UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Oslenne Nogueira de Araújo

Estimativas para os Autovalores do Operador de Dirac

Fortaleza
2012

Oslenne Nogueira de Araújo

Estimativas para os Autovalores do Operador de Dirac

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentação: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2012

Araújo, Oslenne Nogueira de

S58t Estimativa de Autovalores do Operador de Dirac/Oslenne Nogueira de Araú

Fortaleza, 2012.

193f.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira

Área de concentração : Matemática

Dissertação(Mestrado) - Universidade Federal do Ceará,

Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza,

2012.

1. Geometria Diferencial I. Lira, Jorge Herbert Soares de(Orient.)

CDD 515

Dedicado a
Damião Júnio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais Maria de Lourdes Nogueira de Araújo e José Celso de Araújo, aos meus irmãos Oslecson, Osnilson e Oslânnia pelo apoio e incentivo.

Ao meu marido, Damião Júnio Gonçalves Araújo, pelo carinho, paciência e por ser o meu porto seguro.

Quero agradecer também a todas as pessoas que se fizeram presente, que se preocuparam, que foram solidárias e que torceram por mim. Em especial, as amigas Elizabeth Lacerda Gomes e Aline Holanda as quais sou profundamente grata pelo ombro amigo nos momentos que mais precisei.

Aos colegas e amigos do Departamento de Matemática da UFC, em especial, André Pinheiro, Leonardo Tavares, Rafael Diógenes, Elaine Sampaio, Raquel Costa com os quais pude aprimorar meus conhecimentos.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Ernani Ribeiro e Prof. Sebastião Carneiro, pela disponibilidade e pelas contribuições.

Ao Prof. Jorge Herbert pela confiança depositada em mim e pelos ensinamentos.

Ao orgão financiador CAPES/PROPAG.

E a todos que deram a sua contribuição para que esta dissertação fosse realizada, deixo aqui o meu sincero agradecimento.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar algumas estimativas para os autovalores do operador de Dirac em variedades Riemannianas Spin compactas com curvatura escalar positiva. Para isto, utilizaremos algumas ferramentas clássicas de geometria Riemanniana e algumas de suas propriedades tais como álgebra de Clifford, grupos spin, conexões, derivada covariante e operador de Dirac.

Palavras-chave: Operador de Dirac, Desigualdade de Friedrich, Estrutura Spin.

Abstract

The aim of this work is to present some estimates for the eigenvalues of the Dirac operator on compact Riemannian Spin manifolds with positive scalar curvature. For this, we use some tools of classical Riemannian geometry and some of its properties as Clifford algebra, spin groups, connections, covariant derivative and Dirac operator.

Key words: Dirac Operator, Friedrich's Inequality, Spin Structure.

Conteúdo

Introdução

Recentemente, em busca de novas ferramentas para o desenvolvimento da teoria de variedades, tentou-se fazer uso de um operador clássico da física, descoberto em 1927 por Paul Dirac, o operador de Dirac $\mathcal{D}$.

Paul Adrien Maurice Dirac foi um dos fundadores da teoria quântica, considerado um dos maiores físicos de todos os tempos ao lado de Newton, Maxwell, Einstein e Rutherford.

Em um primeiro momento pode parecer estranho esse operador ser praticamente desconhecido pelos geômetras, uma vez que operador de Laplace Δ, um operador diferencial de segunda ordem, tem sido amplamente utilizado nesse contexto. Isso pode ser consequência do operador de Laplace estar definido sobre qualquer variedade riemanniana e atuar sobre funções, enquanto que o operador de Dirac para ser definido sobre uma variedade riemanniana é necessária uma estrutura topológica específica, e sendo possível definí-la, ele age sobre secções de um fibrado vetorial não trivial. O operador de Laplace está intimamente relacionado com o operador de Dirac $\mathcal{D}$, veremos que o operador de Dirac é a "raiz quadrada"do operador de Laplace.

O operador de Dirac $\mathcal{D}$ é um operador diferencial de primeira ordem o qual tem grande importância na física-matemática, topologia e geometria. O primeiro surgimento significante do operador de Dirac na geometria foi na década de 1960 vinculado ao teorema do índice de Atiyah-Singer, o qual juntamente com o teorema de Lichnerowicz e as invariantes de Seiberg-Witten ilustram a importância desse operador na física como também na matemática.

O objetivo deste trabalho é determinar uma estimativa para os autovalores do operador de Dirac. Nos três primeiros capítulos formulamos os conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento da teoria e construiremos a estrutura essencial para definirmos o operador de Dirac. Além disso, veremos que $\mathcal{D}$ é um operador formalmente auto-adjunto com respeito ao produto L^2 de funções, portanto, para M compacta, $\mathcal{D}$ trata-se de um operador elíptico e auto-adjunto.

No capítulo 4 estudaremos algumas propriedades espectrais do operador de Dirac, as quais resultam na primeira estimativa para os autovalores λ do operador de Dirac $\mathcal{D}$ definido em uma variedade Riemanniana Spin compacta de dimensão n obtida por Thomas Friedrich em 1980. Para isso vamos utilizar o seguinte teorema:

Em uma variedade Riemanniana spin compacta de dimensão n (M, g) *com curvatura escalar positiva* S *temos*

i. *ker* $\mathcal{D} = \{0\}$.

ii. *se* $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$ *para um campo espinorial não trivial* $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, *então* $\lambda^2 > \frac{1}{4}S_0$, *onde* $S_0 := \min_M S$.

Para demonstrar o teorema necessitaremos da fórmula de Schödinger-Lichnerowicz.

Seja S *a curvatura escalar de* M, *então*

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}S\,\mathrm{Id}_{\Gamma(\Sigma M)}.$$

De posse dessas informações a desigualdade de Friedrich segue como corolário da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Dada uma variedade Riemanniana spin compacta (M, g), *então qualquer autovalor* λ *de* $\mathcal{D}$ *satisfaz a desigualdade de Friedrich*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}S_0,$$

onde $S_0 := \min_M S$ *onde* S *é a curvatura escalar.*

Esta cota inferior é ótima no sentido de existir uma classe bastante grande de variedades para as quais a mesma é atingida.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1 Álgebra de Clifford

Nesta seção vamos definir e apresentar propriedades básicas das álgebras de Clifford, e mostraremos como as mesmas podem ser usadas para dar uma descrição natural do grupo Spin, que terá grande importância na definição dos operadores de Dirac.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão n munido de uma forma bilinear não-degenerada g. A Álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$ associada a g em V é uma álgebra associativa com unidade, definida por:

$$\mathcal{C}\ell(V, g) = \frac{T(V)}{I(V, g)}$$

onde $T(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \otimes^n V$ é a álgebra tensorial de V e $I(V, g)$ é o ideal de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x + g(x, x)1$, para $x \in V$.

Observação 1.1. *Segue abaixo algumas propriedades das álgebras de Clifford:*

i. *A álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(V, g)$ *é a álgebra gerada por* V *com a relação* $x \cdot y + y \cdot x = -2\, g(x, y)\, 1$*, para todo* $x, y \in V$.

ii. *Se* $(e_1, ..., e_n)$ *é uma base* g*-ortonormal de* V*, então*

$$\{e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k} | 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n,\ 0 \leq k \leq n\}$$

é uma base de $\mathcal{C}\ell(V, g)$*, resulta que dim*$\mathcal{C}\ell(V, g) = 2^n$.

iii. *Existe um isomorfismo canônico de espaços vetoriais, entre a álgebra exterior e a álgebra de Clifford de* (V, g) *o qual é dado por:*

$$\Lambda^* V \longrightarrow \mathcal{C}\ell(V, g)$$

$$e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} \longmapsto e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k}.$$

Esse isomorfismo não depende da escolha da base.

Exemplo 1.1. *Seja* $\mathcal{C}\ell(V, g)$ *a álgebra de Clifford real associada ao produto escalar* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $(e_1, ..., e_n)$ *uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$*. Então:*

i. *uma base de* $\mathcal{C}\ell_1$ *é dada por* $\{1, e_1\}$*. Daí* $e_1^2 = -1$*, segue que* $\mathcal{C}\ell_1 \simeq \mathbb{C}$*.*

ii. *uma base de* $\mathcal{C}\ell_2$ *é dada por* $\{1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2\}$*. Daí* $e_1^2 = e_2^2 = (e_1 \cdot e_2)^2 = -1$*, segue que* $\mathcal{C}\ell_2 \simeq \mathbb{H}$*, onde* $\mathbb{H}$ *é o grupo dos quatérnios.*

Proposição 1.1. *(Propriedade Universal) Seja* A *uma álgebra associativa com unidade e* $f : V \longrightarrow A$ *uma função linear tal que para todo* $v \in V$

$$f(v)^2 = -g(v, v)1.$$

Então f *pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebra*

$$\widetilde{f} : \mathcal{C}\ell(V, g) \longrightarrow A.$$

Portanto, $\mathcal{C}\ell(V, g)$ *é a única* $\mathbb{K}$*-álgebra associativa com essa propriedade.*

Corolário 1.1. *Seja* $f : (V, g) \to (\overline{V}, \overline{g})$ *uma isometria entre espaços vetoriais euclidianos. Então* f *pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebra*

$$\widetilde{f} : \mathcal{C}\ell(V, g) \to \mathcal{C}\ell(\overline{V}, \overline{g}).$$

Observação 1.2. *Denotamos por* $O(V, g)$ *o espaço dos homomorfismos isométricos de um espaço vetorial euclidiano* (V, g)*. Na álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(V, g)$*, temos dois endomorfismos úteis:*

i. *A isometria* $-\mathrm{Id} \in O(V, g)$ *dá origem a*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{C}\ell(V, g) &\to \mathcal{C}\ell(V, g) \\ e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} &\mapsto (-1)^k e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \end{aligned}$$

como $\alpha^2 = \mathrm{Id}$, *obtemos a decomposição*

$$\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell^0(V, g) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V, g)$$

onde $\mathcal{C}\ell^i(V, g) := \{\varphi \in \mathcal{C}\ell(V, g) \mid \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$. *Claramente, temos* $\mathcal{C}\ell^i(V, g) \cdot \mathcal{C}\ell^j(V, g) \subset \mathcal{C}\ell^{i+j}(V, g)$ *para* $i, j \in \mathbb{Z}_2$, *então a álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(V, g)$ *é uma* $\mathbb{Z}_2$*-álgebra. O subespaço* $\mathcal{C}\ell^0(V, g)$ *é dito a parte par e* $\mathcal{C}\ell^1(V, g)$ *a parte ímpar de* $\mathcal{C}\ell(V, g)$.

ii. *Seja* ${}^t(\ ) : T(V) \to T(V)$ *o homomorfismo* $\mathbb{K}$*-álgebra definido por* ${}^t(x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_k}) = x_{i_k} \otimes \ldots \otimes x_{i_1}$. *Como* ${}^t(I(V, g)) \subset I(V, g)$, *existe um homomorfismo induzido*

$$\begin{aligned} {}^t(\ ) : \mathcal{C}\ell(V, g) &\to \mathcal{C}\ell(V, g) \\ x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} &\mapsto x_{i_k} \cdot \ldots \cdot x_{i_1}. \end{aligned}$$

Essa função é chamada de transposição.

