta - \nabla_{[x,y]}\eta, \;\; x, y \in \mathcal{X}(X), \eta \in \Gamma(\mathcal{E}),$$

ou seja, R^∇ mede o grau de não-comutatividade de ∇. Diz-se então que R^∇ é o *tensor curvatura* associado a ∇.

A composição (2.4) pode ser facilmente estendida a uma sequência de aplicações

$$\cdots \xrightarrow{d_{p-1}^\nabla} \mathcal{A}^p(X;\mathcal{E}) \xrightarrow{d_p^\nabla} \mathcal{A}^{p+1}(X;\mathcal{E}) \xrightarrow{d_{p+1}^\nabla} \cdots \tag{2.5}$$

onde a *derivada exterior covariante* é

$$d_p^\nabla(\alpha \otimes \eta) = d\alpha \otimes \eta + (-1)^p \alpha \wedge \nabla\eta, \quad \alpha \otimes \eta \in \mathcal{A}^p(X;\mathcal{E}).$$

Verifica-se então que, para $\beta \in \mathcal{A}^p(X;\mathcal{E})$,

$$d_{p+1}^\nabla d_p^\nabla \beta = R^\nabla \wedge \beta,$$

donde deduz-se facilmente que

$$d_2^\nabla R^\nabla = 0. \tag{2.6}$$

Esta é a famosa *identidade de Bianchi*. É possível ainda reexpressar a condição de compatibilidade satisfeita pela conexão de Levi-Civita em termos deste formalismo: se pensarmos na métrica como um elemento $g \in \mathcal{A}^1(X; T^*X)$, então a compatibilidade é equivalente a que valha

$$d_0^\nabla g = 0, \tag{2.7}$$

ou seja, g é paralela.

Recordemos agora a existência de um importante operador diferencial linear de segunda ordem atuando em seções de um fibrado Riemanniano com conexão compatível. Com efeito, se $\mathcal{E}$ é um tal fibrado, definimos, para $x, y \in \mathcal{X}(X)$ e $\eta \in \Gamma(\mathcal{E})$, o *operador Hessiano*:

$$\nabla^2_{x,y}\eta = \nabla_x \nabla_y \eta - \nabla_{\nabla_x y}\eta, \tag{2.8}$$

onde ∇ representa tanto a conexão em $\mathcal{E}$ como a conexão de Levi-Civita em X. É fácil verificar que ∇^2 é $\mathcal{D}(X)$-bilinear em (x, y). Isto permite definir o *Laplaciano de Bochner* $\nabla^*\nabla : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ por

$$\nabla^*\nabla\eta = -\mathrm{tr}\, \nabla_{\cdot,\cdot}\eta.$$

É fácil verificar, no caso em que X é fechada, que $\nabla^*\nabla$ é simétrico e não-negativo relativamente ao produto interno L^2 em $\Gamma(\mathcal{E})$. Mais precisamente, vale

$$(\nabla^*\nabla\eta, \eta') = (\nabla\eta, \nabla\eta'), \tag{2.9}$$

onde

$$(\nabla\eta, \nabla\eta') = \int_X \langle \nabla\eta, \nabla\eta' \rangle \nu_g$$

e

$$\langle \nabla\eta, \nabla\eta' \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathrm{e}_i}\eta, \nabla_{\mathrm{e}_i}\eta' \rangle,$$

onde $n = \dim X$ e $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1}^n$ é *qualquer* referencial ortonormal local tangente a X. Em particular, $(\nabla^*\nabla\eta, \eta) \geq 0$ e a igualdade acontece se, e somente se, η é *paralela*, ou seja, $\nabla_x \eta = 0$ para qualquer $x \in \mathcal{X}(X)$.

Observação 2.2.3. Se $\mathcal{E} = X \times \mathbb{R}$, de forma que $\Gamma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(X)$, então ∇^2 é de fato *simétrico* em (x, y) e $\nabla^*\nabla = \Delta_g : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$, o *Laplaciano* usual atuando em funções, associado à métrica g. Note que, de acordo com a convenção adotada aqui, $\Delta_g f = -f''$ se $X = \mathbb{R}$.

2.3 Geometria Riemanniana

Nesta seção suporemos que (X, g) é uma variedade Riemanniana, de modo que $g \in S^2(X)$ é positiva definida em qualquer $p \in X$. A conexão de Levi-Civita e o correspondente tensor de curvatura serão denotados por ∇_g e $-R_g$[3], respectivamente, ou simplesmente por ∇ e $-R$, quando não houver possibilidade de confusão.

Claramente, $R \in \mathcal{T}^{(1,3)}(X)$. É possível expressar este invariante em coordenadas locais. Assim, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é um sistema local de coordenadas em X e

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

é a base local correspondente para TX, os *coeficientes* de R em relação a x são definidos por

$$R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l,$$

onde adotamos aqui a convenção usual de somar sobre índices repetidos. Equivalentemente, pode-se usar a métrica para transformar R em um tensor do tipo $(0, 4)$, cujos coeficientes são

$$R_{ijkm} = \langle R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_k, \partial_m\rangle = g_{lm}R^l_{ijk},$$

onde

$$g_{lm} = g\left(\partial_l, \partial_m\right)$$

são os coeficientes de g relativamente a x. Obviamente, definições similares, que ilustram o esquema geral de descer e subir índices por meio de $g = \{g_{ij}\}$ e sua inversa $g^{-1} = \{g^{ij}\}$, respectivamente, aplicam-se a qualquer tensor sobre X.

Usando esta representação local de R, é fácil descrever suas simetrias algébricas, a saber,

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \tag{2.10}$$

e

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \tag{2.11}$$

que é conhecida como a *primeira identidade de Bianchi*.

O tensor curvatura é o invariante fundamental em Geometria Riemanniana no sentido que $R \equiv 0$ se, e somente se, (X, g) é *localmente plana*, ou seja, para cada $p \in X$ existe um sistema de coordenadas x em torno de p tal que $g_{ij} =$

[3] Por conveniência, adotaremos para a curvatura o sinal oposto àquele utilizado em [Sa].

δ_{ij} relativamente a x. Este invariante, porém, é reconhecidamente complicado do ponto de vista algébrico, de modo que é conveniente considerar invariantes definidos a partir de R com estrutura mais simples. Destaca-se aqui o *tensor de Ricci*, que é definido pela contração

$$\mathrm{Ric}_{jk} = R^i_{jik},$$

ou seja, em termos invariantes,

$$\mathrm{Ric}(z, w) = \mathrm{tr}\,(u \mapsto R_{z,u}w).$$

Vê-se que $\mathrm{Ric} \in S^2(X)$, ou seja, $\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}_{ji}$, o que decorre imediatamente de (2.10). Uma segunda contração, a saber,

$$\kappa = g^{jk}\mathrm{Ric}_{jk},$$

define a *curvatura escalar*. Assim, $\kappa_g = \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}_g$.

Verifica-se que

$$R^l_{ijk} = -\partial_i \Gamma^l_{jk} + \partial_j \Gamma^l_{ik} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{ip} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^l_{jp},$$

onde

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$

são os *símbolos de Christoffel*. Resulta então que tanto Ric como κ são invariantes tensoriais que, expressos num sistema de coordenadas qualquer, dependem das derivadas da métrica até segunda ordem, sendo esta dependência *linear* nas derivadas de segunda ordem. Um outro invariante com estas mesmas propriedades é o *tensor de Einstein*

$$E = \mathrm{Ric} - \frac{\kappa}{2} g, \tag{2.12}$$

que desempenha um papel fundamental na formulação matemática da Teoria de Relatividade Geral.

Outros invariantes podem ser obtidos a partir da chamada *decomposição ortogonal* do tensor curvatura [Be]. Para descrevê-la, definamos o *produto de Kulkarni-Nomizu* de dois tensores simétricos $h, k \in S^2(X)$ por

$$(h \odot k)(x, y, z, t) = h(x, z)k(y, t) + h(y, t)k(x, z) - h(x, t)k(y, z) - h(y, z)k(x, t). \tag{2.13}$$

Note que $h \odot k = k \odot h \in \mathcal{T}^{(0,4)}(X)$ possui as mesmas simetrias (algébricas) de R, a saber, (2.10) e (2.11). A aludida decomposição de R nos diz então que

$$R = \frac{\kappa}{2n(n-1)} g \odot g + \frac{1}{n-2} \mathrm{Ric}^0 \odot g + W, \tag{2.14}$$

onde

$$\mathrm{Ric}^0 = \mathrm{Ric} - \frac{\kappa}{n} g.$$

Em particular, (X, g) é uma *forma espacial*, ou seja, possui curvatura seccional *constante*, se, e somente se, $\mathrm{Ric}^0 = 0$ (isto é, (X, g) é *Einstein*) e $W = 0$.

A parcela W em (2.14) é o famoso *tensor de Weyl*, que na verdade é um invariante conforme da métrica no seguinte sentido: se $\tilde{g} = e^{2f} g$, para alguma função f, então $W_{\tilde{g}} = e^{2f} W_g$. Mais precisamente, verifica-se para $n \geq 4$ que $W \equiv 0$ se, e somente se, g é *localmente conformemente plana* no sentido que para qualquer $p \in X$ existe um sistema de coordenadas x em torno de p tal que $g = \lambda \sum_i dx_i^2$, para alguma função positiva λ. Levando-se em consideração que (2.14) pode ser reescrito como

$$R = A \odot g + W, \tag{2.15}$$

onde

$$A = \frac{1}{n-2} \left(\mathrm{Ric} - \frac{\kappa}{2(n-1)} g \right), \tag{2.16}$$

é o *tensor de Schouten*, resulta então que todas as informações a respeito de mudanças conformes de métricas estão concentradas em A. Esta observação desempenha um papel central na formulação do problema σ_k-Yamabe; veja a Seção 5.1.

Encerraremos esta breve revisão de Geometria Riemanniana recordando algumas fórmulas do tipo Weitzenböck que serão úteis posteriormente. Isto aparece quando consideramos, no contexto da sequência (2.5), o chamado *laplaciano de Hodge* $\Delta^\nabla : \mathcal{A}^r(X; \mathcal{E}) \to \mathcal{A}^r(X; \mathcal{E})$, definido por

$$\Delta^\nabla = d^\nabla \delta^\nabla + \delta^\nabla d^\nabla,$$

onde δ^∇ é o adjunto de d^∇ no sentido do produto interno L^2. Uma decomposição do tipo

$$\Delta^\nabla = \nabla^* \nabla + \mathcal{K},$$

onde $\mathcal{K} : \mathcal{A}^r(X; \mathcal{E}) \to \mathcal{A}^r(X; \mathcal{E})$ é um endomorfismo *algébrico* que somente depende dos tensores de curvatura R e R^∇, é então chamada *de Weitzenböck*.

O exemplo mais simples de tal decomposição acontece quando $r = 1$ e $\mathcal{E} = \underline{\mathbb{R}}$, o fibrado de retas trivial. Neste caso, $\Delta^{\nabla} : \mathcal{A}^1(X) \to \mathcal{A}^1(X)$ satisfaz

$$\Delta^{\nabla} = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric}_g. \tag{2.17}$$

Um outro exemplo útil acontece em razão da identificação

$$\mathcal{T}^{(0,2)}(X) = \mathcal{A}^1(X; \Lambda^1(X)),$$

de maneira que $\mathcal{E} = \Lambda^1(X)$ em (2.5). Neste caso, a restrição de Δ^{∇} a $S^2(X)$ expressa-se como

$$\Delta^{\nabla} h = \nabla^*\nabla h - \overset{\circ}{R}_g h + h \circ \mathrm{Ric}_g, \quad h \in S^2(X), \tag{2.18}$$

onde, em termos de um referencial ortonormal local $\{e_i\}$,

$$(h \circ k)(x, y) = \sum_{i=1}^{n} h(x, e_i) k(e_i, y), \quad h, k \in S^2(X), \tag{2.19}$$

e

$$(\overset{\circ}{R}_g h)(x, y) = \sum_{i=1}^{n} h(R_g(x, e_i)y, e_i). \tag{2.20}$$

2.4 Os tensores de Lovelock e as curvaturas de Gauss-Bonnet

Definiremos agora invariantes Riemannianos que generalizam tanto o tensor de Einstein como a curvatura escalar. Para tanto, recordemos inicialmente o *operador divergência* $\mathrm{div} = \mathrm{div}_g : S^r(X) \to S^{r-1}(X)$ dado por

$$(\mathrm{div}\, T)_{i_2 \cdots i_r} = g^{ij} \nabla_i T_{j i_2 \cdots i_r} = \nabla_i T^i_{i_2 \cdots i_r},$$

onde $\nabla_i T = \nabla_{\partial_i} T$ é a derivada covariante. Observemos que no contexto Riemanniano, (2.6) transforma-se na *segunda identidade de Bianchi*:

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0, \tag{2.21}$$

de forma que contraindo-se isto duas vezes obtem-se

$$\mathrm{div}\, \mathrm{Ric} = \frac{d\kappa}{2},$$

ou equivalentemente, o tensor de Einstein (2.12) possui divergência nula:

$$\operatorname{div} E = 0. \tag{2.22}$$

Nossa intenção agora é apontar a existência de uma família natural de tensores $L_{2k} \in S^2(X)$, $1 \leq k \leq [(n-1)/2]$, os *tensores de Lovelock*, que possuem divergência nula e generalizam o tensor de Einstein no sentido que L_2 e E são proporcionais.

Recordemos que, dados um campo de vetores $z \in \mathcal{X}(X)$ e um elemento de volume local Ω, tem-se

$$di_z\Omega = di_z\Omega + i_z d\Omega = \mathcal{L}_z\Omega = (\operatorname{div} z)\Omega,$$

onde i_z é a contração com z, e $\mathcal{L}_z$ é a derivada de Lie. Desse modo, a correspondência $z \leftrightarrow \omega = i_z\Omega$ define um isomorfismo entre $T^*X = TX$ e $\Lambda^{n-1}(X)$ de forma que $\operatorname{div} z = 0$ se, e somente se, $d\omega = 0$. Similarmente, a correspondência $z_1 \otimes z_2 \leftrightarrow i_{z_1}\Omega \otimes i_{z_2}\Omega$ define um isomorfismo entre $\otimes^{(0,2)}TX$ e $\Lambda^{n-1}(X)\otimes\Lambda^{n-1}(X)$, o fibrado das $(n-1)$-formas com valores nas $(n-1)$-formas, que está globalmente bem definido mesmo se X não é orientável. Mais ainda, a restrição desta construção a $\operatorname{Sym}^2(X) \subset \otimes^{(0,2)}TX$ define um isomorfismo entre $\operatorname{Sym}^2(X)$ and $\operatorname{Sym}^2(\Lambda^{n-1}(X))$, onde $\eta \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^p(X)) \subset \Lambda^p(X) \otimes \Lambda^p(X)$ se, e somente se,

$$\eta(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \otimes w_1 \wedge \ldots \wedge w_p) = \eta(w_1 \wedge \ldots \wedge w_p \otimes v_1 \wedge \ldots \wedge v_p).$$

A seguir, escreveremos

$$S^2(\Lambda^p(X)) = \Gamma(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^p(X))).$$

Ora, um cálculo simples mostra que $T \in S^2(X)$ satisfaz $\operatorname{div} T = 0$ se, e somente se, a seção correspondente $\eta \in S^2(\Lambda^{n-1}(X)) \subset \mathcal{A}^{n-1}(X, \Lambda^{n-1}(X))$ cumpre $d^\nabla\eta = 0$, onde d^∇ é a derivada exterior covariante definida na Seção 2.2. Notando que $g \in S^2(X) = S^2(\Lambda^1(X))$ e $R \in S^2(\Lambda^2(X))$, definimos

$$\tilde{L}_{2k} = R \wedge \overset{k}{\ldots} \wedge R \wedge g \wedge \ldots \wedge g \in S^2(\Lambda^{n-1}(X)), \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{2.23}$$

Assim, por (2.6) e (2.7), $d^\nabla \tilde{L}_{2k} = 0$ e concluímos que o correspondente tensor $L_{2k} \in S^2(X)$ satisfaz $\operatorname{div} L_{2k} = 0$. Estes são, precisamente, os *tensores de Lovelock*.

Em geral, vale a expansão local

$$(L_{2k})^i_j = d_{n,k}\delta^{ii_1i_2\ldots i_{2k-1}i_{2k}}_{jj_1j_2\cdots j_{2k-1}j_{2k}} R^{j_1j_2}_{i_1i_2}\ldots R^{j_{2k-1}j_{2k}}_{i_{2k-1}i_{2k}}, \tag{2.24}$$

onde $d_{n,k}$ é uma constante universal, δ representa o símbolo de Kronecker generalizado e R^{ij}_{kl} são os coeficientes de R (visto como um elemento de $\mathcal{T}^{(2,2)}(X)$) relativamente a um referencial ortonormal local. Daí vê-se facilmente que L_2 é proporcional ao tensor de Einstein (2.12), como desejado. Além disso, se contraírmos (2.24) em i e j, obteremos o escalar

$$\kappa_{2k} = e_{n,k}\delta^{i_1i_2\ldots i_{2k-1}i_{2k}}_{j_1j_2\cdots j_{2k-1}j_{2k}} R^{j_1j_2}_{i_1i_2}\ldots R^{j_{2k-1}j_{2k}}_{i_{2k-1}i_{2k}}, \tag{2.25}$$

a chamada $2k$-*curvatura de Gauss-Bonnet*. Note que κ_2 é a contração total de R, sendo por conseguinte um múltiplo de κ. Desta forma, as curvaturas de Gauss-Bonnet generalizam a curvatura escalar e reduzem-se a esta quando $k = 1$.

É importante salientar que os tensores de Lovelock admitem uma interessante caracterização que traduz a naturalidade de sua construção. Para explicar isto, diremos que $T \in \mathcal{T}^{(p,q)}(X)$ é *natural* se, relativamente a um sistema de coordenadas, seus coeficientes se expressam como

$$T^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q} = F^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q}(g_{ij}, g^{ij}, \partial g_{ij}, \ldots, \partial^m g_{ij}),$$

onde $F^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q}$ é uma função polinomial em suas entradas. Exigimos ainda que $F^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_q}$ seja *universal*, no sentido que seu 'formato' *não* depende da escolha de coordenadas. Assim, os coeficientes dependem das derivadas da métrica até ordem $m \geq 0$ da maneira especificada. Diz-se então que m é a *ordem* de T. Note que os tensores de Lovelock são naturais de segunda ordem. O resultado a seguir, demonstrado em [Lo], caracteriza os tensores de Lovelock em termos destes conceitos.

Teorema 2.4.1. *Se $T \in S^2(X)$ é um tensor natural de segunda ordem satisfazendo $\operatorname{div} T = 0$, então T é uma combinação linear dos tensores de Lovelock. Mais precisamente,*

$$T = \sum_{k\geq 0} c_k L_{2k},$$

onde, por convenção, $L_0 = g$.

2.5 Formas duplas

Nesta seção mostraremos como os tensores de Lovelock e as curvaturas de Gauss-Bonnet, definidas na seção anterior, podem ser recuperadas por meio do conceito de *formas duplas*[4]. Para tanto, seja X uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 3$. Como sempre, denotaremos por $\mathcal{A}^r(X)$ o espaço das r-formas diferenciais sobre X. Lembremos que $\mathcal{A}^r(X)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{D}(X)$ das funções suaves em X.

Definição 2.5.1. *O espaço das formas duplas de bi-grau* (r, s) *é definido por*

$$\mathcal{A}^{r,s}(X) = \mathcal{A}^r(X) \otimes_{\mathcal{D}(X)} \mathcal{A}^s(X).$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{A}^{r,s}(X) = \Gamma(\Lambda^{r,s}(X)),$$

onde

$$\Lambda^{r,s}(X) = \Lambda^r(X) \otimes \Lambda^s(X).$$

Também definimos

$$\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X) = \oplus_{r,s\geq 0}\mathcal{A}^{r,s}(X).$$

Vê-se então que $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X)$ é uma álgebra associativa unitária e bi-graduada, chamada a *álgebra das formas duplas*.

Por exemplo, qualquer forma bilinear sobre vetores tangentes é uma $(1,1)$-forma[5]. Em particular, uma métrica Riemanniana g em X é uma $(1,1)$-forma. Mais ainda, o tensor curvatura R_g de g pode ser visto como uma $(2,2)$-forma. De fato, se definirmos $\mathcal{C}^r(X) \subset \mathcal{A}^{r,r}(X)$ como o espaço de (r,r)-formas satisfazendo à condição de simetria

$$\omega(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \otimes y_1 \wedge \ldots \wedge y_r) = \omega(y_1 \wedge \ldots \wedge y_r \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_r),$$

então qualquer forma bi-linear simétrica (g, em particular) pertence a $\mathcal{C}^1(X)$ e, evidentemente, $R_g \in \mathcal{C}^2(X)$ pelas suas simetrias[6]. Mais informações sobre formas duplas podem ser encontradas em [L1], [L2] e [G].

[4] Veremos no Capítulo 3 que este formalismo é bastante eficiente do ponto de vista computacional.

[5] Note que, restrito a $\mathcal{A}^{1,1}(X)$, o produto em $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X)$ coincide com o produto de Kulkarni-Nomizu já introduzido.

[6] Nesta notação, $\mathcal{C}^1(X) = S^2(X)$.

Consideremos uma variedade Riemanniana (X, g) fechada. Então a multiplicação pela métrica define uma aplicação $g : \mathcal{A}^{r-1,s-1}(X) \to \mathcal{A}^{r,s}(X)$. Além disso, o *operador de contração* $c_g : \mathcal{A}^{r,s}(X) \to \mathcal{A}^{r-1,s-1}(X)$ é definido por

$$c_g\omega(x_1\wedge\ldots\wedge x_{r-1}\otimes y_1\wedge\ldots\wedge y_{r-1}) = \sum_i \omega(e_i\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_{r-1}\otimes e_i\wedge y_1\wedge\ldots\wedge y_{r-1}),$$

onde $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal local. Vê-se facilmente que g and c_g são tensoriais e pode-se verificar que estes operadores são adjuntos entre si em relação ao produto interno natural definido a partir de g em

$$\Lambda^{\bullet,\bullet}(X)_p = \oplus_{r,s\geq 0}\Lambda^{r,s}(X)_p, \quad p \in X.$$

Mais ainda, estes operadores satisfazem à seguinte *regra de comutação*, estabelecida em [L2]: para $\eta \in \mathcal{A}^{r,s}(X)$, vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!}c_g^l g^m \eta &= \frac{1}{m!} g^m c_g^l \eta + \\ &+ \sum_{q=1}^{\min\{l,m\}} C_q^l \prod_{i=0}^{q-1}(n-r-s+l-m-i)\frac{g^{m-q}}{(m-q)!}c_g^{l-q}\eta, \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde C_q^l é o coeficiente binomial usual. Merece atenção aqui o caso especial

$$c_g g\eta = g c_g \eta + (n-r-s)\eta, \qquad \eta \in \mathcal{A}^{r,s}(X). \tag{2.27}$$

Estas identidades desempenharão importante papel em cálculos a serem efetuados no Capítulo 3.

Observação 2.5.2. Usando a linguagem de formas duplas, o fato de uma variedade Riemanniana (X, g) possuir curvatura seccional constante $\mu \in \mathbb{R}$ é caracterizado pela identidade $R_g = \frac{\mu}{2}g^2$.

A contração pode ser usada para escrever o tensor de Ricci e a curvatura escalar de (X, g) como $\mathrm{Ric}_g = c_g R_g$ e $\kappa_g = c_g^2 R_g$. Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.5.3. *Para* $1 \leq k \leq n/2$*, definimos o* tensor $2k$-Ricci *e a* $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet*, respectivamente, por*

$$\mathcal{R}_g^{(2k)} = c_g^{2k-1}R_g^k, \quad \mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{1}{(2k)!}c_g^{2k}R_g^k. \tag{2.28}$$

Note que, no caso das curvaturas de Gauss-Bonnet, a normalização que adotaremos a partir de agora difere por uma constante da escolhida na definição anterior; veja a Seção 2.3. De fato, $\mathcal{S}_g^{(2)} = \kappa_g/2$ e, mais geralmente, $\mathcal{S}^{(2k)} = e_{n,k}\kappa_{2k}$, para alguma constante $e_{n,k} > 0$. Por outro lado, $\mathcal{R}_g^{(2)} = \mathrm{Ric}_g$.

De posse destes conceitos, é possível reescrever os tensores de Lovelock na forma $L_{2k} = f_{n,k}\mathcal{J}^{(2k)}$, onde

$$\mathcal{J}_g^{(2k)} = \frac{\mathcal{R}_g^{(2k)}}{(2k-1)!} - \mathcal{S}_g^{(2k)} g. \tag{2.29}$$

Os tensores $\mathcal{J}^{(2k)}$ também serão doravante denominados *de Lovelock*.

A definição a seguir desempenha um papel central no Capítulo 3.

Definição 2.5.4. *[L2] Diremos que (X, g) é $2k$-*Einstein *se existe uma função suave λ em X tal que*

$$\mathcal{R}_g^{(2k)} = \lambda g. \tag{2.30}$$

Assim, 2-Einstein significa precisamente que (X, g) é Einstein no sentido usual. Mostraremos na Proposição 2.7.8 que as métricas $2k$-Einstein são pontos críticos para o *funcional de Einstein-Hilbert-Lovelock* definido por

$$\mathcal{F}^{(2k)}(g) = \int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} \nu_g,$$

restrito ao espaço $\mathcal{M}_1(X)$ das métricas de volume unitário em X. Aqui, ν_g é o elemento de volume de g. Exemplos de variedades $2k$-Einstein incluem as formas espaciais e as variedades homogêneas isotropicamente irredutíveis. Mais ainda, se $2k = n$, então *qualquer* métrica em X é $2k$-Einstein, pois neste caso $\mathcal{S}_g^{(n)}$ é, a menos de uma constante, o integrando de Gauss-Bonnet. Assim, podemos admitir a partir de agora que $n > 2k$.

