UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO YURI ALVES FERNANDES

MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS EM VARIEDADES COMPACTAS

FORTALEZA
2012

FRANCISCO YURI ALVES FERNANDES

MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN GENERALIZADAS EM VARIEDADES COMPACTAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA
2012

F399m Fernandes, Francisco Yuri Alves

Métricas m-Quasi-Einstein generalizadas em variedades compactas/ Francisco Yuri Alves Fernandes: Fortaleza 2012.

48f. : enc. ; 31 cm

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

1. Geometria Diferencial. 2. Variedades Riemannianas. 1. Título.

CDD 516.36

À Deus.

Agradecimentos

Aos meus pais, Efigenia Alves da Silva Fernandes e José Fernandes da Silva Filho, pelo amor, carinho e dedicação. Às minhas irmãs Yanne Alves Fernandes e Yorrana Alves Fernandes, pelo conívio. Ao meu amigo José Ivan Mota Nogueira, pelo convívio, desde a graduação.

Agradeço também ao professor Abdênago Alves de Barros (pela orientação desde a graduação), e aos professores Ernani Ribeiro Jr. (que solucionou muitas de minhas dúvidas na dissertação) e Cícero Aquino por aceitarem participar da banca.

Também agradeço aos professores Afonso, Jorge Herbert (pela recomendação ao mestrado) e Luquésio e Abdênago (pela recomendação ao doutorado) do Departamento de Matemática da UFC.

À Andréa pela competência e agilidade.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro na graduação, e à CAPES, pelo apoio financeiro no mestrado.

”Nenhum cientista pensa com fórmulas. Antes que o cientista comece a calcular, deve ter em seu cérebro o desenvolvimento de seus raciocínios. Estes últimos, na maioria dos casos, podem ser expostos com palavras simples. Os cálculos e as fórmulas constituem o passo seguinte.”
(Albert Einstein)

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma generalização das métricas quasi-Einstein generalizadas para campos de vetores suaves quaisquer. Além disso, serão apresentadas algumas fórmulas integrais para métricas quasi-Einstein gradiente generalizadas definidas em uma variedade compacta.

Palavras-chaves: Métricas quasi-Einstein generalizadas, curvatura escalar, variedades de Einstein.

Abstract

The main objective of this paper is to present a generalization of generalized quasi-Einstein metrics to any smooth vector fields. Moreover, we will present some integral formulae for quasi-Einstein metrics defined in a compact manifold.

Keywords: Generalized quasi-Einstein metrics, scalar curvature, Einstein manifolds.

Sumário

Introdução

O conceito de métrica m-quasi-Einstein (dado no capítulo 2) aparece naturalmente quando se observa o seguinte resultado, encontrado em [4]:

Se (M, g) e (N^m, h) são variedades Riemannianas, o produto warped $(M \times N, \overline{g})$, onde $\overline{g} = g + e^{-2\frac{f}{m}}h$, é de Einstein se, e somente se, (N, h) é de Einstein, $Ric_f^m = \lambda g$ e $\frac{\Delta u}{u} - \frac{m-1}{u^2}|\nabla u|^2 + \frac{\lambda_N}{u^2} = \lambda$, onde λ_N e λ são as funções que tornam N e o produto warped $(M \times N, \overline{g})$ variedades de Einstein, respectivamente, $Ric_f^m = Ric_N + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df$ é o m-Bakry-Émeri tensor de Ricci, $u = e^{-\frac{f}{m}}$ e ∇^2 denota o hessiano.

Barros e Ribeiro Jr., veja [2], generalizaram o m-Bakry-Émeri tensor de Ricci para um campo de vetores suave X, ao invés do gradiente de uma função, isto é,

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X e $X^\flat$ é a 1-forma associada a X.

A partir daí define-se que uma variedade é m-quasi-Einstein (generalizada) se

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g,$$

vale para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in C^\infty(M)$).
Vale ressaltar que quando $m = \infty$ e λ é constante, temos a equação que define os solitons de Ricci. Assim, a métrica m-quasi-Einstein generalizada é uma generalização da métrica dos solitons de Ricci. Quando isso acontece, a primeira coisa a se fazer é saber que resultados continuam válidos ou mesmo determinar identidades similares. Um dos primeiros resultados será:

Teorema 0.1. *Seja (M^n, g, X) variedade Riemanniana completa, tal que $Ric_X^m = \lambda g$, com $\lambda \in C^\infty(M)$ e m finito. Então M^n é variedade de Einstein se:*

(1) M é não-compacta, $n\lambda \geq R$ e $|X| \in L^1(M^n)$.

(2) $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$, para alguma função suave $\rho \in C^\infty(M)$.

Esse resultado é um dos teoremas de rigidez para tais métricas.
No caso particular em que $X = \nabla f$ é campo gradiente, quando m é finito e inteiro, existe uma relação com produto *warped*. Quando se faz $u = e^{-\frac{f}{m}}$, então estudar

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$$

equivale a estudar

$$Ric - \frac{m}{u} \nabla^2 u = \lambda g.$$

Assim, tendo por definição que uma métrica quasi-Einstein é trivial se $X \equiv 0$ (no caso de campos gradientes, f ser constante), temos um segundo resultado que é uma generalização de um resultado que é válido para solitons de Ricci gradiente.

Proposição 0.2. *Toda métrica quasi-Einstein gradiente generalizada definida em uma variedade Riemanniana compacta tal que a função $n\lambda - R$, possivelmente com zeros, não mude de sinal, é trivial.*

Também serão demonstrados alguns resultados, válidos para métricas m-quasi-Einstein gradiente generalizadas, encontrados em [3], cujo resultado mais interessante é o Teorema a seguir:

Teorema 0.3. *Uma variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada compacta não-trivial $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, é isométrica a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, desde que alguma das condições ocorra:*

(1) ∇u é um campo conforme de vetores.

(2) (M^n, g) é uma variedade Einstein.

Além disso, qualquer uma das condições anteriores indica que f é dada conforme o Exemplo 2.5.

Os outros resultados são:

Corolário 0.4. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, *uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta não-trivial, tal que*

$$\int_m Ric(\nabla u, \nabla u)d\mu \geq \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta u)^2 d\mu,$$

onde $d\mu$ *denota o elemento de volume associado a métrica Riemanniana* g. *Então* M^n *é isométrica a esfera clássica* $\mathbb{S}^n$. *Além disso, o potencial* f *é dado pelo Exemplo 2.5.*

Proposição 0.5. *Quando* $m \neq 1$, *uma métrica m-quasi-Einstein gradiente generalizada* g *tem curvatura escalar constante se, e somente se,*

$$Ric\,(\nabla f) = -\left(\frac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f + m(n-1)\nabla\lambda\right).$$

Teorema 0.6. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, *uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta. Então* M^n *é trivial desde que ocorra*

(1) $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)d\mu \leq \frac{2}{m}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu - (n-2)\int_M \langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle d\mu$

(2) M^n *é não-compacta,* $\lambda n \geq R$ *e* $|\nabla f| \in L^1(M)$.

Apresentaremos algumas fórmulas integrais, que são extensões dos resultados encontrados em [1] para solitons de Ricci gradientes, bem como resultados similares ali também obtidos.

Teorema 0.7. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *uma variedade m-quasi-Einstein generalizada orientável e compacta. Então*

(1) $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu = \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$

(2) $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)d\mu + \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu = \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 d\mu + \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$

(3) M^n *é trivial, desde que ocorra a seguinte desigualdade:*

$$\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu \leq \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$$

(4) $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2nm}\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu.$

Por fim, como aplicação desse resultado obtemos:

Corolário 0.8. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta e orientável com m finito. Então temos*

(1) Se $n \geq 3$, $\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu = 0$ *e* $\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu = 0$, *então* ∇f *é um campo conforme de vetores.*

(2) Se $n = 2$ *e* $\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu = 0$, *então* f *é constante.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Operadores diferenciais e curvaturas em uma variedade Riemanniana

Em tudo o que segue, (M, g) denotará uma variedade Riemannnina n-dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.1. *A **derivada covariante** de um $(1,r)-$tensor S é o $(1,r+1)-$tensor $\nabla S : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned}
\nabla S(X, Y_1, .., Y_r) &= (\nabla_X S)(Y_1, \ldots, Y_r) \\
&= \nabla_X(S(Y_1, \ldots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r).
\end{aligned}$$

Dizemos que um tensor S é **paralelo** se $\nabla S = 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo, pois

$$(\nabla g)(X, Y_1, Y_2) = \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0,$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.2. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **gradiente** de f é o campo diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$g(\nabla f, X) = D_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 1.3. *Com esta definição, ficam válidas as seguintes propriedades:*

(1) $\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h$,

(2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Além disso, relembrando que $p \in M$ *é ponto crítico de* $f \in C^\infty(M)$ *se* $\nabla f(p) = 0$, *fica válida a seguinte propriedade:*

Seja M *uma variedade Riemanniana conexa e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Se* $\nabla f = 0$ *em* M, *então* f *é constante em* M.