Outra consequência da propriedade universal das álgebras de Clifford é a seguinte:

Proposição 1.2. *A álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell_n$ *é isomorfa a parte par de* $\mathcal{C}\ell_{n+1}$, *isto é,*

$$\mathcal{C}\ell_n \simeq \mathcal{C}\ell^0_{n+1}.$$

Demonstração. Desde que $\{e_1, ..., e_n\}$ e $\{e_1, .., e_{n+1}\}$ denotam, respectivamente, uma base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$, defina a aplicação linear

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathcal{C}\ell^0_{n+1} \\ e_i &\mapsto e_i \cdot e_{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição da função f, temos $f(e_i)^2 = -1$, então pelo Corolário 1.1 f é estendida para $\widetilde{f} : \mathcal{C}\ell_n \to \mathcal{C}\ell^0_{n+1}$. Claramente, $\widetilde{f}$ é uma aplicação linear injetiva entre espaços vetoriais de mesma dimensão, então a aplicação $\widetilde{f}$ é um isomorfismo. $\square$

A proposição a seguir fornece uma relação entre a multiplicação na álgebra de Clifford em termos do produto exterior e interior na álgebra exterior.

Proposição 1.3. *Para todo $\upsilon \in \mathbb{R}^n$ e todo $\varphi \in \mathcal{C}\ell_n$, temos*

$$\upsilon \cdot \varphi \simeq \upsilon \wedge \varphi - \upsilon \lrcorner \varphi \ \ e \ \ \varphi \cdot \upsilon \simeq (-1)^p(\upsilon \wedge + \upsilon \lrcorner \varphi),$$

onde $\wedge$ denota o produto exterior, $\lrcorner$ o produto interior e $\varphi \in \Lambda^p\mathbb{R}^n \subset \Lambda^*\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{C}\ell_n$.

Demonstração. Seja $\upsilon = e_j$ e $\varphi = e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_p}$.

i. Se existe i_k tal que $j = i_k$ então $\upsilon \wedge \varphi = 0$ e

$$\begin{aligned} \upsilon \lrcorner \varphi &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge e_{i_p} \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_{k-1}} \cdot e_{i_{k+1}} \cdot ... \cdot e_{i_p} \\ &= -\upsilon \cdot \varphi \\ &= (-1)^p \varphi \cdot \upsilon. \end{aligned}$$

ii. Se $j \notin \{i_1, ..., i_p\}$ então $\upsilon \lrcorner \varphi = 0$ e

$$\begin{aligned} \upsilon \wedge \varphi &= e_j \wedge e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} \simeq e_j \cdot e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_p} \\ &= \upsilon \cdot \varphi \\ &= (-1)^p \varphi \cdot \upsilon. \end{aligned}$$

Como as igualdades da afirmação são bilineares, a proposição está provada. □

1.2 Classificação das Álgebras de Clifford

Vamos fazer algumas afirmações básicas com respeito à classificação da álgebra de Clifford complexa. Para a álgebra de Clifford real, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4. *Para todo $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{C}\ell_{n+8} \simeq \mathcal{C}\ell_n \otimes \mathcal{C}\ell_8$.*

Esse fato combinado com a Proposição 1.2 e o conhecimento de $\mathcal{C}\ell_n$ para $1 \leq n \leq 8$, resulta na classificação das álgebras de Clifford real.

Definição 1.1. *$\mathbb{C}\ell_n$ denota a complexificação da álgebra de Clifford real $\mathcal{C}\ell_n$, isto é, $\mathbb{C}\ell_n = \mathcal{C}\ell_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*

Proposição 1.5. *As álgebras de Clifford complexas são isomorfas a $\mathbb{C}(2^m)$, ou a $\mathbb{C}(2^m) \otimes \mathbb{C}(2^m)$. Em particular:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\ell_{2m} &\simeq \mathbb{C}(2^m) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}), \\ \mathbb{C}\ell_{2m+1} &\simeq \mathbb{C}(2^m) \otimes \mathbb{C}(2^m) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m}), \end{aligned}$$

onde $\mathbb{C}(2^m)$ *denota o anel de* $2^m \times 2^m$ *matrizes complexas, o qual é uma álgebra sobre* $\mathbb{C}$*, e* $\Sigma_{2m} \simeq \mathbb{C}^{2^m}$*.*

Demonstração. Faremos apenas a prova para $\mathbb{C}\ell_{2m}$. Seja $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_{2m})$ a base canônica ortonormal de $\mathbb{R}^{2m}$ e $(z_j, \overline{z}_j)_{j=1,..,m}$ uma base de Witt de $\mathbb{R}^{2m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, isto é,

$$z_j := \frac{1}{2}(e_j \otimes 1 - e_{j+m} \otimes i) \text{ e } \overline{z}_j := \frac{1}{2}(e_j \otimes 1 + e_{j+m} \otimes i).$$

Esses vetores satisfazem para todo $j, k = 1, ..., m$ as equações

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(z_j, z_k) &= g_{\mathbb{C}}(\overline{z}_j, \overline{z}_k) = 0, \\ g_{\mathbb{C}}(\overline{z}_j, z_k) &= g_{\mathbb{C}}(z_j, \overline{z}_k) = \frac{1}{2}\delta_{jk}, \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} z_j \cdot_{\mathbb{C}} z_k + z_k \cdot_{\mathbb{C}} z_j &= 0 \\ \overline{z}_j \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z}_k + \overline{z}_k \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z}_j &= 0 \\ z_j \cdot_{\mathbb{C}} \overline{z}_k + \overline{z}_k \cdot_{\mathbb{C}} z_j &= -\delta_{jk}, \end{aligned}$$

desde que $x, y \in \mathbb{C}^{2m} \subset \mathbb{C}\ell_{2m}$: $x \cdot_{\mathbb{C}} y + y \cdot_{\mathbb{C}} x = -2g_{\mathbb{C}}(x, y)$. Por simplicidade escrevemos " $\cdot$ " para a multiplicação de Clifford complexa $\cdot_{\mathbb{C}}$.

Seja $\overline{\omega} = \overline{z}_1 \cdot ... \cdot \overline{z}_m$ e observe que $\overline{z}_k \cdot \overline{\omega} = 0$ para $1 \leq k \leq m$ pelas fórmulas acima. Denote $z_{L_r} := z_{l_1} \cdot ... \cdot z_{l_r}$, para $1 \leq l_1 < ... < l_r \leq m$. Então, defina

$$\Sigma_{2m} = span\{z_{L_r} \cdot \overline{\omega} | 1 \leq l_1 < ... < l_r \leq m, \ 0 \leq r \leq m\}.$$

Assim Σ_{2m} e $\mathbb{C}^{2^m}$ tem a mesma dimensão, portanto são isomorfos como espaços vetoriais complexos.

Definimos a função linear

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}\ell_{2m} &\to End(\Sigma_{2m}) \\ v = z_{J_p} \cdot \overline{z}_{K_q} &\mapsto \rho(v) = (z_{L_r} \cdot \overline{\omega} \mapsto z_{J_p} \cdot \overline{z}_{K_q} \cdot z_{L_r} \cdot \overline{\omega}). \end{aligned}$$

Segue que ρ é um homomorfismo de álgebras. Mostraremos agora que ρ é sobrejetiva.

Primeiro tome $\nu = z_j \cdot \bar{z}_1$ para $1 \leq j \leq m$:

$$\begin{aligned}\rho(\nu)(z_1 \cdot \overline{w}) &= z_j \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \overline{\omega} \\ &= z_j \cdot (-z_1 \cdot \bar{z}_1 - 1) \cdot \overline{\omega} \\ &= -z_j \cdot z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot \overline{\omega} - z_j \cdot \overline{\omega} \\ &= -z_j \cdot \overline{\omega}\end{aligned}$$

e para $2 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned}\rho(\nu)(z_l \cdot \overline{w}) &= z_j \cdot \bar{z}_1 \cdot z_l \cdot \overline{\omega} \\ &= z_j \cdot (-z_l \cdot \bar{z}_1) \cdot \overline{\omega} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Do mesmo modo segue o cálculo que a imagem sobre ρ de uma base vetorial de Σ_{2m} não contendo z_1 é zero, enquanto que a imagem de uma base vetorial contendo z_1 é o mesmo vetor com z_1 sendo substituído por z_j ou $-z_j$.

Denote $z_1 \cdot \ldots \cdot z_m$ por ω. Então, para elementos da álgebra de Clifford da forma

$$\nu = z_{J_p} \cdot \overline{\omega} \cdot \omega \cdot \bar{z}_{K_q} := z_{j_1} \cdot z_{j_p} \cdot \overline{\omega} \cdot \omega \cdot \bar{z}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \bar{z}_{k_q}$$

a função $\rho(\nu)$ substitui $z_{k_1} \cdot \ldots \cdot z_{k_q}$ por $\pm z_{j_1} \cdot z_{j_p}$ na base de vetores de Σ_{2m}, enquanto que $\rho(\nu)$ aplica todos os vetores da base de Σ_{2m} em zero. Então ρ é sobrejetiva, e desde que $\dim \mathbb{C}\ell_{2m} = \dim \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^m})$, ela é bijetiva. $\square$

As considerações acima, produzem a classificação das álgebras de Clifford complexas. Na tabela abaixo incluimos também as álgebras de Clifford reais:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}\ell_n$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}\ell_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

1.3 Representação Espinorial

Definição 1.2. *Em dimensão par, a representação espinorial complexa*

$$\rho : \mathbb{C}\ell_{2m} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$$

é o isomorfismo da Proposição 1.5, enquanto que em dimensão ímpar tal isomorfismo é definido como sendo a projeção sobre a primeira componente do isomorfismo *correspondente. Consideremos a seguinte definição.*

Definição 1.3. *A multiplicação de Clifford é a função*

$$\begin{aligned} m : \mathbb{C}\ell_{2m} \otimes \Sigma_{2m} &\to \Sigma_{2m} \\ \varphi \otimes \sigma &\mapsto \varphi \cdot \sigma := \rho(\varphi)(\sigma). \end{aligned}$$

Proposição 1.6. *Seja* $(e_1, ..., e_n)$ *uma base g-ortonormal de* $\mathbb{R}^n$*. O elemento de volume complexo*

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdot ... \cdot e_n$$

de $\mathbb{C}\ell_n$ *satisfaz*

i. $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ *e*

ii. $x \cdot \omega_{\mathbb{C}} = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}\ell_n$*,*

onde [ ] *representa a parte inteira.*

Isso resulta na seguinte proposição.

