UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Edson Sampaio

# A aplicação de Gauss de superfícies mínimas no espaço de Heisenberg

Fortaleza
2012

**José Edson Sampaio**

# A aplicação de Gauss de superfícies mínimas no espaço de Heisenberg

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza
2012

*Dedico este trabalho à minha família, a meu pai Geraldo Sampaio e à minha mãe Suerda, pela confiança e orgulho em mim depositados. À minha amada esposa Syndel. Ao meu irmão Cristiano.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força que Ele tem me dado.

Ao meu pai Geraldo Sampaio, pois sem suas palavras de apoio e incentivo com certeza eu não estaria aqui, e a minha mãe Suerda pelo amor e carinho.

À minha esposa Syndel pelo amor, carinho, paciência e compreensão, quando, por muitos momentos, foi trocada pelos livros de Matemática ou aguentou meu mau humor, causado pelo estresse da correria do dia-a-dia.

Ao meu irmão e ao meu grande amigo Gilson, pela amizade e companheirismo.

Aos meus amigos da UFC, especialmente e em ordem alfabética, a Anderson Feitoza, Breno Rafael, Diego Eloi, Eurípedes Carvalho, João Nunes, João Victor, José Eduardo (Zé), Nicolas e Rui Brasileiro, pelas horas de estudos juntos e pela amizade.

Aos meus amigos Manoel Denis, Weider Lima, Marcos e Francisco das Chagas.

Ao meu orientador Antonio Caminha, pelo incentivo e orientação nos meus estudos.

Aos professores da Matemática, em especial, Caminha, Lucas, Fábio, Luquésio, Gleydson e Pacelli, pelo aprendizado proporcionado.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos as superfícies mínimas do grupo de Heisenberg tridimensional, bem como a aplicação de Gauss destas superfícies. Inicialmente é feito uma breve exposição sobre a geometria do grupo de Heisenberg. Então, mostramos que, em tal espaço: as únicas superfícies com aplicação de Gauss constante são os planos verticais; não existem superfícies totalmente umbílicas nem superfícies mínimas compactas; toda superfície mínima é, necessariamente, estável. Mostramos, ainda, que as únicas superfícies mínimas verticais são os planos verticais. Por fim, apresentamos uma classificação das superfícies com aplicação de Gauss de posto constante, igual a zero ou um.

**Palavras chaves**: Aplicação de Gauss. Superfícies mínimas. Grupo de Heisenberg.

# Abstract

In this report, we study minimal surfaces of the tridimensional Heisenberg group, as well as their Gauss maps. We begin with a short presentation of the geometry of the Heisenberg group. Then, we show that, in this space: the only surfaces with constant Gauss map are the vertical planes; there are no totally umbilical surfaces nor compact minimal surfaces; every minimal surface is, necessarily, stable. We also show that the only vertical minimal surfaces are vertical planes. Finally, we present a classification of the surfaces with Gauss map of constant rank, equal to zero or one.



**Keywords**: Gauss map. Minimal surfaces. Heisenberg group.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Neste trabalho, estudamos as superfícies mínimas no espaço de Heisenberg tridimensional $\mathcal{H}_3$, damos uma classificação das superfícies mínimas regradas em $\mathcal{H}_3$ e, então, classificamos todas as superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$ que têm aplicação de Gauss com posto constante e menor ou igual a um.

O espaço de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo do grupo $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem 3 e invertíveis, dado pelos elementos da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Com a multiplicação de matrizes, é imediato verificar que $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ é um grupo de Lie, e que $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo de Lie fechado. Mais adiante, muniremos $\mathcal{H}_3$ com uma métrica invariante à esquerda.

Em se tratando de superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$, diversos autores publicaram sobre o assunto e, dentre esses, podemos citar M. Bekkar e T. Sari que, em [4], classificaram as superfícies mínimas regradas em $\mathcal{H}_3$.

Quanto à aplicação de Gauss de superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$, C. Figueroa, em [14] e em [15], estudou as superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$ que têm aplicação de Gauss com posto constante e menor ou igual a um, enquanto B. Daniel, em [6], estudou a imagem da aplicação de Gauss de gráficos mínimos completos em $\mathcal{H}_3$.

No Capítulo 2, colecionamos muitas das definições e resultados sobre Grupos de Lie usados no restante do texto, assim como estudamos a geometria de $\mathcal{H}_3$. Apresentamos, ainda, alguns resultados clássicos sobre equações diferenciais parciais, relevantes para nossa discussão.

No capítulo 3, são apresentadas algumas propriedades das superfícies em $\mathcal{H}_3$, tais como as inexistências de superfícies umbílicas e de superfícies mínimas compactas, assim como o fato de que um gráfico completo e de curvatura média constante deve, necessariamente, ser mínimo. Abordamos, ainda, a questão da estabilidade de superfícies de curvatura média constante, mostrando que toda superfície mínima em $\mathcal{H}_3$ é estável. Ainda no que concerne gráficos completos, mostramos o seguinte teorema *tipo Bernstein*:

**Teorema 1.** *Se $G(f)$ é um gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$, com $f$ inteira e limitada, então $f$ é constante.*

Por fim, no Capítulo 4, classificamos as superfícies mínimas verticais de $\mathcal{H}_3$ e mostramos que as superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$ com aplicação de Gauss de posto constante igual a zero ou igual a um são, a menos de isometrias, regradas. Por fim, concluímos com uma demonstração do seguinte teorema de classificação:

**Teorema 2.** *Os gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$ com aplicação de Gauss de posto constante e igual a um são os gráficos das funções $f$ da forma*

$$f(x,y) = \frac{xy}{2} + k\left[\log(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}\right],$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.*

# Capítulo 2

# Preliminares

Nesse capítulo, estabeleceremos algumas definições, notações e resultados usados no decorrer do texto.

## 2.1 Grupos de Lie

Esta seção reúne alguns resultados sobre grupos de Lie que utilizaremos; para maiores detalhes, referimos o leitor a [26] e [23]. Comecemos relembrando a definição de grupo de Lie.

**Definição 2.1.** *Um grupo de Lie $G$ é uma variedade diferenciável, com uma estrutura de grupo tal que a aplicação de multiplicação $m : G \times G \to G$, dada por $m(x, y) = xy$, e a aplicação de inversão $\iota : G \to G$, dada por $\iota(x) = x^{-1}$, são diferenciáveis.*

**Exemplo 2.2.** *O grupo das matrizes quadradas, de ordem $n$ e invertíveis, denotado por $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, é um grupo de Lie, denominado o grupo linear geral de ordem $n$.*

De fato, a identificação natural do espaço vetorial $M(n; \mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem $n$ com $\mathbb{R}^{n^2}$ torna $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ um aberto de $M(n; \mathbb{R})$, uma vez que

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) = \{A \in M(n; \mathbb{R}); \det A \neq 0\}$$

e $\det : M(n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Assim, $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável. Por outro lado, como as aplicações de multiplicação $(A, B) \longmapsto AB$ e de inversão $A \longmapsto A^{-1}$ são claramente diferenciáveis, temos que $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

**Definição 2.3.** *Um subgrupo de Lie de um grupo de Lie $G$ é um subgrupo de $G$ munido com uma topologia e uma estrutura diferenciável fazendo dele um grupo de Lie e uma subvariedade imersa de $G$.*

**Definição 2.4.** *Sejam $G$ e $H$ grupos de Lie. Um homomorfismo de grupos de Lie entre $G$ e $H$ é uma aplicação diferenciável $\phi : G \to H$ que também é um homomorfismo de grupos.*

Dizemos que os grupos de Lie $G$ e $H$ são isomorfos se existir um homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \to H$ que também é um difeomorfismo; neste caso, $\phi$ é chamado um isomorfismo de grupos de Lie. Um isomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \to G$ é chamado um automorfismo de grupos de Lie.

**Definição 2.5.** *Seja $G$ um grupo de Lie. Um homomorfismo de grupos de Lie $\phi : (\mathbb{R}, +) \to G$ é denominado um subgrupo a um parâmetro de $G$.*

Um exemplo relevante de homomorfismo de grupos de Lie é o que segue.

**Exemplo 2.6.** *A restrição a $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ da aplicação determinante,* $\det : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$*, é um homomorfismo de grupos de Lie.*

De fato, já sabemos que det é diferenciável; por outro lado, ela é um homomorfismo de grupos, uma vez que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, para todas $A, B \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, pelo teorema de Binet.

Sendo $G$ um grupo de Lie, definimos, para cada $p \in G$, a translação à esquerda $L_p : G \to G$ por

$$L_p(x) = px, \quad \forall x \in G.$$

Denotando por $\mathfrak{X}(G)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em $G$, temos a seguinte definição importante.

**Definição 2.7.** *Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda se para todo $p \in G$ tem-se $(dL_p)_x(X_x) = X_{px}$.*

Denotaremos por $\mathrm{Lie}(G)$ o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda em $G$ e escreveremos $dL_p(X) = X$, para todo $p \in G$, para significar que $X \in \mathrm{Lie}(G)$. Uma vez que $dL_p : TG \to TG$ é linear em cada fibra e para todo $p \in G$, temos que $\mathrm{Lie}(G)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$.

Outro conceito muito importante para a teoria de grupos de Lie é aquele de álgebra de Lie, conforme ensina a definição a seguir.

**Definição 2.8.** *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido com uma aplicação $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, a qual é bilinear, antissimétrica e tal que*

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0, \tag{2.1}$$

*para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

A aplicação $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ da definição acima é denominada o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$, ao passo que a identidade (2.1) é conhecida na literatura como a identidade de Jacobi.

**Exemplo 2.9.** *Se $M$ é uma variedade diferenciável, então $\mathfrak{X}(M)$, munido com o colchete de campos de vetores, é uma álgebra de Lie. Realmente, $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial e, como é bem sabido, o colchete de campos de vetores satisfaz a identidade de Jacobi.*

**Definição 2.10.** *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, um subespaço linear $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é chamado uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{h}$ é fechado sob o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Se $G$ é um grupo de Lie, mostraremos a seguir que $\mathrm{Lie}(G)$, munido com o colchete de campos de vetores é uma álgebra de Lie. Para ver isto, precisamos do seguinte resultado, o qual é útil em si mesmo.

**Lema 2.11.** *Sejam $M$ e $N$ variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(N)$ são campos de vetores tais que $W_i = dF(V_i)$, para $i = 1, 2$, então $[W_1, W_2] = dF([V_1, V_2])$.*

*Demonstração.* Veja [26], Capítulo 4, Proposição 4.16. □

**Proposição 2.12.** *Se $G$ é um grupo de Lie e $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$, então $[X, Y] \in \mathrm{Lie}(G)$.*

*Demonstração.* Uma vez que $dL_p(X) = X$ e $dL_p(Y) = Y$, para todo $p \in G$, temos, pelo lema anterior, que

$$dL_p([X,Y]) = [dL_p(X), dL_p(Y)] = [X,Y],$$

também para todo $p \in G$. Logo, $[X,Y] \in \mathrm{Lie}(G)$. □

Além de ser uma álgebra de Lie, $\mathrm{Lie}(G)$ tem dimensão finita. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.13.** *Se $G$ é um grupo de Lie, então a aplicação $\varepsilon : \mathrm{Lie}(G) \to T_eG$, dada por $\varepsilon(X) = X_e$, para todo $X \in \mathrm{Lie}(G)$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Em particular, $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim G$.*

*Demonstração.* Claramente, $\varepsilon$ é linear. Dado $V \in T_eG$, defina um campo de vetores $\tilde{V}$ em $G$ (em princípio não necessariamente suave) pondo $\tilde{V}_p = (dL_p)_e(V)$, para todo $p \in G$. É fácil ver que $\tilde{V}_e = V$, uma vez que $(dL_e)_e$ é a identidade de $T_eG$.

Mostremos, agora, que $\tilde{V}$ é diferenciável. Para tanto, é suficiente mostrar que, se $U \subset G$ for um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável, então

$\tilde{V}f : U \to \mathbb{R}$ também é diferenciável. Escolha uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$, tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = V$. Então, para $p \in U$, temos

$$\begin{aligned}
(\tilde{V}f)(p) &= \tilde{V}_p f \\
&= ((dL_p)_e(V))f \\
&= V(f \circ L_p) \\
&= \gamma'(0)(f \circ L_p) \\
&= \tfrac{d}{dt}(f \circ L_p \circ \gamma)(t)\big|_{t=0}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, definindo $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to G$ por $\varphi(t, p) = f \circ L_p \circ \gamma(t) = f(p\gamma(t))$, segue dos cálculos acima que

$$(\tilde{V}f)(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p).$$

Como $\varphi$ é claramente diferenciável, temos $\tilde{V}f$ é diferenciável.

Observe, agora, que $dL_p \circ dL_q = d(L_p \circ L_q) = dL_{pq}$, de sorte que

$$(dL_p)_q(\tilde{V}_q) = (dL_p)_q(dL_q)_e(V) = (dL_{pq})_e(V) = \tilde{V}_{pq}.$$

Portanto, $\tilde{V} \in \mathrm{Lie}(G)$ e, assim, $\varepsilon$ é sobrejetiva.

Agora, se $X \in \mathrm{Lie}(G)$ é tal que $\varepsilon(X) = X_e = 0$, então $X$ é o campo nulo, pois, para $p \in G$, temos $X_p = (dL_p)_e(X_e) = (dL_p)_e(0) = 0$. Mas, sendo linear e com núcleo trivial, a aplicação $\varepsilon$ é injetiva. □

A prova do teorema anterior permite definir um colchete de Lie em $T_eG$ pondo, para $V, W \in T_eG$,

$$[V, W] = [\tilde{V}, \tilde{W}]_e, \tag{2.3}$$

onde $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ são as extensões de $V$ e $W$ a campos invariantes à esquerda em $G$, construídas de acordo com o referido teorema. Segue diretamente da Proposição 2.12 que o colchete $[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$, definido como acima, é um colchete de Lie para $T_eG$. Isto posto, temos a seguinte definição importante.

**Definição 2.14.** *Se $G$ é um grupo de Lie, então $T_eG$, munido com o colchete de Lie definido em* (2.3)*, é denominado a álgebra de Lie de $G$.*

Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos a álgebra de Lie de um grupo de Lie $G$ simplesmente por $\mathfrak{g}$.

**Exemplo 2.15.** *O espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem $n$, munido com o colchete comutador,*

$$[A, B] = AB - BA,$$

*para todas $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, é uma álgebra de Lie, a qual será denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. É possível provar (cf. Proposição* 4.23 *de* [26]) *que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é isomorfa à álgebra de Lie do grupo linear geral* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

A continuação, anotamos mais um conceito relevante à teoria básica de grupos de Lie.

**Definição 2.16.** *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Uma aplicação $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se for linear e preservar os colchetes correspondentes, ou seja, se*

$$A([X, Y]) = [A(X), A(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dizemos que um homomorfismo de álgebras de Lie $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo (de álgebras de Lie) se for bijetivo. Nesse caso, é imediato verificar que a aplicação inversa $A^{-1} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, além de ser linear, também é um homomorfismo de álgebras de Lie. Dizemos, então, que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie isomorfas.

O Teorema 2.13 garante que, ao munirmos $T_eG$ com o colchete de Lie (2.3), tornamos $\varepsilon : \mathrm{Lie}(G) \to T_eG$ um exemplo de isomorfismo de álgebras de Lie. Assim, sempre que conveniente, consideraremos $\mathrm{Lie}(G)$ como a álgebra de Lie de $G$.

Se $M$, $N$ e $P$ são variedades diferenciáveis, e $F : M \to N$ e $G : N \to P$ são aplicações diferenciáveis, sabemos que $d(G \circ F) = dG \circ dF$, como aplicações de $TM$ em $TP$. Sabemos também que a aplicação identidade $id_M : M \to M$ induz, para cada $p \in M$, a aplicação identidade de $T_pM$, ou seja, que $d(id_M)_p = id_{T_pM}$. Podemos, agora, enunciar e provar o resultado a seguir.