Definição 1.4. *Seja* X *um campo vetorial diferenciável em* M. *A* ***divergência*** *de* X *é uma função diferenciável* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, *dada para* $p \in M$ *por*

$$(div\, X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.1}$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

De maneira similar a definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1,r)-$tensor S como sendo o $(0,r)-$tensor

$$\begin{aligned}(div\, S)(v_1,\ldots,v_r) &= \operatorname{tr}\{w \mapsto (\nabla_w S)(v_1,\ldots,v_r)\}\\ &= \sum_{i=1}^{n} g\Big((\nabla_{e_i} S)(v_1,\ldots,v_r), e_i\Big),\end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Observação 1.5. *Lembre que um referencial ortonormal* $\{E_1,\ldots,E_n\}$ *em um aberto* $U \subset M$ *é* ***geodésico*** *em* $p \in U$ *se* $(\nabla_{E_i}E_j)(p) = 0$ *para todo* $1 \leq i,j \leq n$. *Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja Capítulo 3 de [6].*

Definição 1.6. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável.*

(1) O ***Laplaciano*** *de* f *é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = div\,(\nabla f). \tag{1.2}$$

(2) O ***Hessiano*** *de* f *é o campo de operadores lineares* $(\nabla^2 f)_p : T_pM \to T_pM$, *definido para* $v \in T_pM$ *por*

$$(\nabla^2 f)_p\,(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da definição da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então $(\nabla^2(f))_p\,(X) = \nabla_X \nabla f$. Além disso, se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então é fácil ver que $(\nabla^2 f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto e que $\Delta f = \mathrm{tr}\,(\nabla^2 f)$.

Teorema 1.7. *(Teorema de Hopf) Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f \geq 0$. Então f é constante.*

Definição 1.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemannina. O* ***tensor curvatura de Riemann*** *é o $(1,3)-$tensor $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$, definido por

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z, W).$$

Proposição 1.9. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = -\mathrm{Rm}\,(Y,X,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Y,X,W,Z)$.

(2) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Z,W,X,Y)$.

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z + \mathrm{Rm}\,(Y,Z)X + \mathrm{Rm}\,(Z,X)Y = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z \mathrm{Rm})(X,Y,W) + (\nabla_X \mathrm{Rm})(Y,Z,W) + (\nabla_Y \mathrm{Rm})(Z,X,W) = 0.$$

Para uma prova, veja Capítulo 3 de [11].

Definição 1.10. *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A* ***curvatura seccional*** *de P em p é dada por*

$$\sec\,(X,Y) = \frac{g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2},$$

onde $X, Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM. Lembre que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [6]).

Observe que, se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de P, então

$$\sec(e_1, e_2) = g(\mathrm{Rm}\,(e_1, e_2)e_2, e_1).$$

Teorema 1.11. *(Lema de Schur) Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa com $n \geq 3$. Suponha que M é **isotrópica**, isto é, para cada $p \in M$, a curvatura seccional $sec(X, Y)$ no ponto p não depende de $P \subset T_p(M)$, onde X, Y e P como na definição acima. Então M tem curvatura seccional constante, isto é, $sec(X, Y)$ também não depende de p.*

Demonstração: Defina um tensor R' de ordem 4 por

$$R'(W, Z, X, Y) = \langle W, X\rangle\langle Z, Y\rangle - \langle Z, X\rangle\langle W, Y\rangle.$$

Então, da hipótese $sec(X, Y) = const. = K$ em p, obtemos $R = KR'$. Portanto, para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_U R = (UK)R'$. Utilizando a segunda identidade de Bianchi

$$\nabla R(W, Z, X, Y, U) + \nabla R(W, Z, Y, U, X) + \nabla R(W, Z, U, X, Y) = 0,$$

obteremos, para todo $X, Y, W, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} 0 &= (UK)(\langle W, X\rangle\langle Z, Y\rangle - \langle Z, X\rangle\langle W, Y\rangle) \\ &\quad +(XK)(\langle W, Y\rangle\langle Z, U\rangle - \langle Z, Y\rangle\langle W, U\rangle) \\ &\quad +(YK)(\langle W, U\rangle\langle Z, X\rangle - \langle Z, U\rangle\langle W, X\rangle. \end{aligned}$$

Fixe $p \in M$. Como $n \geq 3$, é possível, fixado X em p, escolher Y e Z em p tais que $\langle X, Y\rangle = \langle Y, Z\rangle = \langle Z, X\rangle = 0$, $\langle Z, Z\rangle = 1$. Faça $U = Z$ em p. A relação acima fornece, para todo W,

$$\langle (XK)Y - (YK)X, W\rangle = 0.$$

Como X e Y são linearmente independentes de p, concluímos que $XK = 0$ para todo $X \in T_pM$. Logo, K é constante e também independe da escolha do ponto $p \in M$. $\square$

Definição 1.12. *O **tensor curvatura de Ricci**, $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$, é o $(0, 2)-$tensor obtido pelo "traço"do tensor curvatura de Riemann, isto é,*

$$Ric(Y, Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto \mathrm{Rm}\,(X, Y)Z\},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$Ric(v, w) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i, v)w, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i, w)v, e_i).$$

Assim, Ric é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o $(1,1)-$tensor simétrico

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rm}\,(v, e_i)e_i.$$

Diremos que $Ric \geq k (\leq k)$ se todos os autovalores de $Ric(v)$ são $\geq k\,(\leq k)$. Se (M, g) satisfaz $Ric(v) = kv$, ou equivalentemente, $Ric(v, v) = kg(v, v)$, então (M, g) é dita uma **variedade de Einstein** com **constante de Einstein** k.

Definição 1.13. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função $R : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$R = \mathrm{tr}\, Ric.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então é fácil ver que $R = 2\sum_{i<j} \sec\,(e_i, e_j)$.

Proposição 1.14. *(Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes)*

$$dR = 2\, div\, Ric.$$

Para uma demonstração, veja [8].

1.2 Derivadas de Lie

Lembre que um campo de vetores X é dito **completo** se houver um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ gerado por X.

Definição 1.15. *Seja α um tensor e X um campo completo (esta definição estende-se ao caso em que X não é completo e somente define um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos locais), a **derivada de Lie** de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\alpha = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* \alpha - \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* \alpha,$$

onde φ_t^* é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 1.16. *A derivada de Lie com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *então* $\mathcal{L}_X f = D_X f$.

(2) *Se* $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *então* $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

(3) *Sejam* α *e* β *tensores, então* $\mathcal{L}_X(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\mathcal{L}_X \beta)$.

(4) *Se* α *é um* $(0, r)-$*tensor, então para quaisquer* $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(Y_1, \ldots, Y_r) &= D_X \alpha(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} \alpha(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, [X, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, Y_r) \\ &= (\nabla_X \alpha)(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} \alpha(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_{Y_i} X, Y_{i+1}, \ldots, Y_r). \end{aligned}$$

Para uma prova veja Capítulo 13 de [9].

Agora note que da proposição acima, e do fato que $\nabla g = 0$ temos que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X), \tag{1.3}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, se $X = \nabla f$ para alguma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 2\nabla^2 f(Y, Z). \tag{1.4}$$

Tais fórmulas serão utilizadas mais adiante, nos capítulos seguintes. O seguinte lema é um resultado devido a P. Petersen, encontrado em Diógenes [8].

Lema 1.17. *Dados uma Variedade Riemanniana* (M^n, g) *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$div\,(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric\,(X, X) + D_X div\, X. \tag{1.5}$$

Em particular, se $X = \nabla f$ *e* $Z \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$div\,(\mathcal{L}_X g)(Z) = 2\,Ric\,(Z, X) + 2D_Z div\, X, \tag{1.6}$$

ou na notação de $(1,1)$-*tensor*

$$div\, \nabla^2 f = Ric\,(\nabla f) + \nabla \Delta f. \tag{1.7}$$

Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.18. *Para uma função suave* $f : M \to \mathbb{R}$, *onde* M *é uma variedade Riemanniana, valem as seguintes fórmulas:*

(1) $2(\mathrm{div}\,\nabla^2 f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\nabla^2 f|^2 + Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle.$

(2) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric\,(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle.$

Esta última equação é conhecida como fórmula de Bochner.

1.3 Campos conformes

Nesta seção, apresentaremos dois resultados para campos de vetores conformes. Antes de apresentarmos esses resultados, relembramos a seguinte definição.

Definição 1.19. *Dada uma variedade Riemanniana orientada (M^n, g), dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é **campo conforme** se*

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g$$

*para alguma função suave ρ definida em M^n. A função ρ é o **fator de conformidade** de X.*

O próximo resultado pode ser encontrado em Barros e Ribeiro Jr, em [3].

Lema 1.20. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então as seguintes afirmações valem:*

(1) Se $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$, para alguma função suave $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$, então $\rho = |X|^2 = 0$. Em particular, a única solução da equação $df \otimes df = \rho g$ é f constante.

(2) Se M^n é compacta e X é um campo conforme de vetores, então $\int_M |X|^2 divX d\mu = 0$. Em particular, se $X = \nabla f$ é um campo conforme de vetores, então $\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu = 0$.

