

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES DE CONTATO E
CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES
RIEMANNIANAS MUNIDAS DE UM CAMPO
CONFORME OU DE ALGUMA MÉTRICA
ESPECIAL

FORTALEZA
2012

JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES DE CONTATO E
CARACTERIZAÇÃO DE VARIEDADES
RIEMANNIANAS MUNIDAS DE UM CAMPO
CONFORME OU DE ALGUMA MÉTRICA
ESPECIAL

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FOTALEZA

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

G614r Gomes, José Nazareno Vieira

Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Unidas de um Campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial / José Nazareno Vieira Gomes. - 2012.

91 f. : enc. ; 31 cm

Tese(doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 1. Título.

CDD 516.36

*Dedico este trabalho aos meus pais José e Risleide,
a minha esposa Rosilene e a minha filha Alexandra.*

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida e pela paz que eu tanto tenho lhe pedido.

À minha esposa e à minha filha por terem me dado todo o inimaginável e incalculável suporte para que eu me mantivesse firme durante o curso de doutorado.

Aos meus pais, que mesmo com todas as dificuldades desta vida, se mantiveram firmes na minha formação e também de todos os meus irmãos, eles são para mim, verdadeiros heróis. Talvez por isso, hoje, eles demonstram plena confiança em meu trabalho.

Ao professor Renato Tribuzy, por todo o apoio que tem me dado, pelos conselhos e pela paciência que sempre teve comigo. Para mim, é uma honra ter a confiança deste renomado pesquisador, me faltam palavras de agradecimentos, só me resta trabalhar muito para que eu possa superar todas as suas expectativas.

Ao professor Abdênago Barros, quero expressar meus sinceros agradecimentos por ter sugerido todos os assuntos desta tese, pelos significativos comentários, discussões e incentivo constante.

Ao professor Ernani e ao aluno de doutorado Rondinelli, pelas valiosas discussões e comentários. Além disso, novamente a estes dois camaradas juntamente com o professor Abdênago e o aluno de doutorado João, pelo suporte teórico e pelos valiosos exemplos que engrandeceram os resultados dos capítulos dois e três desta tese.

Aos alunos da pós-graduação da UFC, quero dizer que os meus conhecimentos se engrandeceram com a maravilhosa convivência neste período que aqui passei, vou sentir e já estou sentindo muitas saudades de todos, certamente não esquecerei da grandiosa ajuda que tive de tanta gente disposta a ajudar. Vim para a UFC pra fazer o doutorado em matemática, mas o que consegui de melhor foi a amizade de pessoas extraordinárias e lutadoras que passam por aqui com esse mesmo objetivo, e isso é tão grandioso a ponto de influenciar gerações e bater qualquer tipo de preconceito; talvez o grande mo-

tivo que me trouxe até aqui foi porque eu não queria decepcioná-los, acho que cumpri a minha missão e honrei o entusiasmo e a dedicação de todos vocês. Fica registrado aqui o meu muito obrigado a todos, e que Deus os abençoe.

Aos professores da Pós-Graduação em matemática da UFC que, direta ou indiretamente, foram importantes no decorrer dos excelentes cursos que fiz no doutorado. Em especial, gostaria de citar os professores Abdênago Barros, Antônio Caminha, Jorge Herbert, Fábio Montenegro, João Lucas, Eduardo Vasconcelos, Levi Lima, Aldir Brasil e Fernanda Camargo.

À secretária da Pós-Graduação Andrea Costa Dantas, gostaria de agradecer por toda a ajuda. Ainda lembro de todos os problemas burocráticos que lhe apresentei, e ela, na medida de suas limitações e geralmente além de suas atribuições, sempre soube lidar com todos eles de maneira precisa e organizada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), pelo suporte financeiro que para mim foi imprescindível durante todo o curso do doutorado.

A todos os autores citados na bibliografia deste trabalho, pelo valioso suporte teórico deixado nesta vasta literatura da matemática.

Ao departamento de Matemática da UFAM por todo o apoio nesta fase final de preparação da tese.

Aos membros da banca pelas correções e sugetões para a versão final desta tese.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para que este momento se realizasse.

Resumo

Esta tese está composta de quatro partes distintas. Na primeira parte, vamos dar uma nova caracterização da esfera euclidiana como a única variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante e admitindo um campo de vetores conforme não trivial que é também Ricci conforme.

Na segunda parte, provaremos algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci, as quais permitem estabelecer condições de rigidez desses objetos, bem como caracterizar as estruturas de quase sólitons de Ricci gradiente na esfera euclidiana. Imersões isométricas também serão consideradas; classificaremos os quase sólitons de Ricci imersos em formas espaciais, através de uma condição algébrica sobre a função sólito. Além disso, vamos caracterizar, através de uma condição sobre o operador de umbilicidade, as hipersuperfícies n -dimensionais de uma forma espacial, com curvatura média constante, tendo duas curvaturas principais distintas e com multiplicidades p e $n - p$. Na terceira parte, provaremos um resultado de rigidez e algumas fórmulas integrais para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta.

Na última parte, vamos apresentar uma relação entre a curvatura gaussiana e o ângulo de contato de superfícies imersas na esfera euclidiana tridimensional, a qual permite concluir que a superfície é plana, se o ângulo de contato for constante. Além disso, deduziremos que o toro de Clifford é a única superfície compacta com curvatura média constante tendo tal propriedade.

Palavras-chave: Ângulo de contato, Toro de Clifford, Curvatura média constante, Esfera euclidiana, Quase sólito de Ricci, Campo de vetores conforme, Curvatura escalar constante.

Abstract

This thesis is composed of four distinct parts. In the first part, we shall give a new characterization of the Euclidean sphere as the only compact Riemannian manifold with constant scalar curvature carrying a conformal vector field non-trivial which is also Ricci conformal.

In the second part, we shall prove some properties of almost Ricci solitons, which allow us to establish conditions for rigidity of these objects, as well as characterize the structures of gradient almost Ricci soliton in Euclidean sphere. Isometric immersions also will be considered, we shall classify almost Ricci solitons immersed in space forms, through algebraic condition on soliton function. Furthermore, we characterize under a condition of the umbilicity operator, n -dimensional hypersurfaces in a space form with constant mean curvature, admitting two distinct principal curvatures with multiplicities p and $n - p$. In the third part, we prove a result of rigidity and some integral formulae for a compact generalized m -quasi-Einstein metric.

In the last part, we present a relation between the Gaussian curvature and the contact angle of surfaces immersed in Euclidean three-dimensional sphere, which allows us to conclude that such a surface is flat provided its contact angle is constant. Moreover, we deduce that Clifford tori are the unique compact surfaces with constant mean curvature having such property.

Keywords: Contact angle, Clifford torus, Constant mean curvature, Euclidean sphere, Almost Ricci soliton, Conformal vector fields, Constant scalar curvature.

Conteúdo

Introdução	1
1 Campo de vetores conforme	15
1.1 Preliminares	15
1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas	16
1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana	23
2 Quase sólitons de Ricci e imersões isométricas	27
2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci	28
2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci	39
2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau	44
3 Métrica m-quasi-Einstein generalizada	49
3.1 Rigidez de métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta	50
3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada	52
4 Rigidez de superfícies de contato	63
4.1 Preliminares	64
4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3	65
Bibliografia	77

Introdução

Esta tese está dividida em quatro partes distintas. A primeira parte refere-se a teoria de campos conformes. Em meados do século passado vários geométricos famosos se engajaram nesta teoria na tentativa de provar a seguinte conjectura: a esfera euclidiana é a única variedade Riemanniana (M^n, g) compacta, conexa, orientável, admitindo uma métrica g de curvatura escalar constante R e munida de um campo de vetores conforme não trivial X , onde não trivial quer dizer que o fator conforme não é constante. Entre eles, podemos citar Bochner, Lichnerowicz, Nagano, Obata e Yano; indicamos ao leitor o livro do Yano [55] para um resumo destes resultados. Alguns anos mais tarde, Ejiri apresentou um contra-exemplo para esta conjectura construindo uma métrica de curvatura escalar constante em um produto warped do tipo $\mathbb{S}^1 \times_{\varphi} M^{n-1}$, onde M^{n-1} é uma variedade Riemanniana compacta de curvatura escalar constante, enquanto que \mathbb{S}^1 , denota o círculo euclidiano. Neste exemplo, o campo de vetores conforme é $X = \varphi \frac{\partial}{\partial t}$ e φ satisfaz uma certa equação diferencial ordinária, ver [27] para maiores detalhes. Por outro lado, Nagano e Yano [42] provaram que tal conjectura é verdadeira quando a variedade é Einstein. Neste caso, $Ric = \frac{R}{n}g$, assim se X é um campo de vetores conforme, com fator conforme ρ , isto é, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, então $\mathcal{L}_X Ric = 2\rho Ric$, onde Ric e \mathcal{L} denotam, respectivamente, o tensor de Ricci e a derivada de Lie. Isto nos motiva definir um *campo de vetores Ricci conforme* em uma variedade Riemanniana M^n , como um campo de vetores X que satisfaz

$$\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric,$$

para alguma função diferenciável $\beta : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, em uma variedade Einstein todo campo conforme é Ricci conforme. Com esta condição

adicional provaremos que a referida conjectura é verdadeira. Mais precisamente, teremos:

Teorema 1 *Seja M^n , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana orientável, compacta, com curvatura escalar constante e munida de um campo de vetores conforme não trivial X de fator conforme ρ . Então M^n é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ se, e somente se, uma das condições seguintes for satisfeita:*

1. $\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric$.

2. $\mathcal{L}_X G = 2\alpha g$.

3. $\mathcal{L}_X G = 2\rho G$,

onde $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{R}}$, $G = Ric - \frac{R}{n}g$ é o tensor de Einstein, enquanto que α e β são funções em M^n .

Ressaltamos que Obata e Yano [45] obtiveram a mesma conclusão do presente teorema sob a hipótese $\mathcal{L}_X Ric = \alpha g$. Além disso, mostraremos que o teorema anterior é válido sob a condição mais geral $\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric + T$, para um determinado $(0, 2)$ -tensor T em M^n com traço nulo, conforme Teorema 1.2.

Observemos que a prova deste fato faz uso do lema abaixo, o qual já se faz presente na literatura em casos particulares. Contudo, vamos apresentá-lo de uma forma bem geral, tendo em vista que sua utilidade nos dois capítulos seguintes será fundamental e dependerá diretamente das escolhas de um $(0, 2)$ -tensor simétrico e de um determinado campo de vetores na variedade. Vejamos:

Lema 1 *Seja T um $(0, 2)$ -tensor simétrico em uma variedade Riemanniana (M^n, g) . Então vale*

$$\operatorname{div}(T(\varphi Z)) = \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla\varphi, Z),$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável φ em M^n .

Por exemplo, quando trabalhamos com hipersuperfícies n -dimensionais de uma forma espacial, podemos considerar as r -ésimas funções simétricas da curvatura S_r , os r -ésimos tensores de Newton P_r e o operador L_r . Relembremos que os tensores de Newton são definidos indutivamente por: $P_0 = I$ e, para $1 \leq r \leq n$, $P_r = S_r I - A P_{r-1}$, onde A é o operador de Weingarten da hipersuperfície. Enquanto que o operador $L_r : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é definido por $L_r(f) = \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f)$. Um fato importante que foi provado por Rosenberg em [51] é que cada L_r toma uma forma divergente. Mais exatamente, temos

$$L_r(f) = \text{div}(P_r \nabla f).$$

Com efeito, isto segue imediatamente fazendo $T = P_r$ e $Z = \nabla f$ no Lema 1, e do fato de $\text{div} P_r = 0$.

Na segunda parte, vamos tratar sobre quase sólitons de Ricci e imersões isométricas. No final do século 20 Hamilton introduziu o fluxo de Ricci. Mais especificamente, dada uma família a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ em uma variedade Riemanniana M^n , definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotando por $\text{Ric}_{g(t)}$ o tensor de Ricci na métrica $g(t)$, a equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}. \quad (1)$$

Em [30] Hamilton provou que para qualquer métrica diferenciável g_0 em uma variedade Riemanniana compacta M^n , existe uma única solução $g(t)$ para a equação (1) definida em algum intervalo $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, com $g(0) = g_0$. Para o caso completo não compacto, Shi provou em [53] a existência de uma solução completa de (1) sob a condição da curvatura seccional de (M^n, g_0) ser limitada. Desde então, este fluxo se tornou uma ferramenta poderosa na solução de problemas difíceis em vários ramos da matemática, como por exemplo, a clássica conjectura de Poincaré sobre a esfera \mathbb{S}^3 e a conjectura da geometrização de Thurston, resolvidas por Perelman, bem como o teorema da esfera diferenciável, provado por Brendle e Schoen.

Um sólito de Ricci é um fluxo de Ricci $(M^n, g(t))$, $0 \leq t < T \leq +\infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0, T)$, existe um difeomorfismo $\varphi_t : M^n \rightarrow M^n$ e uma constante $\sigma(t) > 0$ tal que $\sigma(t)\varphi_t^* g(0) = g(t)$. Uma maneira para

gerar sólitons de Ricci é a seguinte: consideremos uma variedade Riemanniana (M^n, g_0) , com um campo de vetores X e uma constante λ satisfazendo

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_0 = \lambda g_0. \quad (2)$$

Em seguida, vamos definir a função $\sigma(t) = -2\lambda t + 1$, para cada $t \in [0, T)$, com $T := +\infty$, se $\lambda \leq 0$, e $T := \frac{1}{2\lambda}$, se $\lambda > 0$. Finalmente, basta considerarmos φ_t como a família a 1-parâmetro de difeomorfismos gerados pelo campo $Y_t(x) = \frac{X(x)}{\sigma(t)}$, para todo $x \in M^n$. Esta caracterização permite que alguns autores considerem a equação (2) para definirem sóliton de Ricci. Para maiores detalhes sobre o fluxo de Ricci, duas boas referências são [24] e [25]. Em [49] Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti usaram tal equação, com a condição adicional de que o parâmetro λ seja uma função e X um campo de vetores gradiente, para definirem um quase sóliton de Ricci gradiente. Posteriormente, Barros e Ribeiro em [11] consideraram a seguinte definição geral de quase sóliton de Ricci.

Definição 1 *Um quase sóliton de Ricci é uma variedade diferenciável M^n munida com uma métrica Riemanniana g , um campo de vetores X e uma função sóliton $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a equação (2).*

Quando X é o campo de vetores gradiente de alguma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal variedade é chamada de quase sóliton de Ricci gradiente. Observemos que, se X é um campo de vetores Killing e $n \geq 3$, neste caso a variedade é Einstein, e, portanto, λ é constante, logo teremos um sóliton de Ricci. Por exemplo, considerando o \mathbb{R}^n com a sua métrica usual g_0 , uma constante não nula λ e a função $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, então $\nabla^2 f = \lambda g_0$ e $(\mathbb{R}^n, g_0, \nabla f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente não trivial, este foi um dos exemplos dados por Hamilton, o qual é conhecido na literatura como sóliton gaussiano.

Assim como o sóliton de Ricci, também podemos associar um quase sóliton ao fluxo de Ricci. De fato, sejam (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana completa e $g(t)$ uma solução de (1), definida em um intervalo $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tal que φ_t seja uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos de M^n , com $\varphi_0 = id_M$ e $g(t)(x) = \tau(x, t)\varphi_t^* g_0(x)$ para todo $x \in M^n$, onde $\tau(x, t)$ é uma função real

diferenciável e positiva em $M^n \times [0, \varepsilon)$, de modo que $\tau(x, 0) = 1$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t} \tau(x, t) \varphi_t^* g_0(x) + \tau(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* g_0(x),$$

que em $t = 0$, fica

$$-2Ric_{g_0} = -2\lambda(x)g_0 + \mathcal{L}_X g_0,$$

onde $\lambda(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \tau(x, 0)$ e $X = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0)$, logo (M^n, g_0, X, λ) é um quase sólito de Ricci.

Na direção de compreender a geometria dos quase sólitons de Ricci, Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti provaram em [49] algumas condições de existência de quase sólitons de Ricci gradientes. Além disso, Barros e Ribeiro em [11] apresentaram algumas equações de estrutura dos quase sólitons de Ricci. Neste mesmo artigo, eles utilizaram o método de Bochner para deduzir uma fórmula integral para o caso compacto, a qual possibilitou concluir um importante resultado de rigidez. Recordaremos esta fórmula através do Lema 2.1 e apresentaremos uma demonstração diferente desses autores, como uma das várias aplicações que pode ter o Lema 1 acima. Para maiores detalhes sobre a geometria dos quase sólitons de Ricci ver, por exemplo [10],[11] e [49].

Como aplicação do Lema 2.1, podemos caracterizar as estruturas de quase sólito de Ricci gradiente na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para isto, utilizaremos o exemplo dado pelos autores em [11]. Vejamos.

Exemplo 1 *Para cada vetor não nulo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, considere as funções $\lambda_a(x) = -\langle x, a \rangle + n - 1$ e $f_a(x) = -\lambda_a(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor posição, então $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f_a, \lambda_a)$ são as únicas estruturas não triviais, de quase sólito de Ricci gradiente em \mathbb{S}^n . De fato, isto será provado com o auxílio da proposição seguinte.*

Proposição 1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sólito de Ricci gradiente com curvatura escalar constante R . Suponha que $\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f$ atinge um máximo, então esta função é constante em M^n e a função sólito λ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial*

$$\Delta \lambda + \frac{R}{n-1} \lambda = \frac{R^2}{n(n-1)}.$$

Em particular, se λ ou f for não constante, então para $R \geq 0$, M^n é isométrica a uma esfera euclidiana.

Em seguida analisaremos o caso mais geral em que, o campo que define o quase sóliton de Ricci não necessariamente é gradiente, para tanto nos restringiremos ao caso compacto. Neste momento, é importante lembrarmos do trabalho de Perelman em [48], onde ele provou que todo sóliton de Ricci (M^n, g, X, λ) compacto é gradiente. Mais precisamente, existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de maneira que, trocando X por ∇f , ainda teremos que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci. Esta função é conhecida como potencial de Perelman, a qual, a menos de uma constante, é a função potencial de Hodge-de Rham associada ao campo X , conforme foi provado por Aquino, Barros e Ribeiro em [7]. Para mais detalhes sobre sólitons de Ricci ver por exemplo [17].

No caso de um quase sóliton de Ricci (M^n, g, X, λ) compacto, através do teorema da decomposição de Hodge-de Rham podemos decompor o campo X como soma de um campo de vetores Y com divergente nulo, e o gradiente de uma função diferenciável h em M^n . Então, obteremos a proposição seguinte.

Proposição 2 *Para um quase sóliton de Ricci compacto (M^n, g, X, λ) são válidas as seguintes fórmulas integrais:*

1. $\int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle dM.$
2. $\int_M \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM.$
3. $\int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM + \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM.$

Cabe ressaltar que o item 2 desta proposição já foi provado recentemente por Barros, Ribeiro e Batista em [9], onde eles utilizaram uma técnica diferente da que será aplicada nesta proposição, e obviamente, eles já obtiveram o item 2 do Corolário 1 seguinte.

Como aplicação da Proposição 2, obteremos um resultado de rigidez para quase sólitons de Ricci compactos. Vejamos:

Corolário 1 *Um quase sólito de Ricci compacto não trivial (M^n, g, X, λ) , com $n \geq 3$, é isométrico a uma esfera euclidiana se, e somente se, uma das condições seguintes for satisfeita:*

1. $\int_M \langle \nabla^2 h, Ric \rangle dM = 0$.
2. $\int_M g(\nabla R, X) dM = 0$.
3. ∇h é um campo de vetores conforme.

Este corolário mostra que o exemplo dado por Ejiri [27] não admite estrutura não trivial de quase sólito de Ricci.

Continuando, derivaremos covariantemente a equação fundamental (2), no caso gradiente, para deduzirmos o próximo lema.

Lema 2 *Para um quase sólito de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, vale*

$$(\nabla_Z Ric)Y - (\nabla_Y Ric)Z = Z(\lambda)Y - Y(\lambda)Z - R(Z, Y)\nabla f,$$

para todos $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Este lema permitirá provar a não existência de quase sólito de Ricci compacto gradiente, radialmente plano e com tensor de Ricci de Codazzi, conforme Proposição 2.3; onde um quase sólito de Ricci gradiente não trivial é radialmente plano, se a sua curvatura seccional satisfaz: $sec(Z, \nabla f) = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Na secção 2.2 trataremos especificamente de imersões de quase sólitos de Ricci. Nosso primeiro resultado mostra algumas condições para a inexistência de imersão mínima de um quase sólito de Ricci em uma variedade Riemanniana. Mais precisamente, temos o seguinte.

Teorema 2 *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica de um quase sólito de Ricci (M^n, g, X, λ) em uma variedade Riemanniana \widetilde{M}^{n+p} de curvatura seccional \widetilde{k} . Temos os seguintes casos:*

1. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\widetilde{k} \leq 0$ e $\lambda > 0$, então φ não pode ser mínima.
2. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\widetilde{k} < 0$ e $\lambda \geq 0$, então φ não pode ser mínima.

3. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\tilde{k} \leq 0$, $\lambda \geq 0$ e φ é mínima, então $\lambda = 0$ e M^n é plana e totalmente geodésica.
4. Se \tilde{M} é completa, $\sup_M |X| < \infty$, $\tilde{k} \leq 0$ e $\lambda \geq c > 0$, onde $c \in \mathbb{R}$, então φ não pode ser mínima.