Proposição 1.7. *Se* $n = 2m$ *é par, a representação espinorial complexa, restrita a parte par da álgebra de Clifford,*

$$\rho^0 : \mathbb{C}\ell_{2m}^0 \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{2m})$$

admite uma decomposição

$$\Sigma_{2m} = \Sigma_{2m}^+ \oplus \Sigma_{2m}^-,$$

onde

$$\Sigma_{2m}^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \cdot \Sigma_{2m}.$$

Além disso, $\rho^0(x) : \Sigma_{2m}^{\pm} \to \Sigma_{2m}^{\mp}$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais para cada* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*.*

1.4 O Grupo Espinorial

Denote por $\mathcal{C}\ell_n^*$ o grupo multiplicativo de unidades da álgebra de Clifford real $\mathcal{C}\ell_n$, isto é, o subgrupo

$$\mathcal{C}\ell_n^* = \{\varphi \in \mathcal{C}\ell_n \mid \exists \varphi^{-1} \in \mathcal{C}\ell_n \text{ tal que } \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = 1\}.$$

Definição 1.4. *O grupo pin de* $\mathcal{C}\ell_n$ *é o subgrupo* Pin_n *de* $\mathcal{C}\ell_n^*$*, definido por*

$$\mathrm{Pin}_n = \{x_1 \cdot ... \cdot x_k \mid x_j \in \mathbb{R}^n, \|x_j\| = 1\}.$$

O grupo spin é definido como sendo

$$\mathrm{Spin}_n = \mathrm{Pin}_n \cap \mathcal{C}\ell_n^0.$$

Em outras palavras, o grupo spin é o subgrupo multiplicativo de $\mathcal{C}\ell_n^*$, *gerado por produtos pares de vetores de comprimento 1, isto é,*

$$\mathrm{Spin}_n = \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2k} \mid x_j \in \mathbb{R}^n, \|x_j\| = 1\}.$$

Observação 1.3. *Seguem abaixo alguns comentários importantes em relação ao grupo spin.*

i. *A inversa de um elemento* $\varphi = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{2k}} \in \mathrm{Spin}_n$ *é dada por* ${}^t(\varphi)$.

ii. *Denote por* $\mathfrak{Cl}_n^*$ *a álgebra de Lie do grupo de Lie* $\mathcal{C}\ell_n^*$ *e por* $\mathfrak{spin}_n$ *a álgebra de Lie de* Spin_n. *Então* $\mathfrak{Cl}_n^*$ *é isomorfo a* $\mathcal{C}\ell_n$, *o colchete de Lie*

$$[\varphi, \psi] = \varphi \cdot \psi - \psi \cdot \varphi$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}\ell_n$.

Nosso objetivo agora é mostrar que o grupo spin Spin_n é um recobrimento de 2-folhas de SO_n, $n \geqslant 3$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ad}_u : \mathcal{C}\ell_n & \to & \mathcal{C}\ell_n \\ y & \mapsto & u \cdot y \cdot u^{-1}, \end{array}$$

com $u \in \mathcal{C}\ell_n^*$.

Proposição 1.8. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, *a função* Ad_x *é um endomorfismo de* $\mathbb{R}^n$. *Além disso,* $-\mathrm{Ad}_x$ *é a reflexão através de* $x^\perp$.

Demonstração. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, temos $x^{-1} = -x$ em $\mathcal{C}\ell_n$. Então, para $y \in \mathbb{R}^n$,

$$-\mathrm{Ad}_x(y) = x \cdot y \cdot x = x \cdot (-x \cdot y - 2g(x, y)) = y - 2g(x, y)x.$$

□

Para $u = x_1 \ldots x_{2k} \in \mathrm{Spin}_n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_u(y) &= u \cdot y \cdot u^{-1} \\ &= u \cdot y \cdot^t u \\ &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2k} \cdot y \cdot x_{2k} \cdot \ldots \cdot x_1 \\ &= \mathrm{Ad}_{x_1} \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}_{x_{2k}}(y). \end{aligned}$$

Isto é uma composição de reflexões de $\mathbb{R}^n$, daí um elemento de SO_n. Pelo teorema de Cartan-Dieudonné, todo elemento de SO_n é um produto de um número par de reflexões. Temos então a proposição:

Proposição 1.9. *A função linear* $\mathrm{Ad}\,|_{\mathrm{Spin}_n}\colon \mathrm{Spin}_n \to SO_n$ *é sobrejetiva.*

$\mathrm{Ad}\,|_{\mathrm{Spin}_n}$ não é injetivo, mas temos a seguinte proposição.

Proposição 1.10. *A sequência*

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n \stackrel{\mathrm{Ad}}{\to} SO_n \to 1$$

é uma sequência exata curta. Além disso, se $n \geq 3$, Spin_n *é o recobrimento universal de* SO_n.

Demonstração. Um elemento $u \in \mathrm{Spin}_n \cup \mathcal{C}\ell_n^0$ pode ser decomposto em $u = a_0 + e_1 \cdot a_1$, tal que $a_0 \in \mathcal{C}\ell_n^*$ e $a_1 \in \mathcal{C}\ell_n^1$, a_0 e a_1 não contendo e_1. Então $a_0 \cdot e_1 = e_1 \cdot a_0$ e $e_1 \cdot a_1 \cdot e_1 = -e_1 \cdot e_1 \cdot a_1 = a_1$. Suponha agora que u está no núcleo de Ad, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Ad}_u(y) = y \Leftrightarrow u \cdot y = y \cdot u.$$

Para $y = e_1$, obtemos:

$(a_0 + e_1 \cdot a_1) \cdot e_1 = e_1 \cdot (a_0 + e_1 \cdot a_1)$, segue que, $a_0 \cdot e_1 + e_1 \cdot a_1 \cdot e_1 = e_1 \cdot a_0 - a_1$, assim $a_1 = -a_1$. O que resulta em $a_1 = 0$.

Portanto, u não contém e_1. Como o mesmo procedimento funciona para todos os e_j's, obtemos $u \in \{-1, 1\}$ e $\ker \mathrm{Ad} = \{-1, 1\}$.

Para provarmos que a cobertura não é trivial para $n \geq 3$, é suficiente encontrarmos um caminho contínuo em Spin_n, o qual liga -1 a 1. Podemos ver facilmente isso usando o seguinte caminho:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(\frac{t}{2})e_i + \sin(\frac{t}{2})e_j) \cdot (-\cos(\frac{t}{2})e_i + \sin(\frac{t}{2})e_j) \\ &= \cos(t) + \sin(t)e_i \cdot e_j. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Concluindo assim a demonstração da proposição. □

Proposição 1.11. *O homomorfismo* $\mathrm{Ad}_* : \mathfrak{spin}_n \to \mathfrak{so}_n(\simeq \Lambda^2\mathbb{R}^n)$ *entre as álgebras de Lie associadas a* Spin_n *e* SO_n *é um isomorfismo de espaços vetoriais. É dado por:*

$$(\mathrm{Ad}_*(e_i \cdot e_j))\,(y) = 2(e_i \wedge e_j)(y) = 2g(e_i, y)e_j - 2g(e_j, y)e_i,$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração. Considere o caminho definido pela equação (1.1). Como $\gamma(0) = 1$, $\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \gamma(t) = e_i \cdot e_j$ e $\mathfrak{spin}_n$ é isomorfo a $T_1\mathrm{Spin}_n$, podemos assumir que $e_i \cdot e_j$ encontra-se em $\mathfrak{spin}_n$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Nessas condições, temos que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}_*(e_i \cdot e_j))\,(y) &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\left(\mathrm{Ad}_{\gamma(t)}(y)\right) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(\gamma(t) \cdot y \cdot \gamma^{-1}(t)) \\
&= \gamma'(0) \cdot y \cdot \gamma(0) + \gamma(0) \cdot y \cdot (\gamma^{-1})'(0) \\
&= e_i \cdot e_j \cdot y - y \cdot e_i \cdot e_j \\
&= e_i \cdot e_j \cdot y - (-e_i \cdot y - 2g(e_i, y)) \cdot e_j \\
&= e_i \cdot e_j \cdot y + e_i \cdot (-e_j \cdot y - 2g(y, e_j)) + 2g(e_i, y)e_j \\
&= 2(e_i \wedge e_j)(y)
\end{aligned}$$

o que prova a fórmula desejada, e além disso, temos que Ad_* é sobrejetiva. Portanto, a dimensão de ambos, $\mathfrak{spin}_n$ e $\Lambda^2\mathbb{R}^n$, são iguais, ou seja, Ad_* é um isomorfismo. □

Enfatizamos que o grupo spin Spin_n é um grupo de Lie compacto, conexo, simplesmente conexo (para $n \geq 3$) de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.5 O Espaço de Espinores Complexos

Definição 1.5. *Seja* $\rho : \mathbb{C}\ell_n \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$ *uma representação irredutível de* $\mathbb{C}\ell_n$. *Então a restrição de* ρ *ao* Spin_n

$$\rho : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{Aut}(\Sigma_n)$$

é dita a representação espinorial complexa e Σ_n *o espaço de espinores complexos,* $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) = 2^{[\frac{n}{2}]}$.

A Proposição 1.7 pode ser reescrita da seguinte forma:

Teorema 1.5.1. *Se* $n = 2m$ *é par, a representação espinorial complexa de* Spin_{2m} *se decompõe como*

$$\rho = \rho^+ + \rho^-.$$

Isto é, o espaço dos espinores se decompõe em espinores positivos e negativos,

$\Sigma_{2m} = \Sigma_{2m}^{+} \oplus \Sigma_{2m}^{-}$, *onde* $\Sigma_{2m}^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \cdot \Sigma_{2m}$, *de modo que*

$$\rho^{\pm} : \mathrm{Spin}_{2m} \to \mathrm{Aut}(\Sigma_{2m}^{\pm}).$$

Além disso, para $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, *a aplicação*

$$\begin{aligned} x : \Sigma_{2m}^{\pm} &\to \Sigma_{2m}^{\mp} \\ \sigma &\mapsto x \cdot \sigma, \end{aligned}$$

é um isomorfismo. As funções $\rho^{\pm}$ *são irredutíveis e inequivalentes representações complexas de* Spin_{2m}.

Para $n = 2m + 1$ *ímpar, a representação espinorial é irredutível e não depende da projeção na componente de* $\mathrm{End}(\Sigma_{2m}) \oplus \mathrm{End}(\Sigma_{2m})$ *escolhido na Definição 2.1.*

O resultado abaixo será útil no capítulo 3 :

Proposição 1.12. *(Produto natural Hermitiano)Existe em* Σ_n, *um produto escalar natural Hermitiano tal que*

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (x \cdot \sigma_1, x \cdot \sigma_2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, *e* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$.