Demonstração: (1) Para $n = 1$ não há o que fazer. Suponha, então que $n \geq 2$. Tomando o traço de $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$, obtemos $|X|^2 = \rho n$. Considerando $Y \in X(M)$, então $(X^\flat \otimes X^\flat)(X, Y) = \langle X, X\rangle\langle X, Y\rangle = |X|^2 \langle X, Y\rangle = \rho n\langle X, Y\rangle$. Por outro lado, $(X^\flat \otimes X^\flat)(X, Y) = \rho\langle X, Y\rangle$. Das duas últimas equações, obtemos $\rho(n-1)\langle X, Y\rangle = 0$. A arbitrariedade de Y nos diz, por fim, que $\rho = \frac{|X|^2}{n} = 0 = |X|$.
(2) Se X é um campo conforme, então existe uma função suave $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Então temos $2\rho |X|^2 = 2\rho g(X, X) = \mathcal{L}_X g(X, X) = 2\langle \nabla_X X, X\rangle$ ou $\rho |X|^2 = \langle \nabla_X X, X\rangle$. Agora, tomando o traço de $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, obtemos $divX = \rho n$. Na penúltima equação, obtemos $|X|^2 divX = n\langle \nabla_X X, X\rangle$. Por outro lado, desde que $div(|X|^2 X) =$

$|X|^2 divX + 2\langle\nabla_X X, X\rangle$, na penúltima equação, obtemos $div(|X|^2 X) = \frac{n+2}{n}|X|^2 divX$. Pelo teorema da divergência, segue finalmente que $\int_M |X|^2 divX d\mu = 0$. $\square$

Agora, como um corolário da Proposição 1.16, temos o seguinte resultado, que será utilizado mais adiante e que pode ser encontrado em [12]:

Proposição 1.21. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo conforme, então $\mathcal{L}_X R = -2(n-1)\Delta\rho - 2\rho R$.*

Outro resultado que será utilizado mais adiante, devido a Yano e Nagano, que pode ser encontrado em [12], é o seguinte Teorema:

Teorema 1.22. *Se uma variedade de Einstein M compacta de dimensão $n > 2$ admite uma transformação conforme infinitesimal não-isométrica, então M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$.*

Capítulo 2

Métricas m-quasi-Einstein generalizadas

Aqui, definiremos as métricas quasi-Einstein generalizadas e estabeleceremos algumas fórmulas. Nas duas primeiras seções trabalharemos com um campo de vetores suave qualquer. Nas seções seguintes trabalharemos no caso específico em que o campo de vetores será um campo gradiente de uma função suave e provaremos alguns resultados. Neste capítulo, M denotará uma variedade conexa e completa. No caso em que M for dita compacta, estaremos supondo que M não tem bordo.

2.1 Definições e equações básicas

Definição 2.1. *Sendo (M^n, g) uma Variedade Riemanniana, definimos o **m-Bakry-Emery tensor de Ricci por**:*

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat, \tag{2.1}$$

onde $0 < m \leq \infty$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X^\flat$ é a 1-forma associada a X e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X.

Vale observar-se que, se $X = 0$, então o m-Bakry-Emery tensor de Ricci coincide com o tensor de Ricci.

Definição 2.2. *Uma métrica g em uma variedade M^n associada a um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, é dita ser **m-quasi-Einstein generalizada**, se a equação*

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g \tag{2.2}$$

é válida para alguma função suave $\lambda \in C^{\infty}(M)$.

Em particular, aplicando o campo X na igualdade acima, obtemos

$$Ric\,(X,X) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(X,X) - \frac{1}{m}X^{\flat} \otimes X^{\flat}(X,X) = \lambda g(X,X).$$

Utilizando-se o fato de que

$$\mathcal{L}_X g(X,X) = g(\nabla_X X, X) + g(X, \nabla_X X) = 2g(\nabla_X X, X),$$

obtemos

$$Ric\,(X,X) + \langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda |X|^2. \tag{2.3}$$

Por outro lado, reescrevendo-se $\mathrm{tr}(\mathcal{L}_X g)$ e $\mathrm{tr}(X^{\flat} \otimes X^{\flat})$ como

$$\mathrm{tr}(\mathcal{L}_X g) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i) = 2\,div\,X$$

e

$$\mathrm{tr}(X^{\flat} \otimes X^{\flat}) = \sum_{i=1}^{n} X^{\flat} \otimes X^{\flat}(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} g(X, E_i)^2 = |X|^2,$$

então, tomando o traço na equação (2.2), vê-se facilmente que

$$R + div\,X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n. \tag{2.4}$$

As equações (2.3) e (2.4) serão amplamente utilizadas no decorrer do texto. Por outro lado, se tivermos λ constante, a equação (2.2) é a que define a métrica m-quasi-Einstein. Agora, se $m = \infty$ e λ é constante, a equação (2.2) se reduz a

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

que é a equação que define os solitons de Ricci. Assim as métricas quasi-Einstein generalizadas generalizam os solitons de Ricci.

Definição 2.3. *Uma métrica m-quasi-Einstein generalizada g é dita ser expansiva se* $\lambda < 0$, *estacionária se* $\lambda = 0$ *e contrátil se* $\lambda > 0$. *Se* λ *não tem sinal definido, a métrica será dita indefinida.*

Vale a pena notar que quando $X \equiv 0$ a equação (2.2) reduz-se a $Ric = \lambda g$, que é a equação de Einstein. Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 2.4. *Uma métrica m-quasi-Einstein generalizada é dita ser trivial se* $X \equiv 0$.

A trivialidade da métrica nos diz que a variedade é de Einstein. A seguir, apresentamos um exemplo de variedade m-quasi-Einstein compacta, encontrado em [3].

Exemplo 2.5. *Seja* $(\mathbb{S}^n, g_0)$ *a esfera canônica, com* $n \geq 2$. *Então, considerando a função*

$$f = -m\,ln\left(\tau - \frac{h_v}{n}\right),$$

onde τ *é um número real no intervalo* $(\frac{1}{n}, \infty)$ *e* h_v *é a função altura com respeito a algum vetor unitário fixado* $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, *a variedade* $(\mathbb{S}^n, g_0, \nabla f)$ *é uma variedade m-quasi-Einstein generalizada.*

A demonstração será feita mais adiante, quando definirmos a estrutura de variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada. Antes de provarmos o próximo lema, que nos ajudará a demonstrar resultados posteriores, vale ressaltar a seguinte observação:

Observação 2.6. *Se* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *é um referencial geodésico em torno de um ponto* $p \in M$ *qualquer, então*

$$\begin{aligned} div\,(X^\flat \otimes X^\flat)(E_i) &= div\,(X^\flat(E_i)X) \\ &= X^\flat(E_i)div\,X + X(X^\flat(E_i)) \\ &= X^\flat(E_i)div\,X + g(\nabla_X X, E_i) + g(X, \nabla_X E_i). \end{aligned}$$

Fazendo $X = \sum_{j=1}^n x_j E_j$, *então* $\nabla_X E_i = \nabla_{\sum_{j=1}^n x_j E_j} E_i = \sum_{j=1}^n x_j \nabla_{E_j} E_i$; *logo*

$$div\,(X^\flat \otimes X^\flat)(E_i) = X^\flat(E_i)div\,X + (\nabla_X X)^\flat(E_i).$$

O que nos dá, finalmente,

$$div\,(X^\flat \otimes X^\flat) = X^\flat div\,X + (\nabla_X X)^\flat. \tag{2.5}$$

Observação 2.7. *Se* (M^n, g) *é uma variedade diferenciável,* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *é um referencial em torno de um ponto* $p \in M$, $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$ *e* $\lambda \in C^\infty(M)$, *então*

$$\begin{aligned} div(\lambda g)(X) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (D_{E_i}(\lambda g))(E_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [D_{E_i}(\lambda g(E_i, X)) - \lambda g(D_{E_i}E_i, X) - \lambda g(E_i, D_{E_i}X)] \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [(D_{E_i}\lambda) g(E_i, X) + \lambda g(D_{E_i}E_i, X) + \lambda g(E_i, D_{E_i}X) \\ &\quad -\lambda g(D_{E_i}E_i, X) - \lambda g(E_i, D_{E_i}X)] \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (D_{E_i}\lambda) g(E_i, X). \end{aligned}$$

Logo,

$$div(\lambda g)(X) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\nabla\lambda, E_i) g(E_i, X) = \langle \nabla\lambda, X\rangle. \tag{2.6}$$

Relembrando que o operador difusão é dado por $\Delta_X = \Delta - D_X$, então temos o seguinte lema, que é uma generalização de um resultado encontrado em [2]:

Lema 2.8. *Seja (M^n, g, X) uma variedade Riemanniana tal que $Ric_X^m = \lambda g$, onde $\lambda \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

(1) $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 div\, X - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle$.

(2) $\frac{1}{2}\Delta_X|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2\, div\, X - |X|^2) - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle$.

Demonstração: Para provar (1) observe que por (1.5), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = div\,(\mathcal{L}_X g)(X) + |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) - D_X div\, X.$$

Agora, aplicando o divergente na igualdade (2.2), obtemos

$$divRic + \frac{1}{2} div\,\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}\mathrm{div}\,(X^\flat \otimes X^\flat) = div\,(\lambda g),$$

isto é,

$$div\,\mathcal{L}_X g = -2divRic + \frac{2}{m} div\,(X^\flat \otimes X^\flat) + 2div\,(\lambda g).$$

Por (2.5) e pelo Corolário 1.18(2), temos

$$div\,\mathcal{L}_X g = -\nabla R + \frac{2}{m}X^\flat div\, X + \frac{2}{m}(\nabla_X X)^\flat + 2div\,(\lambda g).$$

Assim, aplicando no campo X, por (2.6), obtemos

$$(div\,\mathcal{L}_X g)(X) = -\langle\nabla R\,, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2 div\, X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle + 2\langle\nabla\lambda, X\rangle.$$

Aplicando a derivada covariante em $R + div\, X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n$, temos

$$\nabla R + \nabla div\, X - \frac{1}{m}\nabla|X|^2 = n\nabla\lambda.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(div\,\mathcal{L}_X g)(X) &= -\langle\frac{1}{m}\nabla|X|^2 - \nabla div\, X + n\nabla\lambda, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2 div\, X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle \\
&\quad +2\langle\nabla\lambda, X\rangle \\
&= -\frac{1}{m}\langle\nabla|X|^2, X\rangle + \langle\nabla div\, X, X\rangle - n\langle\nabla\lambda, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2 div\, X \\
&\quad +\frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle + 2\langle\nabla\lambda, X\rangle.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}(div\,\mathcal{L}_X g)(X) &= -\frac{1}{m}X(|X|^2) + D_X div\,X + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle\\ &\quad -(n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle\\ &= -\frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle + D_X div\,X + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle\\ &\quad -(n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle\\ &= D_X div\,X + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= D_X div\,X + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X + |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) - D_X div\,X\\ &\quad -(n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle\\ &= |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle,\end{aligned}$$

o que prova o primeiro item.

