UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ IVAN MOTA NOGUEIRA

UMA ESTIMATIVA INTERIOR DO GRADIENTE PARA A EQUAÇÃO DA CURVATURA MÉDIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Fortaleza
2012

JOSÉ IVAN MOTA NOGUEIRA

UMA ESTIMATIVA INTERIOR DO GRADIENTE PARA A EQUAÇÃO DA CURVATURA MÉDIA EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial
Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2012

N712e Nogueira, José Ivan Mota

Uma estimativa interior do gradiente para a equação da curvatura média em variedades Riemannianas/ José Ivan Mota Nogueira. – Fortaleza: 2012.

38 f. : enc. ; 31 cm

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

1. Geometria Diferencial. 2. Variedades Riemannianas.

3. Hipersuperfícies. 1. Título.

CDD 516.36

À meus pais, meu irmão e meu amor Marina.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, príncipio e fim da minha existência, por ter me dado força e sabedoria nessa trajetória, permitindo que meu mestrado fosse bem proveitoso.

A minha família, minha mãe Maria Irismar, que por todos esses anos não mediu esforços para cuidar e garantir uma educação de qualidade para mim, meu irmão Ivanilson Mota, que sempre acreditou no meu potencial e com palavras de apoio renovou minhas forças. Minhas tias, que sempre me motivaram.

A Marina Araujo, a quem carinhosamente chamo de meu amor, por sua paciência, incentivo e apoio durante o desenvolvimento desse trabalho, por me fazer tão feliz por esses quase dois anos.

Agradeço também ao professor Jorge Herbert, pela orientação, a paciência, a ajuda e colaboração para este meu primeiro trabalho científico.

Também agradeço aos amigos da pós-graduação em matemática da UFC, Adriano Alves de Medeiros, Anderson Feitoza, Antonio Diego, Diego Eloi, Emanuel Viana, Eurípedes Carvalho, Edson Sampaio, Laerte Gomes, Robério Alexandre e em especial ao meu grande amigo Francisco Yuri, que conheço desde a graduação.

Agradecimentos especiais aos meus amigos, Charly Silvestre, Everton Cristian, Lina Nária, Ridley Gadelha, Israel Guedes, Jarbas Marcelino, Justino Cartaxo, Ivaneide Farias, Eder Pereira, Felipe Bento, Neila de Paula, Bernardo Filho, Dayane Araujo, Rodrigo Souza, Pollyana Machado, Priscila Santos, Rafael Silva, Odécio Sales.

À Andréa pela competência e agilidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Posso ter defeitos, viver ansioso e ficar irritado algumas vezes, mas não esqueço de que minha vida é a maior empresa do mundo. E que posso evitar que ela vá à falência. Ser feliz é reconhecer que vale a pena viver, apesar de todos os desafios, incompreensões e períodos de crise. Ser feliz é deixar de ser vítima dos problemas e se tornar autor da própria história. É atravessar desertos fora de si, mas ser capaz de encontrar um oásis no recôndito da sua alma. É agradecer a Deus a cada manhã pelo milagre da vida. Ser feliz é não ter medo dos próprios sentimentos. É saber falar de si mesmo. É ter coragem para ouvir um não. É ter segurança para receber uma crítica, mesmo que injusta."

Augusto Cury

Resumo

Deduzimos uma estimativa interior do gradiente para a equação da curvatura média para gráficos de Killing em variedades Riemannianas inspirado na técnica de perturbações normais devido à N. Korevaar.

Palavras-chaves: Equação da curvatura média, gráficos de Killing, perturbações normais.

Abstract

We deduce an interior gradient estimate for the mean curvature equation for Killing graphs in Riemannian manifolds inspired by the normal perturbation technique due to N. Korevaar.

Keywords: Mean curvature equation, Killing graphs, normal perturbation.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, nosso objetivo principal é estender a estimativa interior do gradiente de soluções da equação da curvatura média devido a Korevaar-Simon [10] (ver também [11]) a partir do caso de hipersuperfícies euclidianas para o caso geral de gráficos de Killing. O teorema principal em [18] para hipersuperfícies em espaços ambientes $N^{n+1} = M^n \times \mathbb{R}$ é um caso especial.

Seja M uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional dotada de um campo de Killing não-singular completo Y cuja distribuição ortogonal é integrável. Dada uma hipersuperfície integral P da distribuição ortogonal, verifica-se que P é uma subvariedade de M totalmente geodésica. Seja $\Omega \subset P$ um domínio limitado tal que órbitas do fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times P \to M$ gerado por Y são completas. Note que $\gamma = 1/\langle Y, Y\rangle$ pode ser vista como uma função em $\bar{\Omega}$ uma vez que $Y\gamma = 0$, pela equação de Killing. Além disso, o cilindro sólido $\Phi(\mathbb{R} \times \bar{\Omega})$, com a métrica riemanniana induzida, tem uma estrutura de produto *warped* $\bar{\Omega} \times_\rho \mathbb{R}$ onde $\rho = 1/\sqrt{\gamma}$.

Dada uma função u em $\bar{\Omega}$, o gráfico de Killing associado a esta função é a hipersuperfície

$$\Sigma = \{\Phi(u(x), x) : x \in \Omega\}.$$

Demonstra-se em [3] que Σ tem curvatura média $H(x)$ se somente se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz

$$\mathcal{Q}[u] = \mathrm{div}_P(\frac{\nabla u}{W}) - \gamma\langle \frac{\nabla u}{W}, \bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_s\rangle = nH$$

onde $W = \sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}$ e H é calculado segundo a orientação dada pela aplicação de Gauss

$$N = \frac{1}{W}\big(\gamma Y - \Phi_* \nabla u\big).$$

Na equação, ∇ e div denotam o gradiente e o divergente em P e $\bar{\nabla}$ a derivada covariante riemanniana em M.

Apresentamos a seguir um pouco mais da descrição geométrica destes gráficos de Killing e a estimativa geométrica. E por fim, demonstramos um resultado importante

Teorema 0.1 *Seja* $u \in C^2(B_{r_0}(x_0))$ *uma solução negativa da equação da curvatura média (1.11) onde* $H : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *é uma função em* $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. *Então, existe uma constante* $D = D(u(x_0), r_0, \gamma, H)$ *tal que* $|\nabla u(x_0)| \leq D$.

O Teorema 0.1 é principal resultado de [4] e como aplicação desse resultado prova-se a existência e unicidade de um gráfico radial no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média prescrita e limitada. Para curvatura média constante este resultado foi demonstrado por Bo Guan e Spruck [8] e no caso geral foi demonstrado por M. Dajczer, J. H. de Lira. e J. Ripoll [4].

Teorema 0.2 (Veja [4]) *Dado* $H \in C^{\alpha}(\mathbb{H}^n)$ *com* $\sup_{\mathbb{H}^n} |H| < 1$ *e* $\phi \in C^0(\partial_\infty \mathbb{H}^n)$, *onde* $\phi = u\big|_{\partial_\infty \mathbb{H}^n}$, *existe uma única função* $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{H}^n) \cap C^0(\bar{\mathbb{H}}^n)$ *tal que* Σ *tem curvatura média* H *e* $\partial_\infty \Sigma$ *é o gráfico radial de* ϕ.

Capítulo 1

Gráficos de Killing

Seja M uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional dotada de um campo vetorial de Killing Y. Suponha que a distribuição ortogonal $\mathcal{D}$ definida por Y é de posto constante e integrável. Neste caso, as folhas integrais são hipersuperfícies totalmente geodésicas. Dada uma folha integral P de $\mathcal{D}$, seja $\Omega \subset P$ um domínio limitado com fronteira regular $\Gamma = \partial\Omega$. Seja $\Phi : \mathbb{I} \times P \to M$ o fluxo gerado por Y com valores iniciais em M, onde $\mathbb{I}$ é um intervalo máximo de definição. O fluxo Φ leva isometricamente P nas folhas $P_s = \Phi_s(P)$, onde $\Phi_s = \Phi(s, \cdot)$, $s \in \mathbb{I}$.

Seja $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{I}$ uma função suave. O gráfico de Killing desta função u é a hipersuperfície $\Sigma \subset M$ parametrizada pela aplicação

$$X(p) = \Phi(u(p), p), \quad p \in \bar{\Omega}.$$

O cilindro de Killing K sobre Γ é, por sua vez definido por

$$K = \{\Phi(s, p) : s \in \mathbb{I},\, p \in \Gamma\}. \tag{1.1}$$

Seja N um campo de vetores normais unitários ao longo de Σ. No que se segue, denotamos por H a curvatura média de Σ com respeito à orientação dada por N.

Nosso objetivo é deduzir uma estimativa interior do gradiente para a equação da curvatura média para gráficos de Killing em variedades Riemannianas de dimensão $n+1$. Para isso, vamos começar descrevendo a geometria local do gráfico em termos não-paramétricos, por ser mais adequado para representar todos os invariantes geométricos, bem como suas equações locais em termos de coordenadas em P.