Proposição 2.5.5. *Se $n > 2k$ e (X, g) é $2k$-Einstein, então λ é constante. Em particular, $\mathcal{S}_g^{(2k)}$ é constante.*

Demonstração. Note que $\mathrm{div}\,\mathcal{J}^{(2k)} = 0$ (que segue das considerações acima ou da Proposição 2.7.7) equivale a

$$\mathrm{div}\,\mathcal{R}^{(2k)} = (2k-1)!\,d\mathcal{S}^{(2k)}.$$

Combinando isto com (2.30), vê-se então que a função

$$\mu = \lambda - (2k-1)!\mathcal{S}^{(2k)}$$

é constante. Por outro lado, como

$$\mathrm{tr}_g \mathcal{R}_g^{(2k)} = \langle c_g^{2k-1} R_g^k, g\rangle = c_g^{2k} R_g^k = (2k)! \mathcal{S}_g^{(2k)}, \tag{2.31}$$

tem-se, novamente por (2.30),

$$\lambda = \frac{(2k)!}{n} \mathcal{S}_g^{(2k)}, \tag{2.32}$$

e o resultado segue. □

O formalismo acima pode ser usado para isolar uma classe de variedades Riemannianas que desempenhará um papel central neste trabalho.

Definição 2.5.6. *[T] Dado $k \geq 2$, diremos que (X, g) possui* $(2k-2)$-curvatura seccional constante *se existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$R^{k-1} = \mu_k g^{2k-2}. \tag{2.33}$$

O caso $k = 2$ corresponde às formas espaciais; veja a Observação 2.5.2. Em geral, a condição (2.33) pode ser geometricamente interpretada da seguinte forma. Dado um $(2k-2)$-plano tangente $\mathfrak{p} \subset T_pX$, $p \in X$, sabemos que existe uma vizinhança $U \subset \mathfrak{p}$ contendo a origem tal que $\exp_p U \subset X$ é uma subvariedade mergulhada que é totalmente geodésica em p. Assim, podemos associar a cada $\mathfrak{p}$ a $(2k-2)$-curvatura de Gauss-Bonnet de $\exp_p U$ em p. Diz-se que este número é a $(2k-2)$-*curvatura seccional* de X em p na direção de $\mathfrak{p}$, denotada por $K(p, \mathfrak{p})$[7].

Proposição 2.5.7. *[T] Para uma variedade Riemanniana (X, g), (2.33) acontece se, e somente se, $K(p, \mathfrak{p})$* não *depende do par $(p, \mathfrak{p})$.*

2.6 Operadores e complexos diferenciais

Desenvolveremos nesta seção a teoria de deformação de operadores e complexos elípticos que necessitaremos neste trabalho. Este material será utilizado, por exemplo, na Seção 3.1 para estudar a teoria de deformação de estruturas de Einstein.

[7] Na literatura, este invariante também é conhecido como a *curvatura de Lipschitz-Killing*.

Sejam X uma variedade diferenciável e $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ fibrados vetoriais sobre X. Uma aplicação linear $Q : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E}')$ é um operador diferencial linear (o.d.l.) de ordem m se, localmente, pode ser escrita como

$$(Q\eta)_i = \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{j=1}^{r=\mathfrak{p}(\mathcal{E})} a_\alpha^{ij}(p)\partial^\alpha \eta_j, \qquad i = 1, \ldots, r' = \mathfrak{p}(\mathcal{E}'),$$

onde p varia sobre o domínio U de um sistema de coordenadas locais x em X de modo que $\mathcal{E}|_U$ and $\mathcal{E}'|_U$ são triviais, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ e $Q\eta = ((Q\eta)_1, \ldots, (Q\eta)_{r'})$ são as expressões relativamente às trivializações, a_α^{ij} são funções suaves (com algum $a_\alpha^{ij} \not\equiv 0$, $|\alpha| = m$) e $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. O conjunto de todos os o.d.l.'s de ordem m será denotado por $\mathrm{ODL}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Dada a expressão local acima para Q, podemos definir, para $p \in U$, a aplicação linear $\sigma_Q(p,\xi) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r'}$,

$$(\sigma_Q(p,\xi)(v))_i = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{j=1}^{r} a_\alpha^{ij}(p)\xi^\alpha v_j, \qquad i = 1, \ldots, r'.$$

Se considerarmos (p, ξ) como coordenadas locais em T^*X, esta construção pode ser globalizada para gerar um homomorfismo fibrado $\sigma_Q : \pi^*\mathcal{E} \to \pi^*\mathcal{E}'$, onde $\pi : T^*X \to X$ é a projeção usual. Diremos então que Q é *elíptico* se σ_Q, o *símbolo* de Q, é um isomorfismo fibrado *fora* da seção nula $X \subset T^*X$. Note que isto implica, em particular, que $r = r'$. O conjunto de todos os o.d.l.'s elípticos de ordem m será denotado por $\mathrm{Ell}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Dadas uma métrica Riemanniana em X (que supomos fechada a partir de agora) e métricas em $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$, vemos que o.d.l.'s aparecem em pares. Mais precisamente, se $Q \in \mathrm{ODL}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, então existe $Q^* \in \mathrm{ODL}_m(\mathcal{E}', \mathcal{E})$, completamente determinado por Q e pelas escolhas de métricas, tal que

$$(Q\eta, \eta') = (\eta, Q^*\eta'), \qquad \eta \in \Gamma(\mathcal{E}),\ \ \eta' \in \Gamma(\mathcal{E}'),$$

onde $(\,,)$ é o produto interno L^2 usual. Diz-se então que Q^* é o *adjunto formal* de Q. É fácil verificar que vale a identidade pontual $\sigma_{P^*} = \sigma_P^*$, de forma que Q é elíptico se, e somente se, Q^* também o é. Neste contexto, se $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ e $P = P^*$ diremos então que P é *auto-adjunto*. Mais ainda, vale

$$\sigma_{Q'Q} = \sigma_{Q'} \circ \sigma_Q, \tag{2.34}$$

para $Q \in \mathrm{ODL}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ e $Q' \in \mathrm{ODL}_{m'}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$.

Exemplo 2.6.1. Seja $\mathcal{E} \to X$ um fibrado vetorial e $\nabla : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(T^*X \otimes \mathcal{E})$ uma conexão. Então ∇ é um o.d.l. de ordem 1 com $\sigma_\nabla(p,\xi)(v) = \xi \otimes v$. Portanto, ∇ não é elíptico, mas seu símbolo é injetivo (fora da seção nula). Se X e $\mathcal{E}$ são Riemannianos, podemos considerar o operador adjunto $\nabla^* : \Gamma(T^*X \otimes \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$ e a composição $\nabla^* \circ \nabla : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E})$. É fácil ver então que $\nabla^* \circ \nabla = \nabla^*\nabla$, o Laplaciano de Bochner associado a ∇. Evidentemente, $\nabla^*\nabla$ é um operador elíptico e auto-adjunto de segunda ordem, pois $\sigma_{\nabla^*\nabla}(p,\xi)(v) = -|\xi|^2 v$.

Para cada $s \in \mathbb{R}$, seja $H^s(\mathcal{E})$ o espaço de Sobolev de ordem s de seções de $\mathcal{E}$. Então cada $Q \in \mathrm{ODL}_m(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ estende-se unicamente a uma aplicação linear contínua

$$Q_s : H^s(\mathcal{E}) \to H^{s-m}(\mathcal{E}').$$

Mais ainda, se Q é elíptico, pode-se usar operadores pseudo-diferenciais para inverter cada Q_s a menos de operadores suavizantes [LM], [W]. Mais precisamente, diremos que $Q : \Gamma(\mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{E}')$ é *Sobolev* de ordem $m \in \mathbb{R}$ (Notação: $P \in \mathrm{Sob}_m(\mathcal{E},\mathcal{E}')$) se Q estende-se continuamente a $Q_s : H^s(\mathcal{E}) \to H^{s-m}(\mathcal{E}')$ para qualquer s. O teorema de inversão a que nos referimos afirma que para cada $Q \in \mathrm{Ell}_m(\mathcal{E},\mathcal{E}') \subset \mathrm{Sob}_m(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ existe $R \in \mathrm{Sob}_{-m}(\mathcal{E}',\mathcal{E})$ tal que

$$QR = I + K', \quad RQ = I + K,$$

onde $K \in \cap_k \mathrm{Sob}_k(\mathcal{E})$ e $K' \in \cap_k \mathrm{Sob}_k(\mathcal{E}')$.

Pelo Teorema de Rellich, K e K' são operadores compactos e assim Q_s é Fredholm para cada s. Isto significa, por definição, que $\dim\ker Q_s < \infty$, $\mathrm{im}\, Q_s \subset H^{s-m}(\mathcal{E}')$ é fechado e $\dim\mathrm{coker}\, Q_s < +\infty$, de forma que o *índice de Fredholm* de Q_s,

$$\mathrm{ind}\, Q_s = \dim\ker Q_s - \dim\mathrm{coker}\, Q_s,$$

está bem definido. Para eliminar a dependência deste invariante em relação a s, notemos que, pelo Teorema de Sobolev, $\mathrm{im}\, K \subset \Gamma(\mathcal{E})$, de forma que se $\eta \in \ker Q_s$, então $\eta = -K\eta$; logo, $\eta \in \Gamma(\mathcal{E})$. Assim, $\ker Q_s$ é constituído por seções suaves e, portanto, *não* depende do parâmetro s. Este subespaço comum será denotado simplesmente por $\ker Q$. Na presença de estruturas métricas vale o isomorfismo $\mathrm{coker}\, Q \cong \ker Q^*$, donde

$$\mathrm{ind}\, Q = \dim\ker Q - \dim\ker Q^*,$$

o *índice* de Q, está bem definido.

Acontece que o invariante $\mathrm{ind} : \mathrm{Ell}_m(\mathcal{E},\mathcal{E}') \to \mathbb{Z}$ é extremamente robusto por deformações contínuas de operadores elípticos. Para explicar este ponto, sejam $Q_0, Q_1 \in \mathrm{Ell}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. Diremos então que σ_{Q_0} e σ_{Q_1} são *regularmente homotópicos* se existe uma família a um parâmetro de homomorfismos fibrados $t \in [0,1] \mapsto \sigma_t \in \mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{E}, \pi^*\mathcal{E}')$ satisfazendo:

1. σ_t é contínua em t;
2. $\sigma_0 = \sigma_{Q_0}$ e $\sigma_1 = \sigma_{Q_1}$;
3. Para cada $t \in (0,1)$, σ_t é um isomorfismo fora da seção nula.

A proposição a seguir esclarece em que sentido o índice é um invariante robusto; veja [LM] para uma demonstração.

Proposição 2.6.2. *Se* $Q_0, Q_1 \in \mathrm{Ell}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ *com símbolos regularmente homotópicos, então* $\operatorname{ind} Q_0 = \operatorname{ind} Q_1$. *Em particular,* $\operatorname{ind} Q_0 = 0$ *se* Q_1 *é auto-adjunto.*

Para nossos propósitos, é conveniente generalizar a teoria acima, seguindo a prescrição de [AB]. Para tanto, consideremos uma sequência finita de fibrados métricos $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}^j\}_{j=0}^d$ sobre uma variedade Riemanniana X. Diremos então que

$$(\mathcal{E}, Q): \quad \cdots \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}^j) \xrightarrow{Q_j} \Gamma(\mathcal{E}^{j+1}) \longrightarrow \cdots,$$

onde cada Q_j é um o.d.l. de ordem $m_j > 0$, é um *complexo elíptico* se:

1. $Q_{j+1} \circ Q_j = 0$, para qualquer j;
2. A sequência de símbolos

   $$\sigma_Q: \quad \cdots \longrightarrow \pi^*\mathcal{E}^j \xrightarrow{\sigma_{Q_j}} \pi^*\mathcal{E}^{j+1} \longrightarrow \cdots$$

   é exata fora da seção nula.

Note que $Q \in \mathrm{Ell}_m(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ se, e somente se,

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}) \xrightarrow{Q} \Gamma(\mathcal{E}') \longrightarrow 0$$

é um complexo elíptico. Assim, o conceito de complexo elíptico de fato generaliza aquele de operador elíptico. Reciprocamente, a cada complexo elíptico $(\mathcal{E}, Q)$ podemos naturalmente associar um o.d.l. do seguinte modo. Definamos $\mathcal{E}^+ = \oplus_j \mathcal{E}^{2j}$, $\mathcal{E}^- = \oplus_j \mathcal{E}^{2j+1}$ e

$$Q^+ : \Gamma(\mathcal{E}^+) \to \Gamma(\mathcal{E}^-)$$

pondo $Q^+ = \oplus_j Q_{2j} + \oplus_j Q^*_{2j+1}$. Resulta então que Q^+ é elíptico e

$$\operatorname{ind} Q^+ = \chi(\mathcal{E}, Q),$$

onde

$$\chi(\mathcal{E}, Q) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(\mathcal{E}, Q)$$

é a *característica de Euler* de $(\mathcal{E}, Q)$. Aqui,

$$H^j(\mathcal{E}, Q) = \frac{\ker Q_j}{\operatorname{Im} Q_{j-1}}$$

é o i-*ésimo grupo de cohomologia* de $(\mathcal{E}, Q)$[8].

À semelhança do que acontece com o índice, a característica de Euler é extremamente robusta em relação à deformações contínuas do complexo. Para explicar isto, sejam $(\mathcal{E}, Q_i)$, $i = 0, 1$, complexos elípticos. Diremos então que as sequências de símbolos σ_{Q_0} e σ_{Q_1} são *regularmente homotópicas* se existe uma família a um parâmetro de homomorfismos fibrados

$$\sigma^{(t)} : \quad \cdots \longrightarrow \pi^*\mathcal{E}^j \xrightarrow{\sigma_j^{(t)}} \pi^*\mathcal{E}^{j+1} \longrightarrow \cdots$$

satisfazendo:

1. $\sigma^{(t)}$ depende continuamente de $t \in [0, 1]$;
2. $\sigma^{(0)} = \sigma_{Q_0}$ e $\sigma^{(1)} = \sigma_{Q_1}$;
3. Para cada $t \in (0, 1)$, $\sigma^{(t)}$ é exata fora da seção nula.

Note que, neste caso, os símbolos $\sigma_{Q_0^+}$ e $\sigma_{Q_1^+}$ são regularmente homotópicos e a discussão acima implica imediatamente a proposição a seguir.

Proposição 2.6.3. *Se* $(\mathcal{E}, Q_i)$, $i = 0, 1$, *são complexos elípticos cujas sequências de símbolos são regularmente homotópicas, então* $\chi(\mathcal{E}, Q_0) = \chi(\mathcal{E}, Q_1)$.

[8] Implícito nesta discussão está o fato que os grupos de cohomologia de um complexo elíptico possuem dimensão finita. Isto decorre da teoria de Hodge para tais complexos; veja [AB], [LM] e [W].

2.7 Funcionais geométricos

Seja X uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Denotaremos então por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das métricas Riemannianas suaves em X e por $\mathcal{M}_1(X)$ o subconjunto das métricas de volume unitário. Assim, $g \in \mathcal{M}_1(X)$ se, e somente se,

$$\int_X \nu_g = 1,$$

onde ν_g é o elemento de volume de g.

Em relação à topologia compacto-aberta C^∞, $\mathcal{M}(X)$ é um cone aberto e convexo que tem $\mathcal{M}_1(X)$ como base. Em particular, se $g \in \mathcal{M}(X)$ e $h \in S^2(X)$, então $g + th \in \mathcal{M}(X)$ se $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, se $g \mapsto B_g$ é um invariante Riemanniano (tomando valores no espaço de seções de algum fibrado vetorial), então faz sentido definir sua *linearização* em g na direção de h por

$$\dot{B}_g h = \lim_{t \to 0} \frac{B_{g+th} - B_g}{t}. \tag{2.35}$$

A proposição a seguir descreve as linearizações de alguns invariantes Riemannianos considerados anteriormente. Para tanto, precisamos introduzir o *Laplaciano de Lichnerowicz*, $\Delta_L : S^2(X) \to S^2(X)$, dado por

$$\Delta_L h = \nabla^* \nabla h + \mathrm{Ric}_g \circ h + h \circ \mathrm{Ric}_g - 2 \overset{\circ}{R}_g h, \tag{2.36}$$

onde

$$(h \circ k)(x, y) = \sum_{i=1}^{n} h(x, e_i) k(e_i, y), \tag{2.37}$$

e

$$(\overset{\circ}{R}_g h)(x, y) = \sum_{i=1}^{n} h(R_g(x, e_i)y, e_i), \tag{2.38}$$

com $\{e_i\}$ sendo um referencial ortonormal; compare com (2.19) e (2.20). Consideraremos ainda o *operador de Bianchi* $\beta_g : S^2(X) \to \mathcal{A}^1(X)$,

$$\beta_g h = \delta_g h + \frac{1}{2} d\mathrm{tr}_g h, \tag{2.39}$$

onde

$$\delta_g = -\mathrm{div}_g. \tag{2.40}$$

Proposição 2.7.1. *Se $g \in \mathcal{M}(X)$ e $h \in S^2(X)$, então vale*

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - \mathcal{L}_{(\beta_g h)^\sharp} g\right), \tag{2.41}$$

onde $\omega^\sharp \in \mathcal{X}(X)$ é o campo de vetores dual a $\omega \in \mathcal{A}^1(X)$ e $\mathcal{L}$ é a derivada de Lie. Mais ainda,

$$\dot{\kappa}_g h = \Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g \delta_g h - \langle \mathrm{Ric}_g, h\rangle. \tag{2.42}$$

Se $D(X)$ é o grupo dos difeomorfismos suaves de X, então existe uma ação natural $\xi : (\mathbb{R}^+ \times D(X)) \times \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$,

$$\xi((t,\phi), g) = t\phi^* g.$$

Obviamente, duas métricas numa mesma órbita desta ação possuem as mesmas propriedades geométricas. Podemos ainda considerar a restrição $\xi_1 : D(X) \times \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$, com $\xi_1 = \xi|_{\{1\}\times D(X)}$. Vê-se então que classes de isometrias de métricas correspondem a elementos de $\mathcal{M}(X)/D(X)$, enquanto que classes de métricas *globalmente* homotéticas correspondem a elementos de $\mathcal{M}_1(X)/D(X)$. Os elementos de $\mathcal{M}_1(X)/D(X)$ são chamados de *estruturas Riemannianas*.

Um problema fundamental em Geometria Riemanniana consiste em entender o conjunto de estruturas Riemanninas numa determinada variedade X satisfazendo alguma condição de natureza geométrica (Einstein, $2k$-Einstein, etc.). Com este intuito em mente, faz-se necessário entender a estrutura do espaço de órbitas $\mathcal{M}_1(X)/D(X)$ numa vizinhança de alguma métrica g. Comecemos procurando elucidar o que acontece do ponto de vista infinitesimal. Ora, é fácil ver que, pelo menos do ponto de vista formal, o espaço tangente à órbita

$$O(g) = \{\xi_1(\phi, g); \phi \in D(X)\}, \quad g \in \mathcal{M}_1(X),$$

é dado por

$$T_g O(g) = \{\mathcal{L}_{\omega^\sharp} g; \omega \in \mathcal{A}^1(X)\}.$$

Assim, $T_g O(g) = \mathrm{im}\, \delta_g^*$, onde $\delta_g^* : \mathcal{A}^1(X) \to S^2(X)$ é o o.d.l. de primeira ordem dado por

$$\delta_g^* \omega = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\omega^\sharp} g.$$

A notação para δ_g^* justifica-se pelo fato que este operador é, no caso em que X é fechada, o adjunto formal do o.d.l. $\delta_g : S^2(X) \to \mathcal{A}^1(X)$ definido em (2.40).

Localmente, temos

$$(\delta_g^*\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i\omega_j + \nabla_j\omega_i),$$

de modo que $\sigma_{\delta_g^*}$, o símbolo de δ_g^*, é injetivo (fora da seção nula). Resulta então de (2.34) que $\delta_g\delta_g^* : \mathcal{A}^1(X) \to \mathcal{A}^1(X)$ é elíptico e um argumento de Berger e Ebin [BE] garante a existência da decomposição

$$S^2(X) = \operatorname{im}\delta_g^* \oplus \ker\delta_g, \tag{2.43}$$

que é ortogonal com respeito ao produto interno L^2. Como $T_g\mathcal{M}(X) = S^2(X)$ (resp. $T_g\mathcal{M}_1(X) = \{h \in S^2(X)\,;\, \int_X \operatorname{tr}_g h\nu_g = 0\}$), resulta que (2.43) determina explicitamente o complemento ortogonal de $T_gO(g)$ em $T_g\mathcal{M}(X)$ (resp. $T_g\mathcal{M}_1(X)$), a saber, $\ker\delta_g$ (resp. $T_g\mathcal{M}_1(X)\cap\ker\delta_g$).

Observação 2.7.2. É importante mencionar que, por um resultado de Ebin [E], a parcela $T_g\mathcal{M}_1(X)\cap\ker\delta_g$ da decomposição $T_g\mathcal{M}_1(X) = \operatorname{im}\delta_g^* \oplus [T_g\mathcal{M}_1(X)\cap \ker\delta_g]$ pode ser 'exponenciada' para gerar um *slice* local para a ação de $D(X)$ em $\mathcal{M}_1(X)$. Mais precisamente, $T_g\mathcal{M}_1(X)\cap\ker\delta_g$ é o espaço tangente, em g, de uma subvariedade $\mathcal{V}_g \subset \mathcal{M}_1(X)$ que é localmente *transversal* às órbitas da ação. De fato, se I_g denota o grupo de isometrias de g, então $\mathcal{V}_g$ módulo I_g parametriza o espaço de órbitas em torno de $O(g)$.

Observação 2.7.3. Os operadores δ_g, δ_g^* e $\overset{\circ}{R}_g$ aparecem numa decomposição do tipo Weitzenböck associada ao operador $S_r : S^r(X) \to S^{r+1}(X)$ dado por

$$(S_r\eta)(x_1,\dots,x_{r+1}) = \sum_i (\nabla_{x_i}\eta)(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{r+1})$$

e seu adjunto

$$(S_r^*\eta)(x_1,\dots,x_r) = -\sum_i (\nabla_{e_i}\eta)(e_i,x_1,\dots,x_r).$$

Um cálculo direto fornece então a decomposição

$$(S_2^*S_2 - S_1S_1^*)h = \nabla^*\nabla h + 2\overset{\circ}{R}_g h - 2h\circ\operatorname{Ric}_g, \quad h\in S^2(X).$$

Em particular, se $\delta_g h = 0$, então

$$S_2^*S_2 h = \nabla^*\nabla h + 2\overset{\circ}{R}_g h - 2h\circ\operatorname{Ric}_g, \tag{2.44}$$

pois $S_1^* = \delta_g$. Esta fórmula será bastante útil na discussão sobre rigidez de estruturas $2k$-Einstein no Capítulo 3.

Definição 2.7.4. *Uma função $\mathcal{F} : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{R}$ é um* funcional geométrico *se vale $\mathcal{F}(\phi^* g) = \mathcal{F}(g)$, para $g \in \mathcal{M}(X)$ e $\phi \in D(X)$ quaisquer.*

Em palavras, $\mathcal{F}$ é geométrico se, e somente se, é constante ao longo das órbitas da ação natural de $D(X)$ em $\mathcal{M}(X)$. Como exemplos importantes mencionamos os chamados *funcionais de Hilbert-Einstein-Lovelock*:

$$\mathcal{F}^{(2k)}(g) = \int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} \nu_g, \tag{2.45}$$

onde $\mathcal{S}^{(2k)}$ é a $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet.

Definição 2.7.5. *Um funcional geométrico $\mathcal{F}$ é* diferenciável *se existe $m \geq 0$ tal que $\mathcal{F}$ é diferenciável na norma de Sobolev de ordem m. Neste caso, diz-se que $a \in S^2(X)$ é o* gradiente *de $\mathcal{F}$ em $g \in \mathcal{M}(X)$ se vale*

$$\dot{\mathcal{F}}_g h = (a, h), \qquad h \in S^2(X).$$

Nesta definição,

$$\dot{\mathcal{F}}_g h = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(g + th)|_{t=0}$$

é a derivada direcional (ou *linearização*) de $\mathcal{F}$ em g na direção de h. Denotaremos por $\operatorname{grad} \mathcal{F}_g$ o gradiente de $\mathcal{F}$ em g.

Acontece que os tensores de Lovelock são os gradientes dos funcionais de Hilbert-Einstein-Lovelock, conforme vê-se na proposição a seguir.

Proposição 2.7.6. *[Lo][L2] Na notação acima,*

$$\operatorname{grad} \mathcal{F}_g^{(2k)} = -\frac{1}{2}\mathcal{J}_g^{(2k)}. \tag{2.46}$$

Demonstração. Verifica-se em [L2] que

$$\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h = -\frac{1}{2(2k-1)!}\langle \mathcal{R}_g^{(2k)}, h\rangle + \operatorname{div}_g \omega,$$

onde

$$\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h = \frac{d}{dt}\mathcal{S}_{g+th}^{(2k)}|_{t=0}$$

é a linearização da $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet em g na direção de $h \in S^2(X)$, e $\omega \in \mathcal{A}^1(X)$. Por outro lado, a clássica fórmula de Liouville nos diz que

$$\dot{\nu}_g h = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g h \nu_g, \tag{2.47}$$

de modo que o resultado segue após linearizarmos (2.45) derivando sob o sinal da integral e usarmos o Teorema da Divergência. □

A proposição a seguir, que remonta a D. Hilbert e E. Noether e generaliza (2.22), ilustra a importância da decomposição (2.43) na teoria dos funcionais geométricos.