Para provar o item (2), por (2.3), temos

$$Ric\,(X,X) = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2 - \langle\nabla_X X, X\rangle.$$

Assim, substituindo no primeiro item

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \frac{1}{m}|X|^4 - \lambda|X|^2 + \langle\nabla_X X, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2 div\,X - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle.$$

Observando-se que $\langle\nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{2}D_X|X|^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_X|X|^2 &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - \frac{1}{2}D_X|X|^2\\ &= |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2\,div\,X - |X|^2) - (n-2)\langle\nabla\lambda, X\rangle,\end{aligned}$$

o que prova o último ítem. $\square$

Se fizermos $X = \nabla f$ no lema acima e escrevermos $\Delta_f = \Delta_{\nabla f}$, teremos o seguinte corolário.

Corolário 2.9. *Nas mesmas hipóteses do Lema 2.8, se $X = \nabla f$, então:*

(1) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f - (n-2)\langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle$.

(2) $\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \lambda|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2(2\Delta f - |\nabla f|^2) - (n-2)\langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle$.

2.2 Um teorema de Rigidez para métricas m-quasi-Einstein generalizadas

Nesta seção apresentaremos um resultado de rigidez para um campo de vetores qualquer, em uma variedade não-compacta. Este resultado é devido à Barros e Ribeiro Jr. em [2]. Outros resultados de rigidez, para variedades compactas, serão obtidos mais adiante. Para isto, precisaremos do seguinte resultado, devido a Camargo et al. [5], que é uma extensão de um resultado devido a Yau em [13]:

Proposição 2.10. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa, não-compacta e orientável e $X \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $div\, X$ não muda de sinal em M. Se $|X| \in L^1(M)$, então* $\mathrm{div}\, X \equiv 0$ *em M.*

Demonstração: Veja em Diógenes [8]. □

Com o auxílio da proposição anterior, provaremos parte do seguinte resultado:

Teorema 2.11. *Seja (M^n, g, X) variedade Riemanniana completa, tal que $Ric_X^m = \lambda g$, com $\lambda \in C^\infty(M)$ e m finito. Então M^n é variedade de Einstein se:*

(1) M é não-compacta, $n\lambda \geq R$ e $|X| \in L^1(M^n)$.

(2) $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$, para alguma função suave $\rho \in C^\infty(M)$.

Demonstração: (1) Como $Ric_X^m = \lambda g$, então $R + div\, X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n$, ou seja,

$$div\, X = \frac{1}{m}|X|^2 + \lambda n - R. \tag{2.7}$$

Por hipótese, $n\lambda \geq R$. Então, da equação acima, temos que $div\, X \geq 0$ em M. Como $|X| \in L^1(M)$, pela Proposição 2.10, segue que $div\, X \equiv 0$ em M. Assim, (2.7) nos diz que

$$\frac{1}{m}|X|^2 + \lambda n - R = 0.$$

Das hipóteses, obtemos que $X \equiv 0$, donde M^n é variedade de Einstein. Além disto, obtemos $n\lambda = R$.

(2) Para o que falta, de (2.2) e (2.4), temos

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{divX}{n} g\right) = \frac{1}{m}\left(X^\flat \otimes X^\flat - \frac{1}{n}|X|^2 g\right) - \left(Ric - \frac{R}{n} g\right). \tag{2.8}$$

Como $(X^\flat \otimes X^\flat) = \rho g$, o Lema 1.20 nos diz que $|X|^2 = 0$, donde $X \equiv 0$. Logo, a equação acima torna-se $Ric = \frac{R}{n} g$, donde M^n é variedade Einstein. □

2.3 Métricas m-quasi-Einstein gradiente generalizadas

Nesta seção trabalharemos com campos gradiente e dedicaremos nosso trabalho para encontrar equações básicas desse tipo de métrica com o campo gradiente.

Definição 2.12. *Uma métrica g é dita ser* ***m-quasi-Einstein gradiente generalizada*** *se é uma métrica m-quasi-Einstein generalizada e $X = \nabla f$. Isto é,*

$$Ric_{\nabla f}^{m} = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g, \tag{2.9}$$

para alguma função $\lambda \in C^{\infty}(M)$.

Quando $m = \infty$ e λ é constante, temos a equação do soliton de Ricci gradiente. Quando m é inteiro positivo, mostraremos que este corresponde a uma métrica de Einstein de um produto *warped*. Quando f é constante, então a equação acima se reduz a equação de Einstein. A métrica m-quasi-Einstein gradiente generalizada é trivial se f for constante. Observando-se inicialmente que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(df \otimes df) &= \sum_{i=1}^{n} df \otimes df(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, E_i \rangle^2 \\
&= |\nabla f|^2,
\end{aligned}$$

então, tomando o traço em (2.9) temos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m} |\nabla f|^2 = \lambda n. \tag{2.10}$$

Agora, aplicando a derivada covariante na equação anterior, deduzimos que

$$\nabla R + \nabla \Delta f = \frac{1}{m} \nabla |\nabla f|^2. \tag{2.11}$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla |\nabla f|^2, Y \rangle &= Y(|\nabla f|^2) \\
&= 2 \langle \nabla_Y \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= 2 \nabla^2 f(Y, \nabla f) \\
&= 2 \nabla^2 f(\nabla f, Y) \\
&= 2 \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Y \rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Portanto, (2.11) pode ser escrito como

$$\nabla R + \nabla\Delta f = \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f. \tag{2.12}$$

As equações (2.10), (2.11) e (2.12) serão muito utilizadas posteriormente. Mais ainda, aplicando o produto interno na equação acima com ∇f, temos

$$\langle\nabla R, \nabla f\rangle + \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle = \frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle. \tag{2.13}$$

Vamos neste momento estabelecer a relação que existe entre m ser um inteiro positivo com o produto *warped*. Para isto relembramos a seguinte definição.

Definição 2.13. *Sejam (M^n, g_M), (F^m, g_F) variedades Riemannianas e u uma função positiva em M, a métrica do produto warped em $M \times F$ é definido por*

$$g = g_M + u^2 g_F \tag{2.14}$$

e denotamos por $M \times_u F$.

Proposição 2.14. *Em um produto warped $B = M \times_u F$ com $d = \dim F > 1$, sejam X, Y horizontais e V, W verticais. Então*

(1) $Ric\,(X, Y) = Ric_M\,(X, Y) - \frac{d}{u}\mathrm{Hess}u(X, Y)$.

(2) $Ric\,(X, V) = \nabla^2_M(X, V) = 0$.

(3) $Ric\,(V, W) = Ric_F\,(V, W) - \langle V, W\rangle\widetilde{u}$, *onde*

$$\widetilde{u} = \frac{\Delta u}{u} + (d-1)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

(4) $\nabla^2 u(X, X) = \nabla^2_M u(X, X)$.

(5) $\nabla^2 u(V, V) = u|\nabla u|^2_M g_F(V, V)$.

Demonstração: Para demonstração, veja [10]. $\square$

Lema 2.15. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada. Considerando a função auxiliar $u = e^{-f/m}$, então valem as seguintes afirmações:*

(1) $\nabla u = -\frac{u}{m}\nabla f$.

(2) $\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u}\nabla^2 u$. *Em particular,* ∇u *é um campo conforme de vetores se, e somente se,* M^n *é uma variedade Einstein. Assim, sobre uma superfície* M^2*,* ∇u *é sempre um campo conforme de vetores.*

(3) $\Delta u = \frac{u}{m}(R - \lambda n)$.