Sejam $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas locais em P. Este sistema é ampliado para um sistema de coordenadas em M definindo-se $x^0 = s$, o parâmetro do fluxo de Y. O espaço tangente de Σ no ponto $X(p)$, $p \in \bar{\Omega}$, é gerado pelos campos de vetores coordenados

$$X_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_X + u_i \frac{\partial}{\partial x^0}\Big|_X.$$

Em termos dessas coordenadas, a métrica induzida em Σ é expressa em componentes locais por

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle X_* \frac{\partial}{\partial x^i}, X_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \langle \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j} + u_j \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0} \rangle \\ &= \langle \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle + \langle \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}, u_j \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0} \rangle + \langle u_i \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \\ &\quad + \langle u_i \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, u_j \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0} \rangle, \end{aligned}$$

o que resulta em

$$g_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{\gamma} u_i u_j. \tag{1.2}$$

A versão contravariante da métrica é, portanto, dada por

$$g^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{\gamma + |\nabla u|^2},$$

onde $\gamma = \frac{1}{|Y|^2}$ e σ_{ij} são as componentes locais da métrica em P.

A fim de calcular a curvatura média de Σ, podemos fixar N como o campo vetorial normal

$$N = \frac{1}{W}\big(\gamma Y - \Phi_* \nabla u\big), \tag{1.3}$$

onde ∇u é o gradiente de u em P e

$$W = \sqrt{\gamma + |\nabla u|^2}. \tag{1.4}$$

A segunda forma fundamental de Σ calculada com relação a esta escolha do campo vetorial normal tem componentes locais

$$a_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{X_* \frac{\partial}{\partial x^i}} X_* \frac{\partial}{\partial x^j}, N \rangle, \tag{1.5}$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a derivada covariante em M. Deste modo, calculamos

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle \bar{\nabla}_{X_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j}, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{X_* \frac{\partial}{\partial x^i}} u_j \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j}, N \rangle + u_i \langle \bar{\nabla}_{\Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^j}, N \rangle + u_j \langle \bar{\nabla}_{\Phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, N \rangle \\ &\quad + u_{i,j} \langle \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, N \rangle + u_i u_j \langle \bar{\nabla}_{\Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial x^0}, N \rangle. \end{aligned}$$

Usando o fato de que as aplicações $p \mapsto \Phi(s,p)$ são isometrias e que as hipersuperfícies $\{\Phi(s,p) : p \in P\}$, $s \in \mathbb{I}$, são totalmente geodésicas, conclui-se que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, -\frac{1}{W}\nabla u\rangle + u_i \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} Y, \frac{1}{W}\gamma Y\rangle + u_j \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y, \frac{1}{W}\gamma Y\rangle \\ &+ u_{i,j}\langle Y, \frac{1}{W}\gamma Y\rangle + u_i u_j \langle \bar{\nabla}_Y Y, -\frac{1}{W}\nabla u\rangle. \end{aligned}$$

Segue da equação de Killing que

$$a_{ij} = \frac{u_{i;j}}{W} - \frac{u_i}{W}\gamma\langle \bar{\nabla}_Y Y, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle - \frac{u_j}{W}\gamma\langle \bar{\nabla}_Y Y, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle - \frac{u_i u_j}{W}\langle \bar{\nabla}_Y Y, \nabla u\rangle, \tag{1.6}$$

com $u_{i;j} = u_{i,j} - \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla u\rangle$, ou seja, $(u_{i;j})_{i,j=1}^n$ são as componentes do Hessiano de u em termos das coordenadas $(x^i)_{i=1}^n$ em P. Todavia, a_{ij} pode ser também expressa por

$$a_{ij} = \frac{u_{i;j}}{W} - \frac{u_i}{W}\frac{\gamma_j}{2\gamma} - \frac{u_j}{W}\frac{\gamma_i}{2\gamma} - \frac{u_i u_j}{2W}u^k\frac{\gamma_k}{\gamma^2}. \tag{1.7}$$

Tomando traços com respeito a métrica induzida, obtém-se a seguinte expressão para a curvatura média H sobre a hipersuperfície Σ:

$$nH = \Big(\sigma^{ij} - \frac{u^i}{W}\frac{u^j}{W}\Big)\frac{u_{i;j}}{W} - \frac{2\gamma + |\nabla u|^2}{W^3}\langle \frac{\bar{\nabla}\gamma}{2\gamma}, \nabla u\rangle. \tag{1.8}$$

Alternativamente, temos

$$nH = \Big(\sigma^{ij} - \frac{u^i}{W}\frac{u^j}{W}\Big)\frac{u_{i;j}}{W} - \frac{2\gamma + |\nabla u|^2}{W^3}\gamma\langle \bar{\nabla}_Y Y, \nabla u\rangle. \tag{1.9}$$

onde utilizou-se o fato de que

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, \nabla u\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{\nabla u} Y, Y\rangle = \frac{1}{2\gamma^2}\langle \bar{\nabla}\gamma, \nabla u\rangle. \tag{1.10}$$

Observe que

$$\Big(\frac{u^i}{W}\Big)_{;i} = \frac{1}{W}u^i_{;i} - \frac{1}{W^3}u^i u^j u_{i;j} - \frac{1}{2W^3}u^i\gamma_i$$

Verifica-se facilmente que (1.8) pode ser escrita na forma divergente como

$$\mathrm{div}_P \frac{\nabla u}{W} - \frac{1}{2\gamma W}\langle \bar{\nabla}\gamma, \nabla u\rangle = nH. \tag{1.11}$$

Segue de (1.10) que (1.11) é equivalente à

$$\mathrm{div}_P \frac{\nabla u}{W} - \frac{\gamma}{W}\langle \bar{\nabla}_Y Y, \nabla u\rangle = nH \tag{1.12}$$

onde $\bar{\nabla}_Y Y$ é tangente a P pela equação de Killing.

1.1 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos elementares, embora importantes, da estrutura geométrica descrita anteriormente. No que segue, $\mathbb{M}^d(\kappa)$ denota a forma espacial de dimensão d, completa e simplesmente conexa, com curvatura seccional constante κ.

Fixemos, doravante, $M = \mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$ e P uma hipersuperfície totalmente geodésica em $\mathbb{M}^{n+1}(\kappa)$. Assim, P é um modelo da forma espacial n-dimensional $\mathbb{M}^n(\kappa)$ com a mesma curvatura. Seja

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1} \mapsto p \in P$$

um sistema de coordenadas polares na variedade P, centradas em algum ponto o em P. Consideremos também

$$(\theta^1, \cdots, \theta^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$$

coordenadas generalizadas em $\mathbb{S}^{n-1}$. Em termos dessas coordenadas, a métrica em P é expressa por

$$dr^2 + sn_\kappa^2(r) d\sigma^2,$$

onde $d\sigma^2 = \sigma_{ij} d\theta^i d\theta^j$ é a métrica usual em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $sn_\kappa(r)$ é dada pela expressão

$$sn_\kappa(r) = \begin{cases} r, & \text{se} \quad \kappa = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{\kappa} r}{\sqrt{\kappa}}, & \text{se} \quad \kappa > 0 \\ \dfrac{\operatorname{senh}\sqrt{-\kappa} r}{\sqrt{-\kappa}}, & \text{se} \quad \kappa < 0 \end{cases}$$

Sejam c a geodésica em M passando por o e ortogonal a P e Y o campo de Killing em M gerado pela translação geodésica ao longo de c. A norma ao quadrado deste campo é igual a

$$\langle Y, Y \rangle = cs_\kappa^2(r).$$

Assim, no ponto o, o vetor $Y(o)$ é a velocidade unitária de c. Lembremos que a função $sn_\kappa(r)$ é a solução da equação de Jacobi $\ddot{u} + \kappa u = 0$ com condições iniciais $u(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = 1$, onde $\cdot$ indica a derivada com respeito a r. Além disso, $\dot{sn}_\kappa(r) = cs_\kappa(r)$.

A restrição de Y a P define um campo normal a P fora do conjunto de pontos singulares de Y em P. Como antes, $\Phi(s, p)$ denota o fluxo gerado por Y e $\mathcal{D} = \ker \omega$, onde $\omega = \langle Y, \cdot \rangle$. No caso que ora consideramos, as folhas integrais de $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies totalmente geodésicas dadas por $P_s = \Phi(P)$. Assim, o parâmetro s do fluxo pode ser considerado como uma coordenada em M. As coordenadas$(r, \theta^1, \cdots, \theta^n)$ são então estendidas a M ao longo do fluxo: associamos os mesmos valores dessas coordenadas a pontos correspondentes em P e $\Phi_s(P)$ com respeito à aplicação $\Phi_s : P \to P_s$. A métrica M é dada em termos destas coordenadas cilíndricas (r, θ, s) por

$$dl^2 = cs_\kappa^2(r)ds^2 + dr^2 + sn_\kappa^2(r)d\sigma^2. \tag{1.13}$$

Determinamos agora a conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ de M em termos dessas coordenadas. Temos, pela equação de Killing,

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, Y \rangle = 0.$$

Em particular, a norma do campo de Killing é constante ao longo das órbitas do fluxo $s \mapsto \Phi(s, p)$. Além disso, o fato de que as folhas integrais de $\mathcal{D}$ são hipersuperfícies totalmente geodésicas implica que

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial \theta^i} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} Y, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \rangle = 0$$

Segue igualmente da equação de Killing que

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} Y \rangle = -\frac{1}{2} \partial_r \langle Y, Y \rangle = -cs_\kappa(r) \dot{cs}_\kappa(r). \tag{1.14}$$

Geometricamente, estas equações significam o seguinte: para r fixado, a linha de fluxo de Y passando sobre o círculo geodésico em P centrado em o com raio r gera um cilindro, dito cilindro de Killing em M.