Demonstração. Seja Γ_n o subgrupo multiplicativo de $\mathcal{C}\ell_n^*$ gerado por uma base g-ortonormal $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Usando as relações $(-1)^2 = 1$, ${e_i}^2 = -1$ e $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, vimos que Γ_n é finito e $|\Gamma_n| = 2^{n+1}$. Agora escolha um produto Hermitiano arbitrário $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Σ_n e defina para $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$

$$(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\Gamma_n} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \sigma_1, \nu \cdot \sigma_2 \rangle.$$

Primeiro, para $e_i \in \Gamma_n$, segue

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2) &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot e_i \cdot \sigma_1, \nu \cdot e_i \cdot \sigma_2 \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \sigma_1, \nu \cdot \sigma_2 \rangle \\ &= (\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Então, para $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$, isto é, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, com $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
(x \cdot \sigma_1, x \cdot \sigma_2) &= \sum_i {x_i}^2 (e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2) + \sum_{i \neq j} x_i x_j (e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) \\
&= \sum_i {x_i}^2 (\sigma_1, \sigma_2) + \sum_{i<j} x_i x_j \big((e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) + (e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2) \big) \\
&= (\sigma_1, \sigma_2)
\end{aligned}$$

daí, para $i < j$, temos

$$\begin{aligned}
(e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) &= (e_i \cdot e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\
&= -(\sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\
&= -(e_j \cdot \sigma_1, e_j \cdot e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\
&= (e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\
&= (e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2).
\end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata é a seguinte:

Corolário 1.2. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e para todo* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$, *temos*

$$(x \cdot \sigma_1, \sigma_2) = -(\sigma_1, x \cdot \sigma_2).$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Então $(x \cdot \sigma_1, \sigma_2) = (x \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \sigma_1, \frac{x}{\|x\|} \cdot \sigma_2)$, portanto,

$$(x \cdot \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\|x\|^2} (x \cdot x \cdot \sigma_1, x \cdot \sigma_2) = -(\sigma_1, x \cdot \sigma_2).$$

□

Capítulo 2

Conexões em Fibrados Vetoriais e Principais

Conteúdo

2.1 Fibrados Vetoriais e Principais

Introduziremos a noção de fibrados vetoriais e principais. Definiremos forma de conexão e derivada covariante. Usaremos essas ferramentas para definir a derivada covariante no fibrado spin em termos da conexão de Levi-Civita no fibrado tangente.

Definição 2.1. *Um fibrado vetorial de posto* N *sobre* $\mathbb{K}$ *é uma tripla* (E, π, M) *tal que:*

i. *a projeção* $\pi : E \longrightarrow M$ *é uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis de dimensão finita,*

ii. *para todo* $x \in M$*, a fibra relativa a* x*,* $E_x := \pi^{-1}(x)$ *é um espaço vetorial N-dimensional sobre* $\mathbb{K}$*,*

iii. *para todo* $x \in M$*, existe uma vizinhança aberta* $U \subset M$ *e um difeomorfismo, chamado trivialização local,*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^N$$

tal que para todo $y \in U$,

$$\phi\,|_{E_y}: E_y \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{K}^N$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1. *Vejamos abaixo alguns exemplos de fibrados vetoriais.*

i. *O fibrado trivial* $M \times \mathbb{R}^n$.

ii. *O fibrado tangente* TM *de uma variedade diferenciável* M.

Proposição 2.1. *(Função Transição) Seja* (E, π, M) *um fibrado vetorial e* $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ *uma cobertura de trivializações locais. Então a função transição*

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(N, \mathbb{K}) =: GL_N,$$

definida por

$$\begin{array}{rcl} \phi_\beta \circ {\phi_\alpha}^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^N & \longrightarrow & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^N \\ (x, v) & \longmapsto & (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)v), \end{array}$$

satisfaz a condição de cociclo

$$\varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow GL_N$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in A$ *e todo* $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Proposição 2.2. *Seja* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *uma cobertura de* M *e seja*

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_N$$

uma função diferenciável satisfazendo

$$\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \longrightarrow GL_N.$$

Se definirmos

$$E := \left(\coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^N \right) \Big/ \sim$$

onde $\coprod$ *denota união disjunta, e a relação de equivalência* $\sim$ *definida por*

$$(x_\alpha, v) \sim (x_\beta, w) \Leftrightarrow x = x_\alpha = x_\beta \in U_\alpha \cup U_\beta \quad e \quad w = \varphi_{\beta\alpha}(x)v,$$

então E define um fibrado vetorial sobre $\mathbb{K}$ *de ordem* N.

Definição 2.2. *Dado um grupo de Lie* G, *um feixe de fibras G-principal é uma tripla* (P, π, M) *tal que*

i. $\pi : P \longrightarrow M$ *uma função suave entre variedades diferenciáveis de dimensão finita,*

ii. G *age de forma suave e livremente em* P *à direita, isto é,* $P \times G \longrightarrow P$ *satisfaz* $pg = p$ *se, e somente se* $g = e \in G$,

iii. *para todo ponto* $x \in M$, *existe uma vizinhança aberta* $U \subset M$ *e um difeomorfismo, chamado trivialização local,*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), \varphi(p)),$$

tal que

$$\phi(pg) = (\pi(pg), \varphi(pg)) = (\pi(p), \varphi(p)g)$$

para todo $p \in U$ *e* $g \in G$. *Em particular,* $\phi \mid_{\pi^{-1}(p)}$ *é um difeomorfismo da fibra* $P_p := \pi^{-1}(p)$ *em* $\{p\} \times G$ *o qual comuta com a ação de* G *em* P.

Para uma cobertura (U_α, ϕ_α) de trivializações locais, definimos como sendo a função transição $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ por

$$\begin{array}{rcl} \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G & \longrightarrow & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ (x, g) & \longmapsto & (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)g) \end{array}$$

e novamente obtemos a condição de cociclo $\varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$. Como na Proposição 2.2, podemos reconstruir a fibra do fibrado principal pelas funções transição.

Seja (P, π, M) uma fibra do fibrado G-principal. Tomamos uma representação de dimensão finita

$$\rho : G \to End(\Sigma)$$

de G em um espaço vetorial Σ e defina uma ação de G em $P \times \Sigma$ como sendo:

$$\begin{array}{rcl} (P \times \Sigma) \times G & \longrightarrow & P \times \Sigma \\ (p, v, g) & \longmapsto & (pg, \rho(g^{-1})v). \end{array}$$

Dividindo $P \times \Sigma$ pela relação de equivalência $(p, v) \sim (pg, \rho(g^{-1})v)$ obtemos o fibrado vetorial associado

$$E := P \times_\rho \Sigma = (P \times \Sigma)/\sim = (P \times \Sigma)/G.$$

As funções de transição de E são $\rho \circ \varphi_{\beta\alpha}$, onde $\varphi_{\beta\alpha}$ são funções de transição de P.

2.2 A Forma de Conexão e a Derivada Covariante

Definição 2.3. *Seja* (E, π, M) *um fibrado vetorial. Uma derivada covariante é uma função linear*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E),$$

a qual satisfaz a regra de Leibniz

$$\nabla(f\psi) = df \otimes \psi + f\nabla\psi.$$

Definição 2.4. *Seja* (P, π, M) *um feixe de fibras G-principal. Para qualquer ponto* $p \in P$*, existe uma injeção canônica*

$$\begin{aligned} \sim : \mathfrak{g} &\rightarrow T_pP \\ z &\mapsto \widetilde{z}_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=o}(p\exp(tz)). \end{aligned}$$

A imagem é dita um espaço vertical V_p *e é o espaço tangente à fibra* $\pi^{-1}(p)$*, isto é,* $V_p = Ker(\pi_*)$.

Definição 2.5. *Uma conexão em um feixe de fibras G-principal* (P, π, M) *é uma distribuição de espaços vetoriais n-dimensionais* $p \mapsto H_p \cup T_pP$*, do espaço horizontal tal que*

i. $T_pP = V_p \oplus H_p$*, e*

ii. *é G-invariante, ou seja,* $H_{pg} = (R_g)_*(H_p)$*, onde* $R_g : P \to P$*,* $p \mapsto pg$.

A projeção π *induz um isomorfismo* $\pi_*\Big|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}M$.

Proposição 2.3. *Seja* (P, π, M) *uma fibra do fibrado G-principal. A decomposição de* T_pP *por uma conexão nos permite definir uma 1-forma* ω *em* TP *com valores na álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G

$$\omega_p : T_pP = V_p \oplus H_p \overset{proj}{\rightarrow} V_p \overset{\sim^{-1}}{\rightarrow} \mathfrak{g}$$

que tem as seguintes propriedades

i. $\omega_p(\widetilde{z}) = z$*, onde* $\widetilde{z}$ *é como na Definição (2.4),*

ii. $R_g^*\omega = ad(g^{-1})\omega$*, isto é,*

$$\forall X \in \Gamma(TP),\ \omega((R_g)_*X) = ad(g^{-1})\omega(X),$$

onde $ad : G \to End(\mathfrak{g})$*,* $g \mapsto d\alpha_g$ *e* $\alpha_g : G \to G$*,* $a \mapsto gag^{-1}$.

Inversamente, uma 1-forma em TP *com valores em* $\mathfrak{g}$ *o qual satisfaz (i) e (ii) define uma conexão em* P *por* $H_p := \ker\omega_p$.

Para uma conexão 1-forma ω em uma fibra do fibrado G-principal (P, π, M), definimos uma derivada covariante em todo fibrado vetorial associado $E = P \times_\rho \Sigma$ como segue:

Tomando uma secção $\psi \in \Gamma(E)$, a qual é localmente dada por $\psi = [s, \sigma]$, onde $s \in \Gamma_U(P)$ é uma secção local em $U \subset M$ e $\sigma : U \to \Sigma$, uma função. Daí,

$$TU \xrightarrow{s_*} TP \xrightarrow{\omega} \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho_*} End(\Sigma),$$

podemos definir uma derivada covariante em E por

$$\nabla_X\psi := [s, X\sigma + \rho_*((\omega \circ s_*)(X))\sigma] \tag{2.1}$$

para qualquer $X \in TU$, onde $X\sigma$ denota a derivada de Lie de σ na direção de X.

Inversamente, dado um $\mathbb{K}$-fibrado vetorial (E, π, M) de posto N e uma derivada covariante ∇, consideramos N secções locais linearmente independentes de E

$$s = (\psi_1, ..., \psi_N) : U \to GLE,\ U \subset M \tag{2.2}$$

e defina 1-forma $\omega_{\beta\alpha}$ por

$$\nabla_X\psi_\alpha =: \sum_{\beta=1}^{N} \omega_{\beta\alpha}(X)\psi_\beta \tag{2.3}$$

para todo $X \in \Gamma(TU)$.