No próximo teorema, através de uma condição algébrica sobre a função sóliton λ , vamos classificar os quase sólitons isometricamente imersos em um espaço de curvatura seccional constante.

Teorema 3 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sóliton de Ricci isometricamente imerso em uma variedade Riemanniana \tilde{M}_c^{n+p} de curvatura seccional constante c . Temos os seguintes casos:*

1. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $\lambda \geq (n-1)c + n|H|^2$, então (M^n, g) é totalmente geodésica, com $\lambda = (n-1)c$.
2. Se M^n é compacta e $\lambda \geq (n-1)c + n|H|^2$, então M^n é uma esfera totalmente geodésica de \mathbb{S}^{n+p} , com $\lambda = n-1$.
3. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $p = 1$ e $\lambda \geq (n-1)(c + H^2)$, então M^n é totalmente umbílica. Em particular, a curvatura escalar $R = n(n-1)k$ é constante, onde $k = \frac{\lambda}{n-1}$ é a curvatura seccional de (M^n, g) .

Finalizando esta secção, usaremos a fórmula de Simons e o Corolário 1 para provarmos o seguinte.

Teorema 4 *Seja (M^n, g, X, λ) , $n \geq 3$, um quase sóliton de Ricci não trivial, imerso minimamente na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Suponha que $R \geq n(n-2)$ e a norma da segunda forma fundamental atinge um máximo, então M^n é isométrica a uma esfera euclidiana com estrutura de quase sóliton descrita no Exemplo 1.*

Na secção 2.3 usaremos o princípio do máximo de Omori-Yau e as técnicas utilizadas por Alencar e Do Carmo em [2], e também por Alías e Martinez em [5], para provarmos nosso próximo teorema. Começemos estabelecendo a notação seguinte. Seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em uma

forma espacial \widetilde{M}_c^{n+1} , com curvatura média constante H . Para cada H e p , $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, consideraremos o seguinte polinômio.

$$P_{H,p}(x) = x^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}}|H|x - n(c+H^2).$$

Desde que $c+H^2 \geq 0$, $P_{H,p}(x)$ tem única raiz não-negativa dada por

$$B_{H,p} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(\sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H|).$$

Estabelecida esta notação, provaremos o seguinte.

Teorema 5 *Seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em uma forma espacial \widetilde{M}_c^{n+1} , com curvatura média constante H . Suponha em adição que M^n tem duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $(n-p)$, $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Além disso, assuma que $H^2 - 1 \geq 0$, caso $c = -1$. Então $\sup_M |\Phi| \geq B_{H,p}$. Em particular, a igualdade vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n se, e somente se:*

1. $c = 0$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{R}^p$, para algum $r > 0$.
2. $c = 1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{1-r^2})$, para algum r , $0 < r^2 \leq \frac{n-p}{n}$, onde $r^2 = \frac{n-p}{n}$ se, e somente se $H = 0$.
3. $c = -1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{H}^p(-\sqrt{1+r^2})$, para algum $r > 0$.

Na terceira parte, utilizaremos as técnicas aplicadas na prova da Proposição 2, afim de estabelecermos algumas fórmulas integrais para uma variedade Riemanniana munida de uma métrica especial, que descreveremos a seguir. Case, Shu e Wei mostraram em [18] que um produto warped Einstein está diretamente relacionado com uma classe de variedades munidas de uma métrica Riemanniana especial, chamada métrica m -quasi-Einstein. Um tensor que está associado a tal métrica e se mostra bastante útil no estudo dessas variedades, é o já conhecido na literatura como tensor de Ricci m -Bakry-Emery

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df, \quad (3)$$

onde $0 < m \leq \infty$ é um número inteiro, e f é uma função diferenciável em M^n . Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma métrica m -quasi-Einstein,

se $Ric_f^m = \lambda g$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O tensor em (3) foi estendido recentemente, por Barros e Ribeiro em [12], para um campo de vetores arbitrário X em M^n , com segue:

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^b \otimes X^b,$$

onde X^b denota a 1-forma associada ao campo X . Logo, é conveniente chamarmos de métrica m -quasi-Einstein generalizada, uma variedade Riemanniana (M^n, g) com a propriedade que $Ric_X^m = \lambda g$, para alguma função diferenciável λ em M . Em seguida estes mesmos autores consideraram em [13], o caso em que $Ric_f^m = \lambda g$, ainda com λ sendo uma função, e apresentaram uma família não trivial de tal estrutura na esfera euclidiana unitária \mathbb{S}^n , no espaço euclidiano \mathbb{R}^n e no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . No caso compacto provaremos um resultado de rigidez que seguirá da proposição seguinte.

Proposição 3 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta. Para $u = e^{-\frac{f}{m}}$, são válidas as seguintes fórmulas integrais:*

1. $\int_M \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 dM = -\frac{(n-2)}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla u) dM.$
2. $\int_M \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 dM = \frac{(n-2)}{n} \int_M (\frac{m}{u} |\nabla u|^2 - g(\nabla \lambda, \nabla u)) dM.$

Como aplicação deduziremos o seguinte resultado.

Teorema 6 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$, $n \geq 3$, uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta não trivial, com m finito. Suponha que $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$, com $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Então (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ e, a menos de uma constante, $f = -m \ln(\tau - \frac{h_v}{n})$, onde $\tau \in (1/n, +\infty)$ é um parâmetro real e h_v é a função altura com respeito a algum vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Prosseguindo, estenderemos algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada (M^n, g, X, λ, m) . No caso compacto, consideraremos $X = Y + \nabla h$ para provarmos as fórmulas integrais abaixo.

Lema 3 Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle dM \\ &\quad + \frac{1}{m} \int_M \langle \nabla^2 h, X^\flat \otimes X^\flat \rangle dM - \frac{1}{nm} \int_M |X|^2 \Delta h dM, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM &= -\frac{1}{n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{nm} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\ &\quad - \int_M (\lambda \Delta h - |\nabla^2 h|^2) dM. \end{aligned}$$

Proposição 4 Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{(n+2)}{2mn} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\ &\quad + \frac{2}{m} \int_M (g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, Y)) dM \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM. \end{aligned}$$

Em particular, quando $X = \nabla f$, para alguma função diferenciável f em M^n , torna-se:

$$\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla f) dM - \frac{(n+2)}{2mn} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM.$$

Proposição 5 Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.

$$\begin{aligned} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2mn} \int_M |X|^2 \operatorname{div} X dM \\ &\quad + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2mn} \int_M (n\lambda - R) |X|^2 dM \\ &\quad + \frac{3}{2m^2} \int_M |X|^4 dM. \end{aligned}$$

Em particular, quando $X = \nabla f$ para alguma função diferenciável f em M^n , tal fórmula será

$$\begin{aligned} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 dM + \frac{n+2}{mn} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM \\ &\quad + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |\nabla f|^4 dM. \end{aligned}$$

Proposição 6 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.*

$$\begin{aligned} \int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= -\frac{2}{n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2} \int_M g(\nabla \lambda, X) dM \\ &\quad + \frac{n+2}{2n} \int_M (\operatorname{div} X)^2 dM + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM. \end{aligned}$$

Em [18] os autores mostraram que toda métrica m -quasi-Einstein $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ compacta com curvatura escalar constante, é trivial. De fato, isto é imediato pela Proposição 4. Contudo, vamos ver que no caso de campo de vetores não gradientes tal fato nem sempre ocorre, conforme exemplo apresentado por Barros, Ribeiro e Silva em [14], ver Exemplo 3.2. Por outro lado, se a variedade for Einstein, aí sim teremos que o campo é nulo, de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 7 *Uma métrica m -quasi-Einstein (M^n, g, X, λ, m) compacta, com m finito, é trivial, se uma das condições seguintes ocorrer:*

1. $n \geq 3$ e (M^n, g) é Einstein.
2. $n = 2$ e (M^2, g) tem curvatura constante.

A última parte da tese refere-se ao estudo de um invariante geométrico de superfícies imersas na esfera euclidiana tri-dimensional \mathbb{S}^3 . Tal invariante conhecido como ângulo de contato, é o complementar do ângulo entre a distribuição de contato δ e o espaço tangente da superfície. Em [39] Montes e Verderesi caracterizaram as superfícies mínimas em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato constante e em [6] Almeida, Brasil e Montes estudaram algumas propriedades de superfícies imersas com curvatura média e ângulo de contato constantes em \mathbb{S}^3 .

Agora vamos chamar de \mathcal{C} todas as superfícies M^2 isometricamente imersas em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, tais que $z^\perp := (-\bar{z}_2, \bar{z}_1) \in T_z M^2$ para todo $z = (z_1, z_2) \in M^2$.

Nosso primeiro resultado, que será a principal ferramenta para provarmos os resultados seguintes, descreveremos da seguinte forma:

Teorema 8 *Para $M^2 \in \mathcal{C}$, com ângulo de contato β , a curvatura gaussiana é dada por*

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2),$$

onde $\beta_1 = d\beta(e_1)$, $\beta_2 = d\beta(e_2)$, $\{e_1 = z^\perp, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_z M^2$ e H denota a curvatura média da superfície. Além disso, o laplaciano de β satisfaz

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2\},$$

onde $H_2 = dH(e_2)$.

Como consequência direta deste teorema deduziremos o seguinte.

Corolário 2 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ tem ângulo de contato constante, então ela é plana. Em particular, ela será difeomorfa a um toro, se for compacta.*

Outro resultado importante, que será uma consequência imediata da equação (4.9) que aparece na prova do Teorema 8, é:

Proposição 7 *Não existe superfície em \mathcal{C} com ângulo de contato constante β satisfazendo $|\beta| = \frac{\pi}{2}$.*

Em seguida, utilizaremos um clássico resultado devido a Hoffman [32] para provarmos o seguinte resultado de rigidez.

Corolário 3 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ é compacta, tem ângulo de contato e curvatura média constantes, então ela é isométrica a um toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$.*

Usando este corolário e o princípio do máximo forte de Hopf, provaremos o seguinte.

Teorema 9 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ é compacta, tem curvatura média constante e ângulo de contato β satisfazendo, $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, então ela é isométrica a um toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$.*

Um fato surpreendente é que a recíproca do Teorema 8 é verdadeira. Mais especificamente, usaremos o Teorema Fundamental das Hipersuperfícies para provarmos o teorema seguinte.

Teorema 10 *Seja M^2 uma superfície Riemanniana e e_1 um campo de vetores unitário em M^2 . Considere $\beta : M^2 \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ uma função diferenciável em M^2 e uma constante H , satisfazendo a equação*

$$\Delta\beta = -\tan\beta(|\nabla\beta + 2e_1|^2 + 4H(H + \beta_2)),$$

onde $\beta_2 = d\beta(e_2)$ e $\{e_1, e_2\}$ é um referencial móvel em M^2 . Então existe uma única imersão isométrica de M^2 em \mathbb{S}^3 , tal que β é o ângulo de contato de M^2 e H é a curvatura média desta imersão.

Capítulo 1

Campo de vetores conforme

Neste capítulo, provaremos o Teorema 1 da nossa introdução e também um caso um pouco mais geral deste teorema, conforme Teorema 1.2. Para isto estabeleceremos os seguintes preliminares.

1.1 Preliminares

Primeiramente, relembremos que a norma de Hilbert-Schmidt para $(0, 2)$ -tensores em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , é a induzida do produto interno $\langle T, S \rangle = \text{tr}(TS^*)$, onde S^* denota o tensor adjunto de S .

Em um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) , denotando por $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ a base coordenada, (g_{ij}) a matriz da métrica, (g^{ij}) a sua inversa neste sistema de coordenadas, por $T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j)$, $S_{ij} = S(\partial_i, \partial_j)$, teremos

$$\langle T, S \rangle = \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} T_{ij} S_{kl}.$$

Em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, usando a identificação natural dos $(0, 2)$ -tensores com os $(1, 1)$ -tensores, isto é: $T(e_i, e_j) = g(Te_i, e_j)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle T, S \rangle &= \sum_{i,j} T_{ij} S_{ij} = \sum_{i,j} g(Te_i, e_j) g(Se_i, e_j) \\ &= \sum_i g(Te_i, \sum_j g(Se_i, e_j) e_j) = \sum_i g(Te_i, Se_i). \end{aligned}$$

Por exemplo, sendo $S = g$, teremos $\langle T, g \rangle = \text{tr}(T)$.

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Precisaremos recordar também a seguinte propriedade da derivada de Lie: para um $(0, 2)$ -tensor T em (M^n, g) , vale

$$(\mathcal{L}_X T)(Y, Z) = X(T(Y, Z)) - T([X, Y], Z) - T(Y, [X, Z]),$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, fazendo $T = g$, temos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \quad (1.1)$$

Ademais, tomando o traço em (1.1), fica

$$\text{tr}(\mathcal{L}_X g) = 2\text{div}X. \quad (1.2)$$

Vamos considerar a definição seguinte de campo de vetores conforme.

Definição 1.1 *Um campo de vetores X em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é conforme, se existir uma função diferenciável ρ em M^n , tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Diremos que X não é trivial se ρ for não constante.*

Observemos que, a equação (1.2) mostra que o fator conforme $\rho = \frac{\text{div}X}{n}$. Ademais, para o que segue as variedades compactas serão consideradas sem bordo.

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Nesta secção, provaremos algumas propriedades de carácter geral de $(0, 2)$ -tensores e de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas, cuja utilidade, conforme veremos no capítulo seguinte, está além da teoria desenvolvida nesta secção. Descreveremos tais propriedades através de lemas, e o primeiro deles que nos será muito útil é:

Lema 1.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores conforme X tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Se T é um $(0, 2)$ -tensor simétrico em M^n , então temos $\mathcal{L}_X |T|^2 = 2\langle \mathcal{L}_X T, T \rangle - 4\rho |T|^2$.*

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Demonstração: Pelo carácter pontual dos tensores, basta provar este lema para um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ geodésico em um ponto arbitrário $p \in M^n$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X|T|^2 &= \mathcal{L}_X\left(\sum_{i,j} T_{ij}T_{ij}\right) = 2\sum_{i,j} T_{ij}X(T_{ij}) \\ &= 2\sum_{i,j} T_{ij}\{(\mathcal{L}_X T)_{ij} + T([X, e_i], e_j) + T(e_i, [X, e_j])\} \\ &= 2\sum_{i,j} T_{ij}(\mathcal{L}_X T)_{ij} - 2\sum_{i,j} T_{ij}\{T(\nabla_{e_i} X, e_j) + T(e_i, \nabla_{e_j} X)\}. \end{aligned}$$

Assim, a simetria de T nos permite deduzir que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X|T|^2 &= 2\langle T, \mathcal{L}_X T \rangle - 2\sum_{i,j} T_{ij}\{g(\nabla_{e_i} X, Te_j) + g(Te_i, \nabla_{e_j} X)\} \\ &= 2\langle T, \mathcal{L}_X T \rangle - \sum_j 2g(\nabla_{Te_j} X, Te_j) - \sum_i 2g(Te_i, \nabla_{Te_i} X). \end{aligned}$$

Em seguida usaremos a propriedade da derivada de Lie (1.1) para escrevermos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X|T|^2 &= 2\langle T, \mathcal{L}_X T \rangle - \sum_j (\mathcal{L}_X g)(Te_j, Te_j) - \sum_i (\mathcal{L}_X g)(Te_i, Te_i) \\ &= 2\langle T, \mathcal{L}_X T \rangle - \sum_j 4\rho g(Te_j, Te_j), \end{aligned}$$

que dá $\mathcal{L}_X|T|^2 = 2\langle \mathcal{L}_X T, T \rangle - 4\rho|T|^2$. □

Uma consequência direta deste lema, é o corolário seguinte.

Corolário 1.1 *Sob as hipóteses do Lema 1.1, $\mathcal{L}_X|T|^2 = 0$, se $\mathcal{L}_X T = 2\rho T$.*

Agora vamos lembrar que o tensor sem traço $\overset{\circ}{T}$ de um $(0, 2)$ -tensor T em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dado por

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{\text{tr}(T)}{n}g_{ij}. \quad (1.3)$$

Ademais, notemos que

$$|\overset{\circ}{T}|^2 = \left|T - \frac{\text{tr}(T)}{n}g\right|^2 = |T|^2 - \frac{1}{n}(\text{tr}(T))^2.$$

Sendo assim provaremos o próximo lema.

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Lema 1.2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana munida de um $(0, 2)$ -tensor simétrico T e um campo de vetores conforme X com fator conforme ρ . Se $\mathcal{L}_X T = 2\beta T$, então vale:*

1. $2(\beta - \rho)\text{tr}(T) = g(\nabla(\text{tr}(T)), X)$.
2. Se $\text{tr}(T)$ é constante não nulo, então $\beta = \rho$ e $\mathcal{L}_X \overset{\circ}{T}_{ij} = 2\rho \overset{\circ}{T}_{ij}$.

Demonstração: A conta é como no lema anterior, para isto seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local geodésico em um ponto $p \in M^n$. Então

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{\text{tr}(T)}{n} \delta_{ij}.$$

Portanto, pela simetria de T , temos

$$\begin{aligned} X(\overset{\circ}{T}_{ij}) &= X(T_{ij}) - \frac{\delta_{ij}}{n} X(\text{tr}(T)) \\ &= (\mathcal{L}_X T)_{ij} + T([X, e_i], e_j) + T(e_i, [X, e_j]) - \frac{\delta_{ij}}{n} X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta T_{ij} - T(\nabla_{e_i} X, e_j) - T(e_i, \nabla_{e_j} X) - \frac{\delta_{ij}}{n} X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta T_{ij} - g(\nabla_{e_i} X, \sum_k g(Te_j, e_k)e_k) - g(Te_i, \nabla_{e_j} X) - \frac{\delta_{ij}}{n} X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta T_{ij} - g(\nabla_{\sum_k g(Te_j, e_k)e_i} X, e_k) - g(Te_i, \nabla_{e_j} X) - \frac{\delta_{ij}}{n} X(\text{tr}(T)). \end{aligned}$$

Em seguida, a conformidade de X e novamente a simetria de T , permite escrevermos

$$\begin{aligned} X\left(\sum_i \overset{\circ}{T}_{ii}\right) &= 2\beta \sum_i T_{ii} - \sum_k g(\nabla_{\sum_i g(e_i, Te_k)e_i} X, e_k) - \sum_i g(Te_i, \nabla_{e_i} X) \\ &\quad - \sum_i \frac{\delta_{ii}}{n} X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta \text{tr}(T) - \sum_k g(\nabla_{Te_k} X, e_k) - \sum_i g(Te_i, \nabla_{e_i} X) - X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta \text{tr}(T) - \sum_i \{g(\nabla_{Te_i} X, e_i) + g(Te_i, \nabla_{e_i} X)\} - X(\text{tr}(T)) \\ &= 2\beta \text{tr}(T) - 2\rho \sum_i g(Te_i, e_i) - X(\text{tr}(T)). \end{aligned}$$

Logo,

$$X(\text{tr}(\overset{\circ}{T})) = 2(\beta - \rho)\text{tr}(T) - g(\nabla(\text{tr}(T)), X). \quad (1.4)$$

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Como $\text{tr}(\mathring{T}) = 0$, concluímos que $2(\beta - \rho)\text{tr}(T) = g(\nabla(\text{tr}(T)), X)$, que completa a prova do primeiro item. Por outro lado, se $\text{tr}(T)$ é uma constante não nula, então $\beta = \rho$, que implica $\mathcal{L}_X \mathring{T} = \mathcal{L}_X T - \frac{\text{tr}(T)}{n} \mathcal{L}_X g = 2\rho \mathring{T}$, finalizando a prova do lema. \square

Prosseguindo, vamos aplicar os resultados anteriores para o tensor de Ricci R_{ij} . Começemos observando que para um campo de vetores conforme X em uma variedade Riemanniana (M^n, g) tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, as fórmulas abaixo foram provadas por Obata e Yano em [46], que também podem ser encontradas em [55].

$$\mathcal{L}_X R_{ij} = -(n-2)(\nabla^2 \rho)_{ij} - (\Delta \rho)g_{ij}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_X R = -2(n-1)\Delta \rho - 2R\rho \quad (1.6)$$

e

$$\mathcal{L}_X G_{ij} = -(n-2)((\nabla^2 \rho)_{ij} - \frac{1}{n}(\Delta \rho)g_{ij}), \quad (1.7)$$

onde $G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij} = \mathring{R}_{ij}$.

Observação 1.1 *Se M^n é compacta com curvatura escalar constante R e X não é trivial, então a equação (1.6) nos permite inferir que $\frac{R}{n-1}$ está no espectro do laplaciano em M^n , portanto R é positiva. Consequentemente, deduziremos o próximo lema.*

Lema 1.3 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante, munida de um campo de vetores conforme não trivial X , tal que $\mathcal{L}_X \text{Ric} = 2\beta \text{Ric}$ e $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Então, $\beta = \rho$ e $\mathcal{L}_X |G|^2 = 0$.*

Demonstração: Como X não é trivial e M^n é compacta, segue que $R = \text{tr}(\text{Ric})$ é uma constante positiva e como $\mathcal{L}_X \text{Ric} = 2\beta \text{Ric}$, segue do Lema 1.2 que $\beta = \rho$ e $\mathcal{L}_X G = 2\rho G$. Assim, aplicando o Corolário 1.1, $\mathcal{L}_X |G|^2 = 0$, que completa a prova do lema. \square

Para continuarmos precisaremos da definição seguinte.