Afirmamos que estes cilindros são hipersuperfícies rotacionalmente invariantes com curvatura média constante. Em (1.14), é calculada a segunda forma fundamental de um cilindro de Killing na direção tangente a Y com respeito a normal unitária $\frac{\partial}{\partial r}$- tendo em conta que tal cilindro é hipersuperfície de nível da função coordenada r. Ademais, concluímos a partir da expressão

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} Y, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$$

que $Y = \frac{\partial}{\partial s}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ são direções principais desses cilindros. Calculemos, portanto, as correspondentes curvaturas principais. Para tanto, observamos que

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j} =: \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \theta^k}.$$

No entanto, como $P = \mathbb{M}^n(\kappa)$ é totalmente geodésica, temos

$$\Gamma_{ij}^1 = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \langle \nabla^{\mathbb{M}^n(\kappa)}_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = -\frac{\dot{sn}_\kappa(r)}{sn_\kappa(r)} h_{ij},$$

onde $(h_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ são as componentes da métrica induzida em P e $\nabla^{\mathbb{M}^n(\kappa)}$ é a conexão riemanniana em P. Assim, $(\Gamma_{ij}^1)_{i,j=1}^{n-1}$ são as componentes da segunda forma fundamental das esferas geodésicas em P com respeito ao campo vetorial unitário $\frac{\partial}{\partial r}$. Finalmente, $(\Gamma_{ij}^k)_{i,j,k=1}^{n-1}$ são os símbolos de Christoffel usuais para a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ em termos das coordenadas $(\theta^i)_{i=1}^{n-1}$. Concluímos que as curvaturas principais dos cilindros de Killing nas direções $\frac{\partial}{\partial s}/|\frac{\partial}{\partial s}| = cs_\kappa^{-1}(r)Y$ e $\frac{\partial}{\partial \theta^i}$ são respectivamente iguais a

$$\kappa_s = -\frac{\dot{cs}_\kappa(r)}{cs_\kappa(r)}, \quad \kappa_i = -\frac{\dot{sn}_\kappa(r)}{sn_\kappa(r)}.$$

assim, a curvatura média H_{cil} dos cilindros de Killing é dada por

$$nH_{cil} = -\frac{\dot{cs}_\kappa(r)}{cs_\kappa(r)} - (n-1)\frac{\dot{sn}_\kappa(r)}{sn_\kappa(r)}$$

Em seguida, descrevemos mais concretamente estes fatos nos casos particulares em que $\kappa = 0, 1, -1$. Para $\kappa = 0$, em um ambiente euclidiano, o campo vetorial Y é paralelo. Podemos fixar $Y(p) = a$, um campo vetorial constante. Em particular, sua restrição a $P = \{q \in M : \langle q, a \rangle = 0\}$ é um campo normal. Este campo obviamente é livre de singularidades. O fluxo gerado por Y é dado por $\Phi(s,p) = p + sa$. As hipersuperfícies de nível $\Phi_s(P)$ formam a família de hiperplanos paralelos a P com a mesma direção normal a. A métrica neste caso é dada por

$$dl^2 = ds^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2.$$

Quando $\kappa = -1$, a hipersuperfície integral P é um hiperplano totalmente geodésico $\mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{H}^{n+1}(-1)$. No modelo do semi-espaço

$$\mathbb{H}^{n+1}(-1) = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) : x^{n+1} > 0\},$$

este hiperplano pode ser visto como uma semi-esfera euclidiana centrada na origem o da fronteira assintótica $\{x^{n+1} = 0\}$. A origem o das coordenadas polares em P pode ser fixada, por meio de isometrias hiperbólicas, no ponto de maior coordenada x^{n+1} em P. Sendo assim, o traço da geodésica c pode ser fixado como a semi-reta vertical passando por o. Nesta configuração, o campo de Killing é dado por $Y(P) = p$. Este campo de vetores gera dilatações euclidianas, ou seja, translações em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ do tipo parabólico. O fluxo de Y é dado por $\Phi(s,p) = e^s p$. As hipersuperfícies $\Phi_s(P)$ consistem na família de semi-esferas euclidianas centradas em o. Os cilindros de Killing correspondem a cones esféricos euclidianos com vértice em o, contendo uma esfera geodésica em P centrada em o. O quadrado da norma de Y em um ponto arbitrário de P é igual a

$$\langle Y, Y\rangle = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial s}\rangle\big|_{s=0} = \frac{e^{2s}}{e^{2s}(x^{n+1})^2} = \frac{1}{(x^{n+1})^2}.$$

De outro modo, denotando por φ o ângulo entre o eixo vertical dado pelo traço de c e a norma do cilindro com direção p, então

$$1/\cos\varphi = 1/x^{n+1}.$$

Por outro lado, a distância geodésica r entre o e o ponto p

$$r = \int \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \ln(\sec\varphi + \tan\varphi).$$

Então, $e^r = \sec\varphi + \tan\varphi = (1 + \mathrm{sen}\varphi)/\cos\varphi$ e, portanto, $e^{-r} = \cos\varphi/(1 + \mathrm{sen}\varphi)$. Assim,

$$\cosh r = \sec\varphi.$$

Logo,

$$\langle Y, Y\rangle = \cosh^2 r.$$

Deste modo, a métrica em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ em termos de coordenadas cilindricas é dada por

$$\cosh^2 r ds^2 + dr^2 + \mathrm{senh}^2 d\sigma^2.$$

Quando $\kappa = 1$, o campo de Killing Y possui duas singularidades em pontos antípodas $a, -a$ em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. De fato, neste caso, Y é o campo gerado por rotações euclidianas fixando o eixo em $\mathbb{R}^{n+2}$ contendo a e $-a$. Consideramos $P = \mathbb{S}^n$ como o equador em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, contendo $\pm a$, para o qual Y é o campo normal fora dos pontos $\pm a$. A rotação gerada por Y leva $\mathbb{S}^n$ em uma família de esferas totalmente geodésicas, todas elas contendo $\pm a$. Fixamos, então, coordenadas polares (r, θ) com origem em $o \in \mathbb{S}^n$, de modo que o ponto a corresponde ao valor $r = \pi/2$. Definimos $\varphi = \pi/2 - r$. Com isto, as linhas de fluxo Y passando por pontos de $\mathbb{S}^n$ quando $s = 0$ são círculos geodésicos centrados em a. Podemos ajustar a norma de Y ao longo das linhas de fluxo de forma que, nos pontos de $\mathbb{S}^n$, o campo Y coincida com a velocidade desses círculos geodésicos com raio geodésico φ. Sendo assim, temos

$$\langle Y, Y\rangle = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \frac{\partial \Phi}{\partial s}\rangle = \mathrm{sen}^2\varphi = \cos^2 r.$$

Portanto, a métrica esférica é escrita como

$$\cos^2 r ds^2 + dr^2 + \mathrm{sen}^2 r d\sigma^2.$$

Uma outra classe natural de exemplos são os gráficos de Killing, descritos anteriormente, produtos riemannianos da forma $\mathbb{M}^n(\kappa) \times \mathbb{R}$, em que o campo de Killing em consideração é o campo paralelo coordenado $\frac{\partial}{\partial s}$ associado à coordenada natural s do fator $\mathbb{R}$. Neste caso, coordenadas cilíndricas são facilmente definidas, de modo que a expressão da métrica ambiente nesta carta é da forma

$$ds^2 + dr^2 + sn_\kappa^2 d\sigma^2. \tag{1.15}$$

Observamos que, quando $\kappa \neq 0$, estes produtos não têm curvatura seccional constante.

Capítulo 2

Estimativas interiores do gradiente

Nesse capítulo, por simplicidade, denotamos por ∇ e Δ o gradiente e o operador de Laplace-Beltrami sobre o gráfico Σ da função u. A seguir, demonstraremos uma proposição fundamental.

Proposição 2.1 *Prove o que segue:*

$$\Delta\langle Y, N\rangle = -n\langle Y, \nabla H\rangle - (|A|^2 + Ric(N,N))\langle Y, N\rangle.$$

Demonstração :

Sejam $p \in \Sigma$ e $\{E_1(p), \cdots, E_n(p)\}$ base ortonormal que diagonaliza A em p, onde A é a aplicação linear simétrica associada à segunda forma fundamental. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ autovalores associados a $E_1(p), \cdots, E_n(p)$, respectivamente. Denotamos por $E_1, \cdots, E_n$ um referencial geodésico em Σ obtido estendendo $E_1(p), \cdots, E_n(p)$ em uma vizinhança do ponto p em Σ.

Escrevendo $f = \langle Y, N\rangle$, temos, em p,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(f). \tag{2.1}$$

Temos

$$E_i(f) = E_i\langle Y, N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_i} Y, N\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i} N\rangle$$

e

$$E_i E_i(f) = \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i} Y, N\rangle + 2\langle \bar{\nabla}_{E_i} Y, \bar{\nabla}_{E_i} N\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i} N\rangle.$$

Mas, em p, temos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} Y, \bar{\nabla}_{E_i} N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i} Y, \lambda_i E_i\rangle = -\lambda_i\langle \bar{\nabla}_{E_i} Y, E_i\rangle = 0,$$

onde a última igualdade decorre da equação de Killing.

Portanto, em p,

$$E_iE_i(f) = \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle. \tag{2.2}$$

Da equação de Killing

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle.$$

Derivando em relação a E_i;

$$E_i\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle = -E_i\langle \bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle.$$

ou seja,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, \bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle - \langle \bar{\nabla}_N Y, \bar{\nabla}_{E_i}E_i\rangle. \tag{2.3}$$

Observe que, em p, pela definição de referencial geodésico, $(\bar{\nabla}_{E_i}E_i)^T = 0$. Então $\bar{\nabla}_{E_i}E_i = \alpha N$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Daí, em p, $\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle = \alpha$.

