UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO PEDRO DE AQUINO

SOBRE RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS

Fortaleza
2011

CÍCERO PEDRO DE AQUINO

SOBRE RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Fortaleza
2011

.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A669s Aquino, Cícero Pedro de
. Sobre rigidez de hipersuperfícies completas / Cícero Pedro de Aquino.
. - 2011, 77 f.: enc. : 31 cm

. Tese(doutorado)-Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
. Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em
. Matemática, Fortaleza, 2011.
. Área de Concentração: Geometria Diferencial
. Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

. 1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 1. Título.
. CDD 516.36

Dedico este trabalho aos meus pais Pedro Tomaz e Raimunda Maria e a minha amada esposa Jardênia Goes.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de ser capaz de expressar em palavras a imensa gratidão que tenho por todos aqueles que contribuíram para que eu completasse com êxito essa etapa em minha vida. Em primeiro lugar agradeço a Deus pela permissão de chegar até aqui e por ser razão de tudo para mim. Aos meus pais Pedro Tomaz e Raimunda Maria agradeço imensamente por todo amor, carinho, atenção e incentivo durante toda a minha vida. À minha esposa Jardênia Goes, por quem tenho um amor intrínseco, agradeço por toda a dedicação, carinho, amor e compreensão durante este tempo. Sua presença ao meu lado, em todos os momentos, foi imprescindível para que eu chegasse até aqui.

Ao Prof. Abdênago Alves de Barros agradeço pelo voto de confiança no meu trabalho, pela compreensão nos momentos em que estive ausente de minhas atividades acadêmicas por conta de problemas em minha vida pessoal e, sobretudo, pela ótima escolha do tema da minha tese que, além de ser muito motivador, ainda proporcionou uma excelente parceria de trabalho com o Prof. Henrique Fernandes de Lima, de quem tenho a honra de ser amigo e a quem agradeço fortemente pela colaboração que resultou numa parte essencial desta tese. Precisamente, os capítulos 4 e 5 correspondem aos nossos primeiros trabalhos em parceria e foram obtidos durante duas visitas minhas ao Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Campina Grande. Aproveito aqui a oportunidade para agradecer aos professores daquela instituição pela hospitalidade nesse efêmero período.

Aos Professores Antonio Caminha, Renato Tribuzy, Rosa Chaves e Fernanda Camargo agradeço não apenas por terem aceito o convite para compor a banca da minha defesa, como também pelas valiosas sugestões e correções apontadas neste trabalho.

Ao Prof. Gervásio Colares agradeço imensamente pelos seus elogios e suas palavras entusiasmadas após um seminário por mim ministrado durante a disciplina Relatividade Geral. Naquele semestre eu estava vivendo o momento mais difícil de minha vida pessoal, e mesmo alheio ao que ocorrera comigo, soube me dizer exatamente o que eu precisava ouvir. Aquelas palavras serviram para mim como um alento para minha dor e um alicerce seguro onde edifiquei a confiança de que eu poderia concluir meu trabalho. Serei eternamente grato por isto.

A presença de meus irmãos Renê Aquino e Antônio Aquino, este último acompanhado de sua esposa Marlene Lima e de sua filha Luana Lima de Aquino, em minha defesa foi para mim extremamente importante. A vocês agradeço não apenas por isto, mas por todo incondicional apoio, amizade e incentivo durante este tempo. Estas mesmas palavras eu estendo aos meus irmãos França, Marilene, Mariinha, Helena, Antonia e José Pedro.

Agradeço a Deus por ter convivido algum tempo com minha avó materna Maria Domingas (madinha), a quem Deus chamou ao Seu encontro quando eu iniciava essa caminhada. Seus ensinamentos e sua conduta de vida são algo cada vez mais raro nesse mundo em que vivemos.

Aproveitando o ensejo proporcionado pelo comentário anterior, quero destacar aqui a minha gratidão a Deus por não apenas ter conhecido, mas me tornado genro de José Almir e Luzia Goes, cuja família, em perfeita sintonia com os valores que me foram ensinados por meus pais, eu agradeço pelos bons momentos que compartilhamos nesse período e também pelo apoio recíproco demonstrado nos momentos difíceis. Num desses momentos, compartilhando a dor de minha esposa pela perda de seu pai, recebi todo apoio e condições para prosseguir neste trabalho na cidade de Santa Luz-PI, onde esta tese foi escrita. Me faltam palavras para agradecer à Sr^a Etelvina por transformar um dos cômodos de sua casa num escritório onde eu pudesse continuar a redação desse texto e a Almir Filho e sua esposa Iratânia por me acolherem em sua casa durante mais de um mês.

Aos amigos do mestrado e doutorado da Pós-Graduação em Matemática da UFC, agradeço pelo convívio harmonioso durante esse tempo. Particularmente, aos amigos Flávio França e Jonatan Floriano agradeço também pela excelente parceria de trabalho nos anos iniciais do doutorado. Ao amigo Jobson Oliveira agradeço pela imensa paciência demonstrada em assistir às versões preliminares de alguns resultados desta tese.

À Prof^a. Maria Silvana que, mesmo distante, sempre esteve presente, agradeço pela amizade, apoio e incentivo constantes.

À secretária Andrea Costa agradeço pela sua imensa simpatia e pela sua eficiência em resolver problemas de natureza acadêmica.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí, agradeço pelo irrestrito apoio durante esses anos em que estive afastado.

À CAPES agradeço pelo auxílio financeiro durante metade do doutorado.

Por fim, agradeço a Deus por estar sempre nos guiando em todos os caminhos, principalmente naqueles que não gostaríamos de passar.

"Percebo que o tempo já não passa
Você diz que não tem graça amar assim
Foi tudo tão bonito, mas voou pro infinito
Parecido com borboletas de um jardim.

Agora você volta
E balança o que eu sentia por outro alguém
Dividido entre dois mundos
Sei que estou amando mas ainda não sei quem.

Não sei dizer o que mudou
Mas nada está igual
Numa noite estranha, a gente se estranha e fica mal
Você tenta provar que tudo em nós morreu
Borboletas sempre voltam
E o seu jardim sou eu."

Victor e Leo
Borboletas.

Letícia

Sua canção favorita é para mim uma doce lembrança de sua alegria. Você, agora um anjinho no céu, estará sempre no coração do seu tio e padrinho.

RESUMO

O propósito desta tese é obter teoremas de caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço completas isometricamente imersas num ambiente semi-Riemanniano mediante alguma restrição sobre a aplicação de Gauss ou sobre as r-curvaturas médias destes objetos. Iniciamos nosso trabalho dando condições necessárias para garantir a umbilicidade de hipersuperfícies imersas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ com aplicação de Gauss prescrita. Em seguida, obtemos alguns resultados de unicidade de hipersuperfícies completas com curvaturas de ordem superior limitadas num ambiente do tipo $\varepsilon\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ supondo uma restrição apropriada sobre o ângulo normal da hipersuperfície em questão. Na última parte deste trabalho, obtemos resultados tipo-Bernstein considerando gráficos verticais completos com curvatura média constante imersos num produto warped Riemanniano $I \times_f M^n$, onde supomos uma conhecida condição de convergência sobre a curvatura seccional da fibra M^n.

Palavras-chave: Espaço Hiperbólico, Aplicação de Gauss, Produto Warped, Ângulo Normal.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to obtain characterization theorems of complete spacelike hypersurfaces isometrically immersed in a semi-Riemannian ambient space under some restrictions on the Gauss mapping or about the r-mean curvatures of these objects. We start our work by providing necessary conditions to ensure the umbilicity of immersed hypersurfaces in the hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$ with prescribed Gauss mapping. Next, we obtain some uniqueness results of complete hypersurfaces with bounded higher order mean curvatures in a space $\varepsilon\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ where we suppose an appropriate condition on the normal angle of the hypersurface. In the last part of this work, we obtain Bernstein-type results concerning to complete vertical graphs with constant mean curvature immersed in a a Riemannian warped product $I \times_f M^n$, where we suppose a well known convergence condition on the sectional curvature of the fibre M^n.

Keywords: Hyperbolic Space, Gauss Mapping, Warped Product, Normal Angle.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo da geometria da aplicação normal de Gauss de hipersuperfícies tipo-espaço isometricamente imersas numa variedade semi-Riemanniana tem profundas implicações sobre a geometria da própria hipersuperfície e ocupa lugar de destaque na literatura. Podemos citar, por exemplo, a caracterização dos hiperplanos espaciais como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+2}$ com curvatura média constante e tais que sua imagem pela aplicação normal de Gauss esteja contida numa bola geodésica do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, que foi obtida de maneira simultânea e independente por R. Ayama [3] e Y.L. Xin [60]. Considerando este mesmo problema para o caso de uma hipersuperfície com um fim e possuindo uma curvatura média de ordem superior constante e não-nula, destacamos o resultado de H.F. de Lima em [31], no qual está provado que a hipersuperfície tem fim não-divergente. Com respeito ao caso Riemanniano, dentre os vários resultados interessantes, podemos citar o trabalho de D. Hoffman, R. Osserman e R. Schoen [38], no qual os autores demonstraram que se a imagem da aplicação de Gauss de uma superfície completa com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ está contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^2$, então a superfície é um plano ou um cilindro. Indicamos ao leitor o livro de Y. Xin [61] onde há uma seção dedicada ao estudo da geometria da aplicação normal de Gauss. Ainda no contexto Riemanniano, ressaltamos o trabalho de K. Nomizu e B. Smyth [50], no qual as esferas geodésicas estão caracterizadas como as únicas hipersuperfícies completas da esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ que têm imagem pela aplicação de Gauss contida numa esfera geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Iniciamos nosso trabalho caracterizando hipersuperfícies completas, com curvatura média constante, imersas isometricamente numa bola geodésica do espaço hiperbólico mediante uma restrição apropriada sobre sua imagem pela aplicação normal de Gauss, usando como ferramentas a caracterização das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas do espaço de de Sitter, obtida por S. Montiel em [45], e o princípio do máximo de Omori-Yau (cf. [53] e [65]). Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa isometricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante $H \neq 0$. Suponha que Σ^n está contida numa bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica.*

No contexto do resultado anterior, nosso próximo resultado explora a dualidade natural existente entre as folheações do espaço hiperbólico e do espaço de de Sitter por hipersuperfícies totalmente umbílicas (cf. R. López e S. Montiel [43]). Em outras palavras, provamos o seguinte.

Teorema 1.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa com curvatura média constante H, isometricamente imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Assuma que Σ^n esteja entre duas horoesferas (hiperesferas) determinadas por um vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ tipo-luz (tipo-espaço). Se $N(\Sigma)$ está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por a, então Σ^n é uma horoesfera (hiperesfera).*

No caso 2-dimensional, obtemos um resultado de rigidez impondo uma condição sobre a curvatura seccional de uma superfície Σ^2 imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Tal resultado foi obtido usando um argumento de parabolicidade devido a A. Huber [40].

Teorema 1.3. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathbb{H}^3$ uma superfície completa, orientável com curvatura Gaussiana não-negativa, isometricamente imersa em $\mathbb{H}^3$ e contida na região entre as horoesferas L_β e L_τ, onde $0 < \beta < \tau$. Suponha que $N(\Sigma)$ esteja contida no fecho do domínio interior determinado pelo plano $\mathcal{L}_{-\beta}$ de $\mathbb{S}_1^3$. Se a curvatura média H de Σ^2 satisfaz*

$$H \geq \frac{\tau}{\beta},$$

então Σ^2 é uma horoesfera.

No artigo [50], K. Nomizu e B. Smyth caracterizaram as esferas geodésicas como as únicas hipersuperfícies fechadas com curvatura média constante isometricamente imersas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ que têm imagem pela aplicação normal de Gauss contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$. O nosso resultado seguinte é uma versão hiperbólica desse teorema. Nele seguimos a nomenclatura introduzida por J.A. Aledo, L.J. Alías e A. Romero em [7], onde os autores definem o que venha a ser um hemisfério do espaço de de Sitter.

Teorema 1.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura média constante H, isometricamente imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

No caso de curvatura escalar constante, obtemos o seguinte resultado no contexto do teorema anterior.

Teorema 1.5. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura escalar constante $\mathrm{R} > n(1-n)$ isometricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n estiver contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera totalmente umbílica.*

Usando um resultado clássico da teoria de campos conformes em variedades Riemannianas fechadas, obtemos uma extensão do Teorema 2 de [50].

Teorema 1.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada isometricamente imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $\mathrm{R} = n(n-1)$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n estiver contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera totalmente geodésica.*

Em [15], L.J. Alías, A. Brasil e O. Perdomo caracterizam esferas geodésicas e toros de Clifford como as únicas hipersuperfícies completas da esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante e tais que suas funções suporte têm uma relação de dependência linear para algum vetor fixo do ambiente. Finalizamos este capítulo estabelecendo a versão desse resultado no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 1.7. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ *uma hipersuperfície completa com curvatura média constante* H *imersa isometricamente no ambiente* $\overline{M}^{n+1}$ *de curvatura seccional constante* $c \in \{-1, 0\}$*. Se* $l_a = \lambda f_a$ *para algum vetor não-nulo* $a \in \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ *e algum número real* λ*, então* Σ^n *é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou*

(i) $\mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2})$*, para algum* $\varrho > 0$ *e algum* $1 \leq k \leq n-1$*, quando* $c = -1$*;*

(ii) $\mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{R}^{n-k}$*, para algum* $\varrho > 0$ *e algum* $1 \leq k \leq n-1$*, quando* $c = 0$*.*

Na segunda parte desta tese, que corresponde ao capítulo 4, nosso objeto de estudo são hipersuperfíes completas com curvaturas de ordem superior H_r limitadas, imersas numa classe de produtos warped semi-Riemannianos que inclui o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e o Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$. Usando uma restrição geométrica sobre a hipersuperfície e aplicando um princípio do máximo generalizado devido a A. Caminha e H.F. de Lima [26] obtemos nosso primeiro resultado de unicidade.

Teorema 1.8. *Sejam* M^n *uma variedade Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional não-negativa e* $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura seccional não-negativa e menor do que ou igual a 1, e distante do infinito futuro de* $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$*. Suponha que existam constantes positivas* α *e* β *tais que* $\alpha \leq H_r \leq H_{r+1} \leq \beta$*, para algum* $0 \leq r \leq n-1$*. Se o ângulo hiperbólico normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cosh\theta \leq \inf_{\Sigma} \frac{H_{r+1}}{H_r},$$

então Σ^n *é um slice de* $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$*.*

O teorema precedente tem como consequência imediata o seguinte.

Corolário 1.9. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa e distante do infinito futuro de* $\mathcal{H}^{n+1}$*. Suponha que exista uma constante real* β *tal que* $1 \leq H \leq \beta$*. Se o ângulo hiperbólico normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cosh\theta \leq \inf_{\Sigma} H,$$

então Σ^n *é um hiperplano.*

No caso Riemanniano, obtemos uma versão dual do Teorema 1.8.

Teorema 1.10. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional nula e $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície completa e conexa com curvatura seccional não-negativa e distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Suponha que existam constantes positivas α e β satisfazendo $\alpha \leq H_{r+1} \leq H_r \leq \beta$, para algum $0 \leq r \leq n-1$. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup_{\Sigma} \frac{H_{r+1}}{H_r},$$

então Σ^n é um slice de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

Usando o princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, estabelecemos o seguinte resultado, que estende o Teorema 3.3 de H.F. de Lima [33].

Teorema 1.11. *Sejam M^n uma forma espacial Riemanniana de curvatura seccional nula e $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície completa e conexa com segunda forma fundamental limitada e distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Suponha que a curvatura média H de Σ^n satisfaz $\alpha \leq H \leq 1$, para alguma constante positiva α. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup_{\Sigma} H,$$

então Σ^n é um slice de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

No quinto capítulo deste trabalho estudamos gráficos verticais completos Σ^n imersos num produto warped Riemanniano $I \times_f M^n$, onde supomos uma condição de convergência sobre a fibra Riemanniana M^n que foi estabelecida por S. Montiel em [48]. Usando um resultado devido a K. Akutagawa [4], provamos o seguinte.

Teorema 1.12. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ um produto warped que satisfaz a condição de convergência*

$$K_M \geq \sup_I (f'^2 - ff'')$$

e cuja fibra Riemanniana M^n tem curvatura seccional não-positiva. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante

H e segunda forma fundamental A limitada. Suponha que Σ^n está entre dois slices e que

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f}. \tag{1.1}$$

Se a função altura h de Σ^n satisfaz

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(\inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right)^{\beta}, \tag{1.2}$$

para algumas constantes positivas α e β, então Σ^n é um slice.

Como consequência imediata da caracterização dos modelos warped do espaço hiperbólico, os seguintes resultados são provados.

Corolário 1.13. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$ e segunda forma fundamental limitada. Se Σ^n está entre duas horoesferas e sua função altura h satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(1 - H\right)^{\beta},$$

para constantes positivas α and β, então Σ^n é uma horoesfera.

Corolário 1.14. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante H e segunda forma fundamental limitada. Suponha que Σ^n está entre duas hiperesferas e que*

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma}(\tanh t).$$

Se a função altura h de Σ^n satisfaz

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(\inf_{\Sigma} \tanh t - H \right)^{\beta},$$

para constantes positivas α e β, então Σ^n é uma hiperesfera.

Corolário 1.15. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$ e segunda forma fundamental limitada. Se existir uma constante real C tal que a função altura h de Σ^n satisfaça*

$$h \leq C - \log\left(1 + \langle N, \partial_t \rangle\right),$$

e, além disso,

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(1 - H\right)^{\beta},$$

para constantes positivas α e β, então Σ^n é uma horoesfera.

Finalizamos este trabalho com o seguinte teorema que estabelece a rigidez dos slices de um espaço produto mediante uma restrição apropriada sobre o ângulo normal.

Teorema 1.16. *Seja* $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ *um espaço produto, cuja fibra Riemanniana* M^n *ou é isométrica a* $\mathbb{S}^n$ *ou é flat. Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *um gráfico vertical completo com curvatura média constante* H *e segunda forma fundamental* A *limitada. Se o ângulo normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup\left\{1 - |A|^2, \frac{1}{3}\right\}, \tag{1.3}$$

então Σ^n *é um slice.*

Segue imediatamente do resultado anterior o seguinte.

Corolário 1.17. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *um gráfico vertical completo com curvatura média constante e curvatura escalar* R *limitada inferiormente. Se o ângulo normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup\left\{1 + \mathrm{R}, \frac{1}{3}\right\},$$

então Σ^n *é um hiperplano.*

Capítulo 2

Preliminares

O objetivo deste capítulo é fixar a notação a ser usada e estabelecermos alguns resultados que serão imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho. Indicamos ao leitor a referência [54] para maiores detalhes.

2.1 Variedades Lorentzianas

Nesta seção, apresentaremos alguns fatos básicos da teoria de variedades de Lorentz. Para tanto, iniciamos com a seguinte definição.

Definição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita n e $b = \langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e simétrica. Dizemos que b é*

(i) Positiva definida*, quando $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.*

(ii) Negativa definida*, quando $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.*

(iii) Não-degenerada*, quando $\langle v, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$ implicar $v = 0$.*

Dizemos ainda que um subespaço W de V é não-degenerado *quando a restrição $b_{|W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$ for não-degenerada.*

Um importante conceito é o de *índice* de uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ que é definido como sendo a maior dimensão de um subespaço W de V de modo que $b_{|W\times W}$ seja negativa-definida. Denotaremos por ν_b o índice de b.

Sejam b uma forma bilinear simétrica sobre V e W um subespaço de V. O complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W em V é definido por

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ ; \forall\, w \in W\}.$$

Os seguintes resultados, que são importantes propriedades inerentes a uma forma bilinear e simétrica, podem ser encontrados em B. O'Neill (cf. [54], Lemas 1.19, 1.22 e 1.23).