Definição 1.2 *Definimos a divergência de um $(1, r)$ -tensor T em M^n , como sendo o $(0, r)$ -tensor dado por*

$$(\text{div}T)(v_1, \dots, v_r)(p) = \text{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, \dots, v_r)(p)),$$

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

onde $p \in M^n$ e $(v_1, \dots, v_r) \in T_p M \times \dots \times T_p M$.

Por exemplo: seja T um $(0, 2)$ -tensor em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , tomemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ em (M^n, g) . Então, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)(Z) &= \sum_i g(\nabla_{e_i} T)(Z), e_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i} T(Z) - T(\nabla_{e_i} Z), e_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i} T(Z), e_i) - g(T(\nabla_{e_i} Z), e_i) \\ &= \operatorname{div}(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{e_i} Z, e_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div}(T(Z)) = (\operatorname{div} T)(Z) + \sum_i T(\nabla_{e_i} Z, e_i). \quad (1.8)$$

Neste momento, convém denotarmos por I o $(1, 1)$ -tensor associado ao $(0, 2)$ -tensor métrico g . Além disso, para $T = fg$, onde f é uma função diferenciável em (M^n, g) , teremos $\operatorname{div}(fg) = df$.

Em seguida vamos considerar o $(1, 1)$ -tensor ∇Z em M^n , dado por $X \mapsto \nabla_X Z$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, de maneira que a equação anterior nos permita provar o lema seguinte, o qual veremos que sua utilidade está além da teoria desenvolvida neste capítulo.

Lema 1.4 *Seja T um $(0, 2)$ -tensor simétrico em uma variedade Riemanniana (M^n, g) . Então vale*

$$\operatorname{div}(T(\varphi Z)) = \varphi(\operatorname{div} T)(Z) + \varphi \langle \nabla Z, T \rangle + T(\nabla \varphi, Z),$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável φ em M^n . Em particular, se $Z = \nabla f$, para alguma função diferenciável f em M^n , então

$$\operatorname{div}(T(\varphi \nabla f)) = \varphi(\operatorname{div} T)(\nabla f) + \varphi \langle \nabla^2 f, T \rangle + T(\nabla \varphi, \nabla f).$$

Demonstração: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em (M^n, g) . Pelas propriedades do operador divergente, pela equação (1.8) e pela simetria

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

de T , teremos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(T(\varphi Z)) &= \operatorname{div}(\varphi T(Z)) = \varphi \operatorname{div}(T(Z)) + g(\nabla\varphi, T(Z)) \\
 &= \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi \sum_i g(T(\nabla_{e_i}Z), e_i) + T(\nabla\varphi, Z) \\
 &= \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi \sum_i g(\nabla_{e_i}Z, T(e_i)) + T(\nabla\varphi, Z) \\
 &= \varphi(\operatorname{div}T)(Z) + \varphi\langle\nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z),
 \end{aligned}$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável φ em M^n . \square

Agora vamos utilizar as técnicas desenvolvidas por Obata e Yano em [46] para provarmos o lema seguinte. Para isto, consideraremos que (M^n, g) está munida de um campo de vetores conforme X , com fator conforme ρ . Façamos $T = G$, $\varphi = \rho$ e $Z = \nabla\rho$ no Lema 1.4 para obtermos

$$\operatorname{div}(G(\rho\nabla\rho)) = \rho(\operatorname{div}G)(\nabla\rho) + \rho\langle\nabla^2\rho, G\rangle + G(\nabla\rho, \nabla\rho). \quad (1.9)$$

Além disso, combinando $\operatorname{div}(\frac{R}{n}g) = \frac{1}{n}dR$ com a segunda identidade de Bianchi contraída, isto é $\operatorname{div}Ric = \frac{1}{2}dR$, teremos a próxima relação

$$\operatorname{div}G = \operatorname{div}\left(Ric - \frac{R}{n}g\right) = \frac{n-2}{2n}dR.$$

Logo,

$$\rho(\operatorname{div}G)(\nabla\rho) = \frac{n-2}{4n}g(\nabla R, \nabla\rho^2). \quad (1.10)$$

Por outro lado, como $\langle G, g \rangle = 0$, deduziremos por (1.7) que

$$\langle \mathcal{L}_X G, G \rangle = -(n-2)\langle\nabla^2\rho, G\rangle.$$

Aplicando o Lema 1.1 nesta identidade, obteremos

$$\langle\nabla^2\rho, G\rangle = -\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_X|G|^2 + 2\rho|G|^2\right). \quad (1.11)$$

Finalmente, substituindo as equações (1.10) e (1.11) em (1.9), deduzimos

$$\operatorname{div}(G(\rho\nabla\rho)) = \frac{n-2}{4n}g(\nabla R, \nabla\rho^2) - \frac{1}{n-2}\left(\frac{\rho}{2}\mathcal{L}_X|G|^2 + 2\rho^2|G|^2\right) + G(\nabla\rho, \nabla\rho).$$

Como consequência direta desta última equação e do teorema de Stokes, vamos obter o lema seguinte, o qual no caso de curvatura escalar constante, já foi provado por Obata e Yano em [46].

Doravante, assumiremos que todas as variedades são conexas, orientáveis e de dimensão $n \geq 3$.

1.2 Algumas propriedades de campo de vetores conforme em variedades Riemannianas

Lema 1.5 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta munida de um campo de vetores conforme X de fator conforme ρ . Então vale:*

$$\int_M G(\nabla\rho, \nabla\rho) dM = \frac{n-2}{4n} \int_M \rho^2 \Delta R dM + \frac{1}{n-2} \int_M \left(\frac{\rho}{2} \mathcal{L}_X |G|^2 + 2\rho^2 |G|^2 \right) dM.$$

Prosseguindo usaremos (1.6) e $|\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 = |\nabla^2 \rho|^2 - \frac{1}{n} (\Delta\rho)^2$ para escrevermos a fórmula de Bochner como segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla\rho|^2 &= Ric(\nabla\rho, \nabla\rho) + |\nabla^2 \rho|^2 + g(\nabla\rho, \nabla(\Delta\rho)) \\ &= G(\nabla\rho, \nabla\rho) + \frac{R}{n} |\nabla\rho|^2 + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 + \frac{1}{n} (\Delta\rho)^2 \\ &\quad - g(\nabla\rho, \nabla(\frac{R\rho}{n-1} + \frac{\mathcal{L}_X R}{2(n-1)})) \\ &= G(\nabla\rho, \nabla\rho) + \frac{R}{n} |\nabla\rho|^2 + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 - \frac{R\rho}{n(n-1)} \Delta\rho \\ &\quad - \frac{\mathcal{L}_X R}{2n(n-1)} \Delta\rho - \frac{R}{n-1} |\nabla\rho|^2 - \frac{\rho}{n-1} g(\nabla\rho, \nabla R) \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)} g(\nabla\rho, \nabla \mathcal{L}_X R). \end{aligned}$$

Como $(\frac{R}{n} - \frac{R}{n-1}) |\nabla\rho|^2 - \frac{R\rho}{n(n-1)} \Delta\rho = -\frac{R(|\nabla\rho|^2 + \rho\Delta\rho)}{n(n-1)}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla\rho|^2 &= G(\nabla\rho, \nabla\rho) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 - \frac{R(|\nabla\rho|^2 + \rho\Delta\rho)}{n(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{2n(n-1)} \left(ng(\nabla R, \nabla\rho^2) + \mathcal{L}_X R \Delta\rho + ng(\nabla\rho, \nabla \mathcal{L}_X R) \right) \\ &= G(\nabla\rho, \nabla\rho) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 - \frac{div(R\rho\nabla\rho) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla\rho^2)}{n(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{2n(n-1)} \left(ng(\nabla R, \nabla\rho^2) + \mathcal{L}_X R \Delta\rho + ng(\nabla\rho, \nabla \mathcal{L}_X R) \right) \\ &= G(\nabla\rho, \nabla\rho) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 - \frac{div(R\rho\nabla\rho)}{n(n-1)} - \frac{1}{2n} g(\nabla R, \nabla\rho^2) \\ &\quad - \frac{1}{2n(n-1)} \left(\mathcal{L}_X R \Delta\rho + n div(\mathcal{L}_X R \nabla\rho) - n \mathcal{L}_X R \Delta\rho \right). \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema de Stokes, obtemos

$$\int_M \left(G(\nabla\rho, \nabla\rho) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n} g|^2 + \frac{1}{2n} (\rho^2 \Delta R + \mathcal{L}_X R \Delta\rho) \right) dM = 0. \quad (1.12)$$

Agora vamos comparar o Lema 1.5 com a equação (1.12) para deduzirmos o lema seguinte.

1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana

Lema 1.6 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta munida de um campo de vetores conforme X de fator conforme ρ . Então, temos*

1. $\int_M \left(\frac{\rho}{n-2} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}_X |G|^2 + 2\rho |G|^2 \right) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g|^2 + \frac{R}{2} \operatorname{div}(\rho \nabla \rho) + \frac{\mathcal{L}_X R}{2n} \Delta \rho \right) dM = 0.$
2. $\int_M \left(\frac{\rho}{n-2} \langle \mathcal{L}_X G, G \rangle + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g|^2 + \frac{R}{2} \operatorname{div}(\rho \nabla \rho) + \frac{\mathcal{L}_X R}{2n} \Delta \rho \right) dM = 0.$

Demonstração: O primeiro item segue de uma combinação direta do Lema 1.5, da equação (1.12) e do teorema de Stokes, uma vez que $\operatorname{div}(R\rho \nabla \rho) = R \operatorname{div}(\rho \nabla \rho) + \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla \rho^2)$. Enquanto que, o segundo item, decorre do Lema 1.1 e do primeiro. De fato, a partir deste lema temos $\frac{1}{2} \mathcal{L}_X |G|^2 + 2\rho |G|^2 = \langle \mathcal{L}_X G, G \rangle$, que completa a prova do lema. \square

1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana

Agora estamos prontos para demonstrar o primeiro teorema deste capítulo.

Teorema 1.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante, munida de um campo de vetores conforme não trivial X de fator conforme ρ . Então (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ se, e somente se, uma das condições seguintes for satisfeita:*

1. $\mathcal{L}_X \operatorname{Ric} = 2\beta \operatorname{Ric}.$
2. $\mathcal{L}_X G = 2\alpha g.$
3. $\mathcal{L}_X G = 2\rho G,$

onde $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{R}}$, enquanto que α e β são funções em M^n .

Demonstração: Para o primeiro item temos $\mathcal{L}_X \operatorname{Ric} = 2\beta \operatorname{Ric}$, então pelo Lema 1.3, $\beta = \rho$ e $\mathcal{L}_X |G|^2 = 0$. Logo, pelo item (1) do Lema 1.6

$$\int_M \left(\frac{2}{n-2} \rho^2 |G|^2 + \left| \nabla^2 \rho + \frac{R\rho}{n(n-1)} g \right|^2 \right) dM = 0,$$

donde $\nabla^2 \rho = -\frac{R}{n(n-1)} \rho g$. Desde que $R > 0$, podemos aplicar o Teorema 2 de Tashiro [54], para concluirmos que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana

1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana

$\mathbb{S}^n(\sqrt{\frac{n(n-1)}{R}})$. No segundo item temos $\mathcal{L}_X G = 2\alpha g$ e como $\langle G, g \rangle = 0$, o segundo item do Lema 1.6 nos fornece

$$\int_M \left| \nabla^2 \rho + \frac{R\rho}{n(n-1)} g \right|^2 dM = 0.$$

Assim, podemos novamente aplicar o Teorema 2 de Tashiro [54] para concluirmos que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(\sqrt{\frac{n(n-1)}{R}})$. Finalmente, notemos que $\langle \mathcal{L}_X G, G \rangle = 2\rho|G|^2$ combinado com o segundo item do Lema 1.6 dá a mesma conclusão do item anterior. Reciprocamente, observemos que uma esfera euclidiana é Einstein, portanto as condições dos itens 1, 2 e 3 são trivialmente satisfeitas. Isto completa a prova do teorema. \square

Observemos que o caso compacto do teorema de Nagano e Yano [42] segue deste teorema. De fato, se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta Einstein, munida de um campo de vetores conforme não trivial X de fator conforme ρ . Então, desde que $n \geq 3$, $Ric = \frac{R}{n}g$ e $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, segue-se que R é constante e

$$\mathcal{L}_X Ric = \frac{R}{n} \mathcal{L}_X g = 2\rho \frac{R}{n} g = 2\rho Ric.$$

Portanto, pelo Teorema 1.1, M^n é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$.

Notemos agora que $\mathcal{L}_X G = -(n-2)(\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g)$ e $\mathcal{L}_X G = \mathcal{L}_X Ric - \frac{1}{n} \mathcal{L}_X(Rg)$ implicam

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Ric &= \frac{1}{n} \mathcal{L}_X(Rg) - (n-2)(\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g) \\ &= 2\rho \left(\frac{R}{n} g\right) + \frac{1}{n} (\mathcal{L}_X R)g - (n-2)(\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g) \\ &= 2\rho(Ric - G) + \frac{1}{n} (\mathcal{L}_X R)g - (n-2)(\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g) \\ &= 2\rho Ric + \frac{1}{n} (\mathcal{L}_X R)g + T, \end{aligned}$$

onde $T = -2\rho G - (n-2)(\nabla^2 \rho - \frac{\Delta \rho}{n} g)$ e $\text{tr}(T) = 0$.

Desta forma, vamos supor que $\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric + T$, bem como $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, onde T é um $(0, 2)$ -tensor em M^n . Por (1.5) e (1.6) deduzimos que

$$\text{tr}(T) = -2(n-1)\Delta \rho - 2\beta R \quad (1.13)$$

e

$$\mathcal{L}_X R = \text{tr}(T) + 2(\beta - \rho)R. \quad (1.14)$$

1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana

Em particular, se R é constante não nula, então

$$\text{tr}(T) = 0 \Leftrightarrow \beta = \rho. \quad (1.15)$$

Por outro lado, $\mathcal{L}_X G = \mathcal{L}_X Ric - \frac{1}{n}\mathcal{L}_X(Rg)$ e (1.14) implicam que

$$\mathcal{L}_X G = 2\beta G + T - \frac{\text{tr}(T)}{n}g. \quad (1.16)$$

Assim tomando o produto interno de (1.16) por G e usando o Lema 1.1, temos

$$\mathcal{L}_X |G|^2 = 4(\beta - \rho)|G|^2 + 2\langle T, G \rangle. \quad (1.17)$$

A equação (1.17) permite deduzir o próximo lema.

Lema 1.7 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta munida de um campo de vetores conforme X , onde o fator conforme é ρ . Se $\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric + T$, então vale a seguinte fórmula integral:*

$$\int_M \left(\frac{1}{n-2} (2\beta\rho|G|^2 + \rho\langle T, G \rangle) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n}g|^2 + \frac{R}{2} \text{div}(\rho\nabla\rho) + \frac{\mathcal{L}_X R}{2n} \Delta\rho \right) dM = 0.$$

Demonstração: Primeiro notemos que (1.17) implica

$$\frac{\rho}{2}\mathcal{L}_X |G|^2 + 2\rho^2|G|^2 = 2\beta\rho|G|^2 + \rho\langle T, G \rangle. \quad (1.18)$$

Consequentemente, usando (1.18) no primeiro item do Lema 1.6, teremos

$$\int_M \left(\frac{1}{n-2} (2\beta\rho|G|^2 + \rho\langle T, G \rangle) + |\nabla^2 \rho - \frac{\Delta\rho}{n}g|^2 + \frac{R}{2} \text{div}(\rho\nabla\rho) + \frac{\mathcal{L}_X R}{2n} \Delta\rho \right) dM = 0,$$

que completa a prova do lema. \square

Finalizando este capítulo, usaremos este lema para obtermos o seguinte.

Teorema 1.2 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar constante R . Suponha que existe um campo de vetores conforme não trivial X em M^n , tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$ e $\mathcal{L}_X Ric = 2\beta Ric + T$. Se $\text{tr}(T) = 0$ e $\int_M (2\rho^2|G|^2 + \rho\langle G, T \rangle) dM \geq 0$, então M^n é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, com $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{R}}$.*

Demonstração: Já vimos que o fato de ρ não ser constante implica que R é positiva, além disso por hipótese $\text{tr}(T) = 0$, logo segue de (1.15) que $\beta = \rho$.

1.3 Uma nova caracterização da esfera euclidiana

Agora podemos usar o Lema 1.7 para deduzirmos que $|\nabla^2\rho - \frac{\Delta\rho}{n}g|^2 = 0$. Por outro lado, de (1.6), $\Delta\rho = -\frac{R}{n-1}\rho$. Consequentemente, $\nabla^2\rho = -\frac{R}{n(n-1)}\rho$, a partir do qual podemos aplicar o Teorema 2 de Tashiro [54] para concluirmos que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana de curvatura seccional $c = \frac{R}{n(n-1)}$, que completa a prova do teorema. \square

Observação 1.2 *Notemos que, para $T = \lambda\rho G$, com $(2 + \lambda) \geq 0$, a condição do teorema anterior se verifica. Em particular, para $\lambda = -2$, $\mathcal{L}_X Ric = 2\rho\frac{R}{n}g$, o que nos permite obter o resultado devido a Obata e Yano [45]. Contudo, para $T = \alpha g$, com $\alpha \neq 0$, temos $tr(T) = \alpha n \neq 0$, assim para que M^n seja isométrica a uma esfera euclidiana alguma hipótese adicional será necessária. De fato, segue-se da equação (1.15) que $\beta \neq \rho$, logo pelo Lema 1.7, basta supormos que $\int_M \beta\rho|G|^2 \geq 0$.*

Capítulo 2

Quase sólitons de Ricci e imersões isométricas

Neste capítulo, assumiremos que todas as variedades com estrutura de quase sóliton serão completas, conexas e orientáveis, além disso, as compactas serão sempre sem bordo. Começamos explicando de forma mais detalhada a definição geral de quase sóliton de Ricci considerada por Barros e Ribeiro em [11].

Definição 2.1 *Um quase sóliton de Ricci é uma variedade diferenciável M^n munida com uma métrica Riemanniana g , um campo de vetores X e uma função sóliton $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (2.1)$$

onde Ric denota o tensor de Ricci de (M^n, g) e $\mathcal{L}_X g$ a derivada de Lie de g na direção de X .

Quando X é o campo de vetores gradiente de alguma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal variedade é chamada de quase sóliton de Ricci gradiente. Neste caso, de acordo com a equação (1.1), a equação fundamental (2.1) pode ser reescrita como segue

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \quad (2.2)$$

onde $\nabla^2 f$ denota o hessiano de f .

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

Vamos dizer que um quase sólito de Ricci é *expansivo*, *estacionário* ou *contrátil* se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Se λ não tem sinal definido, dizemos que ele é *indefinido*.

Ressaltamos que se λ é constante a equação (2.1) refere-se a um sólito de Ricci. É o que acontece quando X é um campo de vetores Killing e $n \geq 3$, uma vez que neste caso a variedade é Einstein, e portanto λ é constante. Além disso, quando o campo X é nulo ou a função potencial é constante, o quase sólito de Ricci é chamado *trivial*, enquanto que um quase sólito de Ricci não trivial está associado a um campo de vetores X não nulo ou a uma função potencial não constante.

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

No caso de um sólito de Ricci compacto já sabemos que sempre podemos considerar que o campo que define o sólito é gradiente, de fato esta situação já foi explicada na introdução. No caso não compacto, Naber provou em [41] que todo sólito de Ricci contrátil é gradiente.

Para um quase sólito de Ricci gradiente localmente conformemente plano, Catino provou em [19], que em torno de qualquer ponto regular de f , tais variedades são localmente um produto warped com fibras $(n-1)$ -dimensionais de curvaturas seccionais constantes.

Nesta secção, estabeleceremos algumas propriedades e condições de rigidez dos quase sólitons de Ricci gradiente. Para os não gradientes, nos restringiremos ao caso compacto, conforme Corolário 2.1. Começamos recordando a fórmula integral abaixo, a qual já foi provada em [11]. Contudo, como já havíamos dito, apresentaremos outra prova deste fato, onde utilizaremos uma técnica que consiste na escolha apropriada de um $(0, 2)$ -tensor simétrico e de um campo de vetores na variedade, para então aplicarmos o Lema 1.4. Ressaltamos ao leitor que tal técnica será aproveitada para o estudo de quase sólito de Ricci não gradiente compacto e também de métrica m -quasi-Einstein

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

generalizada compacta, conforme veremos a frente.