Demonstração: Seja, inicialmente, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ um referencial ortonormal em $p \in M$.
(1) Utilizando $\langle \nabla h, v\rangle = dh(v), \forall v$, então, como $du = -\frac{1}{m}e^{-f/m}df$, temos que, $\forall v$, $\langle \nabla u, v\rangle = du(v) = -\frac{1}{m}e^{-f/m}df(v) = -\frac{1}{m}e^{-f/m}\langle \nabla f, v\rangle$. Como v é tomado de maneira arbitrária, segue que $\nabla u = -\frac{1}{m}e^{-f/m}\nabla f = -\frac{u}{m}\nabla f$.
(2) Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u(e_i, e_j) &= \langle D_{e_i}(\nabla u), e_j\rangle \\
&= \langle D_{e_i}(-\frac{u}{m}\nabla f), e_j\rangle \\
&= \langle -\frac{1}{m}uD_{e_i}\nabla f - \frac{1}{m}e_i(u)\nabla f, e_j\rangle \\
&= -\frac{1}{m}\langle uD_{e_i}\nabla f + e_i(u)\nabla f, e_j\rangle \\
&= -\frac{1}{m}[\langle uD_{e_i}\nabla f, e_j\rangle + \langle e_i(u)\nabla f, e_j\rangle] \\
&= -\frac{1}{m}[u\langle D_{e_i}\nabla f, e_j\rangle + e_i(u)\langle \nabla f, e_j\rangle] \\
&= -\frac{1}{m}[u\nabla^2 f(e_i, e_j) + \langle \nabla u, e_i\rangle\langle \nabla f, e_j\rangle] \\
&= -\frac{1}{m}[u\nabla^2 f(e_i, e_j) + \langle -\frac{u}{m}\nabla f, e_i\rangle\langle \nabla f, e_j\rangle] \\
&= -\frac{1}{m}[u\nabla^2 f(e_i, e_j) - \frac{u}{m}\langle \nabla f, e_i\rangle\langle \nabla f, e_j\rangle] \\
&= -\frac{u}{m}[\nabla^2 f(e_i, e_j) - \frac{1}{m}df \otimes df(e_i, e_j)],
\end{aligned}$$

donde obtemos a segunda fórmula.
Em particular, se ∇u é um campo conforme de vetores, então existe uma função suave $\rho \in C^\infty(M)$ tal que $\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\rho g$. Por outro lado, $\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\nabla^2 u$. Portanto, se ∇u é um campo conforme de vetores, então isto é equivalente a se afirmar que $\nabla^2 u = \rho g$, ou, tomando o traço da equação anterior, $\Delta u = \rho n$. Sendo assim, podemos escrever $Ric = -\nabla^2 f + \frac{1}{m} df \otimes df + \lambda g = \lambda g + \frac{m}{u}\nabla^2 u = (\lambda + \frac{m}{u}\rho)g$, o que significa que M^n é uma variedade Einstein.

Quando $n = 2$, E_1, E_2 é um referencial ortonormal em $p \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ obtemos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= g(R(E_1,X)Y,E_1) + g(R(E_2,X)Y,E_2) \\ &= |X|\,|Y|\,(g(R(E_1,Z)W,E_1) + g(R(E_2,Z)W,E_2)), \end{aligned}$$

onde $Z = \frac{X}{|X|}$ e $W = \frac{Y}{|Y|}$. Por outro lado, escrevendo $Z = z_1E_1 + z_2E_2$, $W = w_1E_1 + w_2E_2$, com $z_1^2 + z_2^2 = w_1^2 + w_2^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} g(R(E_1,Z)W,E_1) &= z_1 g(\overbrace{R(E_1,E_1)}^{=0}W,E_1) \\ &\quad +z_2 g(R(E_1,E_2)W,E_1) \\ &= z_2(w_1 g(R(E_1,E_2)E_1,E_1) \\ &\quad +w_2 g(R(E_1,E_2)E_2,E_1)) \\ &= z_2(w_1 \overbrace{R_{1211}}^{=0} + w_2 R_{1221}) \\ &= z_2 w_2 R_{1221}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtemos $g(R(E_2,Z)W,E_2) = z_1 w_1 R_{1221}$. Logo, podemos escrever $Ric(X,Y) = |X|\,|Y|\,R_{1221}(z_1w_1 + z_2w_2) = |X|\,|Y|\,R_{1221}\langle Z,W\rangle = |X|\,|Y|\,R_{1221}\langle \frac{X}{|X|}, \frac{Y}{|Y|}\rangle = \langle X,Y\rangle R_{1221} = \langle X,Y\rangle \frac{R}{2}$. Como X e Y são arbitrários, segue que, em uma superfície M^2, $Ric = \frac{R}{2}g$, donde M^2 é Einstein e daí, ∇u é sempre um campo conforme de vetores.
(3) Por (2), podemos reescrever $Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$, em termos de u, como

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g. \tag{2.15}$$

Tomando o traço de (2.15), obtemos $R - \frac{m}{u}\Delta u = \lambda n$ ou

$$\Delta u = \frac{u}{m}(R - \lambda n). \tag{2.16}$$

□

Por isso podemos usar a equação (2.15) para estudar (2.9) e vice-versa.
Observando a Proposição 2.14 com $d = m$ e $u = e^{-\frac{f}{m}}$, para vetores X, Y horizontais, (2.15) nos diz que

$$Ric_B\,(X,Y) = \lambda g_M(X,Y) = \lambda g(X,Y), \tag{2.17}$$

onde $g = g_M + u^2 g_F$ é métrica de B. Assim as métricas m-quasi-Einstein generalizadas definem o *Ric* do produto *warped* nos campos de vetores horizontais. Mais ainda, nos diz que para B ser uma variedade de Einsten, uma das condições é que M seja quasi-Einstein.

Demonstração do exemplo 2.5. Desde que o tensor de Ricci de $(\mathbb{S}^n, g_0)$ é dado por $Ric = (n-1)g_0$ e sabendo-se que $\nabla^2 h_v = -h_v g_0$ (donde vem que h_v é a primeira autofunção do Laplaciano em $\mathbb{S}^n$, pois é solução da equação $\Delta u + n\,u = 0$), obtemos que, dados X, Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ quaisquer, $u = e^{\frac{-f}{m}} = \tau - \frac{h_v}{n}$ e assim, pelo Lema anterior,

$$\nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u}\nabla^2 u = \frac{m}{n}\frac{1}{\tau - \frac{h_v}{n}}\nabla^2 h_v.$$

Então, considerando

$$\lambda = (n-1) - m\,\frac{1}{\tau - \frac{h_v}{n}},$$

claramente $(\mathbb{S}^n, g_0, \nabla f)$ é uma variedade m-quasi-Einstein generalizada. □

Agora, uma vez que a função auxiliar $u > 0$, temos imediatamente o seguinte resultado, que é a generalização de um resultado encontrado em [8].

Proposição 2.16. *Toda métrica quasi-Einstein gradiente generalizada definida em uma variedade Riemanniana compacta tal que a função $n\lambda - R$, possivelmente com zeros, não mude de sinal, é trivial.*

Demonstração: Se $m = \infty$, então (2.9) se reduz à

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g.$$

Tomando o traço, obtemos

$$\Delta f = \lambda n - R.$$

Como a função $n\lambda - R$ não muda de sinal e M é compacta, usando o princípio do máximo de Hopf, concluímos que f é constante.
Se $0 < m < \infty$, então fazendo $u = e^{-\frac{f}{m}}$, por (2.16)

$$\frac{1}{u}\Delta u = \frac{R - \lambda n}{m}.$$

Novamente, como a função $n\lambda - R$ não muda de sinal, então

$$\frac{1}{u}\Delta u \geq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u}\Delta u \leq 0$$

como $u > 0$, então $\Delta u \geq 0$ ou $\Delta u \leq 0$. Como M é compacta, pelo princípio do máximo de Hopf, u é constante, isto é, f é constante; o que termina a demonstração. □

Observação 2.17. *$div\,(df\otimes df)=\Delta f.df+(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^{\flat}$.*
De fato, tomando $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ referencial geodésico

$$\begin{aligned}
div\,(df\otimes df)(E_i) &= div\,(df(E_i)\nabla f)\\
&= df(E_i)\Delta f+\nabla f(df(E_i))\\
&= df(E_i)\Delta f+\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f,E_i\rangle+\langle\nabla f,\nabla_{\nabla f}E_i\rangle\\
&= df(E_i)\Delta f+(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^{\flat}(E_i).
\end{aligned}$$

Observação 2.18. *Aplicando ∇f e X em (2.9), temos*

$$Ric\,(\nabla f,X)+\nabla^2 f(\nabla f,X)-\frac{1}{m}df\otimes df(\nabla f,X)=\lambda g(\nabla f,X),$$

$$g(Ric\,(\nabla f),X)+g(\nabla_{\nabla f}\nabla f,X)-\frac{1}{m}|\nabla f|^2 g(\nabla f,X)=g(\lambda\nabla f,X),$$

$$g(Ric\,(\nabla f)+\nabla_{\nabla f}\nabla f-\frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f,X)=g(\lambda\nabla f,X),$$

isto é,

$$Ric\,(\nabla f)+\nabla_{\nabla f}\nabla f=\frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f+\lambda\nabla f. \tag{2.18}$$

No próximo lema utilizaremos a notação tensorial na igualdade que define a métrica quasi-Einstein gradiente, isto é,

$$Ric_{ij}+(\nabla^2 f)_{ij}-\frac{1}{m}(df\otimes df)_{ij}=\lambda g_{ij}.$$

Mas, $Ric_{ij}=R_{ij}$, $(\nabla^2 f)_{ij}=\nabla_i\nabla_j f$ e

$$(df\otimes df)_{ij}=\langle\nabla f,E_i\rangle\langle\nabla f,E_j\rangle=\nabla_i f\nabla_j f.$$

Assim,

$$R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f-\frac{1}{m}\nabla_i f\nabla_j f=\lambda g_{ij}. \tag{2.19}$$

O próximo Lema nos apresenta três resultados: o primeiro e o último devido à Barros e Ribeiro Jr. em [3] e o segundo uma generalização de um resultado dos mesmos autores, encontrado em [2].