Proposição 2.7.7. *Se $\mathcal{F}$ é um funcional geométrico diferenciável, então seu gradiente possui divergência nula:*

$$\delta_g \mathrm{grad}\, \mathcal{F}_g = 0, \quad g \in \mathcal{M}(X). \tag{2.48}$$

Em particular,

$$\delta_g \mathcal{J}_g^{(2k)} = 0. \tag{2.49}$$

Demonstração. Basta observar que a órbita $O(g)$ está contida numa hipersuperfície de nível de $\mathcal{F}$, de modo que $\mathrm{grad}\, \mathcal{F}_g$ é ortogonal no sentido L^2 a $T_g O(g)$, e a decomposição (2.43) aplica-se imediatamente. $\square$

No restante desta seção, usaremos a Proposição 2.7.6 para verificar que tanto a condição de ser $2k$-Einstein como a de possuir $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet constante admitem uma interpretação variacional. Para isto, definimos os funcionais de Hilbert-Einstein-Lovelock normalizados $\tilde{\mathcal{F}}^{(2k)} : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(2k)}(g) = \frac{\mathcal{F}^{(2k)}(g)}{\left(\int_X \nu_g\right)^{\frac{n-2k}{n}}}.$$

Note que $\tilde{\mathcal{F}}^{(2k)}$ é invariante por deformações homotéticas de g. Mais ainda, dado um elemento de volume μ em X, seja

$$\mathcal{N}_\mu = \{g \in \mathcal{M}_1(X); \nu_g = \mu\}.$$

Proposição 2.7.8. *As seguintes afirmações a respeito de uma métrica $g \in \mathcal{M}_1(X)$ são equivalentes:*

1. *(X, g) é $2k$-Einstein;*
2. *g é um ponto crítico de $\tilde{\mathcal{F}}^{(2k)}$;*
3. *g é um ponto crítico de $\mathcal{F}^{(2k)}$ restrito a $\mathcal{M}_1(X)$;*
4. *g é um ponto crítico de $\mathcal{F}^{(2k)}$ restrito a $\mathcal{N}_{\nu_g}$.*

Demonstração. A equivalência entre o segundo e o terceito item é óbvia. Por outro lado, note que

$$T_g\mathcal{M}_1(X) = \{h \in S^2(X); (g,h) = 0\}$$

e

$$T_g\mathcal{N}_{\nu_g} = \{h \in S^2(X); \mathrm{tr}_g h = 0\}.$$

Assim, g é um ponto crítico de $\mathcal{F}^{(2k)}|_{\mathcal{M}_1(X)}$ (respectivamente, $\mathcal{F}^{(2k)}|_{\mathcal{N}_{\nu_g}}$) se, e somente se, a projeção ortogonal de $\mathrm{grad}\,\mathcal{F}_g^{(2k)} = -\frac{1}{2}\mathcal{J}_g^{(2k)}$ sobre $T_g\mathcal{M}_1(X)$ (respectivamente, $T_g\mathcal{N}_{\nu_g}$) é nula. Em ambos os casos, existe uma função λ em X tal que $\mathcal{R}_g^{(2k)} = \lambda g$. O resultado segue então da Proposição 2.5.5. $\square$

Se $g \in \mathcal{M}(X)$, denotaremos por $[g] = \{fg; f \in \mathcal{D}(X), f > 0\}$ a *classe de métricas conformes* a g. Mais ainda, se $g \in \mathcal{M}_1(X)$, escreveremos

$$[g]_1 = \left\{\tilde{g} \in [g]; \int_X \nu_{\tilde{g}} = 1\right\}.$$

Proposição 2.7.9. *Uma métrica $g \in \mathcal{M}_1(X)$ possui $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet constante se, e somente se, g é um ponto crítico para $\mathcal{F}^{(2k)}$ restrito a $[g]_1$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que

$$T_g[g]_1 = \left\{fg; f \in \mathcal{D}(X), \int_X f\nu_g = 0\right\},$$

de modo que a criticalidade de g significa que $(\mathcal{J}_g^{(2k)}, fg) = 0$, para qualquer f de média nula. Equivalentemente,

$$(\mathcal{R}_g^{(2k)}, fg) = (2k-1)!(\mathcal{S}_g^{(2k)} g, fg).$$

Lembrando agora que vale $\langle h, g\rangle = \mathrm{tr}_g h$ e usando (2.31), vemos então que a condição de criticalidade é

$$2k\int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} f\nu_g = n\int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} f\nu_g,$$

e como $2k < n$,

$$\int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} f\nu_g = 0.$$

Aplicando isto a

$$f = \mathcal{S}_g^{(2k)} - \int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} \nu_g,$$

resulta que

$$\int_X (\mathcal{S}_g^{(2k)})^2 \nu_g = \left(\int_X \mathcal{S}_g^{(2k)} \nu_g \right)^2,$$

ou seja, $\mathcal{S}_g^{(2k)}$ é constante. $\square$

Capítulo 3

Rigidez de estruturas $2k$-Einstein

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre rigidez de estruturas $2k$-Einstein. Começamos por discutir, na Seção 3.1, o que acontece no caso Einstein ($k = 1$). Aqui, abundam exemplos de estruturas de Einstein onde obstruções à existência de deformações se fazem presentes sempre que deformações infinitesimais existem, o que significa que a teoria de deformação usual não tem em geral utilidade para estudar a estrutura local do espaço de módulos de estruturas de Einstein. Isto acontece, por exemplo, se o tensor de Ricci é estritamente negativo, o que inclui as formas espaciais hiperbólicas; veja a Proposição 3.1.4. Em função deste resultado decepcionante, a análise do espaço de módulos de estruturas $2k$-Einstein segue o procedimento clássico, ou seja, busca-se determinar condições que garantam a trivialidade do espaço de deformações infinitesimais (Teorema 3.2.9) e procura-se então, nestas condições, verificar que a estrutura em questão é rígida num sentido apropriado (Teorema 3.2.13). Isoladamente, talvez o resultado mais interessante aqui demonstrado é que formas espaciais não-euclidianas são rígidas como estruturas $2k$-Einstein (Corolário 3.2.10), o que estende um resultado clássico para o caso Einstein ($k = 1$), discutido no Capítulo 12 de [Be].

3.1 O caso Einstein

Nesta seção revisitaremos a teoria de deformação de estruturas de Einstein sobre uma variedade fechada [Be]. A análise do complexo de deformação correspondente leva ao resultado clássico segundo o qual, em muitas situações de interesse, a existência de deformações infinitesimais não-triviais sempre vem acompanhada de obstruções (Proposição 3.1.4).

Seja então X uma variedade diferenciável fechada de dimensão $n \geq 3$. Recordemos a ação natural

$$(\mathbb{R}^+ \times D(X)) \times \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}(X) \tag{3.1}$$

dada por

$$\xi((t,\phi),g) = t\phi^* g.$$

Note que, equivalentemente, podemos eliminar a ação de $\mathbb{R}^+$ por homotetias e considerar a ação

$$D(X) \times \mathcal{M}_1(X) \xrightarrow{\xi_1} \mathcal{M}_1(X)$$

dada por

$$\xi_1(\phi, g) = \phi^* g.$$

Seja $E^{(2)}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ o conjunto das métricas de Einstein em X. Restringindo ξ a $E^{(2)}(X)$ obtém-se a ação

$$(\mathbb{R}^+ \times D(X)) \times E^{(2)}(X) \xrightarrow{\xi} E^{(2)}(X)$$

ou ainda,

$$D(X) \times E_1^{(2)}(X) \xrightarrow{\xi_1} E_1^{(2)}(X)$$

onde $E_1^{(2)}(X) = E^{(2)}(X) \cap \mathcal{M}_1(X)$.

Definição 3.1.1. *O* espaço de módulos *de estruturas de Einstein em X é o quociente*

$$\mathfrak{E}^{(2)}(X) = \frac{E^{(2)}(X)}{\mathbb{R}^+ \times D(X)} = \frac{E_1^{(2)}(X)}{D(X)},$$

com respeito às ações acima. Em ambos os casos, a aplicação quociente será denotada por $g \mapsto \langle g \rangle$ e cada classe $\langle g \rangle$ é uma estrutura de Einstein *em X.*

Um problema fundamental em Geometria Riemanniana consiste em descrever a estrutura do espaço de módulos $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$, para uma variedade fechada X; veja, por exemplo, a discussão no Capítulo 12 de [Be]. Uma primeira providência neste sentido seria determinar as *deformações infinitesimais* de estruturas de Einstein. Mais especificamente, seja $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \langle g_t \rangle \in \mathfrak{E}^{(2)}(X)$ uma família diferenciável a um parâmetro de estruturas de Einstein, que interpretaremos como uma *deformação* da estrutura $\langle g_0 \rangle \in \mathfrak{E}^{(2)}(X)$. Como $T_{g_0}\mathcal{M}(X) = S^2(X)$, resulta que

$$h := \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} \in S^2(X), \tag{3.2}$$

mas a pergunta crucial agora é: que condições adicionais $h \in S^2(X)$ deve satisfazer pelo fato de cada métrica g_t ser Einstein?

Ora, cada g_t satisfaz

$$\mathrm{Ric}_{g_t} = \lambda_t g_t,$$

para alguma constante λ_t. Derivando esta curva de equações e calculando o resultado em $t = 0$, obtemos

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g h = \dot{\lambda}_0 g + \lambda_0 h,$$

onde $g = g_0$,

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g h = \frac{d}{dt}\mathrm{Ric}_{g+th}|_{t=0}$$

é a *linearização* da aplicação $g' \in \mathcal{M}(X) \mapsto \mathrm{Ric}_{g'} \in S^2(X)$ em $g' = g$ na direção de h e

$$\dot{\lambda}_0 = \frac{d}{dt}\lambda_t|_{t=0}.$$

Mas note que podemos supor que $g_t \in E_1^{(2)}(X)$ para cada t. Assim, por (2.32) com $k = 1$ (e lembrando que $\mathcal{S}_g^{(2)} = \kappa_g/2$),

$$\lambda_t = \frac{\kappa_{g_t}}{n} = \frac{1}{n}\int_X \kappa_{g_t}\nu_{g_t},$$

onde usamos a Proposição 2.5.5 na última etapa. Disto e da Proposição 2.7.8 resulta então que $\dot{\lambda}_0 = 0$, donde concluímos que h deve satisfazer

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g h = \lambda h, \tag{3.3}$$

onde agora escrevemos $\lambda = \lambda_0$.

Observação 3.1.2. *Neste ponto, devemos recordar que, pela Proposição 2.7.1,*

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g h = \frac{1}{2}\left(\Delta_L h - \mathcal{L}_{(\beta_g h)^\sharp} g\right), \tag{3.4}$$

onde Δ_L é o Laplaciano de Lichnerowicz e β_g é o operador de Bianchi.

Vimos então que *deformações infinitesimais* de estruturas de Einstein como em (3.2) necessariamente pertencem ao núcleo do o.d.l.

$$L_g^{(2)} := \dot{\mathrm{Ric}}_g - \lambda : S^2(X) \to S^2(X). \tag{3.5}$$

Ora, resulta facilmente de (3.4) que $L_g^{(2)}$ *nunca* é um operador elíptico, pois o termo de segunda ordem $\mathcal{L}_{(\beta_g h)^\sharp} g$, que certamente contribui para o símbolo $\sigma_{L_g^{(2)}}$, estraga a elipticidade de Δ_L. Isto naturalmente reflete o fato que a condição de Einstein é invariante por difeomorfismos, de maneira que urge descartar aquelas soluções que provêm de famílias a um parâmetro de difeomorfismos. Mais precisamente, se

$$h = \frac{d}{dt}\phi_t^* g|_{t=0} \in T_g O(g), \tag{3.6}$$

onde $\phi_t \in D(X)$ com $\phi_0 = \mathrm{id}_X$, então tais soluções não devem ser levadas em consideração, pois a curva de métricas $\{\phi_t^* g\}$ corresponde a uma deformação trivial em $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$ no sentido que as variedades Riemannianas $(X, \phi_t^* g)$ e (X, g) são isométricas e assim definem o mesmo elemento em $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$. Isto sugere considerar a sequência de aplicações lineares

$$0 \to \mathcal{A}^1(X) \stackrel{\delta_g^*}{\to} S^2(X) \stackrel{L_g^{(2)}}{\to} S^2(X).$$

Note que se $g_t = \phi_t^* g$, com

$$\frac{d}{dt}\phi_t|_{t=0} = \omega^\sharp, \quad \omega \in \mathcal{A}^1(X),$$

então $\mathrm{Ric}_{g_t} = \phi_t^* \mathrm{Ric}_g$, donde

$$\dot{\mathrm{Ric}}_g \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g = \mathcal{L}_{\omega^\sharp} \mathrm{Ric}_g = \lambda \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g,$$

ou seja, $L_g^{(2)} \circ \delta_g^* = 0$, de modo que $\mathrm{im}\, \delta_g^* \subset \ker L_g^{(2)}$ e

$$H_g^1 := \frac{\ker L_g^{(2)}}{\mathrm{im}\, \delta_g^*}$$

representa então, de acordo com a discussão acima, o espaço das deformações infinitesimais *genuínas* de estruturas de Einstein. Neste contexto, a questão relevante é: sob que condições podemos garantir que um elemento de H_g^1 pode ser integrado para uma família a um parâmetro de estruturas de Einstein? Noutras palavras, dado h (um representante de uma classe) em $H_g^1 \setminus \{0\}$, existe $\{g_t\}$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, curva de métricas de Einstein tal que

$$\frac{d}{dt} g_t|_{t=0} = h? \tag{3.7}$$

Observe que se isto acontecer então, pelo modo como definimos H^1_g, a deformação $\langle g_t \rangle$ é de fato *genuína* no sentido que não reduz-se ao tipo trivial em (3.6). Outra maneira de expressar a genuinidade de $\{g_t\}$ em (3.7) é apelar para a Observação 2.7.2, que garante a existência de um slice local $\mathcal{V}_g$ para a ação (3.1). Neste contexto, genuinidade significa simplesmente que $\{g_t\}$ é regular ($\frac{d}{dt} g_t|_{t=0} \neq 0$) e $\{g_t\} \subset \mathcal{V}_g$.

Naturalmente, a questão acima teria uma resposta positiva para *qualquer* $h \in H^1_g$ se a aplicação $L^{(2)}_g$ fosse sobrejetiva, pois poderíamos então aplicar o Teorema da Função Implícita a algum completamento métrico de $S^2(X)$. Para entender a obstrução para que isto aconteça, recordemos que, por (2.22) e pelo fato de ser g paralela, $\beta_g(\mathrm{Ric}_g - \lambda g) = 0$, para qualquer $g \in \mathcal{M}(X)$. Aplicando isto a $g = g_t$ e derivando o resultado em $t = 0$, obtemos

$$\dot{\beta}_g(\mathrm{Ric}_g - \lambda g) + \beta_g L^{(2)}_g = 0.$$

Como g é Einstein,

$$\mathrm{Ric}_g - \lambda g = 0,$$

de forma que $\beta_g L^{(2)}_g = 0$. Isto mostra, definitivamente, que $L^{(2)}_g$ *nunca* é sobrejetivo: na verdade, vale $\mathrm{im}\, L^{(2)}_g \subset \ker \beta_g$.

Esta discussão sugere considerarmos

$$(\mathcal{E}, Q_{\mathrm{def}}) : 0 \to \mathcal{A}^1(X) \stackrel{\delta^*_g}{\to} \mathcal{S}^2(X) \stackrel{L^{(2)}_g}{\to} \mathcal{S}^2(X) \stackrel{\beta_g}{\to} \mathcal{A}^1(X) \to 0, \qquad (3.8)$$

o chamado *complexo de deformação* de estruturas de Einstein. Vê-se então que

$$H^2_g := \frac{\ker \beta_g}{\mathrm{im}\, L^{(2)}_g}$$

é precisamente a obstrução para que a pergunta acima tenha resposta positiva, ou seja, H^2_g é trivial se, e somente se, qualquer $h \in H^1_g$ pode ser integrado para uma curva de deformações genuínas. Este círculo de idéias é formalizado na definição abaixo.

Definição 3.1.3. *Uma estrutura de Einstein $\langle g \rangle \in \mathfrak{E}^{(2)}(X)$ é* desobstruída *se H^2_g é trivial.*

Assim, se $\langle g \rangle$ é desobstruída, uma aplicação do Teorema da Função Implícita implicaria que $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$ possui, em torno de $\langle g \rangle$, uma estrutura de variedade diferenciável com $T_{\langle g \rangle}\mathfrak{E}^{(2)}(X) = H^1_g$, o espaço das deformações infinitesimais genuínas de $\langle g \rangle$. Noutras palavras, uma vizinhança da origem de H^1_g parametrizaria uma vizinhança de $\langle g \rangle$ em $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$. No entanto, veremos agora que esta abordagem à estrutura local de $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$ é muitas vezes inconclusiva, pois existem exemplos de estruturas de Einstein para as quais desobstrução implica a trivialidade de H^1_g.

Proposição 3.1.4. *Se (X, g) é uma variedade de Einstein que não possui campos de Killing não-triviais*[1]*, então*

$$\dim H^2_g \geq \dim H^1_g. \tag{3.9}$$

Em particular, H^1_g é trivial se $\langle g \rangle$ é desobstruída.

A chave para verificar a validade de (3.9) é a proposição a seguir.

Proposição 3.1.5. *O complexo de deformação $(\mathcal{E}, Q_{\mathrm{def}})$ é elíptico e possui característica de Euler nula.*

Demonstração. A sequência de símbolos

$$C_0 : 0 \to \Lambda_1(X) \stackrel{\sigma_{\delta^*_g}}{\to} \mathrm{Sym}^2(X) \stackrel{\sigma_{L^{(2)}_g}}{\to} \mathrm{Sym}^2(X) \stackrel{\sigma_{\beta_g}}{\to} \Lambda^1(X) \to 0$$

é exata (fora da seção nula); veja [CCGGIILLN]. Por outro lado, consideremos, para $t \in (0, 1)$, a sequência

$$C_t : 0 \to \Lambda_1(X) \stackrel{\sigma^t_0}{\to} \mathrm{Sym}^2(X) \stackrel{\sigma^t_1}{\to} \mathrm{Sym}^2(X) \stackrel{\sigma^t_2}{\to} \Lambda^1(X) \to 0$$

onde $\sigma^t_0 = (1-t)\sigma_{\delta^*_g}$, $\sigma^t_2 = (1-t)\sigma_{\beta_g}$ e $\sigma^t_1 = \sigma_{L^{(2)}_g(t)}$, com

$$L^{(2)}_g(t) = \frac{1}{2}\left(\Delta_L - (1-t)\mathcal{L}_{\beta^\sharp_g} g\right) - \lambda.$$

Resulta então do argumento em [CCGGIILLN] que C_t também é exata (fora da seção nula), de modo que C_0 é regularmente homotópica a

$$C_1 : 0 \to \mathrm{Sym}^2(X) \stackrel{\sigma_{\Delta_L}}{\to} \mathrm{Sym}^2(X) \to 0.$$

Como Δ_L é elíptico e auto-adjunto, segue das Proposições 2.6.2 e 2.6.3 que $\chi(\mathcal{E}, Q_{\mathrm{def}}) = 0$, como queríamos. $\square$

[1] Isto acontece, por exemplo, se $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$ com $\lambda < 0$, por um resultado de Bochner [Be]. Isto inclui o importante caso em que (X, g) é uma forma espacial hiperbólica.

Decorre da Proposição 3.1.5 que

$$\dim H_g^0 + \dim H_g^2 = \dim H_g^1 + \dim H_g^3,$$

onde

$$H_g^0 := \ker \delta_g^*, \qquad H_g^3 = \frac{\mathcal{A}^1(X)}{\operatorname{im} \beta_g}.$$

Mas a nossa hipótese sobre (X, g) significa precisamente que H_g^0 é trivial, de modo que

$$\dim H_g^2 = \dim H_g^1 + \dim H_g^3,$$

donde (3.9) resulta imediatamente.

A Proposição 3.1.4 confirma a percepção já externada acima de que, em geral, o complexo de deformação para estruturas de Einstein não tem utilidade na questão de determinar a estrutura local de $\mathfrak{E}^{(2)}(X)$. Assim, a pesquisa nesta área tem-se concentrado em determinar critérios para verificar quando H_g^1 é trivial e, de posse deste tipo de informação, concluir que $\langle g \rangle \in \mathfrak{E}^{(2)}(X)$ é *rígida* num sentido apropriado. Vários resultados deste tipo estão disponíveis na literatura (veja as contribuições atribuídas a Koiso e Bourguignon no Capítulo 12 de [Be]) e os teoremas apresentados na próxima seção buscam precisamente estender alguns destes para o contexto $2k$-Einstein, $k \geq 2$.

Observação 3.1.6. Talvez seja ilustrativo introduzir alguns comentários de natureza geral a respeito da teoria de deformações de estruturas geométricas no sentido de ilustrar a relevância da Proposição 3.1.4. Com efeito, no abrangente contexto de deformações de G-estruturas numa variedade fechada X, os grupos de cohomologia $H^r(X, \Theta)$, $r = 1, 2$, onde Θ representa o feixe de germes de automorfismos infinitesimais da correspondente G-estrutura, desempenham um papel fundamental. Com efeito, $H^1(X; \Theta)$ pode ser interpretado como o espaço de deformações infinitesimais da G-estrutura, de modo que o problema de determinar que elementos deste espaço podem ser integrados para gerar deformações genuínas adquire importância fundamental. Em geral, obstruções a que isto aconteça podem efetivamente existir, sendo tais obstruções representadas por classes em $H^2(X; \Theta)$. Assim, é frequente encontrar na literatura critérios para garantir que uma vizinhança da origem de $H^1(X; \Theta)$ parametrize localmente o espaço de módulos das deformações de uma G-estrutura que é *desobstruída* no sentido que $H^2(X; \Theta)$ é trivial. Como exemplos de tais procedimentos, citamos os casos de estruturas complexas [Ko], formas espaciais [Ca] e conexões auto-duais [AHS]; um tratamento bastante geral pode ser encontrado em [Gr] e [Ra]. Quando esta abordagem mostra-se ineficiente, o problema de determinar a estrutura local do espaço de módulos torna-se deveras complicado, visto que obviamente depende de informações de 'ordem superior'. Em vista da Proposição 3.1.4, isto é o que efetivamente acontece no caso Einstein e, por extensão, no caso $2k$-Einstein tratado a seguir.

3.2 Rigidez de estruturas $2k$-Einstein

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de rigidez para uma classe de estruturas $2k$-Einsten. Seja então X uma variedade diferenciável de dimensão $n \geq 4$. Como no caso Einstein, tratado na seção anterior, a definição a seguir encerra a idéia de estrutura $2k$-Einstein.

Definição 3.2.1. *O* espaço de módulos *de estruturas* $2k$*-Einstein em* X *é o quociente*

$$\mathfrak{E}^{(2k)}(X) = \frac{E^{(2k)}(X)}{\mathbb{R}^+ \times D(X)} = \frac{E_1^{(2k)}(X)}{D(X)}.$$

Aqui, $E^{(2k)}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ *é o conjunto das métricas* $2k$*-Einstein em* X *e* $E_1^{(2k)}(X) = E^{(2k)}(X) \cap \mathcal{M}_1(X)$. *Em ambos os casos, a aplicação quociente será denotada por* $g \mapsto \langle g \rangle$ *e cada classe* $\langle g \rangle$ *é uma* estrutura $2k$-Einstein *em* X.

Assim, um problema fundamental neste contexto é determinar a estrutura de $\mathfrak{E}^{(2k)}(X)$, para uma variedade X dada. Como no caso $k = 1$, tratado na seção anterior, uma primeira providência neste sentido seria determinar o espaço de *deformações infinitesimais genuínas* de estruturas $2k$-Einstein. Mais precisamente, se $\langle g \rangle \in \mathfrak{E}^{(2k)}(X)$, seja $\langle g_t \rangle$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma família diferenciável a um parâmetro de estruturas $2k$-Einstein com $g_0 = g \in E^{(2k)}(X)$. Como sempre, veremos esta família como uma *deformação* de $\langle g \rangle$. Neste caso, e similarmente ao que acontece no caso Einstein, pelo fato de cada g_t satisfazer $\mathcal{R}_{g_t}^{(2k)} = \lambda_t g_t$ resulta facilmente que

$$h = \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} \in S^2(X)$$

cumpre

$$\dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)} h = \lambda h, \tag{3.10}$$

onde

$$\dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)} h = \frac{d}{dt} \mathcal{R}_{g+th}^{(2k)}|_{t=0}$$

é a linearização da aplicação $g' \in \mathcal{M}(X) \mapsto \mathcal{R}_{g'}^{(2k)} \in S^2(X)$ e $\lambda = \lambda_0$. Por outro lado, tendo em conta que, em vista da decomposição (2.43), deformações infinitesimais genuínas devem ser transversais às órbitas da ação de $D(X)$, devemos supor ainda que, para tais deformações,

$$\delta_g h = 0; \tag{3.11}$$

veja a Observação 2.7.2. Mais ainda, como podemos supor, sem perda de generalidade, que $g_t \in \mathcal{M}_1(X)$, tem-se ainda, em função de (2.47),

$$\int_X \mathrm{tr}_g h \nu_g = 0. \tag{3.12}$$

A esta altura, somos tentados a definir o espaço de deformações infinitesimais de $\langle g \rangle$ a partir das condições (3.10), (3.11) e (3.12). Veremos, no entanto, que a última condição, de caráter integral, pode ser substituída, sem perda de generalidade, por uma condição *algébrica* sobre h. A chave para isto é o seguinte teorema de J. Moser.