**Teorema 2.17.** *Se $G$ e $H$ são grupos de Lie isomorfos, então suas respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são também isomorfas.*

*Demonstração.* Se $F : G \to H$ é um isomorfismo de grupos de Lie, temos em particular que $F$ é um difeomorfismo e $F(e) = e$; portanto, $dF_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Agora, o Lema 2.11, juntamente com o fato de $F$ ser difeomorfismo, garante que

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathrm{Lie}(G).$$

Aplicando ambos os lados da igualdade acima em $e$, vemos que, de fato, $dF_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Como $F^{-1} : H \to G$ também é um homomorfismo de grupos de Lie, concluímos, de maneira análoga, que $dF_e^{-1} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Ademais, a discussão que precede o enunciado garante que $dF_e^{-1} \circ dF_e$ e $dF_e \circ dF_e^{-1}$ são inversas uma da outra, de forma que são isomorfismos de grupos de Lie. $\square$

Finalizamos este curto apanhado sobre grupos de Lie enunciando, sem demonstração, o seguinte resultado profundo, conhecido na literatura como o teorema do subgrupo fechado.

**Teorema 2.18.** *Se $G$ é um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo que e um subconjunto fechado de $G$, então $H$ é um subgrupo de Lie mergulhado de $G$.*

*Demonstração.* Veja [26], Teorema 20.10. □

## 2.2 Excertos de Geometria Riemanniana

Nesta curta seção, colecionamos alguns fatos básicos de Geometria Riemanniana, os quais se revelarão úteis posteriormente, sendo [11], [33], [27] e [18] as referências principais

**Definição 2.19.** *Sejam $M$ e $N$ variedade Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é uma isometria se $f$ preservar as métricas de $M$ e de $N$, no seguinte sentido:*

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)},$$

*para todos $p \in M$ e $v, w \in T_pM$.*

Recordemos, agora, o importante conceito de geodésica de uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.20.** *Sejam $M$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi Civita $\nabla$. Uma curva suave $\gamma : I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é denominada uma geodésica de $M$ se*

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0, \quad \forall t \in I,$$

*onde $\frac{D}{dt}$ denota a derivação covariante, ao longo de $\gamma$, correspondente a $\nabla$.*

De posse da definição acima, uma certa elaboração do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias fornece o seguinte resultado importante.

**Lema 2.21.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existem um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, contendo $0$, e uma única geodésica $\gamma : I \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

*Demonstração.* Veja [27], Teorema 4.10. □

Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos a curva dada pelo lema acima por $\gamma_v$, sendo $I_v$ seu domínio maximal de definição. Com tais notações, relembramos o seguinte resultado fundamental.

**Proposição 2.22.** *Sejam $M$ uma variedade Riemanniana e $p \in M$ um ponto fixado. Se $D_p$ denota o conjunto dos vetores $v \in T_pM$ tal que $[0,1] \subset I_v$, então $D_p$ é um aberto de $T_pM$. Ademais, a aplicação $\exp_p : D_p \to M$, definida por*

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1), \qquad v \in D_p,$$

*é diferenciável.*

*Demonstração.* Veja [27], Proposição 5.7. □

Nas notações da proposição acima, dizemos que $\exp_p : D_p \to M$ é a aplicação exponencial de $M$ em $p$. É bem sabido (cf. Proposição 30 do capítulo 3 de [33]) que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $B_p$ da origem de $T_pM$ tal que $\exp_p|_{B_p}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $U_p$ de $M$, tal que $\exp_p(0) = p$. Nesse caso, dizemos que $U_p$ é uma vizinhança normal de $p$ em $M$.

Uma vez que uma isometria $f : M \to N$ entre variedades Riemannianas preserva as métricas envolvidas e, sendo um difeomorfismo, também preserva colchetes de campos, segue da fórmula de Koszul (cf. Teorema 11 do capítulo 3 de [33]) que $f$ preserva as conexões de Levi Civita de $M$ e de $N$. Portanto, é imediato que $f$ aplica geodésicas de $M$ em geodésicas de $N$. Temos, agora, o seguinte resultado.

**Teorema 2.23.** *Se $\phi$ e $\psi$ são isometrias de uma variedade Riemanniana conexa $M$, tais que $\phi(p) = \psi(p)$ e $d\phi_p = d\psi_p$, para algum $p \in M$, então $\phi = \psi$.*

*Demonstração.* Defina $U = \{q \in M;\, \phi(q) = \psi(q)\, \mathrm{e}\, d\phi_q = d\psi_q\}$. Temos $U \neq \emptyset$, uma vez que $p \in U$. Ademais, por continuidade, temos $U$ fechado em $M$. Agora, sejam $q \in U$ e $U_q$ uma vizinhança normal de $q$ em $M$. Se $r \in U_p$, seja $v \in T_qM$ tal que $\gamma_v(1) = \exp_q(v) = r$. A discussão anterior, juntamente com o fato de $q \in U$, garante que

$$\psi(r) = \psi(\gamma_v(1)) = \gamma_{d\psi_q(v)}(1) = \gamma_{d\phi_q(v)}(1) = \phi(\gamma_v(1)) = \phi(r).$$

Logo, $\phi = \psi$ em $U_q$ e, então, $d\phi_q = d\psi_q$, para todo $q \in U_q$, de sorte que $U_q \subset U$. Poranto, $U$ é aberto em $M$ e, como $M$ é conexa, temos $U = M$. □

A continuação, sejam $G$ um grupo de Lie munido como uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\nabla$ a conexão de Levi Civita correspondente.

**Definição 2.24.** *Nas notações acima, dizemos que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $G$ é invariante à esquerda se $L_p$ for uma isometria de $G$, para todo $p \in G$.*

Se $G$ é um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda, o teorema a seguir relaciona os automorfismos de $G$ com suas isometrias.

**Teorema 2.25.** *Sejam $G$ um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e $\Phi : G \to G$ um automorfismo. Se $d\Phi_e : T_eG \to T_eG$ preserva o produto interno induzido em $T_eG$ pela métrica de $G$, então $\Phi$ é uma isometria.*

*Demonstração.* Uma vez que $\Phi$ é um homomorfismo de $G$, temos $\Phi \circ L_p = L_{\Phi(p)} \circ \Phi$, para todo $p \in G$ e, daí, $d\Phi_{pq} \circ (dL_p)_q = (dL_{\Phi(p)})_{\Phi(q)} \circ d\Phi_q$, para todos $p, q \in G$.

Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica de $G$ e sejam $p \in G$, $v, w \in T_pG$ e $v_e = (dL_p)_e^{-1}(v)$ e $w_e = (dL_p)_e^{-1}(w)$, ambos vetores em $T_eG$. Segue de nossas hipóteses que

$$\begin{aligned}
\langle d\Phi_p(v), d\Phi_p(w) \rangle_{\Phi(p)} &= \langle d\Phi_p \circ (dL_p)_e(v_e), d\Phi_p(w) \circ (dL_p)_e(w_e) \rangle_{\Phi(p)} \\
&= \langle (dL_{\Phi(p)})_e \circ d\Phi_e(v_e), (dL_{\Phi(p)})_e \circ d\Phi_e(w_e) \rangle_{\Phi(p)} \\
&= \langle d\Phi_e(v_e), d\Phi_e(w_e) \rangle_e \\
&= \langle v_e, w_e \rangle_e \\
&= \langle (dL_p)_e(v_e), (dL_p)_e(w_e) \rangle_p \\
&= \langle v, w \rangle_p.
\end{aligned}$$

Mas, como $\Psi$ é um difeomorfismo e $p \in G$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\Phi$ é uma isometria de $G$. $\square$

## 2.3 O espaço de Heisenberg $\mathcal{H}_3$

Nesta seção definimos o Grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ e apresentamos algumas propriedades desse grupo, visto como um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda.

**Definição 2.26.** *Seja $GL(3, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes $3 \times 3$ invertíveis. Definimos o grupo de Heisenberg 3-dimensional $\mathcal{H}_3 \subset GL(3, \mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

*munido com a estrutura de grupo de $GL(3, \mathbb{R})$.*

Já que $\mathcal{H}_3$ é claramente um subconjunto fechado de $GL(3, \mathbb{R})$ o Teorema 2.18 que $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$ e, portanto, $\mathcal{H}_3$ é um grupo de Lie.

Além disso, se $\alpha : I \to \mathcal{H}_3$ é uma curva diferenciável, existem funções $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & a(t) & c(t) \\ 0 & 1 & b(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo t} \in I.$$

Derivando, temos

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 & a'(t) & c'(t) \\ 0 & 0 & b'(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo t} \in I.$$

Assim, a álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ de $\mathcal{H}_3$ é constituída dos elementos da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Como $\mathcal{H}_3 \subset GL(3, \mathbb{R})$, então (veja [26], proposição 20.3) a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h}_3 \to \mathcal{H}_3$ é dada por

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A \in \mathfrak{h}.$$

Mas $\mathcal{H}_3$ é 2-nilpotente, então

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde vemos, facilmente, que a aplicação exponencial é um difeomorfismo global.

Então, fazendo a identificação canônica da álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ com $\mathbb{R}^3$ e usando a aplicação exponencial como parametrização global, o espaço de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ identifica-se com $\mathbb{R}^3$, pois se munirmos $\mathbb{R}^3$ com a seguinte operação

$$p * q = exp^{-1}(exp(p)exp(q)), \quad p, q \in \mathbb{R}^3,$$

ou, mais explicitamente,

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)), \tag{2.4}$$

temos que a aplicação $exp : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}_3$ é um isomorfismo de grupos de Lie. Assim, de agora em diante, módulo o isomorfismo dado por $exp$ consideramos $\mathcal{H}_3$ como $\mathbb{R}^3$ munido com o produto dado em (2.4).

A fim de encontrarmos uma métrica invariante à esquerda em $\mathcal{H}_3$, para cada $p = (x, y, z) \in \mathcal{H}_3$ definimos a translação à esquerda $L_p : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ por $L_p(q) = p * q$ para todo $q \in \mathcal{H}_3$. É fácil verificar que sua diferencial na identidade é dada por

$$dL_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

É também interessante conhecermos o cochete de Lie de $\mathfrak{h}_3 = \mathbb{R}^3$, então sendo $\{e_1, e_2, e_3\} \in \mathfrak{h}_3$ a base canônica do $\mathfrak{h}_3$ é fácil ver que o colchete de Lie em termos dessa base é dado por

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad \text{e} \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \tag{2.5}$$

Usando tal base, que é uma base na identidade de $\mathcal{H}_3$, definimos para cada $i = 1, 2, 3$ o campo $E_i$ por

$$E_i(p) = dL_p(e_i). \tag{2.6}$$

Daí

$$\begin{array}{rclclcl} E_1(p) & = & dL_p(e_1) & = & (1, 0, -\frac{y}{2}) & = & \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \\ E_2(p) & = & dL_p(e_2) & = & (0, 1, \frac{x}{2}) & = & \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \\ E_3(p) & = & dL_p(e_1) & = & (0, 0, 1) & = & \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p. \end{array} \tag{2.7}$$

Então, para cada $p = (x, y, z) \in \mathcal{H}_3$ e $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathcal{H}_3$ definimos uma métrica invariante à esquerda $ds^2$ em $\mathcal{H}_3$ fazendo

$$ds_p^2(v, w) = \langle dL_{p^{-1}}(v), dL_{p^{-1}}(w)\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Assim, temos

$$ds_p^2(v, w) = \langle (v_1, v_2, v_3 + \tfrac{1}{2}(xv_2 - yv_1)), (w_1, w_2, w_3 + \tfrac{1}{2}(xw_2 - yw_1))\rangle_{\mathbb{R}^3},$$

e, portanto,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{y}{2}dy - \frac{x}{2}dx)^2. \tag{2.8}$$

Do fato de $L_p$ ser uma isometria para todo $p \in \mathcal{H}_3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ ser uma base ortonormal para $T_e\mathcal{H}_3 = \mathfrak{h}_3$, temos que $\{E_1, E_2, E_3\}$ é uma base de campos de vetores ortonormais invariantes à esquerda. Para cada $p \in \mathcal{H}_3$ a base $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ é chamada base canônica de $T_p\mathcal{H}_3$.

De agora em diante denotaremos $ds_p^2(v, w)$ por $\langle v, w\rangle_p$ ou, simplesmente $\langle v, w\rangle$ quando não houver risco de confusão. Além disso, a conexão Riemanniana de $(\mathcal{H}_3, ds^2)$ será denotada por $\overline{\nabla}$, e se $X$, $Y$ e $Z$ são campos invariantes à esquerda de $\mathcal{H}_3$ temos que

$$\langle X(p), Y(p)\rangle = \langle dL_pX(e), dL_pY(e)\rangle = \langle X(e), Y(e)\rangle, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{H}_3.$$

Logo, $Z\langle X, Y\rangle = 0$. Portanto,

$$\langle Z, \overline{\nabla}_X Y\rangle = -\frac{1}{2}(\langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, X], Z\rangle). \tag{2.9}$$

Assim, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, temos

$$\langle E_k, \overline{\nabla}_{E_j} E_i\rangle = -\frac{1}{2}(\langle [E_i, E_k], E_j\rangle + \langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_i, E_j], E_k\rangle). \tag{2.10}$$

Como

$$\overline{\nabla}_{E_j} E_i = \sum_{k=1}^{3} \langle E_k, \overline{\nabla}_{E_j} E_i\rangle E_k, \tag{2.11}$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, substituindo (2.10) em (2.11) obtemos a conexão $\nabla$ em termos da base $\{E_1, E_2, E_3\}$,

$$\begin{array}{lclcl} \overline{\nabla}_{E_1} E_2 & = & \frac{1}{2}E_3 & = & -\overline{\nabla}_{E_2} E_1 \\ \overline{\nabla}_{E_1} E_3 & = & -\frac{1}{2}E_2 & = & \overline{\nabla}_{E_3} E_1 \\ \overline{\nabla}_{E_2} E_3 & = & \frac{1}{2}E_1 & = & \overline{\nabla}_{E_3} E_2 \\ \overline{\nabla}_{E_i} E_i & = & 0, & & \end{array} \tag{2.12}$$

para $i = 1, 2, 3$.

### 2.3.1 Curvaturas

Como conhecido a curvatura $R$ de uma variedade Riemanniana $M$ é uma aplicação que a cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ associa uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Se $R$ denota a curvatura de $\mathcal{H}_3$, escrevemos $R_{ijk} = R(E_i, E_j)E_k$, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, onde $\{E_1, E_2, E_3\}$ é a base de campos vetoriais invariantes à esquerda como na seção anterior. Daí, para conhecermos $R$ é suficiente conhecermos os $R'_{ijk}$s, já que a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ ja é conhecida.

**Proposição 2.27.** *$R_{iij} = 0$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $R_{121} = \frac{3}{4}E_2$, $R_{122} = -\frac{3}{4}E_1$, $R_{123} = 0$, $R_{131} = -\frac{1}{4}E_3$, $R_{132} = 0$, $R_{133} = \frac{1}{4}E_1$, $R_{231} = 0$, $R_{232} = -\frac{1}{4}E_3$ e $R_{233} = \frac{1}{4}E_2$.*

*Demonstração.* Mostraremos que $R_{121} = \frac{3}{4}E_2$ e para os outros $R_{ijk}$'s mostra-se de forma análoga. De fato,

$$\begin{aligned} R_{121} &= \overline{\nabla}_{E_1}\overline{\nabla}_{E_2}E_1 - \overline{\nabla}_{E_2}\overline{\nabla}_{E_1}E_1 - \overline{\nabla}_{[E_1,E_2]}E_1 \\ &= \overline{\nabla}_{E_1}(-\frac{1}{2}E_3) - \overline{\nabla}_{E_1}(0) - \overline{\nabla}_{E_3}E_1 \\ &= \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{2}E_2 \\ &= \frac{3}{4}E_2. \end{aligned}$$

□

Agora, para cada ponto $p \in \mathcal{H}_3$ e $X, Y \in T_p\mathcal{H}_3$ vetores linearmente independentes, a curvatura seccional $\overline{K}$ de $\mathcal{H}_3$ no ponto $p$ do plano gerado po $\{X, Y\}$ é dada por

$$\overline{K}(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{\|X \wedge Y\|^2}, \tag{2.13}$$

onde $\|X \wedge Y\| = \sqrt{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$. Daí, usando a proposição 2.27 temos que a curvatura seccional em termos da base $\{E_1, E_2, E_3\}$ é dada por

$$\begin{array}{rclcl} \overline{K}(E_1,E_2) &=& \langle \frac{3}{4}E_2, E_2\rangle &=& \frac{3}{4} \\ \overline{K}(E_1,E_3) &=& \langle -\frac{1}{4}E_3, E_3\rangle &=& -\frac{1}{4} \\ \overline{K}(E_2,E_3) &=& \langle -\frac{1}{4}E_3, E_3\rangle &=& -\frac{1}{4}. \end{array} \tag{2.14}$$

O que prova que $\mathcal{H}_3$ não é um espaço de curvatura seccional constante.