Agora, existe uma única forma de conexão ω no $GL(\mathbb{R}^N)$-fibra principal GLE tal que para qualquer secção local $s \in \Gamma_U(GLE)$

$$s^*\omega := \omega = (\omega_{\beta\alpha})_{1\leq\alpha,\beta\leq N} \in \mathfrak{g} = End(\mathbb{K}^N).$$

Note que para qualquer campo de vetores tangentes X, podemos definir

$$\omega(s_*X + \widetilde{z}) := (\omega_{\beta\alpha}(X)) + z.$$

Observação 2.1. *Seja o fibrado vetorial* E *munido com uma métrica* g *e uma conexão métrica* ∇*, isto é,*

$$Xg(\psi, \varphi) = g(\nabla_X\psi, \varphi) + g(\psi, \nabla_X\varphi),\ \forall\psi, \varphi \in \Gamma(E),\ X \in \Gamma(TM),$$

então a matriz correspondente de 1-formas $(\omega_{\beta\alpha})$ *é simétrica com respeito a um referêncial* *ortonormal arbitrário* $s = (\psi_1, ..., \psi_N) : U \to SOE$*. Portanto, é um elemento da álgebra de Lie* $\mathfrak{so}_N$ *de* SO_N*. Para provarmos isto tome* $X \in \Gamma(TM)$ *obtemos*

$$g(\nabla_X \psi_\alpha, \psi_\beta) = -g(\psi_\alpha, \nabla_X \psi_\beta)$$

para a conexão métrica ∇*. Então*

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\alpha}(X) &= g\left(\sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha}(X)\psi_\gamma, \psi_\beta\right) \\ &= g(\nabla_X \psi_\alpha, \psi_\beta) \\ &= -g(\psi_\alpha, \nabla_X \psi_\beta) \\ &= -\omega_{\alpha\beta}(X). \end{aligned}$$

2.3 A Curvatura

Para uma G-fibra principal (P, π, M) com forma de conexão ω, define a curvatura 2-forma Ω por:

$$\Omega \in \Gamma(\Lambda^2(TP) \otimes \mathfrak{g})$$

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)],\ X, Y \in \Gamma(TP).$$

Como na Observação 2.1, com respeito a secção local $s = (\psi_1, ..., \psi_N) : U \to SOE$, $U \subset M$, seja $\Omega = s^*\Omega$, então obtêm-se a seguinte relação

$$\Omega_{\alpha\beta} = (d\omega)_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{N} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta}.$$

Definição 2.6. *Seja* (E, π, M) *um fibrado vetorial com uma conexão métrica* ∇*. Defina o tensor curvatura*

$$\mathcal{R} : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes E),$$

onde

$$\widetilde{\nabla}(\alpha \otimes \psi) := d\alpha \otimes \psi - \alpha \wedge \nabla\psi. \tag{2.4}$$

Proposição 2.4. *Para uma secção local* $s = (\psi_1, ..., \psi_N) \in \Gamma_U(SOE)$ *temos*

$$\mathcal{R}\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \Omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta.$$

Demonstração. Pela definição de $\tilde{\nabla}$ e da equação (2.3), segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(\nabla(\psi_\alpha)) &= \widetilde{\nabla}\left(\sum_\beta \omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta\right) \\
&= \sum_\beta \left(d\omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta \wedge \left(\sum_\gamma \omega_{\gamma\beta} \otimes \psi_\gamma\right)\right) \\
&= \sum_\beta \left(d\omega_{\beta\alpha} - \sum_\gamma \omega_{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\beta\gamma}\right) \otimes \psi_\beta \\
&= \sum_\beta \left(d\omega_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma\alpha}\right) \otimes \psi_\beta \\
&= \sum_\beta \Omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. *A Definição 2.6 coincide com a usual, isto é,*

$$\mathcal{R}_{X,Y} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Demonstração. Tome as secções locais $X, Y \in \Gamma(TM)$, e $\psi \in \Gamma_U(E)$ então existe $\alpha_\beta \in \Gamma_U(T^*M)$ e $\psi_\beta \in \Gamma_U(E)$, onde $\beta = 1, ..., N$ tal que

$$\nabla\psi = \sum_\beta \alpha_\beta \otimes \psi_\beta.$$

Usando as equações (2.3) e (2.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(\nabla\psi)(X, Y) &= (\nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_{\nabla_X Y}\psi) - (\nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{\nabla_Y X}\psi) \\
&= \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X,Y]}\psi \\
&= \nabla_X(\sum_\beta \alpha_\beta(Y)\psi_\beta) - \nabla_Y \left(\sum_\beta \alpha_\beta(X)\psi_\beta\right) - \sum_\beta \alpha_\beta[X, Y]\psi_\beta \\
&= \sum_\beta \nabla_X(\alpha_\beta(Y)\psi_\beta) - \sum_\beta \nabla_Y(\alpha_\beta(X)\psi_\beta) - \sum_\beta \alpha_\beta[X, Y]\psi_\beta \\
&= \sum_\beta \left(X(\alpha_\beta(Y)) + \sum_\gamma \alpha_\gamma(Y)\nabla_X\psi_\gamma\right).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Estrutura Spin e o Operador de Dirac

Conteúdo

3.1 O Fibrado Espinorial

Neste capítulo discutiremos a noção de estrutura spin em uma variedade diferenciável de dimensão finita. Vamos calcular a expressão local da derivada covariante espinorial como também a curvatura espinorial. Daremos a definição do operador de Dirac e suas propriedades básicas e por fim analisaremos a fórmula de Schrödinger-Lichnerowicz.

Definição 3.1. *Seja* (M^n, g) *uma Variedade Riemanniana de dimensão n. Uma estrutura Spin em* M *é um par* $(\mathrm{Spin}M, \eta)$, *onde* $\mathrm{Spin}M$ *é um* Spin_n*-fibrado principal sobre* M *e* η *um recobrimento de 2-folhas tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}M \times \mathrm{Spin}_n \arrow[r] \arrow[dd, "\eta\times \mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}M \arrow[dd, "\eta"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & M \\
\mathrm{SO}M \times \mathrm{SO}_n \arrow[r] & \mathrm{SO}M \arrow[ur, "\pi"] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

As funções nas linhas são, respectivamente, a ação de Spin_n *e* SO_n *nos fibrados principais* $\mathrm{Spin}M$ *e* $\mathrm{SO}M$. *A existência de uma estrutura Spin em* M *é equivalente ao fato de que,* *para as funções de transição* $\varphi_{\beta\alpha}$ *de* SOM*, existe uma escolha de levantamentos para a função transição de* $SpinM$*, isto é, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}_n \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\ M \supset U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}"] \arrow[r, "\varphi_{\beta\alpha}"] & \mathrm{SO}_n \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

comuta e $\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}$ *satisfaz a condição de cociclo*

$$\widetilde{\varphi}_{\gamma\beta}\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha} = \widetilde{\varphi}_{\gamma\alpha}.$$

Isso, de qualquer forma, é equivalente a segunda classe de Stiefel-Whitney $\omega_2(M)$ sendo zero.

Exemplo 3.1. *Veja abaixo alguns exemplos de variedades spin:*

i. *A esfera* $\mathbb{S}^n$ *é uma variedade spin;*

ii. SO_n *é uma variedade spin;*

iii. *Toda variedade Riemanniana compacta orientável de dimensão menor ou igual a 3 é spin;*

iv. $\mathbb{R}P^n$ *é variedade spin se, e somente se,* $n \equiv 3 \mathrm{mod} 4$*;*

v. $\mathbb{C}P^n$ *é variedade spin se, e somente se,* $n = 2k + 1$.

Definição 3.2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão n.*

i. *O Fibrado Espinorial Complexo associado a estrutura Spin de* M *é o fibrado vetorial complexo*

$$\Sigma M := SpinM \times_\rho \Sigma_n,$$

onde $\rho : Spin_n \to Aut(\Sigma_n)$ *é a representação complexa* $Spin_n$, $\Sigma_n \simeq \mathbb{C}^N$ *e* $N = 2^{[\frac{n}{2}]}$. *Uma secção* $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ *é localmente dada por*

$$\psi|_U = [\widetilde{s}, \sigma],$$

onde $\widetilde{s} \in \Gamma_U(SpinM), U \in M$ *e* $\sigma : U \to \Sigma_n$.

ii. *A Multiplicação de Clifford em* ΣM *é a ação dada por*

$$\begin{aligned} m : TM \otimes \Sigma M &\to \Sigma M \\ X \otimes \psi = [\widetilde{s}, \alpha] \otimes [\widetilde{s}, \sigma] &\mapsto [\widetilde{s}, \alpha \cdot \sigma] =: X \cdot \psi, \end{aligned}$$

onde $\alpha \cdot \sigma$ *é a multiplicação de Clifford em* Σ_n *onde o fibrado tangente* TM *é visto como o fibrado vetorial associado* $TM \simeq \mathrm{Spin}M \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{R}^n$*.*

iii. *O produto natural Hermitiano em* ΣM *é definido por*

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot) : \Gamma(\Sigma M) \times \Gamma(\Sigma M) &\to C^\infty(M,\mathbb{C}) \\ \psi \otimes \varphi &\mapsto (\psi,\varphi), \end{aligned}$$

onde para todo $x \in M$*,* $(\psi,\varphi)_x := (\psi_x,\varphi_x)$ *é o produto natural Hermitiano em* Σ_n*(veja a Proposição 1.12).*

Com a ajuda do Corolário 1.2, é simples checar que para todo $X \in \Gamma(TM)$*,* ψ*,* $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$*, a multiplicação de Clifford e o produto Hermitiano em* ΣM *satisfaz a condição de compatibilidade*

$$(X \cdot \psi, \varphi) + (\psi, X \cdot \varphi) = 0. \tag{3.3}$$

3.2 A Conexão Levi-Civita Espinorial

Tomando um subconjunto aberto $U \subset M$ simplesmente conexo. Então qualquer secção local $s \in \Gamma_U(SOM)$ pode ser levantada por uma secção $\widetilde{s} \in \Gamma_U(\mathrm{Spin}M)$, isto é,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}M \arrow[d, "\eta"] \\ U \subset M \arrow[ur, "\widetilde{s}"] \arrow[r, "s"'] & SOM \end{tikzcd}$$

podemos definir uma conexão 1-forma $\widetilde{\omega}$ em $\mathrm{Spin}M$ como a única conexão 1-forma para a qual o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & T\mathrm{Spin}M \arrow[r, "\widetilde{\omega}"] \arrow[d, "\eta_*"] & \mathfrak{spin}_n \arrow[d, "\mathrm{Ad}_*"] \\ TU \subset TM \arrow[ur, "\widetilde{s_*}"] \arrow[r, "s_*"'] & TSOM \arrow[r, "\omega"'] & \mathfrak{so}_n \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

A conexão 1-forma ω é dada pela conexão Levi-Civita em (M,g).