Teorema 3.2.2. *[M] Se $g_1, g_2 \in \mathcal{M}_1(X)$, então existe $\phi \in D(X)$ tal que $\nu_{g_1} = \phi^* \nu_{g_2}$.*

Em palavras, $D(X)$ age transitivamente no conjunto das densidades positivas de mesmo volume. Em vista disto, e levando em consideração a Proposição 2.7.8, item 4, para entender a estrutura de $\mathfrak{E}^{(2k)}(X)$ em torno de $\langle g \rangle$, basta restringir-se ao conjunto de métricas

$$\mathcal{N}_g = \{g' \in \mathcal{M}_1(X); \nu_{g'} = \nu_g\}$$

com o mesmo elemento de volume que g, de forma que continuaremos denotando por $\langle g' \rangle$ a estrutura $2k$-Einstein correspondente. Mas note que agora, em função de (2.47), (3.12) é substituído por

$$\mathrm{tr}_g h = 0. \tag{3.13}$$

Esta discussão motiva a definição a seguir.

Definição 3.2.3. *Se (X, g) é $2k$-Einstein, $\mathcal{R}_g^{(2k)} = \lambda g$, o* espaço de deformações infinitesimais genuínas *de $\langle g \rangle$, denotado por $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)}$, é o espaço vetorial de todos os elementos $h \in \mathcal{C}^1(X) = S^2(X)$ tais que*

$$\dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)} h = \lambda h, \tag{3.14}$$

e

$$\delta_g h = 0, \quad \mathrm{tr}_g h = 0. \tag{3.15}$$

Observação 3.2.4. Se definirmos $\mathcal{I}_g = \delta_g^{-1}(0) \cap \mathrm{tr}_g^{-1}(0)$ e

$$L_g^{(2k)} = \dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)} - \lambda, \tag{3.16}$$

então $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)} = \ker L_g^{(2k)}|_{\mathcal{I}_g}$. Em particular, como X é fechada, $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)}$ possui dimensão finita se $L_g^{(2k)}|_{\mathcal{I}_g}$ é um operador elíptico.

Observação 3.2.5. As condições sobre deformações infinitesimais definidas por (3.15) são usualmente interpretadas na literatura como uma *escolha de gauge*, visto que, pela Observação 2.7.2, elas correspondem a uma escolha de *slice* local para a ação de $D(X)$ em $\mathcal{M}_1(X)$ em torno de g.

Resulta de (3.4) que $L_g^{(2)}|_{\mathcal{I}_g}$ sempre é elíptico, ou seja, $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2)}$ possui dimensão finita para *qualquer* (X, g) Einstein; isto foi primeiramente verificado em [BE]. Entretanto, se $k \geq 2$, o resultado correspondente não é necessariamente verdadeiro, pois $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)}$ pode possuir dimensão infinita para certas escolhas de (X, g), o que reflete o fato de que, em geral, $L_g^{(2k)}|_{\mathcal{I}_g}$ é um o.d.l. de tipo misto (não necessariamente elíptico). Com efeito, considere o produto Riemanniano $X = M^r \times T^m$, onde M é uma variedade Riemanniana arbitrária e T^m é um toro plano. Se $2k > r$, então X é $2k$-Einstein, independentemente da métrica em M, o que mostra que $\dim \varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)} = +\infty$ neste caso. Isto naturalmente reflete o fato, já comentado na Introdução, de que o símbolo de $L_g^{(2k)}$, em geral, depende da curvatura R_g. Em vista disto, é natural buscar exemplos de estruturas $2k$-Einstein (X, g) para as quais $\dim \varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)} < +\infty$. O Teorema 3.2.7 abaixo fornece uma classe interessante de estruturas $2k$-Einstein para as quais isto acontece e seu enunciado envolve a definição a seguir.

Definição 3.2.6. *Dados inteiros n e k com $n \geq 4$ e $2 \leq 2k < n$, e $\mu_k \neq 0$ um número real, representaremos por $\mathcal{H}_{n,k}$ a classe das variedades Riemannianas fechadas (X^n, g) de dimensão n que são $2k$-Einstein e possuem $(2k-2)$-curvatura seccional* constante*, ou seja, cumprem*

$$R_g^{k-1} = \mu_k g^{2k-2}; \tag{3.17}$$

veja a Proposição 2.5.7.

Note que, em função da Observação 2.5.2, a classe $\mathcal{H}_{n,k}$ contém as formas espaciais não-euclidianas. Nosso primeiro resultado mostra que, para estruturas na classe $\mathcal{H}_{n,k}$, o fenômeno de degenerescência observado nos exemplos de produtos com toros planos discutidos acima não acontece.

Teorema 3.2.7. *Se $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$, então $\varepsilon^{(2k)}_{\langle g \rangle}$ possui dimensão finita.*

Discutiremos agora a *rigidez* de estruturas $2k$-Einstein na classe $\mathcal{H}_{n,k}$. Para isto, precisaremos de algumas definições.

Definição 3.2.8. *Uma estrutura $2k$-Einstein $\langle g \rangle \in \mathfrak{E}^{(2k)}(X)$ é dita ser* infinitesimalmente não-deformável *se $\varepsilon^{(2k)}_{\langle g \rangle}$ é trivial. Mais ainda, $\langle g \rangle$ é* não-deformável *se qualquer deformação $\langle g_t \rangle$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é trivial, ou seja, $g_t = \phi_t^* g$, onde $\phi_t \in D(X)$ com $\phi_0 = \mathrm{id}_X$.*

Definamos agora as constantes

$$\underline{\alpha}_{n,k} = \frac{kn - 5k + 2}{n(kn + k + 2 - 2n)} \tag{3.18}$$

e

$$\overline{\alpha}_{n,k} = \frac{kn - 2k - 1}{n(kn - 5k + n - 1)}, \tag{3.19}$$

que são sempre *positivas* se $k \geq 2$. O resultado a seguir estabelece um critério de não-deformabilidade em termos do relacionamento entre estas constantes e o menor e o maior autovalor de $\overset{\circ}{R}_g |_{\mathrm{tr}_g^{-1}(0)}$, dados respectivamente por

$$\underline{a}_0 = \inf_{h \in \mathrm{tr}_g^{-1}(0)} \frac{(\overset{\circ}{R}_g h, h)}{\|h\|^2}, \quad \overline{a}_0 = \sup_{h \in \mathrm{tr}_g^{-1}(0)} \frac{(\overset{\circ}{R}_g h, h)}{\|h\|^2}. \tag{3.20}$$

Teorema 3.2.9. *Se $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$ satisfaz $\underline{a}_0 > \underline{\alpha}_{n,k} \kappa_g$ ou $\overline{a}_0 < \overline{\alpha}_{n,k} \kappa_g$, onde $\kappa_g = 2\mathcal{S}_g^{(2)}$ é a curvatura escalar de g, então $\langle g \rangle$ é infinitesimalmente não-deformável.*

Corolário 3.2.10. *Se (X, g) é uma forma espacial com curvatura seccional $\mu \neq 0$, então $\langle g \rangle$ é infinitesimalmente não-deformável.*

Demonstração. Basta notar que, pela Observação 3.3.8 abaixo, $\overset{\circ}{R}_g h = -\mu h$ se $\mathrm{tr}_g h = 0$, de forma que $\underline{a}_0 = \overline{a}_0 = -\mu$. Como $\kappa_g = n(n-1)\mu$, o resultado segue imediatamente. $\square$

Adaptando um argumento em [K1], verifica-se facilmente que $\langle g \rangle$ infinitesimalmente não-deformável implica que $\langle g \rangle$ é não-deformável, o que se aplica, em particular, às estruturas $2k$-Einstein no Teorema 3.2.9. É possível, no entanto, a partir da conclusão deste teorema, deduzir propriedades de rigidez para a estrutura. Para explicar isto, recordemos que, pela Observação 2.7.2, a decomposição (2.43) implica a existência de um *slice* $\mathcal{V}_g$ para a ação de $D(X)$ em $\mathcal{M}_1(X)$ em torno de g.

Definição 3.2.11. *O conjunto de todas as métricas $2k$-Einstein em $\mathcal{V}_g$ é chamado o* espaço de pré-módulos *em torno de $\langle g \rangle$ e denotado por $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$.*

O espaço de módulos propriamente dito, $\mathfrak{E}^{(2k)}(X)$, pode ser localmente obtido a partir de $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$ após passagem ao quociente pela ação do grupo de isometrias de (X, g), que é um grupo de Lie compacto. No entanto, no tratamento a seguir, ignoraremos completamente esta questão e trabalharemos diretamente com $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$. Em particular, a definição a seguir traduz a noção de rigidez (local) de estruturas $2k$-Einstein.

Definição 3.2.12. $\langle g \rangle$ *é* rígida *se é um elemento isolado em $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$.*

O resultado a seguir fornece exemplos de estruturas $2k$-Einstein rígidas.

Teorema 3.2.13. *Nas condições do Teorema 3.2.9, $\langle g \rangle$ é rígida.*

Corolário 3.2.14. *Se (X, g) é uma forma espacial com curvatura seccional $\mu \neq 0$, então $\langle g \rangle$ é rígida.*

Na verdade, o Teorema 3.2.13 é consequência imediata de um resultado mais geral que elucida a estrutura local de $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$, com $\langle g \rangle$ nas condições do Teorema 3.2.7.

Teorema 3.2.15. *Se $\langle g \rangle$ cumpre as condições do Teorema 3.2.7, então $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$ possui, numa vizinhança de $\langle g \rangle$, a estrutura de um subconjunto analítico contido numa variedade analítica cujo espaço tangente em $\langle g \rangle$ é precisamente $\varepsilon_{\langle g \rangle}^{(2k)}$.*

Observação 3.2.16. Para o caso em que $\mu > 0$, os Corolários 3.2.10 e 3.2.14 foram obtidos em [dLS1].

3.3 Linearizando o tensor $2k$-Ricci

As demonstrações dos teoremas de finitude e rigidez da seção anterior apoiam-se no cálculo explícito do operador $L_g^{(2k)}$, definido na Observação 3.2.4, que por sua vez repousa na linearização da aplicação $g \in \mathcal{M}(X) \mapsto \mathcal{R}_g^{(2k)} \in \mathcal{C}^1(X)$; veja a Proposição 3.3.7 abaixo. Para tanto, precisaremos de alguns resultados preliminares demonstrados em [L1], [L2] e [dLS1], que passamos a descrever.

Para $h \in \mathcal{C}^1(X)$ define-se em [L2] a aplicação linear $F_h : \mathcal{C}^r(X) \to \mathcal{C}^r(X)$ do seguinte modo: para qualquer $p \in X$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pX que diagonaliza h, põe-se

$$
\begin{aligned}
&(F_h\omega)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}) = \\
&\quad = \Big(\sum_{k=1}^{r} h(e_{i_k}, e_{i_k}) + \sum_{k=1}^{r} h(e_{j_k}, e_{j_k})\Big)\omega(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}).
\end{aligned}
$$

Acontece que F_h tem várias propriedades interessantes (por exemplo, é auto-adjunto, age como uma derivação, etc.) mas somente precisaremos a seguir de duas destas propriedades, que destacamos:

- $F_h(g^r) = 2rg^{r-1}h$, para $r \geq 1$;
- Se R_g é o tensor curvatura de g, então vale

$$
\begin{aligned}
F_h(R_g)(x \wedge y, z \wedge u) &= h(R_g(x,y)z, u) - h(R_g(x,y)u, z) + \\
&\quad + h(R_g(z,u)x, y) - h(R_g(z,u)y, x) \quad (3.21)
\end{aligned}
$$

  para vetores tangentes x, y, z, u.

Consideremos ainda o o.d.l. de segunda ordem $\mathcal{D}^2 : \mathcal{C}^1(X) \to \mathcal{C}^2(X)$ dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^2 h(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) &= \nabla^2_{y_1,x_1} h(x_2, y_2) + \nabla^2_{x_1,y_1} h(x_2, y_2) \\
&\quad + \nabla^2_{y_2,x_2} h(x_1, y_1) + \nabla^2_{x_2,y_2} h(x_1, y_1) \\
&\quad - \nabla^2_{y_1,x_2} h(x_1, y_2) - \nabla^2_{x_2,y_1} h(x_1, y_2) \\
&\quad - \nabla^2_{y_2,x_1} h(x_2, y_1) - \nabla^2_{x_1,y_2} h(x_2, y_1), \quad (3.22)
\end{aligned}
$$

onde

$$\nabla^2_{x,y} h = \nabla_x \nabla_y h - \nabla_{\nabla_x y} h$$

é o operador Hessiano usual; veja (2.8). A relevância destes conceitos tem a ver com o seguinte lema, demonstrado em [L2].

Lema 3.3.1. *A linearização do tensor curvatura é*

$$\dot{R}_g h = -\frac{1}{4}\mathcal{D}^2 h + \frac{1}{4} F_h(R_g). \quad (3.23)$$

Mostraremos a seguir que se $(X,g) \in \mathcal{H}_{n,k}$, então o termo de segunda ordem em $L_g^{(2k)} = \dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)} - \lambda$, o o.d.l. de segunda ordem que define o espaço de deformações infinitesimais genuínas de $\langle g \rangle$, conforme a Definição 3.2.3, é completamente determinado pelas contrações de primeira e segunda ordem de $\dot{R}_g$. Portanto, em vista de (3.23), faz-se necessário determinar tais contrações para $\mathcal{D}^2$ e $F_h(R_g)$. Tal cálculo, para uma métrica qualquer, foi obtido em [dLS1] e será reproduzido aqui, para conveniência do leitor. A seguir, faremos ainda uso dos o.d.l.'s $\delta_g = -\mathrm{div} : S^r(X) \to S^{r-1}(X)$ e seu adjunto $\delta_g^* : S^{r-1}(X) \to S^r(X)$, definidos por

$$(\delta_g \omega)(x_1, \ldots, x_{r-1}) = -\sum_i (\nabla_{e_i} \omega)(e_i, x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

e

$$(\delta_g^* \eta)(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{r} \sum_k (\nabla_{x_k} \eta)(x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_r).$$

Em vista dos comentários acima, a proposição a seguir (e seu corolário) são fundamentais.

Proposição 3.3.2. *[dLS1] Para uma métrica qualquer $g \in \mathcal{M}(X)$, e dado $h \in \mathcal{C}^1(X)$, as seguintes identidades são válidas:*

1. *Se $\nabla^*\nabla$ é o Laplaciano de Bochner atuando em $\mathcal{C}^1(X)$, então*

$$c_g \mathcal{D}^2 h = -2\nabla^*\nabla h + 2\nabla^2 \mathrm{tr}_g h + 4\delta_g^* \delta_g h - (\mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)}) + 2\overset{\circ}{R}_g h; \tag{3.24}$$

2. *Se Δ_g é o Laplaciano associado a g, então*

$$c_g^2 \mathcal{D}^2 h = -4\Delta_g \mathrm{tr}_g h - 4\delta_g \delta_g h; \tag{3.25}$$

3. $c_g F_h(R_g) = \mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)} + 2\overset{\circ}{R}_g h$*;*

4. $c_g^2 F_h(R_g) = 4\langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h \rangle$*.*

Aqui, $\mathcal{R}_g^{(2)} = \mathrm{Ric}_g$ é o tensor de Ricci.

Corolário 3.3.3. *As contrações de primeira e segunda ordem de $\dot{R}_g h$ são, respectivamente, dadas por*

$$c_g \dot{R}_g h = \frac{1}{2}\left(\nabla^*\nabla h - \nabla^2 \mathrm{tr}_g h - 2\delta_g^* \delta_g h + \mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)}\right) \tag{3.26}$$

e

$$c_g^2 \dot{R}_g h = \Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g \delta_g h + \langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h \rangle. \tag{3.27}$$

Segue uma demonstração da Proposição 3.3.2, que pode ser encontrada em [dLS1]. Ao longo desta parte do texto, estaremos somando sobre índices repetidos.

Para o primeiro item, observemos que a contração de $\mathcal{D}^2 h$ é

$$c_g(\mathcal{D}^2 h)(e_j, e_k) = \mathcal{D}^2 h(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_k),$$

donde resulta, em função de (3.22), que

$$\begin{aligned} c_g(\mathcal{D}^2 h)(e_j, e_k) &= 2\nabla^2_{e_i,e_i} h(e_j, e_k) + \Big(\nabla^2_{e_k,e_j} h(e_i, e_i) + \\ &\quad +\nabla^2_{e_j,e_k} h(e_i, e_i)\Big) - \Big(\nabla^2_{e_k,e_i} h(e_j, e_i) + \nabla^2_{e_j,e_i} h(e_i, e_k)\Big) - \\ &\quad - \Big(\nabla^2_{e_i,e_j} h(e_i, e_k) + \nabla^2_{e_i,e_k} h(e_j, e_i)\Big). \end{aligned}$$

Usando então as identidades de Ricci para reescrever o último parênteses acima como

$$\begin{aligned} \nabla^2_{e_i,e_j} h(e_i, e_k) + \nabla^2_{e_i,e_k} h(e_i, e_j) &= \nabla^2_{e_j,e_i} h(e_i, e_k) + \nabla^2_{e_k,e_i} h(e_i, e_j) + \\ &\quad +h(R_g(e_i, e_j)e_i, e_k) + h(e_i, R_g(e_i, e_j)e_k) + \\ &\quad +h(R_g(e_i, e_k)e_i, e_j) + h(e_i, R_g(e_i, e_k)e_j), \end{aligned}$$

decorre que

$$\begin{aligned} c_g(\mathcal{D}^2 h)(e_j, e_k) &= 2\nabla^2_{e_i,e_i} h(e_j, e_k) + \Big(\nabla^2_{e_k,e_j} h + \nabla^2_{e_j,e_k} h\Big)(e_i, e_i) - \\ &\quad -2\Big(\nabla^2_{e_k,e_i} h(e_i, e_j) + \nabla^2_{e_j,e_i} h(e_i, e_k)\Big) - \\ &\quad -\Big(h(R_g(e_i, e_j)e_i, e_k) + h(e_i, R_g(e_i, e_j)e_k) + \\ &\quad +h(R_g(e_i, e_k)e_i, e_j) + h(e_i, R_g(e_i, e_k)e_j)\Big). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que, no ponto $p \in X$ onde o cálculo está sendo feito, o referencial é geodésico, ou seja, $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Daí resulta que $\nabla_{e_i} h(e_j, e_k) = e_i(h(e_j, e_k))$,

$$-\nabla^2_{e_i,e_i} h = \nabla^* \nabla h$$

e

$$\nabla^2_{e_k,e_j} h(e_i, e_i) = \nabla^2_{e_j,e_k} h(e_i, e_i) = (\nabla^2 \mathrm{tr}_g h)(e_j, e_k).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\nabla^2_{e_k,e_i}h(e_i,e_j)+\nabla^2_{e_j,e_i}h(e_i,e_k) &= -e_k(\delta_g h(e_j))-e_j(\delta_g h(e_k))\\ &= -2\left[\frac{1}{2}\left(e_k(\delta_g h(e_j))+e_j(\delta_g h(e_k))\right)\right]\\ &= -2\delta_g^*\delta_g h(e_j,e_k),\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}c_g(\mathcal{D}^2h)(e_j,e_k) &= -2(\nabla^*\nabla h)(e_j,e_k)+2(\nabla^2\mathrm{tr}_g h)(e_j,e_k)+4\delta_g^*\delta_g h(e_j,e_k)-\\ &\quad -(\mathcal{R}_g^{(2)}\circ h)(e_j,e_k)-(h\circ\mathcal{R}_g^{(2)})(e_j,e_k)+2\,\overset{\circ}{R}_g h(e_j,e_k),\end{aligned}$$

como queríamos.

Observação 3.3.4. Se g é Einstein, $\mathcal{R}_g^{(2)}=\dfrac{\kappa_g}{n}g$, temos:

$$\mathcal{R}_g^{(2)}\circ h+h\circ\mathcal{R}_g^{(2)}=\frac{2\kappa_g}{n}h,$$

donde

$$c_g(\mathcal{D}^2h)=-2\nabla^*\nabla h+2\nabla^2\mathrm{tr}_g h+4\delta_g^*\delta_g h-\frac{2\kappa_g}{n}h+2\,\overset{\circ}{R}_g h.$$

Para o segundo item, usamos (3.22) para escrever

$$c_g^2\mathcal{D}^2h=\mathcal{D}^2h(e_i\wedge e_j,e_i\wedge e_j)=4\nabla^2_{e_i,e_i}h(e_j,e_j)-4\nabla^2_{e_i,e_j}h(e_i,e_j).$$

Mas,

$$\nabla^2_{e_i,e_i}h(e_j,e_j)=-\Delta_g\mathrm{tr}_g h \quad \text{e} \quad \nabla^2_{e_i,e_j}h(e_i,e_j)=\delta_g\delta_g h, \tag{3.28}$$

onde a última igualdade resulta de

$$\begin{aligned}\nabla^2_{e_i,e_j}h(e_i,e_j) &= \sum_i e_i\left(\sum_j \nabla_{e_j}h(e_i,e_j)\right)\\ &= -\sum_i e_i(\delta_g h(e_i))\\ &= \delta_g\delta_g h.\end{aligned}$$

Assim,

$$c_g^2(\mathcal{D}^2h)=-4\Delta_g\mathrm{tr}_g h-4\delta_g\delta_g h, \tag{3.29}$$

como desejado. Finalmente, como F_h satisfaz (3.21), obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} c_g F_h(R_g)(x,y) &= F_h(R_g)(e_i \wedge x, e_i \wedge y) \\ &= h(R_g(e_i,x)e_i,y) - h(R_g(e_i,x)y,e_i) + \\ &\quad +h(R_g(e_i,y)e_i,x) - h(R_g(e_i,y)x,e_i) \\ &= (\mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)})(x,y) + 2\,\mathring{R}_g h(x,y), \end{aligned}$$

donde

$$c_g F_h(R_g) = \mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)} + 2\,\mathring{R}_g h,$$

e assim,

$$c_g^2 F_h(R_g) = c_g(\mathcal{R}_g^{(2)} \circ h + h \circ \mathcal{R}_g^{(2)} + 2\,\mathring{R}_g h) = 4\langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle.$$

Isto conclui a demonstração da Proposição 3.3.2.

Observação 3.3.5. Como $\kappa_g = c_g^2 R_g$, temos

$$\dot{\kappa}_g h = 2c_g(\dot{c}_g h)R_g + c_g^2 \dot{R}_g h. \tag{3.30}$$

Mas note que (3.42) implica, em função de (2.20), que

$$c_g(\dot{c}_g h)R_g = -\langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle, \tag{3.31}$$

e juntando isto com (3.27) chega-se à expressão para $\dot{\kappa}_g h$ em (2.42).

Com estas preliminares à disposição, voltemos ao contexto do Teorema 3.2.7, de modo que (X,g) é uma variedade $2k$-Einstein com

$$R_g^{k-1} = \mu_k g^{2k-2}, \quad \mu_k \neq 0. \tag{3.32}$$

Observe que se $k = 1$, a condição $2k$-Einstein reduz-se ao caso Einstein usual, $\mathcal{R}_g^{(2)} = \lambda g$, enquanto que, se $k = 2$, (3.32) significa que (X,g) é uma forma espacial; veja a Observação 2.5.2. Este caso já foi tratado em [dLS1], de maneira que podemos supor a partir de agora que $k > 2$. Note ainda que, para métricas satisfazendo (3.32), (2.26) acarreta

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_g^{(2k)} &= \mu_k c_g^{2k-1}(g^{2k-2}R_g) \\
&= (2k-2)!\mu_k \sum_{r=1}^{2k-2} C_r^{2k-1} \prod_{i=0}^{r-1}(n-3-i)\frac{g^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!}c_g^{2k-1-r}R_g \\
&= (2k-2)!\mu_k C_{2k-3}^{2k-1} \prod_{i=0}^{2k-4}(n-3-i)gc_g^2 R_g + \\
&\quad +(2k-2)!\mu_k C_{2k-2}^{2k-1} \prod_{i=0}^{2k-3}(n-3-i)c_g R_g \\
&= (2k-1)! \prod_{i=0}^{2k-4}(n-3-i)\mu_k\Big((k-1)\kappa_g g + (n-2k)\mathcal{R}_g^{(2)}\Big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{R}_g^{(2k)} = \frac{(2k-1)!(n-3)!}{(n-2k)!}\mu_k\left((k-1)\kappa_g g + (n-2k)\mathcal{R}_g^{(2)}\right). \tag{3.33}$$

Proposição 3.3.6. *Se (X,g) possui $(2k-2)$-curvatura seccional constante, então:*

1. *(X,g) é $2k$-Einstein se, e somente se, (X,g) é Einstein;*
2. *(X,g) possui $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet constante se, e somente se, (X,g) possui curvatura escalar constante.*

Em particular, se (X,g) é $2k$-Einstein, ou seja, $\mathcal{R}_g^{(2k)} = \lambda g$, então

$$\lambda = \frac{(2k)!}{n}\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(n-2)!(2k)!}{(n-2k)!2n}\mu_k\kappa_g = \frac{k(n-2)}{n}C_{n,k}\mu_k\kappa_g,$$

onde

$$C_{n,k} = \frac{(2k-1)!(n-3)!}{(n-2k)!}. \tag{3.34}$$

Demonstração. O primeiro item resulta de (3.33). Por outro lado, contraindo os dois lados desta expressão e levando em consideração que $c_g g = n$ e $c_g\mathcal{R}_g^{(2)} = \kappa_g$, obtemos

$$c_g\mathcal{R}_g^{(2k)} = (2k)!\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(2k)!(n-2)!}{(n-2k)!2}\mu_k\kappa_g,$$

donde

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(n-2)!}{(n-2k)!2}\mu_k\kappa_g, \tag{3.35}$$

e o segundo item decorre imediatamente. □

Estamos finalmente em condições de linearizar o tensor $2k$-Ricci sob a hipótese $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$. Ora, para uma métrica qualquer temos, em vista de (2.28),

$$\dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)}h = (2k-1)(\dot{c}_g h)c_g^{2k-2}R_g^k + kc_g^{2k-1}R_g^{k-1}\dot{R}_g h, \tag{3.36}$$

que, sob (3.32), reduz-se a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)}h &= (2k-1)(\dot{c}_g h)c_g^{2k-2}(\mu g^{2k-2}R_g) + kc_g^{2k-1}\mu g^{2k-2}\dot{R}_g h \\ &= (2k-1)\mu(\dot{c}_g h)c_g^{2k-2}(g^{2k-2}R_g) + k\mu c_g^{2k-1}g^{2k-2}\dot{R}_g h \\ &=: A_g h + B_g h. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Identifiquemos, portanto, os termos

$$A_g h = (2k-1)\mu(\dot{c}_g h)c_g^{2k-2}(g^{2k-2}R_g), \quad B_g h = k\mu c_g^{2k-1}g^{2k-2}\dot{R}_g h, \tag{3.38}$$

nesta expressão.