Lema 2.2. *Sejam b uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial de dimensão finita V e W um subespaço de V. Então:*

(i) *b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e portanto a toda) base de V for invertível;*

(ii) *Se W é não-degenerado então $(W^{\perp})^{\perp} = W$ e*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp}) \ ;$$

(iii) *W é não-degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$. Em particular, W é não-degenerado se, e somente se, $W^{\perp}$ for não-degenerado.*

Definição 2.3. *Seja $b = \langle\ ,\ \rangle$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada sobre o espaço vetorial real V. Dizemos que $v \in V \setminus \{0\}$ é:*

(i) Tipo-tempo, *quando $\langle v, v \rangle < 0$;*

(ii) Tipo-luz, *quando $\langle v, v \rangle = 0$;*

(iii) Tipo-espaço, *quando $\langle v, v \rangle > 0$.*

De maneira similar, um subespaço não-degenerado W de V é tipo-tempo, tipo-luz ou tipo-espaço, quando ocorrer $\langle w, w \rangle < 0$, $\langle w, w \rangle = 0$ ou $\langle w, w \rangle > 0$ para todo $w \in W$, respectivamente. Seja $v \in V \setminus \{0\}$ um vetor tipo-tempo ou tipo-espaço. Definimos o *sinal* ε_v de v pondo

$$\varepsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A *norma* de $v \in V$ é definida por $|v| = \sqrt{\varepsilon_v \langle v, v \rangle}$. Dizemos que v é um vetor *unitário* se $|v| = 1$. É possível mostrar que V admite uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ que é ortonormal com respeito a b, ou seja, tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$, para todos

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$, onde ε_i denota o sinal de e_i (cf. [54], Lema 2.24). Desse modo, a expansão ortonormal de $v \in V$ com respeito à base $\{e_i\}$ é dada por

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Sejam $b : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e não-degenerada com $\nu_b = 1$ e $\mathcal{T} = \{u \in V;\ \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o *cone tipo-tempo (ou cone temporal) de V contendo u* por $C(u) = \{v \in \mathcal{T};\ \langle u, v \rangle < 0\}$.

Lema 2.4. *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então:*

(i) *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e $V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp}$. Assim, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$;*

(ii) *$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se, e somente se, v e w forem colineares;*

(iii) *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Portanto, $w \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(w) \Leftrightarrow C(v) = C(w)$.*

Definição 2.5. *Um tensor métrico sobre uma variedade diferenciável $\overline{M}$ é um $2-$tensor covariante e simétrico $\overline{g}$ sobre $\overline{M}$, tal que $\overline{g}_p$ é não-degenerada para todo $p \in \overline{M}$. Uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ é um par $(\overline{M}, \overline{g})$, onde $\overline{M}$ é uma variedade diferenciável e $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ é um tensor métrico de índice constante sobre $\overline{M}$.*

Observando que o índice $\nu_{\overline{g}} : \overline{M} \to \mathbb{N}$ é uma função semi-contínua inferiormente, segue que ele é constante nas componentes conexas de $\overline{M}$. Por simplicidade, denotaremos o par $(\overline{M}, \overline{g})$ por $\overline{M}$. O tensor métrico $\overline{g}$ de $\overline{M}$ será denotado por $\langle\ ,\ \rangle$ e ν representará o índice de $\overline{g}$.

Sejam $p \in \overline{M}$ e $v, w \in T_p\overline{M}$ tais que o subespaço $2-$dimensional de $T_p\overline{M}$, por eles gerado seja não-degenerado. É imediato do item (i) do Lema 2.2 que

$$\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0.$$

Isto fundamenta a seguinte definição.

Definição 2.6. *Sejam $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e σ um subespaço $2-$dimensional não-degenerado de $T_p\overline{M}$. A curvatura seccional de $\overline{M}$ segundo σ é o número*

$$K(\sigma) = \frac{\langle \overline{R}(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

onde $\overline{R}$ denota o tensor de curvatura de $\overline{M}$.

Definição 2.7. *Dizemos que a variedade semi-Riemanniana* $\overline{M}$ *tem* curvatura seccional constante *quando, para cada* $p \in \overline{M}$*,* $K(\sigma_1) = K(\sigma_2)$ *para quaisquer subespaços não-degenerados* σ_1 *e* σ_2 *em* $T_p\overline{M}$*.*

Observação 2.8. *O teorema de Schur nos assegura ainda que se* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante e* $\dim(\overline{M}) \geq 3$*, então o valor de* $K(\sigma)$ *também independe do ponto* $p \in \overline{M}$ *escolhido.*

É possível mostrar que se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, então seu tensor de curvatura $\overline{R}$ se expressa como (cf. [54], Corolário 3.43)

$$\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X], \tag{2.1}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.
Uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu = 0$ é simplesmente uma variedade Riemanniana. Quando $\nu = 1$, $\overline{M}$ é denominada uma variedade Lorentziana (ou *espaço-tempo*).

Definição 2.9. *Seja* $\overline{M}$ *uma variedade Lorentziana. Uma aplicação* $\mathcal{C}$*, que associa a cada* $p \in \overline{M}$ *um cone tipo-tempo* $\mathcal{C}(p)$ *em* $T_p\overline{M}$*, é suave quando, para cada* $p \in \overline{M}$*, existem uma vizinhança aberta* U *de* p *e* $V \in \mathfrak{X}(U)$*, tais que* $V(q) \in \mathcal{C}(q)$ *para todo* $q \in U$*. Quando uma tal aplicação* $\mathcal{C}$ *existe, dizemos que* $\overline{M}$ *é* temporalmente orientável.

Proposição 2.10. *Uma variedade Lorentziana* $\overline{M}$ *é temporalmente orientável se, e somente se, existir um campo vetorial tipo-tempo* $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$*.*

Demonstração. Suponha que exista um campo de vetores tipo-tempo K definido sobre $\overline{M}$. Seja $\mathcal{C} : \overline{M} \to T\overline{M}$ a aplicação definida por

$$\mathcal{C}(p) = C(K(p)).$$

Logo $\overline{M}$ é temporalmente orientável. Reciprocamente, seja $\mathcal{C}$ uma orientação temporal de $\overline{M}$. Assim, como $\mathcal{C}$ é suave, cada ponto $p \in \overline{M}$ possui uma vizinhança U em $\overline{M}$, onde está definido um campo de vetores tipo-tempo K_U, com $K_U(q) \in \mathcal{C}(q)$, para cada $q \in U$. Considere agora $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de $\overline{M}$ formada por abertos U_α que cumprem esta condição e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Com isto, o campo vetorial

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}$$

está bem definido sobre $\overline{M}$ e, além disso, é , pelo Lema 2.4, um campo de vetores tipo-tempo. □

Observação 2.11. *A proposição anterior nos permite concluir que é indiferente nos referirmos à função suave $\mathcal{C}$ ou ao campo vetorial tipo-tempo K. Logo, quando $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação $\mathcal{C}$ como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo K a ela correspondente, será denominada uma* orientação temporal *para $\overline{M}$.*

Sejam $\mathcal{C}$ uma orientação temporal para $\overline{M}$ e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $V(q) \in \mathcal{C}(q)$ $(-V(q) \in \mathcal{C}(q))$ para todo $q \in \overline{M}$, dizemos que V *aponta para o futuro* (*aponta para o passado*). Como K é uma orientação temporal para $\overline{M}$, temos, pelo item (*iii*) do Lema 2.4, que um campo vetorial tipo-tempo V sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (passado) se, e somente se, $\langle V, K\rangle < 0$ $(\langle V, K\rangle > 0)$.

2.2 Campos vetoriais conformes

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\overline{g}$. Dizemos que um campo vetorial $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é *conforme* quando

$$\mathcal{L}_K\,\overline{g} = 2\phi\,\overline{g}\,, \tag{2.2}$$

para alguma função suave $\phi : \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{L}_K$ denota a derivada de Lie na direção do campo K. A função ϕ é denominada *fator conforme* de K.

No contexto Riemanniano, uma questão de bastante relevância em meados do século passado, foi a tentativa de vários geômetras de provar que uma variedade Riemanniana compacta e orientada M^n de dimensão $n \geq 3$, admitindo uma métrica de curvatura escalar constante e munida de um campo conforme deve ser isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$. Nesse intuito, muitos resultados interessantes foram obtidos. Indicamos ao leitor o livro de K. Yano [64], onde há uma coletânea de tais resultados. Embora relevantes progressos tenham sido feitos nessa direção, o matemático japonês N. Ejiri respondeu negativamente à esta conjectura construindo uma variedade compacta com uma métrica de curvatura escalar constante e munida de um campo conforme que não é sequer homeomorfa a uma esfera (cf. Teorema 3.4 de [34]).

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos que serão utilizados nos capítulos seguintes desta tese. O primeiro deles é devido a K. Yano e M. Obata [63], onde os autores obtiveram, com uma hipótese apropriada sobre a curvatura escalar, uma caracterização de variedades completas com um campo conforme.

Lema 2.12. *Se uma variedade Riemanniana completa Σ^n com dimensão $n \geq 2$, tensor métrico g e curvatura escalar* R *admite uma função não-constante ρ tal que*

$$\operatorname{Hess}\rho = \frac{1}{n}(\Delta\rho)\, g \quad e \quad \mathcal{L}_{\nabla\rho}\,\mathrm{R} = 0\,,$$

então Σ^n é isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$.

O seguinte resultado, devido a D-S Kim, S-B Kim, Y.H. Kim e S-H Park [41], fornece uma caracterização interessante de hipersuperfícies totalmente umbílicas em um ambiente semi-Riemanniano de curvatura seccional constante, a qual responde afirmativamente a recíproca de um teorema devido a R. Sharma e K. L. Duggal [58].

Lema 2.13. *Seja Σ^n uma hipersuperfície conexa isometricamente imersa num ambiente semi-Riemanniano $\overline{M}^{n+1}(c)$ de curvatura seccional constante c. Suponha que $\overline{M}^{n+1}$ possui um campo conforme K de modo que sua projeção $K^\top$ sobre o fibrado tangente de Σ^n seja um campo conforme em Σ^n. Então, uma das afirmações seguintes é verdadeira:*

(i) *Σ^n é totalmente umbílica;*

(ii) *a restrição de K a Σ^n é um campo tangente a Σ^n.*

Voltando ao contexto geral, exibiremos agora uma classe particular de variedades semi-Riemannianas que é dada pelas variedades Lorentzianas $\overline{M}^{n+1}$ *conformemente estacionárias*, no sentido de que $\overline{M}$ possui um campo de vetores tipo-tempo e conforme K, ou seja, tal que $\mathcal{L}_K\,\overline{g} = 2\phi\,\overline{g}$, para alguma função suave $\phi : \overline{M} \to \mathbb{R}$, onde $\overline{g} = \langle\ ,\ \rangle$ é o tensor métrico de $\overline{M}$. Segue da definição da derivada de Lie de campos de vetores e do seu caráter tensorial que um campo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_V K, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W K\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Um campo vetorial conforme K, com fator conforme ϕ, é dito *fechado* quando sua 1-forma correspondente for fechada. Isto é equivalente a

$$\overline{\nabla}_X K = \phi X, \tag{2.3}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

O resultado que enunciaremos agora é devido a S. Montiel (cf. [47], Proposição 1). Nele percebemos o quanto a presença de um campo conforme e fechado influi na geometria de uma variedade. Em termos mais precisos, temos o seguinte.

Proposição 2.14. *Seja* $(\overline{M}^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle)$ *uma variedade Lorentziana munida de um campo de vetores tipo-tempo* $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *conforme e fechado com fator conforme* ϕ. *Então*

(a) *A distribuição n-dimensional* $\mathcal{D}$ *definida em* $\overline{M}^{n+1}$ *por*

$$p \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\overline{M}; \langle K(p), v\rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(K)$ *tipo-espaço de codimensão* 1, *a qual é orientada por* K. *Além disso, as funções* $\langle K, K\rangle$, $\mathrm{div}K$ *e* $K\phi$ *são constantes em cada folha conexa de* $\mathcal{F}(K)$;

(b) *O campo unitário tipo-tempo* ν *definido por* $\nu = K/|K|$ *em* $\overline{M}$ *satisfaz*

$$\overline{\nabla}_\nu \nu = 0 \quad e \quad \overline{\nabla}_u \nu = \frac{\phi}{|K|}u, \quad se \quad \langle u, \nu\rangle = 0.$$

Portanto, o fluxo do campo ν *é um fluxo geodésico normalizado tipo-tempo o qual leva homoteticamente folhas de* $\mathcal{F}(K)$ *em folhas de* $\mathcal{F}(K)$, *sendo cada folha de* $\mathcal{F}(K)$ *totalmente umbílica com curvatura média constante* $\mathcal{H} = -\phi/|K|$.

Observação 2.15. *No caso em que* $\overline{M}^{n+1}$ *é uma variedade Riemanniana munida com um campo conforme, fechado e não-trivial* K, *é possível mostrar que o conjunto*

$$\mathcal{Z}(K) = \{p \in \overline{M}\,;\, K(p) = 0\}$$

é discreto em $\overline{M}$. *Assim, os itens (a) e (b) da Proposição 2.14 continuam válidos quando consideramos o campo* $\nu = K/|K|$ *que está definido no conjunto aberto (e denso)* $M' = \overline{M}^{n+1} \setminus \mathcal{Z}(K)$ *(cf. Proposição 1 de [48]).*

2.3 Produtos warped semi-Riemannianos

Apresentaremos neste parágrafo uma classe particular de variedades semi-Riemannianas naturalmente munidas com um campo vetorial conforme. Para isto, sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa e orientada, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave e positiva. Considere a variedade diferenciável produto $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$. Sejam π_I e π_M as projeções sobre os fatores I e M^n, respectivamente. Em $\overline{M}$ definamos a métrica

$$\langle u, v\rangle_p = \varepsilon\langle(\pi_I)_* u, (\pi_I)_* v\rangle + f^2(p)\langle(\pi_M)_* u, (\pi_M)_* v\rangle$$

para todo $p \in \overline{M}$ e todos $u, v \in T_p\overline{M}$, onde $\varepsilon = \varepsilon_{\partial_t}$. A variedade semi-Riemanniana assim obtida será representada por

$$\overline{M}^{n+1} = \varepsilon I \times_f M^n.$$

Denotaremos por

$$\partial_t = (\partial/\partial_t)_{(t,x)},$$

$(t, x) \in I \times M^n$ o campo unitário e tangente a $\varepsilon I \times_f M^n$. É possível mostrar que o campo vetorial

$$K = (f \circ \pi_I)\partial_t$$

é conforme e fechado e seu fator conforme é $f' \circ \pi_I$, onde $'$ denota a derivação com respeito a $t \in I$ (cf. [47] e [48]).

Quando $\varepsilon = -1$, a variedade $\overline{M}$ obtida pela construção anterior é denominada, de acordo com a nomenclatura introduzida por L.J. Alías, A. Romero e M. Sánchez em [10], um *espaço-tempo de Robertson-Walker Generalizado (GRW)*. A geometria desse espaço tem propriedades bastante interessantes. Por exemplo, em [10] os autores provaram que se o espaço-tempo $-I \times_f M^n$ admite uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, então necessariamente a fibra Riemanniana M^n deve ser compacta. Nessa mesma direção, A.L. Albujer e L.J. Alías demonstraram que se $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ admite uma hipersuperfície tipo-espaço completa e distante do infinito futuro deste espaço, no sentido da hipersuperfície estar abaixo de um slice, então a fibra M^n deve ser completa(cf. Lema 7 de [5]).

Alguns resultados de rigidez de hipersuperfícies em um produto warped semi-Riemanniano podem ser encontrados em [11], [14] e [22].

2.4 Imersões isométricas

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade semi-Riemanniana. Uma imersão isométrica $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão que satisfaz a condição $\psi^*\overline{g} = g$. Por simplicidade, denotaremos os tensores métricos de M e $\overline{M}$ pelo mesmo símbolo $\langle\, , \rangle$.

Definição 2.16. *Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade diferenciável n-dimensional Σ em uma variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional $\overline{M}$ é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida em Σ^n pela imersão ψ for uma métrica Riemanniana. Neste caso, dizemos ainda que a imersão ψ é Riemanniana.*

Proposição 2.17. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade Lorentziana temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então Σ^n admite um campo vetorial unitário, normal e suave $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, apontando para o futuro. Em particular, Σ^n é orientável.*

Demonstração. Como $\overline{M}$ é temporalmente orientável, existe um campo $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ de vetores tipo-tempo. Observe que, para todo $p \in \Sigma^n$, o conjunto dos vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é formado pela união disjunta dos cones temporais $C(K(p))$ e $C(-K(p))$.

Em cada $p \in \Sigma^n$, considere um vetor unitário $N(p) \in T_p\Sigma^\perp$. Como $N(p)$ é tipo-tempo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $N(p) \in C(K(p))$. Feito isto, temos definido um campo vetorial normal e unitário N sobre Σ^n que aponta para o futuro. Vamos mostrar que o campo N é suave. Para isto, fixe um ponto $p \in \Sigma^n$ e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial móvel sobre uma vizinhança aberta e conexa U de p em Σ^n. Logo $\tilde{N} = K - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle e_i$ é suave e normal a Σ^n em U e temos ainda

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = \langle \tilde{N}, K\rangle = \langle K, K\rangle - \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2.$$

Observe que $\langle K, K\rangle = \sum_{i=1}^n \langle K, e_i\rangle^2 - \langle K, N\rangle^2$, donde concluimos imediatamente que $\langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle = -\langle K, N\rangle^2 < 0$ e disto segue que $\tilde{N}(q) \in C(K(q))$ para cada $q \in U$. Portanto $N = \tilde{N}/|\tilde{N}|$ é um campo suave. $\square$

2.5 Equações fundamentais

No que segue, $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ denotará uma imersão Riemanniana de uma variedade diferenciável n-dimensional Σ^n numa variedade Riemanniana orientada ou numa variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional temporalmente orientada, sendo que cada caso ficará claro no contexto.

Quando o espaço ambiente $\overline{M}$ for Riemanniano, iremos supor sempre que Σ^n é orientável, o que, pela Proposição 2.17, é uma hipótese desnecessária quando $\overline{M}$ for uma variedade Lorentziana temporalmente orientada. Em ambos os casos, N representará o campo unitário e normal que orienta Σ^n.

Denotaremos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ^n e $\overline{M}$, respectivamente. É possível mostrar que $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $(\ )^\top$ denota a componente tangencial de um campo de vetores ao longo de Σ^n. A *segunda forma fundamental* da imersão ψ é a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ que cumpre a condição

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Observe que sendo α uma forma $\mathcal{D}(\Sigma)-$bilinear e simétrica, obtemos um campo $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, denominados *operadores de Weingarten* da imersão ψ, definindo

$$\langle AX, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), N\rangle.$$

É imediato verificar que

$$AX = -\overline{\nabla}_X N \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \varepsilon_N \langle AX, Y\rangle N,$$

onde X e Y são campos tangentes a Σ^n. Temos ainda que o tensor de curvatura R de Σ^n é definido como a aplicação $R : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $[\ ,\ ]$ denota o colchete de Lie.

Na proposição seguinte temos as equações fundamentais de uma imersão isométrica. Sua demonstração pode ser encontrada em [54].

Proposição 2.18. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Se* R *e* $\overline{R}$ *denotam os respectivos tensores de curvatura de* Σ^n *e* $\overline{M}$*, então, para quaisquer campos de vetores* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*, temos que*

(i) (*Equação de Gauss*)

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^\top + \varepsilon_N[\langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX]. \quad (2.4)$$

(ii) (*Equação de Codazzi*)

$$(\overline{R}(X,Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \quad (2.5)$$

Um caso particular da proposição anterior é dado pelo seguinte.

Corolário 2.19. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica, onde* $\overline{M}^{n+1}(c)$ *é um ambiente de curvatura seccional constante* c*. Então, para todos* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ *temos*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= c[\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle] \\ &+ \varepsilon_N[\langle AX,Z\rangle\langle AY,W\rangle - \langle AX,W\rangle\langle AY,Z\rangle], \quad (2.6)\end{aligned}$$

onde R *é o tensor de curvatura de* Σ^n*, e*

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \quad (2.7)$$

Observação 2.20. *Nas condições do Corolário 2.19, temos que o tensor de Ricci de* Σ^n *é dado por*

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X,Y) = c(n-1)\langle X,Y\rangle + \varepsilon_N\left(\langle AX,Y\rangle \mathrm{tr}(A) - \langle AX, AY\rangle\right),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*. Por meio de uma contração métrica, temos ainda que a curvatura escalar (não-normalizada)* R *de* Σ^n *satisfaz*

$$\mathrm{R} = cn(n-1) + \varepsilon_N\left(n^2H^2 - |A|^2\right),$$

onde $H = \frac{\varepsilon_N}{n}\mathrm{tr}(A)$ *denota a curvatura média de* Σ^n*.*

2.6 Os tensores de Newton

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão Riemanniana. Denotemos por A o operador de Weingarten de Σ^n associado ao campo unitário e normal N globalmente definido em Σ^n. Associado ao operador A existem n invariantes algébricos S_r, que são obtidos mediante a igualdade

$$\det(tI - A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i S_i t^{n-i},$$

sendo $S_0 = 1$ por definição. É fácil ver que se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ denotam os autovalores (ou *curvaturas principais*) de A, então, para $1 \leq r \leq n$, temos

$$S_r = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}.$$

Disto segue imediatamente que

$$S_1^2 = |A|^2 + 2S_2.$$

Definição 2.21. *Para cada* $0 \leq r \leq n$*, a* r-ésima curvatura média H_r *de* Σ^n *é definida por*

$$\binom{n}{r} H_r = \varepsilon_N^r S_r. \tag{2.8}$$

Vale ressaltar aqui que as curvaturas médias de ordem superior cumprem

$$H_j^2 \geq H_{j-1} H_{j+1},$$

para todo $1 \leq j \leq n-1$. Caso ocorra a igualdade para $r = 1$ ou algum $1 < r < n$ com $H_{r+1} \neq 0$, temos $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ (cf. Proposição 1 de [24], veja também Teorema 51 de [37]). Essas desigualdades são conhecidas como *desigualdades de Newton*.