### 2.3.2 Isometrias

Nesta seção, explicitamos o grupo de isometrias de $\mathcal{H}_3$. Para isso faremos uso do seguinte

**Lema 2.28.** *Se $\Psi : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ é uma isometria tal que $\Psi(0) = 0$, então $\Psi$ é dada por um dos itens abaixo:*

1. $\Psi(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$

2. $\Psi(x, y, z) = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta, -z)$,

*para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.*

*Demonstração.* Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathfrak{h}_3$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

a matriz que representa $d\Psi_0 : \mathfrak{h}_3 \to \mathfrak{h}_3$ nessa base. Assim, para todo $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathfrak{h}_3$

$$d\Psi_0(v) = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3, a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3, a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3).$$

Como $d\Psi_0$ é um automorfismo da álgebra $\mathfrak{h}_3$ e $[e_1, e_2] = e_3$ temos que

$$d\Psi_0(e_3) = [d\Psi_0 e_1, d\Psi_0 e_2].$$

Escrevendo $d\Psi_0(e_i) = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}e_j$ para $i = 1, 2, 3$ e usando que o colchete é bilinear, temos

$$\begin{aligned} [d\Psi_0(e_1), d\Psi_0(e_2)] &= \sum_{j,k=1}^{3} a_{j1}a_{k2}[e_j, e_k] \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})e_3. \end{aligned}$$

Logo, $d\Psi_0(e_3) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})e_3$, o que nos dá,

$$\begin{aligned} a_{13} &= 0 \\ a_{23} &= 0 \\ a_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Uma vez que $d\Psi_0$ preserva o produto interno, $d\Psi_0^{-1}$ também preserva o produto interno e, desde que $AA^t = I$, $A^t$ é a matriz que representa $d\Psi_0^{-1}$ na base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Por um argumento similar ao feito acima, temos que

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Daí, usando as igualdades de (2.15) e (2.16), obtemos

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & 0 \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Como $AA^t = I$ obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \pm 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (2.18) por $a_{21}$ e a ultima equação por $a_{22}$ e então somando os resultados obtemos

$$a_{11}(a_{21}^2 + a_{22}^2) = \pm a_{22}.$$

Logo, pela terceira equação de (2.18), temos $a_{11} = \pm a_{22}$ e subtraindo a segunda da terceira equação de (2.18), obtemos $a_{21}^2 = a_{12}^2$.

Restam os seguintes dois casos que nos permitirão encontrar as duas componentes conexas do grupo de isometrias de $\mathcal{H}_3$.

*i)* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$.

Da argumentação anterior, segue que $a_{33} = 1$ e $a_{11} = a_{22}$. Se $a_{11} \neq 0$, então a primeira equação de (2.18) nos dá $a_{11}(a_{21} + a_{12}) = 0$ e, assim, $a_{21} = -a_{12}$. Se $a_{11} = 0$, então a quarta equação de (2.18) nos dá $a_{21}a_{12} = -1$ e como $a_{21}^2 = a_{12}^2$ temos que $a_{21} = -a_{12}$. Logo, em qualquer caso, temos que $A$ é da forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\Phi : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ é dada por

$$\Phi(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z),$$

temos que $\Phi(0) = 0$ e $d\Phi_0$ também é representada na base canônica por $A$. Assim, $d\Phi_0 = d\Psi_0$ e $\Phi(0) = \Psi(0)$. Além disso, $\Phi$ é um automorfismo de $\mathcal{H}_3$, pois para $(x_1, y_1, z_1)$ e $(x_2, y_2, z_2)$ em $\mathcal{H}_3$ temos,

$$\begin{aligned} x_1y_2 - x_2y_1 &= (x_1\cos\theta - y_1\sin\theta)(x_2\sin\theta + y_2\cos\theta) \\ &\quad -(x_2\cos\theta - y_2\sin\theta)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Phi((x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2)) = \Phi((x_1, y_1, z_1)) * \Phi((x_2, y_2, z_2)).$$

Logo, pelos Teoremas 2.25 e 2.23, segue que $\Phi$ é uma isometria de $\mathcal{H}_3$ e $\Psi = \Phi$.

*ii)* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -1$.

Por argumentos totalmente análogos ao caso anterior obtemos $a_{33} = -1$, $a_{11} = -a_{22}$

e $a_{21} = a_{12}$. Assim, $A$ é da forma,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disto, como no caso anterior, a aplicação $\Phi : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ dada por

$$\Phi(x, y, z) = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta, -z),$$

é um automorfismo de $\mathcal{H}_3$ com $\Phi(0) = 0$ e $d\Phi_0 = d\Psi_0$. Então, novamente pelos Teoremas 2.25 e 2.23 $\Phi$ é uma isometria de $\mathcal{H}_3$ e $\Psi = \Phi$.

Isso conclui a prova do lema. $\square$

**Teorema 2.29.** *Seja $\Phi : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ uma isometria tal que $\Phi(0) = p$. Então $\Phi = L_p \circ \Psi$, onde $\Psi$ é uma isometria dada pelo lema acima.*

*Demonstração.* Como $L_{p^{-1}}$ e $\Phi$ são isometrias então $L_{p^{-1}} \circ \Phi$ é uma isometria tal que $L_{p^{-1}} \circ \Phi(0) = 0$. Logo, pelo lema 2.28 temos que $L_{p^{-1}} \circ \Phi = \Psi$, onde $\Psi$ é uma isometria dada pelo lema 2.28. Como $L_{p^{-1}} = (L_p)^{-1}$, o resultado segue. $\square$

### 2.3.3 Superfícies

**Definição 2.30.** *Dizemos que um conjunto $S \subset \mathcal{H}_3$ é uma superfície em $\mathcal{H}_3$ se, para todo ponto $p \in S$, existem um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e uma função $\varphi : \Omega \to S$, com $p \in \varphi(\Omega)$ satisfazendo*

1. *$\varphi$ é um homeomorfismo entre $\Omega$ e $\varphi(\Omega)$;*

2. *$\varphi$ é diferenciável;*

3. *$d\varphi_q$ é injetiva para todo $q \in \Omega$.*

**Definição 2.31.** *Seja $S$ uma superfície em $\mathcal{H}_3$. Dizemos que $S$ é uma superfície não-paramétrica se, existem um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável tais que $S$ é igual a um dos conjuntos abaixo:*

1. *$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathcal{H}_3;\ (x, y) \in \Omega\}$;*

2. *$G_1(f) = \{(f(x, y), x, y) \in \mathcal{H}_3;\ (x, y) \in \Omega\}$;*

3. *$G_2(f) = \{(x, f(x, y), y) \in \mathcal{H}_3;\ (x, y) \in \Omega\}$.*

*No caso em que $S = G(f)$ dizemos que $S$ é o gráfico da função $f$.*

A partir de agora, assumiremos que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é conexo.

**Teorema 2.32.** *Se $S$ é uma superfície em $\mathcal{H}_3$ então $S$ é localmente não-paramétrica, ou seja, para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhança $V_p \subset S$ de $p$, tal que $V_p$ é uma superfície não-paramétrica.*

*Demonstração.* Ver [28] (capítulo V, teorema 12). □

Agora, seja $S$ uma superfície em $\mathcal{H}_3$ que é localmente o gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$. Temos, então, que

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.19}$$

é uma parametrização local para $S$. Assim, se $p = (x, y, f(x, y))$, uma base do espaço tangente $T_pS$ associada a essa parametrização é constituída pelos vetores

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial}{\partial x} X(x, y) = (1, 0, f_x) \\ X_y &= \frac{\partial}{\partial y} X(x, y) = (0, 1, f_y), \end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} X_x &= E_1 + (f_x + \tfrac{y}{2})E_3 \\ X_y &= E_2 + (f_y - \tfrac{x}{2})E_3. \end{aligned} \tag{2.20}$$

O campo normal a $S$ no ponto $p$ é expresso por

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} \\ &= -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{\omega}\right) E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{\omega}\right) E_2 + \frac{1}{\omega} E_3, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $\omega = \sqrt{1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2}$. Denotemos por $f_1 = f_x + \frac{y}{2}$ e $f_2 = f_y - \frac{x}{2}$.

Os coeficientes da primeira forma fundamental de $S$ são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_x, X_x \rangle = 1 + (f_x + \tfrac{y}{2})^2 \\ F &= \langle X_x, X_y \rangle = (f_x + \tfrac{y}{2})(f_x - \tfrac{x}{2}) \\ G &= \langle X_y, X_y \rangle = 1 + (f_x - \tfrac{x}{2})^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Munindo $S$ com a métrica induzida de $\mathcal{H}_3$, temos que se $X$ e $Y$ campos de vetores em $S$, a conexão Riemanniana de $S$, denotada por $\nabla$, é dada por

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^T,$$

onde $\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$ é a componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ com $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ extensões locais de $X$ e $Y$ respectivamente. Da fórmula de Weingarten para hipersuperfícies, temos

$$A_\eta v = -\overline{\nabla}_v \eta, \quad v \in T_pS.$$

Recorde que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned} L &= -\langle \overline{\nabla}_{X_x}\eta, X_x\rangle \\ M &= -\langle \overline{\nabla}_{X_x}\eta, X_y\rangle \\ N &= -\langle \overline{\nabla}_{X_y}\eta, X_y\rangle. \end{aligned}$$

Usando as expressões (2.20), (2.21) e (2.12), temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_x}\eta &\overset{(2.21)}{=} \overline{\nabla}_{X_x}\left[-\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)E_2 + \frac{1}{\omega}E_3\right] \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x E_1 - \frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{X_x}E_1 - \left(\frac{f_x-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x E_2 \\
&\quad -\frac{f_x-\frac{x}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{X_x}E_2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)_x E_3 + \frac{1}{\omega}\overline{\nabla}_{X_x}E_3 \\
&\overset{(2.20)}{=} -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x E_1 - \frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_1}E_1 - \frac{\left(f_x+\frac{y}{2}\right)^2}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x E_2 \\
&\quad -\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_1}E_2 - \frac{\left(f_y-\frac{x}{2}\right)\left(f_x+\frac{y}{2}\right)}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)_x E_3 + \frac{1}{\omega}\overline{\nabla}_{E_1}E_3 \\
&\quad +\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&\overset{(2.12)}{=} \left[-\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x - \frac{(f_y-\frac{x}{2})(f_x+\frac{y}{2})}{2\omega}\right]E_1 + \left[\frac{(f_x+\frac{y}{2})^2-1}{2\omega} - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x\right]E_2 \\
&\quad +\left[\left(\frac{1}{\omega}\right)_x - \frac{f_y-\frac{x}{2}}{2\omega}\right]E_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_y}\eta &\overset{(2.21)}{=} \overline{\nabla}_{X_y}\left[-\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)E_2 + \frac{1}{\omega}E_3\right] \\
&= -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y E_1 - \frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{X_y}E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y E_2 - \frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{X_y}E_2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\omega}\right)_y E_3 + \frac{1}{\omega}\overline{\nabla}_{X_y}E_3 \\
&\overset{(2.20)}{=} -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y E_1 - \frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_2}E_1 - \frac{(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2})}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_1 - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y E_2 \\
&\quad -\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_2}E_2 - \frac{\left(f_y-\frac{x}{2}\right)^2}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)_y E_3 + \frac{1}{\omega}\overline{\nabla}_{E_2}E_3 + \frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\overline{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&\overset{(2.12)}{=} \left[\frac{1-\left(f_y-\frac{x}{2}\right)^2}{2\omega} - \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y\right]E_1 + \left[\frac{\left(f_y-\frac{x}{2}\right)\left(f_x+\frac{y}{2}\right)}{2\omega} - \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y\right]E_2 \\
&\quad + \left[\frac{\left(f_x+\frac{y}{2}\right)}{2\omega} + \left(\frac{1}{\omega}\right)_y\right]E_3.
\end{aligned}$$

Portanto os coeficientes da segunda forma fundamental podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{f_{xx}+(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2})}{\omega} \\ M &= \tfrac{f_{xy}+\frac{1}{2}(f_y-\frac{x}{2})^2-\frac{1}{2}(f_x+\frac{y}{2})^2}{\omega} \\ N &= \tfrac{f_{yy}-(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2})}{\omega}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

## 2.4 Equações Diferenciais Parciais

Apresentamos nesta seção, algumas fatos básicos sobre equações diferenciais parciais.

Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$F[u] = F(x, y, u, Du, D^2u) = 0, \tag{2.24}$$

com $F : \Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times S(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $S(2, \mathbb{R})$ é o espaço das matrizes reais de ordem 2 simétricas. Os elementos de $\Gamma$ são escritos como $(x, y, z, p, r)$ onde $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r = (r_{ij})_{2\times 2} \in S(2, \mathbb{R})$. Nós assumimos que $F$ é diferenciável com respeito aos $r_{ij}$'s.

**Definição 2.33.** *O operador definido em (2.24) é dito elíptico em $u \in C^2(\Omega)$ se*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, y, u, Du, D^2u)\right)_{2\times 2}$$

*é uma matriz positiva definida.*

Apresentamos agora, o seguinte princípio do máximo para o operador (2.24)

**Teorema 2.34.** *Sejam $u_0, u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, e suponha que são satisfeitas:*

1. $F \in C^1(\Gamma)$;
2. *$F$ é elíptico em todas as funções $tu_1 + (1 - t)u_0$, para $0 \leq t \leq 1$;*
3. $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$ *em* $\Omega$.

*Se $u_1 \leq u_0$ em $\partial\Omega$ e $F[u_1] \geq F[u_0]$ em $\Omega$, então ou $u_1 < u_0$ em $\Omega$ ou $u_0 \equiv u_1$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Veja [25], Teorema 2.3.1. □

Da teoria de equações diferenciais parciais elípticas, temos o seguinte

**Teorema 2.35.** *Se $F[u] = F(x, y, u, Du, D^2u) = 0$ é um operador elíptico com coeficientes analíticos e $u \in C^\infty\Omega$, então $u$ é analítica.*

*Demonstração.* Veja [21]. □

Para mais detalhes sobre a analiticidade de soluções de equações elípticas veja em [5], [19], [34], [30], [17].

# Capítulo 3

# Superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$

Neste capítulo introduzimos a aplicação de Gauss de uma superfície em um grupo de Lie e apresentamos alguns resultados sobre as superfícies do espaço de Heisenberg $\mathcal{H}_3$, com enfoque nas superfícies mínimas.

## 3.1 Algumas propriedades de superfícies em $\mathcal{H}_3$

Sabemos que a aplicação de Gauss de uma superfície orientada do $\mathbb{R}^3$ nada mais é do que a translação do vetor normal unitário em qualquer ponto dessa superfície para a origem do $\mathbb{R}^3$, que é a identidade do grupo de Lie $(\mathbb{R}^3, +)$. Isso nos motiva a definir a aplicação de Gauss em um grupo de Lie qualquer, da forma abaixo:

**Definição 3.1.** *Seja $S$ uma hipersuperfície orientável de um grupo de Lie $G$ de dimensão $n$, munido com uma métrica invariante à esquerda. A aplicação*

$$\gamma : S \to S^{n-1} = \{v \in \mathfrak{g}; |v| = 1\},$$

*onde $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $G$ e $\eta$ o campo de vetores normal unitário de $S$, é chamada a aplicação de Gauss de $S$.*

Observe que $d\gamma(T_pS) \subset T_{\gamma(p)}S = \{\gamma(p)\}^{\perp} = dL_{p^{-1}}(T_pS)$ para todo $p \in S$. De fato, a inclusão $d\gamma(T_pS) \subset T_{\gamma(p)}S$ é óbvia pela definição de diferencial e como $L_{p^{-1}}$ é uma isometria e $T_pS = \{\eta(p)\}^{\perp}$, temos que $T_{\gamma(p)}S = \{\gamma(p)\}^{\perp}$. Pelo fato de $T_{\gamma(p)}S = dL_{p^{-1}}(T_pS)$, temos a outra igualdade. Logo $dL_p \circ d\gamma_p$ é uma aplicação de $T_pS$ em $T_pS$, uma vez que $dL_p(dL_{p^{-1}}(T_pS)) = T_pS$. Com isto, temos o seguinte

**Teorema 3.2.** *Seja $S$ uma hipersuperfície orientável de um grupo de Lie $n$-dimensional $G$. Então*

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = -(A_\eta(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v)), \quad v \in T_pS,$$

*onde $A_\eta$ é o operador de Weingarten, $\alpha_{\bar{\eta}}(v) = \overline{\nabla}_v \bar{\eta}$ e $\bar{\eta}$ é o campo de vetores invariante a esquerda tal que $\bar{\eta}(p) = \eta(p)$.*

*Demonstração.* Sejam $p \in S$ e $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal de $T_pG$ tal que $X_n = \eta(p)$. Denotemos por $E_1, ..., E_n$ as translações à esquerda de $X_1, ..., X_n$. Observe que, nesse caso, temos $\bar{\eta} = E_n$.