Comecemos com o primeiro deles. Usando (2.26), temos

$$\begin{aligned} c_g^{2k-2}(g^{2k-2}R_g) &= g^{2k-2}c_g^{2k-2}R_g + (2k-2)! \times \\ &\quad \times \sum_{r=1}^{2k-2} C_r^{2k-2}\prod_{i=0}^{r-1}(n-4-i)\frac{g^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!}c_g^{2k-2-r}R_g, \end{aligned}$$

e como $k > 2$ resulta que

$$\begin{aligned} c_g^{2k-2}g^{2k-2}R_g &= (2k-2)!\sum_{r=1}^{2k-2} C_r^{2k-2}\prod_{i=0}^{r-1}(n-4-i)\frac{g^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!}c_g^{2k-2-r}R_g \\ &= (2k-2)!C_{2k-4}^{2k-2}\prod_{i=0}^{2k-5}(n-4-i)\frac{g^2}{2}c_g^2 R_g + \\ &\quad +(2k-2)!C_{2k-3}^{2k-2}\prod_{i=0}^{2k-4}(n-4-i)gc_g R_g + \\ &\quad +(2k-2)!C_{2k-2}^{2k-2}\prod_{i=0}^{2k-3}(n-4-i)R_g, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_g^{2k-2}g^{2k-2}R_g &= \frac{(2k-2)!(n-4)!}{(n-2k)!}\Big[(k-1)(2k-3)\frac{g^2}{2}c_g^2R_g + \\
&\quad +(2k-2)(n-2k)gc_gR_g + (n-2k)(n-2k-1)R_g\Big] \\
&= \frac{(2k-2)!(n-4)!}{(n-2k)!}\Big[(k-1)(2k-3)\kappa_g\frac{g^2}{2} + \\
&\quad +(2k-2)(n-2k)g\mathcal{R}_g^{(2)} + (n-2k)(n-2k-1)R_g\Big].
\end{aligned}$$

Mas note que, pela Proposição 3.3.6, item 1, g é Einstein, $\mathcal{R}_g^{(2)} = \frac{\kappa_g}{n}g$, donde os dois primeiros termos no colchete resultam em

$$\frac{(k-1)\kappa_g}{n}\Big((2k-3)n + 4(n-2k)\Big)\frac{g^2}{2} = \frac{(k-1)(2kn+n-8k)\kappa_g}{n}\frac{g^2}{2},$$

o que acarreta

$$\begin{aligned}
c_g^{2k-2}g^{2k-2}R_g &= \frac{(2k-2)!(n-4)!}{(n-2k)!}\Big[\frac{(k-1)(2kn+n-8k)\kappa_g}{2n}g^2 + \\
&\quad +(n-2k)(n-2k-1)R_g\Big].
\end{aligned}$$

Aplicando então $\dot{c}_g h$ a esta igualdade e comparando com (3.38) e (3.34), obtemos

$$A_g h = \frac{C_{n,k}\mu}{(n-3)}\Big[\frac{(k-1)(2kn+n-8k)\kappa_g}{n}(\dot{c}_g h)\frac{g^2}{2} + (n-2k)(n-2k-1)(\dot{c}_g h)R_g\Big], \tag{3.39}$$

ou seja, $A_g h$ está determinada a menos dos termos $(\dot{c}_g h)g^2/2$ e $(\dot{c}_g h)R_g$, que passamos agora a analisar.

Inicialmente, linearizando a identidade $c_g(g^2/2) = (n-1)g$, obtemos então, após usar (2.27),

$$\begin{aligned}
(n-1)h &= (\dot{c}_g h)(g^2/2) + c_g gh \\
&= (\dot{c}_g h)(g^2/2) + gc_g h + (n-2)h,
\end{aligned}$$

donde

$$(\dot{c}_g h)(g^2/2) = h - \mathrm{tr}_g h g. \tag{3.40}$$

Por outro lado, como $c_g R_g = \mathcal{R}_g^{(2)}$, resulta após linearização que

$$(\dot{c}_g h)R_g = \dot{\mathcal{R}}_g^{(2)}h - c_g\dot{R}_g h, \tag{3.41}$$

e se substituirmos (2.41) e (3.26) no lado direito, um notável cancelamento nos fornece

$$(\dot{c}_g h)R_g = -\overset{\circ}{R}_g h, \tag{3.42}$$

de forma que se levarmos (3.40) e (3.42) a (3.39), chegamos a

$$A_g h = \frac{C_{n,k}\mu}{(n-3)}\Big[\frac{(k-1)(2kn+n-8k)\kappa_g}{n}(h-(\mathrm{tr}_g h)g)-(n-2k)(n-2k-1)\overset{\circ}{R}_g h\Big]. \tag{3.43}$$

Para determinar $B_g h$ faremos uso de (2.26) com $k>1$, hipótese que implica em particular que $c_g^{2k-1}\dot{R}_g h = 0$, pois $\dot{R}_g h \in \mathcal{C}^2(X)$. Assim,

$$\begin{aligned} c_g^{2k-1}\left(\frac{g^{2k-2}}{(2k-2)!}\dot{R}_g h\right) &= \sum_{r=1}^{2k-2} C_r^{2k-1}\prod_{i=0}^{r-1}(n-3-i)\frac{g^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!}c_g^{2k-1-r}\dot{R}_g h \\ &= (2k-1)(k-1)\prod_{i=0}^{2k-4}(n-3-i)gc_g^2\dot{R}_g h + \\ &\quad +(2k-1)\prod_{i=0}^{2k-3}(n-3-i)c_g\dot{R}_g h, \end{aligned}$$

de modo que

$$c_g^{2k-1}g^{2k-2}\dot{R}_g h = \frac{(2k-1)!(n-3)!}{(n-2k)!}\Big((k-1)(c_g^2\dot{R}_g h)g + (n-2k)c_g\dot{R}_g h\Big).$$

Apelando então para o Corolário 3.3.3, obtemos

$$\begin{aligned} c_g^{2k-1}g^{2k-2}\dot{R}_g h &= C_{n,k}\Big\{(k-1)\Big[\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h + \langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle\Big]g + \\ &\quad +(n-2k)\frac{1}{2}\Big[\nabla^*\nabla h - \nabla^2\mathrm{tr}_g h - \\ &\quad -2\delta_g^*\delta_g h + \mathcal{R}_g^{(2)}\circ h + h\circ\mathcal{R}_g^{(2)}\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

o que nos fornece, após usarmos a condição de Einstein (veja a Proposição 3.3.6),

$$\begin{aligned} B_g h &= k\mu C_{n,k}\Big\{(k-1)\Big[\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h + \frac{\kappa_g}{n}\mathrm{tr}_g h\Big]g + \\ &\quad +(n-2k)\frac{1}{2}\Big[\nabla^*\nabla h - \nabla^2\mathrm{tr}_g h - 2\delta_g^*\delta_g h + \frac{2\kappa_g}{n}h\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Desse modo, se inserirmos (3.43) e (3.44) em (3.37) obteremos, após algumas simplificações, a expressão para a linearização do tensor $\mathcal{R}_g^{(2k)}$ para variedades $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}}_g^{(2k)}h &= \mu C_{n,k}\Big\{k(n-2k)\frac{1}{2}\big(\nabla^*\nabla h - \nabla^2\mathrm{tr}_g h - 2\delta_g^*\delta_g h\big) + \\ &\quad + k(k-1)\big(\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h\big)g + \\ &\quad + \frac{\kappa_g}{n}\Big[-(k-1)\Big(k + \frac{n-2k}{n-3}\Big)(\mathrm{tr}_g h)g + \\ &\quad + \Big(k(n-2) + \frac{(k-1)(n-2k)}{n-3}\Big)h\Big] - \\ &\quad - \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{n-3}\,\mathring{R}_g h\Big\}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Como consequência deste cálculo, o seguinte resultado decorre imediatamente.

Proposição 3.3.7. *Se $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$, então*

$$\begin{aligned} L_g^{(2k)}h &= \mu_k C_{n,k}\Big\{k(n-2k)\frac{1}{2}\big(\nabla^*\nabla h - \nabla^2\mathrm{tr}_g h - 2\delta_g^*\delta_g h\big) + \\ &\quad + k(k-1)\big(\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h\big)g + \\ &\quad + \frac{n-2k}{n-3}\Big[\alpha(n,k)\kappa_g(\mathrm{tr}_g h)g + \frac{(k-1)\kappa_g}{n}h - (n-2k-1)\,\mathring{R}_g h\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

onde $\alpha(n, k)$ somente depende de (n, k). Em particular,

$$\begin{aligned} L_g^{(2k)}|_{\mathrm{tr}_g^{-1}(0)}h &= \mu_k C_{n,k}\Big\{k(n-2k)\frac{1}{2}\big(\nabla^*\nabla h - 2\delta_g^*\delta_g h\big) + \\ &\quad + k(k-1)(\delta_g\delta_g h)g + \\ &\quad + \frac{n-2k}{n-3}\Big[\frac{(k-1)\kappa_g}{n}h - (n-2k-1)\,\mathring{R}_g h\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

e

$$L_g^{(2k)}|_{\mathcal{I}_g}h = \mu_k k(n-2k)C_{n,k}\Big(\frac{1}{2}\nabla^*\nabla h + P_g h\Big), \tag{3.46}$$

onde

$$P_g h = \frac{(k-1)\kappa_g}{nk(n-3)}h - \frac{n-2k-1}{k(n-3)}\,\mathring{R}_g h. \tag{3.47}$$

Observação 3.3.8. Se g possui curvatura seccional constante μ, de modo que $R_g = \frac{\mu}{2}g^2$, então $\kappa_g = n(n-1)\mu$, $\mu_k = \mu^{k-1}/2^{k-1}$ e $\overset{\circ}{R}_g h = \mu((\mathrm{tr}_g h)g - h)$, implicando assim que $P_g h = \mu h$, se $\mathrm{tr}_g h = 0$. Consequentemente,

$$L_g^{(2k)}|_{\mathcal{I}_g} h = (n-2k)\frac{kC_{n,k}}{2^{k-1}}\mu^{k-1}\left(\frac{1}{2}\nabla^*\nabla h + \mu h\right),$$

que coincide com o resultado obtido anteriormente em [dLS1].

3.4 Demonstrando os teoremas de rigidez

Nesta seção, usaremos as fórmulas de linearização apresentadas na Proposição 3.3.7 para demonstrar os teoremas de rigidez discutidos na Seção 3.2.

Ora, o Teorema 3.2.7 decorre imediatamente de (3.46), visto que $\nabla^*\nabla$ é elíptico; veja a Observação 3.2.4. Para demonstrar o Teorema 3.2.9, suponha que $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$ e seja $h \in \varepsilon_{\langle g\rangle}^{(2k)}$, de forma que, por (3.46), h satisfaz

$$\nabla^*\nabla h + 2P_g h = 0. \tag{3.48}$$

Usando isto, (2.18), o fato que g é Einstein (pela Proposição 3.3.6) e (3.47), temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|d^\nabla h\|^2 + \|\delta^\nabla h\|^2 \\
&= \left(\left(\nabla^*\nabla - \overset{\circ}{R}_g + \frac{\kappa_g}{n}\right)h, h\right) \\
&= \left(\left(-2P_g - \overset{\circ}{R}_g + \frac{\kappa_g}{n}\right)h, h\right) \\
&= \frac{1}{k(n-3)}\left(\left(\frac{kn-5k+2}{n}\kappa_g + (2n-k-2-kn)\overset{\circ}{R}_g\right)h, h\right) \\
&\leq \frac{1}{k(n-3)}\left(\left(\frac{kn-5k+2}{n}\kappa_g + (2n-k-2-kn)\underline{a}_0\right)h, h\right),
\end{aligned}$$

onde aqui usamos que $2n-k-2-kn < 0$, se $k \geq 2$. Assim, se $h \neq 0$, então necessariamente vale

$$\frac{kn-5k+2}{n}\kappa_g + (2n-k-2-kn)\underline{a}_0 \geq 0,$$

ou seja,

$$\underline{a}_0 \leq \underline{\alpha}_{n,k}\kappa_g.$$

Por outro lado, um argumento similar com (2.18) substituído por (2.44) fornece

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|S_2 h\|^2 \\
&= \left(\left(\nabla^*\nabla + 2\,\mathring{R}_g - 2\frac{\kappa_g}{n}\right) h, h\right) \\
&= \left(\left(-2P_g + 2\,\mathring{R}_g - 2\frac{\kappa_g}{n}\right) h, h\right) \\
&= \frac{2}{k(n-3)}\left(\left(-\frac{kn-2k-1}{n}\kappa_g + (kn-5k+n-1)\,\mathring{R}_g\right) h, h\right) \\
&\leq \frac{2}{k(n-3)}\left(\left(-\frac{kn-2k-1}{n}\kappa_g + (kn-5k+n-1)\,\overline{a}_0\right) h, h\right),
\end{aligned}$$

ou seja, $h \neq 0$ necessariamente acarreta

$$\overline{a}_0 \geq \overline{\alpha}_{n,k}\kappa_g.$$

Isto completa a demonstração do Teorema 3.2.9.

Vamos agora à demonstração do Teorema 3.2.15, do qual o Teorema 3.2.13 decorre imediatamente, como já explicado. Observemos inicialmente que o fato de o tensor de Lovelock $\mathcal{J}_g^{(2k)}$ possuir divergência nula, para *qualquer* métrica g, expressa-se como

$$\delta_g \mathcal{R}_g^{(2k)} + (2k-1)!d\mathcal{S}_g^{(2k)} = 0. \tag{3.49}$$

Se introduzirmos então o funcional $\mathcal{G} : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{C}^1(X)$,

$$\mathcal{G}(g) = \mathcal{R}_g^{(2k)} - \frac{(2k)!}{n}\mathcal{F}^{(2k)}(g)g,$$

e o *operador* $(2k)$*-Bianchi* $\beta_g^{(2k)} : \mathcal{C}^1(X) \to \mathcal{A}^1(X)$,

$$\beta_g^{(2k)} = \delta_g + \frac{1}{2k}d\mathrm{tr}_g,$$

a proposição a seguir resulta imediatamente das definições e de (3.49).

Proposição 3.4.1. *As seguintes propriedades valem:*

1. *g é $2k$-Einstein se, e somente se, $\mathcal{G}(g) = 0$;*

2. *Se g é $2k$-Einstein, então $\dot{\mathcal{G}}_g = L_g^{(2k)}$ em $T_g\mathcal{M}_1(X)$.*

3. *Para qualquer g, $\beta_g^{(2k)}\mathcal{G}(g) = 0$. Em particular, se g é $2k$-Einstein, $\beta_g^{(2k)}\dot{\mathcal{G}}_g = 0$.*

Esta proposição produz, em particular, a identificação $E_1^{(2k)}(X) = \mathcal{G}^{-1}(0)$. Neste contexto, a identidade $\beta_g^{(2k)}\dot{\mathcal{G}}_g = 0$ significa que $\dot{\mathcal{G}}_g$ não é sobrejetiva, pois qualquer $u \in \operatorname{Im}\dot{\mathcal{G}}_g$ pertence ao núcleo do o.d.l. de primeira ordem $\beta_g^{(2k)}$, o que naturalmente reflete a invariância por difeomorfismos da condição $2k$-Einstein. Obviamente, isto é um sério entrave ao tentarmos usar o Teorema da Função Implícita para entender a estrutura de $\mathfrak{E}_g^{(2k)}(X)$. Uma saída é usar a Proposição 3.3.7 e considerar o operador $\tilde{L}_g^{(2k)} : \mathcal{C}^1(X) \to \mathcal{C}^1(X)$,

$$\begin{aligned}\tilde{L}_g^{(2k)}h &= L_g^{(2k)}h + \mu_k C_{n,k}k(n-2k)\delta_g^*\delta_g h - \mu_k C_{n,k}k(k-1)(\delta_g\delta_g h)g \\ &= \mu_k k(n-2k)C_{n,k}\Big[\frac{1}{2}\big(\nabla^*\nabla h - \nabla^2\mathrm{tr}_g h\big) + \frac{k-1}{n-2k}(\Delta_g\mathrm{tr}_g h)g + \\ &\quad + \frac{\alpha(n,k)\kappa_g}{k(n-3)}(\mathrm{tr}_g h)g + P_g h\Big].\end{aligned}$$

Portanto, (veja a Seção 2.6)

$$\sigma_{\tilde{L}_g^{(2k)}}(p,\xi)(h) = -\mu_k k(n-2k)C_{n,k}\big[\tfrac{1}{2}\big(|\xi|^2 h + \mathrm{tr}_g h(\xi\otimes\xi)\big) + \big(\tfrac{k-1}{n-2k}|\xi|^2\mathrm{tr}_g h\big)g\big],$$

donde segue a elipticidade de $\tilde{L}_g^{(2k)}$. Note que $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g) = L_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g)$.

Lema 3.4.2. *$\tilde{L}_g^{(2k)}$ deixa invariante o subespaço*

$$T_g\mathcal{M}_1(X) = \left\{h \in \mathcal{C}^1(X); \int_X \mathrm{tr}_g h\,\nu_g = 0\right\}.$$

Em particular, $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{M}_1(X))$ é fechado.

Demonstração. É fácil ver que $\mathrm{tr}_g\mathring{R}_g h = \langle\mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle$, de modo que a condição de Einstein implica

$$\mathrm{tr}_g P_g h = \frac{3k-n}{nk(n-3)}\kappa_g\mathrm{tr}_g h.$$

Como $\mathrm{tr}_g\nabla^*\nabla h = \Delta_g\mathrm{tr}_g h = -\mathrm{tr}_g\nabla^2\mathrm{tr}_g h$, resulta então que

$$\mathrm{tr}_g\tilde{L}_g^{(2k)}h = \mu_k k^2(n-2)C_{n,k}\Big[\Delta_g - \frac{\kappa_g}{n}\Big]\mathrm{tr}_g h,$$

donde

$$\int_X \mathrm{tr}_g\tilde{L}_g^{(2k)}h\,\nu_g = -\mu_k k^2(n-2)C_{n,k}\frac{\kappa_g}{n}\int_X \mathrm{tr}_g h\,\nu_g,$$

o que prova a invariância de $T_g\mathcal{M}_1(X)$. A elipticidade de $\tilde{L}_g^{(2k)}$ implica então que $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{M}_1(X))$ é fechado. □

Verifiquemos agora as condições impostas a $\tilde{L}_g^{(2k)}$ pela invariância por difeomorfismos da condição $2k$-Einstein. Usando a Proposição 3.4.1 e a identidade $\mathrm{tr}_g\delta_g^*\eta = -\delta_g\eta$, $\eta \in \mathcal{A}^1(X)$, temos para $h \in T_g\mathcal{M}_1(X)$

$$\begin{aligned}
\beta_g^{(2k)}\tilde{L}_g^{(2k)}h &= \mu_k C_{n,k}k(n-2k)\beta_g^{(2k)}\delta_g^*\delta_g h - \mu_k C_{n,k}k(k-1)\beta_g^{(2k)}[(\delta_g\delta_g h)g] \\
&= C_{n,k}k(n-2k)\mu_k\Big(\delta_g\delta_g^*\delta_g h + \frac{1}{2k}d\mathrm{tr}_g\delta_g^*\delta_g h\Big) \\
&\quad -C_{n,k}k(k-1)\mu_k\Big\{\delta_g[(\delta_g\delta_g h)g] + \frac{1}{2k}d\mathrm{tr}_g[(\delta_g\delta_g h)g]\Big\} \\
&= C_{n,k}k(n-2k)\mu_k\Big(\delta_g\delta_g^*\delta_g h - \frac{1}{2}d\delta_g\delta_g h\Big),
\end{aligned}$$

de modo que, pondo $G_g = \delta_g\delta_g^* - \frac{1}{2}d\delta_g$, segue-se então que

$$\beta_g^{(2k)}\tilde{L}_g^{(2k)}h = C_{n,k}k(n-2k)\mu_k G_g\delta_g h, \tag{3.50}$$

com G_g sendo elíptico.

Agora, (3.50) inicialmente fornece $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g) \subset \ker\beta_g^{(2k)}$. Além disso, se $\tilde{L}_g^{(2k)}h \in \ker\beta_g^{(2k)}$, então $\delta_g h \in \ker G_g$, um espaço de dimensão *finita*, e isto nos dá

$$\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g) \subset \tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{M}_1(X)) \cap \ker\beta_g^{(2k)} \subset \tilde{L}_g^{(2k)}\left(T_g\mathcal{M}_1(X) \cap \delta_g^{-1}\ker G_g\right).$$

Como $T_g\mathcal{V}_g$ possui codimensão *finita* em $T_g\mathcal{M}_1(X) \cap \delta_g^{-1}\ker G_g$, resulta que a codimensão de $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g)$ em $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{M}_1(X)) \cap \ker\beta_g^{(2k)}$ também é finita. Juntando isto ao fato de serem $T_g\mathcal{V}_g$ e $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{M}_1(X)) \cap \ker\beta_g^{(2k)}$ fechados, fica fácil verificar que $\tilde{L}_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g)$ é fechado em $\mathcal{C}^1(X)$. Concluímos então que, embora $L_g^{(2k)} = \dot{\mathcal{G}}_g : T_g\mathcal{V}_g \to \mathcal{C}^1(X)$ não seja sobrejetivo, possui imagem fechada. Assim, se π é a projeção ortogonal de $\mathcal{C}^1(X)$ sobre $L_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g)$, a composição $\pi \circ \mathcal{G} : \mathcal{V}_g \to L_g^{(2k)}(T_g\mathcal{V}_g)$, que é analítica, é uma submersão em g. Logo, $(\pi \circ \mathcal{G})^{-1}(0)$ é uma variedade analítica real numa vizinhança de g tendo $\varepsilon_{\langle g\rangle}^{(2k)}$ como seu espaço tangente em g. Nesta variedade, a aplicação $\mathcal{G}$ é analítica, de forma que o espaço de pré-módulos $\mathfrak{E}_g^{2k}(X) = \mathcal{G}^{-1}(0)$ é um subconjunto analítico. Isto completa a demonstração do Teorema 3.2.15 e, por conseguinte, do Teorema 3.2.13.

Capítulo 4

O problema de Yamabe para curvaturas de Gauss-Bonnet

Neste capítulo consideramos duas generalizações do clássico problema de Yamabe, a saber, o problema σ_k-Yamabe e o problema de Yamabe para a curvatura de Gauss-Bonnet $\mathcal{S}^{(2k)}$, que de fato são equivalentes na classe das variedades localmente conformemente planas. Neste contexto, o problema já foi considerado sob hipóteses adicionais na métrica *background* [GW] [LL]. Como consequência de uma fórmula para a linearização da curvatura de Gauss-Bonnet para $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$ (veja a Proposição 4.2.1 abaixo), demonstramos uma versão local do problema de Yamabe para a curvatura de Gauss-Bonnet numa subclasse de $\mathcal{H}_{n,k}$ que inclui as formas espaciais não-euclidianas. Isto fornece, em particular, os primeiros exemplos de métricas *background* com tensor de Weyl *não*-identicamente nulo para os quais este problema do tipo Yamabe é afirmativamente resolvido.

4.1 O problema de Yamabe e suas generalizações

O problema de Yamabe clássico consiste em verificar que em cada classe conforme de métricas numa variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$ existe pelo menos uma métrica com curvatura escalar constante. Esta proposição, cuja validade no caso de superfícies decorre do Teorema de Uniformização em Variáveis Complexas, foi finalmente verificada por R. Schoen, após contribuições fundamentais de Yamabe, Trudinger e Aubin, e representa um dos mais retumbantes sucessos dos métodos da Análise Geométrica em tempos recentes; veja [LP] para detalhes sobre esta história.

Como evidenciado pela Proposição 2.7.9, o problema de Yamabe de fato é apenas o primeiro de uma série de problemas de natureza variacional em Geometria Conforme. Mais precisamente, em vista daquela proposição, é natural também considerar o seguinte problema:

Problema de Yamabe para as curvaturas de Gauss-Bonnet: *dados $n \geq 4$, $1 \leq k \leq n/2$ e uma variedade Riemanniana (X^n, g), existe $g' \in [g]$ tal que $\mathcal{S}_{g'}^{(2k)}$ é constante?*

Claramente, para $k = 1$ isto reduz-se ao problema de Yamabe clássico. Por outro lado, o problema geral acima guarda relação com um outro problema do tipo Yamabe bastante estudado recentemente. Para ver isto, recordemos a decomposição (2.15) para o tensor curvatura:

$$R_g = A_g \odot g + W_g, \tag{4.1}$$

onde W_g é o tensor de Weyl e

$$A_g = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{\kappa_g}{2(n-1)}g\right), \tag{4.2}$$

é o tensor de Schouten. Conforme já observamos, dado que W_g é conformemente invariante, resulta que todas as informações a respeito de mudanças conformes de métricas estão concentradas em A_g. Deste ponto de vista, se $\sigma_k(A_g)$ denota a k-ésima função simétrica elementar dos autovalores de A_g (visto como um elemento de $\mathcal{T}^{(1,1)}(X)$), o seguinte problema é deveras natural:

Problema σ_k-Yamabe: *dados $n \geq 4$, $1 \leq k \leq n/2$ e uma variedade Riemanniana (X^n, g), existe $g' \in [g]$ tal que $\sigma_k(A_{g'})$ é constante?*

Note que, como $\sigma_1(A_g)$ é um múltiplo de κ_g, isto reduz-se ao problema de Yamabe clássico para $k = 1$. Para uma introdução a este círculo de idéias, recomendamos [V].