Usando restrições apropriadas sobre as r-curvaturas, muitos autores têm obtido interessantes resultados de rigidez. Por exemplo, L.J. Alías, A.G. Colares e A. Brasil Jr. em [11], provaram que uma hipersuperfície tipo-espaço e fechada imersa numa variedade conformemente estacionária $\overline{M}^{n+1}(c)$, de curvatura seccional contante c, e que possua curvaturas H_r e H_{r+1} constantes (não-nulas), para algum $1 \leq r \leq n-1$, deve ser totalmente umbílica. No caso Riemanniano, o trabalho de S. Montiel e A. Ros [46] nos fornece uma bela caracterização de esferas totalmente umbílicas como as únicas hipersuperfícies fechadas mergulhadas em $\mathbb{H}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ ou num hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$ e que possuem alguma curvatura H_r constante.

Enunciamos agora outro fato relevante cuja demonstração pode ser encontrada em A. Caminha [23] (cf. também Lema 4.1 de [8]).

Lema 2.22. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Se* S_2 *é constante em* Σ^n*, então*

$$S_1^2(|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2) \geq 2S_2|\nabla A|^2.$$

Em particular, se $S_2 \geq 0$*, então* $|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2 \geq 0$.

Quando $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, segue da equação de Gauss (2.6) que a curvatura escalar R de Σ^n e a curvatura H_2 se relacionam mediante a expressão

$$\mathrm{R} = n(n-1)(c + \varepsilon_N H_2). \tag{2.9}$$

Usando o operador de Weingarten A de uma imersão Riemanniana $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$, podemos definir, para cada $0 \leq r \leq n$, os *tensores de Newton*

$$P_r : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$$

pondo $P_0 = I$ e para $1 \leq r \leq n$

$$P_r = \varepsilon_N^r S_r I - \varepsilon_N A P_{r-1}, \tag{2.10}$$

onde $I : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador identidade.

O teorema de Cayley-Hamilton nos assegura que $P_n = 0$ e não é difícil verificar que P_r é um operador auto-adjunto que comuta com A, para todo r. Logo, se $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base que diagonaliza A em $p \in \Sigma^n$, então $\mathcal{B}$ também diagonaliza P_r em p. Note ainda que se escrevermos $Ae_i = \lambda_i e_i$ para todo i e denotarmos por A_i a restrição de A ao subespaço $\langle\ e_i\ \rangle^\perp \subset T_p\Sigma$, então é fácil mostrar que $P_r e_i = \varepsilon_N^r S_r(A_i) e_i$, onde

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n \\ j_1, \ldots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r}.$$

Usando as notações acima temos o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida aqui. Para uma referência detalhada, indicamos ao leitor os artigos [23] e [24] de A. Caminha.

Proposição 2.23. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão Riemanniana. Denotando por* $c_r = (n-r)\binom{n}{r} = (r+1)\binom{n}{r+1}$, *temos*

(a) $\mathrm{tr}(P_r) = \varepsilon_N^r \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = \varepsilon_N^r (n-r) S_r = c_r H_r$;

(b) $\mathrm{tr}(AP_r) = \varepsilon_N^r \sum_{i=1}^n \kappa_i S_r(A_i) = \varepsilon_N^r (r+1) S_{r+1} = \varepsilon_N c_r H_{r+1}$;

(c) $\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \varepsilon_N^r \sum_{i=1}^n \kappa_i^2 S_r(A_i) = \varepsilon_N^r \big(S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}\big)$;

(d) $\mathrm{tr}(P_r \circ \nabla_X A) = \varepsilon_N^r \langle \nabla S_{r+1}, X\rangle$, *para todo* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Associado a cada tensor de Newton P_r temos um operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, dado por

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r \,\mathrm{Hess}\, f). \tag{2.11}$$

No caso em que $r = 0$, temos $L_0(f) = \Delta f$, onde Δ denota o operador de Laplace-Beltrami de Σ^n. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n. Usando as propriedades da derivação covariante de tensores, temos que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_r(\nabla f)) \;=\; \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_r)(\nabla f), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i\rangle,$$

onde $\mathrm{div}_\Sigma(Z)$ denota a divergência de um campo vetorial Z em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando agora que P_r é auto-adjunto, concluimos da igualdade anterior que

$$\mathrm{div}_\Sigma(P_r(\nabla f)) = \langle\ \mathrm{Div} P_r, \nabla f\ \rangle + L_r(f)$$

Consequentemente, quando o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, segue que $\mathrm{Div} P_r = 0$ (cf. [11] e [55]), e, portanto

$$L_r(f) = \mathrm{div}_\Sigma(P_r(\nabla f)).$$

Sejam $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ funções suaves. Segue diretamente da definição que

$$L_r(\varphi \circ f) = \varphi'(f) L_r(f) + \varphi''(f) \langle P_r \nabla f, \nabla f\rangle. \tag{2.12}$$

A seguinte fórmula foi obtida por A. Caminha em [23].

Proposição 2.24. *Seja $x : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ é um ambiente de curvatura seccional constante c. Se $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal em Σ^n, então*

$$\begin{aligned}
L_q(S_r) &= L_{r-1}(S_{r+1}) + \sum_k \mathrm{tr}\{[P_q(\nabla_{e_k} P_{r-1}) - P_{r-1}(\nabla_{e_k} P_q)](\nabla_{e_k} A)\} \\
&+ c[\mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(P_q) - \mathrm{tr}(P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q)] \\
&+ \mathrm{tr}(A^2 P_{r-1})\mathrm{tr}(AP_q) - \mathrm{tr}(AP_{r-1})\mathrm{tr}(A^2 P_q) \ ,
\end{aligned}$$

onde $0 \le q < n$ e $0 < r < n$.

Capítulo 3

A aplicação de Gauss de hipersuperfícies completas

Neste capítulo, que essencialmente corresponde ao artigo [17] em colaboração com H.F. de Lima, provaremos alguns resultados de rigidez de hipersuperfícies completas Σ^n, com curvatura média constante, imersas isometricamente no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ ou na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Nossos resultados serão obtidos mediante alguma restrição sobre a imagem da aplicação normal de Gauss de tais hipersuperfícies ou sobre a dependência linear entre as funções suporte associadas à imersão em questão. A menos que se diga o contrário, todas as hipersuperfícies consideradas neste capítulo são conexas e orientáveis.

3.1 Formas espaciais

No que segue, $\overline{M}^{n+1}(c)$ denotará uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante c. Para $\nu \in \{0, 1\}$, denotaremos por $\mathbb{R}^{n+2}_\nu$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido do produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ definido por

$$\langle\, v, w\,\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i + (-1)^\nu v_{n+2} w_{n+2}$$

para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^{n+2}$. O espaço $\mathbb{R}^{n+2}_1$ é conhecido como o espaço de Lorentz-Minkowski. Neste espaço podemos obter um modelo para o espaço hiperbólico que é bastante apropriado aos nossos propósitos neste capítulo, já que poderemos utilizar a estrutura vetorial do ambiente no qual o espaço hiperbólico estará imerso como uma hipersuperfície.

Seja ϱ uma constante positiva. Com a métrica induzida pela inclusão, é possível mostrar que o subconjunto

$$\mathbb{H}^{n+1}_{\varrho} = \left\{p \in \mathbb{R}^{n+2}_1; \langle p, p\rangle = -\varrho^2 \,,\, p_{n+2} \geq 1\right\}$$

é uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional, completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante $-1/\varrho^2$. Isto então nos fornece, pelo teorema de classificação de Cartan, um modelo para o espaço hiperbólico de curvatura $-1/\varrho^2$, denotado por $\mathbb{H}^{n+1}(-1/\varrho^2)$. Por simplicidade denotaremos o espaço hiperbólico $(n+1)$-dimensional de curvatura seccional -1 simplesmente por $\mathbb{H}^{n+1}$.

É fácil ver ainda que o espaço tangente a $\mathbb{H}^{n+1}$ em um ponto $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ é dado por

$$T_p\,\mathbb{H}^{n+1} = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+2}_1;\ \langle v, p\rangle = 0\right\}.$$

Observe então que, para cada $p \in \mathbb{H}^{n+1}$, temos a seguinte decomposição $\mathbb{R}^{n+2}_1 = T_p\,\mathbb{H}^{n+1} \oplus \operatorname{span}\{p\}$. Além disto, este modelo nos fornece uma descrição geométrica bastante interessante das hipersuperfícies totalmente umbílicas do espaço hiperbólico que, como sabemos, são obtidas pela intersecção de um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+2}_1$ com $\mathbb{H}^{n+1}$.

Exibiremos agora a aplicação de Gauss N destas hipersuperfícies e o correspondente operador de Weingarten A. Para tanto, fixe $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ e defina a função suave $h_a : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ pondo $h_a(p) = \langle p, a\rangle$. Para uma constante real τ, considere $\Sigma^n = h_a^{-1}(\tau)$. Não é difícil verificar que se $p \in \Sigma^n$, então

$$|\overline{\nabla} h_a(p)|^2 = \tau^2 + \langle a, a\rangle \,,$$

onde $\overline{\nabla}$ denota o gradiente de uma função em relação à métrica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Portanto, Σ^n será uma hipersuperfície completa e orientável de $\mathbb{H}^{n+1}$ sempre que $\tau^2 + \langle a, a\rangle > 0$. Neste caso, o campo unitário e normal a Σ^n é dado por

$$\overline{N}(p) = \frac{\overline{\nabla} h_a}{|\overline{\nabla} h_a|}(p) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \langle a, a\rangle}}(a + \tau p). \tag{3.1}$$

Portanto, o operador de Weingarten A da imersão $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, associado ao campo $-N$, é dado por

$$AX = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \langle a, a\rangle}}X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Outra importante subvariedade de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ é o espaço de de Sitter $(n+1)$-dimensional, que é definido como a hiperquádrica

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{p \in \mathbb{R}_1^{n+2}; \langle p, p\rangle = 1\right\}$$

que, com a métrica induzida pela inclusão $\mathbb{S}_1^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}_1^{n+2}$, é uma variedade de Lorentz com curvatura seccional constante 1. Este espaço tem interessantes propriedades e sua geometria tem sido bastante estudada por diversos autores, veja [4], [36], ou [49] por exemplo.

Observamos ainda que $\mathbb{R}_0^{n+2}$ nada mais é do que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ e o subconjunto

$$\mathbb{S}^{n+1} = \{p \in \mathbb{R}_0^{n+2}; \langle p, p\rangle = 1\},$$

é a esfera Euclidiana $(n+1)$-dimensional de curvatura seccional constante 1.

Em [45], S. Montiel respondeu afirmativamente à conjectura de Goddard (cf. [36]) no caso compacto, isto é, neste trabalho ficou provado que todas as hipersuperfícies fechadas (compactas sem bordo), tipo-espaço e com curvatura média constante em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ são esferas totalmente umbílicas. Além disto, o autor caracterizou as hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, mostrando que tais hipersuperfícies são obtidas como interseção de um subespaço afim de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ com $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Deste modo, se $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então

$$\psi(\Sigma^n) \subset \mathcal{L}_\tau = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

para algum vetor unitário ou tipo-luz $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ e alguma constante real τ satisfazendo $\tau^2 > \langle a, a\rangle$. De acordo com o caráter causal de a, temos as seguintes possibilidades:

(1) se a é um vetor unitário e tipo-tempo, então $\mathcal{L}_\tau$ é isométrico a uma esfera n-dimensional de curvatura seccional $\dfrac{1}{\tau^2+1}$;

(2) se a é um vetor não-nulo e tipo-luz, então $\mathcal{L}_\tau$ é isométrico ao espaço Euclidiano n-dimensional;

(3) se a é um vetor unitário e tipo-espaço, então $\mathcal{L}_\tau$ é isométrico ao espaço hiperbólico n-dimensional de curvatura seccional $-\dfrac{1}{\tau^2-1}$.

Considere agora uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ isometricamente imersa num ambiente $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante c. Denotaremos por A o operador de Weingartein associado ao campo unitário normal N globalmente definido em Σ^n. Observe que o campo vetorial N define uma aplicação

$$N : \Sigma^n \to \mathcal{S}^{n+1},$$

onde $\mathcal{S}^{n+1}$ denota o espaço de de Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$ ou as esferas Euclidianas $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{S}^{n+1}$, conforme seja $c = -1$, $c = 0$ ou $c = 1$, respectivamente. Esta aplicação será chamada de *aplicação de Gauss* de Σ^n. Um dos propósitos neste capítulo é estudar a geometria da imagem $N(\Sigma)$ da aplicação de Gauss de Σ^n e determinar sob que condições podemos caracterizar uma hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}$ por meio da imagem de sua aplicação normal de Gauss.

Veja que se ∇^0,$\overline{\nabla}$ e ∇ denotam as respectivas conexões de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+2}_1$, $\overline{M}^{n+1}(c)$ e Σ^n temos que as equações de Gauss e Weingarten são dadas, respectivamente, por

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - c \langle X, Y \rangle \psi \tag{3.2}$$

e

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\nabla^0_X N, \tag{3.3}$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

3.2 Funções suporte

Fixemos um vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}_\nu$. Definiremos agora duas funções naturalmente associadas a uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ pondo

$$l_a = \langle \psi, a \rangle \qquad \text{e} \qquad f_a = \langle N, a \rangle,$$

onde N denota o campo unitário e normal globalmente definido em Σ^n. Estas funções são denominadas *funções suporte* associadas a ψ. Um cálculo direto nos permite concluir que

$$\nabla\, l_a = a^\top \qquad \text{e} \qquad \nabla\, f_a = -A(a^\top),$$

onde A é o operador de Weingarten associado a N e $a^\top$ denota a componente tangencial de a ao longo da imersão ψ, isto é

$$a^\top = a - f_a N - c l_a \psi. \tag{3.4}$$

Usando as equações de Gauss e Codazzi, é possível mostrar facilmente que $\nabla_X \nabla l_a = f_a AX - c l_a X$ e $\nabla_X \nabla f_a = -f_a A^2 X + c l_a AX - (\nabla_{a^\top} A)(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Da primeira equação, segue imediatamente que

$$|\mathrm{Hess}\, l_a|^2 = |A|^2 f_a^2 - 2ncHf_a l_a + n l_a^2 \tag{3.5}$$

Além disto, temos ainda que

$$\Delta l_a = nHf_a - cnl_a \tag{3.6}$$

e

$$\Delta f_a = -|A|^2 f_a + cnHl_a - n\langle \nabla H, a^\top \rangle, \tag{3.7}$$

onde H é a curvatura média de Σ^n.

Em geral, temos o seguinte resultado, que pode ser encontrado em H. Rosenberg [55] (veja também Lema 5.2 de [20]), entretanto, por completude, incluiremos aqui a sua prova.

Proposição 3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ uma hipersuperfície orientável isometricamente imersa na forma espacial $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura seccional constante c. Então, para as funções f_a e l_a anteriormente definidas, temos*

(i) $L_r(l_a) = (r+1)S_{r+1} f_a - c(n-r) S_r l_a$;

(ii) $L_r(f_a) = L_{r+1}(l_a) - \mathrm{div}_\Sigma(S_{r+1} \nabla l_a)$.

Demonstração. **(i)** Considere um referencial ortonormal local $\{E_1, \dots, E_n\}$ em Σ. Como $\mathbb{H}^{n+1}$ é um espaço de curvatura seccional constante, então para $0 \le r < n$, teremos

$$L_r(l_a) = \mathrm{div}_\Sigma(P_r \nabla l_a) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_r(\, a^\top), E_i \rangle, \tag{3.8}$$

onde usamos na última igualdade que $\nabla\, l_a = a^\top$. Da derivação covariante de tensores e usando que $\nabla_{E_i} P_r$ é um operador auto-adjunto para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, segue de (3.8) que

$$L_r(l_a) = \sum_{i=1}^n \langle\, a^\top, \big(\nabla_{E_i} P_r\big)(E_i) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r\big(\nabla_{E_i} a^\top\big), E_i \rangle. \tag{3.9}$$

Agora, da equação de Gauss (cf. eq. (2.4)), temos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, que

$$\nabla_{E_i} a^\top = f_a A E_i - c l_a E_i. \tag{3.10}$$

Como os tensores de Newton comutam com o operador de Weingarten, concluimos de (3.9) e (3.10) que

$$L_r(l_a) = \langle\, a^\top, \mathrm{Div}(P_r)\rangle + f_a \mathrm{tr}(AP_r) - c l_a \mathrm{tr}(P_r).$$

Portanto, usando as propriedades dos operadores P_r (cf. Proposição 2.23) e observando ainda que $\mathrm{Div}(P_r) = 0$, pois $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, concluimos da igualdade acima que

$$L_r(l_a) = (r+1) S_{r+1} f_a - c(n-r) S_r l_a.$$

(ii) Por outro lado, como $\nabla f_a = -A(\nabla l_a)$, teremos

$$L_r(f_a) = -\mathrm{div}_\Sigma(P_r A(\nabla l_a)) = \mathrm{div}_\Sigma(P_{r+1}(\nabla l_a)) - \mathrm{div}_\Sigma(S_{r+1} \nabla l_a),$$

onde usamos na última igualdade a identidade $P_r A = S_{r+1} I - P_{r+1}$. Portanto concluimos que

$$L_r(f_a) = L_{r+1}(l_a) - \mathrm{div}_\Sigma(S_{r+1} \nabla l_a).$$

$\square$

3.3 Hipersuperfícies com aplicação de Gauss prescrita em $\mathbb{H}^{n+1}$

Para provarmos nossos resultados de rigidez desta seção, faremos uso do seguinte princípio do máximo generalizado, devido a H. Omori e S.T. Yau (cf. [53] e [65]).

Lema 3.2. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional e completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Então, para qualquer função limitada superiormente $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \geq 1}$ em Σ^n satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(\,i\,)\ u(p_k) > \sup_\Sigma u - \frac{1}{k}\ \ ,\ (\,ii\,)\ |\nabla u|(p_k) < \frac{1}{k}\ \ e\ (\,iii\,)\ \Delta u(p_k) < \frac{1}{k},$$

para todo $k \geq 1$.

Observação 3.3. *Em [50], K. Nomizu e B. Smyth provaram que uma hipersuperfície completa, isometricamente imersa, na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que a imagem da aplicação de Gauss esteja contida numa esfera geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$ deve ser uma esfera geodésica.*

Inspirados pelo resultado de K. Nomizu e B. Smyth e usando a caracterização das hipersuperfícies umbílicas tipo-espaço do espaço de de Sitter (cf. [45]), provamos o seguinte.