Mas, em p

$$\alpha = \langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i}N, E_i\rangle = \lambda_i$$

Logo, $\bar{\nabla}_{E_i}E_i = \lambda_i N$. Temos também que $\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, \bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = -\lambda_i\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle$, pois E_i é autovetor de A. Aplicando esses resultados a (2.3) obtemos:

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle - \lambda_i\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle - \lambda_i\langle \bar{\nabla}_N Y, N\rangle.$$

Como Y é de Killing então $\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle = 0$ e $\langle \bar{\nabla}_N Y, N\rangle = 0$.

Assim

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}Y, N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle. \tag{2.4}$$

Por outro lado, pela definição de tensor curvatura, temos:

$$\langle R(N, E_i)Y, E_i\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_N Y, E_i\rangle - \langle \bar{\nabla}_N\bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle + \langle \bar{\nabla}_{[N,E_i]}Y, E_i\rangle. \tag{2.5}$$

Estendemos $\{E_i\}_{i=1,\cdots,n}$ a uma vizinhançe p em N, requerendo que $\bar{\nabla}_N E_i = 0$.

Então, em p, $[N, E_i] = \bar{\nabla}_N E_i - \bar{\nabla}_{E_i}N = 0 - (-\lambda_i E_i) = \lambda_i E_i$. Assim

$$\langle \bar{\nabla}_{[N,E_i]}Y, E_i\rangle = \lambda_i\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle. \tag{2.6}$$

Agora, derivando $\langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle = 0$ com relação a N obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_N\bar{\nabla}_{E_i}Y, E_i\rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i}Y, \bar{\nabla}_N E_i\rangle = 0.$$

Como $\bar{\nabla}_N E_i = 0$, temos

$$\langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla}_{E_i} Y, E_i \rangle = 0. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos

$$\langle R(N, E_i)Y, E_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_N Y, E_i \rangle. \tag{2.8}$$

Usando (2.4) em (2.8), obtemos $\langle R(N, E_i)Y, E_i \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} Y, N \rangle$ e substituindo em (2.2), temos que:

$$E_i E_i(f) = -\langle R(N, E_i)Y, E_i \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\sum_{i=1}^{n} \langle R(N, E_i)Y, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle = \\ &= -\mathrm{Ric}(N, V) + \sum_{i=1}^{n} \langle Y, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para calcular o segundo termo da equação (2.9), fazemos $y_j = \langle Y, E_j \rangle$ e escrevemos

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_j E_j + fN.$$

Então,

$$\langle Y, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_j \langle E_j, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle + f \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle. \tag{2.10}$$

Derivando a equação $\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, N \rangle = 0$ em relação a E_i, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle = 0.$$

Em p, temos que

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} N \rangle = \lambda_i^2.$$

Logo,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, N \rangle = -\lambda_i^2. \tag{2.11}$$

Derivando $\langle N, E_j \rangle$, em relação a E_i, duas vezes:

$$E_i(\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle) = 0,$$

e portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} N, E_j \rangle + 2 \langle \bar{\nabla}_{E_i} N, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle = 0$$

Então, em p,

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N, E_j\rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}E_j\rangle \tag{2.12}$$

pois $(\bar{\nabla}_{E_i}E_j)^T = 0$ em p e $\bar{\nabla}_{E_i}N$ é tangente a Σ

Como $\langle [E_i, E_j], N\rangle = 0$, $\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_j, N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_j}E_i, N\rangle$.

Assim, derivando a última expressão em relação a E_i, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}E_j, N\rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i}E_j, \bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_j}E_i, \bar{\nabla}_{E_i}N\rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_i, N\rangle,$$

e daí, em p

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}E_j, N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_i, N\rangle. \tag{2.13}$$

Considerando o tensor curvatura R de M, sabemos que:

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle - \langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_i, N\rangle + \langle \bar{\nabla}_{[E_i,E_j]}E_i, N\rangle. \tag{2.14}$$

Note que, em p,

$$[E_i, E_j] = (\bar{\nabla}_{E_i}E_j - \bar{\nabla}_{E_j}E_i)^T = 0$$

e

$$E_j\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, \bar{\nabla}_{E_j}N\rangle = \langle \bar{\nabla}_{E_j}\bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle. \tag{2.15}$$

Assim, usando (2.12), depois (2.13) e na última igualdade (2.14) e (2.15), temos (em p) que:

$$\begin{aligned}
\langle E_j, \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle &= -\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}E_j, N\rangle = -\langle \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_j}E_i, N\rangle = \\
&= \langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle - E_j\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.16) e (2.11) em (2.10), obtemos usando linearidade de termos da curvatura:

$$\begin{aligned}
&\langle Y, \bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j(\langle R(E_i, E_j)E_i, N\rangle - E_j\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle) - f\lambda_i^2 = \\
&= \langle R(E_i, \sum_{i=1}^{n} y_jE_j)E_i, N\rangle - \sum_{j=1}^{n}(y_jE_j)\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle - f\lambda_i^2 = \\
&= \langle R(E_i, Y - fN)E_i, N\rangle - \sum_{j=1}^{n}(y_jE_j)\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle - f\lambda_i^2 = \\
&= \langle R(E_i, Y)E_i, N\rangle - f\langle R(E_i, N)E_i, N\rangle - \sum_{j=1}^{n}(y_jE_j)\langle \bar{\nabla}_{E_i}E_i, N\rangle - f\lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle Y,\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i,Y)E_i,N\rangle - f\sum_{i=1}^{n}\langle R(E_i,N)E_i,N\rangle \\ &- \sum_{i=1}^{n}(y_jE_j)(\sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{E_i}E_i,N\rangle) - f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\end{aligned}$$

Usando a definição de tensor de Ricci, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle Y,\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = \mathrm{Ric}(N,Y) - f\mathrm{Ric}(N,N) - \sum_{j=1}^{n}(y_jE_j)(nH) - f\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{2.17}$$

Note que,

$$\begin{aligned}n\langle Y,\nabla H\rangle &= \langle\sum_{j=1}^{n}y_jE_j + fN,\sum_{i=1}^{n}E_i(H)E_i\rangle = n\langle\sum_{j=1}^{n}y_jE_j,\sum_{i=1}^{n}E_i(H)E_i\rangle \\ &+n\langle fN,\sum_{i=1}^{n}E_i(H)E_i\rangle = n\sum_{j=1}^{n}y_jE_i(H)\langle E_i,E_j\rangle = (\sum_{j=1}^{n}y_jE_j)(nH).\end{aligned}$$

Usando esse fato e a definição de A em (2.17) temos,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle Y,\bar{\nabla}_{E_i}\bar{\nabla}_{E_i}N\rangle = \mathrm{Ric}(N,Y) - f\mathrm{Ric}(N,N) - n\langle Y,\nabla H\rangle - f|A|^2$$

E por (2.9)

$$\Delta f = -\mathrm{Ric}(N,Y) + \mathrm{Ric}(N,Y) - f\mathrm{Ric}(N,N) - n\langle Y,\nabla H\rangle - f|A|^2.$$

Portanto

$$\Delta\langle Y,N\rangle = -n\langle Y,\nabla H\rangle - (|A|^2 + \mathrm{Ric}(N,N))\langle Y,N\rangle.$$

■

Agora, iniciamos a demonstração do Teorema 0.1.

Segue de (1.3) que $\langle Y,N\rangle = 1/W$, assim, obtemos

$$\Delta W - \frac{2}{W}|\nabla W|^2 = \langle n\nabla H,Y\rangle W^2 + (|A|^2 + \mathrm{Ric}(N,N))W.$$

Agora, fixado um ponto $x_0 \in \Omega$ considere $r_0 > 0$ de modo que a bola aberta $B_{r_0}(x_0)$ ainda esteja contida em Ω. Denote por K^- o semi-cilindro $\Phi(\mathbb{R}^- \times B_{r_0}(x_0))$. Assim, defina uma função $\phi : K^- \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(y) = \left(1 - \left(\frac{d(x)}{r_0}\right)^2 + Cs\right)^+, \quad \text{se} \quad y = \Phi(s,x) \in K^-$$

onde $C = -1/2u(x_0)$ é uma constante positiva e $d(x)$ é a distância geodésica para x_0 em P, ou seja

$$d(x) = \mathrm{dist}_P(x_0, x).$$

No que se segue iremos calcular o gradiente e o Hessiano de $\phi|_\Sigma$ nos pontos onde esta função é diferenciável.