Usando uma descrição local da derivada covariante ∇ em ΣM, tomando um referencial ortonormal $s = (e_1,...,e_n) \in \Gamma_U(SOM)$, $U \subset M$, e denote por:

$$\begin{aligned} \omega &:= s^*\omega = -\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j \\ \Omega &:= s^*\Omega = -\sum_{i<j} \Omega_{ij} e_i \wedge e_j, \end{aligned}$$

onde,

$$e_i \wedge e_j := g(e_i, \cdot)e_j - g(e_j, \cdot)e_i \tag{3.5}$$

é uma base de $\mathfrak{so}_n$. Então:

$$\omega_{ij}(X) = -g(\omega(X)e_i, e_j) = -g(\nabla_X e_i, e_j) \tag{3.6}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

Proposição 3.1. *Descrição local da derivada espinorial covariante* ∇ *e do tensor espinorial curvatura* $\mathcal{R}$.

i. *A conexão 1-forma levantamento* $\widetilde{\omega}$ *satisfaz*

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{s_*}(X)) := \widetilde{\omega}(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij}(X)e_i \cdot e_j. \tag{3.7}$$

ii. *Tomando uma base ortonormal* $\sigma_1, ..., \sigma_N$ *de* $\Sigma_N \cong \mathbb{C}$ *para obter uma secção local* $(\psi_\alpha)_{1\leq\alpha\leq N}$ *em* $SU(\Sigma M)$ *por*

$$\psi_\alpha := [\tilde{s}, \sigma_\alpha] \in \Gamma_U(\Sigma M).$$

Então a derivada espinorial covariante é dada localmente por:

$$\nabla\psi_\alpha = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla e_i, e_j)e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha. \tag{3.8}$$

iii. *Finalmente, se* R *denota o tensor curvatura de Riemann de um fibrado tangente, então para o tensor curvatura espinorial obtém-se:*

$$\mathcal{R}_{X,Y}\psi = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(R_{X,Y}e_i, e_j)e_i \cdot e_j \cdot \psi. \tag{3.9}$$

Demonstração. Primeiramente, da equação (3.4) e Proposição 1.11 segue que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}(X) &= (Ad_*^{-1} \circ \omega \circ s_*)(X) \\
&= -\sum_{i<j} \omega_{ij}(X)Ad_*^{-1}((e_i \wedge e_j)) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij}(X)e_i \cdot e_j.
\end{aligned}$$

Agora considere $\rho_* = \rho$ (onde a representação ρ é uma função linear da álgebra de Clifford ao espaço vetorial de endomorfismos $\mathtt{End}(\Sigma_n)$):

$$\begin{aligned}
\nabla\psi_\alpha &= [\widetilde{s}, \rho_*(\widetilde{\omega} \circ \widetilde{s_*})\sigma_\alpha], \\
&= [\widetilde{s}, \rho_*(-\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \cdot e_j)\sigma_\alpha], \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha, \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i<j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha, \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha.
\end{aligned}$$

E por fim o item (iii) segue diretamente da Proposição 2.5 e da equação (3.8). □

Proposição 3.2. *Compatibilidade da derivada espinorial covariante* ∇ *com a multiplicação de Clifford "$\cdot$" e o produto natural Hermitiano* $(\cdot,\cdot)$*:*

$$X(\psi, \varphi) = (\nabla_X \psi, \varphi) + (\psi, \nabla_X \varphi) \tag{3.10}$$

$$\nabla_X(Y \cdot \psi) = (\nabla_X Y) \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X \psi. \tag{3.11}$$

Demonstração. Tome $s = (e_1, ..., e_n)$ e ψ_α como na equação (3.8).

i. Para $\psi = \psi_\alpha$ e $\varphi = \psi_\beta$, para qualquer campo de vetores X, teremos

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \psi_\alpha, \psi_\beta) &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla_X e_i, e_j)(e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha, \psi_\beta) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla_X e_i, e_j)(\psi_\alpha, e_j \cdot e_i \cdot \psi_\beta) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla_X e_j, e_i)(\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta) \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} g(\nabla_X e_i, e_j)(\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta)
\end{aligned}$$

o qual combinado com o fato de $(\psi_\alpha, \psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ resulta em (3.10). Para secções arbitrárias usaremos bilinearidade juntamente com

$$\begin{aligned} X(f\psi,\varphi) &= (Xf)(\psi,\varphi)+fX(\psi,\varphi) \\ &= (Xf)(\psi,\varphi)+f(\nabla_X\psi,\varphi)+f(\psi,\nabla_X\varphi) \\ &= (\nabla_X(f\psi),\varphi)+(f\psi,\nabla_X\varphi) \end{aligned}$$

assim a equação (3.10) é verdade, se a fórmula já vale para ψ e φ.

ii. Primeiro note que:

$$e_i\cdot e_j\cdot e_k = e_i\cdot(-e_k\cdot e_j-2\delta_{jk}) = e_k\cdot e_i\cdot e_j+2\delta_{jik}e_j-2\delta_{jk}e_i.$$

Então, para $Y=e_i$ e $\psi=\psi_\alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla(e_k\cdot\psi_\alpha) &= \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla e_i,e_j)e_i\cdot e_j\cdot(e_k\cdot\psi_\alpha) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla e_i,e_j)e_k\cdot e_i\cdot e_j\cdot\psi_\alpha+\frac{1}{2}\sum_j g(\nabla e_k,e_j)e_j\cdot\psi_\alpha \\ &- \frac{1}{2}\sum_i g(\nabla e_i,e_k)e_i\cdot\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Podemos mudar i por j no último termo obtendo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\sum_{i,j} g(\nabla e_i,e_j)e_k\cdot e_i\cdot e_j\cdot\psi_\alpha+\sum_j g(\nabla e_k,e_j)e_j\cdot\psi_\alpha \\ &= e_k\cdot\nabla\psi_\alpha+(\nabla e_k)\cdot\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Para Y e ψ arbitrários. Concluindo o que queríamos demonstrar. □

3.3 O Operador de Dirac

No que se segue o referencial ortonormal local, denotado por $s=(e_1,...,e_n)\in\Gamma_U(SOM)$, $U\subset M$, satisfaz a relação

$$e_i\cdot e_j+e_j\cdot e_i=-2\delta_{ij},\quad 1\le i,j\le n.$$

Nas seções anteriores, vimos que associada a uma estrutura *Spin* de uma Variedade Riemanniana (M^n,g), existem três estruturas essenciais:

i. O Fibrado Espinorial $\Sigma M = Spin \times_\rho \Sigma_n$ com a multiplicação de Clifford

$$\begin{aligned} m : TM \otimes \Sigma M &\to \Sigma M \\ X \otimes \psi &\mapsto X \cdot \psi := \rho(X)\psi, \end{aligned}$$

onde ρ é a representação espinorial. Esta multiplicação pode ser estendida para

$$\begin{aligned} m : \Lambda^p(TM) \otimes \Sigma M &\to \Sigma M \\ \alpha \otimes \psi &\mapsto \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p} \cdot \psi, \end{aligned}$$

onde localmente

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p},$$

e $e^*_i = g(e_i, \cdot)$ é uma base dual de e_i.

ii. O produto natural Hermitiano $(\cdot, \cdot)$ em secções de ΣM.

iii. A conexão de Levi-Civita em ΣM.

Como vimos anteriormente, essas estruturas satisfazem as seguintes condições de compatibilidade:

$$\begin{aligned} (X \cdot \psi, \varphi) + (\varphi, X \cdot \psi) &= 0, \\ X(\psi, \varphi) - (\nabla_X \psi, \varphi) - (\psi, \nabla_X \psi) &= 0, \\ \nabla_X (Y \cdot \psi) - \nabla_X Y \cdot \psi - Y \cdot \nabla_X \psi &= 0, \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Agora temos condições de definir o operador de Dirac:

Definição 3.3. *(Operador de Dirac) O operador de Dirac é a composição da derivada covariante agindo em secções de ΣM com a multiplicação de Clifford*

$$\mathcal{D} := m \circ \nabla.$$

Localmente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \Gamma(\Sigma M) &\xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \xrightarrow{m} \Gamma(\Sigma M) \\ \psi &\mapsto \sum_{i=1}^{n} e^*_i \otimes \nabla_{e_i} \psi \mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi. \end{aligned}$$

Os lemas a seguir servirão de apoio para os resultados subsequentes.

Lema 3.1. *O comutador do operador de Dirac com a ação, através da multiplicação pontual no fibrado espinorial, de uma função* $f : M \to \mathbb{C}$, *é dado por*

$$[\mathcal{D}, f]\psi := df \cdot \psi, \ \ \psi \in \Gamma(\Sigma M).$$

Demonstração. Um cálculo local mostra que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}, f]\psi &= (\mathcal{D}f - f\mathcal{D})\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}(f\psi) - f\mathcal{D}\psi \\
&= \sum_{i=1}^{n} df(e_i)e_i \cdot \psi + f\mathcal{D}\psi - f\mathcal{D}\psi \\
&= df \cdot \psi.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *O operador de Dirac é um operador diferencial parcial de primeira ordem, o qual é*

i. *elíptico e*

ii. *formalmente autoadjunto com respeito a* $(\cdot, \cdot)_{L^2} := \int_M (\cdot, \cdot)\nu_g$ *se* M *é compacto, onde* ν_g *denota o elemento volume.*

Demonstração. Seja $x \in M, \xi \in T_x^*M\ \{0\}$ e $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $(df)_x = \xi$, então o símbolo principal, $\sigma_\xi(\mathcal{D}) : \Sigma_x M \to \Sigma_x M$, é dado por

$$\begin{aligned}
\sigma_\xi(\mathcal{D})(\psi(x)) &:= \mathcal{D}[(f - f(x))\psi](x) \\
&= (f\mathcal{D}\psi + df \cdot \psi - f(x)\mathcal{D}\psi)(x) \\
&= (df)_x \cdot \psi(x) \\
&= \xi \cdot \psi(x),
\end{aligned}$$

isto é, $\sigma_\xi(\mathcal{D})$ é uma multiplicação de Clifford por ξ. Para vermos que $\mathcal{D}$ é elíptico, temos que checar que, para todo $\xi \in T^*M/\{0\}$, $\sigma_\xi(\mathcal{D}) : \Sigma_x M \to \Sigma_x M$ é um isomorfismo. Mas,

$$\xi \cdot \psi = 0 \Rightarrow \xi \cdot \xi \cdot \psi = 0 \Leftrightarrow -\|\xi\|^2\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0.$$

O que prova que o operador de Dirac é elíptico.