Teorema 3.4. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa isometricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$, com curvatura média constante $H \neq 0$. Suponha que Σ^n está contida numa bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica.*

Demonstração. A hipótese sobre a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n nos assegura a existência de um vetor $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ e uma constante $\tau \in \mathbb{R}$ tais que

$$f_a(p) = \langle N(\psi(p)), a\rangle = \tau,$$

para todo $p \in \Sigma^n$ e, além disso, $\tau^2 > \langle a, a\rangle$. Inicialmente iremos supor que $\langle a, a\rangle = -1$. Isto significa que $N(\Sigma)$ está contida numa esfera tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Veja que podemos supor ainda, sem perda de generalidade, que $a \in \mathbb{H}^{n+1}$. Observe que se $\tau = 0$, então, usando a equação (3.7) e a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz, concluimos que $H = 0$, uma contradição. Logo $\tau \neq 0$ e com isso, usando mais uma vez a equação (3.7), concluimos que

$$|A|^2 = -\frac{nH}{\tau} l_a. \tag{3.11}$$

Como Σ^n está contida numa bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$, então existem $b \in \mathbb{H}^{n+1}$ e uma constante positiva ϱ tais que $l_b(p) = \langle \psi(p), b\rangle \leq \varrho$, para todo $p \in \Sigma^n$. Denotaremos por $B_b(\varrho)$ a bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$ centrada em b com raio ϱ. Agora considere uma bola geodésica centrada em a com raio ζ suficientemente grande tal que a bola geodésica $B_b(\varrho)$ esteja contida em $B_a(\zeta)$. Mas então teremos $1 \leq \langle \psi(p), a\rangle \leq \zeta$, para todo $p \in \Sigma^n$. Portanto l_a é uma função limitada em Σ^n e, pela expressão em (3.11), isto implica que o operador de Weingarten A tem norma limitada. Agora, como sabemos, o tensor de Ricci de Σ^n satisfaz

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) = (1-n)|X|^2 + nH\langle AX, X\rangle - |AX|^2. \tag{3.12}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluimos da igualdade acima que

$$nH\langle AX, X\rangle \geq -n|H||A||X|^2 \quad \text{e} \quad -|AX|^2 \geq -|A|^2|X|^2.$$

Usando isto, concluimos de (3.12) que

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) \geq \left(1 - n - n|H||A| - |A|^2\right)|X|^2, \tag{3.13}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Portanto, pelas hipóteses assumidas sobre H e A, concluimos da expressão anterior que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente e isto nos coloca em condições de aplicar o Princípio do Máximo de Omori-Yau à função suave e limitada $|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2$. Como H é constante, segue da igualdade anterior e de (3.11) que

$$\Delta|\Phi|^2 = n|\Phi|^2. \tag{3.14}$$

Pelo Lema 3.2, existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n de modo que $\lim_k |\Phi|^2(p_k) = \sup_\Sigma |\Phi|^2$ e, além disso, $\Delta|\Phi|^2(p_k) < 1/k$, para todo $k \geq 1$. Usando isto, segue da equação (3.14) que

$$\frac{1}{k} > \Delta|\Phi|^2(p_k) = n|\Phi|^2(p_k) \geq 0,$$

para todo $k \geq 1$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos da expressão anterior que $\lim_k |\Phi|^2(p_k) = 0$ e, portanto, $|\Phi|^2 = 0$ em Σ^n. Esta igualdade nos permite concluir que Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica, neste caso, uma esfera tipo-espaço e totalmente umbílica, pois a é tipo-tempo.

Suponhamos agora que $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ seja um vetor tipo-espaço ou tipo-luz de tal modo que $f_a = \langle N, a\rangle = \tau$, para alguma constante $\tau \in \mathbb{R}$. Em qualquer caso, temos que $\{a, b\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^{n+2}_1$ e $\tau \neq 0$. Seja $\Pi_{a,b}$ o subespaço 2-dimensional gerado por a e b. Tome qualquer c, diferente de b, na intersecção

$$\Pi_{a,b} \cap \mathbb{H}^{n+1}.$$

Logo, podemos escrever $c = \delta a + \theta b$, para algumas constantes reais não-nulas δ e θ. Considere $B_c(\rho)$ uma bola geodésica centrada em c tal que $B_b(\varrho) \subset B_c(\rho)$. Deste modo, como antes, teremos que l_c é uma função limitada em Σ^n. Observando que

$$\langle \psi, a\rangle = \frac{1}{\delta}\langle \psi, c\rangle - \frac{\theta}{\delta}\langle \psi, b\rangle,$$

concluimos que l_a é uma função limitada em Σ^n. Agora o argumento do caso anterior se aplica da mesma maneira, o que nos leva a concluir que Σ^n é uma esfera geodésica e portanto a deveria ser tipo-tempo. Esta contradição encerra a prova do teorema.

$\square$

Para estabelecermos nosso próximo resultado, usaremos uma dualidade natural existente entre as folheações dos espaços hiperbólico e de Sitter através de hipersuperfícies totalmente umbílicas. Esta dualidade segue do fato de que tanto as horoesferas como as hiperesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$ são descritas por

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

onde a é, respectivamente, um vetor tipo-luz ou tipo-espaço unitário, de modo que $\tau^2 + \langle a, a\rangle > 0$ (cf. [43]). Além disso, a aplicação normal de Gauss destas hipersuperfícies é, como sabemos, dada por

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \langle a, a\rangle}}(a + \tau p) \in \mathbb{S}_1^{n+1}.$$

Consequentemente, $N(L_\tau)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente umbílica em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, a qual é isométrica a $\mathbb{R}^n$, no caso em que a é tipo-luz, e a $\mathbb{H}^n(-1/\varrho^2)$, para algum $\varrho > 0$, no caso em que a é tipo-espaço (cf. Seção 3 de [43], veja também o exemplo 4.3 de [48]).

Observação 3.5. *Em [12], L.J. Alías e M. Dajczer estudaram superfícies completas propriamente imersas entre duas horoesferas de $\mathbb{H}^3$, obtendo um resultado tipo-Bernstein para o caso de curvatura média constante H satisfazendo $-1 \leq H \leq 1$.*

Feitas estas considerações, podemos agora enunciar e provar nosso próximo resultado.

Teorema 3.6. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa, com curvatura média constante H, isometricamente imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Assuma que Σ^n esteja entre duas horoesferas (hiperesferas) determinadas por um vetor não-nulo $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ tipo-luz (tipo-espaço). Se $N(\Sigma)$ está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por a, então Σ^n é uma horoesfera (hiperesfera).*

Demonstração. Pelo caráter causal de a e pela hipótese assumida sobre a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n, segue-se que a função $f_a = \langle N, a\rangle$ é constante, digamos $f_a = \tau$. Neste caso, a caracterização das hipersuperfícies tipo-espaço e totalmente umbílicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ nos assegura que $\tau \neq 0$. Usando (3.7) temos que

$$|A|^2 = -\frac{nH}{\tau} l_a,$$

e, como Σ^n está entre duas horoesferas (hiperesferas), concluimos que $|A|^2$ é limitada. Consequentemente, pela expressão (3.13) obtemos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Estamos agora nas condições de aplicar o Lema de Omori-Yau novamente à função $|\Phi|^2$, onde $\Phi = A - HI$. Seguindo os mesmos passos da demonstração do teorema anterior, concluimos que Σ^n é uma horoesfera (hiperesfera).

□

Para uma escolha apropriada de orientação é fácil ver que as horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$ satisfazem a condição $l_a = -f_a$, para algum vetor tipo-luz $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$. No parágrafo anterior, vimos ainda que a imagem pela aplicação de Gauss de tais hipersuperfícies é exatamente um hiperplano no espaço de de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Com esta motivação e aplicando um teorema clássico de A. Huber [40], obtemos o seguinte resultado sobre superfícies no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ com curvatura Gaussiana não-negativa.

Teorema 3.7. *Seja $\psi : \Sigma^2 \to \mathbb{H}^3$ uma superfície completa, orientável com curvatura Gaussiana não-negativa, isometricamente imersa em $\mathbb{H}^3$ e contida na região entre as horoesferas L_β e L_τ, onde $0 < \beta < \tau$. Suponha que $N(\Sigma)$ esteja contida no fecho do domínio interior determinado pelo plano $\mathcal{L}_{-\beta}$ de $\mathbb{S}_1^3$. Se a curvatura média H de Σ^2 satisfaz*

$$H \geq \frac{\tau}{\beta},$$

então Σ^2 é uma horoesfera.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ o vetor tipo-luz, não-nulo, que determina as horoesferas L_β e L_τ em $\mathbb{H}^3$ e o plano $\mathcal{L}_\beta$ em $\mathbb{S}_1^3$. Pela equação (3.6) temos que

$$\Delta l_a = nHf_a + nl_a.$$

Assim, das nossas hipóteses sobre Σ^2 e $N(\Sigma)$, concluimos que

$$\Delta l_a \leq -n(H\beta - \tau).$$

Consequentemente, como estamos supondo que $H \geq \tau/\beta$, segue que l_a é uma função superharmonica e positiva em Σ^2. Como Σ^2 é completa e tem curvatura Gaussiana não-negativa, podemos aplicar o teorema de A. Huber para deduzir que Σ^2 é parabólica, e, portanto l_a é uma função constante, e isto implica que Σ^2 é uma horoesfera de $\mathbb{H}^3$. $\square$

Para finalizarmos esta seção, provaremos dois resultados sobre hipersuperfícies fechadas no espaço hiperbólico. O primeiro é uma versão hiperbólica do Teorema 2 de K. Nomizu e B. Smyth [50] e o segundo é uma extensão do referido teorema no caso de curvatura escalar constante. Para tanto, necessitamos estabelecer um paralelo conveniente entre as estruturas do caso hiperbólico e esférico. Com este propósito, considere $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ um vetor unitário e tipo-tempo. O subconjunto

$$\mathcal{E}_0 = \{p \in \mathbb{S}^{n+1}_1; \langle p, a\rangle = 0\}$$

define uma hipersuperfície tipo-espaço totalmente geodésica em $\mathbb{S}^{n+1}_1$, a qual é isométrica a uma esfera. Seguindo a terminologia estabelecida por J.A. Aledo, L.J. Alías e A. Romero [7], iremos nos referir a esta hipersuperfície como um *equador* do espaço de de Sitter determinado por a. Este equador divide $\mathbb{S}^{n+1}_1$ em duas componentes conexas o *futuro cronológico* que é dado por

$$\{p \in \mathbb{S}^{n+1}_1; \langle p, a\rangle < 0\},$$

e o *passado cronológico* dado por

$$\{p \in \mathbb{S}^{n+1}_1; \langle p, a\rangle > 0\}.$$

O seguinte resultado nos será útil adiante.

Lema 3.8. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada. Então Σ^n possui um ponto onde, após uma escolha apropriada de orientação, todas as curvaturas principais são maiores do que* 1.

Demonstração. Fixe um vetor unitário e tipo-tempo $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ tal que $a \notin \mathbb{H}^{n+1}$ e defina a função $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, por $u(p) = -\langle \psi(p), a\rangle$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa, segue que $u \geq 1$. Como Σ^n é fechada, existe um ponto p_0 tal que o máximo de u é atingido em p_0. Temos que $\nabla u(p_0) = 0$ e $\mathrm{Hess}_{p_0} u(v, v) \leq 0$, para todo $v \in T_{p_0}\Sigma$. Isto implica que $\langle N(p_0), a\rangle \neq 0$, onde N é o campo unitário e normal que orienta Σ^n. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de $T_{p_0}\Sigma$ formada por direções principais, então em p_0 temos, para cada $i = 1, \ldots, n$, que

$$\mathrm{Hess}_{p_0} u(e_i, e_i) = -\langle N(p_0), a\rangle \lambda_i(p_o) - \sqrt{1 + \langle N(p_0), a\rangle^2} \leq 0,$$

onde λ_i é a curvatura principal associada a e_i. Podemos escolher N de modo que $\langle N(p_0), a\rangle > 0$ e concluir da identidade anterior que $\lambda_i(p_0) > 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, o que prova o resultado. □

Tendo feito estas observações, vamos enunciar e provar nosso próximo resultado.

Teorema 3.9. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura média constante H, isometricamente imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Demonstração. Pela hipótese sobre $N(\Sigma)$, existe um vetor $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ unitário e tipo-tempo de modo que a função $f_a = \langle N, a\rangle$ não muda de sinal em Σ^n. Pelas equações (3.6) e (3.7), temos que

$$\Delta l_a = nHf_a + nl_a \quad \text{e} \quad \Delta f_a = -|A|^2 f_a - nHl_a.$$

Destas equações, e usando que $H \neq 0$, segue que

$$\Delta(f_a + Hl_a) = -|\Phi|^2 f_a,$$

onde $\Phi = A - HI$. Pelo Teorema de Hopf, concluimos da igualdade anterior que $f_a + Hl_a$ é uma função constante e portanto

$$|\Phi|^2 f_a = 0 \tag{3.15}$$

em Σ^n. Denotando por g o tensor métrico de Σ^n teremos após um cálculo direto que

$$\left|\mathrm{Hess}\, l_a - \frac{1}{n}(\Delta l_a) g\right|^2 = |\mathrm{Hess}\, l_a|^2 - \frac{1}{n}(\Delta l_a)^2.$$

Disto e da igualdade em (3.15), concluimos que

$$\mathrm{Hess}\, l_a = \frac{1}{n}(\Delta l_a) g. \tag{3.16}$$

Desse modo, se Δl_a é uma função constante, o Teorema de Hopf nos assegura que l_a é uma função constante e portanto Σ^n é uma esfera totalmente umbílica. Caso contrário, como $f_a + Hl_a$ é constante, temos $\operatorname{Hess} f_a = -H\operatorname{Hess} l_a$. Por outro lado,

$$\operatorname{Hess}\Delta l_a = nH\operatorname{Hess} f_a + n\operatorname{Hess} l_a = (1 - H^2)\Delta l_a\, g.$$

Agora como $H^2 > 1$, temos pelo teorema de M. Obata (cf. Teorema 1 de [51], veja também Teorema 2 de [59]), que Σ^n é isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, para algum $r > 0$ e portanto o teorema está provado.

□

Um resultado algébrico que fornece uma ferramenta eficaz na tentativa de obter resultados de rigidez é o conhecido lema de Okumura [52].

Lema 3.10. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais tais que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{3/2} \leq \sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{3/2}$$

Além disso, ocorre a igualdade no lado direito (respectivamente, lado esquerdo) se, e somente se, $n-1$ dos $a_i^,$ s são não-positivos (respectivamente, não-negativos) e iguais.

Para provarmos nosso próximo resultado, faremos uso do seguinte resultado, que é uma versão hiperbólica de uma fórmula integral obtida por Q. Wang e C. Xia em [67] no caso de hipersuperfícies fechadas imersas na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$.

Lema 3.11. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura escalar constante $\mathrm{R} > n(1-n)$ e curvatura média H isometricamente imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Então*

$$\int_\Sigma \Big[(n-2)H|\Phi|^2 - \sum_{i=1}^n(\lambda_i - H)^3\Big] f_a\, d\Sigma = 0, \tag{3.17}$$

onde f_a é a função suporte associada à imersão ψ definida anteriormente, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores do operador de Weingarten A de Σ^n e $\Phi = A - HI$.

Demonstração. Inicialmente observamos que a curvatura escalar de Σ^n é dada por

$$\mathrm{R} = n(1-n) + n^2H^2 - |A|^2 \tag{3.18}$$

Note que a hipótese sobre R implica que a curvatura média H não se anula em Σ^n. Escolha uma orientação para Σ^n de modo que $H > 0$.

Agora, considere o campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ definido por $X = A(\nabla f_a)$, onde $f_a = \langle N, a\rangle$. Sejam $p \in \Sigma^n$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal local numa vizinhança de p, geodésico em p e que diagonaliza A em p. Escreva $AE_k = \lambda_k E_k$, para todo $1 \leq k \leq n$. Então,

$$\mathrm{div}_\Sigma X(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A(\nabla f_a), E_i\rangle(p).$$

Da equação de Codazzi (2.5), podemos reescrever a equação anterior como

$$\mathrm{div}_\Sigma X = \mathrm{tr}\big(\nabla_{\nabla f_a} A\big) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\, f_a(E_i, AE_i). \tag{3.19}$$

Observe que

$$\mathrm{tr}\big(\nabla_{\nabla f_a} A\big) = \mathrm{div}(nH\nabla f_a) - nH\Delta f_a. \tag{3.20}$$

Usando as equações (3.7), (3.19) e (3.20), obtemos

$$\int_\Sigma \Big[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\, f_a(E_i, AE_i) + nH|A|^2 f_a + n^2H^2 l_a + n^2 H a^\top(H)\Big] d\Sigma = 0. \tag{3.21}$$

Como A é um operador simétrico, temos que $|A|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, AE_i\rangle$. Usando agora que $n^2H^2 - |A|^2$ é uma função constante e que $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\, f_a(E_i, AE_i) = -n^2 H a^\top(H) - f_a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 - |A|^2 l_a.$$

É imediato verificar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 = nH^3 + 3H|\Phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - H)^3, \tag{3.22}$$

onde $|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2$. Disto e usando novamente a equação (3.7), segue que a equação em (3.21) pode ser reescrita como

$$\int_\Sigma \left[(n-2)H|\Phi|^2 - \sum_{i=1}^n (\lambda_i - H)^3\right] f_a \, d\Sigma = 0,$$

o que prova o lema. $\square$

De posse deste resultado, podemos agora enunciar e provar nosso próximo teorema.

Teorema 3.12. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada com curvatura escalar constante $\mathrm{R} > n(1-n)$ isometricamente imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n estiver contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera totalmente umbílica.*

Demonstração. Inicialmente oriente Σ^n de modo que sua curvatura média H seja positiva. Denote por A o operador de Weingarten de Σ^n associado ao campo unitário e normal globalmente definido N. Segue imediatamente da equação (3.18) que

$$H > \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}},$$

onde $\Phi = A - HI$. Como

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - H) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n (\lambda_i - H)^2 = |\Phi|^2,$$

segue pelo Lema 3.10 que

$$-\sum_{i=1}^n (\lambda_i - H)^3 \geq -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3.$$

Mas então teremos

$$(n-2)H|\Phi|^2 - \sum_{i=1}^n (\lambda_i - H)^3 \geq (n-2)|\Phi|^2 \left(H - \frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}}\right) \geq 0. \quad (3.23)$$

Observe que a hipótese sobre a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n nos assegura a existência de um vetor tipo-tempo e unitário $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ de modo que a função f_a não muda de sinal em Σ^n. Portanto, pelo Lema 3.11 e pela desigualdade em (3.23), concluimos que

$$\left[(n-2)H|\Phi|^2 - \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - H)^3\right] f_a = 0.$$

Usando novamente a desigualdade em (3.23), obtemos que $|\Phi|^2 f_a^2 = 0$ em Σ^n. Isto nos permite concluir que

$$\operatorname{Hess} l_a = \frac{1}{n}(\Delta\, l_a) g,$$

onde g denota a métrica Riemanniana de Σ^n. Assim, se l_a é uma função constante, então Σ^n é uma esfera totalmente umbílica. Caso contrário, o Lema 2.12 nos assegura que Σ^n é isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$ e novamente Σ^n é uma esfera totalmente umbílica, o que conclui a prova do resultado. $\square$

Observação 3.13. *Recentemente, Q. Wang e C. Xia obtiveram alguns resultados de rigidez de hypersuperfícies no espaço hiperbólico explorando a geometria da aplicação normal de Gauss. Dentre os resultados obtidos, o Teorema 1.3 de [68] tem uma particular relação com o nosso resultado anterior no sentido de que ambos exploram a imagem da aplicação de Gauss $N(\Sigma)$ de uma hipersuperfície Σ^n fechada em $\mathbb{H}^{n+1}$, entretanto com diferentes contradomínios para N.*

Observação 3.14. *Pela equação (3.16), concluimos ainda que ∇l_a é um campo conforme sobre Σ^n com fator conforme $\rho = (1/n)\Delta\, l_a$. Como $\nabla l_a = a^\top$, temos pelo Teorema 1 de [41] (cf. Lema 2.13) uma demonstração alternativa para o Teorema 3.9.*

3.4 Um resultado na esfera Euclidiana

Como uma aplicação do clássico teorema de K. Yano e M. Obata (cf. Lema 2.12), provaremos nesta seção o seguinte resultado, que é uma extensão do Teorema 2 de [50].

Teorema 3.15. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada, com curvatura escalar constante $\mathrm{R} = n(n-1)$, isometricamente imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n estiver contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera totalmente geodésica.*

Demonstração. Denote por N o campo unitário e normal que orienta Σ^n e A o operador de Weingarten a ele associado. Como a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então existe um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que a função $f_a = \langle N, a\rangle$ não muda de sinal em Σ^n. Veja que se f_a for identicamente nula, então pelo Teorema 1 de [50] concluimos que Σ^n é uma esfera totalmente geodésica e portanto o resultado segue. Suponhamos então que f_a não seja identicamente nula.