Lema 2.19. *Seja $(M^n,g,\nabla f)$ variedade Riemanniana tal que $n\geq 3$ e $Ric_{\nabla f}^{m}=\lambda g$, com $\lambda\in C^{\infty}(M)$. Então as seguintes fórmulas valem:*

(1) $\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla\lambda.$

(2) $\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = R_{kjis}\nabla^s f + \frac{1}{m}(R_{ij}\nabla_k f - R_{ik}\nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij}\nabla_k f - g_{ik}\nabla_j f) + (g_{ij}\nabla_k\lambda - g_{ik}\nabla_j\lambda).$

(3) $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = \frac{2}{m}\{\nabla_{\nabla f}\nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f\} + 2\lambda\nabla f.$

Demonstração: Usando o Corolário 1.18(2) e calculando o divergente de (2.9), concluímos pela Observação 2.17 que

$$\begin{aligned}
\nabla R &= 2divRic \\
&= -2div\nabla^2 f + \frac{2}{m}\Delta f df + \frac{2}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat + 2(\nabla\lambda)^\flat \\
&= -2div\nabla^2 f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f + 2\nabla\lambda.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 1.17, temos que

$$\nabla R = -2Ric(\nabla f) - 2\nabla\Delta f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f + 2\nabla\lambda.$$

Utilizando a derivada covariante do traço da equação que define as métricas m-quasi-Einstein generalizadas, isto é, $\nabla R + \nabla\Delta f - \frac{1}{m}\nabla|\nabla f|^2 = n\nabla\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla R &= -2Ric(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{2}{m}\nabla|\nabla f|^2 - 2n\nabla\lambda + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f \\
&\quad + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f + 2\nabla\lambda.
\end{aligned}$$

Substituindo $\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f$ na equação acima e resolvendo para R, obtemos

$$\nabla R = 2Ric(\nabla f) + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + (2n-2)\nabla\lambda.$$

Resolvendo (2.18) para $\nabla_{\nabla f}\nabla f$, obtemos

$$\nabla_{\nabla f}\nabla f = \left(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\right)\nabla f - Ric(\nabla f).$$

Utilizando a igualdade $R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n$, obtemos $\Delta f = \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - R + \lambda n$. Utilizando as últimas equações, vemos finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla R &= Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}\left\{\left(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\right)\nabla f - Ric(\nabla f)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}|\nabla f|^2 - R + \lambda n\right) + (n-1)\nabla\lambda \\
&= \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla\lambda,
\end{aligned}$$

o que prova a primeira afirmação.

Para (2), inicialmente temos que

$$(df \otimes df)_{ij} = \nabla_i f \nabla_j f$$

e

$$R_{ij} = -\nabla_i \nabla_j f + \frac{1}{m} \nabla_i f \nabla_j f + \lambda g_{ij}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= \nabla_k(-\nabla_i \nabla_j f + \frac{1}{m}\nabla_i f \nabla_j f + \lambda g_{ij}) \\
&\quad -\nabla_j(-\nabla_i \nabla_k f + \frac{1}{m}\nabla_i f \nabla_k f + \lambda g_{ik}) \\
&= -\nabla_k \nabla_i \nabla_j f - \nabla_k \nabla_i \nabla_j f \\
&\quad +\frac{1}{m}(\nabla_k(\nabla_i f \nabla_j f) - \nabla_j(\nabla_i f \nabla_k f)) \\
&\quad +(g_{ij}\nabla_k \lambda - g_{ik}\nabla_j \lambda).
\end{aligned}$$

Assim, tendo em vista que

$$\nabla_i \nabla_j f = \nabla_j \nabla_i f,$$

$$\nabla_k \nabla_j \nabla_i f = \nabla_j \nabla_k \nabla_i f - R^s_{kji} \nabla_s f$$

e $R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}$, então $R_{ijks}\nabla^s f = g_{sm} R^m_{ijk} \nabla^s f = R^s_{ijk} \nabla_s f$ e assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= R_{kjis}\nabla^s f + (g_{ij}\nabla_k \lambda - g_{ik}\nabla_j \lambda) \\
&\quad +\frac{1}{m}(\nabla_k \nabla_i f \nabla_j f + \nabla_i f \nabla_k \nabla_j f \\
&\quad -\nabla_j \nabla_i f \nabla_k f - \nabla_i f \nabla_j \nabla_k f) \\
&= R_{kjis}\nabla^s f + (g_{ij}\nabla_k \lambda - g_{ik}\nabla_j \lambda) \\
&\quad +\frac{1}{m}(\nabla_k \nabla_i f \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i f \nabla_k f) \\
&= R_{kjis}\nabla^s f + (g_{ij}\nabla_k \lambda - g_{ik}\nabla_j \lambda) \\
&\quad +\frac{1}{m}(-R_{ki}\nabla_j f + \frac{1}{m}\nabla_k f \nabla_i f \nabla_j f + \lambda g_{ki}\nabla_j f) \\
&\quad +\frac{1}{m}(R_{ji}\nabla_k f - \frac{1}{m}\nabla_j f \nabla_i f \nabla_k f - \lambda g_{ji}\nabla_k f).
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo cancelamentos e utilizando a simetria dos tensores, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= R_{kjis}\nabla^s f + \frac{1}{m}(R_{ij}\nabla_k f - R_{ik}\nabla_j f) \\
&\quad -\frac{\lambda}{m}(g_{ij}\nabla_k f - g_{ik}\nabla_j f) + (g_{ij}\nabla_k \lambda - g_{ik}\nabla_j \lambda),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do segundo ítem.

Para a última afirmação, utilizando o que foi provado em (1), obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla(R+|\nabla f|^2-2(n-1)\lambda) &= \nabla R+\nabla|\nabla f|^2-2(n-1)\nabla\lambda \\ &= 2\left\{\frac{m-1}{m}\right\}Ric(\nabla f) \\ &\quad +\frac{2}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f \\ &\quad +2(n-1)\nabla\lambda+2\nabla_{\nabla f}\nabla f \\ &\quad -2(n-1)\nabla\lambda \\ &= 2Ric(\nabla f)-\frac{2}{m}Ric(\nabla f) \\ &\quad +\frac{2}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f \\ &\quad +2\nabla_{\nabla f}\nabla f.\end{aligned}$$

Reescrevendo $2Ric(\nabla f)+2\nabla_{\nabla f}\nabla f=\frac{2}{m}|\nabla f|^2\nabla f+2\lambda\nabla f$ e $R-\lambda n=\frac{1}{m}|\nabla f|^2-\Delta f$, então

$$\begin{aligned}\nabla(R+|\nabla f|^2-2(n-1)\lambda) &= \frac{2}{m}|\nabla f|^2\nabla f+2\lambda\nabla f \\ &\quad -\frac{2}{m}Ric(\nabla f)+\frac{2}{m}(R-\lambda n)\nabla f \\ &\quad +\frac{2}{m}\lambda\nabla f \\ &= \frac{2}{m}(|\nabla f|^2\nabla f-Ric(\nabla f)+\lambda\nabla f \\ &\quad +\frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f-\Delta f\nabla f) \\ &\quad +2\lambda\nabla f.\end{aligned}$$

Por fim, utilizando a equação (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}\nabla(R+|\nabla f|^2-2(n-1)\lambda) &= \frac{2}{m}(|\nabla f|^2\nabla f-Ric(\nabla f) \\ &\quad +Ric(\nabla f)+\nabla_{\nabla f}\nabla f-\Delta f\nabla f) \\ &\quad +2\lambda\nabla f \\ &= \frac{2}{m}\left\{\nabla_{\nabla f}\nabla f+(|\nabla f|^2-\Delta f)\nabla f\right\} \\ &\quad +2\lambda\nabla f,\end{aligned}$$

que conclui a prova do lema. $\square$

Observação 2.20. *É importante notar que se $m = \infty$ e λ for constante, o terceiro item do lema acima nos diz que*

$$R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = C \tag{2.20}$$

onde C é uma contante. Esta é a clássica equação de Hamilton para solitons de Ricci gradiente.

Como consequência deste Lema, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.21. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemannina tal que $n \geq 3$ e $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$, com $\lambda \in C^\infty(M)$. Então as seguintes fórmulas valem:*

(1) $\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2 + (n-1)\langle \nabla\lambda, \nabla f\rangle.$

(2) $\frac{1}{2}|\nabla R|^2 = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f, \nabla R) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\langle \nabla f, \nabla R\rangle + (n-1)\langle \nabla\lambda, \nabla f\rangle.$

Demonstração: Seja $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então fazendo o produto interno no item (1) do lema anterior com Z, teremos

$$\frac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f, Z) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\langle \nabla f, Z\rangle.$$

Assim, para (1) basta fazer $Z = \nabla f$ e para (2) $Z = \nabla R$. □

2.4 Alguns resultados para métricas m-quasi-Einstein gradiente generalizadas

Os resultados desta seção e os do último capítulo são os principais desta dissertação. O primeiro dos resultados dados abaixo é uma generalização de um resultado de Case et al. em [7]. Os outros resultados são devidos a Barros e Ernani Jr. em [3].