Agora para mostrarmos que $\mathcal{D}$ é autoadjunto, escolhemos coordenadas normais a $x \in$

M, isto é, $(\nabla_{e_i}e_j)(x) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$, e calculamos primeiro

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}\psi, \varphi) &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi, \varphi\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\psi, e_i \cdot \varphi) \\
&= -\sum_{i=i}^{n} [e_i(\psi, e_i \cdot \varphi) - (\psi, \nabla_{e_i}(e_i \cdot \varphi))] \\
=\Big|_x &\quad -\sum_{i=1}^{n} e_i(\psi, e_i \cdot \varphi) + (\psi, \mathcal{D}\varphi),
\end{aligned}$$

usando a equação (3.10). A soma no último termo é a divergência de um campo de vetores complexos. Para isto, considere os dois campos de vetores $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ definido para todo $Y \in TM$ por

$$g(X_1, Y) + ig(X_2, Y) = (\psi, Y \cdot \varphi).$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
div X_1 + i div X_2 &= \sum_{k=1}^{n} g(\nabla_{e_k}X_1, e_k) + i \sum g(\nabla_{e_l}X_2, e_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (e_k g(X_1, e_k) - g(X_1, \nabla_{e_k}e_k)) + i \sum_{l=1}^{n} (e_l g(X_2, e_l) - g(X_2, \nabla_{e_l}e_l)) \\
=\Big|_x &\quad \sum_{k=1}^{n} e_k(g(X_1, e_k) + ig(X_2, e_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} e_k(\psi, e_k \cdot \varphi).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(\mathcal{D}\psi, \varphi) = -div X_1 - i div X_2 + (\psi, \mathcal{D}\varphi).$$

Essa equação já não depende da escolha de coordenadas, então podemos integrá-la sobre M e obtemos

$$\int_M (\mathcal{D}\psi, \varphi)\nu_g = \int_M (\varphi, \mathcal{D}\psi)\nu_g,$$

desde que $\partial M = \emptyset$. □

Lema 3.3. *Seja* $n = 2m$, *então*

i. $\mathcal{D} : \Gamma(\Sigma^{\pm}M) \to \Gamma(\Sigma^{\mp}M)$, *isto é, o operador de Dirac leva espinores positivos em espinores negativos e vice-versa.*

ii. Os autovalores de $\mathcal{D}$ *são simétricos com respeito a origem.*

Demonstração. Do Teorema 1.5.1, temos que $\Sigma_n^{\pm} := \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \cdot \Sigma_n$, então Σ_n^{+} é o subespaço, o qual multiplicado com $\omega_{\mathbb{C}}$ é a identidade. Portanto, para $\psi^+ \in \Gamma(\Sigma^+ M)$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}} \cdot \mathcal{D}\psi^+ &= \omega_{\mathbb{C}} \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi^+ = -\sum_{i} e_i \cdot \omega_{\mathbb{C}} \cdot \nabla_{e_i}\psi^+ \\ &= -\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi^+) = -\mathcal{D}\psi^+. \end{aligned}$$

Fica provado que o operador de Dirac leva espinores positivos em espinores negativos.

Agora, seja ψ um autovetor para $\mathcal{D}$, isto é, $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ e decomponha $\psi = \psi^+ + \psi^-$. Então

$$\mathcal{D}\psi^+ + \mathcal{D}\psi^- = \lambda\psi^- + \lambda\psi^-,$$

resulta de (i) que $\mathcal{D}^{\pm} = \lambda\psi^{\mp}$. Então o campo espinorial $\widetilde{\psi} := \psi^+ + \psi^-$ é um autovalor de $\mathcal{D}$ associado ao autovalor $-\lambda$, pois

$$\mathcal{D}\widetilde{\psi} = \mathcal{D}(\psi^+ - \psi^-) = \lambda\psi^- - \lambda\psi^+ = -\lambda(\psi^+ - \psi^-) = -\lambda\widetilde{\psi},$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.2. *Seguem abaixo alguns exemplos.*

i. *Seja* $M = \mathbb{R}^n$, $\Sigma\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N$, $N = 2^{[\frac{n}{2}]}$, *então todo campo espinorial* $\psi \in \Gamma(\Sigma\mathbb{R}^n)$ *é de fato uma função* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^N$, *e o operador de Dirac é dado por*

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \partial_i,$$

o qual age sobre funções diferenciáveis de $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{C}^N$*, onde* $\partial_i = \nabla_{e_i}$*. Então*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \partial_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\
&= -\sum_{i} \partial_i^2 + \sum_{i<j} e_i \cdot_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i>j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\
&= -\sum_{i} \partial_i^2 + \sum_{i<j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i<j} e_j \cdot e_i \cdot \partial_j \partial_i \\
&= -\sum_{i} \partial_i^2 + \sum_{i<j} e_i \cdot e_j \cdot (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \\
&= -\sum_{i} \partial_i^2 \\
&= \begin{pmatrix} \Delta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ii. *Considere* $M = \mathbb{R}^2$*, temos* $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}(2)$ *e a decomposição* $\Sigma_2 = \Sigma_2^+ \oplus \Sigma_2^- = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$*, onde* $\Sigma_2^+ = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e_1 + ie_2)$ *e* $\Sigma_2^- = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(1 - ie_1 \cdot e_2)$*. Então, cada campo espinorial* $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ *é dado por duas funções complexas* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$*, tal que*

$$\psi = f(e_1 + ie_2) + g(1 - ie_1 \cdot e_2).$$

O operador de Dirac torna-se então

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi &= (e_1 \cdot \partial_1 + e_2 \cdot \partial_2)[(e_1 + ie_2)f + (1 - ie_1 \cdot e_2)g] \\
&= -(\partial_1 + i\partial_2)f(1 - ie_1 \cdot e_2) + (\partial_1 - i\partial_2)g(e_1 + ie_2) \\
&= 2\left(-\partial_{\overline{z}} f(1 - e_1 \cdot e_2) + \partial_z g(e_1 + ie_2)\right),
\end{aligned}$$

onde $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ *e* $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$*. Isto é,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ -2 - \partial_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}$$

na base $\{(e_1 + ie_2), (1 - ie_1 \cdot e_2)\}$ *de* Σ_2*. Daí, o operador de Dirac* $\mathcal{D}$ *poderia ser considerado como uma generalização do operador Cauchy-Riemann.*

iii. *O fibrado de Clifford* $\mathcal{C}\ell M$

Para uma variedade Riemanniana (M^n, g)*, defina o fibrado vetorial* $\mathcal{C}\ell M$ *por*

$$(\mathcal{C}\ell M)_x = \textit{a álgebra de Clifford de } (T_xM, g_x).$$

Podemos ver este fibrado como o fibrado vetorial associado a SOM. *Pela Propriedade Universal 1.1, podemos estender*

$$\rho_n : SO_n \to SO(\mathbb{R}^n) \textit{ para } \widetilde{\rho}_n : SO_n \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}\ell_n),$$

de modo que

$$\mathcal{C}\ell M = SOM \times_{\widetilde{\rho}_n} \mathcal{C}\ell_n.$$

Da Proposição 1.8 temos

$$\upsilon \cdot \varphi \simeq \upsilon \wedge \varphi - \upsilon \lrcorner \varphi$$

pelo isomorfismo $\mathcal{C}\ell(T_xM, g_x) \xrightarrow{\simeq} \Lambda^*(T_xM)$. *A diferencial e a sua adjunta poderia ser escrito localmente como*

$$d = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge \nabla_{e_i} \textit{ e } \delta = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lrcorner \nabla_{e_i}.$$

Se definirmos o operador de Dirac como anteriormente, temos

$$\mathcal{D} := \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \simeq d + \delta.$$

Isto é a "raiz quadrada"do Laplaciano em $\Lambda^*(TM)$

$$\mathcal{D}^2 \simeq (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d = \Delta.$$

3.4 A Fórmula de Schrödinger-Lichnerowicz

Definição 3.4. *Extensão do produto natural Hermitiano* $(\cdot,\cdot)$ *e da derivada espinorial covariante* ∇.

i. *Estender o produto natural Hermitiano* $(\cdot,\cdot)$ *em* $\Gamma(\Sigma M)$ *para secções de* $T^*M \otimes \Sigma M$ *por*

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) : \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \times \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) &\to C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ (\alpha \otimes \psi, \beta \otimes \varphi) &\mapsto g(\alpha, \beta)(\psi, \varphi).\end{aligned}$$

onde a métrica g *estende-se a covetores por isomorfismo* $T^*M \simeq TM$ *induzido por* g. *Então, para* $\omega, \eta \in \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M)$, *obtemos*

$$(\omega, \eta) = \sum_{i=1}^{n} (\omega(e_i), \eta(e_i))$$

para qualquer base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ *em* T_xM.

ii. *Seja* ∇^* *a forma adjunta de* ∇, *isto é,*

$$\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \to \Gamma(\Sigma M)$$

tal que $(\nabla^*\Psi, \varphi)_{L^2} = (\Psi, \nabla\varphi)_{L^2}$ *para todo* $\Psi \in \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M)$ *e* $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Lema 3.4. *Em coordenadas locais* $(e_1, .., e_n)$ *normais a* $x \in M$, *temos:*

$$\nabla^*\nabla\psi = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi$$

para todo $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Demonstração. Pelo item (iii) da definição anterior temos que

$$(\nabla^*\nabla\psi, \varphi)_{L^2} = (\nabla\psi, \nabla\varphi)_{L^2} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\psi, \nabla_{e_i}\varphi)_{L^2}.$$

Como na prova do item (ii) do Lema 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\psi, \nabla_{e_i}\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} e_i(\nabla_{e_i}\psi, \varphi) - (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi, \varphi) \\ &= \operatorname{div} X_1 + i \operatorname{div} X_2 - \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\psi, \varphi), \end{aligned}$$

o qual, por integração, dá a condição necessária para ∇^* ser a adjunta formal de ∇. □

Proposição 3.3. *Seja* $\widetilde{\mathcal{R}} := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} e_i \cdot e_j \cdot \mathcal{R}_{e_i, e_j}$, *onde* $\mathcal{R}$ *é a curvatura espinorial. Então obtemos o quadrado do operador de Dirac:*

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^*\nabla + \widetilde{\mathcal{R}}.$$

Demonstração. Tomando coordenadas normais a $x \in M$, então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} e_i \cdot \left[(\nabla_{e_i} e_j) + e_j \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\right] \\
&= \Bigg|_x \sum_{i,j=1}^{n} e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} + \sum_{i<j}^{n} e_i \cdot e_j \cdot (\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}) \\
&= \nabla^*\nabla + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} e_i \cdot e_j \cdot \mathcal{R}_{e_i,e_j} \\
&= \nabla^*\nabla + \widetilde{\mathcal{R}}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.4.1. *(A Fórmula de Schrödinger-Lichnerowicz) Seja S a curvatura escalar de M, então*

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4} S \,\mathrm{Id}_{\Gamma(\Sigma M)}. \tag{3.12}$$