Assim, dado $q \in S$, podemos escrever

$$\eta(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i(q),$$

onde $\alpha_j(p) = 0$ para $j = 1, ..., n-1$ e $\alpha_n(p) = 1$. Portanto

$$\gamma(q) = dL_{q^{-1}} \circ \eta(q) = dL_{q^{-1}} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i \right)(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(q) E_i(e).$$

Assim, para $v \in T_pS$, temos

$$d\gamma_p(v) = v\left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i(e) \right) = \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i) E_i(e).$$

Compondo com $dL_p$, obtemos

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = dL_p \left( \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i) E_i(e) \right) = \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i) E_i(p). \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_v \eta|_p &= \overline{\nabla}_v \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i \right)\Bigg|_p \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(\alpha_i) E_i(p) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p) \overline{\nabla}_v E_i \Bigg|_p \\ &\overset{(3.1)}{=} dL_p \circ d\gamma_p(v) + \overline{\nabla}_v E_n|_p \\ &= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

O mesmo resultado é apresentado em [36] (veja a proposição 10 desta referência).

No caso em que $S \in \mathcal{H}_3$ é o gráfico de uma função diferenciável $f$, podemos obter a expressão dos operadores $dL_p \circ d\gamma_p$ e $\alpha_{\bar{\eta}}$.

De fato, se $X$ é a parametrização dada como em (2.19) e $Y : S^2 \to \tilde{\Omega}$ é a projeção ortogonal no plano $xy$, temos que a representação de $\gamma$ nessas parametrizações é dada por

$$\tilde{\gamma}(x,y) = Y \circ \gamma \circ X(x,y) = \left(-\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right), -\left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)\right), \quad (x,y) \in \Omega. \tag{3.2}$$

Consequentemente, a matriz que representa $dL_p \circ d\gamma_p$ na base $\{X_x, X_y\}$ é dada por

$$dL_p \circ d\gamma_p = \begin{pmatrix} -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x & -\left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y \\ -\left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x & -\left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} det(dL_p \circ d\gamma_p) &= \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x \left(\frac{f_x-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y - \left(\frac{f_x-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y \\ &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}}{\omega^4}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sabemos que a matriz de $A_\eta$ é dada por

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \frac{LG-MF}{F^2-EG} & \frac{MG-NF}{F^2-EG} \\ \frac{ME-LF}{F^2-EG} & \frac{NE-MF}{F^2-EG} \end{pmatrix}.$$

Usando as igualdades em (2.22) e em (2.23), temos

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_x - \frac{1}{2\omega}(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2}) & \left(\frac{f_x+\frac{y}{2}}{\omega}\right)_y + \frac{1}{2\omega}(1-(f_y-\frac{x}{2})^2) \\ \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_x + \frac{1}{2\omega}((f_x+\frac{y}{2})^2-1) & \left(\frac{f_y-\frac{x}{2}}{\omega}\right)_y + \frac{1}{2\omega}(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2}) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Então, $\alpha_{\bar{\eta}}$ é dada pela seguinte matriz

$$\alpha_{\bar{\eta}} = \frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix} -(f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2}) & 1-(f_y-\frac{x}{2})^2 \\ (f_x+\frac{y}{2})^2-1 & (f_x+\frac{y}{2})(f_y-\frac{x}{2}) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

onde $\omega$ é como em (2.21). Observe que, nesse caso, o traço de $\alpha_{\bar{\eta}}$ é zero.

Agora, olhando para $d\gamma$ apresentamos o seguinte

**Lema 3.3.** *Seja $S$ uma hipersuperfície de um grupo de Lie $G$. Se $p \in S$ é um ponto tal que $d\gamma_p \equiv 0$ então $dL_{p^{-1}}(T_pS)$ é uma subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ com codimensão 1.*

*Demonstração.* Se $p \in S$ é tal que $d\gamma_p \equiv 0$, então pelo Teorema 3.2, temos $\alpha_{\bar{\eta}} = -A_\eta$ em $p$ e, desde que $A_\eta$ é um operador simétrico, assim o é $\alpha_{\bar{\eta}}$.

Seja $\{X_1, ..., X_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_pS$ e faça $E_i = dL_{p^{-1}}(X_i)$ para $i =$

$1, ..., n-1$ e $E = \gamma(p)$. Sendo

$$\alpha_{\bar{\eta}} = (\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle), \quad i, j = 1, ..., n-1,$$

a matriz de $\alpha_{\bar{\eta}}$, temos que

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j \rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_j} E, E_i \rangle, \quad i, j = 1, ..., n-1, \tag{3.6}$$

já que $\alpha_{\bar{\eta}}$ é um operador simétrico. Da equação (2.9), a derivada covariante é dada por

$$\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i} E \rangle = -\frac{1}{2}(\langle [E, E_i], E_j \rangle + \langle [E, E_j], E_i \rangle + \langle [E_i, E_j], E \rangle). \tag{3.7}$$

Fazendo uso de (3.6) e (3.7), temos que

$$\langle [E_i, E_j], E \rangle = 0, \quad i, j = 1, ...n-1,$$

isto é, $[E_i, E_j] \in dL_{p^{-1}}(T_pS) = span\{E_1, ..., E_{n-1}\}$.

Isso mostra que se $V, W \in dL_{p^{-1}}(T_pS)$ então $[V, W] \in dL_{p^{-1}}(T_pS)$ e, portanto, $dL_{p^{-1}}(T_pS)$ é uma subalgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ com dimensão $n-1$. □

Para o próximo resultado, a seguinte definição é necessária.

**Definição 3.4.** *Uma superfície $S \subset \mathcal{H}_3$ é dita uma superfície vertical no ponto $p \in S$ se, $\frac{\partial}{\partial z}\big|_p \in T_pS$. $S$ é dita vertical se ela é vertical em todos os seus pontos.*

**Proposição 3.5.** *Seja $S$ uma superfície em $\mathcal{H}_3$.*
*a) Se $S$ é um gráfico então $S$ não é vertical em nenhum de seus pontos.*
*b) $S$ é uma superfície vertical se, e somente se, a menos de isometria $S$ é localmente da forma $(t, a(t), s)$, $(t, s) \in \Omega$, onde $\Omega$ é um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$.*

*Demonstração.* *a*) Se $S = G(f)$ e $X$ é uma parametrização associada a função $f$, sabemos que

$$X_x = E_1 + f_1 E_3$$
$$X_y = E_2 + f_2 E_3.$$

Suponha que existe um ponto $p \in S$ tal que $S$ é vertical em $p$, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$E_3 = aX_x + bX_y.$$

Logo,

$$E_3 = aE_1 + bE_2 + (af_1 + bf_2)E_3.$$

Concluímos, portanto que $a = b = 0$ e $af_1 + bf_2 = 1$, o que é uma contradição.

*b)* Se $S$ é parametrizada por $X(t,s) = (t, a(t), s)$, é claro que $S$ é vertical pois $X_s = E_3$. Reciprocamente, se $S$ é uma superfície vertical, então pelo item anterior $S$ não é localmente um gráfico. Pelo Teorema 2.32 ela é localmente da forma $G_1(f)$ ou $G_2(f)$. No entanto, se $S$ é localmente da forma $G_1(f)$, o Lema 2.28 item 1, garante que a aplicação $\Psi : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$ dada por $\Psi(x,y,z) = (y,-x,z)$ é uma isometria, basta tomar $\theta = \pi$.Assim, se $(f(t,s),t,s) \in S$, então $\Psi(f(t,s),t,s) = (t,-f(t,s),s) \in G_2(g)$, onde $g = -f$. Segue que $G_1(f)$ é isométrico a $G_2(g)$. Portanto podemos supor que $S$ é localmente da forma $G_2(f)$ e, assim, temos que $X(t,s) = (t, f(t,s), s)$ é uma parametrização para $S$. Daí

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & (1, f_t, 0) \\ & = & E_1 + f_t E_2 + (\frac{f}{2} - \frac{tf_t}{2})E_3 \\ X_s & = & (0, f_s, 1) \\ & = & f_s E_2 + (1 - \frac{tf_s}{2})E_3. \end{array}$$

Como $S$ é vertical, para todo $p \in S$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} E_3 & = & aX_t + bX_s \\ & = & aE_1 + (af_t + bf_s)E_2 + [a(\frac{f}{2} - \frac{tf_t}{2}) + b(1 - \frac{tf_s}{2})]E_3. \end{array}$$

Logo $a = 0$, $af_t + bf_s = 0$ e $a(\frac{f}{2} - \frac{tf_t}{2}) + b(1 - \frac{tf_s}{2}) = 1$ e, consequentemente, $f_s \equiv 0$ e $b = 1$. Portanto $f$ não depende de $s$ e o resultado segue. $\square$

**Proposição 3.6.** *Seja $S$ uma superfície em $\mathcal{H}_3$. Então para todo ponto $p \in S$, temos que $S$ é vertical em $p$ ou é, localmente em $p$, o gráfico de uma função diferenciável $f$.*

*Demonstração.* Seja $p \in S$. Se $S$ for localmente um gráfico em $p$, nada há a fazer. Suponha que $S$ é, localmente, da forma $G_1(f)$. Assim, $X(t,s) = (f(t,s),t,s)$ é uma parametrização para $G_1(f)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & (f_t, 1, 0) \\ & = & f_t E_1 + E_2 + (\frac{tf_t}{2} - \frac{f}{2})E_3 \\ X_s & = & (f_s, 0, 1) \\ & = & f_s E_1 + (1 + \frac{tf_s}{2})E_3. \end{array}$$

Então, para $p = (f(t_0,s_0),t_0,s_0)$, temos que $E_3(p) \in T_pS$ se, e somente se, $f_s(t_0,s_0) = 0$. Portanto se $S$ não é vertical em $p$, então $f_s(t_0,s_0) \neq 0$. Definindo $F(t,x,s) = f(t,s) - x$, temos que se $x_0 = f(t_0,s_0)$, então $F_s(t_0,x_0,s_0) = f_s(t_0,s_0) \neq 0$ e então, pelo teorema da função implícita existe uma função diferenciável $g$ definida em um aberto $B$ tal que $F(t,x,g(x,t)) = 0$ em $B$ e portanto, $f(t,g(x,t)) = x$ para todo

$(x,t) \in B$. Daí, se $(x,t) \in B$ e $s = g(x,t)$ temos

$$(f(t,s),t,s) = (f(t,g(x,t)),t,s) = (x,t,g(x,t)).$$

Logo $S$ é localmente o gráfico de $g$.

Se $S$ é localmente da forma $G_2(f)$, raciocinando de modo análoga ao caso anterior concluímos que $S$ é localmente um gráfico em torno dos pontos onde ela não é vertical. $\square$

**Teorema 3.7.** *Os planos verticais são as únicas superfícies conexas em $\mathcal{H}_3$ com a propriedade que sua aplicação de Gauss é constante.*

*Demonstração.* Mostremos primeiramente que os planos verticais satisfazem tal propriedade. Pelo item b) da Proposição 3.5, uma superfície vertical $S$ pode ser parametrizada por

$$X(t,s) = (t,a(t),s), \quad (t,s) \in \Omega,$$

onde $\Omega$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$. Desta forma, a base associada à essa parametrização é

$$\begin{aligned} X_t &= (1,a'(t),0) \\ &= E_1 + a'E_2 + \tfrac{1}{2}(a - ta')E_3 \\ X_s &= (0,0,1) \\ &= E_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

seu o vetor normal unitário é expresso por

$$\eta = \frac{a'}{\sigma}E_1 - \frac{1}{\sigma}E_2, \tag{3.9}$$

onde $\sigma = \sqrt{1+(a')^2}$. Da equação (3.9), obtemos que $\eta$ é constante se, e somente se, $a'$ é constante e isso ocorre se, e somente se, $a$ é uma função afim. Segue que $\eta$ é constante se, e somente se, $S$ é um plano. Mas como $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, concluímos que, nesse caso, $\gamma$ é constante se, e somente se, $\eta$ é constante.

Logo os planos verticais são as únicas superfícies verticais que possuem aplicação de Gauss constante.

Mostremos, agora, que, de fato, essas são as únicas superfícies satisfazendo tal propriedade. Suponha que existe uma superfície conexa $S$ que não é vertical e, portanto, não é um plano vertical e que tem aplicação de Gauss constante. Então existe $p \in S$ tal que $S$ não é vertical em $p$ e assim pela Proposição 3.6, $S$ é localmente em $p$ o gráfico de uma função diferenciável $f$. Como $\gamma$ é constante, temos que $d\gamma \equiv 0$ em $S$ e, assim, pelo Lema 3.3, $dL_{p^{-1}}(T_pS)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}_3$. Observe que

$$\begin{aligned}
[dL_{p^{-1}}(X_x), dL_{p^{-1}}(X_y)] &= dL_{p^{-1}}[X_x, X_y] \\
&= dL_{p^{-1}}[E_1 + (f_x + \frac{y}{2})E_3, E_2 + (f_y - \frac{x}{2})E_3] \\
&= dL_{p^{-1}}E_3 \\
&= e_3.
\end{aligned}$$

Daí $e_3 \in dL_{p^{-1}}(T_pS)$ e, portanto, existe $v \in T_pS$ tal que

$$dL_{p^{-1}}(v) = e_3.$$

Se $v = aX_x + bX_y$, temos que

$$\begin{aligned}
dL_{p^{-1}}(v) &= dL_{p^{-1}}(aX_x + bX_y) \\
&= dL_{p^{-1}}(aE_1 + bE_2 + (a(f_x + \tfrac{y}{2}) + b(f_y - \tfrac{x}{2}))E_3) \\
&= ae_1 + be_2 + (a(f_x + \tfrac{y}{2}) + b(f_y - \tfrac{x}{2}))e_3.
\end{aligned}$$

Donde segue que $a = b = 0$ e isso é uma contradição ao fato que $e_3 \neq 0$. Portanto não pode existir tal superfície $S$ e isso prova o teorema. □

Outro resultado sobre superfícies em $\mathcal{H}_3$ é o seguinte

**Teorema 3.8.** *Não existe superfície totalmente umbílica em $\mathcal{H}_3$.*

*Demonstração.* Suponha que existe uma superfície totalmente umbílica $S \subset \mathcal{H}_3$. Pela proposição 3.6 há dois possíveis casos a considerar:

*a*) S é (localmente) o gráfico de uma função diferenciável $f$.