Proposição 2.22. *Quando $m \neq 1$, uma métrica m-quasi-Einstein gradiente generalizada g tem curvatura escalar constante se, e somente se,*

$$Ric\,(\nabla f) = -\left(\frac{1}{m-1}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + m(n-1)\nabla\lambda\right).$$

Demonstração: Suponha $m \neq 1$, então pelo Lema 2.19(1), temos

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + (n-1)\nabla\lambda.$$

Assim R é constante se, e somente se

$$\frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f+(n-1)\nabla\lambda=0,$$

ou seja, se, e somente se,

$$Ric\,(\nabla f)=-\left(\frac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f+m(n-1)\nabla\lambda\right).$$

□

Teorema 2.23. *Uma variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada compacta não-trivial* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, *é isométrica a esfera Euclidiana* $\mathbb{S}^n$, *desde que alguma das condições ocorra:*

(1) ∇u *é um campo conforme de vetores, onde* u *é a função auxiliar* $u = e^{-\frac{f}{m}}$.

(2) (M^n, g) *é uma variedade Einstein.*

Além disso, qualquer uma das condições anteriores indica que f é dada conforme o Exemplo 2.5.

Demonstração: Do Lema 2.15(2), M^n é Einstein se, e somente se, ∇u é campo conforme e daí, $\nabla^2 u = \rho g = \frac{\Delta u}{n} g$. Como f é não-constante, ∇u é um campo conforme não-trivial. Aplicando o Teorema 1.22, obtemos que M^n é isométrica a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, que finaliza os ítens (1) e (2) acima.

Para o que falta, devido $u = e^{-f/m}$, obtemos

$$Ric=\frac{m}{u}\nabla^2 u+\lambda g=\left(\lambda+\frac{m}{n}\frac{\Delta u}{u}\right)g.$$

Desde que $n \geq 3$, o Teorema 1.11 nos diz que $R = \lambda n + m\frac{\Delta u}{u}$ é constante. Temos, mais ainda, que $R \neq 0$. Utilizando a Proposição 1.21, obtemos

$$n\mathcal{L}_{\nabla u}R=-2(n-1)\Delta(\Delta u)-2R(\Delta u).$$

Se fosse $R = 0$, então $\Delta\Delta u = 0$, o que nos diz (pelo Teorema 1.7) que u é constante. Portanto, devemos ter $R \neq 0$.

Assumindo agora que M^n é isométrica a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$,obtemos que $Ric = (n-1)g$. Logo,

$$n\mathcal{L}_{\nabla u}R=n\nabla u(R)=ndR(\nabla u)=n\langle\nabla R,\nabla u\rangle=0$$

e assim

$$\Delta(\Delta u)+n(\Delta u)=0,$$

o que nos diz que Δu é a primeira auto-função do Laplaciano de $\mathbb{S}^n$. Assim, $\Delta u = h_v$, onde h_v é alguma função altura em relação a um fixado vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Por outro lado, $\Delta h_v + n h_v = 0$; logo,

$$\Delta u = h_v = \frac{1}{n} n h_v = -\frac{1}{n}\Delta h_v,$$

o que nos diz que $u + \frac{h_v}{n}$ é constante. Como u é positiva, segue por fim que $u = \tau - \frac{h_v}{n}$, ou seja, $f = -m \ln u = -m \ln(\tau - \frac{h_v}{n})$. □

Observação 2.24. *Se $T = \nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g$, então $\mathrm{tr}T = \Delta u - \frac{\Delta u}{n} n = 0$; isto é, T tem traço nulo. Assim $|T|^2 = |\nabla^2 u|^2 - |\frac{\Delta u}{n} g|^2$, ou seja, $|\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 = |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n}$; de onde podemos escrever*

$$|\nabla^2 u|^2 = |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}.$$

Corolário 2.25. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, $n \geq 3$, uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta não-trivial, tal que*

$$\int_m Ric(\nabla u, \nabla u) d\mu \geq \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta u)^2 d\mu,$$

onde $d\mu$ denota o elemento de volume associado a métrica Riemanniana g. Então M^n é isométrica a esfera clássica $\mathbb{S}^n$. Além disso, o potencial f é dado pelo Exemplo 2.5.

Demonstração: Integrando a fórmula do Corolário 1.18(2), obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta \left|\nabla u\right|^2 d\mu = \int_M Ric(\nabla u, \nabla u) d\mu + \int_M \left|\nabla^2 u\right|^2 d\mu + \int_M \langle \nabla u, \nabla \Delta u\rangle d\mu.$$

Por outro lado, devido

$$\left|\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g\right|^2 = \left|\nabla^2 u\right|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n}$$

e

$$div(\Delta u \nabla u) = (\Delta u)^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u\rangle$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \left|\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g\right|^2 d\mu &= \int_M \left|\nabla^2 u\right|^2 d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta u)^2 d\mu \\
&= -\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) d\mu - \int_M \langle \nabla u, \nabla \Delta u\rangle d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta u)^2 d\mu \\
&= -\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) d\mu - \int_M (\Delta u)^2 d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta u)^2 d\mu \\
&= -\int_m Ric(\nabla u, \nabla u) d\mu + \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta u)^2 d\mu \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

donde obtemos $\nabla^2 u = \frac{\Delta u}{n} g$; ou seja, ∇u é campo conforme não-trivial. Pelo Teorema 2.23, M^n é isométrica a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$. $\square$

Teorema 2.26. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta. Então M^n é trivial desde que ocorra*

(1) $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) d\mu \leq \frac{2}{m} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu - (n-2) \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\mu$

(2) M^n *é não-compacta,* $\lambda n \geq R$ *e* $|\nabla f| \in L^1(M)$.

Demonstração: Integrando a fórmula do Corolário 2.9(1) e utilizando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu &= \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) d\mu - \frac{2}{m} \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu \\ &\quad + (n-2) \int_M \langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Se vale (1), então $\int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu \leq 0$, donde $\nabla^2 f = 0$. Tomando o traço, $\Delta f = 0$. Pelo Teorema de Hopf, f é constante e daí, M^n é trivial.

(2) Basta fazer $X = \nabla f$ no Teorema 2.11. $\square$

Capítulo 3

Fórmulas Integrais e Aplicações

Neste capítulo tem-se como objetivo apresentar algumas fórmulas integrais para variedades quasi-Einstein gradiente generalizadas compactas. O próximo resultado é devido a Barros e Ribeiro Jr. em [3].

Lema 3.1. *Seja* $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ *uma variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \left\{\frac{m+n}{nm}\right\}(\Delta f)^2 - \frac{n}{2}\langle \nabla f, \nabla \lambda\rangle + \\ &\quad +\langle \nabla f, \nabla R\rangle + \left\{\frac{m-2}{2m}\right\}\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f) \\ &\quad +(n-1)\Delta\lambda + \lambda \Delta f.\end{aligned}$$

Demonstração: Calculando o divergente da fórmula do Lema 2.19(3), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta R &= -\Delta|\nabla f|^2 + 2(n-1)\Delta\lambda + 2div(\lambda\nabla f) \\ &\quad +\frac{2}{m}\left\{\langle \nabla(|\nabla f|^2 - \Delta f), \nabla f\rangle + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\Delta f\right\} \\ &\quad +\frac{2}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f).\end{aligned}$$

Agora, utilizando o Corolário 1.18(2) combinado ao fato de $|\nabla^2 f|^2 = \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2$, que nos dá $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric(\nabla f, \nabla f) - \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} - \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + (n-1)\Delta\lambda \\ &\quad +div(\lambda\nabla f) + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f) + \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}(|\nabla f|^2 - \Delta f)\Delta f \\ &\quad -\frac{1}{m}\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle.\end{aligned}$$

Utilizando que $R+\Delta f-\frac{1}{m}|\nabla f|^2=\lambda n$ para escrever $\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle=\langle\nabla(\lambda n+\frac{1}{m}|\nabla f|^2-R),\nabla f\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric(\nabla f,\nabla f)-\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g\right|^2-\frac{\Delta f^2}{n}-\langle\nabla(\lambda n+\frac{1}{m}|\nabla f|^2-R),\nabla f\rangle\\
&\quad+(n-1)\Delta\lambda+div(\lambda\nabla f)+\frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f)+\frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f,\nabla f\rangle\\
&\quad+\frac{1}{m}\left\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\Delta f-\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\right\}\\
&= -Ric(\nabla f,\nabla f)-\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g\right|^2-\frac{\Delta f^2}{n}-n\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle+\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\
&\quad+(n-1)\Delta\lambda+div(\lambda\nabla f)+\frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f)\\
&\quad+\frac{1}{m}\left\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\Delta f-\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\right\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos $div(\Delta f\nabla f)=(\Delta f)^2+\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle$ e $div(\lambda\nabla f)=\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle+\lambda\Delta f$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric(\nabla f,\nabla f)-\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g\right|^2-\frac{\Delta f^2}{n}-(n-1)\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle+\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\
&\quad+(n-1)\Delta\lambda+\lambda\Delta f+\frac{1}{m}\left\{|\nabla f|^2\Delta f+div(\nabla_{\nabla f}\nabla f-\Delta f\nabla f)\right\}.
\end{aligned}$$