Lema 2.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase s3lton de Ricci gradiente. Ent3o,*

$$|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 = -\frac{1}{2}\Delta R + (n-1)\Delta\lambda + \frac{R}{n}\Delta f + \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla f). \quad (2.3)$$

Em particular, se M^n 3 compacta, vamos ter a seguinte f3rmula integral

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 dM = \frac{(n-2)}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla f) dM. \quad (2.4)$$

Demonstra33o: Com efeito, segue do Lema 1.4 e da segunda identidade de Bianchi contra3da que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) &= (\operatorname{div} \nabla^2 f)(\nabla f) + |\nabla^2 f|^2 \\ &= (\operatorname{div}(\lambda I - \operatorname{Ric}))(\nabla f) + |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2 \\ &= g(\nabla\lambda, \nabla f) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla f) + |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 \\ &\quad + \frac{1}{n}(\Delta f)(n\lambda - R), \end{aligned}$$

donde

$$|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 = \operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) - \operatorname{div}(\lambda \nabla f) + \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla f) + \frac{R}{n}\Delta f, \quad (2.5)$$

ou ainda

$$|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 = \operatorname{div}\left(\nabla^2 f(\nabla f) - \lambda \nabla f + \frac{R}{n}\nabla f\right) + \frac{(n-2)}{2n}g(\nabla R, \nabla f). \quad (2.6)$$

Ent3o, a f3rmula integral (2.4) segue por integra33o de (2.6). Por outro lado, o item 2 da Proposi33o 1 em [11], permite inferir que

$$\operatorname{Ric}(\nabla f) = \frac{1}{2}\nabla R - (n-1)\nabla\lambda, \quad (2.7)$$

assim, pela equa33o fundamental (2.2),

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) &= \operatorname{div}(\lambda \nabla f) - \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(\nabla f)) \\ &= \lambda \Delta f + g(\nabla\lambda, \nabla f) - \frac{1}{2}\Delta R + (n-1)\Delta\lambda. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Finalmente, basta substituirmos (2.8) em (2.5), para obtermos (2.3). \square

Prosseguindo, observemos que a equa33o fundamental (2.2) implica que

$$\operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g + \nabla^2 f = \lambda g - \frac{R}{n}g = \frac{\Delta f}{n}g.$$

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

Portanto, em todo quase sólton de Ricci gradiente, sempre teremos

$$|Ric - \frac{R}{n}g|^2 = |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2. \quad (2.9)$$

Em [50] Petersen e Wylie provaram que: se um sólton de Ricci gradiente é Einstein, então ou $\nabla^2 f = 0$, ou é o sólton gaussiano. De fato, isto segue imediatamente da equação (2.9) e do Teorema 2 de Tashiro [54]. Contudo, para um quase sólton de Ricci gradiente Einstein (com curvatura escalar constante para o caso dois dimensional), o resultado é bem diferente. Neste caso, ocorre que

$$\nabla^2 f = \left(-\frac{R}{n(n-1)}f + c - \frac{R}{n} \right)g, \quad (2.10)$$

para alguma constante c . De fato, desde que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é Einstein, pela equação (2.2)

$$\nabla^2 f = \left(\lambda - \frac{R}{n} \right)g. \quad (2.11)$$

Por outro lado, pela equação (2.7)

$$\nabla \left(\frac{R}{n(n-1)}f + \lambda \right) = 0.$$

Donde $\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f = c$, para alguma constante c , assim basta substituímos o valor de λ na equação (2.11) para obtermos (2.10).

Petersen e Wylie [50] também estudaram os sólitons de Ricci estacionários com curvatura escalar constante. Utilizando a mesma ideia desses autores veremos que todo sólton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ estacionário, com curvatura escalar atingindo um mínimo, é Einstein com curvatura escalar nula. Portanto, a função potencial f é tal que $\nabla^2 f = 0$. Com efeito, pelo Lema 2.1 e pela equação (2.9),

$$\frac{1}{2}\Delta_f(-R) = |Ric - \frac{R}{n}g|^2 + \frac{R^2}{n} \geq 0,$$

onde $\Delta_f R = \Delta R - g(\nabla R, \nabla f)$. Desde que o operador Δ_f é elíptico, segue-se do princípio do máximo forte de Hopf, que $Ric = \frac{R}{n}g$ e $R = 0$. Então, novamente por (2.9), $\nabla^2 f = 0$, como havíamos afirmado. Ademais, se f não é constante, isto implica $|\nabla f| = k$, para alguma constante $k \neq 0$. Desta forma, através de um argumento tipo Cheeger-Gromoll usamos o fluxo de ∇f para

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

definirmos uma isometria entre (M^n, g) e um cilindro $\mathbb{R} \times N^{n-1}$ sobre uma hipersuperfície totalmente geodésica $N^{n-1} \subset M^n$, para maiores detalhes ver por exemplo o item (b.2) do Teorema 1.3 em [49].

O resultado seguinte estabelece uma condição de rigidez para um quase sólito de Ricci gradiente com curvatura escalar constante.

Proposição 2.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sólito de Ricci gradiente com curvatura escalar constante R . Suponha que $\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f$ atinge um máximo, então esta função é constante em M^n e a função sólito λ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial*

$$\Delta\lambda + \frac{R}{n-1}\lambda = \frac{R^2}{n(n-1)}.$$

Em particular, se λ ou f não for constante, então para $R \geq 0$, M^n é isométrica a uma esfera euclidiana.

Demonstração: Pelo Lema 2.1,

$$|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 = \Delta\left(\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f\right) \geq 0.$$

Como estamos supondo que $\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f$ atinge um máximo, segue-se do princípio do máximo forte de Hopf que

$$\lambda + \frac{R}{n(n-1)}f = c, \quad (2.12)$$

para alguma constante c . Além disso, pela equação fundamental (2.2),

$$\Delta\lambda = -\frac{R}{n(n-1)}\Delta f = \frac{R}{n(n-1)}(R - n\lambda) = \frac{R^2}{n(n-1)} - \frac{R}{(n-1)}\lambda. \quad (2.13)$$

O que prova a primeira parte. Em particular, pela equação (2.12), λ não é constante se, e somente se, f não é constante. Desde que $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g$, a equação (2.9) implica que (M^n, g) é Einstein. Logo, pela equação (2.10),

$$\nabla^2 f = \left(-\frac{R}{n(n-1)}f + c - \frac{R}{n}\right)g. \quad (2.14)$$

Ademais, $R > 0$, caso contrário por (2.12), λ seria constante. Desta forma, podemos aplicar o Teorema 2 devido a Tashiro em [54] para concluir que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana. \square

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

A Proposi33o 2.1, permite-nos caracterizar as estruturas de quase s3lton de Ricci gradiente na esfera euclidiana unit3ria $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vamos escrever este fato como um exemplo.

Exemplo 2.1 *Para cada vetor n3o nulo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, considere as fun33es $\lambda_a(x) = -\langle x, a \rangle + n - 1$ e $f_a(x) = -\lambda_a(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 3 o vetor posi33o, ent3o $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f_a, \lambda_a)$ s3o as 3nicas estruturas n3o triviais, de quase s3lton de Ricci gradiente em \mathbb{S}^n .*

Com efeito, suponha que $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f, \lambda)$ seja um quase s3lton de Ricci gradiente n3o trivial, onde $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 3 a m3trica usual induzida de \mathbb{R}^{n+1} . Como a sua curvatura escalar R 3 constante e igual a $n(n - 1)$, segue da Proposi33o 2.1, que $\lambda + f$ 3 constante e

$$\Delta\lambda + n\lambda = n(n - 1). \quad (2.15)$$

Por outro lado, j3 3 conhecido que $\nabla^2\langle x, a \rangle = -\langle x, a \rangle g$ (ver, por exemplo [3]). Logo, a fun33o λ_a descrita neste exemplo 3 tal que, $\Delta\lambda_a = n\langle x, a \rangle = n(n - 1 - \lambda_a)$, isto 3, λ_a satisfaz a equa33o (2.15). Em verdade, qualquer outra solu33o de (2.15) tem esta forma. Para ver isto, suponha que $\tilde{\lambda}$ seja outra solu33o de (2.15), defina $\psi = \tilde{\lambda} - \lambda_a$ e note que $\Delta\psi = -n\psi$, ent3o para algum vetor n3o nulo $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ teremos $\psi(x) = \langle x, b \rangle$ (ver, por exemplo [15]). Assim

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \langle x, b \rangle + \lambda_a = \langle x, b \rangle - \langle x, a \rangle + n - 1 \\ &= -\langle x, \tilde{a} \rangle + n - 1, \end{aligned}$$

onde $\tilde{a} = a - b$, como hav3amos afirmado. Ademais, se c 3 uma constante, ent3o para as fun33es λ_a e $f_a = -\lambda_a + c$, teremos

$$\nabla^2 f_a = -\nabla^2 \lambda_a = \nabla^2 \langle x, a \rangle = -\langle x, a \rangle g,$$

logo

$$Ric_g + \nabla^2 f_a = (n - 1)g - \langle x, a \rangle g = \{(n - 1) - \langle x, a \rangle\}g = \lambda_a g.$$

Consequentemente, $\lambda = \lambda_a$ e $f = f_a$, para cada vetor n3o nulo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. \square

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

Nosso pr3ximo objetivo ser3 estender o Lema 2.1 para quase s3ltons de Ricci n3o necessariamente gradientes. Para isto, precisaremos do lema seguinte, o qual ser3 uma ferramenta fundamental para aplicarmos as t3cnicas que j3 comeamos a desenvolver na prova do referido lema.

Lema 2.2 *Para um quase s3lton de Ricci (M^n, g, X, λ) , vale*

$$\operatorname{div}((\mathcal{L}_X g)Z) = 2\operatorname{div}(\lambda Z) - g(\nabla R, Z) - 2\langle \nabla Z, \operatorname{Ric} \rangle,$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstra33o: Fazendo $T = \mathcal{L}_X g$ e $\varphi = 1$ no Lema 1.4, e posteriormente usando a equa33o fundamental (2.1) e a segunda identidade de Bianchi contra3da, teremos para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((\mathcal{L}_X g)Z) &= (\operatorname{div}(2\lambda I - 2\operatorname{Ric}))Z + \langle \nabla Z, 2\lambda I - 2\operatorname{Ric} \rangle \\ &= 2g(\nabla \lambda, Z) - g(\nabla R, Z) + \langle \nabla Z, 2\lambda I - 2\operatorname{Ric} \rangle \\ &= 2g(\nabla \lambda, Z) - g(\nabla R, Z) + 2\lambda \operatorname{div} Z - 2\langle \nabla Z, \operatorname{Ric} \rangle, \end{aligned}$$

que finaliza a prova o lema. □

Tamb3m precisaremos do lema abaixo, que 3 uma propriedade geral para $(0, 2)$ -tensores sim3tricos em uma variedade Riemanniana.

Lema 2.3 *Para todo $(0, 2)$ -tensor sim3trico T em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , vale*

$$\langle \mathcal{L}_Z g, T \rangle = 2\langle \nabla Z, T \rangle,$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstra33o: Basta tomar um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ em (M^n, g) , usar a equa33o (1.1) e a simetria de T para ver que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_Z g, T \rangle &= \sum_{i,j} (\mathcal{L}_Z g)_{ij} T_{ij} = \sum_{i,j} (g(\nabla_{e_i} Z, e_j) + g(\nabla_{e_j} Z, e_i)) T_{ij} \\ &= 2 \sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} Z, e_j) T_{ij} = 2 \sum_{i,j} g(\nabla_{e_i} Z, e_j) g(Te_i, e_j) = 2\langle \nabla Z, T \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

No caso compacto, podemos usar o teorema da decomposi33o de Hodge-de Rham para decompor o campo X como segue:

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ 3 tal que $\operatorname{div} Y = 0$, e h 3 a fun33o potencial de Hodge-de Rham. Ent33o, teremos a proposi33o seguinte.

Proposi33o 2.2 *Para um quase s3lton de Ricci compacto (M^n, g, X, λ) s3o v3lidas as seguintes f3rmulas integrais:*

1. $\int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle dM.$
2. $\int_M \left| \operatorname{Ric} - \frac{R}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM.$
3. $\int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM + \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM.$

Demonstra33o: Desde que $X = Y + \nabla h$, onde Y 3 um campo de vetores em M^n com divergente nulo e h 3 a fun33o potencial de Hodge-de Rham, podemos reescrever a equa33o fundamental (2.1) da seguinte forma:

$$\operatorname{Ric} + T_h = \lambda I, \tag{2.16}$$

onde $T_h = \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h$. Al3m disso, tomando o tra3o na equa33o (2.16), temos $\Delta h = n\lambda - R$. Em seguida, pelo Lema 1.4 e pela segunda identidade de Bianchi contra3da,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_h(\nabla h)) &= (\operatorname{div} T_h)(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, T_h \rangle \\ &= (\operatorname{div}(\lambda I - \operatorname{Ric}))(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h \rangle \\ &= g(\nabla \lambda, \nabla h) - \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla h) + |\nabla^2 h|^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g \rangle. \end{aligned}$$

Como $|\nabla^2 h|^2 = \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 + \frac{1}{n} (\Delta h)^2$, teremos

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(T_h(\nabla h)) &= g(\nabla\lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) + \left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)^2 \\
&\quad + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle \\
&= g(\nabla\lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) + \left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{n}(\Delta h)(n\lambda - R) + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle \\
&= g(\nabla\lambda, \nabla h) + \lambda\Delta h - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) - \frac{R}{n}\Delta h \\
&\quad + \left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle, \tag{2.17}
\end{aligned}$$

que integrando dá o item 1.

Para os ítems 2 e 3 notemos inicialmente que a equação (2.16) implica que

$$\nabla^2 h - \lambda g + \frac{R}{n}g = -\operatorname{Ric} + \frac{R}{n}g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g.$$

Ent3o,

$$\left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 = \left|\operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g\right|^2 + \left\langle \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \right\rangle + \langle \operatorname{Ric}, \mathcal{L}_Y g \rangle, \tag{2.18}$$

ou ainda, novamente pela equação (2.16)

$$\begin{aligned}
\left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 &= \left|\operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g\right|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle - \frac{1}{2}\langle \operatorname{Ric}, \mathcal{L}_Y g \rangle + \langle \operatorname{Ric}, \mathcal{L}_Y g \rangle \\
&= \left|\operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g\right|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle + \frac{1}{2}\langle \operatorname{Ric}, \mathcal{L}_Y g \rangle. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Por outro lado, o teorema da divergência combinado com os Lemas 2.2 e 2.3 mostram que

$$0 = 2 \int_M \langle \nabla Y, \operatorname{Ric} \rangle dM = \int_M \langle \mathcal{L}_Y g, \operatorname{Ric} \rangle dM. \tag{2.20}$$

Logo, o item 2 segue por integraç3o da equação (2.19) combinada com a equação (2.20) e o item 1. Finalmente, o item 3 segue imediatamente da equação (2.20), do item 2 e por integraç3o de (2.18). \square

Note que, fazendo $X = \nabla f$ na Proposiç3o 2.2, obteremos o caso compacto do Lema 2.1. Ademais, o item 2 desta proposiç3o j3 foi provado recentemente por Barros, Ribeiro e Batista em [9], onde eles utilizaram uma t3cnica diferente da aplicada acima, e obviamente, eles j3 obtiveram o item 2 do Corol3rio 2.1 seguinte.

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

No caso completo, não necessariamente compacto, se o campo que define o quase sólton admite uma decomposição do tipo Hodge-de Rham, então temos

$$\operatorname{div}\left(\left(\frac{R}{2}I - \operatorname{Ric}\right)(\nabla h)\right) = \left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 + \frac{n-2}{2n}R\Delta h + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle. \quad (2.21)$$

De fato, pela equação (2.17) deduzimos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_h(\nabla h)) &= \operatorname{div}\left(\left(\lambda - \frac{R}{2}\right)\nabla h\right) + \frac{n-2}{2n}R\Delta h + \left|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\right|^2 \\ &\quad + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle, \end{aligned}$$

substituindo $T_h = \lambda I - \operatorname{Ric}$ e simplificando obteremos a equação (2.21), como havíamos afirmado.

Como aplicação da Proposição 2.2 obteremos um resultado de rigidez para quase sólitons de Ricci compactos.

Corolário 2.1 *Um quase sólton de Ricci compacto não trivial (M^n, g, X, λ) , com $n \geq 3$, é isométrico a uma esfera euclidiana se, e somente se, uma das condições seguintes for satisfeita:*

1. $\int_M \langle \nabla^2 h, \operatorname{Ric} \rangle dM = 0$.
2. $\int_M g(\nabla R, X) dM = 0$.
3. ∇h é um campo de vetores conforme.

Demonstração: Pelo Lema 2.2, temos

$$0 = \int_M \langle \nabla^2 h, \operatorname{Ric} \rangle dM = -\frac{1}{2} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM = -\frac{1}{2} \int_M g(\nabla R, X) dM. \quad (2.22)$$

Assim o item 2 da Proposição 2.2 implica que (M^n, g) é Einstein e portanto X é um campo de vetores conforme não trivial que é também Ricci conforme, então os itens 1 e 2, seguem do Teorema 1.1. Por outro lado, se ∇h for um campo de vetores conforme, vamos ter pelos itens 1 e 3 da Proposição 2.2, que o campo Y é Killing, portanto a equação (2.16) mostra que $(M^n, g, \nabla h, \lambda)$ é um quase sólton de Ricci gradiente não trivial, uma vez que X não é trivial, logo o resultado segue do Corolário 1 em [11]. Reciprocamente, a esfera euclidiana é Einstein, logo as condições dos itens 1, 2 e 3 são trivialmente satisfeitas. \square

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase s3ltons de Ricci

Em seguida, derivaremos covariantemente a equa33o fundamental (2.2) para deduzir o pr3ximo lema.

Lema 2.4 *Para um quase s3lton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, vale*

$$(\nabla_Z Ric)Y - (\nabla_Y Ric)Z = Z(\lambda)Y - Y(\lambda)Z - R(Z, Y)\nabla f,$$

para todos $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstra33o: Como o tensor m3trico 3 covariantemente constante, segue da equa33o fundamental (2.2) que para todos $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_Z Ric)Y = Z(\lambda)Y - (\nabla_Z \nabla^2 f)Y. \quad (2.23)$$

Por outro lado, a defini33o do operador $\nabla^2 f$ permite deduzir que

$$(\nabla_Z \nabla^2 f)Y = \nabla_Z \nabla_Y \nabla f - \nabla_{\nabla_Z Y} \nabla f. \quad (2.24)$$

Assim, por (2.23) e (2.24), temos

$$\begin{aligned} (\nabla_Z Ric)Y - (\nabla_Y Ric)Z &= Z(\lambda)Y - Y(\lambda)Z - \nabla_Z \nabla_Y \nabla f + \nabla_Y \nabla_Z \nabla f \\ &\quad + \nabla_{[Z, Y]} \nabla f \\ &= Z(\lambda)Y - Y(\lambda)Z - R(Z, Y)\nabla f, \end{aligned}$$

que finaliza a prova do lema. \square

Para o que segue, vamos dizer que um quase s3lton de Ricci gradiente n3o trivial 3 radialmente plano, se a sua curvatura seccional satisfaz: $sec(Z, \nabla f) = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Exemplos dessas estruturas podem ser encontradas em [49].

Proposi33o 2.3 *N3o existe quase s3lton de Ricci compacto gradiente, radialmente plano e com tensor de Ricci de Codazzi.*

Demonstra33o: Suponha que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ seja um quase s3lton de Ricci compacto n3o trivial. Al3m disso, admita que ele 3 radialmente plano, ent3o pela equa33o (2.7), temos

$$0 = \frac{1}{2} \nabla R - (n-1) \nabla \lambda. \quad (2.25)$$

2.1 Rigidez e algumas propriedades dos quase sólitons de Ricci

Por outro lado, desde que o tensor de Ricci é de Codazzi, o Lema 2.4 nos permite deduzir que

$$Z(\lambda)Y - Y(\lambda)Z = R(Z, Y)\nabla f, \quad (2.26)$$

para todos $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Tomando $Y = \nabla f$ e Z unitário, ortogonal a ∇f na equação (2.26), deduzimos que $g(\nabla f, \nabla \lambda) = 0$, assim pela equação (2.25), $g(\nabla R, \nabla f) = 0$. Portanto, se $n \geq 3$ e f não é constante, podemos aplicar o Corolário 2.1 para deduzirmos que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana, o que contradiz o fato de (M^n, g) ser radialmente plana.

Para o caso $n = 2$, desde que $Ric = \frac{R}{2}g$ teremos $\nabla_Z Ric = \frac{1}{2}Z(R)g$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então R é constante, uma vez que o tensor de Ricci é de Codazzi. Ademais, pela equação (2.25), λ também é constante. Consequentemente, podemos aplicar o princípio do máximo forte de Hopf para ver que f é constante, uma vez que $\Delta f = 2\lambda - R$, novamente uma contradição. \square

Observação 2.1 *A equação (2.25) mostra que em todo quase sólito de Ricci gradiente não trivial radialmente plano, temos a seguinte relação entre a curvatura escalar R e a função sólito λ ,*

$$R = 2(n - 1)\lambda + c,$$

onde c é uma constante. Em particular,

$$\Delta f = (2 - n)\lambda - c.$$

Se além disso, λ tiver sinal definido, então não podemos supor que $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(M)$, caso contrário, pelo teorema de Yau [57], $(2 - n)\lambda = c$, logo λ e R seriam constantes, donde deduziríamos do Lema 2.1 que $\nabla^2 f = 0$, portanto $|\nabla f| = k$, para alguma constante $k \neq 0$, e assim (M^n, g) seria isométrica a um cilindro $\mathbb{R} \times N^{n-1}$ sobre uma hipersuperfície totalmente geodésica $N^{n-1} \subset M^n$, o que seria um absurdo, uma vez que o fato de $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(M)$ implica $\text{vol}(M) < \infty$.

2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci

Recentemente, em [38] Mastrolia, Rigoli e Rimoldi provaram que: um sólton de Ricci gradiente contrátil minimamente imerso em um espaço euclidiano é totalmente geodésico. De fato, só pode ser o sólton gaussiano, uma vez que todo sólton de Ricci gradiente contrátil é uma solução anciente do fluxo de Ricci, portanto tem curvatura escalar não negativa, ver [21], por outro lado, desde que ele esteja minimamente imerso em um espaço euclidiano, a sua curvatura escalar não é positiva, então só pode ser nula. Logo, pelo Lema 2.1 $\nabla^2 f = \lambda g$, e o resultado segue do Teorema 2 de Tashiro [54].

Contudo vamos observar que alguns cuidados devem ser tomados quando consideramos imersões de sólitons ou quase sólitons, este será o conteúdo do primeiro teorema desta secção. Antes disso, apresentaremos os preliminares para provarmos nossos resultados.