Pela hipótese sobre a curvatura escalar R, concluimos imediatamente que $S_2 = 0$. Observe que se $S_1 = 0$, nada há a provar. Vamos agora mostrar que esta é, na verdade, a única possibilidade. Suponha por contradição que $S_1 \neq 0$. Então, pela Proposição 2.24(ou Lema 3.7 de [8]), teremos que

$$L_1(S_1) = \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\} + 3S_1S_3 + (n-1)S_1^2,$$

donde concluimos que

$$f_aL_1(S_1) = \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\}f_a + 3S_1S_3f_a + (n-1)S_1^2f_a.$$

Agora, da igualdade

$$\int_\Sigma S_1L_1(f_a)d\Sigma = \int_\Sigma f_aL_1(S_1)d\Sigma,$$

segue pela Proposição 3.1 que

$$\int_\Sigma \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\}f_a d\Sigma + (n-1)\int_\Sigma S_1^2 f_a d\Sigma = 0.$$

Usando o Lema 2.22, concluimos da igualdade anterior que

$$\{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\}f_a = 0 \quad \text{e} \quad S_1^2 f_a = 0. \tag{3.24}$$

Sendo $\Phi = A - HI$, temos pela hipótese sobre a curvatura escalar que $|\Phi|^2 = (n-1)S_1^2$. Da igualdade anterior e pela segunda igualdade em (3.24), concluimos que $|\Phi|^2 f_a^2 = 0$ em Σ^n. Assim, se g denota a métrica Riemanniana de Σ^n, segue imediatamente deste fato que

$$\operatorname{Hess} l_a = \frac{1}{n}(\Delta l_a)g. \tag{3.25}$$

Veja que se l_a for uma função não-constante em Σ^n, então a identidade obtida em (3.25) juntamente com o fato de que a curvatura escalar R de Σ^n é constante, nos permite concluir pelo Lema 2.12 que Σ^n é isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, o que é uma contradição, pois a segunda equação em (3.24) implicará $f_a = 0$ em Σ^n. Portanto l_a é obrigatoriamente uma função constante. Mas isto significa que Σ^n é uma esfera totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ e novamente pelo argumento anterior, teremos uma contradição. Portanto, $S_1 = 0$ e com isto provamos que $|A|^2 = 0$, o que nos permite concluir que Σ^n é uma esfera totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}$. $\square$

Observação 3.16. *Recentemente, e de maneira independente, H. Alencar, H. Rosenberg e W. Santos em [9] e Q. Wang e C. Xia em [67] obtiveram o mesmo resultado de rigidez para hipersuperfícies fechadas imersas na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com imagem pela aplicação de Gauss contida num hemisfério de $\mathbb{S}^{n+1}$para o caso de curvatura escalar constante* $\mathrm{R} > n(n-1)$.

3.5 Rigidez de cilindros Riemannianos

Uma classe particular de hipersuperfícies com curvatura média constante em formas espaciais é formada pelos cilindros Riemannianos. Alguns autores têm obtido resultados interessantes usando como hipótese algumas das propriedades elementares destes cilindros. Resultados de rigidez podem ser encontrados em [15], [23] e [62]. Faremos agora uma breve descrição de como construir tais hipersuperfícies no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$.

Considere um inteiro k satisfazendo $0 < k < n$. Definamos a função suave $h : \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por

$$h(p) = p_1^2 + \cdots + p_{k+1}^2 ,$$

onde $p = (p_1, \ldots, p_{n+2})$. Para uma constante real $\varrho > 0$, seja $\Sigma^n = h^{-1}(\varrho^2)$. Não é difícil verificar que Σ^n é uma hipersuperfície completa, orientável com curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$. Temos ainda que

$$\overline{N}(p) = \frac{\overline{\nabla} h}{|\overline{\nabla} h|}(p) = \frac{1}{\varrho\sqrt{1+\varrho^2}}(\nu(p) + \varrho^2 p) \tag{3.26}$$

define um campo vetorial unitário e normal em Σ^n, onde $\nu : \Sigma^n \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ é a aplicação definida por $\nu(p) = (p_1, \ldots, p_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ e $\overline{\nabla}$ representa a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^{n+1}$. Se $p = (p_1, \ldots, p_{n+2})$ é um ponto da hipersuperfície Σ^n, então, considerando as imersões canônicas $\mathbb{S}^k(\varrho) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ e

$\mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2}\ ) \hookrightarrow \mathbb{R}_1^{n-k+1}$ e tomando a imersão produto, vemos facilmente que

$$\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2}\ ).$$

Além disso, seu operador de Weingarten A com respeito ao campo unitário e normal $N = -\overline{N}$ tem as seguintes curvaturas principais

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \frac{\sqrt{1+\varrho^2}}{\varrho} \quad \text{e} \quad \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{\varrho}{\sqrt{1+\varrho^2}}.$$

A classificação das hipersuperfícies com segunda forma fundamental paralela em formas espaciais, obtida por H.B. Lawson (cf. Teorema 4 de [42]), foi completamente descrita no espaço hiperbólico por P.J. Ryan em [56]. Este resultado, que enunciaremos agora, será de fundamental importância nesta seção.

Teorema 3.17. *Seja Σ^n uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\mathbb{H}^{n+1}(c)$, onde $c = -1/R^2$, $R > 0$, com operador de Weingarten A. Suponha que Σ^n admita, no máximo, duas curvaturas principais distintas e constantes. Então, a menos de isometrias, Σ^n é uma subvariedade aberta de:*

(i) $\Omega_1 = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}(c)\,;\, p_1 = 0\}$. *Neste caso, $A = 0$ e Ω_1 é isométrico a $\mathbb{H}^n(c)$;*

(ii) $\Omega_2 = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}(c)\,;\, p_1 = \varrho > 0\}$. *Neste caso, $A = \frac{1/R^2}{\sqrt{1/\varrho^2+1/R^2}} I_n$, onde I_n denota o operador identidade, e Ω_2 é isométrico a $\mathbb{H}^n(-1/(\varrho^2+R^2))$;*

(iii) $\Omega_3 = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}(c)\,;\, p_{n+2} = p_{n+1} + R\}$. *Neste caso, $A = (1/R)I$ e Ω_3 é isométrico ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$;*

(iv) $\Omega_4 = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}(c)\,;\, \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = \varrho^2 > 0\}$. *Neste caso, $A = \lambda I$, onde $\lambda = \sqrt{1/\varrho^2 + 1/R^2}$ e Ω_4 é isométrico a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n(\varrho)$;*

(v) $\Omega_5 = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}(c)\,;\, \sum_{i=1}^{k+1} p_i^2 = \varrho^2 > 0\,,\, \sum_{j=k+2}^{n+1} p_j^2 - p_{n+2}^2 = -\beta^2,\, \beta^2 = \varrho^2 + R^2\}$. *Neste caso, $A = \xi I_k \oplus \mu I_{n-k}$, onde*

$$\xi = \sqrt{1/\varrho^2 + 1/R^2} \ \text{ e } \ \mu = \frac{1/R^2}{\sqrt{1/\varrho^2 + 1/R^2}}$$

e Ω_5 é isométrico a $\mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{H}^{n-k}(-1/(\varrho^2 + R^2))$.

Observação 3.18. *Seja* $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2})$ *um cilindro hiperbólico imerso isometricamente em* $\mathbb{H}^{n+1}$. *Agora, fixe em* $\mathbb{R}^{n+2}_1$ *o vetor tipo-tempo unitário* $a = (0, \ldots, 0, 1)$. *Usando a expressão em (3.26), concluimos por um cálculo direto que*

$$l_a = -\frac{\sqrt{1+\varrho^2}}{\varrho} f_a, \tag{3.27}$$

onde f_a *e* l_a *são as funções suporte associadas à esta imersão. É fácil ver ainda, usando (3.1), que as funções suporte associadas as hipersuperfícies umbílicas de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *cumprem, para algum vetor apropriado em* $\mathbb{R}^{n+2}_1$, *uma relação de dependência linear como aquela descrita em (3.27).*

Inspirados pela observação anterior, provaremos o nosso próximo teorema que é uma versão em formas espaciais de curvatura não-positiva de um resultado obtido recentemente por L.J. Alías, A. Brasil e O. Perdomo para hipersuperfícies imersas na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ (veja [15], Teorema 3).

Teorema 3.19. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ *uma hipersuperfície completa, com curvatura média constante* H, *imersa isometricamente no ambiente* $\overline{M}^{n+1}$ *de curvatura seccional constante* $c \in \{-1, 0\}$. *Se* $l_a = \lambda f_a$ *para algum vetor não-nulo* $a \in \mathbb{R}^{n+2}_\nu$ *e algum número real* λ, *então* Σ^n *é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou*

(i) $\mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2})$, *para algum* $\varrho > 0$ *e algum* $1 \leq k \leq n-1$, *quando* $c = -1$;

(ii) $\mathbb{S}^k(\varrho) \times \mathbb{R}^{n-k}$, *para algum* $\varrho > 0$ *e algum* $1 \leq k \leq n-1$, *quando* $c = 0$.

Demonstração. Faremos a prova do caso $c = -1$. O caso $c = 0$ é completamente similar. Inicialmente iremos supor que a é um vetor tipo-tempo em $\mathbb{R}^{n+2}_1$ tal que $l_a = \lambda f_a$ para algum número real λ. Então, neste caso, temos $\lambda \neq 0$ e $H \neq 0$. Observe que $\Delta l_a = \lambda \Delta f_a$. Agora, pela Proposição 3.1 concluimos que

$$\left(n\lambda + (1+\lambda^2)S_1 + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2\right) l_a = 0$$

em Σ^n. Usando a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz, concluimos da igualdade anterior que

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right) S_1 + \frac{n}{2}. \tag{3.28}$$

A equação anterior mostra que S_2 é também uma função constante em Σ^n. Repetindo o argumento anterior para o operador L_1, teremos que

$$S_3 = \frac{2}{3\lambda}S_2 + \frac{(n-1)}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_1S_2 + \frac{2\lambda}{3}S_2. \tag{3.29}$$

Agora, usando a Proposição 2.24(veja também Lema 3.7 de [8]), segue que

$$\begin{aligned} L_1(S_1) &= \Delta S_2 + \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\} + 2S_2(|A|^2+n) \\ &\quad -S_1\big[S_1S_2 - 3S_3 + (n-1)S_1\big]. \end{aligned}$$

Assim, observando que S_1 e S_2 são constantes, obtemos da igualdade acima que

$$|\nabla A|^2 + S_1^2S_2 - 4S_2^2 + 2nS_2 + 3S_1S_3 + S_1^2 - nS_1^2 = 0$$

em Σ^n. Mutiplicando a igualdade anterior por λ e usando as equações (3.28) e (3.29) teremos, após alguns cálculos imediatos, que a seguinte identidade

$$\lambda|\nabla A|^2 + 2S_1S_2 + 2\lambda S_1^2S_2 + 2\lambda^2S_1S_2 - 4\lambda S_2^2 + 2n\lambda S_2 = 0\,, \tag{3.30}$$

se verifica em Σ^n.

Usando as desigualdades de Newton (cf. Seção 2.6) e a equação (3.29), é fácil ver que $S_2 \neq 0$. Assim, de (3.28) e (3.30) obtemos $|\nabla A|^2 = 0$, donde se conclui que $\nabla A = 0$ sobre Σ^n. Este fato nos permite concluir que as curvaturas principais Σ^n são constantes (cf. Teorema 1 de [1]). Agora, pela completude de Σ^n, temos pelo Teorema 3.17 (ou Teorema 4 de [42]) que Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílca, neste caso uma esfera geodésica, pois a é tipo-tempo, ou um cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\varrho)\times\mathbb{H}^{n-k}(-1/\sqrt{1+\varrho^2})$, para algum $\varrho > 0$ e algum $1 \leq k \leq n-1$.

Vamos supor agora que a seja um vetor tipo-espaço unitário em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ de modo que a relação $l_a = \lambda f_a$ seja válida para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, Σ^n será uma hiperesfera totalmente geodésica se $\lambda = 0$. De fato, se isto ocorre, então l_a é identicamente nula, donde concluimos, por (3.5), que $|A|^2f_a^2 = 0$ em Σ^n. Se existe $p_0 \in \Sigma^n$ tal que $|A|^2(p_0) \neq 0$, então, por continuidade, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p_0 em Σ^n na qual $|A|^2(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{U}$. Logo, teremos que $f_a = 0$ em $\mathcal{U}$, o que não pode ocorrer. Portanto $|A|^2 = 0$, o que prova que Σ^n é uma hiperesfera totalmente geodésica.

Supondo agora que $\lambda \neq 0$ e usando mais uma vez a Proposição 3.1, teremos

$$\big(n\lambda + (1+\lambda^2)S_1 + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2\big)\, l_a = 0$$

em Σ^n. Repetindo o argumento de continuidade do parágrafo anterior, é fácil mostrar que $S_1 + n\lambda + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2 + \lambda^2 S_1$ é uma função identicamente nula em Σ^n, e, portanto os mesmos passos do caso $\langle a, a\rangle = -1$ se aplicam e assim iremos concluir que $\nabla A = 0$. Logo, pelo teorema de classificação de P.J. Ryan, segue que Σ^n é uma hiperesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$.

Agora analisaremos o caso em que o vetor a é tipo-luz. Neste caso o vetor a determina uma folheação de $\mathbb{H}^{n+1}$ por horoesferas, o que nos assegura que a função $l_a = \langle \psi, a\rangle$ tem sinal estrito. Segue das fórmulas (3.6) e (3.7) que $H \neq 0$. Usando novamente a Proposição 3.1, segue que

$$\big(n\lambda + (1+\lambda^2)S_1 + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2\big)\, l_a = 0$$

em Σ^n. Desta igualdade segue que $n\lambda + (1+\lambda^2)S_1 + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2 = 0$ em Σ^n. Assim, o argumento dos casos anteriores se repete, o que nos permite concluir, usando novamente o Teorema 3.17, que Σ^n é uma horoesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$ e portanto o teorema está provado. $\square$

Observação 3.20. *A técnica usada na demonstração do Teorema 3.19 se aplica da mesma maneira ao seu congênere esférico, o que nos fornece uma demonstração alternativa para supracitado teorema de L.J. Alías, A. Brasil e O. Perdomo. Além disso, o argumento nos permite concluir que S_r é uma função constante para todo r, donde Σ^n é uma hipersuperfície isoparamétrica em $\overline{M}^{n+1}(c)$ e, portanto, usando os resultados de É. Cartan [28] e B. Segre [57], obtemos outra prova do teorema anterior. Note ainda que este argumento não se aplica no caso de hipersuperfícies na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Capítulo 4

Hipersuperfícies em produtos warped semi-Riemannianos

Neste capítulo, o qual corresponde ao artigo [18], em colaboração com H.F. de Lima, estaremos interessados no estudo de hipersuperfícies Riemannianas completas não-compactas com r-curvaturas médias limitadas imersas numa classe de produtos warped semi-Riemannianos que inclui o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e o Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$. Listaremos agora alguns resultados recentes que estão diretamente relacionados com os problemas que abordaremos adiante. Dentre estes resultados, citamos o trabalho de L.J. Alías, M. Dajczer e J. Ripoll em [13], no qual os autores estenderam o clássico Teorema de Bernstein para gráficos mínimos (ou seja, com curvatura média nula) em $\mathbb{R}^3$ para superfícies mínimas completas num ambiente Riemanniano com curvatura de Ricci não-negativa e munido com um campo de Killing. Tal resultado foi obtido supondo que o sinal da função ângulo entre a aplicação normal de Gauss e o campo de Killing permanece inalterado ao longo da superfície.

Em [27], A. Caminha obteve resultados gerais tipo-Bernstein para hipersuperfícies completas imersas num ambiente Riemanniano munido de um campo conforme e fechado, utilizando como ferramenta analítica uma espécie de *princípio do máximo no infinito*, obtido como consequência da versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não-compactas provado por S.T. Yau em [66].

Recentemente, A.L. Albujer e L.J. Alías em [5], estudaram hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante, imersas no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ e que têm uma limitação geométrica de estar *distante do infinito futuro (ou passado)* deste espaço, no sentido de que a hipersuperfície está *abaixo (acima)* de um slice. Os autores provaram que com esta limitação, tais hipersuperfícies têm necessariamente curvatura média $H = 1$. Como consequência deste fato, eles concluiram que as únicas superfícies tipo-espaço e completas com curvatura média constante em $\mathcal{H}^3$ que estão entre dois planos de $\mathcal{H}^3$ são planos.

Em conexão com o capítulo 3 desta tese e seguindo as idéias de A.L. Albujer e L.J. Alías [5], H.F. de Lima obteve em [32] uma caracterização de hiperplanos espaciais em $\mathbb{R}_1^{n+2}$ como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço, completas com curvatura média limitada satisfazendo $H \geq 0$ e distantes do infinito passado de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ tais que sua imagem pela aplicação normal de Gauss está contida no fecho de uma bola geodésica de raio $\rho > 0$ em $\mathbb{H}^{n+1}$, onde $\cosh \rho \leq 1 + \inf_\Sigma H$. Este resultado fornece uma extensão do teorema de Y.L. Xin e R. Aiyama (cf. [3] e [60])

Aplicando a técnica de S.T. Yau [66] e impondo restrições apropriadas sobre as r-curvaturas médias e sobre a norma do gradiente da função altura, F.E.C. Camargo, A. Caminha e H.F. de Lima em [22], estabeleceram resultados tipo-Bernstein no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ e no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ para hipersuperfícies completas que possuem a mesma restrição geométrica descrita em [5].

Motivados pelos resultados acima mencionados e usando um princípio do máximo generalizado obtido por A. Caminha e H.F de Lima em [26], provaremos alguns resultados de unicidade de slices tipo-espaço em um produto warped semi-Riemanniano $\varepsilon\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ sob apropriadas restrições nas r-curvaturas médias e sobre o ângulo normal da hipersuperfície, isto é, sobre o ângulo entre a aplicação normal de Gauss da hipersuperfície e o campo unitário ∂_t.

4.1 Cálculo do L_r da função altura

Sejam $\psi : \Sigma^n \to \varepsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana, com Σ^n orientada pelo campo unitário e normal N, onde $\varepsilon = \varepsilon_{\partial_t} = \varepsilon_N$, e $h = (\pi_I)|_\Sigma$ a sua função altura. Denotemos por $\overline{M}^{n+1}$ a variedade $\varepsilon I \times_f M^n$ e por $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\overline{M}$ e Σ, respectivamente. Como sabemos,

$$\nabla h = \varepsilon \partial_t^\top = \varepsilon \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N. \tag{4.1}$$

Em particular, desta igualdade segue que

$$|\nabla h|^2 = \varepsilon \left(1 - \langle N, \partial_t \rangle^2\right). \tag{4.2}$$

De posse desses fatos provaremos o seguinte resultado, que é uma versão unificada de uma fórmula obtida, no caso Lorentziano, por L.J. Alías e A.G. Colares (cf. [14], Lema 4.1).

Proposição 4.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \varepsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana com campo normal N e função altura h. Então, para cada $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$L_r(h) = (\log f)'\big(\varepsilon \mathrm{tr}(P_r) - \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle\big) + \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr}(AP_r). \tag{4.3}$$

Demonstração. Fixemos um ponto p em Σ^n e um vetor v em $T_p\Sigma$. Seja A o operador de Weingarten com respeito ao campo normal N. Veja que podemos escrever $v = w + \varepsilon\langle v, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $w \in T_p\overline{M}$ é tangente à fibra Riemanniana de $\overline{M}$ a qual passa por p. Usando a Proposição 7.35 de [54], temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_v \partial_t &= \overline{\nabla}_w \partial_t + \varepsilon\langle v, \partial_t\rangle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \overline{\nabla}_w \partial_t \\
&= (\log f)' w = (\log f)'(v - \varepsilon\langle v, \partial_t\rangle\partial_t).
\end{aligned}$$

Usando isto e a equação (4.1), teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla h &= \overline{\nabla}_v \nabla h - \varepsilon\langle Av, \nabla h\rangle N \\
&= \overline{\nabla}_v(\varepsilon\,\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N) - \varepsilon\langle Av, \nabla h\rangle N \\
&= \varepsilon(\log f)' w - v(\langle N, \partial_t\rangle)N + \langle N, \partial_t\rangle Av - \varepsilon\langle Av, \nabla h\rangle N \\
&= \varepsilon(\log f)' w + (\langle Av, \partial_t\rangle - \langle N, \overline{\nabla}_v \partial_t\rangle)N + \langle N, \partial_t\rangle Av \\
&- \varepsilon\langle Av, \nabla h\rangle N \\
&= \varepsilon(\log f)' w + (\langle Av, \partial_t^{\top}\rangle - \langle N, (\log f)' w\rangle)N + \langle N, \partial_t\rangle Av \\
&- \varepsilon\langle Av, \nabla h\rangle N \\
&= \varepsilon(\log f)' w + \varepsilon(\log f)'\langle v, \partial_t\rangle\langle N, \partial_t\rangle N + \langle N, \partial_t\rangle Av \\
&= \varepsilon(\log f)'\{v - \langle v, \partial_t\rangle(\varepsilon\,\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N)\} + \langle N, \partial_t\rangle Av.
\end{aligned}$$

Da expressão acima obtida, concluimos imediatamente que

$$\nabla_v \nabla h = (\log f)'(\varepsilon\, v - \langle v, \nabla h\rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t\rangle Av. \tag{4.4}$$

Considere agora um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em torno do ponto $p \in \Sigma^n$. Então, como

$$L_r(h) = \mathrm{tr}(P_r \mathrm{Hess}(h)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla h, P_r E_i\rangle$$

teremos finalmente, pela simetria do operador P_r e pela equação (4.4) que

$$
\begin{aligned}
L_r(h) &= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle (\log f)' \left(\varepsilon\, E_i - \langle E_i, \nabla h\rangle \nabla h\right) + \langle N, \partial_t\rangle A E_i \ ,\ P_r E_i \Big\rangle \\
&= (\log f)' \big(\varepsilon \mathrm{tr}(P_r) - \langle P_r \nabla h, \nabla h\rangle\big) + \langle N, \partial_t\rangle \mathrm{tr}(A P_r).
\end{aligned}
$$

□

Fazendo $r = 0$ na proposição anterior, obtemos imediatamente o seguinte.