Como $S$ é totalmente umbílica, existe uma função diferenciável $\lambda : S \to \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in S$ e todo $v \in T_pS$ tem-se

$$A_\eta(v) = \lambda(p)v.$$

Em particular, sendo $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ a parametrização associada à função $f$,

$$A_\eta(X_x) = \lambda X_x$$
$$A_\eta(X_y) = \lambda X_y.$$

Para hipersuperfícies totalmente umbílicas, vale a seguinte relação

$$\begin{aligned} R(X_x, X_y)\eta &= \overline{\nabla}_{X_x}\overline{\nabla}_{X_y}\eta - \overline{\nabla}_{X_y}\overline{\nabla}_{X_x}\eta \\ &= \overline{\nabla}_{X_x}(-\lambda X_y) - \overline{\nabla}_{X_y}(-\lambda X_x) \\ &= -X_y(\lambda)X_x - \lambda\overline{\nabla}_{X_x}X_y + X_x(\lambda)X_y + \lambda\overline{\nabla}_{X_y}X_x \\ &= -\lambda_y X_x + \lambda_x X_y. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando (2.20) e (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} R(X_x, X_y)\eta &= R(E_1 + f_1E_3, E_2 + f_2E_3)(-\tfrac{f_1}{\omega}E_1 - \tfrac{f_2}{\omega}E_2 + \tfrac{1}{\omega}E_3) \\ &= \tfrac{1}{\omega}\left[-\tfrac{3}{4}f_1E_2 + \tfrac{3}{4}f_2E_1 + \tfrac{1}{4}f_1f_2E_3 + \tfrac{3}{4}f_2E_1 - \tfrac{1}{4}f_1f_2E_3 - \tfrac{1}{4}f_1E_2\right] \\ &= \frac{f_2}{\omega}E_1 - \frac{f_1}{\omega}E_2, \end{aligned}$$

e usando (3.10), temos que

$$\lambda_x = -\frac{f_1}{\omega} \quad \text{e} \quad \lambda_y = -\frac{f_2}{\omega}. \tag{3.11}$$

Mas isso implica que $dL_p \circ d\gamma_p$ tem matriz simétrica na base associada à função $f$, uma vez que $\lambda$ é diferenciável e $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$. Aplicando o Teorema 3.2, temos que $\alpha_{\bar{\eta}}$ é simétrica, portanto pela iguadade (3.5) temos,

$$\tfrac{1}{2\omega}(1 - (f_y - \tfrac{x}{2})^2) = \tfrac{1}{2\omega}((f_x + \tfrac{y}{2})^2 - 1),$$

e, assim,

$$(f_y - \tfrac{x}{2})^2 + (f_x + \tfrac{y}{2})^2 = 2.$$

Disso implica que $\omega = \sqrt{3}$. Com o fato de $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ temos que

$$(f_y - \tfrac{x}{2})_x = (f_x + \tfrac{y}{2})_y,$$

o que é uma contradição.

*b)* S é localmente da forma $(t, a(t), s)$ $(t, s) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Uma base associada à parametrização $X(t, s) = (t, a(t), s)$ foi calculada em (3.8). Os coeficientes da primeira forma fundamental nessa base são dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t\rangle &= 1 + (a')^2 + \tfrac{1}{4}(a - ta')^2 \\ F &= \langle X_t, X_s\rangle &= \tfrac{a - ta'}{2} \\ G &= \langle X_s, X_s\rangle &= 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Enquanto os coeficientes da segunda forma fundamental nessa mesma base são

$$\begin{array}{rcrcl} L & = & -\langle \nabla_{X_t}\eta, X_t\rangle & = & \frac{(a-ta')(1+(a')^2)-2a''}{2\sqrt{1+(a')^2}} \\ M & = & -\langle \nabla_{X_t}\eta, X_s\rangle & = & \frac{\sqrt{1+(a')^2}}{2} \\ N & = & -\langle \nabla_{X_s}\eta, X_s\rangle & = & 0. \end{array} \tag{3.13}$$

Desde que assumimos que a superfície é totalmente umbílica, concluímos que o operador de Weingarten tem matriz diagonal em qualquer base, em particular, na base $\{X_t, X_s\}$. Logo $0 = NF - MG$, o que é uma contradição, desde que $M > 0$. Segue que não existe superfície totalmente umbílica em $\mathcal{H}_3$. □

**Observação 1.** *J. Van der Veken ([40]) deu uma classificação completa das superfícies totalmente umbílicas em espaços homogêneos 3-dimensionais com grupo de isometrias 4-dimensional. R. Souam e E. Toubiana ([39]) obtiveram o mesmo resultado de forma independente.*

Para finalizar essa seção calculamos a curvatura seccional de um gráfico em $\mathcal{H}_3$.

**Teorema 3.9.** *Seja $S$ uma superfície que é um gráfico em $\mathcal{H}_3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Então a curvatura seccional $K$ de $S$ é dada por*

$$\begin{array}{rcl} \omega^4 K & = & \omega^2(f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} - \frac{1}{4}) - (1+q^2)[(f_{xy}+\frac{1}{2})^2 - f_{xx}f_{yy}] \\ & & -(1+p^2)[(f_{xy}-\frac{1}{2})^2 - f_{xx}f_{yy}] + pq(f_{yy} - f_{xx}) \end{array}$$

*onde $p = f_x + \frac{y}{2}$, $q = f_y - \frac{x}{2}$ e $\omega = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$.*

*Demonstração.* Recordemos a seguinte fórmula de Gauss,

$$K(X_x, X_y) - \overline{K}(X_x, X_y) = det A_\eta, \tag{3.14}$$

onde $\{X_x, X_y\}$ é uma base de $T_pS$ associada à parametrização dada como em (2.19) com $p = (x, y, f(x, y))$ e sendo $K$ e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de $S$ e $\mathcal{H}_3$, respectivamente. Nesta base, temos

$$\begin{array}{rcl} \overline{\nabla}_{X_x}X_x & \overset{(2.20)}{=} & \overline{\nabla}_{X_x}\left[E_1 + (f_x+\frac{y}{2})E_3\right] \\ & = & \overline{\nabla}_{X_x}E_1 + (f_x+\frac{y}{2})_x E_3 + (f_x+\frac{y}{2})\overline{\nabla}_{X_x}E_3 \\ & \overset{(2.20)}{=} & \overline{\nabla}_{E_1}E_1 + (f_x+\frac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_3}E_1 + f_{xx}E_3 + (f_x+\frac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_1}E_3 \\ & & +(f_x+\frac{y}{2})^2\overline{\nabla}_{E_3}E_3 \\ & \overset{(2.12)}{=} & -(f_x+\frac{y}{2})E_2 + f_{xx}E_3. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_y} X_x &\overset{(2.20)}{=} \overline{\nabla}_{X_y}\left[E_1 + (f_x + \tfrac{y}{2})E_3\right] \\
&= \overline{\nabla}_{X_y} E_1 + (f_x + \tfrac{y}{2})_y E_3 + (f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{X_y} E_3 \\
&\overset{(2.20)}{=} \overline{\nabla}_{E_2} E_1 + (f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_1 + (f_{xy} + \tfrac{1}{2})E_3 + (f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_2} E_3 \\
&\quad + (f_x + \tfrac{y}{2})(f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_3 \\
&\overset{(2.12)}{=} \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})E_1 - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})E_2 + f_{xy}E_3.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_y}\overline{\nabla}_{X_x} X_x &= \overline{\nabla}_{X_y}\left[-(f_x + \tfrac{y}{2})E_2 + f_{xx}E_3\right] \\
&= -(f_x + \tfrac{y}{2})_y E_2 - (f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{X_y} E_2 + f_{xxy}E_3 + f_{xx}\overline{\nabla}_{X_y} E_3 \\
&= -(f_{xy} + \tfrac{1}{2})E_2 - (f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_2} E_2 - (f_x + \tfrac{y}{2})(f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_2 \\
&\quad + f_{xxy}E_3 + f_{xx}\overline{\nabla}_{E_2} E_3 + f_{xx}(f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_3 \\
&= \left[\tfrac{1}{2}f_{xx} - \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})(f_y - \tfrac{x}{2})\right] E_1 - (f_{xy} + \tfrac{1}{2})E_2 + f_{xxy}E_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{X_x}\overline{\nabla}_{X_y} X_x &= \overline{\nabla}_{X_x}\left[\tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})E_1 - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})E_2 + f_{xy}E_3\right] \\
&= \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})_x E_1 + \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{X_x} E_1 - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})_x E_2 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{X_x} E_2 + f_{xxy}E_3 + f_{xy}\overline{\nabla}_{X_x} E_3 \\
&= \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})_x E_1 + \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_1} E_1 + \tfrac{1}{2}(f_x + \tfrac{y}{2})^2\overline{\nabla}_{E_3} E_1 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})_x E_2 - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})\overline{\nabla}_{E_1} E_2 - \tfrac{1}{2}(f_y - \tfrac{x}{2})(f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_2 \\
&\quad + f_{xxy}E_3 + f_{xy}\overline{\nabla}_{E_1} E_3 + f_{xy}(f_x + \tfrac{y}{2})\overline{\nabla}_{E_3} E_3 \\
&= \left[\tfrac{1}{2}f_{xx} - \tfrac{1}{4}(f_x + \tfrac{y}{2})(f_y - \tfrac{x}{2})\right] E_1 - \left[f_{xy} + \tfrac{1}{4}(f_x + \tfrac{y}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\right] E_2 \\
&\quad + \left[f_{xxy} - \tfrac{1}{4}(f_y - \tfrac{x}{2})\right] E_3.
\end{aligned}$$

Como $[X_x, X_y] = 0$, temos que

$$R(X_x, X_y)X_x = \overline{\nabla}_{X_x}\overline{\nabla}_{X_y} X_x - \overline{\nabla}_{X_y}\overline{\nabla}_{X_x} X_x,$$

e então,

$$R(X_x, X_y)X_x = -\tfrac{1}{4}(f_x + \tfrac{y}{2})(f_y - \tfrac{x}{2})E_1 + \left[\tfrac{1}{4}(f_x + \tfrac{y}{2})^2 - \tfrac{3}{4}\right] E_2 + \tfrac{1}{4}(f_y - \tfrac{x}{2})E_3.$$

Segue que a curvatura seccional de $\mathcal{H}_3$ é expressa por

$$\begin{aligned}
\overline{K}(X_x, X_y) &= \tfrac{\langle R(X_x, X_y)X_x, X_y\rangle}{\|X_x \wedge X_y\|^2} \\
&= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\omega^2}.
\end{aligned}$$

Além disto, por (3.14), temos que

$$\begin{aligned} K(X_x, X_y) &= detA_\eta + \overline{K}(X_x, X_y) \\ &= \tfrac{1}{\omega^4}\left[f_{xx}f_{yy} + (f_{yy} - f_{xx})pq + (p^2 - q^2)f_{xy} - \tfrac{1}{4}(p^2+q^2)^2 - f_{xy}^2\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\omega^2}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \omega^4 K(X_x, X_y) &= f_{xx}f_{yy} + (f_{yy} - f_{xx})pq + (p^2 - q^2)f_{xy} - \tfrac{1}{4}(p^2+q^2)^2 - f_{xy}^2 \\ &\quad + \tfrac{\omega^4}{4} - \omega^2 \\ &= f_{xx}f_{yy} + (f_{yy} - f_{xx})pq + (p^2 - q^2)f_{xy} - f_{xy}^2 + \tfrac{p^2}{2} + \tfrac{q^2}{2} + \tfrac{1}{4} \\ &\quad - p^2 - q^2 - 1 \\ &= -(1+q^2)(\tfrac{1}{2} + f_{xy}) - (1+p^2)(\tfrac{1}{2} - f_{xy}) - (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} - \tfrac{1}{4}) \\ &\quad + (f_{yy} - f_{xx})pq \\ &= \omega^2(f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} - \tfrac{1}{4}) - (1+q^2)[(f_{xy} + \tfrac{1}{2})^2 - f_{xx}f_{yy}] \\ &\quad - (1+p^2)[(f_{xy} - \tfrac{1}{2})^2 - f_{xx}f_{yy}] + pq(f_{yy} - f_{xx}). \end{aligned}$$

□

**Observação 2.** *Usando essa fórmula para a curvatura seccional J. Inoguchi ([24]), classificou as superfícies flats (i.e., suprfícies com $K = 0$) invariantes por translações e F. Dillen junto com J. Van der Veken ([10]) construíram alguns exemplos de superfícies semi-paralelas em $\mathcal{H}_3$.*

## 3.2 Superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$

Apresentamos nesta seção alguns resultados sobre superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$. Para mais detalhes sobre a teoria de superfícies mínimas, veja [32], [9] e [1].

Sabemos que a curvatura média de uma superfície $S$ é dada, em termos dos coeficientes da 1ª e 2ª formas fundamentais, por (veja [12], capítulo 3, pag. 184)

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}\right). \tag{3.15}$$

Uma superfície é mínima se $H \equiv 0$. Se $S$ é o gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$, usando (2.22) e (2.23), obtemos que $S$ é uma superfície mínima se, e somente se,

$$\left(1+\left(f_y-\tfrac{x}{2}\right)^2\right)f_{xx}-2\left(f_y-\tfrac{x}{2}\right)\left(f_x+\tfrac{y}{2}\right)f_{xy}+\left(1+\left(f_x+\tfrac{y}{2}\right)^2\right)f_{yy}=0. \qquad (3.16)$$

Como consequência da equação acima, apresentamos dois exemplos de gráficos mínimos.

**Exemplo 3.10.** *Assim como no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ os planos $f(x,y)=ax+by+c$ são gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$.*

**Exemplo 3.11.** *Os gráficos das funções*

$$f(x,y)=\tfrac{xy}{2}+k\left[log(y+\sqrt{1+y^2})+y\sqrt{1+y^2}\right],$$

*onde $k\in\mathbb{R}$, também são gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$.*

Um importante resultado desta teoria é o seguinte

**Teorema 3.12.** *Não existe superfície mínima compacta em $\mathcal{H}_3$.*

*Demonstração.* Suponha que exista uma superfície $S$ em $\mathcal{H}_3$ mínima e compacta. Se $\pi_3:S\to R$ é a projeção ná terceira coordenada, dada por $\pi_3(x,y,z)=z$ para todo $(x,y,z)\in S$, temos que $\pi_3$ é contínua e, assim, atinge máximo em $S$. Considere $p=(a,b,c)\in S$ um ponto de máximo para $\pi_3$ e $P$ o plano $z=c$. Afirmamos que $P$ é uma superfície mínima e, além disso, $S$ está abaixo de $P$.

De fato, observe que $P$ é o gráfico da função $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $g(x,y)=c$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e, desta forma, $g_{xx}=g_{xy}=g_{yy}=0$. Portanto, pela equação (3.16) $P$ é uma superfície mínima. Além disso, $S\cap P$ é um fechado de $P$, pois $S$ é compacta e, portanto, é um fechado de $\mathcal{H}_3$ e como $p\in S\cap P$, temos que $S\cap P$ não é vazio . Se $q\in S\cap P$, observe que $S$ não é vertical em $q$, assim, pela Proposição 3.6 $S$ é localmente em $q$ o gráfico de uma função diferenciável $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

Como em (2.24), defina $F:\Gamma\to\mathbb{R}$ por

$$F[u]=\left(1+\left(u_y-\tfrac{x}{2}\right)^2\right)u_{xx}-2\left(u_y-\tfrac{x}{2}\right)\left(u_x+\tfrac{y}{2}\right)u_{xy}+\left(1+\left(u_x+\tfrac{y}{2}\right)^2\right)u_{yy}.$$

É imediato verificar que $F\in C^1(\Gamma)$ e que $F$ não depende de $u$, o que implica em $\frac{\partial F}{\partial u}=0$. Além disso, fazendo $u_1=u_x+\frac{y}{2}$ e $u_2=u_y-\frac{x}{2}$, obtemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right)=\begin{pmatrix}1+u_2^2 & -u_1u_2\\ -u_1u_2 & 1+u_1^2\end{pmatrix}, \qquad (3.17)$$

que é trivialmente uma matriz positiva definida. Logo $F$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.34.

Como $P$ e $S$ são superfícies mínimas, temos que $F[f] = F[g] = 0$. Além disso, $S$ está abaixo de $P$, o que implica em $f \leq g$. Desde que $f(q) = g(q)$, temos pelo Teorema 2.34, que $S$ coincide em $\Omega$ com o plano $P$. Isso mostra que existe uma vizinhança de $q$ contida em $S \cap P$. Logo $S \cap P$ também é um aberto de $P$ e pela conexidade de $P$ temos que $S \cap P = P$. Mas isso contradiz o fato de $S$ ser compacta, pois $P$ não é limitado.

Assim, não pode existir tal superfície. $\square$

A seguir, provamos que a única possibilidade de um gráfico em $\mathcal{H}_3$ com curvatura média constante ser completo é ele ser mínimo.