Começemos considerando uma variedade Riemanniana n -dimensional orientável M^n isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana $(n + p)$ -dimensional \widetilde{M}^{n+p} . Relembremos que a equação de Gauss é dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle, \quad (2.27)$$

onde $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ é a segunda forma fundamental de M^n , R e \widetilde{R} são os tensores curvaturas de M^n e \widetilde{M}^{n+p} , respectivamente. O vetor curvatura média $H(x)$ de tal imersão em $x \in M^n$, é definido por

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_j),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$. Ademais, tomando o traço na equação de Gauss, deduzimos a curvatura escalar R de M^n como segue

$$R = \sum_{i,j}^n \langle \widetilde{R}(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle + n^2 |H|^2 - \sum_{i,j}^n |\alpha(e_i, e_j)|^2. \quad (2.28)$$

Quando a codimensão p é igual a 1 e a variedade ambiente \widetilde{M}_c^{n+1} é uma forma espacial de curvatura seccional constante c , é útil introduzir o operador

2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci

$\Phi = A - HI$, onde I e A denotam, respectivamente, o operador identidade sobre $\mathfrak{X}(M)$ e o operador de forma dessa imersão. Assim, temos

$$\text{tr}(\Phi) = \text{tr}(A - HI) = 0$$

e o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de Φ , é

$$|\Phi|^2 = \text{tr}(\Phi^2) = |A|^2 - nH^2.$$

Em particular, $|\Phi|^2 \geq 0$, e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é totalmente umbílica.

Observemos que a equação de Gauss pode ser escrita, em termos de Φ , como segue

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= (c + H^2)\{\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\} + \langle \Phi X, Z \rangle \Phi Y - \langle \Phi Y, Z \rangle \Phi X \\ &\quad + H\{\langle \Phi X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle \Phi X + \langle X, Z \rangle \Phi Y - \langle \Phi Y, Z \rangle X\}, \end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, tomando o traço nesta última equação, obtemos que o tensor de Ricci de M^n é dado por

$$\text{Ric}(X, Y) = (n - 1)(c + H^2)\langle X, Y \rangle + (n - 2)H\langle \Phi X, Y \rangle - \langle \Phi X, \Phi Y \rangle, \quad (2.29)$$

ou, em termos de A ,

$$\text{Ric}(X, Y) = c(n - 1)\langle X, Y \rangle + nH\langle AX, Y \rangle - \langle AX, AY \rangle, \quad (2.30)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, tomando o traço em (2.29) e (2.30), obtemos

$$R = n(n - 1)(c + H^2) - |\Phi|^2 \quad (2.31)$$

e

$$R = n(n - 1)c + n^2H^2 - |A|^2. \quad (2.32)$$

Também precisamos recordar que toda subvariedade umbílica de uma forma espacial tem vetor curvatura média paralelo.

O lema seguinte, segue do teorema de Stokes e da Proposição 1 em [16].

Lema 2.5 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientável. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $\text{div}X$ não muda de sinal em M^n , então $\text{div}X = 0$ em M^n .*

2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci

Nosso primeiro resultado mostra algumas condições para a inexistência de imersão mínima de um quase sólton de Ricci em uma variedade Riemanniana. Mais precisamente, temos o seguinte.

Teorema 2.1 *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica de um quase sólton de Ricci (M^n, g, X, λ) em uma variedade Riemanniana \widetilde{M}^{n+p} de curvatura seccional \widetilde{k} . Temos os seguintes casos:*

1. *Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\widetilde{k} \leq 0$ e $\lambda > 0$, então φ não pode ser mínima.*
2. *Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\widetilde{k} < 0$ e $\lambda \geq 0$, então φ não pode ser mínima.*
3. *Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $\widetilde{k} \leq 0$, $\lambda \geq 0$ e φ é mínima, então $\lambda = 0$ e M^n é plana e totalmente geodésica.*
4. *Se \widetilde{M} é completa, $\sup_M |X| < \infty$, $\widetilde{k} \leq 0$ e $\lambda \geq c > 0$, onde $c \in \mathbb{R}$, então φ não pode ser mínima.*

Demonstração: Se (M^n, g, X, λ) , $\lambda > 0$, está minimamente imerso em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional $\widetilde{k} \leq 0$, então concluímos pela equação (2.28) que $R \leq 0$. Logo, por contração da equação (2.1) teremos $\operatorname{div} X = n\lambda - R > 0$, que contradiz o Lema 2.5, desde que $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$. Por outro lado, se $\widetilde{k} < 0$ e $\lambda \geq 0$, ainda obtemos $\operatorname{div} X = n\lambda - R > 0$, novamente uma contradição, que prova os dois primeiros itens.

Para o terceiro item, inicialmente vamos notar que os dois itens anteriores implicam que \widetilde{k} , λ e R devem se anular em algum ponto de M^n , caso contrário não existiria tal imersão. Em verdade, veremos que estas funções são nulas. Para isto, seja $x \in M^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$. Como $\widetilde{k} \leq 0$ e a imersão é mínima, teremos por (2.28),

$$R = \sum_{i,j}^n \widetilde{k}(e_i, e_j) - \sum_{i,j}^n |\alpha(e_i, e_j)|^2 \leq 0.$$

Por outro lado, $\lambda \geq 0$, implica $\operatorname{div} X = n\lambda - R \geq 0$. Desde que $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, deduzimos pelo Lema 2.5 que $0 \geq R = n\lambda \geq 0$, assim $R = \lambda = 0$. Logo, $\widetilde{k}(e_i, e_j) = |\alpha(e_i, e_j)| = 0$ em M^n , para $i, j = 1, \dots, n$. Consequentemente, M^n é totalmente geodésica e plana, o que completa a prova do terceiro item.

2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci

Nas condições do item quatro, teremos pelo Teorema 1 em [10] que (M^n, g) é compacta e tem grupo fundamental finito. Agora, assumiremos a existência de um quase sólton de Ricci compacto, com $\lambda \geq c > 0$, minimamente imerso em uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional não positiva, então por Frankel [29] vamos concluir que o quase sólton tem grupo fundamental infinito, que é uma contradição. \square

No próximo teorema, através de uma condição algébrica sobre a função sólton λ , classificaremos os quase sólitons isometricamente imersos em um espaço de curvatura seccional constante.

Teorema 2.2 *Seja (M^n, g, X, λ) um quase sólton de Ricci isometricamente imerso em uma variedade Riemanniana \widetilde{M}_c^{n+p} de curvatura seccional constante c . Temos os seguintes casos:*

1. *Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $\lambda \geq (n-1)c + n|H|^2$, então (M^n, g) é totalmente geodésica, com $\lambda = (n-1)c$.*
2. *Se M^n é compacta e $\lambda \geq (n-1)c + n|H|^2$, então M^n é uma esfera totalmente geodésica de \mathbb{S}^{n+p} , com $\lambda = n-1$.*
3. *Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, $p = 1$ e $\lambda \geq (n-1)(c + H^2)$, então M^n é totalmente umbílica. Em particular, a curvatura escalar $R = n(n-1)k$ é constante, onde $k = \frac{\lambda}{n-1}$ é a curvatura seccional de (M^n, g) .*

Demonstração: Desde que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante c , teremos pela equação (2.28) que

$$R = n(n-1)c + n^2|H|^2 - \sum_{i,j}^n |\alpha(e_i, e_j)|^2. \quad (2.33)$$

Isto, juntamente com a hipótese sobre λ , implica que

$$\operatorname{div}X = n\lambda - R = n\{\lambda - ((n-1)c + n|H|^2)\} + \sum_{i,j}^n |\alpha(e_i, e_j)|^2 \geq 0. \quad (2.34)$$

Assim, novamente podemos aplicar o Lema 2.5 para obtermos $\operatorname{div}X = 0$ em M^n . Logo, da equação (2.34), concluímos que M^n é totalmente geodésica e

2.2 Imersões isométricas de quase sólitons de Ricci

$\lambda = (n-1)c$. Se M^n é compacta, como é totalmente geodésica, então o espaço ambiente é uma esfera \mathbb{S}^{n+p} , que prova os dois primeiros ítems.

Para o terceiro item, inicialmente vamos deduzir de (2.31) que

$$\operatorname{div} X = n\{\lambda - (n-1)(c + H^2)\} + |\Phi|^2 \geq 0. \quad (2.35)$$

Portanto, mais uma vez vamos aplicar o Lema 2.5, para obtermos $\operatorname{div} X = 0$ em M^n . Usando (2.35) concluímos que $\lambda = (n-1)(c + H^2)$ e $|\Phi|^2 = 0$, isto é, M^n é totalmente umbílica. Assim, a equação de Gauss permite deduzirmos que $k - c = H^2$, onde k é a curvatura seccional de M^n , que é constante, pois M^n é umbílica. Por fim, notemos que $k = c + H^2 = \frac{\lambda}{n-1}$ e $R = n\lambda = n(n-1)k$.
□

O próximo teorema é uma aplicação do Corolário 2.1 e da fórmula de Simons.

Teorema 2.3 *Seja (M^n, g, X, λ) , $n \geq 3$, um quase sólito de Ricci não trivial, imerso minimamente na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Suponha que $R \geq n(n-2)$ e a norma da segunda forma fundamental atinge um máximo, então M^n é isométrica a uma esfera euclidiana com estrutura de quase sólito descrita no Exemplo 2.1.*

Demonstração: Como a imersão é mínima segue de (2.32) que $R = n(n-1) - |A|^2$. Desde que $R \geq n(n-2)$ vamos deduzir que $|A|^2 \leq n$ em M^n . Portanto, pela fórmula de Simons [52], temos

$$\Delta |A|^2 = |\nabla A|^2 + (n - |A|^2)|A|^2 \geq 0,$$

logo, pelo princípio do máximo forte de Hopf, $\nabla A = 0$, que implica M^n compacta pelo Teorema 4 de Lawson [34]. Ademais, R é constante, ou igual a $n(n-1)$, ou igual a $n^2 - 2n$. Usando o Corolário 2.1 obtemos que M^n é isométrica a uma esfera euclidiana, assim $R = n(n-1)$. O resto é como no Exemplo 2.1. □

Aproveitando que estamos falando de imersões isométricas, usaremos o princípio do máximo de Omori-Yau e as técnicas utilizadas por Alencar e Do Carmo em [2], e também por Alías e Martínez em [5], para provarmos nosso próximo teorema.

2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau

Comecemos estabelecendo a notação seguinte. Seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em uma forma espacial \widetilde{M}_c^{n+1} , com curvatura média constante H . Para cada H e p , $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, vamos considerar o seguinte polinômio:

$$P_{H,p}(x) = x^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}}|H|x - n(c+H^2).$$

Desde que $c+H^2 \geq 0$, $P_{H,p}(x)$ tem única raiz não negativa dada por

$$B_{H,p} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}}(\sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)c} - (n-2p)|H|).$$

O que é suficiente para enunciarmos o seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Seja M^n uma hipersuperfície completa imersa em uma forma espacial \widetilde{M}_c^{n+1} , com curvatura média constante H . Suponha em adição que M^n tem duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $(n-p)$, $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$. Além disso, assuma que $H^2 - 1 \geq 0$, caso $c = -1$. Então $\sup_M |\Phi| \geq B_{H,p}$. Em particular, a igualdade vale e este supremo é atingido em algum ponto de M^n se, e somente se,*

1. $c = 0$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{R}^p$, para algum $r > 0$.
2. $c = 1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{1-r^2})$, para algum r , $0 < r^2 \leq \frac{n-p}{n}$, onde $r^2 = \frac{n-p}{n}$ se, e somente se, $H = 0$.
3. $c = -1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-p}(r) \times \mathbb{H}^p(-\sqrt{1+r^2})$, para algum $r > 0$.

Demonstração: Primeiramente, observemos que para $H^2 + c = 0$, temos $B_{H,p} = 0$, assim $\sup_M |\Phi| > B_{H,p}$. Ademais, se $\sup_M |\Phi| = +\infty$ a desigualdade desejada é trivialmente satisfeita. Logo, basta analisarmos o caso onde $\sup_M |\Phi| < +\infty$ e $H^2 + c > 0$ (note que estamos supondo que isto acontece se $c = -1$). Para isto, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza Φ em cada ponto de M^n , isto é, $\Phi e_i = \lambda_i e_i$, com $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu$ e $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \nu$. Então

$$(n-p)\nu + p\mu = 0, \tag{2.36}$$

2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau

$$(n-p)\nu^2 + p\mu^2 = |\Phi|^2, \quad (2.37)$$

$$(n-p)\nu^3 + p\mu^3 = \text{tr}(\Phi^3), \quad (2.38)$$

de (2.36) e (2.37), temos

$$\mu = -\frac{n-p}{p}\nu \quad \text{e} \quad \nu = \pm \sqrt{\frac{p}{n(n-p)}}|\Phi|. \quad (2.39)$$

Por (2.39) e (2.38), obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi^3) &= \left((n-p) - \frac{(n-p)^3}{p^2} \right) \nu^3 \\ &= n(n-p)(2p-n) \frac{\nu^3}{p^2} \\ &= \pm \frac{(2p-n)}{\sqrt{pn(n-p)}} |\Phi|^3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora, usando a fórmula de Simons para o laplaciano da função $|\Phi|^2$, ver [43], temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = |\nabla\Phi|^2 + nH\text{tr}(\Phi^3) - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c + H^2)). \quad (2.41)$$

Assim, por (2.41) e (2.40), e observando que $2p - n \leq 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= |\nabla\Phi|^2 + nH\text{tr}(\Phi^3) - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c + H^2)) \\ &\geq |\nabla\Phi|^2 - n|H||\text{tr}(\Phi^3)| - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c + H^2)) \\ &= |\nabla\Phi|^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi|^3 - |\Phi|^2(|\Phi|^2 - n(c + H^2)) \\ &= |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2p)}{\sqrt{pn(n-p)}} |H||\Phi| - n(c + H^2)) \\ &\geq -|\Phi|^2 P_{H,p}(|\Phi|). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como H é constante e $\sup_M |\Phi| < +\infty$, a equação (2.29) e a desigualdade de Cauchy permitem deduzir que a curvatura de Ricci é limitada por baixo, logo podemos aplicar o princípio do máximo de Omori-Yau para a função $|\Phi|$, o qual garante a existência de uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em M^n tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|(x_k) = \sup_M |\Phi|, \quad |\nabla|\Phi|(x_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \Delta|\Phi|(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2(x_k) &= |\Phi|(x_k)\Delta|\Phi|(x_k) + |\nabla|\Phi|(x_k)|^2 \\ &< |\Phi|(x_k)\frac{1}{k} + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau

Comparando (2.43) e (2.42), obtemos

$$|\Phi|(x_k) \frac{2}{k} + \frac{2}{k} > \Delta|\Phi|^2(x_k) \geq -2|\Phi|^2(x_k)P_{H,p}(|\Phi|(x_k)).$$

Tomando o limite, fica

$$0 \geq -2(\sup |\Phi|)^2 P_{H,p}(\sup |\Phi|),$$

isto é,

$$(\sup |\Phi|)^2 P_{H,p}(\sup |\Phi|) \geq 0.$$

Consequentemente, $\sup |\Phi| > 0$ e portanto $P_{H,p}(\sup |\Phi|) \geq 0$, que implica $\sup |\Phi| \geq B_{H,p}$. Caso contrário, isto é, se $\sup |\Phi| = 0$, então $|\Phi| = 0$ e a hipersuperfície seria totalmente umbílica, que contradiz o fato de M^n ter duas curvaturas principais distintas, o que prova a primeira parte.

Em particular, se $\sup |\Phi| = B_{H,p}$, então $P_{H,p}(|\Phi|) \leq 0$ assim de (2.42) temos $\Delta|\Phi|^2 \geq |\nabla\Phi|^2 - |\Phi|^2 P_{H,p}(|\Phi|) \geq 0$. Desde que este supremo é atingido em algum ponto de M^n , concluímos, pelo princípio do máximo forte de Hopf, que $|\Phi|^2$ é constante, além disso $0 = \nabla\Phi = \nabla A$, donde deduziremos pelo Teorema 4 devido a Lawson [34] que:

(1) caso $c = 0$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$, para algum $r > 0$, e $k = 1, \dots, n-1$. Além disso, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais, temos

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Assim, $nH = \frac{k}{r}$ e $|A|^2 = \frac{k}{r^2}$, logo

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{n(n-k)}{k}} |H|. \quad (2.44)$$

Por outro lado,

$$B_{H,p} = \sqrt{\frac{np}{n-p}} |H|. \quad (2.45)$$

Então, $|\Phi| = B_{H,p}$ se, e somente se, $k = n-p$, que prova o primeiro item.

(2) caso $c = 1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, para algum $0 < r < 1$, e $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Novamente, vamos escolher o campo de vetores normais, de modo que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau

Assim,

$$H = \frac{nr^2 - k}{nr\sqrt{1 - r^2}} \quad (2.46)$$

e

$$|A|^2 = \frac{nr^4 + k - 2kr^2}{r^2(1 - r^2)},$$

logo

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{k(n - k)}}{r\sqrt{n(1 - r^2)}}. \quad (2.47)$$

Em seguida, vamos usar a equação (2.46) para ver que

$$r^2 = \frac{2k + nH^2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4k(n - k)}}{2n(1 + H^2)},$$

onde o sinal $+$ ou $-$ é escolhido de acordo com o fato de $r^2 > \frac{k}{n}$ ou $r^2 \leq \frac{k}{n}$, respectivamente. Consequentemente, se $H = 0$, $r = \sqrt{\frac{k}{n}}$ e $|\Phi| = \sqrt{\frac{k}{n}} = B_{0,p}$. Assim para $k = n - p$, temos o toro de Clifford mínimo $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{\frac{n-p}{n}}) \times \mathbb{S}^p(\sqrt{\frac{p}{n}})$. Em geral, temos para $k = n - p$

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n - p)}}(\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} \pm (n - 2p)|H|), \quad (2.48)$$

com o mesmo critério para a escolha do sinal. Em particular, $|\Phi| = B_{H,p}$ quando $r^2 \leq \frac{n-p}{n}$, e $|\Phi| > B_{H,p}$ quando $r > \frac{n-p}{n}$, que prova o segundo item.

(3) caso $c = -1$, M^n é isométrica a $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1 + r^2})$, para algum $r > 0$, $k = 1, \dots, n - 1$. Mais uma vez, para uma escolha apropriada do campo de vetores normais, temos

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \frac{\sqrt{1 + r^2}}{r} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Assim,

$$H = \frac{nr^2 + k}{nr\sqrt{1 + r^2}} \quad (2.49)$$

e

$$|A|^2 = \frac{nr^4 + 2kr^2 + k}{r^2(1 + r^2)},$$

logo

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{k(n - k)}}{r\sqrt{n(1 + r^2)}}. \quad (2.50)$$

2.3 Uma aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau

Agora, a equação (2.49) permite deduzir que $H^2 - 1 > 0$ se, e somente se,

$$n(2k - n)r^2 + k^2 > 0.$$

Ademais

$$n^2(H^2 - 1)r^4 + n(nH^2 - 2k)r^2 - k^2 = 0.$$

e

$$r^2 = \frac{2k - nH^2 + H\sqrt{n^2H^2 - 4k(n - k)}}{2n(H^2 - 1)}. \quad (2.51)$$

Assim para $k = p$, temos $H^2 - 1 > 0$ se, e somente se, $r^2 < \frac{p^2}{n(n-2p)}$, com $p \neq \frac{n}{2}$.

Além disso, segue-se de (2.51) e (2.50) que

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} + (n-2p)H \right) > B_{H,p}.$$

Finalmente, para $k = n - p$, temos $H^2 - 1 > 0$ para todo $r > 0$, e novamente de (2.51) e (2.50), temos

$$|\Phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)H \right) = B_{H,p},$$

que finaliza a prova do teorema. □

Observação 2.2 *Cabe ressaltar que já foi provado por Wu em [56] que o toro de Clifford é, a menos de isometria, a única hipersuperfície completa imersa em \mathbb{S}^{n+1} , com curvatura média constante H e tendo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades p e $(n - p)$, $2 \leq p \leq n - 2$. Ademais, o caso $p = 1$ do Teorema 2.4 já foi estudado por Alías e Martínez em [5].*

Capítulo 3

Métrica m -quasi-Einstein generalizada

Recentemente, Catino em [19] introduziu uma nova classe de métrica Riemanniana, que são generalizações naturais das métricas de Einstein. Mais precisamente, ele definiu que uma variedade Riemanniana completa (M^n, g) , com $n \geq 2$, é uma quasi-Einstein métrica generalizada, se existem funções f , λ e μ em M , tais que

$$\text{Ric} + \nabla^2 f - \mu df \otimes df = \lambda g. \quad (3.1)$$

Em seguida Barros e Ribeiro em [13] consideraram o caso particular em que $\mu = \frac{1}{m}$, onde $0 < m \leq \infty$ é um número inteiro, neste caso é conveniente chamarmos $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ de métrica m -quasi-Einstein generalizada. Neste mesmo artigo eles apresentaram uma família não trivial de tal estrutura na esfera euclidiana unitária \mathbb{S}^n , que descreveremos agora.