Corolário 4.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \varepsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana com campo normal N e função altura h. Então,*

$$
\Delta h = (\log f)' \big(\varepsilon n - |\nabla h|^2\big) + \varepsilon n H \langle N, \partial_t\rangle. \tag{4.5}
$$

Observação 4.3. *Para $t_0 \in I$, se orientarmos o slice $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ usando o campo unitário e normal ∂_t teremos, de acordo com [10], que $\Sigma^n_{t_0}$ tem r-curvatura média constante*

$$
H_r = -\varepsilon \left(\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \right)^r .
$$

Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional completa e considere $\Phi : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ um campo de transformações lineares auto-adjuntas definidas em Σ^n. Definimos o operador diferencial linear de segunda ordem $\Box : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ por

$$
\Box u = \mathrm{tr}\,(\Phi\, \mathrm{Hess}\, u). \tag{4.6}
$$

O resultado seguinte, obtido por A. Caminha e H.F. de Lima (cf. Corolário 3.3 de [26]), estabelece, sob determinadas condições, uma versão do Princípio do Máximo de Omori-Yau para o operador $\Box$.

Lema 4.4. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-negativa e $u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ limitada superiormente. Se Φ é semi-definido positivo e $\mathrm{tr}(\Phi)$ é limitado superiormente em Σ^n, então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k \geq 1}$ em Σ^n tal que*

$$
(\,i\,)\ u(p_k) > \sup_{\Sigma} u - \frac{1}{k}\ ,\ (\,ii\,)\ |\nabla u|(p_k) < \frac{1}{k} \quad e\ (\,iii\,)\ \Box u(p_k) < \frac{1}{k}.
$$

4.2 Resultados de unicidade em espaços tipo-Steady State

No espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^{n+2}_1$ considere a base canônica $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ e seja $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ um vetor não-nulo e tipo-luz a tal que $\langle a, e_{n+2}\rangle > 0$. A região aberta do espaço de de Sitter $\mathbb{S}^{n+1}_1$ dada por

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{p \in \mathbb{S}^{n+1}_1\,;\, \langle p, a\rangle > 0\}$$

é denominada de *Steady State space*. Recentemente, a geometria de $\mathcal{H}^{n+1}$ tem sido estudada por diversos autores veja [5], [25] e [29], por exemplo. Fixando $b \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ outro vetor tipo-luz tal que $\langle a, b\rangle = 1$, é possível mostrar (cf. [5], Seção 4) que a aplicação $\varphi : \mathcal{H}^{n+1} \to -\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(p) = \left(\log(\langle p, a\rangle)\,,\, \frac{p - \langle p, a\rangle b - \langle p, b\rangle a}{\langle p, a\rangle}\right)$$

é uma isometria. Isto nos fornece um modelo warped deste espaço, onde cada slice $\Sigma^n_{t_0}$, isométrico a $\mathbb{R}^n$, é chamado de hiperplano em $\mathcal{H}^{n+1}$.

Nesta seção iremos considerar hipersuperfícies conexas Σ^n isometricamente imersas em *espaços tipo-Steady State*, ou seja, produtos warped do tipo

$$-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n,$$

onde M^n é uma variedade Riemanniana completa e conexa. Pelo que vimos na Seção 4.1, cada slice $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$ é uma hipersuperfície tipo-espaço completa, conexa e com r-curvatura média constante e igual a 1, quando consideramos a orientação dada pelo campo unitário e normal $N = \partial_t$. Por este motivo, iremos supor que a aplicação de Gauss das hipersuperfícies tipo-espaço completas $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ consideradas neste parágrafo satisfaz $\langle N, \partial_t\rangle \leq -1$. Usando esta escolha, definimos o *ângulo hiperbólico normal* θ de Σ^n como sendo a função suave $\theta : \Sigma^n \to [0, +\infty)$ que cumpre a propriedade

$$\cosh\theta = -\langle N, \partial_t\rangle.$$

Seguindo a terminologia introduzida por A.L. Albujer e L.J. Alías em [5], dizemos que uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ está *distante do infinito futuro* de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(\Sigma^n) \subset \{(t, x) \in -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n; t \leq s\}.$$

Geometricamente, isto significa que $\psi(\Sigma^n)$ está contida na região abaixo do slice $\Sigma^n_s = \{s\} \times M^n$.

Quando Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, com curvatura média constante $H > 1$, imersa no Steady State space $\mathcal{H}^{n+1}$ com bordo $\partial\Sigma^n$ contido num hiperplano tipo-espaço de $\mathcal{H}^{n+1}$, uma estimativa do gradiente devida a S. Montiel (cf. [49], Teorema 7) garante que o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz $\cosh\theta \leq H$.

De posse das considerações precedentes, podemos enunciar e provar nosso próximo resultado.

Teorema 4.5. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional não-negativa e $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço completa, com curvatura seccional não-negativa e menor do que ou igual a 1, e distante do infinito futuro de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Suponha que existam constantes positivas α e β tais que $\alpha \leq H_r \leq H_{r+1} \leq \beta$, para algum $0 \leq r \leq n-1$. Se o ângulo hiperbólico normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cosh\theta \leq \inf_{\Sigma} \frac{H_{r+1}}{H_r},$$

então Σ^n é um slice de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

Demonstração. Sejam A o operador de Weingarten associado ao campo unitário e normal N globalmente definido em Σ^n e $\Phi : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ a aplicação definida por $\Phi = H_r P_r$, onde $P_r = (-1)^r S_r I + A P_{r-1}$ é o r-ésimo tensor de Newton associado ao operador A. Considere $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local que diagonaliza A em um ponto $p \in \Sigma^n$. Então, escrevendo $AE_i = \lambda_i E_i$, teremos, de acordo com a Seção 2.6, que $P_r E_i = (-1)^r S_r(A_i) E_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n \\ j_1, \ldots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_r}.$$

Como $\binom{n}{r} H_r = (-1)^r S_r$, concluimos, para cada i, que

$$\langle \Phi E_i, E_i \rangle = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r \, S_r(A_i). \tag{4.7}$$

Sejam $\overline{R}$ e R_M os respectivos tensores de curvatura de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ e M^n. Então, como $\operatorname{grad} f = f' \partial_t$, segue pela Proposição 7.42 de [54] que

$$\langle \overline{R}(E_i, E_j) E_i, E_j \rangle = \langle R_M(E_i, E_j) E_i, E_j \rangle + 1. \tag{4.8}$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Denotanto por σ_{ij} o subespaço 2-dimensional de $T_p\Sigma$ gerado por E_i e E_j, segue pela equação de Gauss (2.4) que

$$K_\Sigma(\sigma_{ij}) = \overline{K}(\sigma_{ij}) - \lambda_i\lambda_j, \tag{4.9}$$

onde K_Σ e $\overline{K}$ denotam as curvaturas seccionais de Σ^n e $-\mathbb{R}\times_{e^t} M^n$, respectivamente. Da hipótese sobre a curvatura seccional da fibra Riemanniana M^n, segue pela equação (4.8) que $\overline{K}(\sigma_{ij}) \geq 1$. Mas então, usando a equação (4.9), concluimos que

$$\lambda_i\lambda_j \geq 1 - K_\Sigma(\sigma_{ij}).$$

Finalmente pela hipótese sobre K_Σ, concluimos da expressão anterior que $\lambda_i\lambda_j \geq 0$, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Observe que na equação (4.7) temos um produto de $2r$ fatores formados pelas curvaturas principais de A, logo pelo que provamos no parágrafo anterior, segue que $\langle \Phi E_i, E_i\rangle \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, o que mostra que Φ é um operador semi-definido positivo. Além disso, como H_r é uma função limitada, o mesmo ocorre com $\mathrm{tr}(\Phi) = c_r H_r^2$, onde $c_r = (n-r)\binom{n}{r}$.

Segue da definição que

$$\Box e^h = \mathrm{tr}(\Phi\,\mathrm{Hess}(e^h)) = H_r L_r(e^h).$$

Usando a equação (2.12) e a Proposição 4.1, concluimos da igualdade anterior que

$$\Box e^h = c_r e^h H_r(-H_r - \langle N, \partial_t\rangle H_{r+1}). \tag{4.10}$$

Observe que podemos escrever

$$H_r(-H_r - \langle N, \partial_t\rangle H_{r+1}) = H_r^2\Big(- \langle N, \partial_t\rangle \frac{H_{r+1}}{H_r} - 1\Big).$$

Usando a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz e as hipóteses sobre H_r e H_{r+1}, obteremos da expressão anterior que

$$H_r(-\langle N, \partial_t\rangle H_{r+1} - H_r) \geq \alpha^2\Big(\frac{H_{r+1}}{H_r} - 1\Big) \geq 0.$$

Assim, da igualdade em (4.10), concluimos que

$$\Box e^h \geq c_r e^h \alpha^2\Big(\frac{H_{r+1}}{H_r} - 1\Big) \geq 0. \tag{4.11}$$

Como estamos supondo Σ^n distante do infinito futuro de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, temos pelo Lema 4.4 que existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k \geq 1}$ em Σ^n de tal maneira que

$$\lim_k (e^h)(p_k) = e^{\sup_\Sigma h} \quad \text{e} \quad \lim_k \Box e^h(p_k) \leq 0$$

Portanto, da expressão em (4.11), obtemos

$$0 \geq \lim_k \Box e^h(p_k) \geq c_r e^{\sup_\Sigma h} \alpha^2 \lim_k \left(\frac{H_{r+1}}{H_r}(p_k) - 1 \right) \geq 0.$$

Disto segue que

$$\inf_\Sigma \frac{H_{r+1}}{H_r} = 1.$$

Agora, a hipótese sobre o ângulo hiperbólico normal θ da hipersuperfície nos assegura que $\langle N, \partial_t \rangle = 1$, e, portanto, por (4.2), temos $|\nabla h|^2 = 0$, o que nos permite concluir que Σ^n é um slice de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. $\square$

Observação 4.6. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-negativa. Como consequência do clássico Teorema de Bonnet-Myers, se uma hipersuperfície tipo-espaço completa $\psi : \Sigma^n \to -\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ tem curvatura média H (não necessariamente constante) satisfazendo*

$$|H| \leq c < \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$$

onde c é uma constante positiva, então Σ^n deve ser compacta. De fato, inicialmente observamos que $2\sqrt{n-1}/n \leq 1$ para $n \geq 2$. Logo, neste caso, estamos considerando hipersuperfícies com curvatura média $|H| < 1$. Se Ric_Σ denota o tensor de Ricci de Σ^n, então, denotando por A o operador de Weingarten desta imersão e por $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, temos da equação de Gauss (2.4) que

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle + nH\langle AX, X \rangle + \langle AX, AX \rangle, \tag{4.12}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n. Agora, usando a desigualdade (16) em [5] e as hipóteses sobre a curvatura seccional de M^n e sobre a curvatura média de Σ^n, obtemos

$$\mathrm{Ric}_\Sigma \geq n - 1 - \frac{n^2 H^2}{4} > 0, \tag{4.13}$$

e com isto concluimos o que havíamos afirmado.

Observação 4.7. *No caso em que* $M^n = \mathbb{R}^n$ *(e com isso* $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n = \mathcal{H}^{n+1}$*), se* Σ^n *está distante do infinito futuro de* $\mathcal{H}^{n+1}$*, então o Lema* 1 *de [5] nos assegura que* Σ^n *é difeomorfa a* $\mathbb{R}^n$*. Em particular,* $\mathcal{H}^{n+1}$ *não possui hipersuperfícies tipo-espaço compactas (sem bordo). Por outro lado, segue da classificação das hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas do espaço de de Sitter (cf. [45], Exemplo* 1*) que não existem hipersuperfícies tipo-espaço completas e totalmente umbílicas imersas em* $\mathcal{H}^{n+1}$ *com curvatura média satisfazendo* $0 \leq H < 1$*.*

Segue da discussão anterior que, num certo sentido, é natural nos restringirmos ao estudo de hipersuperfícies no Steady State space com curvatura média $H \geq 1$. Motivados pelas observações anteriores, estabelecemos o seguinte resultado.

Corolário 4.8. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa e distante do infinito futuro de* $\mathcal{H}^{n+1}$*. Suponha que exista uma constante real* β *tal que* $1 \leq H \leq \beta$*. Se o ângulo hiperbólico normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cosh\theta \leq \inf_{\Sigma} H,$$

então Σ^n *é um hiperplano.*

Demonstração. Considerarando o modelo warped de $\mathcal{H}^{n+1}$ descrito no início desta seção e seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.5 junto com o Lema 4.4 (e usando a estimativa para o tensor de Ricci de Σ^n dada em (4.13)), obtemos o resultado. □

Observação 4.9. *Usando como ferramenta analítica o Princípio do Máximo de Omori-Yau clássico (cf. Lema 3.2), A.G. Colares e H.F. de Lima obtiveram alguns resultados de rigidez de hipersuperfícies* Σ^n *imersas em espaços tipo-Steady Space* $-\mathbb{R}\times_{e^t} M^n$ *(cf. Teorema 5.2 de [30]) supondo que a fibra Riemanniana* M^n *tem curvatura seccional não-negativa e que a hipersuperfície* Σ^n *satisfaça a condição de estar distante do infinito futuro de* $-\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$*.*

4.3 Resultados de unicidade em espaços tipo-hiperbólico

Parafraseando o caso Lorentziano, voltaremos nossa atenção a *espaços tipo-hiperbólico*, ou seja, produtos warped do tipo

$$\mathbb{R} \times_{e^t} M^n,$$

onde M^n é uma variedade Riemanniana completa e conexa. De acordo com o que vimos na Seção 4.1, os slices deste modelo são hipersuperfícies completas com curvatura média constante 1, se consideramos a orientação dada pelo campo vetorial unitário e normal $N = -\partial_t$. Por esta razão, iremos supor que a aplicação normal de Gauss das hipersuperfícies $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ desta seção, satisfaz a condição $-1 \leq \langle N, \partial_t \rangle \leq 0$. Com isto, definimos o *ângulo normal* θ de Σ^n como sendo a função suave $\theta : \Sigma^n \to [0, \frac{\pi}{2}]$ que cumpre a propriedade

$$\cos\theta = -\langle N, \partial_t \rangle.$$

Similarmente ao caso anterior, dizemos que uma hipersuperfície completa $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ está *distante do infinito futuro* de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(\Sigma^n)$ está contida abaixo do slice Σ^n_s.

Observação 4.10. *Uma motivação para considerarmos produtos warped do tipo $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ vem do fato de que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ é isométrico a $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$(uma isometria explícita entre estes espaços pode ser encontrada em [12]). Segue facilmente deste fato que os slices $\Sigma^n_{t_0} = \{t_0\} \times \mathbb{R}^n$ do modelo warped do espaço hiperbólico são precisamente as horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Considere $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão de uma variedade compacta Σ^n com *mean convex boundary* $\partial\Sigma^n$ contido numa horoesfera de $\mathbb{H}^{n+1}$. Suponha que ψ tem curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$. Por uma estimativa do gradiente devido a R. López e S. Montiel (cf. Teorema 4.1 de [43]), e levando em conta nossa escolha de orientação N, concluimos que o ângulo normal θ satisfaz $\cos\theta \geq H$.

Podemos finalmente enunciar e provar a versão Riemanniana do Teorema 4.5.

Teorema 4.11. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional nula e $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície completa e conexa com curvatura seccional não-negativa e distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Suponha que existam constantes positivas α e β satisfazendo $\alpha \leq H_{r+1} \leq H_r \leq \beta$, para algum $0 \leq r \leq n-1$. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup_{\Sigma} \frac{H_{r+1}}{H_r},$$

então Σ^n é um slice de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ as curvaturas principais do operador de Weingarten A de Σ^n associado ao campo unitário e normal N. Usando novamente a equação de Gauss (2.4), a Proposição 7.42 de [54] e nossas hipóteses sobre as curvaturas seccionais de Σ^n e M^n, teremos

$$\lambda_i \lambda_j \geq 1,$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Como na prova no Teorema 4.5, escolhendo $\Phi = H_r P_r$, temos que Φ é positivo definido com $\mathrm{tr}(\Phi)$ limitado em Σ^n. Assim, estamos em condições de aplicar o Lema 4.4. Usando agora as equações (2.12) e (4.3), obtemos como antes

$$\Box e^h = c_r e^h H_r (H_r + \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1}) \,, \tag{4.14}$$

onde $c_r = (n-r)\binom{n}{r}$. Assim, nossas hipóteses sobre H_r e H_{r+1}, junto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, nos fornecem

$$H_r (H_r + \langle N, \partial_t \rangle H_{r+1}) \geq \alpha^2 \left(1 - \frac{H_{r+1}}{H_r} \right) \geq 0. \tag{4.15}$$

Como estamos supondo que Σ^n está distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$, então aplicando o Lema 4.4 obtemos uma sequência de pontos $(p_k)_{k \geq 1}$ em Σ^n satisfazendo $\lim_k (e^h)(p_k) = e^{\sup_\Sigma h}$ e $\Box e^h(p_k) \leq 0$. Agora, usando as equações (4.14) e (4.15) concluimos que

$$0 \geq \lim_k \Box e^h(p_k) \geq c_r e^{\sup_\Sigma h} \lim_k \alpha^2 \left(1 - \frac{H_{r+1}}{H_r}(p_k) \right) \geq 0$$

Consequentemente,

$$\sup_\Sigma \frac{H_{r+1}}{H_r} = 1.$$

Portanto, da hipótese sobre o ângulo normal da hipersuperfície, concluimos que Σ^n é um slice de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. $\square$

Observação 4.12. *Quando o espaço ambiente $\varepsilon\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ tem curvatura seccional constante, segue da Proposição* 7.42 *de [54] que as curvaturas seccionais da fibra Riemanniana M^n são identicamente nulas. Além disso, como as hipersuperfícies consideradas aqui são completas, segue por um resultado devido a A.L. Albujer e L.J. Alías (cf. Lema* 7 *de [5]) que M^n deve necessariamente ser completa, ou seja, M^n deve ser uma forma espacial de curvatura seccional nula.*

Observando que $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ fornece um modelo warped para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, provaremos agora o seguinte resultado, que é uma extensão do Teorema 3.3 de [33].

Teorema 4.13. *Sejam M^n uma forma espacial Riemanniana de curvatura seccional nula e $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ uma hipersuperfície completa e conexa com segunda forma fundamental limitada e distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$. Suponha que a curvatura média H de Σ^n satisfaz $\alpha \leq H \leq 1$, para alguma constante positiva α. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup_{\Sigma} H,$$

então Σ^n é um slice de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$.

Demonstração. Observando que a hipótese sobre a curvatura da fibra M^n implica que $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ tem curvatura seccional constante -1. Logo pela equação de Gauss (2.4), segue que

$$\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X, X) = -(n-1)|X|^2 + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde Ric_{Σ} denota o tensor de Ricci de Σ^n. Assim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluimos da expressão acima que

$$\mathrm{Ric}_{\Sigma} \geq -(n-1) - nH|A| - |A|^2. \tag{4.16}$$

Considere $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ a função suave definida por $u = e^h$, onde h é a função altura da hipersuperfície Σ^n. Neste caso, usando a Proposição 4.3 e a equação (2.12), segue que

$$\Delta u = ne^h(1 + \langle N, \partial_t\rangle H).$$

Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos concluir ainda que

$$\Delta u \geq ne^h(1 - H). \tag{4.17}$$

Como Σ^n está distante do infinito futuro de $\mathbb{R} \times_{e^t} M^n$ e tem, por (4.16), curvatura de Ricci limitada inferiormente, segue-se pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau (cf. Lema 3.2) que existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n tal que $\lim_k(e^h)(p_k) = e^{\sup_\Sigma h}$ e $\lim_k \Delta u(p_k) \leq 0$. Portanto, pela desigualdade em (4.17), segue que

$$0 \geq \lim_k \Delta u(p_k) \geq e^{\sup_\Sigma h} \lim_k (1 - H(p_k)) \geq 0.$$

Da expressão anterior concluimos que $\sup_\Sigma H = 1$. O resultado segue agora pela hipótese sobre o ângulo normal de Σ^n. $\square$

Capítulo 5

Gráficos verticais num produto warped Riemanniano

Em [47], S. Montiel estudou hipersuperfícies compactas com curvatura média constante imersas em produtos warped do tipo $\mathbb{R} \times_f M^n$ e $\mathbb{S}^1 \times_f M^n$, tais que a curvatura de Ricci da fibra Riemanniana M^n, denotada por Ric_M, e a função warped f satisfazem a condição

$$\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)\sup(f'^2 - ff'').$$

Quando tais hipersuperfícies são localmente gráficos sobre M^n, a menos de casos particulares, o resultado de S. Montiel assegura que as hipersuperfícies em questão são slices $\{t_0\} \times M^n$.