Acontece que os dois problemas do tipo Yamabe descritos acima são completamente equivalentes na classe das variedades conformemente planas. Isto resulta da proposição abaixo, demonstrada em [L3].

Proposição 4.1.1. *Se $n \geq 4$, $1 \leq k \leq n/2$ e (X^n, g) é variedade Riemanniana, então*

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(n-k)!k!}{(n-2k)!}\sigma_k(A_g) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!(k-i)!(n-2k)!}\langle \star g^{n-2k+i} P_g^i, W_g^{k-i}\rangle, \tag{4.3}$$

onde $\star$ é a extensão natural do operador estrela de Hodge atuando em $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(X)$. Em particular, se (X, g) é localmente conformemente plana ($W_g = 0$), então

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(n-k)!k!}{(n-2k)!}\sigma_k(A_g). \tag{4.4}$$

O problema σ_k-Yamabe para variedades conformemente planas (ou, equivalentemente, o problema de Yamabe para curvaturas de Gauss-Bonnet) foi tratado em [GW] e [LL], supondo que a métrica *background* satisfaz uma certa condição de elipticidade. O teorema abaixo apresenta um resultado do tipo perturbativo para o problema de Yamabe para curvaturas de Gauss-Bonnet em torno de variedades Riemannianas na classe $\mathcal{H}_{n,k}$, exceto pelas esferas redondas, e fornece os primeiros exemplos de variedades *não*-conformemente planas para as quais este problema é resolvido.

Definição 4.1.2. *Dados $n \geq 4$ e $1 \leq k < n/2$, seja $\mathcal{H}'_{n,k}$ o complemento do conjunto das esferas redondas em $\mathcal{H}_{n,k}$.*

Assim, $(X, g) \in \mathcal{H}'_{n,k}$ se, e somente se, g é $2k$-Einstein e satisfaz

$$R_g^{k-1} = \mu_k g^{2k-2}, \quad \mu_k \neq 0,$$

com (X, g) sendo isometricamente distinta de uma esfera redonda. Observe que, neste caso, resulta de (3.35) que

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{(n-2)!}{(n-2k)!2}\mu_k \kappa_g,$$

e como g é Einstein pela Proposição 3.3.6, decorre que a $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet de (X, g) é constante. No teorema abaixo, $\mathcal{D}^+(X)$ denota o conjunto das funções suaves positivas em X e $1 : X \to \mathbb{R}$ é a função identicamente igual a 1.

Teorema 4.1.3. *Admita que $4 \leq 2k < n$ e seja $(X, g_0) \in \mathcal{H}'_{n,k}$ com* $\mathrm{vol}(X, g_0) = \nu$*. Então, o espaço $\mathcal{M}_\nu^{(2k)}(X)$ das métricas em X com $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet* constante *e volume ν tem, em torno de g_0, a estrutura de uma ILH-subvariedade (de dimensão infinita) de $\mathcal{M}(X)$. Mais ainda, a aplicação $\xi : \mathcal{D}^+(X) \times \mathcal{M}_\nu^{(2k)}(X) \to \mathcal{M}(X)$, dada por $\xi(f, g) = fg$, é ILH-suave em torno de $(1, g_0)$ e sua derivada em $(1, g_0)$ é um isomorfismo. Em particular, existe uma vizinhança U de g_0 em $\mathcal{M}(X)$ tal que qualquer métrica em U é conforme a uma métrica cuja $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet é constante.*

Para a tecnologia ILH, indicamos [O]. Mencionamos ainda que a demonstração deste teorema é inspirada num argumento de Koiso [K], onde um resultado do tipo Yamabe local foi demonstrado no caso $k = 1$ para uma classe de variedades que contém $\mathcal{H}'_{n,k}$.

Observação 4.1.4. O resultado do tipo Yamabe local no Teorema 4.1.3 não é válido no caso em que g_0 é a métrica redonda na esfera. De fato, se aplicarmos a operação de *pull-back* a g_0 utilizando o fluxo de um campo conforme, obteremos uma família a um parâmetro de métricas conformes com mesma curvatura de Gauss-Bonnet e volume.

4.2 Linearizando a curvatura de Gauss-Bonnet

O ingrediente central na demonstração do Teorema 4.1.3 é a linearização da $2k$-curvatura de Gauss-Bonnet em variedades Riemannianas na classe $\mathcal{H}_{n,k}$; veja a Proposição 4.2.1 abaixo. Ora, em geral temos, pela Definição 2.5.3,

$$\mathcal{S}_g^{(2k)} = \frac{1}{(2k)!} c_g^{2k} R_g^k,$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h &= \frac{1}{(2k-1)!} \dot{c}_g h c_g^{2k-1} R_g^k + \frac{k}{(2k)!} c_g^{2k} R_g^{k-1} \dot{R}_g h \\ &= \frac{1}{(2k-1)!} \dot{c}_g h \mathcal{R}_g^{(2k)} + \frac{k}{(2k)!} c_g^{2k} R_g^{k-1} \dot{R}_g h. \end{aligned}$$

Assim, podemos usar (3.32), (3.33) e (3.34) para verificar que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h &= \frac{C_{n,k}\mu_k}{(2k-1)!} \Big((k-1)\kappa_g(\dot{c}_g h) g + (n-2k)(\dot{c}_g h)\mathcal{R}_g^{(2)} \Big) + \\ &\quad + \frac{k}{(2k)!} \mu_k c_g^{2k} g^{2k-2} \dot{R}_g h. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para explicitar o lado direito de (4.5), notemos inicialmente que $c_g g = n$ implica, após linearização, $(\dot{c}_g h) g + c_g h = 0$, donde

$$(\dot{c}_g h) g = -\mathrm{tr}_g h. \tag{4.6}$$

Por outro lado, as definições $\mathcal{R}_g^{(2)} = c_g R_g$ e $\kappa_g = c_g \mathcal{R}_g^{(2)}$ levam, após linearização, a

$$\begin{aligned}(\dot{c}_g h)\mathcal{R}_g^{(2)} &= \dot{\kappa}_g h - c_g \dot{\mathcal{R}}_g^{(2)} h \\ &= \dot{\kappa}_g h - c_g(\dot{c}_g h) R_g - c_g^2 \dot{R}_g h,\end{aligned}$$

e usando (3.30) e (3.31) vemos que

$$(\dot{c}_g h)\mathcal{R}_g^{(2)} = -\langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle. \tag{4.7}$$

Finalmente, se usarmos (2.26) levando em consideração que $c_g^{2k}\dot{R}_g h = 0$ para $k > 1$ e $c_g^{2k-r}\dot{R}_g h = 0$ para $r < 2k-2$, obteremos

$$\begin{aligned}c_g^{2k} g^{2k-2}\dot{R}_g h &= (2k-2)!\sum_{r=1}^{2k-2} C_r^{2k}\prod_{i=0}^{r-1}(n-2-i)\frac{g^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!}c_g^{2k-r}\dot{R}_g h \\ &= (2k-2)! C_{2k-2}^{2k}\prod_{i=0}^{2k-3}(n-2-i)c_g^2\dot{R}_g h \\ &= k(n-2)C_{n,k}\ c_g^2 \dot{R}_g h,\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_g^{2k} g^{2k-2}\dot{R}_g h = k(n-2)C_{n,k}\ c_g^2\dot{R}_g h. \tag{4.8}$$

Assim, levando (4.6), (4.7) e (4.8) a (4.5), temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h &= \frac{C_{n,k}\mu_k}{(2k-1)!}\Big\{ -(k-1)\kappa_g \mathrm{tr}_g h - (n-2k)\langle \mathcal{R}_g^{(2)}, h\rangle + \\ &\quad + \frac{k(n-2)}{2} c_g^2 \dot{R}_g h\Big\},\end{aligned}$$

que, em função de (3.27), reduz-se a

$$\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h = D_{n,k}\mu_k\left(\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h + \langle T_g, h\rangle\right), \tag{4.9}$$

onde

$$T_g = \frac{1}{k(n-2)}\big((kn+2k-2n)\mathcal{R}_g^{(2)} - 2(k-1)\kappa_g g\big) \tag{4.10}$$

e

$$D_{n,k} = \frac{k^2(n-2)C_{n,k}}{(2k)!}. \tag{4.11}$$

Proposição 4.2.1. *Se* $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$*, então*

$$\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)} h = D_{n,k}\mu_k \left(\Delta_g \mathrm{tr}_g h + \delta_g\delta_g h - \frac{\kappa_g}{n}\mathrm{tr}_g h\right). \tag{4.12}$$

Demonstração. Basta observar que, pela Proposição 3.3.6, g é Einstein, ou seja, $\mathcal{R}_g^{(2)} = \frac{\kappa_g}{n} g$. $\square$

Utilizaremos ainda esta fórmula para $h = fg$, $f \in \mathcal{D}(X)$. Neste caso, $\delta_g(fg) = -df$, donde $\delta_g\delta_g(fg) = -\Delta_g f$, e o corolário a seguir é imediato.

Corolário 4.2.2. *Se* $(X, g) \in \mathcal{H}_{n,k}$*, então*

$$\dot{\mathcal{S}}_g^{(2k)}(fg) = D'_{n,k}\mu_k \mathcal{L}_g f, \tag{4.13}$$

onde

$$\mathcal{L}_g = \Delta_g - \frac{\kappa_g}{n-1} \tag{4.14}$$

e

$$D'_{n,k} = (n-1)D_{n,k}. \tag{4.15}$$

Observação 4.2.3. Verifica-se, com facilidade, que (4.9) e (4.13) continuam válidas para variedades (X, g) satisfazendo (3.32) apenas.

O seguinte fato sobre o operador $\mathcal{L}_g$, para (X, g) na subclasse $\mathcal{H}'_{n,k}$, desempenhará um papel crucial em nossa análise.

Proposição 4.2.4. *Se* $(X, g) \in \mathcal{H}'_{n,k}$*, então ou* $\ker \mathcal{L}_g$ *é trivial ou é constituído pelas funções constantes.*

Demonstração. O resultado é óbvio se $\kappa_g \leq 0$, pois Δ_g é não-negativo. Por outro lado, se $\kappa_g > 0$, um resultado de Lichnerowicz e Obata [BGM] implica, pelo fato de (X, g) ser Einstein, que o primeiro autovalor de Δ_g é maior do que ou igual a $\kappa_g/(n-1)$, com igualdade se, e somente se, (X, g) é uma esfera redonda. $\square$

4.3 Demonstrando o Teorema 4.1.3

Seja $(X, g_0) \in \mathcal{H}'_{n,k}$, de modo que, em particular, g_0 satisfaz $R_{g_0}^{k-1} = \mu_k {g_0}^{2k-2}$, $\mu_k \neq 0$. Aplicando uma homotetia a g_0 podemos supor que $g_0 \in \mathcal{M}_1(X)$, o espaço de métricas de volume unitário. Logo, devemos demonstrar o Teorema 4.1.3 com $\nu = 1$.

Na discussão a seguir, $H^r_{g_0}(\mathcal{U})$ denota a construção de Sobolev padrão aplicada a um subconjunto aberto $\mathcal{U}$ de seções de um fibrado vetorial sobre X, de forma que, por exemplo, $H^r_{g_0}(\mathcal{M}(X))$ é a variedade de Hilbert, modelada sobre $H^r_{g_0}(\mathcal{C}^1(X))$, de métricas com derivadas até a ordem r definidas em quase todo ponto e de quadrado integrável (com respeito a g_0).

Escolhamos $r > \frac{n}{2} + 4$ e definamos $\mathcal{B}_r : H^r_{g_0}(\mathcal{M}(X)) \to H^{r-4}_{g_0}(\mathcal{D}_\bullet(X))$ por

$$\mathcal{B}_r(g) = \Delta_g \mathcal{S}^{(2k)}_g - \int_X \Delta_g \mathcal{S}^{(2k)}_g \nu_{g_0},$$

onde

$$\mathcal{D}_\bullet(X) = \left\{ \rho \in \mathcal{D}(X); \int_X \rho\, \nu_{g_0} = 0 \right\}.$$

Como $g \in H^r_{g_0}(\mathcal{M}(X))$ implica $R_g \in H^{r-2}_{g_0}(\mathcal{C}^2(X))$, $\mathcal{B}_r$ está bem definida e é suave em função da expressão local (2.25) para $\mathcal{S}^{(2k)}_g$ e o fato que, para $r - 2 > n/2 + 2 > n/2$, o espaço de Sobolev $H^{r-2}_{g_0}$ é uma álgebra de Banach com respeito a multiplicação ponto a ponto [MS]. No lema abaixo, ainda denotaremos por $\mathcal{B}_r$ a restrição desta aplicação a $H^r_{g_0}(\mathcal{M}_1(X))$.

Lema 4.3.1. *Existe uma vizinhança, digamos V^r, de g_0 em $H^r_{g_0}(\mathcal{M}^{(2k)}_1(X))$ que é uma subvariedade suave de $H^r_{g_0}(\mathcal{M}(X))$ com $T_{g_0}V^r = \ker \dot{\mathcal{B}}_r(g_0)$.*

Demonstração. Note que $\dot{\Delta}_{g_0}(h)\mathcal{S}^{(2k)}_{g_0} = 0$ para $h \in \mathcal{C}^1(X)$, pois $\mathcal{S}^{(2k)}_{g_0}$ é constante. Assim, obtemos de (4.12) que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{B}}_r(g_0)(h) &= \Delta_{g_0} \dot{\mathcal{S}}^{(2k)}_{g_0}(h) \\ &= D_{n,k}\mu_k \Delta_{g_0} \left(\Delta_{g_0} \mathrm{tr}_{g_0} h + \delta_{g_0}\delta_{g_0} h - \frac{\kappa_{g_0}}{n} \mathrm{tr}_{g_0} h \right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Façamos agora $h = f g_0$ para $f \in H^r_{g_0}(\mathcal{D}_\bullet(X))$, de modo que, por (4.13),

$$\dot{\mathcal{B}}_r(g_0)(f g_0) = D'_{n,k}\mu_k \Delta_{g_0} \mathcal{L}_{g_0} f.$$

Usando a Proposição 4.2.4 é fácil ver que $\dot{\mathcal{B}}_r(g_0)|_{H^r_{g_0}(\mathcal{D}_\bullet(X))g_0}$ é injetiva e a alternativa de Fredholm implica então que

$$H^{r-4}_{g_0}(\mathcal{D}_\bullet(X)) = \dot{\mathcal{B}}_r(g_0)(H^r_{g_0}(\mathcal{D}_\bullet(X))g_0).$$

O lema é agora uma consequência imediata do Teorema da Função Implícita e do fato que $\mathcal{B}_r^{-1}(0) = H^r_{g_0}(\mathcal{M}^{(2k)}_1(X))$. $\square$

Lema 4.3.2. *Se $\xi^r : H^r_{g_0}(\mathcal{D}^+(X)) \times V^r \to H^r_{g_0}(\mathcal{M}(X))$ é a aplicação suave dada por $\xi^r(f,g) = fg$, então $d\xi^r_{(1,g_0)}$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Se $d\xi^r_{(1,g_0)}(\phi, h) = h + \phi g_0 = 0$, então $h = -\phi g_0 \in \ker \dot{\mathcal{B}}_r(g_0)$, de maneira que $\mathcal{L}_{g_0}\Delta_{g_0}\phi = 0$. Então, $\Delta_{g_0}\phi = 0$ pela Proposição 4.2.4 e ϕ é constante. Mas $\int_X \phi\, \nu_{g_0} = 0$, porque $V^r \subset H^r_{g_0}(\mathcal{M}_1(X))$, e assim $\phi = 0$, o que implica $h = 0$. Isto mostra a injetividade de $d\xi^r_{(1,g_0)}$.

Para a sobrejetividade, note que a decomposição

$$\operatorname{Im} d\xi^r_{(1,g_0)} = T_{g_0}V^r \oplus H^r_{g_0}(\mathcal{D}(X))g_0$$

já mostra que $\operatorname{Im} d\xi^r_{(1,g_0)}$ é fechado em $H^r_{g_0}(\mathcal{C}^1(X))$. Admita, por contradição, a existência de $h \neq 0$ em $H^r_{g_0}(\mathcal{C}^1(X))$ ortogonal a $T_{g_0}V^r$ e $H^r_{g_0}(\mathcal{D}(X))g_0$. Resulta de (4.16) que $\dot{\mathcal{B}}_r(g_0)$ tem símbolo sobrejetivo, e como $\mathbb{R}g_0 \oplus T_{g_0}V^r = \ker \dot{\mathcal{B}}_r(g_0)$, tem-se a decomposição

$$H^r_{g_0}(\mathcal{C}^1(X)) = \mathbb{R}g_0 \oplus T_{g_0}V^r \oplus \operatorname{Im} \dot{\mathcal{B}}_{r+4}(g_0)^*.$$

Veja [E], páginas 26 e 27, para a notação e o resultado utilizados. Isto permite escrever $h = \dot{\mathcal{B}}_{r+4}(g_0)^*(\varphi)$, ou seja,

$$h = D_{n,k}\mu_k \left((\Delta^2_{g_0}\varphi)g_0 + \nabla^2\Delta_{g_0}\varphi - \frac{\kappa_{g_0}}{n}(\Delta_{g_0}\varphi)g_0 \right),$$

e tomando traço,

$$\operatorname{tr}_{g_0} h = D'_{n,k}\mu_k \mathcal{L}_{g_0}\Delta_{g_0}\varphi.$$

Mas, $\operatorname{tr}_{g_0} h = 0$, porque h é ortogonal a $H^r_{g_0}(\mathcal{D}(X))g_0$, de modo que se usarmos a Proposição 4.2.4 e a caracterização variacional do primeiro autovalor $\lambda_1(\Delta_{g_0})$, teremos

$$\frac{\kappa_{g_0}}{n-1} < \lambda_1(\Delta_{g_0}) \leq \frac{\int_X |\nabla\Delta_{g_0}\varphi|^2\nu_{g_0}}{\int_X |\Delta_{g_0}\varphi|^2\nu_{g_0}} = \frac{\kappa_{g_0}}{n-1},$$

uma contradição, a menos que $\Delta_{g_0}\varphi = 0$, ou seja, φ é constante e, portanto, $h = 0$. Isto completa a demonstração do lema. □

Com os lemas 4.3.1 e 4.3.2 à disposição, é imediato demonstrar o Teorema 4.1.3, essencialmente usando o fato que objetos na categoria ILH são definidos como limites inversos de objetos na categoria $H^r_{g_0}$ quando $r \to +\infty$. Omitiremos, portanto, os detalhes e referimos a [K]; veja lá a demonstração do Teorema 2.5.

Observação 4.3.3. Salientamos que os argumentos acima podem ser facilmente adaptados para um problema do tipo Yamabe envolvendo certas funções das curvaturas de Gauss-Bonnet. De fato, seja k_n o maior inteiro estritamente menor do que $n/2$ e (X^n, g_0) uma forma espacial não-plana, $R_{g_0} = \frac{\mu}{2} g_0^2,\ \mu \neq 0$ (donde $(X, g_0) \in \mathcal{H}_{n,k}$ e (3.32) ocorrem para todo $k \leq k_n$, com $\mu_k = (\frac{\mu}{2})^{k-1}$). Para $G : \mathbb{R}^{k_n} \to \mathbb{R}$ suave, defina

$$\mathcal{G}_g = G(\mathcal{S}_g^{(2)}, \ldots, \mathcal{S}_g^{(2k_n)}), \qquad g \in \mathcal{M}(X), \tag{4.17}$$

e *admita* que

$$D \equiv \sum_{1 \leq k \leq k_n} D_{n,k} \mu_k \frac{\partial G}{\partial x_k} \left(\mathcal{S}_{g_0}^{(2)}, \ldots, \mathcal{S}_{g_0}^{(2k_n)} \right) \neq 0. \tag{4.18}$$

Obtemos assim as fórmulas correspondentes a (4.12) e (4.13), a saber,

$$\dot{\mathcal{G}}_{g_0}(h) = D \left(\Delta_{g_0} \mathrm{tr}_{g_0} h + \delta_{g_0} \delta_{g_0} h - \frac{\kappa_{g_0}}{n} \mathrm{tr}_{g_0} h \right),$$

e

$$\dot{\mathcal{G}}_{g_0}(f g_0) = D' \mathcal{L}_{g_0} f, \qquad D' = (n-1) D.$$

Daí, um resultado similar ao Teorema 4.1.3, para (X, g_0) distinta de uma esfera redonda, vale: existe uma vizinhança U de g_0 em $\mathcal{M}(X)$ tal que qualquer métrica em U é conforme a uma métrica g com $\mathcal{G}_g$ constante.

Capítulo 5

Unicidade e bifurcação para o problema σ_2-Yamabe

5.1 Uma introdução ao problema: existência, unicidade e compacidade

Seja (X^n, g) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão $n \geq 3$. Sabemos de (2.15) que o tensor curvatura decompõe-se como

$$R_g = W_g + A_g \odot g,$$

onde W_g é o tensor de Weyl,

$$A_g = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}_g - \frac{\kappa_g}{2(n-1)}g\right)$$

é o tensor de Schouten e $\odot$ denota o produto de Kulkarni-Nomizu. Ora, sabemos que $W_g = 0$ se, e somente se, g é localmente conformemente plana, de maneira que torna-se natural considerar o *problema σ_k-Yamabe* (veja a Seção 4.1): existe $v \in \mathcal{D}(X)$ tal que $\tilde{g} = e^{-2v}g$ satisfaz

$$\sigma_k(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = \text{const}? \tag{5.1}$$

Aqui, σ_k é a k-ésima função simétrica elementar nos autovalores do endomorfismo simétrico $\mathcal{A}_{\tilde{g}} = \tilde{g}^{-1}A_{\tilde{g}} \in \mathcal{T}^{1,1}(X)$ que corresponde a $A_{\tilde{g}}$ da maneira usual. Note que, para $k = 1$, isto claramente reduz-se ao problema de Yamabe clássico para a curvatura escalar.

Uma questão natural neste contexto é: sob que condições o problema σ_k-Yamabe possui estrutura variacional? Noutras palavras, quando (5.1) é a equação de Euler-Lagrange para alguma ação definida na classe conforme $[g]$? Ora, em função das Proposições 2.7.9 e 4.1.1, sabemos que isto de fato acontece para $k = 1$ e para $k \geq 2$ se g é localmente conformemente plana. De fato, Branson e Gover [BG] verificaram que, para $k \geq 3$, o problema σ_k-Yamabe é variacional se, e somente se, g é localmente conformemente plana. Por outro lado, Viaclovsky mostrou que o problema σ_2-Yamabe é *sempre* variacional.

Teorema 5.1.1. *[V2] Para $k = 2$, $n \neq 4$ e qualquer $g \in \mathcal{M}_1(X)$, (5.1) é a equação de Euler-Lagrange para a ação $\mathcal{V} : [g]_1 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{V}(\tilde{g}) = \int_X \sigma_2(\mathcal{A}_{\tilde{g}})\nu_{\tilde{g}}.$$

Assim, uma métrica $\tilde{g} \in [g]_1$ é crítica para $\mathcal{V}$ se, e somente se,

$$\sigma_2(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = \text{const.} \tag{5.2}$$

É esta a razão pela qual nos restringiremos, a partir de agora, ao caso $k = 2$ (supondo, evidentemente, que $n \neq 4$, pois, neste caso, o funcional $\mathcal{V}$ é conformemente invariante e *qualquer* métrica é crítica, conforme resulta de (5.3) abaixo).

Observação 5.1.2. Se $\tilde{g}$ é Einstein, $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} = \frac{\kappa_{\tilde{g}}}{n}\tilde{g}$, então

$$A_{\tilde{g}} = \frac{\kappa_{\tilde{g}}}{2n(n-1)}\tilde{g}$$

e

$$\sigma_2(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = \binom{n}{2}\left(\frac{\kappa_{\tilde{g}}}{2n(n-1)}\right)^2.$$

Logo, métricas de Einstein são soluções do problema σ_2-Yamabe.

O Teorema 5.1.1 decorre imediatamente da proposição a seguir.

Proposição 5.1.3. *Para uma família conforme de métricas $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \tilde{g}(t) = (1 + tv)g \in [g]$, $v \in \mathcal{D}(X)$, tem-se a* fórmula da primeira variação:

$$\dot{\mathcal{V}}_g(vg) = \frac{n-4}{2}\int_X \sigma_2(\mathcal{A}_g)v\nu_g. \tag{5.3}$$

Em particular, se $g \in [g]_1$ é crítica para $\mathcal{V}$ (ou seja, se $\sigma_2(\mathcal{A}_g)$ é constante), então vale a fórmula da segunda variação:

$$\ddot{\mathcal{V}}_g(vg) = \frac{n-4}{4}\int_X v\tilde{L}_g v\nu_g, \tag{5.4}$$

onde

$$\tilde{L}_g = L_g - 4\sigma_2(\mathcal{A}_g), \quad L_g = -\mathrm{tr}(T(\mathcal{A}_g)\circ g^{-1}\nabla_g^2), \tag{5.5}$$

e $T(\mathcal{A}_g) = \sigma_1(\mathcal{A}_g)I - \mathcal{A}_g$ é o tensor de Newton *de $\mathcal{A}_g$.*

Forneceremos agora uma demonstração elementar de (5.3) que evita o sofisticado formalismo em [V2]. Comecemos escrevendo

$$\tilde{g}(t) = e^{-2u(t)}g = (1+tv)g,$$

de modo que

$$u = u(t) = -\frac{1}{2}\log(1+tv). \tag{5.6}$$

Recordemos ainda que, se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então o tensor de Schouten transforma-se de acordo com

$$A_{\tilde{g}} = \nabla_g^2 u + du\otimes du - \frac{|\nabla_g u|^2}{2}g + A_g, \tag{5.7}$$

de maneira que

$$\begin{aligned} A_{(1+tv)g} \quad = \quad & -\frac{1}{2}\nabla_g^2\log(1+tv) + \frac{1}{4}d\log(1+tv)\otimes d\log(1+tv) - \\ & -\frac{1}{4}\frac{|\nabla_g\log(1+tv)|^2}{2}g + A_g. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Usaremos isto para calcular

$$\dot{A}_g(vg) = \lim_{t\to 0}\frac{A_{(1+tv)g} - A_g}{t},$$

a linearização do tensor de Schouten em g.