Exemplo 3.1 *Sobre a esfera euclidiana unitária (\mathbb{S}^n, g) , $n \geq 2$, considere a seguinte função*

$$f = -m \ln\left(\tau - \frac{h_v}{n}\right), \quad (3.2)$$

onde $\tau \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ é um número real e h_v é a função altura com respeito a algum vetor unitário fixado $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Desde que $\nabla^2 h_v = -h_v g$, teremos

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -m \frac{h_v}{\tau - \frac{h_v}{n}} g.$$

3.1 Rigidez de métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta

Assim, considerando $\lambda = (n - 1) - m \frac{h_v}{r - \frac{h_v}{n}} g$, obteremos que $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ é uma estrutura não trivial de métrica m -quasi-Einstein generalizada em (\mathbb{S}^n, g) .

Motivados por este exemplo e pelas técnicas desenvolvidas acima, fica fácil analisar a situação que descreveremos abaixo. Antes disso, vamos observar que todas as variedades consideradas neste capítulo serão conexas, orientáveis, e as compactas serão sempre sem bordo.

3.1 Rigidez de métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta

Começemos observando que, quando m é finito, podemos considerar a função não constante $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Então temos

$$\nabla u = -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f. \quad (3.3)$$

e

$$\frac{m}{u} \nabla^2 u = -\nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df. \quad (3.4)$$

Consequentemente, a equação (3.1) pode ser reescrita como segue

$$Ric - \frac{m}{u} \nabla^2 u = \lambda g. \quad (3.5)$$

Tomando o traço em (3.5), obtemos

$$\Delta u = \frac{u}{m} (R - n\lambda). \quad (3.6)$$

Além disso, as equações (3.5) e (3.6) permitem deduzir que

$$Ric - \frac{R}{n} g = \frac{m}{u} \left(\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g \right). \quad (3.7)$$

A equação (3.6) prova que toda métrica m -quasi-Einstein compacta $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$, com curvatura escalar constante, é trivial (ver Case, Shu e Wei [18]). No entanto, quando λ não é constante, o Exemplo 3.1 mostra que tal fato nem sempre ocorre, em verdade, provaremos que, a menos de constantes, f é como neste exemplo. Para isto, começemos provando a proposição seguinte.

3.1 Rigidez de métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta

Proposição 3.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta. Para $u = e^{-\frac{f}{m}}$, são válidas as seguintes fórmulas integrais:*

1. $\int_M \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 dM = -\frac{(n-2)}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla u) dM.$
2. $\int_M \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 dM = \frac{(n-2)}{n} \int_M (\frac{m}{u} |\nabla u|^2 - g(\nabla \lambda, \nabla u)) dM.$

Demonstração: Fazendo $T = \frac{m}{u} \nabla^2 u$, $\varphi = 1$ e $Z = \nabla u$ no Lema 1.4, teremos pela segunda identidade de Bianchi contraída que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}\left(\frac{m}{u} \nabla^2 u(\nabla u)\right) &= (\operatorname{div} \frac{m}{u} \nabla^2 u)(\nabla u) + \frac{m}{u} |\nabla^2 u|^2 \\
 &= (\operatorname{div}(Ric - \lambda I))(\nabla u) + \frac{m}{u} (|\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 + \frac{1}{n} (\Delta u)^2) \\
 &= \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla u) - g(\nabla \lambda, \nabla u) + \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{n} (\Delta u) \frac{m}{u} \Delta u \\
 &= \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla u) - g(\nabla \lambda, \nabla u) + \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{n} (\Delta u)(R - n\lambda) \\
 &= \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla u) + \frac{R}{n} \Delta u - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \frac{m}{u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2,
 \end{aligned}$$

que integrando dá o resultado do primeiro item. Para o segundo item, fazendo $T = Ric$, $\varphi = 1$ e $Z = \nabla u$ no Lema 1.4, em seguida usando a segunda identidade de Bianchi contraída e a equação (3.5), deduzimos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(Ric(\nabla u)) &= (\operatorname{div} Ric)(\nabla u) + \langle \nabla^2 u, Ric \rangle \\
 &= \frac{1}{2} g(\nabla R, \nabla u) + \lambda \Delta u + \frac{m}{u} |\nabla^2 u|^2,
 \end{aligned}$$

que integrando obtemos

$$\frac{1}{2} \int_M g(\nabla R, \nabla u) dM = \int_M g(\nabla \lambda, \nabla u) dM - \int_M \frac{m}{u} |\nabla^2 u|^2 dM. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) no item 1, obteremos o segundo item. \square

Como aplicação temos o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 3.1 *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$, $n \geq 3$, uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta não trivial, com m finito. Suponha que $\mathcal{L}_{\nabla u} R \geq 0$, com $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Então, (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ e, a menos de uma constante, f é dada por (3.2).*

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Demonstração: Primeiramente, notemos que m finito e f não constante implicam u não constante por (3.3). Por outro lado, $\mathcal{L}_{\nabla u}R \geq 0$ e $\frac{m}{u} > 0$ implicam pela Proposição (3.1) que ∇u é um campo de vetores conforme não trivial. Agora estamos em condições de aplicarmos o resultado obtido no Teorema 1 de Barros e Ribeiro [13] para concluirmos a prova de nosso teorema. De fato, por (3.7), (M^n, g) é Einstein, então basta usarmos o Teorema 1.1 para concluirmos que (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ de raio $r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{R}}$. Além disso, por (1.6) teremos

$$0 = -2(n-1)\Delta\left(\frac{\Delta u}{n}\right) - 2R\frac{\Delta u}{n},$$

donde

$$\Delta(\Delta u) + \frac{n}{r^2}\Delta u = 0,$$

portanto, $\Delta u = h_v$ onde h_v é a função altura com relação a algum vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ (ver, por exemplo [15]). Por outro lado,

$$\Delta h_v = -nh_v,$$

o que implica $\Delta(u + \frac{h_v}{n}) = 0$. Consequentemente, $u = c - \frac{h_v}{n}$, para alguma constante c , o que implica $f = -m \ln(c - \frac{h_v}{n})$. \square

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Nesta secção utilizaremos as técnicas desenvolvidas na demonstração da Proposição 2.2, para provarmos resultados análogos para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, na situação mais geral abaixo.

Definição 3.1 Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma métrica m -quasi-Einstein generalizada, se existe um campo de vetores X e uma função diferenciável $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\text{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g, \quad (3.9)$$

onde $0 < m \leq \infty$ é um número inteiro, enquanto que X^\flat é a 1-forma associada ao campo X e $\mathcal{L}_X g$ denota a derivada de Lie de g na direção de X .

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Quando $m = \infty$, a equação (3.9) refere-se a um quase sólton de Ricci. No caso em que λ é constante vamos nos referir a (M^n, g) simplesmente por métrica m -quasi-Einstein.

Em particular,

$$\text{Ric}(X, X) + g(\nabla_X X, X) = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2. \quad (3.10)$$

Além disso, tomando o traço na equação (3.9) deduzimos que

$$R + \text{div}X - \frac{1}{m}|X|^2 = n\lambda. \quad (3.11)$$

Alguns exemplos interessantes foram mostrados recentemente por Barros, Ribeiro e Silva em [14]. Dentre eles destacaremos o seguinte:

Exemplo 3.2 *Consideremos*

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

munida com uma família de métricas

$$g_{\kappa, \tau}(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[\langle X, Y \rangle + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right],$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica euclidiana em \mathbb{S}^3 , $V_{(z,w)} = (iz, iw)$ para cada $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ e κ, τ são números reais, com $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$. Escreveremos $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ para denotar a esfera de Berger $(\mathbb{S}^3, g_{\kappa, \tau})$. Neste caso os autores em [14] consideraram o campo de vetores $E_3 = \frac{\kappa}{4\tau}V$, para deduzirem o tensor de Ricci de $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ como segue:

$$\text{Ric}_{g_{\kappa, \tau}} - (4\tau^2 - \kappa)E_3^{\flat} \otimes E_3^{\flat} = (\kappa - 2\tau^2)g_{\kappa, \tau}.$$

Desde que E_3 é um campo de vetores Killing, vamos definir $X = \sqrt{m(4\tau^2 - \kappa)} E_3$ e considerar $\lambda = \kappa - 2\tau^2$ para deduzirmos que

$$\text{Ric}_{g_{\kappa, \tau}} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g_{\kappa, \tau} - \frac{1}{m}X^{\flat} \otimes X^{\flat} = \lambda g_{\kappa, \tau},$$

que é uma estrutura não trivial de m -quasi-Einstein métrica em $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$.

Neste exemplo quando $\kappa = 4$ e $\tau = 1$, temos que $\mathbb{S}_{4,1}^3$ é a esfera com a métrica euclidiana, que é Einstein, além disso X é nulo. De fato, isto é bem mais geral, conforme veremos a frente.

Em seguida analisaremos o caso em que (M^n, g) é Einstein e o campo X é conforme. Para tanto, precisaremos do lema abaixo.

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Lema 3.1 *Seja X um campo de vetores em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , tal que $(X^\flat \otimes X^\flat) = \beta g + T$, para alguma função $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ e algum $(0, 2)$ -tensor T em M^n . Se T tem traço nulo, então $\beta = \frac{1}{n}|X|^2 = -T(Z, Z)$, para todo campo de vetores unitários $Z \in \mathfrak{X}(M)$, ortogonal a X .*

Demonstração: Desde que $\text{tr}(T) = 0$, tomando o traço na equação $(X^\flat \otimes X^\flat) = \beta g + T$, obtemos $\beta = \frac{1}{n}|X|^2$. Agora notemos que $(X^\flat \otimes X^\flat)(Z, Z) = g(X, Z)^2$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, $(X^\flat \otimes X^\flat)(Z, Z) = \beta|Z|^2 + T(Z, Z)$, portanto tomando Z unitário ortogonal a X , deduzimos que $\beta = -T(Z, Z)$, que finaliza a prova do lema. \square

Observação 3.1 *Segue-se imediatamente deste lema e da equação (3.9) que: se (M^n, g, X, λ, m) é uma métrica m -quasi-Einstein generalizada, com m finito, (M^n, g) Einstein e X um campo de vetores conforme, então X é nulo.*

No caso de métrica m -quasi-Einstein compacta com X conforme, veremos no Corolário 3.1 que ele deve ser Killing. Em particular, se for gradiente será trivial. Por outro lado, uma métrica m -quasi-Einstein compacta (M^n, g, X, λ, m) , $n \geq 3$, é trivial, se for Einstein, de acordo com o Teorema 3.2 a frente.

Lema 3.2 *Para um campo de vetores X em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , vale*

$$\text{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = \text{div}X.X^\flat + (\nabla_X X)^\flat. \quad (3.12)$$

Em particular, quando $X = \nabla f$, para alguma função diferenciável f em M^n , teremos

$$\text{div}(df \otimes df) = \Delta f.df + \frac{1}{2}d|\nabla f|^2. \quad (3.13)$$

Demonstração: Pelo carácter pontual dos tensores basta provarmos a equação (3.12) para um referencial ortonormal geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um ponto arbitrário $p \in M^n$. Vejamos, pela equação (1.8), teremos

$$\begin{aligned} (\text{div}(X^\flat \otimes X^\flat))(Z) &= \text{div}((X^\flat \otimes X^\flat)(Z)) - \sum_i (X^\flat \otimes X^\flat)(\nabla_{e_i} Z, e_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i}(X^\flat \otimes X^\flat)(Z), e_i) - \sum_i g(X, \nabla_{e_i} Z)g(X, e_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i}(X^\flat \otimes X^\flat)(Z), e_i) - g(X, \nabla_X Z), \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por outro lado, derivando com relação a e_i a equação $g((X^b \otimes X^b)(Z), e_i) = g(X, Z)g(X, e_i)$, deduzimos que

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_i}(X^b \otimes X^b)(Z), e_i) &= (g(\nabla_{e_i}X, Z) + g(X, \nabla_{e_i}Z))g(X, e_i) \\ &\quad + g(\nabla_{e_i}X, e_i)g(X, Z) \\ &= g(\nabla_{g(X, e_i)e_i}X, Z) + g(X, \nabla_{g(X, e_i)e_i}Z) \\ &\quad + g(\nabla_{e_i}X, e_i)g(X, Z). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora basta substituírmos (3.15) em (3.14) para obtermos a equação (3.12). \square

Em seguida estenderemos o Lema 2.2 para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada.

Lema 3.3 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada, vale*

$$\operatorname{div}((\mathcal{L}_X g)Z) = 2\operatorname{div}\left(\lambda Z + \frac{1}{m}(X^b \otimes X^b)(Z)\right) - g(\nabla R, Z) - 2\langle \nabla Z, Ric \rangle,$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração: Fazendo $T = \mathcal{L}_X g$ e $\varphi = 1$ no Lema 1.4, e posteriormente usando a equação (3.9) e a segunda identidade de Bianchi contraída, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((\mathcal{L}_X g)Z) &= \left(\operatorname{div}(2\lambda I - 2Ric + \frac{2}{m}X^b \otimes X^b)\right)(Z) + \langle \nabla Z, 2\lambda g - 2Ric \rangle \\ &\quad + \frac{2}{m}\langle \nabla Z, X^b \otimes X^b \rangle \\ &= 2g(\nabla \lambda, Z) - g(\nabla R, Z) + \langle \nabla Z, 2\lambda g - 2Ric \rangle \\ &\quad + \frac{2}{m}\left(\operatorname{div}(X^b \otimes X^b)(Z) + \langle \nabla Z, X^b \otimes X^b \rangle\right) \\ &= 2g(\nabla \lambda, Z) - g(\nabla R, Z) + 2\lambda \operatorname{div}Z - 2\langle \nabla Z, Ric \rangle \\ &\quad + \frac{2}{m}\operatorname{div}((X^b \otimes X^b)(Z)), \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. \square

No caso de métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, podemos considerar a decomposição seguinte:

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\operatorname{div}Y = 0$, e h é a função potencial de Hodge-de Rham. Sendo assim, podemos reescrever a equação (3.9) como segue

$$Ric + T_{h,m} = \lambda g, \quad (3.16)$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

onde

$$T_{h,m} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h + J_m \quad \text{e} \quad J_m = -\frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat.$$

Além disso, temos $\Delta h = \operatorname{div} X = n\lambda - R + \frac{1}{m}|X|^2$. Então vamos calcular

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_{h,m}(\nabla h)) &= (\operatorname{div} T_{h,m})(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, T_{h,m} \rangle \\ &= (\operatorname{div}(\lambda I - \operatorname{Ric}))(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h + J_m \rangle \\ &= g(\nabla \lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) + |\nabla^2 h|^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle \\ &\quad + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle. \end{aligned}$$

Desde que $|\nabla^2 h|^2 = |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)^2$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(T_{h,m}(\nabla h)) &= g(\nabla \lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) + |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)^2 \\ &\quad + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g \rangle + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle \\ &= g(\nabla \lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) + |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 \\ &\quad + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + J_m \rangle + \frac{1}{n}(\Delta h)(n\lambda - R + \frac{1}{m}|X|^2) \\ &= g(\nabla \lambda, \nabla h) + \lambda\Delta h - \frac{1}{2}g(\nabla R, \nabla h) - \frac{R}{n}\Delta h \quad (3.17) \\ &\quad + |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 + \frac{1}{nm}|X|^2\Delta h + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + J_m \rangle, \end{aligned}$$

o que nos permite deduzir o lema seguinte.

Lema 3.4 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral*

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle dM \\ &\quad - \int_M \langle \nabla^2 h, J_m \rangle dM - \frac{1}{nm} \int_M |X|^2 \Delta h dM, \quad (3.18) \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g|^2 dM &= -\frac{1}{n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{nm} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\ &\quad - \int_M (\lambda\Delta h - |\nabla^2 h|^2) dM. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Demonstração: A equação (3.18) segue imediatamente por integração de (3.17). Para provarmos (3.19), notemos inicialmente que, de (3.16) temos

$$\langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + J_m \rangle = \lambda\Delta h - |\nabla^2 h|^2 - \langle \nabla^2 h, \operatorname{Ric} \rangle. \quad (3.20)$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Além disso, fazendo $Z = \nabla h$ no Lema 3.3, e usando o teorema da divergência, vemos que

$$\int_M g(\nabla R, \nabla h) dM = -2 \int_M \langle \nabla^2 h, Ric \rangle dM. \quad (3.21)$$

Agora, basta combinarmos (3.20), (3.21) e (3.18) para obtermos (3.19). \square

Corolário 3.1 *Seja (M^n, g, X, λ, m) uma métrica m -quasi-Einstein compacta. Se X é um campo conforme, então X é Killing. Em particular, vale*

$$\int_M \left(\frac{1}{m} |X|^4 + \lambda |X|^2 \right) dM \geq 0.$$

Demonstração: Como λ é constante e $X = Y + \nabla h$, com $div Y = 0$, podemos escrever a equação (3.19) como segue

$$\int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM = -\frac{1}{n} \int_M g(\nabla R, X) dM - \frac{1}{nm} \int_M |X|^2 div X dM + \int_M |\nabla^2 h|^2 dM.$$

Desde que X é conforme, isto é, $\mathcal{L}_X g = 2 \frac{div X}{n} g$, um fato já conhecido da teoria de campos conformes é que, as duas primeiras parcelas do segundo membro desta equação se anulam, donde deduzimos que h é constante, portanto $X = Y$, que implica $\mathcal{L}_X g = 0$. Em particular, um fato já conhecido da teoria de campos de Killing em variedades Riemannianas é que: definindo $f = \frac{1}{2} |X|^2$, teremos $\Delta f = |\nabla X|^2 - Ric(X, X)$, donde deduziremos juntamente com a equação (3.10) que

$$0 \leq \int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric(X, X) dM = \int_M \left(\frac{1}{m} |X|^4 + \lambda |X|^2 \right) dM.$$

\square

Prosseguindo, vamos novamente usar o Lema 1.4 e a equação (3.12) para calcularmos

$$\begin{aligned} div(J_m(\nabla h)) &= (div J_m)(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle \\ &= -\frac{1}{m} (div(X^b \otimes X^b))(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle \\ &= -\frac{1}{m} (div X g(X, \nabla h) + g(\nabla_X X, \nabla h)) + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle \quad (3.22) \\ &= -\frac{1}{m} (|X|^2 \Delta h - g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, \nabla h)) + \langle \nabla^2 h, J_m \rangle. \end{aligned}$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Logo, por integração de (3.22) obtemos

$$\int_M \langle \nabla^2 h, J_m \rangle dM = \frac{1}{m} \int_M (|X|^2 \Delta h - g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, \nabla h)) dM, \quad (3.23)$$

ou ainda, trocando ∇h por $X - Y$, e notando que $g(\nabla_X X, X) = \frac{1}{2} X(|X|^2) = \frac{1}{2} g(\nabla |X|^2, X)$, podemos usar o teorema da divergência para deduzirmos que

$$\int_M \langle \nabla^2 h, J_m \rangle dM = \frac{1}{2m} \int_M |X|^2 \Delta h dM - \frac{1}{m} \int_M (g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, Y)) dM. \quad (3.24)$$

Analogamente, pelas equações (3.12), (3.16) e pelo Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(J_m(Y)) &= (\operatorname{div} J_m)(Y) + \langle \nabla Y, J_m \rangle \\ &= -\frac{1}{m} (\operatorname{div} X g(X, Y) + g(\nabla_X X, Y)) + \langle \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g, J_m \rangle \quad (3.25) \\ &= -\frac{1}{m} (g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, Y)) - \langle \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g, Ric \rangle - \frac{1}{4} |\mathcal{L}_Y g|^2 \\ &\quad - \langle \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g, \nabla^2 h \rangle. \end{aligned}$$

Em seguida, vamos fazer $Z = Y$ no Lema 3.3, usar que $\operatorname{div} Y = 0$, o Lema 2.3 e novamente o teorema da divergência para obtermos

$$0 = \int_M g(\nabla R, Y) dM = -2 \int_M \langle \nabla Y, Ric \rangle dM = - \int_M \langle \mathcal{L}_Y g, Ric \rangle dM. \quad (3.26)$$

Assim, por integração da equação (3.25) e por (3.26),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M \langle \mathcal{L}_Y g, \nabla^2 h \rangle dM &= -\frac{1}{m} \int_M (g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, Y)) dM \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM. \quad (3.27) \end{aligned}$$

O que permite enunciarmos o próximo resultado.

Proposição 3.2 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.*

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{(n+2)}{2mn} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\ &\quad + \frac{2}{m} \int_M (g(X, Y) \Delta h + g(\nabla_X X, Y)) dM \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM. \quad (3.28) \end{aligned}$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Em particular, quando $X = \nabla f$, para alguma função diferenciável f em M^n , fica

$$\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla f) dM - \frac{(n+2)}{2mn} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM. \quad (3.29)$$

Demonstração: Substituindo (3.24) e (3.27) em (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{1}{2m} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\ &\quad + \frac{2}{m} \int_M (g(X, Y) \Delta h dM + g(\nabla_X X, Y)) dM \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_M |\mathcal{L}_Y g|^2 dM - \frac{1}{mn} \int_M |X|^2 \Delta h dM, \end{aligned}$$

donde vamos obter a equação (3.28). Em particular, para $X = \nabla f$, temos $\nabla(f - h) = Y$, donde $\Delta(f - h) = \text{div} Y = 0$, assim f e h diferem por uma constante e Y é nulo, logo (3.29) segue direto de (3.28). \square

Cabe ressaltar que a equação (3.29) já foi provada por Barros e Ribeiro em [13]. Além disso, uma prova alternativa desta equação, é seguir os passos da prova do Lema 2.1, onde só precisaremos da equação (3.13) para obtê-la.