**Teorema 3.13.** *Não existe gráfico completo com curvatura média constante $H \neq 0$ em $\mathcal{H}_3$.*

*Demonstração.* Suponha que exista um gráfico de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tenha curvatura média constante $H \neq 0$, digamos $S = G(f)$. Considere o caso $H > 0$ e tome uma superfície compacta do tipo esférica $S_H$ como em [16] (Teorema 3 item 2(a)). Como a translação ao longo do eixo z é uma isometria, podemos mover $S_H$ até que $S_H$ não intersecte $S$. Depois transladamos $S_H$ até ela intersectar $S$ pela primeira vez. Temos que $S_H \cap S$ é um fechado de $S$, e se $q \in S_H \cap S$, observe assim como no Teorema 3.12, que $S$ não é vertical em $q$ então, pela Proposição 3.6, $S$ é localmente em $q$ o gráfico de uma função diferenciável $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Defina, agora, como em (2.24) $L : \Gamma \to \mathbb{R}$ por

$$L[u] = F[u] - 2\omega^2 H,$$

onde $F$ é o operador definido no teorema 3.12. Como $P$ e $S$ têm curvatura média constante $H$, temos que $L[f] = L[g] = 0$. De modo análogo a prova do Teorema 3.12, $S_H \cap S$ é um aberto de $S$ e, portanto, $S_H \cap S = S$ o que contradiz a compacidade de $S_H$.

Para $H < 0$, considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = -f(y, x)$. Temos que $G(g)$ é um gráfico completo e tem curvatura média $-H$ que é positiva. Pelo caso anterior, não pode existir tal $g$ e, portanto, não pode existir tal $f$. $\square$

Para superfícies mínimas que são localmente gráficos, vale também o seguinte resultado

**Teorema 3.14.** *Se $u \in C^\infty(\Omega)$ é uma solução da equação das superfícies mínimas (3.16) em um domínio de $\mathbb{R}^2$, então $u$ é analítica.*

*Demonstração.* É direto verificar que a equação (3.16) é elíptica e tem coeficientes polinomiais e então os coeficientes são analíticos.

Logo, pelo Teorema 2.35, temos que $u$ é analítica. □

Um resultado análogo para superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$ pode ser visto em [9] (Capítulo 2, Seção 2.3, Teorema 1).

## 3.3 Estabilidade dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$

Nesta seção, fazemos algumas considerações sobre estabilidade dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$. Para mais detalhes sobre a teoria de estabilidade de superfícies mínimas, veja [32] e [2].

**Definição 3.15.** *Uma variação para um gráfico $S = G(f)$ é uma família de gráficos $S_t = G(f_t)$ com $f_t = f + th$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$, onde $h : \overline{\Omega} \to R$ é uma função qualquer que é $C^1$ e $h|_{\partial\Omega} \equiv 0$.*
*Definimos a área de $S_t$ por*

$$A(t) = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \omega(t)\, dxdy,$$

*onde* $\omega(t) = \sqrt{1 + (f_x + th_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y + th_y - \frac{x}{2})^2}$.

**Definição 3.16.** *Dizemos que um gráfico S=G(f) é estável se $A'(0) = 0$ e $A''(0) > 0$, para toda variação de $S$ com $h$ não constante.*

O resultado a seguir nos dá uma caracterização para superfícies mínimas.

**Teorema 3.17.** *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gráfico de $f$ é uma superfície mínima em $\mathcal{H}_3$ se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação de G(f).*

*Demonstração.* Da definição de área acima, temos

$$A'(t) = \iint\limits_{\overline{\Omega}} \omega(t)^{-1}\left[(f_x + th_x + \tfrac{y}{2})h_x + (f_y + th_y - \tfrac{x}{2})h_y\right] dxdy$$

Avaliando em $t = 0$, integrando por partes e usando o fato que $h|_{\partial\Omega} \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned} A'(0) &= \iint\limits_{\overline{\Omega}} \omega^{-1}\left[(f_x + \tfrac{y}{2})h_x + (f_y - \tfrac{x}{2})h_y\right] dxdy \\ &= -\iint\limits_{\overline{\Omega}} \left[\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{\omega}\right)_x + \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{\omega}\right)_y\right] h\, dxdy. \end{aligned}$$

Assim, $A'(0) = 0$, para toda variação de $G(f)$ se, e somente se,

$$\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{\omega}\right)_x + \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{\omega}\right)_y = 0 \tag{3.18}$$

Um cálculo simples mostra que (3.18) é equivalente à (3.16), o que prova o teorema. □

**Teorema 3.18.** *Todo gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$ é estável.*

*Demonstração.* Seja $S$ um gráfico mínimo de uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.17, $A'(0) = 0$ e, então, basta verificarmos que $A''(0) > 0$. Pela demonstração do mesmo teorema, temos

$$A''(0) = \iint_{\Omega} \frac{h_x^2 + h_y^2 + ((f_y - \frac{x}{2})h_x - (f_x + \frac{y}{2})h_y)^2}{\omega^3} dxdy.$$

O que implica que $A''(0) \geq 0$ e que $A''(0) = 0$ se, e somente se, $h_x = h_y = 0$, isto é, $h \equiv 0$, pois $h|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Assim, se $h \not\equiv 0$, temos que $A''(0) > 0$ e, portanto, $S$ é estável. □

## 3.4 Gráficos mínimos completos

Apresentamos, nesta seção, mais alguns resultados sobre gráficos mínimos completos em $\mathcal{H}_3$. Observamos que o teorema de Bernstein, o qual afirma que toda superfície mínima completa no $\mathbb{R}^3$ deve ser um plano, não é verdadeiro em $\mathcal{H}_3$, pois os gráficos mínimos do exemplo 3.11 são completos e, obviamente, não são planos. Mais detalhes sobre este teorema podem ser vistos em [8] e em [31].

Um resultado que é uma consequência da equação (3.16) é o seguinte,

**Teorema 3.19.** *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz (3.16) então,*

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0.$$

*Demonstração.* Sejam $a = 1 + (f_y - \frac{x}{2})^2$, $b = (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})$ e $c = 1 + (f_x + \frac{y}{2})^2$, então

$$a f_{xx} - 2b f_{xy} + c f_{yy} = 0$$

e, daí

$$\begin{aligned} f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 &= \tfrac{f_{yy}}{a}(a f_{xx} + c f_{yy}) - \tfrac{c}{a} f_{yy}^2 - f_{xy}^2 \\ &= -f_{xy}^2 + \tfrac{f_{yy}}{a} 2b f_{xy} - \tfrac{c}{a} f_{yy}^2 \\ &= -\tfrac{1}{a}(a f_{xy}^2 - 2b f_{yy} f_{xy} + c f_{yy}^2). \end{aligned}$$

Então

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0 \iff af_{xy}^2 - 2bf_{yy}f_{xy} + cf_{yy}^2 \geq 0.$$

Considerando $af_{xx}^2 - 2bf_{yy}f_{xy} + cf_{yy}^2$ um polinômio do segundo grau em $f_{xy}$ temos que

$$\Delta = -4f_{yy}^2(ac - b^2) \leq 0,$$

pois, $f_{yy}^2 \geq 0$ e

$$ac - b^2 = 1 + (f_x + \tfrac{y}{2})^2 + (f_y - \tfrac{x}{2})^2 > 0.$$

Portanto

$$af_{xy}^2 - 2bf_{yy}f_{xy} + cf_{yy}^2 \geq 0,$$

e o resultado segue. □

Segue direto da demonstração do teorema acima o seguinte

**Corolário 3.20.** *Se $f$ é como no teorema anterior temos que*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \implies f_{yy} = 0.$$

Recordamos o seguinte resultado de Bernstein,

**Teorema 3.21.** *Se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é uma função real que satisfaz*

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0 \quad e \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \not\equiv 0,$$

*então $f$ não é limitada.*

*Demonstração.* Veja [29]. □

Em [22] são feitas algumas considerações sobre o teorema acima.

**Teorema 3.22.** *Seja $G(f)$ um gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$, com $f$ uma função inteira e limitada. Então $f$ é constante.*

*Demonstração.* Como $G(f)$ é um gráfico mínimo, pelo Teorema 3.19, temos que

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0.$$

Como $f$ é limitada, o Teorema 3.21, garante que

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \equiv 0.$$

Do Corolário 3.20, temos que $f_{yy} \equiv 0$, o que implica que $f_{xy} \equiv 0$. Substituindo $f_{xy} \equiv 0$ e $f_{yy} \equiv 0$ na equação dos gráficos mínimos (3.16), obtemos $f_{xx} \equiv 0$ e, portanto, $f_x$ e $f_y$ são constantes. Logo existem constantes $c, d \in \mathbb{R}$ e funções diferenciáveis $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} f(x,y) &= cx + g(y) \\ f(x,y) &= dy + h(x) \end{cases}, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Desde que $f$ é limitada, $c = d = 0$, o que nos dá $g(y) = h(x)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ então, $g$ e $h$ são constantes, portanto $f$ é constante. □

Com a demonstração do Teorema 3.22 em mente, apresentamos um resultado que, sob uma hipótese adicional tem a mesma conclusão do Teorema de Bernstein para superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$.

**Teorema 3.23.** *Se $G(f)$ é um gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$ e $f$ é uma função inteira com $det(dL_p \circ d\gamma)$ igual a $\frac{1}{4\omega^4}$, então $G(f)$ é um plano.*

*Demonstração.* Das hipóteses temos que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \equiv 0$ e pela demonstração do teorema anterior, concluímos que $f$ é linear, ou seja, existem $c, d, e \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x,y) = cx + dy + e, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

□

**Observação 3.** *I. Fernadez e P. Mira em [13], deram uma classificação dos gráficos minímos completos em $\mathcal{H}_3$ em termos da diferencial holomorfa de Abresh-Rosenberg para superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$, resolvendo assim o problema de Bernstein para gráficos mínimos completos em $\mathcal{H}_3$.*

**Observação 4.** *B. Daniel and L. Hauswirth em [7], mostraram que toda superfície mínima completa que nunca é vertical em $\mathcal{H}_3$ é de fato um gráfico mínimo completo.*

# Capítulo 4

# Uma classificação parcial dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$

Nesse capítulo apresentaremos uma classificação parcial dos gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$ através do posto da aplicação de Gauss.

## 4.1 Superfícies mínimas com aplicação de Gauss de posto 0

**Teorema 4.1.** *As únicas superfícies mínimas com aplicação de Gauss de posto 0 são os planos verticais.*

*Demonstração.* Na verdade, só precisamos mostrar que os planos verticais são superfícies mínimas, pois, pelo Teorema 3.7, os planos verticais são as únicas superfícies conexas em $\mathcal{H}_3$ com a propriedade que sua aplicação de Gauss é constante. Assim, se $P$ é um plano vertical, temos, usando a Proposição 3.5, que $P$ pode ser parametrizado por

$$X(t,s) = (t, at+b, s), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Daí os coeficientes da 1ª forma fundamental de $P$ são

$$\begin{aligned} E &= 1 + a^2 + \frac{b^2}{4} \\ F &= \frac{b}{2} \\ G &= 1, \end{aligned}$$

e os coeficientes da 2ª forma fundamental de $P$ são

$$\begin{aligned} L &= \frac{b(1+a^2)}{2\sqrt{1+a^2}} \\ M &= \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} \\ N &= 0. \end{aligned}$$

Um cálculo fácil mostra que

$$EN + GL - 2FM = \frac{b(1+a^2)}{2\sqrt{1+a^2}} - 2\frac{b}{2}\frac{\sqrt{1+a^2}}{2} = 0$$

e, daí, $H \equiv 0$. □

Na verdade, vale ainda mais para os planos verticais.

**Teorema 4.2.** *As únicas superfícies mínimas verticais são os planos verticais.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1, os planos verticais são superfícies mínimas.

Seja $S$ uma superfície vertical mínima em $\mathcal{H}_3$. Pela Proposição 3.5, podemos parametrizar $S$ por $X(t,s) = (t, a(t), s)$. Sabemos que os coeficientes da 1ª forma fundamental de $S$ são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t\rangle &&= 1 + (a')^2 + \tfrac{1}{4}(a - ta')^2 \\ F &= \langle X_t, X_s\rangle &&= \tfrac{a-ta'}{2} \\ G &= \langle X_s, X_s\rangle &&= 1. \end{aligned}$$

e os coeficientes da 2ª forma fundamental de $S$ são

$$\begin{aligned} L &= -\langle \nabla_{X_t}\eta, X_t\rangle &&= \tfrac{(a-ta')(1+(a')^2)-2a''}{2\sqrt{1+(a')^2}} \\ M &= -\langle \nabla_{X_t}\eta, X_s\rangle &&= \tfrac{\sqrt{1+(a')^2}}{2} \\ N &= -\langle \nabla_{X_s}\eta, X_s\rangle &&= 0. \end{aligned}$$

Daí, como S é mínima, temos que $H \equiv 0$, o que implica que $EN + GL - 2FM \equiv 0$. Substituindo os valores dos coeficientes da 1ª e 2ª forma fundamental, obtemos

$$\frac{1}{2}[(a-ta')(1+(a')^2) - 2a''](1+(a')^2)^{-\frac{1}{2}} - 2\frac{a-ta'}{2}\frac{1}{2}(1+(a')^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(1+(a')^2)^{\frac{1}{2}}$, obtemos $-2a'' = 0$, o que implica em $a'' = 0$ e, portanto, $S$ é um plano vertical. □

## 4.2 Superfícies mínimas com aplicação de Gauss de posto 1

Nesta seção, estudamos os gráficos mínimos de $\mathcal{H}_3$ cuja aplicação de Gauss tem posto 1, isto é, estudaremos as funções diferenciáveis tais que

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} = 0. \tag{4.1}$$

Iniciamos essa seção enunciando o seguinte teorema de M. Bekkar e T. Sari ([4]), onde eles obtiveram uma classificação para as superfícies mínimas regradas em $\mathcal{H}_3$,

**Teorema 4.3.** *As superfícies mínimas de $\mathcal{H}_3$ regradas, a menos de isometrias, são:*

1. *Os planos;*

2. *Os parabolódes hiperbólicos;*

3. *Os helicóides parametrizados por*

$$\begin{cases} x(t,s) &= s\sin t \\ y(t,s) &= s\cos t, \quad \rho \in \mathbb{R} - 0. \\ z(t,s) &= \rho t \end{cases}$$

4. *Os gráficos dados por*

$$z = \frac{xy}{2} - \frac{\lambda}{2}\left[y\sqrt{1+y^2} + log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right], \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

5. *As superfícies que são localmente os gráficos da forma $z = \frac{y}{2}(R(x) + x)$, onde $R$ é uma solução da seguinte equação diferencial,*

$$R''(4 + R^2) - 2R(R' + 1)(R' + 2) = 0.$$

6. *As superfícies que são localmente parametrizadas por*

$$\begin{cases} x(t,s) &= t + su(t) \\ y(t,s) &= s \\ z(t,s) &= a(t) - \frac{st}{2}, \end{cases}$$

*onde $u$ e $a$ são soluções do sistema*

$$\begin{cases} (1 + u^2 + t^2)u'' - (1 + 2u'a')tu' &= 0 \\ (1 + u^2 + t^2)a'' - (1 + 2u'a')(ta' - u) &= 0. \end{cases}$$

Para o próximo resultado, faz-se necessário o seguinte

**Teorema 4.4.** *Seja* $G = \{L_{(t,0,0)}; t \in \mathbb{R}\}$*. Então as superfícies mínimas de* $\mathcal{H}_3$ *G-invariantes são, a menos de isometrias,*
*a) As superfícies da equação*

$$z = \frac{xy}{2} - c\left[y\sqrt{1+y^2} + log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right], \quad c \in \mathbb{R}.$$

*b) Os planos verticais.*

*Demonstração.* Veja [16], Teorema 6. □

**Lema 4.5.** *Seja* $G(f)$ *um gráfico mínimo em* $\mathcal{H}_3$ *que contém a origem, tal que seu vetor normal unitário na origem é* $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$*, com* $k \in \mathbb{R}$ *e sua aplicação de Gauss tem posto 1. Além disso, assuma que* $f_{yy}(0) = 0$*. Então, a menos de isometria, temos*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} + k\left[log(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}\right] \\ ou \\ 2ky - \frac{xy}{2} \end{cases}.$$

*Demonstração.* De fato, como $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ temos por (2.21) que $f_x(0) = 0$, $f_y(0) = 2k$. Por outro lado, $G(f)$ tem posto 1, então $f$ satisfaz (4.1) e, então, temos

$$f_{xx}(0)f_{yy}(0) - f_{xy}(0)^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Mas $G(f)$ é um gráfico mínimo e, portanto, $f$ satisfaz (3.16) e vale

$$(1 + 4k^2)f_{xx}(0) + f_{yy}(0) = 0.$$

Como por hipótese $f_{yy}(0) = 0$, temos, pelas equações acima, que $f_{xx}(0) = 0$ e $f_{xy}(0) = \pm\frac{1}{2}$.