Dada uma função η em Σ defina a função $h = \eta W$ e seja $y_0 = \Phi(u(x_0), x_0) \in \Sigma$ um ponto de máximo de h. Segue disto que

$$\nabla h = \eta \nabla W + W \nabla \eta = 0.$$

Além disso, uma vez que a forma Hessiana é não-positiva em y_0, temos

$$\Delta h = W \Delta \eta + \eta \left(\Delta W - \frac{2}{W} |\nabla W|_\Sigma^2 \right) \leq 0.$$

Assim,

$$\Delta \eta \leq -\frac{\eta}{W} \left(\Delta W - \frac{2}{W} |\nabla W|_\Sigma^2 \right) = -\eta(|A|^2 + \mathrm{Ric}(N, N)) - \eta \langle n \nabla H, Y \rangle W.$$

Uma vez que H é constante ao longo das linhas de fluxo de Y, temos que

$$\langle \nabla H, Y^T \rangle = \langle \bar{\nabla} H, Y \rangle - \langle \bar{\nabla} H, N \rangle \langle Y, N \rangle = \langle \nabla H, \frac{\nabla u}{W} \rangle \frac{1}{W}.$$

Portanto,

$$\Delta \eta \leq -\eta(|A|^2 + \mathrm{Ric}(N, N)) - \eta \langle n \nabla H, \frac{\nabla u}{W} \rangle.$$

Em seguida, obtemos uma expressão explícita para $\Delta \eta$ quando η é da forma

$$\eta(y) = g(\phi(y)), \quad y = \Phi(u(x), x),$$

onde $g = g(t)$ é uma função suave a ser escolhida e ϕ foi definida acima. Temos

$$\nabla \eta = g'(\phi) \nabla \phi = g'(\phi)(\bar{\nabla} \phi - \langle \bar{\nabla} \phi, N \rangle N).$$

Para quaisquer $v, w \in T\Sigma$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v \nabla \eta, w \rangle &= g''(\phi) \langle \nabla \phi, v \rangle \langle \nabla \phi, w \rangle + g'(\phi) \langle \nabla_v \nabla \phi, w \rangle \\ &= g''(\phi) \langle \bar{\nabla} \phi, v \rangle \langle \bar{\nabla} \phi, w \rangle + g'(\phi) \langle \bar{\nabla}_v \nabla \phi, w \rangle \\ &= g''(\phi) \langle \bar{\nabla} \phi, v \rangle \langle \bar{\nabla} \phi, w \rangle + g'(\phi) \langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla} \phi - \langle \bar{\nabla} \phi, N \rangle \bar{\nabla}_v N, w \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle \nabla_v \nabla \eta, w\rangle = g''(\phi)\langle \bar{\nabla}\phi, v\rangle\langle \bar{\nabla}\phi, w\rangle + g'(\phi)(\langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}\phi, w\rangle + \langle \bar{\nabla}\phi, N\rangle\langle A^{\Sigma}v, w\rangle). \tag{2.18}$$

Nos pontos onde ϕ é diferenciável obtemos, usando que $\bar{\nabla}s = \gamma Y$,

$$\bar{\nabla}\phi(y) = -\frac{2d}{r_0^2}\bar{\nabla}d(y) + C\gamma Y(y) = -\frac{2d}{r_0^2}\Phi_*(s,x)\nabla d(x) + C\gamma Y(y).$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}\phi, N\rangle &= \frac{2d}{r_0^2}\langle \bar{\nabla}d(y), \Phi_*(s,x)\frac{\nabla u}{W}\rangle + C\gamma\langle Y(y), \frac{\gamma}{W}Y(y)\rangle \\ &= \frac{2d}{r_0^2 W}\langle \nabla d, \nabla u\rangle + C\frac{\gamma}{W}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\bar{\nabla}\phi|^2 - \langle \bar{\nabla}\phi, N\rangle^2 = \frac{4d^2}{r_0^4}\left(1 - \frac{1}{W^2}\langle \nabla d, \nabla u\rangle^2\right) + C^2\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{W^2}\right) - \frac{4dC\gamma}{r_0^2W^2}\langle \nabla d, \nabla u\rangle.$$

Para quaisquer $v, w \in T_y\Sigma$, temos

$$\langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}\phi, w\rangle = -\frac{2d}{r_0^2}\langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla} d, w\rangle - \frac{2}{r_0^2}\langle \bar{\nabla}d, v\rangle\langle \bar{\nabla}d, w\rangle + C\langle \bar{\nabla}_v \gamma Y, w\rangle. \tag{2.19}$$

Denotando $x = \pi(y)$ quando $y = \Phi(s,x)$ para algum $s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}d, w\rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\bar{\nabla}d, \pi_* w\rangle + \langle v, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle w, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\bar{\nabla}d, \frac{Y}{|Y|}\rangle \\ &= II_d(\pi_* v - \langle \pi_* v, \nabla d\rangle\nabla d, \pi_* w - \langle \pi_* w, \nabla d\rangle\nabla d) + \langle v, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle w, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\bar{\nabla}d, \frac{Y}{|Y|}\rangle \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $P \subset M^{n+1}$ é totalmente geodésica. Aqui II_d denota a segunda forma fundamental das esferas geodésicas centradas em x_0.

Então, dado um sistema ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ em Σ temos

$$\sum_{i=1}^n \langle \frac{Y}{|Y|}, e_i\rangle^2 = \frac{1}{|Y|^2}\sum_{i=1}^n \langle Y, e_i\rangle^2 = \frac{1}{|Y|^2}(|Y|^2 - \langle Y, N\rangle^2) = 1 - \frac{\gamma}{W^2} = \frac{|\nabla u|^2}{W^2}$$

Então,

$$\mathrm{tr}_g \bar{\nabla}^2 d = k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\bar{\nabla}d, \frac{Y}{|Y|}\rangle = k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d$$

onde k_g a curvatura média da esfera geodésica centrada em x_0 e

$$\kappa_d = \langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\bar{\nabla}d, \frac{Y}{|Y|}\rangle$$

é a curvatura principal do cilindro de Killing sobre uma esfera geodésica centrada em x_0.

Agora, calcula-se

$$\langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla} s, w\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\gamma Y, \pi_* w\rangle + \langle v, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\gamma Y, \pi_* w\rangle + \langle w, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\gamma Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle$$
$$+\langle v, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle w, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\gamma Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle$$

Usando o fato que

$$Y[\gamma] = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{\nabla}_Y Y, Y\rangle = 0$$

e que $P \subset M^{n+1}$ é totalmente geodésica obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_v \bar{\nabla} s, w\rangle &= \langle v, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\frac{Y}{|Y|}}\gamma Y, \pi_* w\rangle + \langle w, \frac{Y}{|Y|}\rangle\langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\gamma Y, \frac{Y}{|Y|}\rangle \\
&= \gamma\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y \gamma Y, \pi_* w\rangle + \gamma\langle w, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\gamma Y, Y\rangle \\
&= \gamma^2\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, w\rangle + \gamma\langle w, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_{\pi_* v}\gamma Y, Y\rangle \\
&= \gamma^2\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, w\rangle + \gamma\langle w, Y\rangle(\pi_* v[\gamma]\langle Y, Y\rangle + \gamma\langle \bar{\nabla}_{\pi_* v} Y, Y\rangle) \\
&= \gamma^2\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, w\rangle + \gamma\langle w, Y\rangle(\pi_* v[\gamma]\langle Y, Y\rangle - \gamma\langle \bar{\nabla}_Y Y, \pi_* v\rangle) \\
&= \gamma^2\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, w\rangle - \gamma^2\langle w, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, v\rangle + \gamma\langle w, Y\rangle v[\gamma]\langle Y, Y\rangle \\
&= \gamma^2\langle v, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, w\rangle - \gamma^2\langle w, Y\rangle\langle \bar{\nabla}_Y Y, v\rangle + \langle w, Y\rangle v[\gamma].
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_g \bar{\nabla}^2 s &= \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, Y\rangle e_i[\gamma] = \langle Y^T, \bar{\nabla}\gamma\rangle = -\langle Y, N\rangle\langle N, \bar{\nabla}\gamma\rangle \\
&= \frac{1}{W}\langle \nabla\gamma, \frac{\nabla u}{W}\rangle \\
&= 2\frac{\gamma}{W}\langle \gamma\bar{\nabla}_Y Y, \frac{\nabla u}{W}\rangle
\end{aligned}$$

Além disso

$$\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \bar{\nabla} d\rangle^2 = |\bar{\nabla} d|^2 - \langle \bar{\nabla} d, N\rangle^2 = 1 - \langle \nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle^2.$$

Segue de (2.19) que

$$\operatorname{tr}_g \bar{\nabla}^2 \phi = -\frac{2d}{r_0^2}\operatorname{tr}_g \bar{\nabla}^2 d - \frac{2}{r_0^2}(1 - \langle \bar{\nabla} d, N\rangle^2) + C\operatorname{tr}_g \bar{\nabla}^2 s$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_g \bar{\nabla}^2 \phi = &-\frac{2d}{r_0^2}\left(k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d\right) - \frac{2}{r_0^2}\left(1 - \langle \nabla d, \frac{\nabla u}{W^2}\rangle^2\right) \\
&+ C\frac{1}{W}\langle \nabla\gamma, \frac{\nabla u}{W}\rangle
\end{aligned}$$

Tomando o traço em (2.18), obtemos

$$\Delta\eta = g''(\phi)(|\bar{\nabla}\phi|^2 - \langle\bar{\nabla}\phi, N\rangle^2) + g'(\phi)\mathrm{tr}_g\bar{\nabla}^2\phi + nHg'(\phi)\langle\bar{\nabla}\phi, N\rangle.$$

Substituindo as expressões acima deduz-se que

$$\begin{aligned}\Delta\eta = g''(\phi)&\left(\frac{4d^2}{r_0^4}\Big(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle^2\Big) + C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2} - C\frac{\gamma}{W}\frac{4d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle\right)\\
+g'(\phi)&\Bigg(- \frac{2d}{r_0^2}\left(k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d\right) - \frac{2}{r_0^2}\left(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W^2}\rangle^2\right)\\
+C&\frac{1}{W}\langle\nabla\gamma, \frac{\nabla u}{W}\rangle + nH\Big(\frac{2d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle + C\frac{\gamma}{W}\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

Por fim, escolhemos

$$g(t) = e^{Kt} - 1.$$

Observação 2.2 *As funções g e ϕ são definidas apropriadamente da mesma forma que em [10].*