Continuando, vamos usar a equação (3.16) e que $\Delta h = n\lambda - R + \frac{1}{m}|X|^2$, para ver que

$$\begin{aligned} Ric - \frac{R}{n} g &= \lambda g - \frac{R}{n} g - \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g - \nabla^2 h - J_m \\ &= \frac{n\lambda - R}{n} g - \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g - \nabla^2 h - J_m \\ &= \left(-\nabla^2 h + \frac{\Delta h}{n} g \right) - \left(\frac{1}{mn} |X|^2 g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right) \quad (3.30) \\ &= -\left\{ \left(\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right) + \left(\frac{1}{mn} |X|^2 g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right) \right\}. \end{aligned}$$

Notando que $\langle \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g, g \rangle = 0$ e $\langle \mathcal{L}_Y g, g \rangle = 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \left| Ric - \frac{R}{n} g \right|^2 &= \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 + \left| \frac{1}{mn} |X|^2 g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right|^2 \\ &\quad + 2 \left\langle \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g, \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right\rangle \\ &= \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g \right|^2 + \left| \frac{1}{mn} |X|^2 g \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right|^2 \\ &\quad + \frac{2}{mn} |X|^2 \langle g, J_m \rangle + 2 \left\langle \nabla^2 h, \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \right\rangle \\ &\quad - 2 \frac{\Delta h}{n} \langle g, J_m \rangle. \end{aligned}$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Desde que $\langle g, J_m \rangle = -\frac{1}{m}|X|^2$ e $|J_m|^2 = \frac{1}{m^2}|X|^4$, teremos

$$\begin{aligned}
\left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 &= \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g \right|^2 + \frac{1}{m^2 n} |X|^4 + \frac{1}{4} |\mathcal{L}_Y g|^2 + \langle \mathcal{L}_Y g, J_m \rangle \\
&+ \frac{1}{m^2} |X|^4 - \frac{2}{m^2 n} |X|^4 + 2 \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2} \mathcal{L}_Y g + J_m \rangle \\
&+ \frac{2}{mn} |X|^2 \Delta h \\
&= \left| \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g \right|^2 + \frac{n-1}{m^2 n} |X|^4 + \frac{1}{4} |\mathcal{L}_Y g|^2 + \langle \mathcal{L}_Y g, J_m \rangle \\
&+ \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g \rangle + 2 \langle \nabla^2 h, J_m \rangle + \frac{2}{mn} |X|^2 \Delta h, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

o que nos permite deduzir a proposição seguinte.

Proposição 3.3 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.*

$$\begin{aligned}
\int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2mn} \int_M |X|^2 \operatorname{div} X dM \\
&+ \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2mn} \int_M (n\lambda - R) |X|^2 dM \\
&+ \frac{3}{2m^2} \int_M |X|^4 dM. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Em particular, quando $X = \nabla f$ para alguma função diferenciável f em M^n , a equação (3.32) se resume a:

$$\begin{aligned}
\int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \right|^2 dM + \frac{n+2}{mn} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f dM \\
&+ \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |\nabla f|^4 dM. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Demonstração: Integrando (3.31) e depois substituindo as equações (3.28), (3.25), (3.27) e (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \left| Ric - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, \nabla h) dM - \frac{(n+2)}{2mn} \int_M |X|^2 \Delta h dM \\
&+ \frac{1}{m} \int_M |X|^2 \Delta h dM + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM \\
&+ \frac{2}{mn} \int_M |X|^2 \Delta h dM,
\end{aligned}$$

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

que simplificando vamos obter a equação (3.32). Para obter (3.33), basta substituir $\Delta h = n\lambda - R + \frac{1}{m}|X|^2$ em (3.32). Em particular, para $X = \nabla f$, a equação (3.34) segue imediatamente de (3.29) e de (3.32). \square

Observação 3.2 *A equação (3.32) mostra que toda métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, com m finito, é trivial, se for Einstein e*

$$\int_M |X|^2 \operatorname{div} X dM \geq 0, \quad (3.35)$$

ou seja, a compacidade nos permitiu relaxar a condição de X ser conforme na Observação 3.1 para a condição em (3.35), uma vez que sendo X conforme esta condição é satisfeita.

Continuando, vamos usar a equação (3.11) para deduzirmos que

$$\frac{1}{m}|X|^2 \operatorname{div} X = (\operatorname{div} X)^2 + (R - n\lambda) \operatorname{div} X, \quad (3.36)$$

o que permitirá deduzirmos a nossa próxima fórmula integral.

Proposição 3.4 *Para uma métrica m -quasi-Einstein generalizada compacta, vale a seguinte fórmula integral.*

$$\begin{aligned} \int_M \left| \operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= -\frac{2}{n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2} \int_M g(\nabla \lambda, X) dM \\ &\quad + \frac{n+2}{2n} \int_M (\operatorname{div} X)^2 dM + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM. \end{aligned}$$

Demonstração: Substituindo a equação (3.36) em (3.32), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \left| \operatorname{Ric} - \frac{R}{n}g \right|^2 dM &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2n} \int_M (\operatorname{div} X)^2 dM \\ &\quad + \frac{n+2}{2n} \int_M (R - n\lambda) \operatorname{div} X dM + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM \\ &= \frac{n-2}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2n} \int_M (\operatorname{div} X)^2 dM \\ &\quad - \frac{(n+2)}{2n} \int_M g(\nabla R, X) dM + \frac{n+2}{2} \int_M g(\nabla \lambda, X) dM \\ &\quad + \frac{n-1}{m^2 n} \int_M |X|^4 dM, \end{aligned}$$

que simplificando dá o resultado desejado. \square

3.2 Fórmulas integrais para métrica m -quasi-Einstein generalizada

Novamente, vamos observar que em [18] os autores mostraram que toda métrica m -quasi-Einstein $(M^n, g, \nabla f, \lambda, m)$ compacta com curvatura escalar constante, é trivial. De fato, desde que λ e R são constantes, o teorema de Stokes e as equações (3.11) e (3.29) mostram que

$$\begin{aligned}\int_M \left| \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g \right|^2 dM &= -\frac{(n+2)}{2n} \int_M \frac{1}{m} |\nabla f|^2 \Delta f dM \\ &= -\frac{(n+2)}{2n} \int_M (\Delta f + R - n\lambda) \Delta f dM \\ &= -\frac{(n+2)}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM,\end{aligned}$$

donde deduzimos que f é constante. Contudo, o Exemplo 3.2 mostra que no caso não gradiente tal fato nem sempre é verdade. Por outro lado, se a variedade for Einstein, aí sim o campo será nulo, de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 3.2 *Uma métrica m -quasi-Einstein (M^n, g, X, λ, m) compacta, com m finito, é trivial, se uma das condições seguintes ocorrer:*

1. $n \geq 3$ e (M^n, g) é Einstein.
2. $n = 2$ e (M^2, g) tem curvatura constante.

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 3.4. □

Capítulo 4

Rigidez de superfícies de contato

Uma variedade de contato (M, η) é uma variedade diferenciável $(2n + 1)$ -dimensional M^{2n+1} munida com uma 1-forma global η tal que $d\eta$ tem posto maximal $2n$ sobre a distribuição de contato $\delta = Ker(\eta)$. A dualidade de η define um único campo de vetores ξ , chamado campo de vetores de Reeb. O fluxo de Reeb é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerado pelo campo de vetores de Reeb. Martinet [37] provou que toda variedade 3-dimensional compacta e orientável admite uma estrutura de contato. No caso da esfera euclidiana $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, basta considerar $\eta(x) = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4$ e ver que $\xi(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ é tal que $\langle \xi \rangle^\perp = Ker(\eta)$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é o vetor posição em \mathbb{S}^3 .

Nosso objetivo aqui será deduzir uma fórmula geral envolvendo a curvatura gaussiana, a curvatura média e o ângulo de contato de uma superfície imersa em \mathbb{S}^3 , a qual nos permitirá obter alguns resultados de rigidez. Para isso, vamos utilizar a mesma técnica desenvolvida em [39], mais especificamente, vamos considerar um campo de vetores característicos e_1 introduzido por Aebischer e outros autores em [1], então vamos completar e_1 para um referencial móvel $\{e_1, e_2, e_3\}$ adaptado à superfície e usaremos o método do referencial móvel para obter nossos resultados. Começaremos fixando algumas notações e revendo alguns fatos sobre este método. Se o leitor ainda achar conveniente

4.1 Preliminares

pode consultar, por exemplo [20].

4.1 Preliminares

Consideremos uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n -dimensional M^n em uma variedade Riemanniana $(n + 1)$ -dimensional \overline{M}^{n+1} . Tomemos um referencial móvel $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um aberto de M^n tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) na métrica induzida. Seja $\{w_1, \dots, w_n\}$ o referencial associado, definamos para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} e_j.$$

Como toda imersão é localmente um mergulho, podemos estender o referencial acima à um conjunto aberto de \overline{M}^{n+1} , para em seguida completá-lo à um referencial móvel $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ neste aberto.

Em \overline{M}^{n+1} temos as formas duais w_1, \dots, w_{n+1} bem como as formas de conexão w_{ij} ($i, j = 1, \dots, n + 1$) satisfazendo

$$dw_i = \sum_{j=1}^{n+1} w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} + w_{ji} = 0.$$

Além disso a forma de curvatura $\overline{\Omega}_{ij}$ de \overline{M}^{n+1} satisfaz, para todos $i, j = 1, \dots, n + 1$:

$$\overline{\Omega}_{ij} = dw_{ij} - \sum_{k=1}^{n+1} w_{ik} \wedge w_{kj}.$$

Se \overline{R} denota o tensor curvatura de \overline{M}^{n+1} , então $\overline{\Omega}_{ij}(e_k, e_l) = -\overline{R}_{ijkl}$. Um fato importante é que \overline{M}^{n+1} tem curvaturas seccionais constantes c se, e somente se, para todos $i, j = 1, \dots, n + 1$

$$\overline{\Omega}_{ij} = -c w_i \wedge w_j.$$

Restrito a M^n temos: $w_{n+1} = 0$ e as formas duais de e_1, \dots, e_n serão as formas duais destes vetores em \overline{M}^{n+1} , restritas a M^n , e por isso repetimos a notação. Ademais, as formas de conexões de M^n serão as de \overline{M}^{n+1} restritas a M^n e ainda satisfazendo para todos $i, j = 1, \dots, n$:

$$dw_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} \wedge w_j, \quad w_{ij} + w_{ji} = 0.$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Assim, se Ω_{ij} é a forma de curvatura de M^n , teremos para todos $i, j = 1, \dots, n$:

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} - \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj}.$$

Conseqüentemente, as equações de Gauss e Codazzi serão dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - w_{in+1} \wedge w_{n+1j}$$

e

$$\bar{\Omega}_{n+1j} = dw_{n+1j} - \sum_{k=1}^n w_{n+1k} \wedge w_{kj}.$$

Pelo lema de Cartan

$$w_{in+1} = \sum_{j=1}^n h_{ij} w_j, \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

A segunda forma fundamental h e a curvatura média H de M^n são dadas por:

$$h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} w_i w_j e_{n+1}$$

e

$$nH = \sum_{i=1}^n h_{ii}.$$

Vamos observar que neste capítulo todas as superfícies serão orientáveis, conexas e as compactas serão consideradas sem bordo.

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Nesta secção vamos aplicar o método do referencial móvel para superfícies na esfera euclidiana unitária \mathbb{S}^3 . Para isso vamos primeiramente considerar em \mathbb{C}^2 o produto interno Hermitiano $(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$. Com esta escolha vamos notar que $\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : (z, z) = 1\}$ e a aplicação $\xi(z) = iz$ é um campo de vetores tangentes em \mathbb{S}^3 . A distribuição de contato em \mathbb{S}^3 é definida como o complementar ortogonal de $\xi(z)$ em $T_z \mathbb{S}^3$. Mais precisamente,

$$\delta_z = \{v \in T_z \mathbb{S}^3 : \langle \xi, v \rangle = 0\}. \quad (4.1)$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Sendo assim, vamos definir o ângulo de contato da seguinte forma.

Definição 4.1 *Dada uma superfície M^2 imersa em \mathbb{S}^3 , o ângulo de contato β em um ponto $z \in M^2$ é o complementar do ângulo entre a distribuição de contato δ_z e o espaço tangente $T_z M^2$.*

Agora vamos chamar de \mathcal{C} todas as superfícies M^2 isometricamente imersas em \mathbb{S}^3 , tais que $z^\perp := (-\bar{z}_2, \bar{z}_1) \in T_z M^2$ para todo $z = (z_1, z_2) \in M^2$.

Estamos prontos para enunciar e provar nosso primeiro teorema, o qual, conforme já havíamos comentado na introdução desta tese, será nossa principal ferramenta para provarmos os resultados deste capítulo.

Teorema 4.1 *Para $M^2 \in \mathcal{C}$, com ângulo de contato β , a curvatura gaussiana é dada por*

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2),$$

onde $\beta_1 = d\beta(e_1)$, $\beta_2 = d\beta(e_2)$, $\{e_1 = z^\perp, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_z M^2$ e H denota a curvatura média da superfície. Além disso, o laplaciano de β satisfaz

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2\},$$

onde $H_2 = dH(e_2)$.

Demonstração: Seja $\{f_1 = z^\perp, f_2 = iz^\perp, f_3 = iz\}$ um referencial móvel em \mathbb{S}^3 , onde $z = (z_1, z_2)$ e $z^\perp = (-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$. Seja $\{w_1, w_2, w_3\}$ o coreferencial associado, então as formas de conexão se resumem a $\{w_{12}, w_{13} = w_2, w_{23} = -w_1\}$, conseqüentemente a derivada covariante em \mathbb{S}^3 é dada por:

$$\bar{D}f_1 = w_{12}f_2 + w_2f_3, \quad \bar{D}f_2 = w_{21}f_1 - w_1f_3 \quad \text{e} \quad \bar{D}f_3 = -w_2f_1 + w_1f_2. \quad (4.2)$$

De fato, se \tilde{D} é a derivada covariante de \mathbb{C}^2 , temos para todo $v \in T_z \mathbb{S}^3$

$$\tilde{D}_v f_3 = \bar{D}_v f_3 - \langle v, f_3 \rangle z, \quad (4.3)$$

onde z é o vetor posição que fixa a orientação de \mathbb{S}^3 .

Tendo em conta que $\bar{D}_v f_3 = w_{31}(v)f_1 + w_{32}(v)f_2$, $\tilde{D}_v f_3 = iv$, $v = w_1(v)f_1 + w_2(v)f_2 + w_3(v)f_3$, vamos deduzir, por substituição em (4.3), que $v = w_{32}(v)f_1 -$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

$w_{31}(v)f_2 + \langle v, f_3 \rangle f_3$. Isto prova que $w_{32} = w_1$ e $w_{13} = w_2$ como havíamos afirmado.

Desde que $f_1 \in T_z M^2 \cap \delta_z$, podemos considerar $\{f_1, u\}$ uma base ortonormal de $T_z M^2$. Com esta escolha temos $\cos \beta = \langle f_3, u \rangle$ e obviamente $u = af_2 + bf_3$, com $b = \langle u, f_3 \rangle = \cos \beta$ e $a = \langle u, f_2 \rangle = \sin \beta$. Logo, por construção

$$\{e_1 = f_1, e_2 = u = \sin \beta f_2 + \cos \beta f_3, e_3 = -\cos \beta f_2 + \sin \beta f_3\} \quad (4.4)$$

é um referencial móvel em \mathbb{S}^3 adaptado a M^2 , com coreferencial associado

$$\{\theta_1 = w_1, \theta_2 = \sin \beta w_2 + \cos \beta w_3, \theta_3 = -\cos \beta w_2 + \sin \beta w_3\}. \quad (4.5)$$

Como $\theta_3 = 0$ em M^2 , vamos deduzir que

$$\cos \beta w_2 = \sin \beta w_3,$$

que juntamente com a expressão de θ_2 em (4.5), nos dá

$$\sin \beta \theta_2 = w_2 \quad \text{e} \quad \cos \beta \theta_2 = w_3. \quad (4.6)$$

Conseqüentemente, teremos

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \sin \beta (w_{12} + \cos \beta \theta_2) \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= \sin \beta (w_{21} - \cos \beta \theta_2) \wedge \theta_1 \end{aligned}$$

e

$$d\theta_3 = d\beta \wedge \theta_2 - \cos \beta w_{21} \wedge \theta_1 + (1 + \sin^2 \beta) \theta_1 \wedge \theta_2,$$

onde usamos o fato de que $d\theta_1 = dw_1 = w_{12} \wedge w_2 + w_{13} \wedge w_3$ e as expressões em (4.6) para mostrar a primeira linha, enquanto que as duas últimas linhas seguem imediatamente por diferenciação de (4.5) e novamente pelo uso de (4.6).

Segue-se que a forma de conexão de M^2 é dada por

$$\theta_{21} = \sin \beta (w_{21} - \cos \beta \theta_2). \quad (4.7)$$

Pela definição de e_3 , teremos

$$\bar{D}e_3 = \sin \beta d\beta f_2 - \cos \beta \bar{D}f_2 + \cos \beta d\beta f_3 + \sin \beta \bar{D}f_3.$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Por outro lado,

$$\bar{D}e_3 = \theta_{31}e_1 + \theta_{32}e_2.$$

Então, usando as equações (4.2), (4.4) e (4.6) vamos obter

$$\theta_{31} = -\cos \beta w_{21} - \sin^2 \beta \theta_2 \quad \text{e} \quad \theta_{32} = d\beta + \theta_1. \quad (4.8)$$

Como $d\theta_3 = 0$ em M^2 e escrevendo $d\beta(e_1) = \beta_1$, teremos $0 = d\theta_3(e_2, e_1) = -\beta_1 - \cos \beta w_{21}(e_2) - (1 + \sin^2 \beta)$, isto é,

$$\cos \beta w_{21}(e_2) = -\beta_1 - (1 + \sin^2 \beta). \quad (4.9)$$

Como $\theta_{13} = h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2$, $\theta_{23} = h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2$, vamos ter a seguinte equação para a curvatura média H de M^2

$$2H\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_{23},$$

que aplicada em (e_1, e_2) resulta em

$$2H = \cos \beta w_{21}(e_1) - \beta_2, \quad (4.10)$$

onde $d\beta(e_2) = \beta_2$.

O próximo passo é calcular a curvatura gaussiana K de M^2 , para isto vamos lembrar que, se $\bar{\Omega}_{ij}$ é a forma de curvatura de \mathbb{S}^3 e Ω_{12} é a forma de curvatura de M^2 , teremos

$$\bar{\Omega}_{12} = \Omega_{12} + \theta_{31} \wedge \theta_{32}.$$

Como \mathbb{S}^3 tem curvatura seccional constante 1 e pela definição de Ω_{12} , temos a equação de Gauss

$$-\theta_1 \wedge \theta_2 = d\Omega_{12} + \theta_{31} \wedge \theta_{32}.$$

Por outro lado, como

$$\theta_{31} = \theta_{31}(e_1)\theta_1 + \theta_{31}(e_2)\theta_2 \quad \text{e} \quad \theta_{32} = \theta_{32}(e_1)\theta_1 + \theta_{32}(e_2)\theta_2,$$

segue de (4.8), (4.9) e (4.10) que

$$\theta_{31} = -(2H + \beta_2)\theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_2 \quad \text{e} \quad \theta_{32} = (\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2.$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Assim, pela equação de Gauss, vamos obter

$$d\theta_{12} = (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2)\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Conseqüentemente, vamos deduzir

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2), \quad (4.11)$$

que finaliza a primeira parte do teorema. Continuando, vamos considerar o referencial móvel acima bem como os resultados já obtidos, para calcular o laplaciano de β . Começemos estabelecendo a seguinte notação: $e_i(\beta_j) = \beta_{ji}$ e $dH(e_i) = H_i$ ($i, j = 1, 2$). Sendo assim, podemos escrever

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} - (D_{e_1}e_1)(\beta) - (D_{e_2}e_2)(\beta),$$

onde

$$D_{e_1}e_1 = \theta_{12}(e_1)e_2 \quad \text{e} \quad D_{e_2}e_2 = \theta_{21}(e_2)e_1.$$

Segue-se de (4.7), (4.9) e (4.10) que

$$\theta_{12}(e_1) = -\tan\beta(2H + \beta_2) \quad \text{e} \quad \theta_{21}(e_2) = -\tan\beta(\beta_1 + 2).$$

Donde vamos ter

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \beta_{11} + \beta_{22} + \tan\beta(|\nabla\beta|^2 + 2H\beta_2 + 2\beta_1) \\ &= \beta_{11} + \beta_{22} - K \tan\beta \end{aligned} \quad (4.12)$$

e

$$\theta_{21} = \tan\beta\{(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2\}. \quad (4.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\theta_{21} &= \sec^2\beta d\beta \wedge \{(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2\} + \tan\beta d\{(2H + \beta_2)\theta_1 \\ &\quad - (\beta_1 + 2)\theta_2\} \\ &= P_1 + P_2, \end{aligned}$$

onde $P_1 = \sec^2\beta d\beta \wedge \{(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2\}$ e $P_2 = \tan\beta d\{(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2\}$. Agora vamos escrever $d\beta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$ e usar a equação de Gauss para obter

$$P_1 = K\theta_1 \wedge \theta_2 + K \tan^2\beta \theta_1 \wedge \theta_2. \quad (4.14)$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Por outro lado, podemos escrever

$$P_2 = \tan \beta \{ (2dH + d\beta_2) \wedge \theta_1 + (2H + \beta_2)d\theta_1 - d\beta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 2)d\theta_2 \}.$$

Notemos que a equação (4.13) nos fornece

$$d\theta_1 = -\tan \beta (2H + \beta_2)\theta_1 \wedge \theta_2 \quad \text{e} \quad d\theta_2 = \tan \beta (\beta_1 + 2)\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Como $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$, $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$ e $dH = H_1\theta_1 + H_2\theta_2$ chegamos à expressão seguinte para P_2

$$P_2 = -\tan \beta \{ \beta_{11} + \beta_{22} + 2H_2 + \tan \beta ((2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2) \} \theta_1 \wedge \theta_2.$$

Finalmente vamos usar a equação (4.12) para escrever

$$P_2 = -\tan \beta \{ \Delta\beta + K \tan \beta + 2H_2 + \tan \beta ((2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2) \} \theta_1 \wedge \theta_2. \quad (4.15)$$

Como

$$K\theta_1 \wedge \theta_2 = P_1 + P_2,$$

então basta substituírmos as equações (4.14) e (4.15) na equação anterior para obtermos

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan \beta \{ (2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2 \}, \quad (4.16)$$

que finaliza a prova do teorema. \square

Como consequência direta deste teorema vamos deduzir o seguinte resultado.