Ora, usando (5.6) e calculando num referencial geodésico, obtemos

$$u_i = -\frac{1}{2}\frac{tv_i}{1+tv},$$

e isto mostra que o segundo e terceiro termos no lado direito de (5.8) não contribuem para a linearização, pois são quadráticos em t. Aqui, os sub-índices denotam tanto a derivada usual como a covariante no ponto onde o cálculo está sendo feito. Pelas mesmas razões, o último termo em

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{tv_{ij}}{1+tv} - \frac{t^2 v_i v_j}{(1+tv)^2}\right),$$

também não contribui para esta linearização, donde conclui-se que

$$\dot{A}_g(vg) = -\frac{1}{2}\nabla_g^2 v. \tag{5.9}$$

Usemos isto para linearizar $\sigma_2(\mathcal{A}_g)$. Ora, tem-se

$$A_{(1+tv)g}(x,y) = ((1+tv)g)(\mathcal{A}_{(1+tv)g}x, y), \quad x, y \in \mathcal{X}(X),$$

e diferenciação em $t = 0$ fornece

$$(\dot{A}_g(vg))(x,y) = vg(\mathcal{A}_g x, y) + g((\dot{\mathcal{A}}_g(vg))x, y),$$

que imediatamente implica, em vista de (5.9),

$$\dot{\mathcal{A}}_g(vg) = -\frac{1}{2}g^{-1}\nabla_g^2 v - v\mathcal{A}_g. \tag{5.10}$$

Combinemos isto com duas fórmulas bastante conhecidas [Ro]:

- Se $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um endomorfismo simétrico, então

  $$\mathrm{tr}(BT(B)) = 2\sigma_2(B), \tag{5.11}$$

  onde

  $$T(B) = \sigma_1(B)I - B$$

  é o *tensor de Newton*. Aqui, $\sigma_k(B)$ é, como sempre, a k-ésima função simétrica elementar nos autovalores de B;

- se $B = B(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é uma família diferenciável de endomorfismos simétricos, então

  $$\dot{\sigma}_2(B) = \mathrm{tr}(T(B)\dot{B}), \tag{5.12}$$

  onde, como de costume, o ponto denota diferenciação.

Com estes resultados e (5.10), obtemos então

$$\dot{\sigma}_2(\mathcal{A}_g)(vg) = \frac{1}{2}L_g v - 2\sigma_2(\mathcal{A}_g)v, \tag{5.13}$$

onde $L_g v = -\mathrm{tr}(T(\mathcal{A}_g) \circ g^{-1}\nabla_g^2 v)$; veja (5.5).

Observação 5.1.4. O operador diferencial linear $L_g : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$ é elíptico se, e somente se, $T(\mathcal{A}_g)$ é positivo ou negativo definido.

Para deduzir (5.3) a partir de (5.13) precisamos, então, da seguinte informação adicional.

Proposição 5.1.5. *Para qualquer variedade Riemanniana (X, g), $T(\mathcal{A}_g)$ possui divergência nula, ou seja,* $\mathrm{div}_g T(\mathcal{A}_g) = 0$. *Em particular,*

$$L_g = -\mathrm{div}_g(T(\mathcal{A}_g) \cdot \nabla_g) \tag{5.14}$$

é um operador do tipo divergência.

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} gT(\mathcal{A}_g) &= \sigma_1(\mathcal{A}_g)g - A_g \\ &= \frac{1}{n-2}\left(\frac{\kappa_g}{2}g - \mathrm{Ric}_g\right), \end{aligned}$$

ou seja, $gT(\mathcal{A}_g)$ é um múltiplo do tensor de Einstein E_g. A proposição resulta então de (2.22). $\square$

Finalmente, (5.4) decorre de (5.3) e (5.13). Isto conclui a demonstração da Proposição 5.1.3.

Discutiremos agora os resultados disponíveis na literatura referentes às questões de existência, unicidade e compacidade de soluções do problema σ_2-Yamabe. Comecemos observando que, por (5.7), resolver (5.2) é equivalente a resolver a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$\sigma_2\left(g^{-1}\left(\nabla_g^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla_g u|^2}{2}g + A_g\right)\right) = ce^{-4u}, \tag{5.15}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Note que esta equação é do tipo *completamente não-linear*, pois envolve produtos das derivadas de segunda ordem de u.

Para abordar (5.15), precisamos revisar alguns conceitos. Para

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$$

seja $\sigma_k(\lambda)$ a k-ésima função simétrica elementar nas entradas de λ. Seja Γ_n^+ (respectivamente, Γ_n^-) o cone definido pelas condições $\lambda_i > 0$ (respectivamente, $\lambda_i < 0$), $i = 1, \ldots, n$. Representemos ainda por Γ_2^+ (respectivamente, Γ_2^-) a componente conexa do conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R}^n; \sigma_2(\lambda) > 0\}$ contendo Γ_n^+ (respectivamente, Γ_n^-). A seguir, para um endomorfismo simétrico $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diremos que $B \in \Gamma_2^+$ (respectivamente, $B \in \Gamma_2^-$) se os autovalores de B pertencem a Γ_2^+ (respectivamente, Γ_2^-). Os fatos a seguir sobre os cones $\Gamma_2^\pm$ são bem conhecidos.

Proposição 5.1.6. *Tem-se $\Gamma_2^- = -\Gamma_2^+$ e cada $\Gamma_2^\pm$ é um cone aberto e convexo com vértice na origem satisfazendo*

$$\Gamma_n^\pm \subset \Gamma_2^\pm \subset \Gamma_1^\pm,$$

onde Γ_1^+ (respectivamente, Γ_1^-) é a componente conexa de $\{\lambda \in \mathbb{R}^n; \sigma_1(\lambda) > 0\}$ (respectivamente, $\{\lambda \in \mathbb{R}^n; \sigma_1(\lambda) < 0\}$) contendo Γ_n^+ (respectivamente, Γ_n^-). Além disso, σ_2 se anula em $\partial\Gamma_2^\pm$. Mais ainda, se $B, C \in \Gamma_2^\pm$, então $(1-t)B+tC \in \Gamma_2^\pm$, $0 \leq t \leq 1$, e $\sigma_2^{1/2}$ é côncava no sentido que

$$(\sigma_2((1-t)B + tC))^{1/2} \geq (1-t)(\sigma_2(B))^{1/2} + t(\sigma_2(C))^{1/2}. \tag{5.16}$$

Finalmente, se $B \in \Gamma_2^+$ (respectivamente, $B \in \Gamma_2^-$), então o tensor de Newton $T(B)$ é positivo (respectivamente, negativo) definido.

Definição 5.1.7. *Diremos que a métrica $\tilde{g}$ é* admissível positiva *(respectivamente,* negativa*) se $\mathcal{A}_{\tilde{g}} \in \Gamma_2^+$ (respectivamente, $\mathcal{A}_{\tilde{g}} \in \Gamma_2^-$) sobre X.*

Observação 5.1.8. *Se $\tilde{g}$ é Einstein, então $\tilde{g}$ é admissível positiva (respectivamente, negativa) se $\kappa_{\tilde{g}} > 0$ (respectivamente, $\kappa_{\tilde{g}} < 0$).*

Proposição 5.1.9. *Se $\tilde{g}$ é admissível positiva (ou negativa), então a equação*

$$\sigma_2(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = c \tag{5.17}$$

é elíptica em $\tilde{g}$.

Demonstração. Se $\tilde{g} = e^{-2u}g$, então já sabemos que (5.17) é equivalente a (5.15). Suponhamos, então, que $\tilde{g}$ é admissível positiva. Ora, se

$$F(u, \nabla_g u, \nabla_g^2 u) := \sigma_2 \left(g^{-1} \left(\nabla_g^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla_g u|^2}{2} g + A_g \right) \right),$$

então a elipticidade acontece se

$$\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(u) > 0,$$

onde u_{ij} são os coeficientes de $\nabla_g^2 u$. Mas

$$\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(u) = \sum_k \frac{\partial \sigma_2}{\partial (\mathcal{A}_{\tilde{g}})_i^k} \gamma^{kj},$$

onde $\gamma = g^{-1}$. Assim, a elipticidade acontece se

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial (\mathcal{A}_{\tilde{g}})_j^i} > 0$$

em $\tilde{g}$. Mas (5.12) implica que

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial (\mathcal{A}_{\tilde{g}})_j^i} = T(\mathcal{A}_{\tilde{g}})_j^i, \tag{5.18}$$

e o resultado decorre da Proposição 5.1.6 e da Observação 5.1.4. Um argumento similar também funciona no caso admissível negativo. □

Este critério de elipticidade deve ser imediatamente complementado pelo resultado a seguir.

Proposição 5.1.10. *Se a métrica* background g *é admissível positiva (negativa), então (5.17) é elíptica em* qualquer *solução* $\tilde{g} = e^{-2u}g$.

Demonstração. Suponhamos que g é admissível positiva e seja $\tilde{g}$ uma solução de (5.15). Note que, necessariamente, $c > 0$. Seja $p \in X$ um ponto de mínimo de u. Então, em p, a equação torna-se

$$\sigma_2 \left(g^{-1} \left(\nabla_g^2 u + A_g \right) \right) = ce^{-4u}.$$

Como $\nabla_g^2 u(p) \geq 0$ e Γ_2^+ é um cone convexo, vale

$$\mathcal{A}_{\tilde{g}} = g^{-1}\left(\nabla_g^2 u + A_g\right) \in \Gamma_2^+,$$

em p. Por conexidade, quando variamos p esta última relação somente deixa de verificar-se para $\mathcal{A}_{\tilde{g}}$ na fronteira $\partial\Gamma_2^+$. Mas, pela Proposição 5.1.6, $\sigma_2 = 0$ em $\partial\Gamma_2^+$ e isto contradiz (5.15), pois $c > 0$. O caso negativo é tratado similarmente. $\square$

Existem, assim, dois ramos de elipticidade para (5.17), definidos pelos cones $\Gamma_2^\pm$. Por exemplo, se g é Einstein com $\kappa_g > 0$ (respectivamente, $\kappa_g < 0$), então g é admissível positiva (respectivamente, negativa). Consideraremos, a partir de agora, somente o ramo positivo, de modo que o problema σ_2-Yamabe pode agora ser reformulado de forma precisa: *dada uma variedade diferenciável fechada X^n, $n \geq 3$, e uma métrica admissível positiva g em X, existe uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{-2u}g \in [g]$ tal que*

$$\sigma_2^{1/2}(\mathcal{A}_{\tilde{g}}) = K > 0? \tag{5.19}$$

Como, pelo que vimos, (5.19) é completamente não-linear e elíptica, a existência de soluções requer estimativas apriori do tipo C^2. De posse destas estimativas, a condição de concavidade (5.16) garante, via resultados clássicos de Krylov e Evans, estimativas apriori de ordem mais alta, de forma que a existência de soluções pode ser estabelecida por qualquer um dos métodos usuais (teoria do grau, método da continuidade, fluxos parabólicos, etc.). Esta abordagem leva, então, ao resultado a seguir.

Teorema 5.1.11. *Se (X^n, g), $n \geq 4$, e g é admissível positiva, então o problema σ_2-Yamabe (5.19) tem pelo menos uma solução suave em $[g]$. O resultado também é válido no caso $n = 3$ se admitirmos que X não é simplesmente conexa.*

Os casos $n = 3, 4$ foram tratados por Gursky-Viaclovsky [GV], e o caso n qualquer, admitindo que g é localmente conformemente plana, por Li-Li [LL] e Guan-Wang [GW]. O caso *não*-localmente conformemente plano foi estabelecido por Ge-Wang [GeW] para $n > 8$ e finalmente o caso geral foi demonstrado por Sheng-Trudinger-Wang [STW].

O seguinte resultado de unicidade para soluções de (5.19) também vale.

Teorema 5.1.12. *[V2] Se (X^n, g) é uma forma espacial esférica isometricamente distinta da esfera redonda, então (5.19) possui, a menos de homotetias, uma única solução em $[g]$.*

Por outro lado, para $k = 2$, o único resultado de compacidade disponível na literatura parece ser o teorema a seguir.

Teorema 5.1.13. *[GV] Seja (X^n, g), $n = 3, 4$, uma variedade Riemanniana fechada com g admissível positiva. Para $n = 3$ suponhamos que X não é simplesmente conexa e, para $n = 4$, que (X, g) não é conformemente equivalente à esfera redonda. Então, o espaço de soluções de (5.19) é compacto na topologia C^m, $m \geq 0$. Mais precisamente, existe uma constante $C = C(n, m, g) > 0$ tal que qualquer solução $\tilde{g} = e^{-2u} g$ de (5.19) satisfaz*

$$\|u\|_{C^m} \leq C.$$

5.2 Um resultado de unicidade para $n = 3$

No contexto do problema de Yamabe usual (ou seja, σ_1-Yamabe) existem dois critérios clássicos que garantem a unicidade de soluções[1] numa determinada classe conforme $[g]$, a saber:

- Unicidade vale se $[g]$ possui alguma métrica com curvatura escalar constante $\kappa \leq 0$;
- Unicidade vale se $[g]$ contém alguma métrica de Einstein e g não é conformemente equivalente a uma esfera redonda.

O primeiro item é uma consequência imediata do Princípio do Máximo aplicado à equação elíptica que governa a maneira como a curvatura escalar muda por deformações conformes e o segundo item foi verificado por Obata [Ob]. Recentemente, os resultados acima foram generalizados para incluir, em alguns casos, classes conformes suficientemente próximas daquelas onde a unicidade já vale. Mais precisamente, mostra-se em [dLPZ1] que se g é como acima, $[g']$ é uma classe conforme suficientemente próxima de $[g]$ na topologia $C^{2,\alpha}$ e, adicionalmente, $[g]$ cumpre certas condições que aparecem nos teoremas de compacidade para soluções do problema de Yamabe, recentemente demonstrados por Khuri-Marques-Schoen [KMS] e Li-Zhang [LZ], então a unicidade vale para $[g']$. Nossa intenção agora é utilizar o método introduzido em [dLPZ1], juntamente com os Teoremas 5.1.12 e 5.1.13 acima, para demonstrar o seguinte resultado de unicidade para o problema σ_2-Yamabe.

[1] Evidentemente, estamos considerando aqui unicidade a menos de *homotetias*, ou seja, métricas que diferem por uma constante real positiva serão, nesta seção, consideradas equivalentes.

Teorema 5.2.1. *Seja* (X^3, g) *uma forma espacial esférica de dimensão três isometricamente distinta de uma esfera redonda. Então, existe uma única solução do problema* σ_2*-Yamabe em qualquer classe conforme suficientemente próxima de* $[g]$ *na topologia* $C^{2,\alpha}$.

Note que a existência de soluções é garantida pelo Teorema 5.1.11 e a Observação 5.1.2.

A primeira etapa da demonstração consiste em verificar a validade da unicidade local para classes conformes próximas de $[g]$ (Corolário 5.2.4 abaixo). Para tanto, precisamos introduzir a seguinte terminologia e notação. Dados $m \geq 0$ e $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{M}^{m,\alpha}(X)$ denotará o espaço de métricas de classe $C^{m,\alpha}$ em X. Note que $\mathcal{M}^{m,\alpha}(X)$ é um aberto de $\Gamma^{m,\alpha}(\mathrm{Sym}^2(X))$, o espaço das seções de classe $C^{m,\alpha}$ de $\mathrm{Sym}^2(X)$, o fibrado das formas bilineares simétricas sobre X. Consideremos o *funcional volume* $\mathrm{Vol} : \mathcal{M}^{m,\alpha}(X) \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Vol}(g) = \int_X \nu_g.$$

Como, por (2.47),

$$d\mathrm{Vol}_g(h) = \frac{1}{2}\int_X \mathrm{tr}_g h \nu_g, \quad h \in \Gamma^{m,\alpha}(\mathrm{Sym}^2(X)),$$

resulta que

$$\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X) = \mathrm{Vol}^{-1}(1) \hookrightarrow \mathcal{M}^{m,\alpha}(X)$$

é uma subvariedade de Banach suave com

$$T_g\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X) = \left\{ h \in \Gamma^{m,\alpha}(\mathrm{Sym}^2(X)); \int_X \mathrm{tr}_g h \nu_g = 0 \right\}, \quad g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X).$$

Finalmente, para $g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$, sejam $\mathcal{D}_g$ o subespaço fechado de $T_g\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ dado por

$$\mathcal{D}_g = \left\{ \varphi g; \varphi \in C^{m,\alpha}(X, \mathbb{R}), \int_X \varphi\, \nu_g = 0 \right\},$$

e

$$[g]_{m,\alpha} = \{\phi g; \phi \in C^{m,\alpha}(X, \mathbb{R}), \phi > 0\}$$

a $C^{m,\alpha}$*-classe conforme* de g, que evidentemente é uma subvariedade de $\mathcal{M}^{m,\alpha}(X)$. Note ainda que $\mathcal{D}_g = T_g\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X) \cap T_g[g]_{m,\alpha}$.

O lema a seguir foi demonstrado em [dLPZ1].

Lema 5.2.2. *Na notação acima, temos:*

(a) $\mathcal{D} = \bigcup_{g \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_g$ *é uma distribuição suave e integrável de* $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$*;*

(b) para $g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$*, a subvariedade integral maximal (conexa) de* $\mathcal{D}$ *passando por* g *é dada por:*

$$D_g = \left\{ \phi g; \phi \in C^{m,\alpha}(X, \mathbb{R}), \phi > 0 \text{ e } \int_X \phi^{\frac{m}{2}} \nu_g = 1 \right\}.$$

Em particular, $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ *e* $\big[g\big]_{m,\alpha}$ *são transversais entre si.*

Consideremos agora o fibrado vetorial de Banach $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ com fibra dada por

$$\mathcal{E}_g = \left\{ f \in C^{m-2,\alpha}(X, \mathbb{R}); \int_X f\, \nu_g = 0 \right\}, \quad g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X),$$

e o monomorfismo fibrado $\mathfrak{i} : \mathcal{E} \to \mathcal{D}^*$ induzido pelo produto interno L^2, ou seja,

$$\mathfrak{i}_g(f_1) f_2 = \int_X f_1 f_2\, \nu_g, \quad g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X),\ f_1 \in \mathcal{E}_g,\ f_2 g \in \mathcal{D}_g.$$

O fibrado $\mathcal{E}$ possui uma seção distinguida, a saber, $s : \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X) \to \mathcal{E}$ dada por

$$s(g) = \left(\frac{n}{2} - 2\right) \sigma_2(\mathcal{A}_g) - \left(\frac{n}{2} - 2\right) \int_X \sigma_2(\mathcal{A}_g) \nu_g.$$

Note que $s(g) = 0$ se, e somente se, $\sigma_2(\mathcal{A}_g)$ é constante. Por outro lado, interpretando (5.3) como uma derivada direcional, ou seja,

$$d\mathcal{V}_g(vg) = \frac{n-4}{2} \int_X \sigma_2(\mathcal{A}_g) v \nu_g, \tag{5.20}$$

vê-se facilmente que

$$\mathfrak{i}(s(g)) = d\mathcal{V}_g|_{\mathcal{D}_g}, \quad g \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X). \tag{5.21}$$

Se $s(g) = 0$, consideremos agora a *derivada vertical*

$$d^{\text{ver}} s(g) = P_{\text{ver}} \circ ds(g) : T_g \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X) \to \mathcal{E}_g,$$

onde $P_{\text{ver}} : T_{\mathbf{0}(g)}\mathcal{E} \to \mathcal{E}_g$ é a projeção relativamente à decomposição

$$T_{\mathbf{0}(g)}\mathcal{E} \cong T_{\mathbf{0}(g)}\mathbf{0} \oplus T_{\mathbf{0}(g)}\mathcal{E}_g \cong T_{\mathbf{0}(g)}\mathbf{0} \oplus \mathcal{E}_g,$$

onde $\mathbf{0}$ é a seção nula de $\mathcal{E}$. Por outro lado, a composição $\mathfrak{i}_g \circ d^{\text{ver}}s(g)|_{\mathcal{D}_g} : \mathcal{D}_g \to \mathcal{D}_g^*$ pode ser identificada à segunda variação $d^2(\mathcal{V}|_{D_g})(g)$ da restrição de $\mathcal{V}$ a D_g. Assim, se (X, g_*) é como no Teorema 5.2.1, com curvatura seccional $\mu > 0$, vê-se a partir de (5.4) e da Observação 5.1.2 com $\kappa_{g_*} = n(n-1)\mu$ que $d^{\text{ver}}s(g_*)|_{\mathcal{D}_{g_*}} : \mathcal{D}_{g_*} \to \mathcal{E}_{g_*}$ pode ser identificada ao operador

$$v \mapsto \frac{(n-4)(n-1)\mu}{8}\mathcal{L}_{g_*},$$

onde

$$\mathcal{L}_{g_*} = \Delta_{g_*} - n\mu.$$

Resulta então da Proposição 4.2.4 que $d^{\text{ver}}s(g_*)|_{\mathcal{D}_{g_*}}$ é um isomorfismo, de modo que podemos aplicar o Teorema da Função Implícita em [dLPZ1] para concluir a proposição a seguir.

Proposição 5.2.3. *Seja $g_* \in \mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ como no Teorema 5.2.1. Então, existe uma vizinhança U de g_* em $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ tal que*

$$V = \big\{g \in U : \sigma_2(\mathcal{A}_g) \text{ é constante}\big\} \tag{5.22}$$

é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ que é fortemente *transversal às classes conformes.*

Transversalidade forte significa que, para qualquer $g \in V$, T_gV e $T_g[g]$ são subespaços complementares que geram $T_g\mathcal{M}^{m,\alpha}(X)$. Em particular, o seguinte resultado de unicidade *local* verifica-se.

Corolário 5.2.4. *Se g_* é como no Teorema 5.2.1, então existe uma vizinhança aberta U de g_* em $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$ tal que qualquer classe conforme de métricas em X contém, em U, no máximo uma métrica de volume unitário que é solução do problema σ_2-Yamabe.*

De posse deste resultado, podemos finalmente fornecer a demonstração do Teorema 5.2.1. Admitamos, por contradição, que existe uma sequência de métricas g_n em $\mathcal{M}_1^{m,\alpha}(X)$, soluções do problema σ_2-Yamabe, satisfazendo $\lim_n g_n = g_*$, e para as quais existe $h_n \neq g_n$, $h_n \in [g_n]_1$, também solução do problema. Por compacidade (Teorema 5.1.13), podemos supor que $\lim_n h_n = h_*$, com $h_* \in [g_*]_1$ por continuidade. Por unicidade de soluções na classe $[g_*]_1$ (Teorema 5.1.12) resulta que $h_* = g_*$, mas isto contradiz o Corolário 5.2.4 para n suficientemente grande.

5.3 Rigidez local e bifurcação no problema σ_2-Yamabe

Nesta seção estabeleceremos resultados de rigidez local e bifurcação para certas famílias a um parâmetro de soluções do problema σ_2-Yamabe em produtos de esferas. Estes resultados estendem, para este contexto, a investigação apresentada em [dLPZ2] para o problema de Yamabe usual. Começaremos isolando uma família de soluções do problema.

Definição 5.3.1. *Uma variedade Riemanniana (X, g) é dita ser* especial *se os autovalores do endomorfismo de Schouten $\mathcal{A}_g = g^{-1}A_g$ são funções constantes em X (em particular, com multiplicidades* constantes*).*

Note que qualquer variedade especial é solução do problema σ_k-Yamabe, para qualquer $k \geq 1$.