Demonstração. Pela proposição anterior, é suficiente mostrarmos que $\widetilde{\mathcal{R}} = \frac{1}{4} S \,\mathrm{Id}_{\Gamma(\Sigma M)}$. Seja Ric o tensor de Ricci do tensor Riemanniano R e use a Proposição 3.1 para $\mathcal{R}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \mathcal{R}_{e_i,e_j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \left(\frac{1}{4}\sum_{k,l} g(R_{e_i,e_j}e_k, e_l)e_k \cdot e_l\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{l}\left(\sum_{i,j,k} R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k\right) \cdot e_l \\
&= \frac{1}{8}\sum_{l}\frac{1}{3}\sum_{i\neq j\neq k}(R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl}) e_i \cdot e_j \cdot e_k \\
&\quad + \sum_{i,j} g(R_{e_i,e_j}e_i, e_l)e_i \cdot e_j \cdot e_i + \sum_{i,j} g(R_{e_i,e_j}e_j, e_l)e_i \cdot e_j \cdot e_j \cdot e_l \\
&= \frac{1}{8}\sum_{i,j,l}\left[g(R_{e_i,e_j}e_i, e_l)e_i - g(R_{e_i,e_j}e_j, e_l)e_i\right] \cdot e_l \\
&= \frac{1}{8}\left(\sum_{j,l} -Ric(e_j, e_l)e_j \cdot e_l - \sum_{i,l} Ric(e_i, e_l)e_i \cdot e_l\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\sum_{i,j} -Ric(e_i, e_j)e_i \cdot e_j - \sum_{i,j} Ric(e_i, e_j)e_i \cdot e_j\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{i,j} Ric(e_i, e_j)e_i \cdot e_j \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i} Ric(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{4}S
\end{aligned}
$$

onde usamos que $e_i \cdot e_j \cdot e_k = e_j \cdot e_k \cdot e_i = e_k \cdot e_i \cdot e_j$ para $i \neq j \neq k$. $\square$

Capítulo 4

Propriedades Espectrais do Operador de Dirac

Conteúdo

4.1 Autovalores do Operador de Dirac

Neste capítulo usaremos as noções dadas anteriormente para estimar uma cota inferior para os autovalores do operador de Dirac.

Teorema 4.1.1. *Em uma variedade Riemanniana spin compacta* (M, g) *de dimensão* n *com curvatura escalar positiva* S *temos*

i. $\ker \mathcal{D} = \{0\}$.

ii. *Se* $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$ *para um campo espinorial não-trivial* $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$*, então* $\lambda^2 > \frac{1}{4}S_0$*, onde* $S_0 := \min_M S$.

Demonstração. **i.** Pela fórmula de Schrödinger-Lichnerowicz (3.12), para qualquer campo espinorial $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$

$$\mathcal{D}^2\psi = \nabla^*\nabla\psi + \frac{1}{4}S\psi$$

pelo item (iii) do Lema 3.2 obtemos

$$(\mathcal{D}^2\psi, \psi)_{L^2} = \int_M (\mathcal{D}^2\psi, \psi)\nu_g. \tag{4.1}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int_M (\mathcal{D}^2\psi,\psi)\nu_g &= \int_M (\nabla^*\nabla\psi + \frac{1}{4}S\psi,\psi)\nu_g\\ &= (\nabla^*\nabla\psi,\psi)_{L^2} + \frac{1}{4}(S\psi,\psi)_{L^2}\\ &= (\nabla\psi,\nabla\psi)_{L^2} + \frac{1}{4}(S\psi,\psi)_{L^2},\end{aligned}$$

a última igualdade segue do item (ii) da Definição 2.4.

Daí,

$$\begin{aligned}\int_M (\mathcal{D}^2\psi,\psi)\nu_g &= \int_M (\nabla\psi,\nabla\psi)\nu_g + \frac{1}{4}\int_M (S\psi,\psi)\nu_g\\ &= \int_M |\nabla\psi|^2\nu_g + \frac{1}{4}\int_M S|\psi|^2\nu_g.\end{aligned}$$

Para prosseguirmos com a demonstração precisamos provar a afirmação abaixo:

$$\int_M (\mathcal{D}^2\psi,\psi)\nu_g = \int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g. \tag{4.2}$$

De fato, provaremos a afirmação quando $\psi \in \Lambda^*(TM)$, o caso geral segue analogamente, dessa forma $\mathcal{D} = d + \delta$

$$\begin{aligned}\int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g &= \int_M (\mathcal{D}\psi,\mathcal{D}\psi)\nu_g = \int_M ((d+\delta)\psi,(d+\delta)\psi)\nu_g\\ &= \int_M (d\psi,(d+\delta)\psi)\nu_g + \int_M (\delta\psi,(d+\delta)\psi)\nu_g\\ &= \int_M (d\psi,d\psi)\nu_g + \int_M (d\psi,\delta\psi)\nu_g + \int_M (\delta\psi,d\psi)\nu_g + \int_M (\delta\psi,\delta\psi)\nu_g\\ &= (d\psi,d\psi)_{L^2} + (d\psi,\delta\psi)_{L^2} + (\delta\psi,d\psi)_{L^2} + (\delta\psi,\delta\psi)_{L^2}.\end{aligned}$$

Resulta em

$$\begin{aligned}\int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g &= \int_M (\delta d\psi,\psi)\nu_g + \int_M (d\delta\psi,\psi)\nu_g\\ &= \int_M ((\delta d + d\delta)\psi,\psi)\nu_g\\ &= \int_M (\mathcal{D}^2\psi,\psi)\nu_g,\end{aligned}$$

provando assim a afirmação feita acima.

Pelo que vimos anteriormente

$$\int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \nu_g = \int_M (\mathcal{D}^2\psi, \psi)\nu_g = \int_M |\nabla\psi|^2\nu_g + \frac{1}{4}\int_M S|\psi|^2\nu_g.$$

Como $\int_M |\nabla\psi|^2\nu_g \geq 0$ e $\int_M \frac{1}{4}S|\psi|^2\nu_g > 0$, segue que $\int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g > 0$.
O que implica que $\mathcal{D}\psi$ não pode ser identicamente nulo, portanto, $\ker\mathcal{D} = \{0\}$.

ii. Seja $\mathcal{D}\psi = \lambda\psi$ para um campo espinorial não-trivial $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$. Então

$$\begin{aligned}
\int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g - \int_M \frac{1}{4}S|\psi|^2\nu_g &= \int_M |\lambda\psi|^2\nu_g - \int_M \frac{1}{4}S|\psi|^2\nu_g \\
&= \lambda^2\int_M |\psi|^2\nu_g - \frac{1}{4}\int_M S|\psi|^2\nu_g.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g - \int_M \frac{1}{4}S_0|\psi|^2\nu_g \geq \int_M |\mathcal{D}\psi|^2\nu_g - \int_M \frac{1}{4}S|\psi|^2\nu_g = \int_M |\nabla\psi|^2\nu_g \geq 0. \quad (4.3)$$

Assim,

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}S_0\right)\int_M |\psi|^2\nu_g \geq 0.$$

Segue que, $\lambda^2 - \frac{1}{4}S_0 \geq 0$. Suponha por contradição que $\lambda^2 - \frac{1}{4}S_0 = 0$, pela equação (4.3) obtemos que $\nabla\psi = 0$. Que implica em $\mathcal{D}\psi = 0$, o que gera um absurdo com o item (i). Portanto,

$$\lambda^2 > \frac{1}{4}S_0.$$

□

Teorema 4.1.2. *Dada uma variedade Riemanniana spin compacta* (M, g), *então qualquer autovalor* λ *de* $\mathcal{D}$ *satisfaz desigualdade de Friedrich*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}S_0, \quad (4.4)$$

onde $S_0 := \min_M S$ *como anteriormente.*

Demonstração. A prova é baseada na desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para um campo de espinores arbitrário $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ temos

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}\psi|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi|\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} 1|\nabla_{e_i}\psi|\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_i}\psi|^2 = n|\nabla\psi|^2.\end{aligned}$$

Pela fórmula de Schrödinger-Lichneriwicz obtemos

$$\int_M \frac{1}{n}|\mathcal{D}\psi|^2 \nu_g \leq \int_M |\nabla\psi|^2 \nu_g = \int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \nu_g - \frac{1}{4}\int_M S|\psi|^2 \nu_g. \tag{4.5}$$

O que implica que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\int_M |\mathcal{D}\psi|^2 \nu_g \geq \frac{1}{4}\int_M S|\psi|^2 \nu_g.$$

Para $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ não trivial, segue que

$$\lambda^2 \int_M |\psi|^2 \nu_g \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}\int_M S|\psi|^2 \nu_g \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}S_0 \int_M |\psi|^2 \nu_g.$$

Portanto,

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}S_0,$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 4.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana spin compacta tal que sua curvatura escalar $S \geq S_{\mathbb{S}^n(1)} = n(n-1)$. Então qualquer autovalor λ de $\mathcal{D}$ satisfaz*

$$|\lambda| \geq \frac{n}{2}.$$

Observação 4.1. *Se $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ é um auto-espinor para o qual a igualdade abaixo é satisfeita*

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}S_0,$$

então ψ satisfaz a equação "twistor"

$$\nabla_X\psi + \frac{1}{n}X \cdot \mathcal{D}\psi = 0,$$

para todo $X \in TM$, o qual resulta na equação de Killing

$$\nabla_X\psi + \frac{\lambda}{n}X \cdot \psi = 0, \quad \forall\, X \in \Gamma(TM),$$

desde que ψ é um auto-espinor.

Demonstração. No caso da igualdade em (4.4), obtemos por Cauchy-Schwarz

$$e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi = e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi, \qquad \forall\, i, j,\ 1 \leq i, j \leq n,$$

o que equivale a

$$\forall\, i, 1 \leq i \leq n, \qquad \mathcal{D}\psi = n e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi$$

que resulta em

$$\nabla_{e_i}\psi + \frac{1}{n} e_i \cdot \mathcal{D}\psi = 0.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M. F.; BOTT, R.; SHAPIRO, A. A. Clifford modules, *Topology*, v.3, p.3-38, 1964.

[2] FRIEDRICH, T. *Dirac operators in Riemannian geometry.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2000. (Graduate studies in mathematics, v.25)

[3] GINOUX, N. *The Dirac spectrum.* Berlin: Springer, 2009.(Lecture notes in mathematics, v.1976)

[4] HIJAZI, O. *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures.* Preprint.

[5] HITCHIN, N. *Harmonic spinours.* Adv. in Math, v.14, p.1-55, 1974.

[6] JACOBSON, N. *Lie algebras.* New York: Dover Publications, 1962.

[7] LAWSON, H. B.; MICHELSOHN, M. L. *Spin Geometry.* New Jersey: Princeton University Press, 1989.

[8] LEÃO, R. F. *Auto-valores do operador de Dirac e do laplaciano de Doubeault.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[9] LICHNEROWICZ, A. *Spineurs harmoniques.* C.R. Acad. Sci. Paris, v.257, p.7-9, 1963.

[10] ROLDÁN, A. F. *Hipersuperficies y Operador de Dirac.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade de Granada, 2003.