Corolário 4.1 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ tem ângulo de contato constante, então ela é plana. Em particular, ela será difeomorfa a um toro, se for compacta.*

Demonstração: Se β é constante vamos deduzir da equação (4.11) que $K = 0$, que finaliza a prova do presente corolário. \square

Proposição 4.1 *Não existe superfície em \mathcal{C} com ângulo de contato constante β satisfazendo $|\beta| = \frac{\pi}{2}$.*

Demonstração: Se $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ obteremos uma contradição a partir da equação (4.9). \square

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Corolário 4.2 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ é compacta, tem ângulo de contato e curvatura média constantes, então ela é isométrica a um toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$.*

Demonstração: Por um clássico resultado devido a Hoffman [32], um toro plano $M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ de curvatura média constante é isométrico a um toro de Clifford $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$, que finaliza a prova do corolário. \square

Usando o corolário anterior e o princípio do máximo forte de Hopf, vamos provar o seguinte.

Teorema 4.2 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ é compacta, tem curvatura média constante e ângulo de contato β satisfazendo, $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, então ela é isométrica a um toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, para algum $r \in (0, 1)$.*

Demonstração: Desde que a $\tan \beta$ não muda de sinal e $H_2 = 0$, vamos deduzir da equação (4.16) que $\Delta\beta$ também não muda de sinal. Consequentemente, podemos aplicar o princípio do máximo forte de Hopf para concluir que β é constante e o resultado segue pelo Corolário 4.2. \square

Agora vamos ver que a recíproca do Teorema 4.1 é verdadeira. Mais especificamente, vamos usar o Teorema Fundamental das Hipersuperfícies para provar o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Seja M^2 uma superfície Riemanniana e e_1 um campo de vetores unitário em M^2 . Considere $\beta : M^2 \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ uma função diferenciável em M^2 e uma constante H , satisfazendo a equação*

$$\Delta\beta = -\tan \beta \{|\nabla\beta + 2e_1|^2 + 4H(H + \beta_2)\},$$

onde $\beta_2 = d\beta(e_2)$ e $\{e_1, e_2\}$ é um referencial móvel em M^2 . Então existe uma única imersão isométrica de M^2 em \mathbb{S}^3 , tal que β é o ângulo de contato de M^2 e H é a curvatura média desta imersão.

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel em M^2 e $\{\theta_1, \theta_2\}$ o coreferencial associado. Para cada função $\beta : M^2 \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ diferenciável em M^2 e

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

cada constante H , satisfazendo a equação

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -\tan\beta\{|\nabla\beta + 2e_1|^2 + 4H(H + \beta_2)\} \\ &= -\tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2\},\end{aligned}$$

vamos definir

$$\theta_{21} = \tan\beta\{(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2\} \quad (4.17)$$

e a segunda forma fundamental h , por

$$\theta_{13} = (2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 1)\theta_2 \quad (4.18)$$

e

$$\theta_{23} = -(\beta_1 + 1)\theta_1 - \beta_2\theta_2. \quad (4.19)$$

O próximo passo é provar que θ_{21} e h satisfazem as equações fundamentais. Para a equação de Gauss basta ver que

$$-\theta_1 \wedge \theta_2 = d\theta_{12} - \theta_{13} \wedge \theta_{32},$$

que é um cálculo simples. Enquanto que para a equação de Codazzi precisamos verificar que:

$$d\theta_{31} - \theta_{32} \wedge \theta_{21} = 0, \quad (4.20)$$

bem como

$$d\theta_{32} - \theta_{31} \wedge \theta_{12} = 0. \quad (4.21)$$

Vamos provar a primeira parte da equação de Codazzi. Primeiramente, vamos notar que $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$ e $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$ para ver que a derivada exterior de (4.18) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}d\theta_{31} &= -d\beta_2 \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)d\theta_1 + d\beta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)d\theta_2 \\ &= -\beta_{22}\theta_2 \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)\theta_{12} \wedge \theta_2 + \beta_{11}\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_{21} \wedge \theta_1 \\ &= (\beta_{22} + \beta_{11})\theta_1 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_{12} \wedge \theta_2 - \beta_1\theta_1 \wedge \theta_{21} - 2H\theta_{12} \wedge \theta_2 - \theta_1 \wedge \theta_{21}.\end{aligned}$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Assim pela equação (4.17) vamos ter

$$\begin{aligned}
 d\theta_{31}(e_1, e_2) &= \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_{12}(e_1) - \beta_1\theta_{21}(e_2) - 2H\theta_{12}(e_1) - \theta_{21}(e_2) \\
 &= \Delta\beta - 2H\theta_{12}(e_1) - \theta_{21}(e_2) \\
 &= -\tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2\} - 2H\theta_{12}(e_1) - \theta_{21}(e_2) \\
 &= -\tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2\} + 2H\tan\beta(2H + \beta_2) \\
 &\quad + \tan\beta(\beta_1 + 2) \\
 &= -\tan\beta\{2H\beta_2 + 3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2\}.
 \end{aligned}$$

Segue das equações (4.17) e (4.19) que

$$\begin{aligned}
 \theta_{32} \wedge \theta_{21}(e_1, e_2) &= -\tan\beta\{(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 2) + (2H + \beta_2)\beta_2\} \\
 &= -\tan\beta\{2H\beta_2 + 3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2\}.
 \end{aligned}$$

Portanto vamos deduzir

$$d\theta_{31}(e_1, e_2) - \theta_{32} \wedge \theta_{21}(e_1, e_2) = 0,$$

que prova (4.20).

Agora vamos provar (4.21), inicialmente vamos notar que $d\beta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$ implica

$$\begin{aligned}
 0 &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + \beta_1 d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\
 &= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + \beta_1\theta_{12} \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_{21} \wedge \theta_1.
 \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$\beta_{21} - \beta_{12} = -\beta_1\theta_{12}(e_1) + \beta_2\theta_{21}(e_2). \quad (4.22)$$

Além disso, calculando a derivada exterior de (4.19) vamos obter

$$\begin{aligned}
 d\theta_{32} &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\
 &= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_{12} \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_{21} \wedge \theta_1 \\
 &= (-\beta_{12} + \beta_{21})\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_{12} \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1 \wedge \theta_{21}.
 \end{aligned}$$

Em seguida vamos notar que as equações (4.17) e (4.22) nos permite deduzir

$$\begin{aligned}
 d\theta_{32}(e_1, e_2) &= \beta_{21} - \beta_{12} + (\beta_1 + 1)\theta_{12}(e_1) - \beta_2\theta_{21}(e_2) \\
 &= \theta_{12}(e_1) \\
 &= -\tan\beta(2H + \beta_2).
 \end{aligned}$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Por outro lado, segue das equações (4.17) e (4.18) que

$$\begin{aligned}\theta_{31} \wedge \theta_{12}(e_1, e_2) &= \tan \beta \{-(2H + \beta_2)(\beta_1 + 2) + (\beta_1 + 1)(2H + \beta_2)\} \\ &= -\tan \beta (2H + \beta_2).\end{aligned}$$

Logo, vamos deduzir

$$d\theta_{32}(e_1, e_2) - \theta_{31} \wedge \theta_{12}(e_1, e_2) = 0,$$

que termina a prova das equações de Codazzi. Conseqüentemente, podemos aplicar o Teorema Fundamental das Hipersuperfícies (ver por exemplo [26]) para obter a existência e a unicidade de tal imersão. Prosseguindo vamos notar que um cálculo direto mostra que H satisfaz a equação

$$2H\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_{23},$$

isto mostra que H é a curvatura média desta imersão. \square

Quando a imersão é mínima, então $K = 1 - |\nabla\beta + e_1|^2$, como já foi provado em [39] e também os seguintes dois corolários, cujas demonstrações seguem imediatamente do Corolário 3 em [34] e do Teorema 4.2 acima.

Corolário 4.3 *O toro de Clifford é a única superfície compacta mínima em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato constante.*

Corolário 4.4 *O toro de Clifford é a única superfície compacta mínima em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato β satisfazendo, $|\beta| < \frac{\pi}{2}$.*

O próximo resultado relaciona o ângulo de contato da superfície com o operador de Weingarten da imersão.

Proposição 4.2 *Se M^2 é uma superfície imersa em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato constante β , então*

$$\sin \beta \langle \mathcal{A}X, X \rangle = \cos \beta \langle D_X e_2, X \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M^2)$, onde D é a derivada covariante de M^2 e \mathcal{A} denota o operador de Weingarten da imersão.

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Observemos que a Proposição 4.2, juntamente com a equação de Gauss e o Corolário 4.1, provam o resultado seguinte.

Corolário 4.5 *Se $M^2 \in \mathcal{C}$ tem ângulo de contato constante $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, então*

$$\sin \beta = \pm \langle ie_1, e_2 \rangle,$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de TM^2 com $e_1 \in \delta$.

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial móvel em \mathbb{S}^3 adaptado a M^2 , com $e_1 \in \delta$. Então $\cos \beta = \langle e_2, \xi \rangle$ e $\sin \beta = \langle e_3, \xi \rangle$. Como $\xi = iz$ é normal a δ_z podemos escrever

$$\xi = \sin \beta e_3 + \cos \beta e_2.$$

Por outro lado, usando que D é a derivada covariante de M^2 e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{e_3}$ é o operador de Weingarten da imersão, vamos ter para $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\bar{D}_X \xi = \sin \beta \bar{D}_X e_3 + \cos \beta \bar{D}_X e_2. \quad (4.23)$$

Portanto, obtemos

$$\langle \bar{D}_X \xi, X \rangle = -\sin \beta \langle \mathcal{A}X, X \rangle + \cos \beta \langle D_X e_2, X \rangle.$$

Como $\tilde{D}_X \xi = iX$, segue-se da equação (4.3) que $\langle \bar{D}_X \xi, X \rangle = 0$, logo

$$\sin \beta \langle \mathcal{A}X, X \rangle = \cos \beta \langle D_X e_2, X \rangle, \quad (4.24)$$

que prova a Proposição 4.2.

Finalmente, a equação de Gauss juntamente com o Corolário 4.1 e a equação (4.24) mostram que

$$\langle \mathcal{A}e_1, e_2 \rangle^2 = 1. \quad (4.25)$$

Agora, considerando $X = e_1$ na equação (4.23) vamos ter

$$ie_1 = \sin \beta \bar{D}_{e_1} e_3 + \cos \beta \bar{D}_{e_1} e_2,$$

isto implica que

$$\langle ie_1, e_2 \rangle = -\sin \beta \langle \mathcal{A}e_1, e_2 \rangle.$$

4.2 A curvatura gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em \mathbb{S}^3

Conseqüentemente, concluímos por (4.25) que

$$\sin \beta = \pm \langle ie_1, e_2 \rangle,$$

como queríamos. □

Finalizando este capítulo veremos dois exemplos, que já são conhecidos na literatura (ver [3]), os quais são suficientes para consolidarmos os resultados obtidos acima.

Exemplo 4.1 *Seja $w \in \mathbb{C}^2$ um vetor unitário fixado e c um número real tal que $|c| < 1$. Vamos considerar a seguinte superfície em \mathbb{S}^3 ,*

$$\mathbb{S}_{w,c}^2 = \{z \in \mathbb{S}^3 : (z, w) = c\}.$$

Então, a aplicação normal de Gauss $N : \mathbb{S}_{w,c}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ é dada por $N(z) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(w - cz)$. Logo a curvatura média H e o ângulo de contato β desta superfície são dados por $H = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ e $\sin \beta(z) = \langle N, iz \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \langle w, iz \rangle$. Por exemplo, tomando $c = 0$ e $w = (0, 0, 0, 1)$, vemos que $\mathbb{S}_{w,c}^2$ é uma esfera totalmente geodésica em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato satisfazendo $\sin \beta(z) = x_3$, onde $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Exemplo 4.2 *Agora vamos considerar a conhecida superfície de Clifford em \mathbb{S}^3 . Dado um número real $r \in (0, 1)$, definimos*

$$M^2 = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 = r^2, |z_2|^2 = 1-r^2\} \subset \mathbb{S}^3.$$

Então, $N(z_1, z_2) = (\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} z_1, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} z_2)$ define a aplicação normal de Gauss em M^2 . Logo, $H = \frac{2r^2-1}{2r\sqrt{1-r^2}}$ e $\sin \beta(z) = \langle N, iz \rangle = 0$, para todo $z \in M^2$. Assim M^2 tem curvatura média constante e ângulo de contato também constante $\beta = 0$. Além disso, $z^\perp \in T_z M^2$ para todo $z \in M^2$.

Bibliografia

- [1] AEBISCHER, B. et al. Symplectic geometry. *An introduction based on the seminar in Bern 1992*. Basel: Progress in Mathematics, 1994. (Birkhauser Verlag, v. 124)
- [2] ALENCAR, H. ; CARMO, M. do. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proc. of the Amer. Mathematical Society*, v. 120, n. 4, p. 1223-1229, 1994.
- [3] ALÍAS, L.J. ; BRASIL, A. ; PERDOMO, O. A characterization of quadric constant mean curvature hypersurfaces of spheres. *J. Geom Anal.*, v. 18, p. 687-703, 2008.
- [4] ALÍAS, L.J. On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, v. 47, p. 39-61, 2006.
- [5] ALÍAS, L.J. ; MARTÍNEZ, S.C.G. On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 363, p. 579-587, 2010.
- [6] ALMEIDA, S.C. ; BRASIL, A. ; MONTES, R. $H(r)$ constant surfaces in S^3 with constant contact angle. Preprint, 2010.
- [7] AQUINO, C. ; BARROS, A. ; RIBEIRO Jr., E. Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results in Math.*, v. 60, p. 245-254, 2011.
- [8] BAIRD, P. ; DANIELO, L. Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, v. 608, p. 65-71, 2007.

BIBLIOGRAFIA

- [9] BARROS, A. ; BATISTA, R. ; RIBEIRO, Jr. Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient. Preprint, 2012.
- [10] BARROS, A. ; BATISTA, R. ; RIBEIRO Jr., E. Rigidity of gradient almost Ricci solitons. *To appear on Illinois Journal of Mathematics*, 2012.
- [11] BARROS, A. ; RIBEIRO Jr., E. Some characterizations for compact almost Ricci solitons. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, v. 140, p. 1033-1040, 2012.
- [12] BARROS, A. ; RIBEIRO Jr., E. Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications. *Glasgow Math. J.*, v. 54, p. 213-223, 2012.
- [13] BARROS, A. ; RIBEIRO Jr., E. Characterizations and integral fomulae for generalized m -quasi-Einstein metrics. Preprint, 2011.
- [14] BARROS, A. ; RIBEIRO Jr., E. ; SILVA, J.F. Uniqueness of quasi-Einstein metrics on 3-dimensional homogeneous Riemannian manifolds *arXiv math/1205.6168v2 [math.DG]*, 2012.
- [15] BERGER, M. ; GAUDUCHON, P. ; MAZET, E. *Le Spectre d'une Varièètè Riemannienne*. New York: Springer-Verlag, 1971. (Lectures Notes in Mathematics, v. 194)
- [16] CAMINHA, A. ; CAMARGO, F. ; SOUZA, P. Complete foliations of space forms by hypersurfaces. *Bull. Braz. Math Soc.*, v. 41, p. 339-353, 2010.
- [17] CAO, H.D. Recent progress on Ricci soliton. *Adv. Lect. Math. (ALM)*, v. 11, p. 1-38, 2009.
- [18] CASE, J. ; SHU, Y. ; WEI, G. Rigity of quasi-Einstein metrics. *Diff. Geom. Appl.*, v. 29, p. 93-100, 2011.
- [19] CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor. *To appear on Math. Z.*, arXiv: 1012.5405v3 [math.DG], 2011.
- [20] CARMO, M. do. *Differential forms and applications*. New York: Springer-Verlag, 1994.

BIBLIOGRAFIA

- [21] CHEN, B. Strong uniqueness of the Ricci flow. *J. Diff. Geom.*, v. 82, n. 2, p. 363-382, 2009.
- [22] CHENG, S. ; YAU, S. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, v. 225, p. 195-204, 1977.
- [23] CHERN, S.S. ; CARMO, M. do ; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *Functional Analysis and Related Fields*(F. Browder, ed.), Springer-Verlag, Berlin, p. 59-75, 1970.
- [24] CHOW, B. ; LU, P. ; NI, L. *Hamilton's Ricci flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77)
- [25] CHOW, B. ; KNOPF, D. *The Ricci flow: an introduction*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004 (Mathematical surveys and monographs, v. 110)
- [26] DAJCZER, M. et al. *Submanifolds and isometric immersions*. Houston: Publish or Perish, 1990.
- [27] EJIRI, N. A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, v. 33, p. 261-266, 1981.
- [28] FERNADEZ, L.M. ; GARCIA, R.E. Maximum principles and gradient Ricci soliton. *Journal of Differential Equations*, v. 251, p. 73-81, 2011.
- [29] FRANKEL, T. On the fundamental group of a compact minimal submanifold. *Ann. of Math.*, v. 83, p. 68-73, 1966.
- [30] HAMILTON, R.S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Diff. Geom.*, v. 17, n. 2, p. 255-306, 1982.
- [31] HAMILTON, R.S. The formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in Differential Geometry* (Cambridge, MA, 1993), v. 2, p. 7-136, International Press, Cambridge, MA, 1995.

BIBLIOGRAFIA

- [32] HOFFMAN, D. Surfaces in constant curvature manifolds with parallel mean curvature vector field. *Amer. Math. Soc.*, v. 78, p. 247-250, 1972.
- [33] KUIPER, N. On conformally flat spaces in the large. *Ann. of Math.*, v. 50, p. 916-924, 1949.
- [34] LAWSON, H.B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.*, v. 89, n. 2, p. 187-197, 1969.
- [35] LOPEZ, R. ; MONTIEL, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. *Calc. Var.*, v. 8, p. 177-190, 1999.
- [36] LOTT, J. On the long time behavior of type-III Ricci flow solutions. *Mathematische Annalen*, v. 339, p. 627-666, 2007.
- [37] MARTINET, J. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. *Springer Lecture Notes in Math.*, v. 209, p. 142-163, 1971.
- [38] MASTROLIA, P. ; RIGOLI, M. ; RIMOLDI, M. Some geometric analysis on generic Ricci soliton. Preprint, arXiv: 1107.2829v1 [math.DG], 2011.
- [39] MONTES, R. ; VERDERESI, J.A. Minimal surfaces in \mathbb{S}^3 with constant contact angle. *Monatsh Math.*, v. 157, p. 379-386, 2009.
- [40] MONTIEL, S. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 37, p. 909-917, 1988.
- [41] NABER, A. Noncompact shrinking 4-solitons with nonnegative curvature. Preprint, arXiv 0710.5579v3 [math.DG], 2011.
- [42] NAGANO, T. ; YANO, K. Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. *Ann. of Math.*, v. 69, p. 451-461, 1959.
- [43] NOMIZU, K. ; SMYTH, B. A formula of Simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature. *J. Diff. Geom.*, p. 367-377, 1969.

BIBLIOGRAFIA

- [44] OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, v. 14, p. 333-340, 1962.
- [45] OBATA, M. ; YANO, K. Sur le groupe de transformations conformes d'une variété de Riemann dont le scalaire de courbure est constant. *C.R. Acad. Sc. Paris*, v. 260, p. 2698-2700, 1965.
- [46] OBATA, M. ; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. *J. Diff. Geom.*, v. 4, p. 53-72, 1970.
- [47] OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, v. 19, p. 205-214, 1976.
- [48] PERELMAN, G.Ya. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv math/0211159 [math.DG]*, 2002.
- [49] PIGOLA, S. ; RIGOLI, M. ; RIMOLD, M. ; SETTI, A. Ricci almost solitons. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*, v. 10, n. 4, p. 757-799, 2011.
- [50] PETERSEN, P. ; WYLIE, W. Rigidity of gradient Ricci solitons. *Pacific J. of Math.*, v. 241, n. 2, p. 329-345, 2009.
- [51] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sc. Math.*, v. 117, p. 217-239, 1993.
- [52] SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, v. 88, n. 2, p. 62-105, 1968.
- [53] SHI, W.-X. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.*, v. 30, n. 1, p. 223-301, 1989.
- [54] TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 117, p. 251-275, 1965.
- [55] YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry*. New York: Marcel Dekker, 1970.

BIBLIOGRAFIA

- [56] WU, B.Ye. On hypersurfaces with two distinct principal curvatures in a unit sphere. *Diff. Geom. Appl.*, v. 27, p. 623-634, 2009.
- [57] YAU, S.T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.