Proposição 5.3.2. *A classe de variedades especiais é fechada por homotetias e produtos diretos. Em particular, qualquer produto de variedades de Einstein é solução do problema σ_2-Yamabe.*

Demonstração. Observemos inicialmente que (X, g) é especial se, e somente se, Ric_g, visto como um elemento de $\mathcal{T}^{(1,1)}(X)$, possui autovalores constantes em X. Por outro lado, se $(X, g) = (X_1 \times X_2, g_1 \oplus g_2)$ é um produto, então

$$\mathrm{Ric}_g = \mathrm{Ric}_{g_1} \oplus \mathrm{Ric}_{g_2}.$$

Isto demonstra a primeira asserção. A segunda decorre então da Observação 5.1.2. $\square$

A partir de agora, fixemos o produto $X = X_1 \times X_2$, onde $(X_i^{n_i}, g_i)$ é Einstein para $i = 1, 2$. Para $\lambda \in (0, +\infty)$, consideremos (X, g_λ), onde $g_\lambda = g_1 \oplus \lambda g_2$. Resulta então da Proposição 5.3.2 que (X, g_λ) é solução do problema σ_2-Yamabe. Mais ainda, como $\kappa_{g_\lambda} = \kappa_{g_1} + \lambda^{-1}\kappa_{g_2}$ e

$$\mathrm{Ric}_{g_\lambda} = \frac{\kappa_{g_1}}{n_1}\, g_1 \oplus \frac{\kappa_{g_2}}{n_2}\, g_2,$$

o tensor de Schouten de g_λ é

$$\begin{aligned} A_{g_\lambda} &= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\kappa_{g_1}}{n_1} - \frac{\kappa_{g_1} + \lambda^{-1}\kappa_{g_2}}{2(n_1 + n_2 - 1)} \right) g_1 \bigoplus \left(\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda n_2} - \frac{\kappa_{g_1} + \lambda^{-1}\kappa_{g_2}}{2(n_1 + n_2 - 1)} \right) \lambda\, g_2 \right]. \end{aligned}$$

Resulta daí que $\mathcal{A}_{g_\lambda}$ tem dois autovalores (não necessariamente distintos), a saber,

$$\rho_1(\lambda) = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left(\frac{\kappa_{g_1}}{n_1} - \frac{\kappa_{g_1}+\lambda^{-1}\kappa_{g_2}}{2(n_1+n_2-1)}\right), \tag{5.23}$$

e

$$\rho_2(\lambda) = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left(\frac{\kappa_{g_2}}{\lambda n_2} - \frac{\kappa_{g_1}+\lambda^{-1}\kappa_{g_2}}{2(n_1+n_2-1)}\right), \tag{5.24}$$

com multiplicidades n_1 e n_2, respectivamente. Em particular,

$$\sigma_1(\mathcal{A}_{g_\lambda}) = n_1\,\rho_1(\lambda) + n_2\,\rho_2(\lambda) = \frac{\kappa_{g_1}+\lambda^{-1}\kappa_{g_2}}{2(n_1+n_2-1)}, \tag{5.25}$$

e

$$\sigma_2(\mathcal{A}_{g_\lambda}) = \binom{n_1}{2}\rho_1(\lambda)^2 + n_1 n_2\,\rho_1(\lambda)\,\rho_2(\lambda) + \binom{n_2}{2}\rho_2(\lambda)^2, \tag{5.26}$$

de forma que o tensor de Newton correspondente é

$$\begin{aligned} g_\lambda T(\mathcal{A}_{g_\lambda}) &= \frac{1}{n_1+n_2-2}\times \\ &\times\left[\left(\frac{n_1-2}{2n_1}\,\kappa_{g_1} + \frac{1}{2\lambda}\kappa_{g_2}\right) g_1 \bigoplus \left(\frac{1}{2}\kappa_{g_1} + \frac{n_2-2}{2n_2}\frac{1}{\lambda}\kappa_{g_2}\right)\lambda\, g_2\right]. \end{aligned}$$

Neste ponto, faz-se necessário introduzir a notação a seguir. Para $i = 1, 2$, seja $L^2(X_i, g_i)$ o espaço de Hilbert de funções $f : X_i \to \mathbb{R}$ de quadrado integrável relativamente ao elemento de volume ν_{g_i}, e escrevamos

$$L^2_0(X_i, g_i) = \left\{ f \in L^2(X_i, g_i);\ \int_{X_i} f\nu_{g_i} = 0 \right\}.$$

Então, $L^2(X_1\times X_2, g_\lambda) \cong L^2(X_1\times X_2, g_1\oplus g_2)$ pode ser naturalmente identificado ao produto tensorial de espaços de Hilbert $L^2(X_1, g_1) \otimes L^2(X_2, g_2)$ e, sob este isomorfismo,

$$L^2_0(X_1 \times X_2, g_\lambda) = L^2_0(X_1, g_1) \otimes L^2(X_2, g_2) + L^2(X_1, g_1) \otimes L^2_0(X_2, g_2).$$

Usando esta notação, é imediato pelos cálculos acima que

$$\begin{aligned} L_{g_\lambda} &= \frac{1}{n_1+n_2-2}\times \\ &\times\Bigg[\left(\frac{n_1-2}{2n_1}\kappa_{g_1} + \frac{1}{2\lambda}\kappa_{g_2}\right)(\Delta_{g_1}\otimes \mathrm{I}) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\kappa_{g_1} + \frac{n_2-2}{2n_2}\frac{1}{\lambda}\kappa_{g_2}\right)(\mathrm{I}\otimes\Delta_{g_2})\Bigg], \end{aligned}$$

donde finalmente resulta que

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_{g_\lambda} &= \frac{1}{n_1+n_2-2} \times \\
&\times \Bigg[\left(\frac{n_1-2}{2n_1}\kappa_{g_1} + \frac{1}{2\lambda}\kappa_{g_2} \right) (\Delta_{g_1} \otimes \mathrm{I}) + \\
&\qquad + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\kappa_{g_1} + \frac{n_2-2}{2n_2}\frac{1}{\lambda}\kappa_{g_2} \right) (\mathrm{I} \otimes \Delta_{g_2}) \Bigg] - \\
&\qquad\qquad - 4 \left[\binom{n_1}{2} \rho_1(\lambda)^2 + n_1 n_2\, \rho_1(\lambda)\, \rho_2(\lambda) + \binom{n_2}{2} \rho_2(\lambda)^2 \right].
\end{aligned}
$$

Note que $L^2_0(X_1 \times X_2, g_\lambda)$ é invariante por $\tilde{L}_{g_\lambda}$ e, pelo que vimos na seção anterior, identifica-se com $T_{g_\lambda}[g_\lambda]_1$, que é o domínio natural para $\tilde{L}_{g_\lambda}$.

Para o propósito de analisar bifurcação e rigidez local da família $(X_1 \times X_2, g_\lambda)$, é fundamental entender as propriedades espectrais do operador $\tilde{L}_{g_\lambda}$ acima explicitado. A este respeito, vê-se sem muitas dificuldades que estas propriedades são determinadas pelos sinais que as constantes κ_{g_i}, $i = 1, 2$, podem assumir. Um caso extremo, por exemplo, acontece quando $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_2} = 0$, pois então $\tilde{L}_{g_\lambda} = 0$ para $\lambda > 0$, ou seja, $\tilde{L}_{g_\lambda}$ degenera completamente! Mais geralmente, se apenas uma destas constantes se anula, $\tilde{L}_{g_\lambda}$ é ainda por demais degenerado para que conclusões interessantes possam ser inferidas. Assim, é natural supor que $\kappa_{g_1}\kappa_{g_2} \neq 0$. De fato, para as aplicações que temos em mente (produtos de esferas redondas), basta considerar o caso em que κ_{g_1} e κ_{g_2} são ambas *positivas*.

Proposição 5.3.3. *Se κ_{g_1} e κ_{g_2} são ambas positivas, então, para qualquer $\lambda > 0$, $\tilde{L}_{g_\lambda}$ é um operador de Fredholm auto-adjunto (ilimitado) em $L^2_0(X, g_\lambda)$ e seu espectro é um subconjunto enumerável ilimitado e discreto de $\mathbb{R}$ dado pela sequência dupla*

$$
\begin{aligned}
\varrho_{j,k}(\lambda) = \frac{1}{n_1+n_2-2} &\Big[\big(\tfrac{n_1-2}{2n_1}\kappa_{g_1} + \tfrac{1}{2\lambda}\kappa_{g_2} \big) \varrho_1^j + \tfrac{1}{\lambda} \big(\tfrac{1}{2}\kappa_{g_1} + \tfrac{n_2-2}{2n_2}\tfrac{1}{\lambda}\kappa_{g_2} \big) \varrho_2^k \Big] - \\
&- 4 \left[\binom{n_1}{2} \rho_1(\lambda)^2 + n_1 n_2\, \rho_1(\lambda)\, \rho_2(\lambda) + \binom{n_2}{2} \rho_2(\lambda)^2 \right], \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

$j + k > 0$, onde

$$0 = \varrho_i^0 < \varrho_i^1 \leq \varrho_i^2 \leq \ldots \leq \varrho_i^m \longrightarrow +\infty$$

denota o espectro de Δ_{g_i} em $L^2(X_i, g_i)$. Mais ainda, cada $\varrho_{j,k}(\lambda)$ possui multiplicidade finita.

Demonstração. Para qualquer $\lambda > 0$, $\varrho_{j,k}(\lambda)$ é crescente em j e k, com

$$\lim_{(j+k)\to+\infty} \varrho_{j,k}(\lambda) = +\infty.$$

Mais ainda, para quaisquer constantes positivas λ e m_0, o conjunto de pares (j, k) tais que $\varrho_{j,k}(\lambda) \leq m_0$ é finito. Assim, a primeira asserção na proposição resulta imediatamente. Para a finitude da multiplicidade dos autovalores, basta notar que o auto-espaço de $\varrho_{j,k}(\lambda)$ é $V_j \otimes W_k$, onde V_j é o auto-espaço de Δ_{g_1} associado a ϱ_1^j e W_k é o auto-espaço de Δ_{g_2} associado a ϱ_2^k. $\square$

Corolário 5.3.4. *Nas condições do teorema, se $\tilde{L}_{g_\lambda}$, $\lambda > 0$, é não-singular (ou seja, seu espectro não contém 0), então $\tilde{L}_{g_\lambda}$ é a inversa (ilimitada) de um operador auto-adjunto, compacto e injetivo em $L^2_0(X_1 \times X_2, g_\lambda)$.*

Demonstração. Isto segue imediatamente do fato que o espectro de $\tilde{L}_{g_\lambda}$ é discreto. $\square$

Recordemos agora a definição de bifurcação e rigidez local para uma família de soluções do problema σ_2-Yamabe; compare com a discussão para σ_1 em [dLPZ2].

Definição 5.3.5. *Sejam X uma variedade fechada de dimensão $n \geq 3$ e $\lambda \mapsto g_\lambda$ uma família a 1-parâmetro de métricas de volume unitário em X que são soluções do problema σ_2-Yamabe. Diremos que $(g_\lambda)_\lambda$ é* localmente rígida *em λ_* se qualquer métrica de volume unitário g suficientemente próxima de g_{λ^*} (na topologia $C^{2,\alpha}$), que é solução do problema σ_2-Yamabe, coincide com alguma métrica g_λ da família, com λ próximo de λ_*. Se a família (g_λ)* não *é localmente rígida em λ_*, ou seja, se existe uma sequência λ_n de números reais e uma sequência g_n de métricas de volume unitário tais que:*

- $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda_*$;
- *$g_n \in [g_{\lambda_n}]$, para qualquer n;*
- *g_n é solução do problema σ_2-Yamabe, para qualquer n;*
- *$g_n \neq g_{\lambda_n}$, para qualquer n,*

então λ_* é um instante de bifurcação *para a família (g_λ).*

Condições suficientes para a rigidez local ou bifurcação de famílias de soluções do problema σ_2-Yamabe podem ser explicitadas em termos das propriedades dos operadores de Jacobi das métricas da família, consideradas como pontos críticos para a ação correspondente (Proposição 5.1.3). Com este intuito em mente, seja $(X_1 \times X_2, g_\lambda)$ a família da Proposição 5.3.3. Resulta então que o operador de Jacobi correspondente, a saber, $\tilde{L}_{g_\lambda}$, é *essencialmente positivo*, ou seja, é a soma de um isomorfismo positivo e um operador compacto (mais precisamente, de posto finito). Nestas condições, definimos o *índice de Morse* N_λ de $\tilde{L}_{g_\lambda}$ como sendo a soma das multiplicidades de todos os seus autovalores negativos. Obviamente, N_λ é um inteiro não-negativo.

Proposição 5.3.6. *Nas condições da Proposição 5.3.3, se* $[a, b] \subset (0, +\infty)$ *é um intervalo, então as seguintes asserções são verdadeiras:*

(a) se $\tilde{L}_{g_\lambda}$ *é não-singular para qualquer* $\lambda \in [a, b]$*, então* $N_a = N_b$*;*

(b) se $\tilde{L}_{g_{\lambda_*}}$ *é não-singular, então* (g_λ) *é localmente rígida em* λ_**;*

(c) se $\tilde{L}_{g_a}$ *e* $\tilde{L}_{g_b}$ *são ambos não-singulares e* $N_a \neq N_b$*, então existe um instante de bifurcação* $\lambda_* \in (a, b)$ *para a família* (g_λ)*.*

Demonstração. Os autovalores $\varrho_{j,k}(\lambda)$ dependem continuamente de λ; veja (5.27). Assim, se $N_a \neq N_b$, então algum $\varrho_{j,k}$ deve possuir um zero em $[a, b]$, o que demonstra (a). A demonstração de (b) resulta do Teorema da Função Implícita desenvolvido em [dLPZ2] e (c) decorre de resultados bem conhecidos em Teoria de Bifurcação; veja [SW, Teorema 2.1] e [dLPZ2]. □

Consideremos agora os conjuntos

$$\mathcal{D} = \{\lambda_* \in (0, +\infty) : \varrho_{j,k}(\lambda_*) = 0 \text{ para algum } (j, k) \text{ com } j + k > 0\}$$

e

$$\mathcal{B} = \{\lambda_* \in (0, +\infty) : \text{a família } (g_\lambda)_\lambda \text{ bifurca-se em } \lambda_*\}.$$

Evidentemente, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$, que nada mais é do que uma reformulação do item (b) da proposição anterior. Mas, em geral, é difícil descrever a estrutura destes conjuntos, de forma que, a partir de agora, nos restringiremos ao caso em que (X_i, g_i) é uma esfera redonda de dimensão n, $i = 1, 2$. Mais precisamente, se $(\mathbb{S}^n, g_0)$ é a esfera unitária, faremos $(X_i, g_i) = (\mathbb{S}^n, g_0')$, $g_0' = n(n-1)g_0$, de modo que $\kappa_{g_0'} = 1$. Assim, o espectro de $(\mathbb{S}^n, g_0')$ é

$$0 = \varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_m \to +\infty,$$

onde

$$\varrho_k = \frac{k(n+k-1)}{n(n-1)}$$

tem multiplicidade

$$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k-2}.$$

Assim, o espectro do operador de Jacobi $\tilde{L}_{g_\lambda}$ associado ao problema σ_2-Yamabe em $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n, g_\lambda)$, $g_\lambda = g_0' \oplus \lambda g_0'$, $\lambda > 0$, é a sequência dupla

$$\begin{aligned} \varrho_{j,k}(\lambda) &= \frac{1}{2(n-1)}\Big[\Big(\frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2\lambda}\Big)\varrho^j + \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2n\lambda}\Big)\varrho^k\Big] \\ &\quad -4\left[\binom{n}{2}\rho_1(\lambda)^2 + n^2\rho_1(\lambda)\rho_2(\lambda) + \binom{n}{2}\rho_2(\lambda)^2\right], \end{aligned}$$

onde $j + k > 0$,

$$\rho_1(\lambda) = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{n} - \frac{1+\lambda^{-1}}{2(2n-1)}\right)$$

e

$$\rho_2(\lambda) = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{n\lambda} - \frac{1+\lambda^{-1}}{2(2n-1)}\right).$$

Daí, um cálculo direto fornece

$$\tilde{\varrho}_{j,k}(\lambda) := \lambda^2\varrho_{j,k}(\lambda) = a_j\lambda^2 + b_{j,k}\lambda + c_k,$$

onde

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{n-2}{4n(n-1)}\varrho^j - \frac{n^2-4n+2}{4(n-1)^2 n(2n-1)}, \\ b_{j,k} &= \frac{\varrho^j + \varrho^k}{4(n-1)} - \frac{n}{2(n-1)^2(2n-1)}, \\ c_k &= \frac{n-2}{4n(n-1)}\varrho^k - \frac{n^2-4n+2}{4(n-1)^2 n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Teorema 5.3.7. *Nas condições acima, $\mathcal{D} = \emptyset$ se $n = 3$, de modo que a família (g_λ) é localmente rígida para qualquer $\lambda > 0$. Por outro lado, se $n \geq 4$, $\mathcal{D}$ é a união de sequências $\{\lambda_j^{(0)}\}$ e $\{\lambda_k^{(\infty)}\}$ com $\lim_{j\to+\infty} \lambda_j^{(0)} = 0$ e $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k^{(\infty)} = +\infty$. Mais ainda, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$, ou seja, qualquer elemento de $\mathcal{D}$ é um instante de bifurcação da família (g_λ), que é então localmente rígida em qualquer $\lambda \notin \mathcal{D}$.*

Demonstração. Note que $n^2 - 4n + 2$ é negativo para $n = 3$ e positivo para $n \geq 4$. No segundo caso, vê-se que $a_0 = c_0 < 0$ enquanto que $a_j = c_j > 0$ se $j \geq 1$. Além disso, $b_{j,k} = b_{k,j}$ é negativo se $j = 0$ e $k \in \{1, \dots, n+1\}$, sendo positivo nos outros casos, donde conclui-se que $\tilde{\varrho}_{j,k}(\lambda) > 0$ se $j, k \geq 1$. Mais ainda, se $j = 0$ e $k \geq 1$, vê-se facilmente que a única raiz positiva de $\tilde{\varrho}_{j,k}$, denotada por $\lambda_k^{(\infty)}$, satisfaz $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k^{(\infty)} = +\infty$, e se, simetricamente, $j \geq 1$ e $k = 0$, a única raiz positiva de $\tilde{\varrho}_{j,k}$, denotada por $\lambda_j^{(0)}$, satisfaz $\lim_{j\to+\infty} \lambda_j^{(0)} = 0$. Assim, $\mathcal{D} = \{\lambda_j^{(0)}\}_j \cup \{\lambda_k^{(\infty)}\}_k$, como desejado. O comportamento assintótico das sequências já garante que $\mathcal{B}$ é infinito, mas note que, em princípio, pode acontecer que $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{D}$, pois o fato de as funções $\tilde{\varrho}_{j,k}$ *não* serem monótonas em λ pode levar a que, em algum $\lambda_* \in \mathcal{D}$, alguns autovalores de $\tilde{L}_{g_{\lambda_*}}$ mudem de sinal mas o índice de Morse permaneça inalterado. Felizmente, podemos aqui usar a Teoria de Bifurcação Equi-invariante (veja o Teorema 3.1 em [SW]) e o fato que, conforme observado em [dLPZ2], o grupo de isometrias de $\mathbb{S}^n$ age de maneira irredutível nos auto-espaços do Laplaciano, com duas quaisquer destas representações sendo inequivalentes. Nestas condições, o argumento em [dLPZ2] assegura que acontece bifurcação em todos os instantes degenerados $\lambda_* \in \mathcal{D}$, de forma que $\mathcal{B} = \mathcal{D}$.

Finalmente, se $n = 3$, um cálculo direto garante que $a_j, c_k > 0$ para quaisquer j, k, ao passo que $b_{j,k} > 0$, exceto para um número finito de valores j, k. Nestes valores, verifica-se facilmente que $b_{j,k}^2 < 4a_j c_k$, donde resulta que $\tilde{\varrho}_{j,k}(\lambda) > 0$ para quaisquer $\lambda > 0$ e j, k. Assim, $\mathcal{D} = \emptyset$. $\square$

Referências Bibliográficas

[AB] ATIYAH, M. F. ; BOTT, R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I. *Ann. of Math.*, v. 86, n. 2, p. 374-407, 1967.

[AHS] ATIYAH, M. F. ; HITCHIN, N. J. ; SINGER, I. M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, v. 362, n. 1711, p. 425-461, 1978.

[BE] BERGER, M. ; EBIN, D. Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold. *J. Differential Geometry*, v. 3, p. 379-392, 1969.

[BGM] BERGER, M. ; GAUDUCHON, P. ; MAZET, E., *Le spectre d'une variété riemannienne.* Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1971. (Lecture Notes in Mathematics , v. 194)

[Be] BESSE, Arthur L. *Einstein manifolds*. Berlin : Springer-Verlag, 1987. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete)

[BG] BRANSON, T. P. ; GOVER, A. R. Variational status of a class of fully nonlinear curvature prescription problems, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 32, n. 2, p. 253-262, 2008.

[Ca] CALABI, E. On compact Riemannian manifolds with constant curvature I. *Differential geometry*. Providence, R.I. : AMS, 1961. p. 155-180 (*Proc. Sympos. Pure Math.*, v. 3.)

[Ch] CHERN, S.-S. On the kinematic formula in integral geometry. *J. Math. Mech.*, v. 16, p. 101-118, 1966.

[CCGGIILLN] CHOW, B.; et al. *The Ricci flow*: techniques and applications. Part I. Geometric aspects. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2007. (Mathematical Surveys and Monographs, 135)

[dLS1] LIMA, L. L. de ; SANTOS, N. L. Deformations of $2k$-Einstein structures. *J. Geom. Phys.*, v. 60, n. 9, p. 1279-1287, 2010.

[dLPZ1] LIMA, L. L. de ; PICCIONE, P. ; ZEDDA, M. A note on the uniqueness of solutions for the Yamabe problem, arXiv:1102.2321, To appear in *Proceedings of the AMS*.

[dLPZ2] ________. On bifurcation of solutions of the Yamabe problem in product manifolds, arXiv:1012.1497, To appear in *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire*.

[E] EBIN, D. The manifold of Riemannian metrics. *Global Analysis*. Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1970. p. 11-40. (Proc. Sympos.Pure Math., v. 15)

[GHL] GALLOT, S. ; HULIN, D. ; LAFONTAINE, J. *Riemannian geometry*. 3rd ed. Berlin : Springer-Verlag, 2004. (Universitext)

[G] GRAY, A. *Tubes*,. Basel : Birkhauser Verlag, 2004. (Progress in Mathematics, 221)

[Gr] GRIFFITHS, P. A. Deformations of G-structures. Part B: Deformations of geometric G-structures. *Math. Ann.*, v. 158, p. 326-351, 1965.

[GeW] GE, Y. ; WANG, G. On a fully nonlinear Yamabe problem. *Ann. Sci. E ́cole Norm. Sup.*, v. 39, n. 4, p. 569-598. 2006.

[GW] GUAN, P.; WANG, G. A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, v. 557, p. 219-238, 2003.

[GV] GURSKY, M. J. ; VIACLOVSKY, J. A. Volume comparison and the σ_k-Yamabe problem. *Adv. Math.*, v. 187, n. 2, p. 447-487, 2004.

[Jo] JOST, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. 6th ed. Berlin : Springer, 2011. (Universitext)

[KMS] KHURI, M. A. ; Marques, F. C. ; SCHOEN, R. M. A compactness theorem for the Yamabe problem. *J. Differential Geom.*, v. 81, n. 1, p. 143-196, 2009.

[Kl] KLINGENBERG, W. P. A. *Riemannian geometry*. Berlin ; W. de Gruyter, 1995. (De Gruyter Studies in Mathematics, 1)

[Ko] KODAIRA, K. *Complex manifolds and deformation of complex structures*. Berlin : Springer- Verlag, Berlin, 2005. (Classics in Mathematics, 85)

[K] KOISO, N. A decomposition of the space $\mathcal{M}$ of Riemannian metrics on a manifold. *Osaka J. Math.*, v. 16, p. 423-429, 1979.

[K1] ________. Nondeformability of Einstein metrics. *Osaka J. Math.*, v. 15, n. 2, p. 419-433, 1978.

[L1] LABBI, M.-L. Double forms, curvature structures and the (p, q)-curvatures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 357, n. 10, p. 3971-3992, 2005.

[L2] ________. Variational properties of the Gauss-Bonnet curvatures. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 32, n. 2, p. 175-189, 2008.

[L3] ________. *About the h_{2k}-Yamabe problem*. arXiv:0807.2058.

[LM] BLAINE Jr., Lawson H.; MICHELSOHN, Marie-Louise. *Spin geometry*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1989.

[LP] LEE, J. ; PARKER, T. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math*. Soc., v. 17, p. 37-81, 1987.

[LL] LI, A. ; LI, Y. On some conformally invariant fully nonlinear equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 56, n. 10, p. 1416-1464, 2003.

[LZ] LI, Y. Y. ; ZHANG, L. Compactness of solutions to the Yamabe problem. II. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, v. 24, no. 2, 185-237, 2005.

[Lo] LOVELOCK, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Mathematical Phys.*, v. 12, p. 498-501, 1971.

[MS] MAZ'YA,V. G. ; SHAPOSHNIKOVA, T. O. *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*. Boston, MA : Pitman, 1985. (Monographs and Studies in Mathematics, 23)

[M] MOSER, J. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 120, p. 286-294, 1965.

[Mo] MOSTOW, G. D. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes E´tudes Sci. Publ. Math.*, n. 34, p. 53-104, 1968.

[Ob] OBATA, M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, v. 6, p. 247-258, 1971/72.

[O] OMORI, H. On the group of diffeomorphisms on a compact manifold. *Global Analysis*. Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1968. p. 167-183. (Proc. Sympos. Pure Math., v. 15)

[Ra] RAGHUNATHAN, M. S. Deformations of linear connections and Riemannian manifolds. *J. Math. Mech.*, v. 13, p. 97-123, 1964.

[Ro] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sci. Math.*, v. 117, n. 2, p. 211-239, 1993.

[Sa] SAKAI, T. *Riemannian geometry*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1996. (Translations of Mathematical Monographs, 149)

[STW] SHENG, W.M. ; TRUDINGER, N. S. ; WANG, X.J. The Yamabe problem for higher order curvatures. *J. Differential Geom.*, v. 77, n. 3, p. 515-553, 2007.

[SW] SMOLLER, J. ; WASSERMAN, A. G. Bifurcation and symmetry-breaking, *Invent. Math.*, v. 100, n. 1, p. 63-95, 1990.

[T] THORPE, J. A. Sectional curvatures and characteristic classes. *Ann. of Math.* (2) v. 80, p. 429-443, 1964.

[V] VIACLOVSKY, J. Conformal geometry and fully nonlinear equations. *Nankai Tracts Math.*, 11, p. 435-460, 2006.

[V2] ________. Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations. *Duke Math. J.*, v. 101, n. 2, p. 283-316, 2000.

[W] WELLS, R. O. Jr. *Differential analysis on complex manifolds*. New York : Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, 65)