Derivando as equações (3.16) e (4.1) com relação a $x$, obtemos respectivamente, as seguintes equações,

$$f_2(f_2)_x f_{xx} + a f_{xxx} - f_{xy}((f_1)_x f_2 + f_1(f_2)_x) - f_1 f_2 f_{xxy} + f_1(f_1)_x f_{yy} + b f_{xyy} = 0$$
$$f_{xxx}f_{yy} + f_{xx}f_{yyx} - 2f_{xy}f_{xxy} = 0$$

e, com relação a $y$, obtemos

$$f_2(f_2)_y f_{xx} + a f_{xxy} - f_{xy}((f_1)_y f_2 + f_1(f_2)_y) - f_1 f_2 f_{xyy} + f_1(f_1)_y f_{yy} + b f_{yyy} = 0$$
$$f_{xxy}f_{yy} + f_{xx}f_{yyy} - 2f_{xy}f_{xyy} = 0,$$

onde $a = \frac{1}{2}(1 + f_2^2)$ e $b = \frac{1}{2}(1 + f_1^2)$. Então, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f_2(f_2)_x f_{xx} + a f_{xxx} - f_{xy}((f_1)_x f_2 + f_1(f_2)_x) - f_1 f_2 f_{xxy} + f_1(f_1)_x f_{yy} + b f_{xyy} = 0 \\ f_2(f_2)_y f_{xx} + a f_{xxy} - f_{xy}((f_1)_y f_2 + f_1(f_2)_y) - f_1 f_2 f_{xyy} + f_1(f_1)_y f_{yy} + b f_{yyy} = 0 \\ f_{xxx} f_{yy} + f_{xx} f_{yyx} - 2 f_{xy} f_{xxy} = 0 \\ f_{xxy} f_{yy} + f_{xx} f_{yyy} - 2 f_{xy} f_{xyy} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Assim, avaliando o sistema (4.2) na origem e usando que $f_{xx}(0) = f_{yy}(0) = f_x(0) = 0$ e $f_y = -2k$, obtemos

$$\begin{cases} (1 + 4k^2) f_{xxx}(0) + f_{xyy}(0) = 0 \\ (1 + 4k^2) f_{xxy} - 4k f_{xy}(0)(f_{xy}(0) + \frac{1}{2}) + f_{yyy}(0) = 0 \\ 2 f_{xy}(0) f_{xxy}(0) = 0 \\ 2 f_{xy}(0) f_{xyy}(0) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Mas $f_{xy}(0) \neq 0$, então $f_{xxy}(0) = f_{xyy}(0) = f_{xxx}(0) = 0$ e ficamos com a seguinte equação

$$f_{yyy}(0) = 4k f_{xy}(0)(f_{xy}(0) + \tfrac{1}{2}). \tag{4.4}$$

Pelo Teorema 3.14, temos que $f$ é analítica e, portanto, podemos escrever $f$ como sua série de Taylor em torno da origem da forma

$$f(x, y) = 2ky + f_{xy}(0)xy + \tilde{\Psi}(x, y),$$

onde $\tilde{\Psi}$ é uma função dada em série de potências. Desde que $f_{xy}(0) = \pm\frac{1}{2}$, consideramos os dois possíveis casos:

*i)* $f_{xy}(0) = \frac{1}{2}$

Por (4.4), temos que $f_{yyy}(0) = 2k$ e, assim, os termos de grau 3 na expansão de Taylor de $f$ não dependem de $x$.

Suponha, então, que exista termo não nulo de grau maior ou igual a 4 na expansão de Taylor de $f$ que dependa de $x$ e seja $n$ o menor grau dos termos com tal propriedade. Portanto, podemos escrever

$$f(x, y) = 2ky + \tfrac{xy}{2} + \psi(y) + \Psi(x, y), \tag{4.5}$$

onde $\Psi$ é uma função dada em série de potências com grau mínimo $n$ e $\psi$ é um polinômio de grau entre 3 e $n-1$ ou é o polinômio nulo. Daí

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \Psi_{xx} \\ f_{xy} &= \tfrac{1}{2} + \Psi_{xy} \\ f_{yy} &= \psi_{yy} + \Psi_{yy}. \end{aligned}$$

Substituindo as iguadades acima em (4.1) obtemos

$$\Psi_{xx}(\psi_{yy} + \Psi_{yy}) - \Psi_{xy}^2 = \Psi_{xy}. \tag{4.6}$$

Donde concluímos que não aparecem termos mistos de grau $n$ na expansão de Taylor de $f$, pois se existir um termo misto, digamos $ax^{n-j}y^j$, com $a \neq 0$ na expansão de $f$, então o primeiro membro da iguadade (4.6) terá grau mínimo $\geq 2(n-2)$ e o segundo membro terá grau mínimo $n-2$, o que é um absurdo. Segue que (4.5) pode ser escrita como

$$f(x,y) = 2ky + \tfrac{xy}{2} + \psi(y) + ax^n + by^n + \Phi(x,y), \tag{4.7}$$

onde $\Psi(x,y) = ax^n + by^n + \Phi(x,y)$. Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de $f$, temos

$$\begin{aligned} f_x &= \tfrac{y}{2} + nax^{n-1} + \Phi_x \\ f_y &= 2k + \tfrac{x}{2} + \psi_y + nby^{n-1} + \Phi_y \\ f_{xx} &= n(n-1)ax^{n-2} + \Phi_{xx} \\ f_{xy} &= \tfrac{1}{2} + \Phi_{xy} \\ f_{yy} &= n(n-1)by^{n-2} + \psi_{yy} + \Phi_{yy}. \end{aligned}$$

Substituindo as igualdades acima na equação dos gráficos mínimos (3.16), chegamos a

$$\begin{aligned} &[1 + (2k + \psi_y + nby^{n-1} + \Phi_y)^2](n(n-1)ax^{n-2} + \Phi_{xx}) \\ &-2(y + nax^{n-1} + \Phi_x)(2k + \psi_y + nby^{n-1} + \Phi_y)(\tfrac{1}{2} + \Phi_{xy}) \\ &+[1 + (y + nax^{n-1} + \Phi_x)^2](n(n-1)by^{n-2} + \psi_{yy} + \Phi_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Daí, olhando para os coeficientes de $x^{n-2}$, devemos ter

$$(1 + 4k^2)n(n-1)ax^{n-2} \equiv 0.$$

Logo $a = 0$, o que é uma contradição com o $n$ escolhido.

Portanto não pode existir tal $n$ e, assim, existe uma função $g$ satisfazendo

$$f(x,y) = \frac{xy}{2} + g(y). \tag{4.8}$$

Deste modo, se $(x, y, f(x, y)) \in G(f)$, então para $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
L_{(t,0,0)}(x, y, f(x, y)) &= (t + x, y, f(x, y) + \tfrac{ty}{2}) \\
&= (t + x, y, \tfrac{xy}{2} + g(y) + \tfrac{ty}{2}) \\
&= (t + x, y, \tfrac{(t+x)y}{2} + g(y)) \\
&= (t + x, y, f(t + x, y)).
\end{aligned}$$

Então $L_{(t,0,0)}(x, y, f(x, y)) \in G(f)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $G(f)$ é invariante pelas translações do tipo $L_{(t,0,0)}$ e o teorema 4.4, garante que $G(f)$ é a superfície dada pela equação

$$z = \frac{xy}{2} - c\left[y\sqrt{1 + y^2} + log\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)\right], \quad c \in \mathbb{R},$$

uma vez que $G(f)$ é um gráfico e, portanto, não é um plano vertical. Como $f_y(0) = 2k$, temos que $c = k$, logo

$$f(x, y) = \tfrac{xy}{2} - k\left[y\sqrt{1 + y^2} + log\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)\right], \quad k \in \mathbb{R}.$$

*ii)* $f_{xy}(0) = -\frac{1}{2}$

Por (4.4), temos que $f_{yyy}(0) = 0$ e, assim, na expansão de Taylor de $f$ os termos de grau 3 são todos nulos.

Então, novamente suponha que exista termo não nulo de grau maior ou igual a 4 na expansão de Taylor de $f$ que dependa de $x$ ou de $y$ e seja $n$ o menor grau dos termos com tal propriedade. De modo análogo ao caso $f_{xy}(0) = \frac{1}{2}$, temos que os termos de grau $n$ não são mistos e, assim, podemos escrever

$$f(x, y) = 2ky - \tfrac{xy}{2} + ax^n + by^n + \Phi(x, y), \tag{4.9}$$

onde $\Psi$ é uma função dada em série de potências que é identicamente nula ou seus termos de menor grau têm grau maior que $n$. Daí, derivando, temos

$$\begin{aligned}
f_x &= -\tfrac{y}{2} + nax^{n-1} + \Phi_x \\
f_y &= 2k - \tfrac{x}{2} + nby^{n-1} + \Phi_y \\
f_{xx} &= n(n-1)ax^{n-2} + \Phi_{xx} \\
f_{xy} &= -\tfrac{1}{2} + \Phi_{xy} \\
f_{yy} &= n(n-1)by^{n-2} + \Phi_{yy}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.16), obtém-se

$$\begin{aligned}
&[1+(2k-x+nby^{n-1}+\Phi_y)^2](n(n-1)ax^{n-2}+\Phi_{xx})\\
&-2(2k-x+nby^{n-1}+\Phi_y)(nax^{n-1}+\Phi_x)(-\tfrac{1}{2}+\Phi_{xy})\\
&+[1+(nax^{n-1}+\Phi_x)^2](n(n-1)by^{n-2}+\Phi_{yy})=0.
\end{aligned}$$

Assim, analisando os coeficientes de $x^{n-2}$ e $y^{n-2}$, temos

$$\begin{aligned}
&(1+4k^2)n(n-1)ax^{n-2}\equiv 0\\
&n(n-1)by^{n-2}\equiv 0,
\end{aligned}$$

que nos fornece $a=b=0$, e isso é uma contradição com a escolha do $n$. Logo não pode existir tal $n$ e, então,

$$f(x,y)=2ky-\tfrac{xy}{2}.$$

$\square$

**Lema 4.6.** *Dada uma função $f:\Omega\to\mathbb{R}$ diferenciável, então existe uma função $g:\Omega_0\to\mathbb{R}$ diferenciável com $G(f)$ sendo isométrico à $G(g)$, onde $\Omega_0$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$ contendo a origem e $g$ é uma função tal que $g(0,0)=0$ e $g_x(0,0)=0$.*

*Demonstração.* Sendo $(a,b)\in\Omega$, defina $g_1:\Omega_1\to\mathbb{R}$ por

$$g_1(x,y)=f(x+a,y+b)-f(a,b),$$

onde $\Omega_1=\{(x,y);(x+a,y+b)\in\Omega\}$. Temos que $G(f)$ é isométrico à $G(g_1)$ pois $G(g_1)=L_p^{-1}(G(f))$ onde $p=(a,b,f(a,b))$. Então, a menos de trocarmos $f$ por $g_1$ podemos assumir que $(0,0)\in\Omega$ e $f(0,0)=0$. Se $f_x(0,0)=0$, nada há a fazer. Se $f_x(0,0)\neq 0$, então defina

$$\theta=arccotg\left(\frac{f_y(0,0)}{f_x(0,0)}\right)\in[0,2\pi).$$

Considere a isometria

$$\Psi(x,y,z)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta,z).$$

Portanto podemos definir $g:\Omega_0\to\mathbb{R}$ por

$$g(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,y\cos\theta-x\sin\theta),$$

onde $\Omega_0=\{(x,y);(x\cos\theta+y\sin\theta,y\cos\theta-x\sin\theta)\in\Omega\}$. Pela escolha de $\theta$, temos que $g_x(0,0)=0$. $\square$

Assim, não há perda de generalidade ao supormos que o gráfico $G(f)$ passa pela origem e que $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$.

**Teorema 4.7.** *Se $S = G(f)$ é um gráfico mínimo em $\mathcal{H}_3$ tal que seu vetor normal unitário na origem é $\eta(0) = \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}(0, -2k, 1)$ e sua aplicação de Gauss tem posto 1, então $G(f)$ é uma superfície regrada.*

*Demonstração.* Como a aplicação de Gauss de $S$ tem posto 1, temos que existe uma curva diferenciável $\Gamma(t) = (\beta(t), \alpha(t), f(\beta(t), \alpha(t)))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ passando pela origem tal que $\eta$ é constante ao longo de $\Gamma$ e, além disso, $\Gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Assim, se $\beta'(0) = 0$, então $\alpha'(0) \neq 0$, já que $\Gamma'(0) \neq 0$. E então, usando (2.21) temos que

$$f_y(\beta(t), \alpha(t)) - \frac{\beta(t)}{2} = 2k, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Derivando a igualdade acima com relação a $t$ e avaliando em $t = 0$ obtemos,

$$\alpha'(0) f_{yy}(0,0) = 0, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Logo, $f_{yy}(0,0) = 0$ e assim, estamos nas hipóteses do lema 4.5, o que implica que $S$ é uma superfície regrada.

Se $\beta'(0) \neq 0$, então reparametrizando $\Gamma$ se necessário, podemos supor que $\Gamma(t) = (t, \alpha(t), f(t, \alpha(t)))$.

Denotemos por $f(t) = f(t, \alpha(t))$, $f_x(t) = f_x(t, \alpha(t))$, $f_y(t) = f_y(t, \alpha(t))$, $f_{xx}(t) = f_{xx}(t, \alpha(t))$, $f_{xy}(t) = f_{xy}(t, \alpha(t))$ e assim por diante.

Usando (2.21), vemos que

$$\begin{array}{rcl} f_x(t) + \frac{\alpha(t)}{2} & = & 0 \\ f_y(t) - \frac{t}{2} & = & 2k \end{array}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon). \tag{4.10}$$

Derivando com respeito a $t$, temos

$$\begin{array}{rcl} f_{xx}(t) + f_{xy}(t)\alpha'(t) + \frac{\alpha'(t)}{2} & = & 0 \\ f_{xy}(t) + f_{yy}(t)\alpha'(t) - \frac{1}{2} & = & 0. \end{array} \tag{4.11}$$

Também necessitamos das segundas e terceiras derivadas de $f$ avaliadas ao longo da curva $\Gamma$. Deste modo, usando (4.10) em (3.16), temos

$$(1 + 4k^2) f_{xx}(t) + f_{yy}(t) \quad = \quad 0. \tag{4.12}$$

Logo $f_{xx}(t)$ e $f_{yy}(t)$ têm sinais opostos e, assim, $f_{xx}(t) f_{yy}(t) \leq 0$. Como $S$ tem aplicação de Gauss com posto 1, temos que

$$4f_{xy}^2(t) - 4f_{yy}(t)f_{xx}(t) \;=\; 1. \tag{4.13}$$

Então, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, existe $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que

$$\begin{aligned} f_{xy}(t) &= \tfrac{\cos\theta}{2} \\ f_{yy}(t)f_{xx}(t) &= -\tfrac{\sin^2\theta}{4}. \end{aligned}$$

A menos de trocarmos $\theta$ por $-\theta$, podemos supor que

$$\begin{aligned} f_{xx}(t) &= \tfrac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}} \\ f_{yy}(t) &= -\tfrac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2} \\ f_{xy}(t) &= \tfrac{\cos\theta}{2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Consideraremos dois casos:

*i)* Se $f_{yy}(0) = 0$, então estamos nas hipóteses do Lema 4.5 e, portanto, $S$ é regrada.