Em [25], A. Caminha e H.F. de Lima estudaram gráficos verticais completos com curvatura média constante em produtos warped semi-Riemannianos utilizando como ferramentas analíticas os Laplacianos da função altura e de uma função tipo-suporte naturalmente associadas à imersão. Assim, impondo restrições apropriadas sobre a curvatura média e sobre o crescimento da função altura, os autores obtiveram condições necessárias para a existência de tais gráficos. Além disso, no caso 3-dimensional eles provaram um teorema tipo-Bernstein no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

Neste capítulo, que corresponde ao artigo [19] em colaboração com H.F. de Lima, estaremos interessados no estudo de gráficos verticais completos (com curvatura média constante) numa classe de produtos warped Riemannianos com uma condição sobre a curvatura seccional da fibra Riemanniana.

5.1 Cálculo do L_r de uma função tipo-suporte

Embora nosso objeto de estudo neste capítulo sejam hipersuperfícies em produtos warped Riemannianos, apresentaremos agora uma versão unificada de uma fórmula obtida por L.J. Alías e A.G. Colares em [14]. Seguindo as notações do capítulo anterior, provaremos a seguinte.

Proposição 5.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \varepsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana com campo normal N e função altura h. Se K é o campo fechado $f\partial_t$ e $\eta = \langle N, K\rangle$, então, para cada $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned} L_r(\eta) &= -\varepsilon\Big(\mathrm{tr}(P_r \circ \overline{R}_N) + c_r H_r \frac{f''}{f}\Big)\eta \\ &- \varepsilon\binom{n}{r+1}\big(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\big)\eta \\ &- \varepsilon\binom{n}{r+1}\langle \nabla H_{r+1}, K\rangle - \varepsilon c_r H_{r+1} f', \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\overline{R}_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador definido por

$$\overline{R}_N(X) = (\,\overline{R}(N, X)N\,)^\top.$$

Demonstração. Temos por definição que

$$L_r(\eta) = \mathrm{tr}\big(P_r \mathrm{Hess}\,\eta\big) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla\eta\,, P_r E_i\rangle, \tag{5.2}$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então

$$X\eta = \langle \overline{\nabla}_X N\,, K\rangle + \langle N\,, \overline{\nabla}_X K\rangle.$$

Como o campo K é fechado, segue de (2.3) que

$$\nabla\eta = -A(K^\top), \tag{5.3}$$

onde $K^\top = K - \varepsilon\eta N$ é a componente tangencial do campo K. Pela equação de Codazzi (2.5) segue-se que

$$(\,\overline{R}(X, K^\top)N\,)^\top = (\,\nabla_X A\,)(K^\top) - (\,\nabla_{K^\top} A\,)(X),$$

donde obtemos, por (5.3), que

$$\nabla_X \nabla\eta = -(\,\overline{R}(X, K^\top)N\,)^\top - A(\nabla_X K^\top) - (\,\nabla_{K^\top} A\,)(X). \tag{5.4}$$

Agora, observe que da decomposição vetorial do campo K e da equação de Gauss (2.4), podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X K = \nabla_X K^\top + \varepsilon\big(\langle AX,\ K^\top\rangle + X\eta\big)N - \varepsilon\eta AX.$$

Usando mais uma vez que o campo K é fechado, temos que $X\eta = -\langle AX, K^\top\rangle$, e desta igualdade concluimos da expressão anterior que

$$\nabla_X K^\top = \varepsilon\eta AX + f'X, \tag{5.5}$$

e assim, substituindo (5.5) em (5.4), obtemos

$$\nabla_X \nabla\eta = -(\,\overline{R}(X, K^\top)\,N\,)^\top - \varepsilon\eta A^2X - f'AX - (\,\nabla_{K^\top} A\,)(X).$$

Usando esta expressão, teremos de (5.2) que

$$\begin{aligned} L_r(\eta) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle\,\overline{R}(\,E_i\,, K^\top)\,N, P_rE_i\,\rangle - \varepsilon\eta\sum_{i=1}^{n}\langle A^2E_i, P_rE_i\rangle \\ &- f'\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, P_rE_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle(\,\nabla_{K^\top} A\,)(E_i), P_rE_i\,\rangle. \end{aligned}$$

Pela simetria do operador P_r e usando a Proposição 2.23, concluimos da igualdade anterior que

$$\begin{aligned} L_r(\eta) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle\,\overline{R}(\,E_i\,, K^\top)\,N, P_rE_i\,\rangle \\ &- \varepsilon\binom{n}{r+1}\big(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}\big)\eta \\ &- \varepsilon c_r H_{r+1} f' - \varepsilon\binom{n}{r+1}\langle\,\nabla H_{r+1}\,, K^\top\rangle. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Sejam $U, V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Escrevamos então $U = U^* + \varepsilon\langle U, \partial_t\rangle\partial_t$, $V = V^* + \varepsilon\langle V, \partial_t\rangle\partial_t$ e $W = W^* + \varepsilon\langle W, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $Z^* = (\pi_M)_*(Z)$ é a projeção do campo $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ sobre a fibra M^n. Feito isto, temos que

$$\begin{aligned}\overline{R}(U,V)W &= \overline{R}(U^*,V^*)W^* + \varepsilon\langle W,\partial_t\rangle\overline{R}(U^*,V^*)\partial_t + \varepsilon\langle V,\partial_t\rangle\overline{R}(U^*,\partial_t)W^* \\ &+ \langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\overline{R}(U^*,\partial_t)\partial_t + \varepsilon\langle U,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,V^*)W^* \\ &+ \langle U,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,V^*)\partial_t + \langle U,\partial_t\rangle\langle V,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,\partial_t)W^* \\ &+ \varepsilon\langle U,\partial_t\rangle\langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\overline{R}(\partial_t,\partial_t)\partial_t. \end{aligned} \tag{5.7}$$

A Proposição 7.42 de [54] nos fornece

(i) $\overline{R}(U^*,V^*)\partial_t = 0\,;$

(ii) $\overline{R}(U^*,\partial_t)W^* = -\overline{R}(\partial_t,U^*)W^* = -\varepsilon\langle U^*,W^*\rangle\dfrac{f''}{f}\partial_t =$
$- \varepsilon\Big(\langle U,W\rangle - \varepsilon\langle U,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\Big)\dfrac{f''}{f}\partial_t\,;$

(iii) $\overline{R}(U^*,\partial_t)\partial_t = \dfrac{f''}{f}U^* = \dfrac{f''}{f}\Big(U - \varepsilon\langle U,\partial_t\rangle\partial_t\Big)\,;$

(iv) $\overline{R}(\partial_t,V^*)W^* = \varepsilon\langle V^*,W^*\rangle\dfrac{f''}{f}\partial_t = \varepsilon\Big(\langle V,W\rangle - \varepsilon\langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\Big)\dfrac{f''}{f}\partial_t\,;$

(v) $\overline{R}(\partial_t,V^*)\partial_t = -\overline{R}(V^*,\partial_t)\partial_t = -\dfrac{f''}{f}V^* = -\dfrac{f''}{f}\Big(V - \varepsilon\langle V,\partial_t\rangle\partial_t\Big)\,;$

(vi) $\overline{R}(\partial_t,\partial_t) = 0.$

Usando as identidades obtidas anteriormente, temos de (5.7), após alguns cancelamentos imediatos, que

$$\begin{aligned}\overline{R}(U,V)W &= \overline{R}(U^*,V^*)W^* - \langle V,\partial_t\rangle\langle U,W\rangle\frac{f''}{f}\partial_t \\ &+ \langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\frac{f''}{f}U + \langle U,\partial_t\rangle\langle V,W\rangle\frac{f''}{f}\partial_t \\ &- \langle U,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle\frac{f''}{f}V. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Novamente fazendo uso da Proposição 7.42 de [54], é imediato verificar que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U^*,V^*)W^* &= R_M(U^*,V^*)W^* - \varepsilon\Big(\frac{f'}{f}\Big)^2\Big(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U\Big)\\
&+ \Big(\frac{f'}{f}\Big)^2\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t\rangle\partial_t + \Big(\frac{f'}{f}\Big)^2\langle U,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle V\\
&- \Big(\frac{f'}{f}\Big)^2\langle V,W\rangle\langle U,\partial_t\rangle\partial_t - \Big(\frac{f'}{f}\Big)^2\langle V,\partial_t\rangle\langle W,\partial_t\rangle U.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior em (5.8), segue facilmente que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)W &= R_M(U^*,V^*)W^* - \varepsilon\big((\log f)'\big)^2\big(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U\big)\\
&- (\log f)''\langle W,\partial_t\rangle\big(\langle U,\partial_t\rangle V - \langle V,\partial_t\rangle U\big)\\
&- (\log f)''\big(\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t\rangle - \langle U,\partial_t\rangle\langle V,W\rangle\big)\partial_t.
\end{aligned}$$

Usando que $K^* = 0$, da expressão obtida anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,K)N &= \varepsilon\big((\log f)'\big)^2\eta\, X\\
&- (\log f)''\langle N,\partial_t\rangle\big(\langle X,\partial_t\rangle K - \langle K,\partial_t\rangle X\big)\\
&+ (\log f)''\langle X,\partial_t\rangle\,\eta\,\partial_t,
\end{aligned}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Observe ainda que

$$\begin{aligned}
\langle X,\partial_t\rangle\,\eta\,\partial_t &= \langle X,\partial_t\rangle\langle f\partial_t,N\rangle\partial_t\\
&= \langle X,\partial_t\rangle\langle N,\partial_t\rangle f\partial_t\\
&= \langle X,\partial_t\rangle\langle N,\partial_t\rangle K.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\langle N,\partial_t\rangle\langle K,\partial_t\rangle X &= \langle N,\partial_t\rangle\langle f\partial_t,\partial_t\rangle X\\
&= \langle N,f\partial_t\rangle\langle \partial_t,\partial_t\rangle X\\
&= \varepsilon\eta\, X.
\end{aligned}$$

Após alguns cálculos imediatos, concluimos que

$$\overline{R}(X,K)N = \varepsilon\frac{f''}{f}\eta\, X.$$

Mas então, como $K = K^{\top} + \varepsilon\eta N$, teremos da igualdade anterior que

$$\overline{R}(X, K^{\top})N = \varepsilon\eta\Big(\overline{R}(N, X)N + \frac{f''}{f}X\Big).$$

Da igualdade acima obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\, \overline{R}(\, E_i\,, K^{\top})\, N, P_rE_i\,\rangle \;\;=\;\; \varepsilon\Big(\mathrm{tr}(P_r \circ \overline{R}_N) + \frac{f''}{f}\mathrm{tr}(P_r)\Big)\eta, \qquad (5.9)$$

onde $\overline{R}_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador definido por

$$\overline{R}_N(X) = (\, \overline{R}(N, X)N\,)^{\top}.$$

O resultado segue ao substituirmos (5.9) em (5.6). $\square$

Um caso particular do resultado acima é dado pelo seguinte.

Corolário 5.2. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \varepsilon I \times_f M^n$ uma imersão Riemanniana com campo normal N e função altura h. Se K é o campo fechado $f\partial_t$ e $\eta = \langle N, K\rangle$, então*

$$\begin{aligned}\Delta\eta \;\;&=\;\; -\varepsilon\Big\{\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 + |A|^2\Big\}\eta \\ &-\;\; \varepsilon nHf' - \varepsilon n\langle\nabla H, K\rangle, \qquad (5.10)\end{aligned}$$

onde Ric_M *denota a curvatura de Ricci da fibra M^n.*

Demonstração. Fazendo $r = 0$ na proposição anterior, e usando que $H_1 = H$, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\eta \;\;&=\;\; -\varepsilon\Big(\, \mathrm{tr}(\overline{R}_N) + n\frac{f''}{f}\,\Big)\eta - \varepsilon n\big(nH^2 - (n-1)H_2\big)\eta \\ &-\;\; \varepsilon nHf' - \varepsilon n\langle\nabla H\,, K^{\top}\rangle. \qquad (5.11)\end{aligned}$$

Agora, observando que $\mathrm{tr}(\overline{R}_N) = \overline{\mathrm{Ric}}(N, N)$, onde $\overline{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\varepsilon I \times_f M^n$, temos pelo Corolário 7.43 de [54] que

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) \;\;&=\;\; \overline{\mathrm{Ric}}(N^*, N^*) + \langle N, \partial_t\rangle^2\overline{\mathrm{Ric}}(\partial_t, \partial_t) \\ &=\;\; \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) - \varepsilon\langle N^*, N^*\rangle\left\{\frac{f''}{f} + (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right\} \\ &-\;\; n\frac{f''}{f}\langle N, \partial_t\rangle^2.\end{aligned}$$

Usando que $\langle N^*, N^* \rangle = \varepsilon(1 - \langle N, \partial_t \rangle^2)$, obtemos da expressão anterior, após alguns cálculos elementares, que

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) = \mathrm{Ric}_M(N^*,N^*) - \left\{ \frac{f''}{f} + (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 \right\} - (n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)' \langle N, \partial_t \rangle^2.$$

Portanto, a igualdade acima nos permite concluir que

$$\mathrm{tr}(\overline{R}_N) + n\frac{f''}{f} = \mathrm{Ric}_M(N^*,N^*) + (n-1)(\log f)''|\nabla h|^2 \tag{5.12}$$

É imediato verificar que

$$n^2H^2 - n(n-1)H_2 = |A|^2 \tag{5.13}$$

Finalmente, substituindo (5.12) e (5.13) em (5.11), obtemos o resultado. $\square$

Observação 5.3. *Em [21], (cf. Corolário 4.1), os autores demonstraram a fórmula obtida no Corolário 5.2 no caso Lorentziano, usando um argumento diferente do que apresentamos aqui.*

A idéia central da técnica que utilizaremos nesta seção é aplicar um princípio do máximo apropriado a uma função definida sobre uma hipersuperfície Σ^n, imersa isometricamente num produto warped $I \times_f M^n$, construida a partir das funções h e η, definidas anteriormente e que estão naturalmente associadas a esta imersão. O seguinte resultado, devido a K. Akutagawa [4], é uma consequência do princípio do máximo de Omori-Yau (cf. Lema 3.2).

Lema 5.4. *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional e completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e $g : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e não-negativa. Suponha que existam constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 1$ tais que $\Delta g \geq \alpha g^\beta$, então g é identicamente nula em Σ^n.*

5.2 Gráficos verticais num produto warped

No intuito de provarmos nosso teorema tipo-Bernstein, precisamos estabelecer o seguinte lema, que nos fornecerá uma condição necessária para aplicarmos o resultado de K. Akutagawa, enunciado anteriormente.

Lema 5.5. *Sejam* $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ *um produto warped satisfazendo a seguinte condição de convergência*

$$K_M \geq \sup_I (f'^2 - ff''), \tag{5.14}$$

onde K_M *é a curvatura seccional da fibra Riemanniana* M^n *e* $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa com curvatura média* H *e segunda forma fundamental* A *limitadas. Se* f''/f *é uma função limitada superiormente em* Σ^n*, então a curvatura de Ricci de* Σ^n *é limitada inferiormente.*

Demonstração. Denotemos por Ric_Σ o tensor de Ricci de Σ^n. Considere $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n. Então, de (2.4) segue-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle \\ &\geq \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle - \left(n|H||A| + |A|^2\right)|X|^2, \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Assim, como a curvatura média H e a segunda forma fundamental A são limitadas, então Ric_Σ será limitado inferiormente se o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima for limitado inferiormente. Por outro lado, usando a equação (5.7), temos que

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,E_i)X &= \overline{R}(X^*, E_i^*)X^* + \langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle \overline{R}(X^*, \partial_t)\partial_t \\ &+ \langle E_i, \partial_t\rangle \overline{R}(X^*, \partial_t)X^* + \langle X, \partial_t\rangle \overline{R}(\partial_t, E_i^*)X^* \\ &+ \langle X, \partial_t\rangle^2 \overline{R}(\partial_t, E_i^*)\partial_t, \end{aligned}$$

onde $X^* = X - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$ e $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$ são as projeções dos campos vetoriais tangentes X e E_i sobre a fibra Riemanniana M^n, respectivamente.

Agora, usando mais uma vez as fórmulas da Proposição 7.42 de [54] e pela equação (4.1), concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X,E_i)X, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle R_M(X^*, E_i^*)X^*, E_i^*\rangle - \frac{f''}{f}|X|^2|\nabla h|^2 \\ &+ \frac{f'^2}{f^2}\left(|\nabla h|^2 - (n-1)\right)|X|^2 \\ &+ (n-2)\left(\frac{f'^2 - ff''}{f^2}\right)\langle X, \nabla h\rangle^2, \end{aligned}$$

onde R_M denota o tensor de curvatura de M^n. Observe ainda que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle R_M(X^*,E_i^*)X^*,E_i^*\rangle &= \frac{1}{f^2}\sum_{i=1}^{n}K_M(X^*,E_i^*)\Big(|X|^2-\langle\nabla h,E_i\rangle^2|X|^2\\ &- \langle X,\nabla h\rangle^2-\langle X,E_i\rangle^2\\ &+ 2\langle X,\nabla h\rangle\langle X,E_i\rangle\langle\nabla h,E_i\rangle\Big).\end{aligned}$$

Portanto, usando a condição de convergência (5.14) e um cálculo direto, concluimos das identidades anteriores que

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(X,E_i)X,E_i\rangle \geq -(n-1)\,\frac{f''}{f}|X|^2,$$

donde segue o resultado. $\square$

Definição 5.6. Sejam Ω um domínio em M^n e $\psi:\Sigma^n\to I\times_f M^n$ uma hipersuperfície completa com função altura h. Dizemos que Σ^n é um *gráfico vertical sobre* Ω, se $\psi(x)=(u(x),x)$ para alguma função $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Além disso, dizemos que Σ^n *está entre dois slices* se existem dois números reais $t_1<t_2$ tais que $t_1\leq h(p)\leq t_2$, para todo $p\in\Sigma^n$.

No que segue, motivados pelo fato de que um slice $\{t_0\}\times M^n$ de $I\times_f M^n$ tem curvatura média constante $(f'/f)(t_0)$ com respeito à orientação dada por $-\partial_t$ (cf. [10] ou [47]), iremos considerar, nesta seção, gráficos verticais completos $\psi:\Sigma^n\to\overline{M}^{n+1}$ orientados pelo campo unitário e normal N de modo que $\langle N,\partial_t\rangle<0$. De posse dessas observações, podemos agora enunciar e provar nosso próximo resultado, que foi motivado pelo Teorema 3.3 de A. Albujer, F.E.C. Camargo e H.F. de Lima [6].

Teorema 5.7. *Seja $\overline{M}^{n+1}=I\times_f M^n$ um produto warped que satisfaz a condição de convergência (5.14) e cuja fibra Riemanniana M^n tem curvatura seccional não-positiva. Seja $\psi:\Sigma^n\to\overline{M}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante H e segunda forma fundamental A limitada. Suponha que Σ^n está entre dois slices e que*

$$0\leq H\leq\inf_{\Sigma}\frac{f'}{f}. \tag{5.15}$$

Se a função altura h de Σ^n satisfaz

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(\inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right)^{\beta}, \tag{5.16}$$

para algumas constantes positivas α e β, então Σ^n é um slice.

Demonstração. Considere a função suave e não-negativa $g : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g = f(1 + \langle N, \partial_t \rangle).$$

A hipótese de que Σ^n está entre dois slices nos assegura a existência de uma constante positiva C tal que $g \leq C$ em Σ^n.