A partir da desigualdade

$$\Delta\eta \leq -\eta(|A|^2 + \mathrm{Ric}(N, N) + \langle n\nabla H, \frac{\nabla u}{W}\rangle).$$

denotando-se

$$\tilde{C} = ||A|^2 + \mathrm{Ric}(N, N) + \langle n\nabla H, \frac{\nabla u}{W}\rangle|$$

temos

$$\begin{aligned}0 &\geq \Delta\eta - \tilde{C}\eta\\
&= e^{K\phi}K^2\left(\frac{4d^2}{r_0^4}\Big(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle^2\Big) + C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2} - C\frac{\gamma}{W}\frac{4d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle\right)\\
&+e^{K\phi}K\Bigg(- \frac{2d}{r_0^2}\left(k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d\right) - \frac{2}{r_0^2}\left(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W^2}\rangle^2\right)\\
&+C\frac{1}{W}\langle\nabla\gamma, \frac{\nabla u}{W}\rangle + nH\Big(\frac{2d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle + C\frac{\gamma}{W}\Big)\Bigg) - \tilde{C}e^{K\phi} + \tilde{C}\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}0 &\geq \Delta\eta - \tilde{C}\eta\\
&\geq e^{K\phi}K^2\left(\frac{4d^2}{r_0^4}\Big(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle^2\Big) + C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2} - C\frac{\gamma}{W}\frac{4d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle\right)\\
&+e^{K\phi}K\Bigg(- \frac{2d}{r_0^2}\left(k_g + \frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d\right) - \frac{2}{r_0^2}\left(1 - \langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W^2}\rangle^2\right)\\
&+C\frac{1}{W}\langle\nabla\gamma, \frac{\nabla u}{W}\rangle + nH\Big(\frac{2d}{r_0^2}\langle\nabla d, \frac{\nabla u}{W}\rangle + C\frac{\gamma}{W}\Big)\Bigg) - \tilde{C}e^{K\phi}\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\frac{4d^2}{r_0^4}\Big(1-\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W}\rangle^2\Big)+C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2}-C\frac{\gamma}{W}\frac{4d}{r_0^2}\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W}\rangle\\
&\geq C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2}-\frac{4d}{r_0^2}C\gamma\frac{|\nabla u|}{W^2}\geq C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2}-\frac{4}{r_0}C\gamma\frac{|\nabla u|}{W^2}
\end{aligned}$$

Denotando $\alpha=\gamma/2$ seque que caso

$$|\nabla u|>\frac{\frac{4}{r_0}+\sqrt{\frac{16}{r_0^2}+C^2\gamma}}{C}, \tag{2.20}$$

então

$$C^2\gamma\frac{|\nabla u|^2}{W^2}-\frac{4}{r_0}C\gamma\frac{|\nabla u|}{W^2}>\alpha C^2.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{2d}{r_0^2}\left(k_g+\frac{|\nabla u|^2}{W^2}\kappa_d\right)+\frac{2}{r_0^2}\left(1-\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W^2}\rangle^2\right)\\
&-C\frac{1}{W}\langle\nabla\gamma,\frac{\nabla u}{W}\rangle-nH\Big(\frac{2d}{r_0^2}\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W}\rangle+C\frac{\gamma}{W}\Big)\\
&\leq\frac{2d}{r_0^2}H_d+\frac{2}{r_0^2}-\frac{2d}{r_0^2}nH\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W}\rangle\\
&-2C\frac{\gamma}{W}\langle\gamma\bar{\nabla}_YY,\frac{\nabla u}{W}\rangle-nHC\frac{\gamma}{W},
\end{aligned}$$

onde H_d é a curvatura média do cilindro de Killing sobre a esfera geodésica centrada em x_0 com raio d.

Além disso,

$$\frac{2d}{r_0^2}nH\langle\nabla d,\frac{\nabla u}{W}\rangle\geq-\frac{2d}{r_0^2}n|H|\geq-n\frac{2d}{r_0^2}h_0$$

e

$$-2C\frac{\gamma}{W}\langle\gamma\bar{\nabla}_YY,\frac{\nabla u}{W}\rangle-nHC\frac{\gamma}{W}\leq C\big(2|\gamma\bar{\nabla}_YY|+n|H|\big)\frac{\gamma}{W}\leq C\big(2|\gamma\bar{\nabla}_YY|+nh_0\big).$$

onde $h_0=\sup_{B_{r_0}(x_0)}|H|$. Resulta que

$$\begin{aligned}
&0\geq\Delta\eta-\tilde{C}\eta\geq e^{K\phi}K^2\alpha C^2-e^{K\phi}K\Big(\frac{2d}{r_0^2}H_d+\frac{2}{r_0^2}+\frac{2d}{r_0^2}nh_0+C\big(2|\gamma\bar{\nabla}_YY|+nh_0\big)\Big)\\
&-\tilde{C}e^{K\phi}
\end{aligned}$$

No entanto, isso implica que

$$0\geq\alpha C^2K^2-\Big(\frac{2d}{r_0^2}H_d+\frac{2}{r_0^2}+\frac{2d}{r_0^2}nh_0+C\big(2|\gamma\bar{\nabla}_YY|+nh_0\big)\Big)K-\tilde{C}$$

Observe que

$$|\gamma \bar{\nabla}_Y Y| = \bar{\kappa},$$

onde $\bar{\kappa}$ é a curvatura das linhas de fluxo. Portanto obtém-se

$$0 \geq K^2 \alpha C^2 - K\Big(\frac{2}{r_0^2} dH_d + \frac{2}{r_0^2} + \frac{2}{r_0} nh_0 + C(nh_0 + 2\bar{\kappa}_0)\Big) - \tilde{C}$$

onde $\bar{\kappa}_0 = \sup_{B_{r_0}(x_0)} \bar{\kappa}$. Desde que $dH_d \to 1$ quando $d \to 0$ esse termo pode ser estendido continuamente para uma função limitada no intervalo $[0, r_0]$. Segue-se que existe uma constante $\tilde{\tilde{C}} > 0$ tal que

$$0 \geq \alpha C^2 K^2 - \tilde{\tilde{C}} K - \tilde{C}.$$

Isto dá uma contradição se considerarmos K suficientemente grande.

Segue-se a partir desta contradição que

$$|\nabla u| \leq \frac{\frac{4}{r_0} + \sqrt{\frac{16}{r_0^2} + C^2 \gamma}}{C} \tag{2.21}$$

Capítulo 3

Uma abordagem analítica

Teorema 3.1 *Seja $u \in C^2(B_{r_0}(x_0))$ uma solução negativa da equação da curvatura média (1.11) onde $H : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função em $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Então, existe uma constante $D = D(u(x_0), r_0, \gamma, H)$ tal que $|\nabla u(x_0)| \leq D$*

Demonstração :

Primeiro observamos que para um sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ a equação (1.11) tem a forma

$$g^{ij} u_{i;j} - R\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle = nHW \tag{3.1}$$

onde

$$g^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{u^i u^j}{W^2}.$$

e por simplicidade vamos denotar

$$R = \frac{1}{2\gamma W^2}(2\gamma + |\nabla u|^2)$$

Como feito no capítulo 2, fixe um ponto $x_0 \in \Omega$ e tome $r_0 > 0$ tal que a bola fechada $B_{r_0}(x_0)$ está contida em Ω. Denote por K^- o semi-cilindro sólido $\Phi(\mathbb{R}^- \times B_{r_0}(x_0))$. Defina a função não-negativa $\phi : K^- \to \mathbb{R}$ como no capítulo anterior

$$\phi(y) = \left(1 - \frac{d^2(x)}{r_0^2} + Cu(x)\right)^+ \quad \text{se} \quad y = \Phi(s, x) \in K^-$$

onde $+$ significa a parte positiva e $C = -1/2u(x_0)$ é uma constante positiva, temos também $d(x) = \mathrm{dist}_P(x_0, x)$. No que se segue as funções η e h estão definidas como no capítulo anterior, e novamente temos

$$g(t) = e^{Kt} - 1$$

onde $K > 0$ é uma constante a ser escolhida depois. Então η desaparece ao longo do cilindro $\mathbb{R}^- \times \partial B_{r_0}$ e é suave onde é positiva.

Seja $y_0 \in B_{r_0}(x_0)$ um ponto interior onde a função $h = \eta W$ tem um máximo. Nesse ponto temos $h_i = 0$, i,e.,

$$\eta_i W = -\eta W_i \tag{3.2}$$

e a matriz hessiana de h é semidefinida negativa em y_0. Tomando o traço do produto com a matriz definida positiva $W^{-1}g^{ij}$, temos

$$0 \geq \frac{1}{W}g^{ij}h_{i;j} = g^{ij}\eta_{i;j} + 2\frac{g^{ij}}{W}\eta_i W_j + \frac{g^{ij}}{W}\eta W_{i;j}.$$

Usando (3.2), obtemos

$$g^{ij}\eta_{i;j} + \frac{\eta}{W}g^{ij}\Big(W_{i;j} - 2\frac{W_iW_j}{W}\Big) \leq 0. \tag{3.3}$$

De (1.3), temos

$$N^k = -\frac{u^k}{W}. \tag{3.4}$$

Assim,

$$W_i = \frac{\gamma_i}{2W} + \frac{u^k}{W}u_{k;i} = \frac{\gamma_i}{2W} - N^k u_{k;i}. \tag{3.5}$$

Na sequência, usamos (3.2), (3.4) e (3.5) várias vezes como referência.