Introduzindo o operador difusão $\Delta_f=\Delta-\nabla_{\nabla f}$ e utilizando a fórmula do Corolário 2.21(1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\nabla R,\nabla f\rangle &= \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla f)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2\\
&\quad+(n-1)\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_f R &= \frac{1}{2}\Delta R-\frac{1}{2}\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\
&= -Ric(\nabla f,\nabla f)-\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g\right|^2-\frac{\Delta f^2}{n}-(n-1)\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle+\frac{1}{2}\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\
&\quad+(n-1)\Delta\lambda+\lambda\Delta f+\frac{1}{m}\left\{|\nabla f|^2\Delta f+div(\nabla_{\nabla f}\nabla f-\Delta f\nabla f)\right\}\\
&= -Ric(\nabla f,\nabla f)-\left|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g\right|^2-\frac{\Delta f^2}{n}-(n-1)\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle\\
&\quad+\frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla f)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2+(n-1)\langle\nabla\lambda,\nabla f\rangle\\
&\quad+(n-1)\Delta\lambda+\lambda\Delta f+\frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f+\frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f-\Delta f\nabla f).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_f R &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} - \frac{1}{m} Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\left|\nabla f\right|^2 \\
&+ (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \frac{1}{m}\left|\nabla f\right|^2 \Delta f + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f) \\
&= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f - \frac{1}{m} Ric(\nabla f, \nabla f) \\
&+ \frac{1}{m}(R - \lambda n + \Delta f)\left|\nabla f\right|^2 + \frac{1}{m}\lambda\left|\nabla f\right|^2 + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f).
\end{aligned}
$$

Como M é uma variedade quasi-Einstein gradiente generalizada, utilizando a equação fundamental

$$
Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g,
$$

aplicando ao par $(\nabla f, \nabla f)$, obtemos

$$
-Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}\left|\nabla f\right|^4 + \lambda\left|\nabla f\right|^2 = \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle.
$$

Tomando o traço obtemos

$$
R - \lambda n + \Delta f = \frac{1}{m}\left|\nabla f\right|^2.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle &= \frac{1}{m}\langle \nabla\left|\nabla f\right|^2, \nabla f\rangle \\
&= \langle \nabla f, \nabla R\rangle + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle - n\langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle.
\end{aligned}
$$

Combinando tais equações, obtemos finalmente

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_f R &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f - \frac{1}{m} Ric(\nabla f, \nabla f) \\
&+ \frac{1}{m^2}\left|\nabla f\right|^4 + \frac{1}{m}\lambda\left|\nabla f\right|^2 + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f) \\
&= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f \\
&+ \frac{1}{m}\left\{-Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}\left|\nabla f\right|^4 + \lambda\left|\nabla f\right|^2\right\} + \frac{1}{m} div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f) \\
&= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f \\
&+ \frac{1}{m}\left\{\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle + div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f)\right\}.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\right|^2 - \frac{\Delta f^2}{n} + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla R\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle\\ &\quad -\frac{n}{2}\langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle + \frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f)\\ &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\right|^2 - \left\{\frac{m+n}{nm}\right\}(\Delta f)^2 - \frac{n}{2}\langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla R\rangle\\ &\quad + \left\{\frac{m-2}{2m}\right\}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle + \frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f) + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f.\end{aligned}$$

Utilizando novamente a definição do operador difusão, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= -\left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\right|^2 - \left\{\frac{m+n}{nm}\right\}(\Delta f)^2 - \frac{n}{2}\langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle + \langle\nabla f, \nabla R\rangle\\ &\quad + \left\{\frac{m-2}{2m}\right\}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle + \frac{1}{m}div(\nabla_{\nabla f}\nabla f) + (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f,\end{aligned}$$

que completa a prova do lema. □

Como consequência desse resultado, obtemos as seguintes fórmulas integrais, encontradas em [3].

Teorema 3.2. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma variedade m-quasi-Einstein generalizada orientável e compacta. Então*

(1) $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\right|^2 d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu = \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$

(2) $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)d\mu + \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu = \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 d\mu + \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$

(3) *M^n é trivial, desde que ocorra a seguinte desigualdade:*

$$\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu \leq \frac{n+2}{2}\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu.$$

(4) $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\right|^2 d\mu = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2nm}\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu.$

Demonstração: (1) Inicialmente, temos que

$$div(\lambda\nabla f) = \lambda\Delta f + \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle$$

e

$$div(\Delta f\nabla f) = (\Delta f)^2 + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle.$$

Aplicando diretamente o teorema da divergência, obtemos, para a primeira igualdade, $\int_M \lambda\Delta f d\mu = -\int_M \langle\nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu$, e para a segunda, $\int_M (\Delta f)^2 d\mu = -\int_M \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle d\mu$.

Agora, como M é compacta, podemos utilizar o teorema de Stokes no Lema 3.1, que nos dá

$$\begin{aligned}
\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu &= -\frac{m+n}{nm}\int_M (\Delta f)^2 d\mu + \frac{m-2}{2m}\int_M \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle d\mu \\
&\quad -\frac{n}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu + \int_M \lambda\Delta f d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu \\
&= -\frac{m+n}{nm}\int_M (\Delta f)^2 d\mu - \frac{m-2}{2m}\int_M (\Delta f)^2 d\mu - \frac{n}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu \\
&\quad -\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu \\
&= -\frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu - \frac{n+2}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(2) Integrando a fórmula do Corolário 1.18(2) e usando o Teorema da divergência, obtemos

$$\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) d\mu + \int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle d\mu = 0.$$

Desde que

$$\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu = \int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu,$$

então

$$\begin{aligned}
\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) d\mu + \int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu &= -\int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu - \int_M \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle d\mu \\
&\quad + \int_M \left|\nabla^2 f\right|^2 d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu \\
&= -\int_M \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle d\mu - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu \\
&= \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu
\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula obtida em (1), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu &= -\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu + \frac{n-1}{n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu \\
&\quad + \int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu \\
&\quad + \frac{n+2}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu \\
&= \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 d\mu + \frac{n+2}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu
\end{aligned}$$

que é a segunda afirmação.

(3) Se ocorre $\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu \leq \frac{n+2}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla\lambda\rangle d\mu$ então, pela fórmula obtida no primeiro

item, $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu = 0$, o que implica que f é constante, e assim M^n é trivial.

(4) Inicialmente, sendo $R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n$, obtemos

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla \lambda\rangle d\mu = \frac{1}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla (R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\rangle d\mu.$$

Substituindo na primeira afirmação deste teorema e utilizando que

$$0 = \int_M div(|\nabla f|^2 \nabla f) d\mu = \int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla |\nabla f|^2\rangle d\mu$$

deduzimos

$$\begin{aligned}
&\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu \\
&\quad = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla (R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\rangle d\mu \\
&\quad = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle d\mu + \frac{n+2}{2nm}\int_M \langle \nabla f, \nabla |\nabla f|^2\rangle d\mu \\
&\quad = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 d\mu - \frac{n+2}{2nm}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu,
\end{aligned}$$

donde

$$\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu - \frac{n+2}{2nm}\int_M |\nabla f|^2 \Delta f d\mu,$$

como queríamos demonstrar. □

Utilizando a última afirmação do teorema anterior, obtemos o seguinte corolário

Corolário 3.3. *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ uma variedade m-quasi-Einstein generalizada compacta e orientável com m finito. Então temos*

(1) Se $n \geq 3$, $\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle d\mu = 0$ e $\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu = 0$, então ∇f é um campo conforme de vetores.

(2) Se $n = 2$ e $\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu = 0$, então f é constante.

Demonstração: Se valem as hipóteses do primeiro item, utilizando o último ítem do Teorema anterior, então $\int_M \left|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\right|^2 d\mu = 0$, donde $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g$. Logo, f é um campo conforme de vetores. Agora, se $n = 2$ basta supor $\int_M |\nabla f|^2 div\nabla f d\mu = 0$, para concluir que ∇f é um campo conforme. Logo, reescrevendo a equação (2.8) para uma variedade m-quasi-Einstein gradiente generalizada,

$$\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g = \frac{1}{m}\left(df \otimes df - \frac{1}{n}|\nabla f|^2 g\right) - \left(Ric - \frac{R}{n} g\right),$$

vemos claramente que $df \otimes df = \frac{1}{n}|\nabla f|^2 g$. Logo, aplicando o Lema 1.20, para o caso em que $X = \nabla f$, vemos que $\nabla f = 0$, donde segue o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] AQUINO, C. ; BARROS, A. ; RIBEIRO JR, E.: Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results in Math.*, v. 60, p. 245-254, 2011.

[2] BARROS, A. ; RIBEIRO JR, E.: Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications. *Glasgow Mathematical Journal* (Print), v. 54, p. 213-223, 2012.

[3] ________ *Characterizations and integral formulae for generalized m-quasi-Einstein metrics.* ArXiv: 1206.4980. Submitted, 2012.

[4] BESSE, A. L.; *Einstein Manifolds.* Berlin : Springer-Verlag, 2008. (Classics Mathematics)

[5] CAMARGO, F. ; CAMINHA, A. ; SOUZA, P.: Complete foliations of space forms by hypesurfaces. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 41, 393-353, 2010.

[6] CARMO, M. P.: *Geometria Riemanniana.* 3a ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

[7] CASE, J.; SHU, Y.; WEI, G.: Rigidity of quasi-Einstein metrics. *Diff. Geo. Appl.*, v. 29, p. 93-100, 2010.

[8] DIÓGENES, R.: *Métricas m-quasi-Einstein em variedades compactas.* 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

[9] LEE, J. M.: *Introduction to Smooth Manifolds.* New York : Springer-Verlag, 2002. (Graduate texts in mathematics, v. 218)

[10] O'NEILL, B.: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity.* Academic Press, New York, 1983.

[11] PETERSEN, P.: *Riemannian geometry.* New York : Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, v. 171)

[12] YANO, K.: *Integral formulas in Riemannian Geometry.* Marcel Dekker Inc., New York, 1970.

[13] YAU, S. T.: Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, 659-670, 1976.