Usando as fórmulas obtidas nos Corolários 4.2 e 5.2, temos que o Laplaciano de g se expressa como

$$\begin{aligned} \Delta g \ &= \ -\left\{ \mathrm{Ric}_M\,(N^*, N^*) - (n-1)\left(\frac{f'^2 - ff''}{f^2} \right) |\nabla h|^2 \right\} f \langle N, \partial_t \rangle \\ &\quad + \left(\frac{ff'' - f'^2}{f} \right) |\nabla h|^2 + n\frac{f'^2}{f} - nHf' + \left(nHf' - f|A|^2 \right) \langle N, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela condição de convergência (5.14), um cálculo direto nos fornece

$$\mathrm{Ric}_M\,(N^*, N^*) \geq (n-1)\left(\frac{f'^2 - ff''}{f^2} \right) |\nabla h|^2.$$

Assim, como $\langle N, \partial_t \rangle < 0$, obtemos que

$$\Delta g \geq \left(\frac{ff'' - f'^2}{f} \right) |\nabla h|^2 + n\frac{f'^2}{f} - nHf' + \left(nHf' - f|A|^2 \right) \langle N, \partial_t \rangle.$$

Consequentemente, como estamos supondo $K_M \leq 0$, temos ainda que

$$\Delta g \geq n\frac{f'^2}{f} - nHf' + \left(nHf' - f|A|^2 \right) \langle N, \partial_t \rangle.$$

Usando a desigualdade $|A|^2 \geq nH^2$, teremos, após alguns cálculos simples, que

$$\Delta g \geq n\left(\frac{f'}{f} - H \right) \left(f' + Hf\langle N, \partial_t \rangle \right).$$

Um pouco mais de álgebra elementar nos fornece

$$\Delta g \geq n \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} \left(\inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right) g \geq \frac{n}{C} \inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} \left(\inf_{\Sigma} \frac{f'}{f} - H \right) g^2.$$

Agora, suponha por contradição que $H < \inf_{\Sigma}(f'/f)$. Neste ponto, observamos que como estamos supondo Σ^n entre dois slices, então f''/f é uma função limitada, logo pelo Lema 5.5 temos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente e portanto pelo Lema 5.4, concluimos que $g = 0$. Portanto $\langle N, \partial_t \rangle = -1$, o que nos permite concluir que Σ^n é um slice $\{t_0\} \times M^n$, que, como sabemos, tem curvatura média constante $(f'/f)(t_0)$. Isto nos dá uma contradição. O argumento anterior nos fornece $H = \inf_{\Sigma} \inf_{\Sigma}(f'/f)$ e, desse modo, pela hipótese exigida em (5.16), Σ^n deve ser um slice. $\square$

5.3 Aplicações no espaço hiperbólico

Nesta seção consideramos novamente o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ dado como um produto warped

$$\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n, \tag{5.17}$$

(cf. Seção 4.3, observação 4.10). Além disso, de acordo com o que vimos no capítulo anterior, os slices deste modelo, que são as horoesferas de $\mathbb{H}^{n+1}$, têm curvatura média constante 1 quando tomamos a orientação dada pelo campo vetorial unitário e normal $N = -\partial_t$.

Com essas considerações, do Teorema 5.7 obtemos a seguinte extensão do Teorema 5.2 de [25].

Corolário 5.8. *Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante $0 \leq H \leq 1$ e segunda forma fundamental limitada. Se Σ^n está entre duas horoesferas e sua função altura h satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(1 - H\right)^{\beta},$$

para constantes positivas α e β, então Σ^n é uma horoesfera.

De acordo com o exemplo 4.3 de [48], podemos considerar $\mathbb{H}^{n+1}$ como o produto warped

$$\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{H}^n.$$

Neste caso, os slices são as hiperesferas em $\mathbb{H}^{n+1}$. Com isto, temos outra imediata aplicação do Teorema 5.7, que é dada pelo seguinte.

Corolário 5.9. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *um gráfico vertical completo com curvatura média constante* H *e segunda forma fundamental limitada. Suponha que* Σ^n *está entre duas hiperesferas e que*

$$0 \leq H \leq \inf_{\Sigma}(\tanh t).$$

Se a função altura h *de* Σ^n *satisfaz*

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(\inf_{\Sigma} \tanh t - H \right)^{\beta},$$

para constantes positivas α *e* β*, então* Σ^n *é uma hiperesfera.*

Analisando a prova do Teorema 5.7, observamos que a hipótese sobre Σ^n está entre dois slices é uma condição suficiente para garantir que f e f'' são ambas funções limitadas em Σ^n. Como nos modelos warped de $\mathbb{H}^{n+1}$ apresentados nesta seção tem-se $f'' = f$, é suficiente apenas garantir que a função warped f seja limitada. Consequentemente, considerando mais uma vez $\mathbb{H}^{n+1}$ como o produto warped $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$, obtemos a seguinte extensão do Teorema 5.1 de [25].

Corolário 5.10. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *um gráfico vertical completo com curvatura média constante* $0 \leq H \leq 1$ *e segunda forma fundamental limitada. Se existir uma constante real* C *tal que a função altura* h *de* Σ *satisfaça*

$$h \leq C - \log\left(1 + \langle N, \partial_t \rangle\right),$$

e, além disso,

$$|\nabla h|^2 \leq \alpha \left(1 - H\right)^{\beta},$$

para constantes positivas α *e* β*, então* Σ^n *é uma horoesfera.*

Observação 5.11. *No Corolário 5.10, o termo* $-\log\left(1 + \langle N, \partial_t \rangle\right)$ *deve ser interpretado como* $+\infty$ *quando* $\langle N, \partial_t \rangle = -1$*.*

5.4 Um teorema de rigidez num espaço produto

Nesta seção, obteremos outro teorema de rigidez com respeito a um gráfico vertical completo Σ^n com curvatura média constante num espaço produto $I \times M^n$. De acordo com o que vimos na seção anterior, iremos considerar gráficos verticais Σ^n de modo que sua aplicação normal de Gauss N satisfaça $-1 \leq \langle N, \partial_t \rangle < 0$. Com esta escolha, como sabemos, o *ângulo normal* θ de Σ^n é a função suave $\theta : \Sigma \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dada por

$$\cos\theta = -\langle N, \partial_t \rangle.$$

Feitas estas considerações preliminares, podemos agora enunciar e provar nosso próximo resultado.

Teorema 5.12. *Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ um espaço produto, cuja fibra Riemanniana M^n ou é isométrica a $\mathbb{S}^n$ ou é flat. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ um gráfico vertical completo com curvatura média constante H e segunda forma fundamental A limitada. Se o ângulo normal θ de Σ^n satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup\left\{1 - |A|^2, \frac{1}{3}\right\}, \tag{5.18}$$

então Σ^n é um slice.

Demonstração. Suponhamos que a fibra Riemanniana M^n seja isométrica a $\mathbb{S}^n$. Note que, pelo Lema 5.5, a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Defina a função suave $\xi : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ por

$$\xi = (1 + \langle N, \partial t \rangle)^2.$$

Observe que ξ é uma função limitada em Σ^n. Por outro lado, usando (2.12) temos que

$$\Delta\xi = 2|\nabla\langle N, \partial_t \rangle|^2 + 2(1 + \langle N, \partial t \rangle)\Delta\langle N, \partial_t \rangle.$$

Agora, do Corolário 5.2, concluimos que

$$\Delta\xi = 2|\nabla\langle N, \partial_t \rangle|^2 - 2(1 + \langle N, \partial t \rangle)\left\{\mathrm{Ric}_{\mathbb{S}^n}(N^*, N^*) + |A|^2\right\}\langle N, \partial_t \rangle, \tag{5.19}$$

onde $\mathrm{Ric}_{\mathbb{S}^n}$ denota a curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^n$. Um cálculo imediato nos permite concluir ainda que

$$\mathrm{Ric}_{\mathbb{S}^n}(N^*, N^*) = (n-1)|\nabla h|^2. \tag{5.20}$$

Portanto, das igualdades em (5.19) e (5.20), segue que

$$\Delta\xi = 2|\nabla\langle N, \partial_t\rangle|^2 - 2(1 + \langle N, \partial t\rangle)\left\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right\}\langle N, \partial_t\rangle.$$

Esta igualdade pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= 2|\nabla\langle N, \partial_t\rangle|^2 - \left\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right\}\left(\langle N, \partial_t\rangle^2 + 2\langle N, \partial_t\rangle\right)\\ &- \left\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right\}\langle N, \partial_t\rangle^2.\end{aligned}$$

Então, observando que $\xi = \langle N, \partial_t\rangle^2 + 2\langle N, \partial_t\rangle + 1$ e $|\nabla h|^2 + \langle N, \partial_t\rangle^2 = 1$, teremos da igualdade anterior, após alguns cálculos elementares, que

$$\Delta\xi = 2|\nabla\langle N, \partial_t\rangle|^2 + \left\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right\}\left(|\nabla h|^2 - \xi\right). \tag{5.21}$$

Observe que a hipótese exigida em (5.18) implica que $-1 \leq \langle N, \partial_t\rangle \leq -1/3$, e, portanto

$$3\langle N, \partial_t\rangle^2 + 4\langle N, \partial_t\rangle + 1 \leq 0.$$

Desta desigualdade segue imediatamente que

$$2(1 + 2\langle N, \partial_t\rangle + \langle N, \partial_t\rangle^2) \leq 1 - \langle N, \partial_t\rangle^2.$$

Ou seja

$$2\xi \leq 1 - \langle N, \partial_t\rangle^2 = |\nabla h|^2,$$

donde concluimos que $|\nabla h|^2 - \xi \geq \xi$. Usando isto e a igualdade em (5.21) obtemos

$$\Delta\xi \geq \left\{(n-1)|\nabla h|^2 + |A|^2\right\}\xi. \tag{5.22}$$

Pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau (cf. Lema 3.2), existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\geq 1}$ em Σ^n com $\lim\limits_k \xi(p_k) = \sup\limits_\Sigma \xi$ e $\Delta\xi(p_k) < 1/k$, para todo $k \geq 1$. Logo de (5.22), temos que

$$\frac{1}{k} > \Delta\xi(p_k) \geq \left\{(n-1)|\nabla h|^2(p_k) + |A|^2(p_k)\right\}\xi(p_k) \geq 0,$$

para todo $k \geq 1$. Consequentemente, quando $k \to +\infty$, concluimos que

$$\lim_k \left\{(n-1)|\nabla h|^2(p_k) + |A|^2(p_k)\right\}\xi(p_k) = 0.$$

Usando mais uma vez a hipótese sobre o ângulo normal θ, obtemos que $\sup_\Sigma \xi = 0$ e assim $\xi = 0$ em Σ^n. Disso segue que $\langle N, \partial_t\rangle = -1$ e portanto $|\nabla h|^2 = 0$, o que prova que Σ^n é um slice.

Quando M^n é flat a prova é mais simples e segue os mesmos passos do caso anterior. $\square$

Corolário 5.13. *Seja* $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *um gráfico vertical completo com curvatura média constante* H *e curvatura escalar* R *limitada inferiormente. Se o ângulo normal* θ *de* Σ^n *satisfaz*

$$\cos\theta \geq \sup\left\{1 + \mathrm{R}\,, \frac{1}{3}\right\},$$

então Σ^n *é um hiperplano.*

Referências Bibliográficas

[1] ABEDI, E. ; POURREZA, E. Complete hypersurfaces in the hyperbolic space form with parallel shape operator. *Int. Math. Forum*, v. 1, n. 2, p. 77-81, 2006.

[2] ABEDI, E. ; POURREZA, E. Complete hypersurfaces in the hyperbolic space form with parallel Ricci tensor. *South. Asian Bull. of Math.*, v. 32, p. 193-197, 2008.

[3] AIYAMA, R. On the Gauss map of complete space-like hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space. *Tsukuba J. Math.*, v. 16, p. 353-361, 1992.

[4] AKUTAGAWA, K. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. *Math. Z.*, v. 196, n. 1, p. 13-19, 1987.

[5] ALBUJER, A.L. ; ALÍAS, L.J. Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the Steady State space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 137, p. 711-721, 2009.

[6] ALBUJER, A.L. ; CAMARGO, F.E.C ; LIMA, H.F. Complete spacelike hypersurfaces in a Robertson-Walker spacetime. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 151, p. 271-282, 2011.

[7] ALEDO, J.A. ; ALÍAS, L.J. ; ROMERO, A. Integral formulas for compact space-like hypersurfaces in de Sitter space: Applications to the case of constant higher order mean curvature. *J. of Geom. and Physics*, v. 31, p. 195–208, 1999.

[8] ALENCAR, H. ; CARMO, M. do ; COLARES, A.G. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Z.*, v. 213, n. 1, p. 117-131, 1993.

[9] ALENCAR, H. ; ROSENBERG, H. ; SANTOS, W. On the Gauss map of hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 132, p. 3731-3739, 2004.

[10] ALÍAS, L.J. ; ROMERO, A. ; SÁNCHEZ, M. Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes. *Gen. Relat. Grav.*, v. 27, p. 71–84, 1995.

[11] ALÍAS, L.J. ; BRASIL, A. ; COLARES, A.G. Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, v. 46, p. 465-488, 2003.

[12] ALÍAS, L.J. ; DAJCZER, M. Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab. *Comment. Math. Helv.*, v. 81, p. 653–663, 2006.

[13] ALÍAS, L.J. ; DAJCZER, M. ; RIPOLL, J. A Bernstein-type theorem for Riemannian manifolds with a Killing field. *Ann. Global Anal. Geom.*, v. 31, p. 363-373, 2007.

[14] ALÍAS, L.J. ; COLARES, A.G. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 143, p. 703-729, 2007.

[15] ALÍAS, L.J. ; BRASIL, A. ; PERDOMO, O. A characterization of quadratic constant mean curvature hypersurfaces of spheres. *J. Geom. Anal.*, v. 18, p. 687–703, 2008.

[16] ALÍAS, L.J. ; DAJCZER, M. Constant mean curvature graphs in a class of warped product spaces. *Geom Dedicata*, v. 131, p. 173-179, 2008.

[17] AQUINO, C.P. ; LIMA, H.F. On the Gauss map of complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011.

[18] AQUINO, C.P. ; LIMA, H.F. Uniqueness of hypersurfaces with bounded higher order mean curvatures in semi-Riemannian warped products. *Glasgow. Math. J.*, 2011.

[19] AQUINO, C.P. ; LIMA, H.F. On the rigidity of constant mean curvature complete vertical graphs in warped products. *Diff. Geom. and its Appl.*, v. 29, p. 590-596, 2011.

[20] BARBOSA, J.L. ; COLARES, A.G. Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature. *Ann. of Global Anal. Geom.*, v. 15, p. 277-297, 1997.

[21] BARROS, A. ; BRASIL, A. ; CAMINHA, A. Stability of spacelike hypersurfaces in foliated spacetimes. *Diff. Geom. and its Appl.*, v. 26, p. 357-365, 2008.

[22] CAMARGO, F.E.C ; CAMINHA, A. ; LIMA, H.F. Bernstein-type theorems in semi-Riemannian warped products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 139, p. 1841-1850, 2011.

[23] CAMINHA, A. On hypersurfaces into Riemannnian spaces of constant sectional curvature. *Kodai Math. J.*, v. 29, p. 185–210, 2006.

[24] CAMINHA, A. On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds. *J. Geom. and Phys.*, v. 56, p. 1144-1174, 2006.

[25] CAMINHA, A. ; LIMA, H.F. Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi-Riemannian warped products. *Bull. of the Belgian Math. Soc.*, v. 16, p. 91–105, 2009.

[26] CAMINHA, A. ; LIMA, H.F. Complete spacelike hypersurfaces in conformally stationary Lorentz manifolds. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 41, p. 173-189, 2009.

[27] CAMINHA, A. The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 42, p. 277-300, 2011.

[28] CARTAN, É. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces á courbure constante. *Ann. Mat. Pura Ed Appl.*, v. 17, p. 177-191, 1938.

[29] COLARES, A.G. ; LIMA, H.F. Spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the Steady State space. *Bull. Belg. Math. Soc.*, v. 17, p. 287-302, 2010.

[30] COLARES, A.G. ; LIMA, H.F. On the rigidity of spacelike hipersurfaces immersed in the Steady State space. *Publ. Math. Debrecen*, 2011.

[31] LIMA, H.F. A sharp height estimate for compact spacelike hypersurfaces with constant r-mean curvature in the Lorentz-Minkowski space and application. *Diff. Geom. and its Appl.*, v. 26, p. 445-455, 2008.

[32] LIMA, H.F. On the Gauss map of complete spacelike hypersurfaces with bounded mean curvature in the Minkowski space. *Bull. Belg. Math. Soc.*, v. 18, p. 537-541, 2011.

[33] LIMA, H.F. Rigidity theorems in the hyperbolic space. Preprint, 2011.

[34] EJIRI, N. A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, v. 33, p. 261-266, 1981.

[35] GÅRDING, L. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, v. 8, p. 957–965, 1959.

[36] GODDARD, A.J. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 82, p. 489-495, 1977.

[37] HARDY, G. ; LITTLEWOOD, J.E. ; PÓLYA, G. *Inequalities.* Cambridge, Cambridge Mathematical Library, 1989.

[38] HOFFMAN, D. ; OSSERMAN, R. ; SCHOEN, R. On Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$. *Coment. Math. Helv.*, v. 57, p. 519-531, 1982.

[39] HOU, Z.H. Submanifolds of constant scalar curvature in a hyperbolic space form. *Taiwan. Journal of Math.*, v. 3, p. 53-70, 1999.

[40] HUBER, A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Comment. Math. Helv.*, v. 32, p. 13–72, 1957.

[41] KIM, D-S ; KIM ; S-B, KIM ; Y.H. ; PARK, S-H. Conformal vector fields and totally umbilic hypersurfaces. *Bull. Korean Math. Soc.*, v. 39, p. 671-680, 2002.

[42] LAWSON, H.B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.*, v. 89, n. 2, p. 187–197, 1969.

[43] LÓPEZ, R. ; MONTIEL, S. Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space. *Calc. Var.*, v. 8, p. 177-190, 1999.

[44] LÓPEZ, R. Graphs of constant mean curvature in hyperbolic space. *Ann. of Global Anal. Geom.*, v. 20, p. 59-75, 2001.

[45] MONTIEL, S. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 37, p. 909–917, 1988.

[46] MONTIEL, S. ; LÓPEZ, R. Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. *Differential Geometry*, v. 52, p. 279-296, 1991.

[47] MONTIEL, S. Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes. *Math. Ann.*, v. 314, p. 529-553, 1999.

[48] MONTIEL, S. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 48, p. 711-748, 1999.

[49] MONTIEL, S. Complete non-compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter Space. *J. Math. Soc. Japan*, v. 55, p. 915-938, 2003.

[50] NOMIZU, K. ; SMYTH, B. On the Gauss mapping for hypersurfaces of constant mean curvature in the sphere. *Comment. Math. Helv.*, v. 44, p. 484–490, 1969.

[51] OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. *J. Math. Soc. Japan*, v. 14, p. 333-340, 1962.

[52] OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *Amer. J. Math.*, v. 96, p. 207-213, 1974.

[53] OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, v. 19, p. 205–214, 1967.

[54] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* New York, Academic Press, 1983.

[55] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sc. Math.*, v. 117, p. 217–239, 1993.

[56] RYAN, P.J. Hypersurfaces with parallel Ricci tensor. *Osaka J. Math.*, v. 8, p. 251-259, 1971.

[57] SEGRE, B. Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, v. 27, p. 203-207, 1938.

[58] SHARMA, R. ; DUGGAL, K.L. A characterization of an affine conformal vector field. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, v. 7, p. 201-205, 1985.

[59] TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 117, p. 251–275, 1965.

[60] XIN, Y.L. On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space. *Comment. Math. Helv.*, v. 66, p. 590-598, 1991.

[61] XIN, Y. *Minimal submanifolds and related topics.* Cingapura, World Scientific, 2003.

[62] XIMIN, L. ; WEIHONG, S. Hypersurfaces with constant scalar curvature in a hyperbolic space form. *Balkan J. of Geom. and Its Appl.*, v. 7, p. 121-132, 2002.

[63] YANO, K. ; OBATA, M. Conformal changes of Riemannian metrics. *J. Diff. Geo.*, v. 4, p. 53-72, 1970.

[64] YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* New York, 1970.

[65] YAU, S.T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 28, p. 201–228, 1975.

[66] YAU, S.T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.

[67] WANG, Q. ; XIA, C. Rigidity of hypersurfaces in a Euclidean sphere. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, v. 49, p. 241-249, 2006.

[68] WANG, Q. ; XIA, C. Topological and metric rigidity theorems for hypersurfaces in a hyperbolic space. *Czech. Math. J.*, v. 57, p. 435-445, 2007.