Temos

$$\begin{aligned}
W_{i;j} &= \frac{\gamma_{i;j}}{2W} - \frac{\gamma_i W_j}{2W^2} - N^k_{;j}u_{k;i} - N^k u_{k;ij} \\
&= \frac{\gamma_{i;j}}{2W} + \frac{\sigma^{kl}}{W}u_{l;j}u_{k;i} - \frac{w}{\eta^2}\eta_i\eta_j - N^k u_{k;ij} \\
&= \frac{\gamma_{i;j}}{2W} + \frac{1}{W}\big(\sigma^{kl} - N^kN^l\big)u_{l;j}u_{k;i} + \frac{1}{W}N^kN^l u_{l;j}u_{k;i} - \frac{1}{W}W_iW_j - N^k u_{k;ij} \\
&= \frac{\gamma_{i;j}}{2W} + \frac{g^{kl}}{W}u_{l;j}u_{k;i} + \frac{\gamma_i\gamma_j}{4W^3} - \frac{1}{2W^2}(W_i\gamma_j + W_j\gamma_i) - N^k u_{k;ij}
\end{aligned}$$

Assim,

$$g^{ij}W_{i;j} = \frac{1}{2W}g^{ij}\gamma_{i;j} + \frac{1}{W}g^{ij}g^{kl}u_{l;j}u_{k;i} + \frac{1}{4W^3}g^{ij}\gamma_i\gamma_j + \frac{1}{W\eta}g^{ij}\eta_i\gamma_j - N^k g^{ij}u_{k;ij} \tag{3.6}$$

Vamos calcular o último termo de (3.6). Para isso, vamos usar as identidades de Ricci para a hessiana de u

$$u_{k;ij} = u_{i;kj} = \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}du(\partial_i) = \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}du(\partial_i) + R^l_{kji}u_l = u_{i;jk} + R^l_{kji}u_l.$$

Assim,

$$\begin{aligned} N^k g^{ij} u_{k;ij} &= N^k g^{ij} u_{i;jk} + N^k g^{ij} R^l_{kji} u_l = N^k g^{ij} u_{i;jk} - \frac{1}{W} g^{ij} R^l_{kji} u^k u_l \\ &= N^k (g^{ij} u_{i;j})_{;k} - N^k g^{ij}_{;k} u_{i;j} - \frac{1}{W} g^{ij} R^l_{kji} u^k u_l \end{aligned}$$

Segue-se que

$$N^k g^{ij} u_{k;ij} = N^k (nWH)_{;k} + N^k (R\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle)_{;k} - N^k g^{ij}_{;k} u_{i;j} - \frac{1}{W} g^{ij} R^l_{kji} u^k u_l. \tag{3.7}$$

Vamos calcular os três primeiros termos de (3.7). Para o primeiro termo, temos

$$(HW)_{;k} = W\Big(H_k - \frac{H\eta_k}{\eta}\Big). \tag{3.8}$$

Uma vez que

$$\Big(\frac{2\gamma + |\nabla u|^2}{2\gamma W^2}\Big)_{;k} = \frac{\gamma_k}{W^2} - \frac{\gamma}{W^4}(\gamma_k + 2u^l u_{l;k}) = \frac{1}{W^2}\Big(\gamma_k + \frac{2\gamma\eta_k}{\eta}\Big)$$

e

$$\Big(\frac{1}{2\gamma}\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)_{;k} = \Big(\frac{\gamma_l}{2\gamma}\Big)_{;k} + \frac{\gamma^l}{2\gamma} u_{l;k} = \frac{1}{2\gamma}\Big[\Big(\frac{\gamma_l\gamma_k}{\gamma} - \gamma_{k;l}\Big) W N^l + \gamma^l u_{l;k}\Big],$$

obtemos, para o segundo termo de (3.7), a seguinte expressão

$$(R\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle)_{;k} = R\Big[\Big(\frac{\gamma_l\gamma_k}{\gamma} - \gamma_{k;l}\Big) W N^l + \gamma^l u_{l;k}\Big] + \frac{1}{W^2}\Big(\frac{\gamma_k}{2\gamma} + \frac{\eta_k}{\eta}\Big)\langle \nabla\gamma, \nabla u\rangle \tag{3.9}$$

Temos

$$\begin{aligned} g^{ij}_{;k} &= -N^i_{;k} N^j - N^i N^j_{;k} = -\frac{1}{W^2}(u^i_{;k} u^j + u^i u^j_{;k}) + \frac{2}{W^3} W_{;k} u^i u^j \\ &= -\frac{1}{W^2}(u^i_{;k} u^j + u^i u^j_{;k}) + \frac{1}{W^3}(\frac{\gamma_k}{W} - 2N^l u_{l;k}) u^i u^j \\ &= \frac{1}{W}(u^i_{;k} - N^i N^l u_{l;k}) N^j + \frac{1}{W}(u^j_{;k} - N^j N^l u_{l;k}) N^i + \frac{\gamma_k}{W^4} u^i u^j \\ &= \frac{1}{W}(\sigma^{il} - N^i N^l) u_{l;k} N^j + \frac{1}{W}(\sigma^{jl} - N^j N^l) u_{l;k} N^i + \frac{\gamma_k}{W^4} u^i u^j \\ &= \frac{1}{W} g^{il} u_{l;k} N^j + \frac{1}{W} g^{jl} u_{l;k} N^i + \frac{1}{W^2}\gamma_k N^i N^j, \end{aligned}$$

donde resulta que o terceiro termo de (3.7) é dado por

$$\begin{aligned} N^k g^{ij}_{;k} u_{i;j} &= \frac{1}{W} N^k g^{il} u_{i;j} u_{l;k} N^j + \frac{1}{W} N^k g^{jl} u_{i;j} u_{l;k} N^i + N_k \frac{1}{W^2}\gamma_k N^i N^j u_{i;j} \\ &= \frac{2}{W} g^{il}\Big(\frac{\gamma_i}{2W} - W_i\Big)\Big(\frac{\gamma_l}{2W} - W_l\Big) + \frac{1}{W^2}\gamma_k N^i N^k\Big(\frac{\gamma_i}{2W} - W_i\Big) \\ &= \frac{2}{W} g^{ij}\Big(\frac{\eta_i W}{\eta} + \frac{\gamma_i}{2W}\Big)\Big(\frac{\eta_j W}{\eta} + \frac{\gamma_j}{2W}\Big) + \frac{1}{W^2}\gamma_k N^i N^k\Big(\frac{\eta_i W}{\eta} + \frac{\gamma_i}{2W}\Big) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} N^k g^{ij} u_{k;ij} &= nWN^k\Big(H_k - \frac{H\eta_k}{\eta}\Big) - \frac{2}{W} g^{ij}\Big(\frac{\eta_i W}{\eta} + \frac{\gamma_i}{2W}\Big)\Big(\frac{\eta_j W}{\eta} + \frac{\gamma_j}{2W}\Big) \\ &- \frac{1}{W^2}\gamma_k N^i N^k\Big(\frac{\eta_i W}{\eta} + \frac{\gamma_i}{2W}\Big)\frac{1}{W^2}N^k\Big(\frac{\gamma_k}{2\gamma} + \frac{\eta_k}{\eta}\Big)\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle \\ &+ R\Big[\Big(\frac{\gamma}{2W}\sigma^{ij} + WN^kN^l\Big)\frac{\gamma_k\gamma_l}{\gamma} - WN^kN^l\gamma_{k;l} + \frac{W}{\eta}\gamma_l\eta^l\Big] - \frac{1}{W}g^{ij}R^l_{kji}u^k u_l. \end{aligned}$$

Resulta de (3.6) que

$$\begin{aligned} g^{ij}W_{i;j} - \frac{2}{W}g^{ij}W_iW_j &= \frac{3}{4W^3}g^{ij}\gamma_i\gamma_j + \frac{1}{W}g^{ij}g^{kl}u_{l;j}u_{k;i} + \frac{3}{W\eta}g^{ij}\gamma_i\eta_j + \frac{1}{2W}g^{ij}\gamma_{i;j} \\ +\frac{1}{W}R^l_{kji}u^ku_l &- nN^k\frac{W}{\eta}(\eta H_k - H\eta_k) + \frac{1}{W^2}\gamma_k N^k N^i\Big(\frac{W\eta_i}{\eta} + \frac{\gamma_i}{2W}\Big) \\ -\frac{1}{W^2}N^k\Big(\frac{\gamma_k}{2\gamma} + \frac{\eta_k}{\eta}\Big)\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle &- R\Big[\Big(\frac{\gamma}{2W}\sigma^{kl} + WN^kN^l\Big)\frac{\gamma_k\gamma_l}{\gamma} - WN^kN^l\gamma_{k;l} + \frac{W}{\eta}\gamma_l\eta^l\Big]. \end{aligned}$$

Depois de multiplicar ambos os lados por η/W e descartar os termos não-negativos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{W}\Big(g^{ij}W_{i;j} - \frac{2}{W}g^{ij}W_iW_j\Big) &\geq \Big[-nN^kH_k - \frac{\gamma_k}{2\gamma W^3}N^k\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle + \frac{1}{2W^2}g^{ij}\gamma_{i;j} \\ -R\Big(\Big(\frac{\gamma}{2W^2}\sigma^{kl} + N^kN^l\Big)\frac{\gamma_k\gamma_l}{\gamma} &- N^kN^l\gamma_{k;l}\Big) + \frac{1}{W^2}g^{ij}R^l_{kji}u^ku_l\Big]\eta \\ +\Big[\Big(nH + \frac{1}{W^2}N^k\gamma_k &- \frac{1}{W^3}\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)N^i + \Big(\frac{3}{W^2}g^{ij} - R\sigma^{ij}\Big)\gamma_j\Big]\eta_i. \end{aligned}$$