*ii)* Se $f_{yy}(0) \neq 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f_{yy}(t) \neq 0$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

Neste caso, usando (4.14) na segunda equação de (4.11), obtemos

$$\alpha'(t) \;=\; \tfrac{\cos\theta - 1}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}. \tag{4.15}$$

Avaliando o sistema (4.2) em $(t, \alpha(t))$ e usando (4.10) e (4.14), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (1+4k^2)f_{xxx}(t) + f_{xyy}(t) = \tfrac{k\sin\theta}{\sqrt{1+4k^2}} \\ (1+4k^2)f_{xxy}(t) + f_{yyy}(t) = k(1+\cos\theta) \\ -\tfrac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2} f_{xxx}(t) - \cos\theta f_{xxy}(t) + \tfrac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}} f_{xyy}(t) = 0 \\ -\tfrac{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}{2} f_{xxy}(t) - \cos\theta f_{xyy}(t) + \tfrac{\sin\theta}{2\sqrt{1+4k^2}} f_{yyy}(t) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos

$$
\begin{aligned}
f_{xxx}(t) &= \tfrac{k\sin\theta(1-\cos\theta)}{2(1+4k^2)^{\frac{3}{2}}}\\
f_{xxy}(t) &= \tfrac{k\sin^2\theta}{2(1+4k^2)}\\
f_{xyy}(t) &= \tfrac{k\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sqrt{1+4k^2}}\\
f_{yyy}(t) &= \tfrac{k(1+\cos\theta)^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Agora, mostremos que $\Gamma$ é uma reta. Para fazer isso, derivamos a terceira componente $z(t)$ de $\Gamma$, isto é,

$$\tfrac{dz}{dt} = f_x(t)+\alpha'(t)f_y(t), \tag{4.18}$$

e derivando a segunda equação de (4.11) com relação a $t$, obtemos

$$f_{xxy}(t)+2f_{xyy}(t)\alpha'(t)+f_{yyy}(t)(\alpha'(t))^2+f_{yy}(t)\alpha''(t) = 0.$$

Substituindo (4.17) e (4.15) na igualdade acima, temos

$$\tfrac{k\sin^2\theta}{2(1+4k^2)}+2\tfrac{k\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sqrt{1+4k^2}}\tfrac{\cos\theta-1}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}+\tfrac{k(1+\cos\theta)^2}{2}(\tfrac{\cos\theta-1}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta})^2+f_{yy}(t)\alpha''(t) = 0,$$

mas observe que

$$\tfrac{k\sin^2\theta}{2(1+4k^2)}+2\tfrac{k\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sqrt{1+4k^2}}\tfrac{\cos\theta-1}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta}+\tfrac{k(1+\cos\theta)^2}{2}(\tfrac{\cos\theta-1}{\sqrt{1+4k^2}\sin\theta})^2 = 0.$$

Logo $f_{yy}(t)\alpha''(t)=0$ e, como $f_{yy}(t)\neq 0$, para todo $t\in(-\delta,\delta)$, temos que $\alpha''(t)=0$ em $(-\delta,\delta)$, ou seja, existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha(t)=at$, pois $\alpha(0)=0$. Assim, voltando para (4.18) e usando (4.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tfrac{dz}{dt} &= -\tfrac{at}{2}+\tfrac{at}{2}+2ak\\
&= 2ak,
\end{aligned}
$$

e isso implica que $z(t)=2akt$ já que $z(0)=0$. Daí

$$\Gamma(t) = t(1,a,2ak). \tag{4.19}$$

Portanto, $\Gamma$ é uma reta.

Para $p\in S$, transladando $p$ para a origem e se necessário rotacionando sobre o eixo $z$, podemos repetir o argumento acima para concluir que $S$ contém um segmento de reta passando por $p$. Portanto $S$ é regrada.

□

Pelo Lema 4.6 e pelos Teoremas 4.1 e 4.7 temos o seguinte

**Teorema 4.8.** *Seja $S$ uma superfície mínima em $\mathcal{H}_3$ com aplicação de Gauss de posto constante $\leq 1$. Então, a menos de isometria, $S$ é uma superfície regrada.*

**Teorema 4.9.** *Os gráficos mínimos em $\mathcal{H}_3$ com aplicação de Gauss de posto 1 são*

$$f(x,y) = \tfrac{xy}{2} + k\left[log(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}\right],$$

*onde $k \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.8, toda superfície com aplicação de Gauss de posto 1 a menos de isometria é regrada. Então, a menos de isometria, toda superfície com aplicação de Gauss de posto 1 é uma das superfícies do Teorema 4.3. Assim, analisaremos as superfícies desse teorema que têm aplicação de Gauss com posto 1.

Temos que as superfícies dos itens 2 e 4 foram estudadas no Lema 4.5 e ambas têm posto 1. Por outro lado, as superfícies do item 1 (os planos) ou são planos verticais, os quais, pelo Teorema 4.1 têm aplicações de Gauss de posto 0 ou são gráficos de funções do tipo $f(x,y) = ax + by + c$ cuja aplicação de Gauss têm posto 2.

Se $S$ uma superfície como no item 3, temos que $S$ pode ser parametrizada por

$$X(x,y) = (x, y, \rho \arctan \tfrac{x}{y}).$$

Daí, sendo $f(x,y) = \rho \arctan \frac{x}{y}$, temos

$$\begin{aligned} f_x &= \tfrac{\rho y}{x^2+y^2} \\ f_y &= -\tfrac{\rho x}{x^2+y^2}, \\ f_{xx} &= -\tfrac{2\rho xy}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{yy} &= \tfrac{2\rho xy}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{xy} &= \tfrac{\rho(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Segue que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4} \neq 0$. Portanto $S$ tem aplicação de Gauss com posto 2.

Estudando as superfícies do item 5, temos que

$$f(x,y) = \tfrac{y}{2}(R(x) + x),$$

daí

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{y}{2}R'' \\ f_{xy} &= \frac{1}{2}(R'+1) \\ f_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo as igualdades acima em (4.1) obtemos

$$(R'+1)^2 = 1.$$

Logo $R(x) = -2x + a$ ou $R(x) = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim, se $R(x) = -2x + a$, temos que $f(x, y) = \frac{y}{2}(a - x)$ e, portanto, $G(f)$ é isométrico ao parabolóide hiperbólico $z = \frac{xy}{2}$ por meio da isometria $\Psi \circ L_{(-\frac{a}{2},0,0)}$, onde $\Psi(x, y, z) = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta, -z)$, com $\theta = \frac{3\pi}{2}$, que é uma isometria pelo Lema 2.28 item 2. Se $R(x) = a$, usando o fato de que R satisfaz a equação diferencial

$$R''(4 + R^2) - 2R(R'+1)(R'+2) = 0,$$

temos que $R \equiv 0$ e, assim, $f(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Finalmente, no caso de uma superfície como no item 6, podemos usar o teorema da função implícita e parametrizar essa superfície como um gráfico de uma função diferenciável $f$, onde

$$f(x, y) = a(t(x, y)) - \tfrac{st(x,y)}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} t_x &= \tfrac{1}{1+yu'} \\ t_y &= -\tfrac{u}{1+yu'} \\ &= -ut_x \\ t_{xy} &= t_{yx} \\ &= -u't_x^2 - ut_{xx} \\ t_{yy} &= -u't_xt_y - ut_{xy} \\ &= 2uu't_x^2 + u^2t_{xx}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Portanto as derivadas da função $f$ são dadas por

$$\begin{aligned} f_x &= a't_x - \tfrac{yt_x}{2} \\ &= (a' - \tfrac{y}{2})t_x \\ f_y &= a't_y - \tfrac{t}{2} - \tfrac{yt_y}{2} \\ &= (a' - \tfrac{y}{2})t_y - \tfrac{t}{2} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= a''t_x^2 + (a' - \tfrac{y}{2})t_{xx} \\ f_{xy} &= a''t_xt_y - \tfrac{t_x}{2} + (a' - \tfrac{y}{2})t_{xy} \\ f_{yy} &= a''t_y^2 + (a' - \tfrac{y}{2})t_{yy} - t_y. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Substituindo essas igualdades na equação (4.1), obtemos

$$[a''t_x^2+(a'-\tfrac{y}{2})t_{xx}][a''t_y^2 + (a'-\tfrac{y}{2})t_{yy}-t_y]-[a''t_xt_y+(a'-\tfrac{y}{2})t_{xy}-\tfrac{t_x}{2}]^2+\tfrac{1}{4} = 0.$$

Isso resulta

$$\begin{aligned} 0 &= a''(a'-\tfrac{y}{2})(t_{yy}t_x^2 + t_{xx}t_y^2 - 2t_{xy}t_xt_y) - (a'-\tfrac{y}{2})(t_{xx}t_y - t_{xy}t_x) \\ &\quad +(a'-\tfrac{y}{2})^2(t_{xx}t_{yy} - t_{xy}^2) - \tfrac{t_x^2}{4} + \tfrac{1}{4} \\ &= -(a'-\tfrac{y}{2})u't_x^3 - (a'-\tfrac{y}{2})^2(u')^2t_x^4 - \tfrac{t_x^2}{4} + \tfrac{1}{4} \\ &= -[(a'-\tfrac{y}{2})u't_x + \tfrac{1}{2}]^2t_x^2 + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$[(a' - \tfrac{y}{2})u't_x + \tfrac{1}{2}]t_x = \pm\tfrac{1}{2}.$$

Logo, usando (4.20), obtemos

$$\pm(u')^2y^2 + (u' \pm 2u')y + 2a'u' + 2 \pm 1 = 0.$$

Voltando para as variáveis $t$ e $s$, temos

$$\pm(u')^2s^2 + (u' \pm 2u')s + 2a'u' + 2 \pm 1 = 0. \tag{4.23}$$

No entanto, em qualquer um dos casos (4.23) é um polinômio em $s$ e, portanto, seus coeficientes têm que ser nulos, donde $u' \equiv 0$ e $2a'u' + 2 \pm 1 \equiv 0$. Portanto $2 \pm 1 = 0$, o que é uma contradição. Logo, tal superfície não satisfaz (4.1) e portanto sua aplicação de Gauss não tem posto 1. □

Em [3] também foi feito considerações sobre o teorema acima.

Observe que na demonstração do teorema acima foi mostrado que os planos não verticais, os helicóides e as superfícies do tipo 6 do teorema 4.3 são exemplos de superfícies mínimas em $\mathcal{H}_3$ que têm aplicação de Gauss com posto 2.

Deve ser mensionado que B. Daniel em [6] estudou a imagem da aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas nunca verticais.

# Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. Gervasio. *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$. Berlin Heidelberg: Spring-Verlag, 1986.

[2] BARBOSA, J. L. M.; DO CARMO, Manfredo P. *Stable Minimal Surfaces.* Bulletin of the American Mathematical Society, v. 80, n.3, 1974, p. 581-583.

[3] BEKKAR, M. *Sur un système d'équations aux dérivées partielles dans l'espace de Heisenberg.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, v. 59, n. 3, p. 177-184, 2001.

[4] BEKKAR, M.; SARI, T. *Surfaces minimales reglees dans l'espace de Heisenberg.* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, v. 50, n. 3, p. 243-254, 1992.

[5] BERNSTEIN, S. *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Mathematische Annalen, v. 59, p. 20-76, 1904.

[6] DANIEL, Benoît. *The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group.* arXiv:math/0606299v2, 2010.

[7] DANIEL, Benoît; HAUSWIRTH, Laurent. *Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group.* Proc. London Math. Soc., v.3, n. 98, p. 445-470, 2009.

[8] DANIELLI, D.; GAROFALO, N.; NHIEU, D. M.; PAULS, S. D. *The Bernstein problem for embedded surfaces in the Heisenberg group* $\mathbb{H}^1$. Indiana Univ. Math. J., v. 59, n. 2, p. 563-594, 2010.

[9] DIERKES, Ulrich; HILDEBRANDT, Stefan; SAUVIGNY, Friedrich. *Minimal Surfaces.* 2. ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[10] DILLEN, F.; VEKEN, J. Van der. *Higher order parallel surfaces in the Heisenberg group.* Differential Geometry and its Aplications,v. 26, p. 1-8, 2008.

[11] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Riemanniana.* 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[12] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

[13] FERNÁNDEZ, Isabel; MIRA, Pablo. *Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space.* Trans. Amer. Math. Soc., v. 361, p. 5737-5752, 2009.

[14] FIGUEROA, Christiam. *The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group.* arXiv:1106.0779v2, 2011.

[15] FIGUEROA, Christiam. *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg.* 1996. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

[16] FIGUEROA, Christiam; MERCURI, F.; PEDROSA, R. *Invariant surfaces of the Heisenberg Group.* Annali di Matematica pura ed applicata, v. 177, n. 1, p. 173-194, 1999.

[17] FRIEDMAN, Avner. *On the Regularity of the Solutions of Non-Linear Elliptic and Parabolic Systems of Partial Differential Equations.* J. Math. Mech., v. 7, p. 43-59, 1958.

[18] GALLOT, Sylvestre; HULIN, Dominique; LAFONTAINE, Jacques. *Riemannian Geometry* 3. ed. Berlin: Spring, 2004.

[19] GEVREY, Maurice. *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles.* Annales scientifiques de l'É.N.S., Sér. 3, v. 35, p. 129-190, 1918.

[20] GIUSTI, Enrico. *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Monographs in mathematics, vol. 80. Boston: Birkhäuser, 1984.

[21] HASHIMOTO, Yoshiaki. *A Remark on the Analyticity of the Solutions for Non-Linear Elliptic Partial Differential Equations.* Tokyo J. of Math., v. 29, n. 2, p. 271-281, 2006.

[22] HOPF, Eberhard. *Bernstein's theorem on sufaces z(x,y) of nonpositive curvature.* Proc. of the Am. Math. Soc., v. 1 n. 1, p. 80-85, 1950.

[23] HSIANG, Wu Yi. *Lectures on Lie groups.* Singapore: World Scientific Pub Co Inc, 2000.

[24] INOGUCHI, J. *Flat translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group.* J. Geom., v. 82, p. 83-90, 2005.

[25] JOST, J.; WEINBERGER, H. *Partial Differential Equations.* New York: Springer, 2002.

[26] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds.* Washington: Spring, 2002.

[27] LEE, John M. *Reimannian manifolds: an introduction to curvature.* New York: Spring-Verlag, 1997.

[28] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise vol. 2.* 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[29] MICKLE, Earl J. *A remark on a theorem of S. Bernstein.* Proc. of the Am. Math. Soc., v.1, n. 1, p. 86-89, 1950.

[30] MORREY Jr., Charles B. *On the Analyticity of the Solutions of Analytic Non-Linear Elliptic Systems of Partial Differential Equations: Part I. Analyticity in the Interior.* American Journal of Mathematics, v. 80, n. 1, p. 198-218, 1958.

[31] NELLI, B. *A Survey on Alexandrov-Bernstein-Hopf Theorems.* Mat. Contemp., v. 35, p. 151-176, 2008.

[32] OSSERMAN, Robert. *A Survey of Minimal Surfaces.* New York: Dover Publications, 1986.

[33] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity.* New York: Academic Press, 1983.

[34] PETROWSKY, I. G. *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles.* Matematiceskij sbornik, v. 47, n. 1, p. 3-70, 1939.

[35] PIU, P.; GOZE, M. *Distributions totalment géodésiques pour des métriques nilpotentes.* Rend. Sem. Fac. Scienze Universita di Cagliari, supp. al v. 58, 1988.

[36] RIPOLL, J. *On Hypersurfaces of Lie group*, Illinois Journal of Mathematics, vol. 35, 1, 1991, p. 47-55.

[37] SANINI, A. *Gauss map of a surface of Heisenberg group.* Boll. Unione Mat. Ital., Ser. VII., v. 11B, n. 2, p. 79-93, 1997.

[38] SIMON, L. *Equations of mean curvature type in 2 independent variables.* Pacific Journal of Mathematics, v. 69, n. 1, p. 245-268, 1977.

[39] SOUAM, R.; TOUBIANA, E. *Totally umbilical surfaces in homofeneus 3-manifolds.* Comment. Math. Helv., v. 84, p. 673-704, 2009.

[40] VEKEN, J. Van der. *Higher Order Parallel Surfaces in Bianchi-Cartan-Vranceanu Spaces.* Result. Math., v. 51, p. 339-359, 2008.

[41] TRUDINGER, Neil S. *On the analyticity of generalized minimal surfaces.* Bull. Austral. Math. Soc., v. 5, p. 315-320, 1971.