É fácil verificar que existe uma constante $M > 0$ dependendo de H, γ e do tensor de Ricci de P, tal que

$$\frac{1}{W^2}\eta g^{ij}(WW_{i;j} - 2W_iW_j) \geq -M\eta - A^i\eta_i \tag{3.11}$$

onde $-A^i$ denota o coeficiente de η_i. Segue-se de (3.3) e (3.11),

$$g^{ij}\eta_{i;j} - M\eta - A^i\eta_i \leq 0. \tag{3.12}$$

Por outro lado,

$$\eta_i = g'(-r_0^{-2}(d^2)_i + Cu_i)$$

e

$$\eta_{i;j} = g'(-r_0^{-2}(d^2)_{i;j} + Cu_{i;j}) + g''(-r_0^{-2}(d^2)_i + Cu_i)(-r_0^{-2}(d^2)_j + Cu_j)$$

Por isso

$$\begin{aligned} &g^{ij}(r_0^{-2}(d^2)_i - Cu_i)(r_0^{-2}(d^2)_j - Cu_j) \\ &\quad = \frac{C^2\gamma}{W^2}|\nabla u|^2 - \frac{2C\gamma}{r_0^2W^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle + \frac{1}{r_0^4}\Big(|\nabla d^2|^2 - \frac{1}{W^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle^2\Big) \\ &\quad \geq \frac{C^2\gamma}{W^2}\Big(|\nabla u|^2 - \frac{2}{Cr_0^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle\Big) \end{aligned}$$

e

$$g^{ij}(-r_0^{-2}(d^2)_{i;j} + Cu_{i;j}) = -r_0^{-2}g^{ij}(d^2)_{i;j} + C(nHW + R\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle)$$

onde

$$g^{ij}(d^2)_{i;j} = \Delta d^2 - \frac{1}{W^2}\langle\nabla_{\nabla u}\nabla d^2, \nabla u\rangle$$

Segue de (3.12) que

$$\frac{C^2\gamma}{W^2}\Big[|\nabla u|^2 - \frac{2}{Cr_0^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle\Big]g'' + \Big[\frac{1}{r_0^2W^2}\langle\nabla_{\nabla u}\nabla d^2, \nabla u\rangle - \frac{\Delta d^2}{r_0^2}$$
$$+C(nHW + R\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle)\Big]g' \leq Mg + A^i(-r_0^{-2}(d^2)_i + Cu_i)g'$$

Desde que

$$-A^i(d^2)_i = \Big(nH + \frac{1}{W^2}N^k\gamma_k - \frac{1}{W^3}\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)N^i(d^2)_i + \Big(\frac{3}{W^2}g^{ij} - R\sigma^{ij}\Big)\gamma_j(d^2)_i$$

e

$$A^iu_i = \Big(nHW + \frac{1}{W}N^k\gamma_k - \frac{1}{W^2}\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)\frac{|\nabla u|^2}{W^2} + \frac{3}{W}g^{ij}\gamma_jN_i + R\langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle$$

Concluimos que

$$\frac{C^2\gamma}{\gamma + |\nabla u|^2}\Big(|\nabla u|^2 - \frac{2}{Cr_0^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle\Big)g'' + Pg' - Mg \leq 0$$

onde o coeficiente

$$P = \frac{n}{W}CH\gamma - \frac{1}{r_0^2}\Big(\Delta d^2 - \frac{1}{W^2}\langle\nabla_{\nabla u}\nabla d^2, \nabla u\rangle\Big) - C\Big(WN^k\gamma_k - \langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)\frac{|\nabla u|^2}{W^4}$$
$$-\frac{3}{W}Cg^{ij}\gamma_jN_i - \frac{1}{r_0^2W^3}\Big(nHW^3 + WN^k\gamma_k - \langle\nabla\gamma, \nabla u\rangle\Big)N^i(d^2)_i$$
$$-\frac{1}{r_0^2}\Big(\frac{3}{W^2}g^{ij} - R\sigma^{ij}\Big)\gamma_i(d^2)_j$$

de g' é limitado para uma constante $C_0 = C_0(C, H, \gamma)$.

Suponha que

$$|\nabla u| \geq \frac{8}{Cr_0} = -\frac{16u(x_0)}{r_0}.$$

Então, temos

$$|\nabla u| \geq \frac{4|\nabla d^2|}{Cr_0^2}$$

e

$$|\nabla u|^2 - \frac{2}{Cr_0^2}\langle\nabla u, \nabla d^2\rangle \geq |\nabla u|^2 - \frac{2}{Cr_0^2}|\nabla u||\nabla d^2|$$
$$\geq \frac{1}{2}|\nabla u|^2.$$

Assim, existe uma constante $L = L(u(x_0), r_0, \gamma)$ tal que

$$\frac{C^2\gamma}{\gamma + |\nabla u|^2}\Big(|\nabla u|^2) - \frac{2}{Cr_0^2}\langle \nabla u, \nabla d^2\rangle\Big) \geq \frac{C^2\gamma}{2(\gamma + |\nabla u|^2)}|\nabla u|^2 \geq L > 0.$$

Por exemplo, fixando $\gamma_0 = inf_{B_{r_0}(x_0)}\gamma$ podemos tomar $L = 32\gamma_0/(r^2\gamma_0 + 256u^2(x_0))$. Desde que $g(t) = e^{Kt} - 1$, obtemos uma contradição tomando $K = K(C, H, \gamma)$ suficientemente grande, isto é, de tal modo que

$$Lg''(y_0) + C_0 g'(y_0) - Mg(y_0) > 0$$

Assim,

$$W(y_0) \leq C_1 = \gamma_1 - \frac{16u(x_0)}{r_0}$$

onde $\gamma_1 = sup_{B_{r_0}(x_0)}\gamma$. Desde que $h_(x_0) \leq h(y_0)$, obtemos

$$\eta(x_0)W(x_0) \leq \eta(y_0)W(y_0)$$

Portanto,

$$(e^{K/2} - 1)W(x_0) \leq C_1 e^K.$$

Isto dá a estimativa desejada e conclui a prova.

Observação 3.2 *A constante D dada pelo Teorema 3.1 também depende da geometria de P ao longo de $B_{r_0}(x_0)$ incluindo a curvatura de Ricci.*

Referências Bibliográficas

[1] ALCANTARA, P. R. *Hipersuperfícies com curvatura média prescrita em variedades riemannianas.* 40 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

[2] CARMO, M. P.: *Geometria Riemanniana*. 3a ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

[3] DAJCZER, M.; HINOJOSA, P.; LIRA, J. H. Killing graphs with prescribed mean curvature. *Calc. Var. Partial Differential equations* v. 33 , p. 231-248, 2008.

[4] DAJCZER, M.; LIRA, J. H.; RIPOLL, J. *An interior gradient estimate for the mean curvature equation of Killing graphs.* ArXiv: 1206.2900v1, 2012.

[5] ESPÍRITO-SANTO, N.; FORNARI, S.; RIPOLL, J. The Dirichlet problem for the minimal hypersurface equation in $M \times \mathbb{R}$ with prescribed asymptotic boundary. *J. Math. Pures Appl.* v. 93, p. 204-221, 2010.

[6] GÁVEZ, J.; ROSENBERG, H. Minimal surfaces and harmonic diffeomorphisms from the complex plane onto certain Hadamard surfaces. *Amer. J. of Math.* v. 132, p. 1249-1273, 2010.

[7] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 2001.

[8] GUAN, B.; SPRUCK, J. Hypersurfaces of constant mean curvature in hyperbolic space with prescribed asymptotic boundary at infinity. *Amer. J. Math.* v. 122, p. 1039-1060, 2000.

[9] HSU, E. Brownian motion and Dirichlet problems at infinity. *Ann. Probab.* v. 31, p. 1305-1319, 2003.

[10] KOREVAAR, N. An easy proof of the interior gradient bound for solutions to the prescribed mean curvature problem. *Proc. Symp. Pure Math.* v. 45, p. 81-89, 1986.

[11] _____ A priori interior gradient bounds for solutions to elliptic Weingarten equations. *Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linaire* v. 4, p. 405-421. 1987.

[12] LEE, J. M.: *Introduction to Smooth Manifolds.* New York : Springer-Verlag, 2002. (Graduate texts in mathematics, v. 218)

[13] NEEL, R. *Brownian motion and the Dirichlet problem at infinity on two-dimensional Cartan-Hadamard manifolds.* ArXiv: 0912.0330v1, 2009.

[14] O'NEILL, B.: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity.* Academic Press, New York, 1983.

[15] PETERSEN, P.: *Riemannian geometry.* New York : Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, v. 171)

[16] RIPOLL, J.; TELICHEVESKY, M. *On the asymptotic Dirichlet problem for some divergence form quasi-linear elliptic PDE's.* Preprint. 2012.

[17] SCHOEN, R.; YAU, S. T. *Lectures on differential geometry.* Cambridge. MA : International Press, 1994. (Conference proceedings and lecture notes in geometry and topology, v. 1)

[18] SPRUCK, J. Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in $M \times \mathbb{R}$. *Pure and Applied Mathematics Quarterly.* v. 3, p. 785-800, 2007.