UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Eurípedes Carvalho da Silva

Variedades Riemannianas Folheadas por Hipersuperfícies (n-1)-umbílicas

FORTALEZA
2012

Eurípedes Carvalho da Silva

Variedades Riemannianas Folheadas por Hipersuperfícies (n-1)-umbílicas

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gevarsio Colares.

FORTALEZA

2012

Silva, Eurípedes Carvalho.

O47h Variedades Riemannianas folheadas por Hipersuperfícies (n-1)-umbílicas/ Eurípedes Carvalho da Silva. −Fortaleza: 2012.

xxf.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gevarsio Colares

Área de concentração: Matemática

Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, 2012.

1- Geometria Diferencial. I. Colares, Antonio Gevarsio Colares(Orient.)

CDD XXX.XXX

folha de aprovação

Dedico este trabalho a minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, saúde, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

A minha mãe Lúcia pelo amor, carinho e dedicação. Bem como ao meu pai Cândido, pelo carinho que sempre tivera por mim.

A minha família que de algum modo me deram força para esta vitória.

A minha noiva Natália de Araújo Uchôa, que com determinação, amor e carinho esteve sempre ao meu lado me dando força e incentivo para chegar até o final deste trabalho.

Ao meu orientador professor Gervásio Colares, pela sua orientação, determinação, paciência e apoio sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Abdenago Barros, Sebastião Carneiro e Pacelli Bessa por participarem da banca.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará. Em especial, aos professores João Lucas, Abdênago Barros, Luquésio, Levi, Alexandre, Alberto, Mercuri, Caminha e Fábio pelo apoio e ajuda.

Aos alunos da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, aos colegas, Flávio, Breno, Rui, Leonardo, Rafael, Anderson, Disson, Chaves, Tiarlos, Laerte, Loeste, Luiz, Ernani, Ivan, Leandro, pelo companheirismo. Em especial agradeço a Nazarendo, João e Edson que estiveram sempre dispostos a me ajudar.

Aos professores da Universidade Regional do Cariri e amigos. Em especial aos colegas Mário, Wilson, Paulo Cesar, Humberto, Liane, Luiz Antônio.

Aos amigos de graduação Genilson, Jamerson, Cícero e Else pela amizade. Também não poderia esquecer de Eduardo Landim por ser responsável pela minha paixão matemática.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que de alguma maneira contribuíram para que esse momento se realizasse.

....

Resumo

Nesta Dissertação, definimos campos de vetores parcialmente conformes fechados e usámos para dar uma caracterização de variedades Riemannianas que admitem este tipo de campos como alguns produtos especiais warped folheados por hipersuperfícies (n - 1)-umbílicas. Exemplos são descritos em formas espaciais. Em particular, campos de vetores parcialmente conformes fechados em espaços euclidianos estão associadas à folheações mais simples dada por hiperesferas, hiperplanos ou cilindros coaxiais. Finalmente, para variedades que admitem tais campos de vetores, impondo condições para uma hipersuperfície ser (n - 1)-umbílica, ou, em particular, uma folha da folheação correspondente.

Palavras chaves: campo de vetores, folheações, hipersuperfícies (n-1)-umbílicas

Abstract

In this dissertation we define closed partially conformal vector fields and use them to give a characterization of Riemannian manifolds which admit this kind of fields as some special warped products foliated by (n - 1)-umbilical hypersurfaces. Examples are described in space forms. In particular, closed partially conformal vector fields in Euclidean spaces are associated to the most simple foliations given by hyperspheres, hyperplanes or coaxial cylinders. Finally, for manifolds admitting such vector fields, we impose conditions for a hypersurface to be (n - 1)-umbilical, or, in particular, a leaf of the corresponding foliation.

Keywords: vector fields, foliations, (n-1)-umbilical hypersurfaces

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação é uma apresentação da teoria dos campos vetoriais parcialmente conformes fechados em variedades riemannianas. Em seguida são provados com detalhes os resultados obtidos por A. G. Colares e O. Palmas contidos na referência [7].

Variedades Riemanniana e Lorentziana que admitem um campo de vetores parcialmente conforme fechado têm sido estudadas em grande parte nos últimos anos por (ver [15], [16] e [1], por exemplo). Esta condição está associada a variedades que podem ser expressas como um produto warped e para a existência de uma folheação por hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante.

Por outro lado, é de conhecimento que em formas espaciais Riemannianas existem muitas hipersuperfícies com curvatura média constante que não são totalmente umbílicas. Por exemplo, em [18] e [6], os autores construíram hipersuperfícies de rotação em formas espaciais com curvatura $r-$ésima constante e sendo $(n-1)-$ umbílicas, ou seja, com $n-1$ curvaturas principais iguais. Veja também [13] e [14]. Essas hipersuperfícies $(n-1)-$umbilícais foram estudadas em [11], no caso compacto. Eles pertencem à classe mais ampla de subvariedades $k-$umbílicais descrito em [4] e [8] como envelopes de esferas.

Temos motivação para a seguinte pergunta:

Dada uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, existe um campo de vetores em $\overline{M}^{n+1}$ que determina uma folheação por hipersuperfícies $(n-1)-$umbílicais?

Também temos, uma pergunta natural:

Em uma tal variedade folheada, quais condições garantem que uma hipersuperfície com curvatura média constante é $(n-1)-$umbílica ou, em particular, uma folha da folheação?

Aqui analisamos estes dois problemas. Após as preliminares, no capitulo 3 nós definimos a noção-chave: um campo de vetores K definido em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{\nabla})$ é parcialmente conforme fechado se existir um campo de vetores unitários $W \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonal a K e funções $\phi, \psi : \overline{M} \to \mathbb{R}$ tais que $\overline{\nabla}_X K = \phi X$ para $\langle X, W\rangle = 0$ e $\overline{\nabla}_W K = \psi W$ ou, equivalentemente,

$$\overline{\nabla}_X K = \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Em seguida, provaremos que esta é a ferramenta certa para responder a nossa primeira pergunta(veja Teorema 3.3).

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana possuindo um campo de vetores parcialmente conforme fechado K. Então a distribuição $K^\perp$ definida no conjunto $M\backslash\mathcal{Z}(K)$ é involutiva em cada folha da folheação $K^\perp$ e é uma hipersuperfície $(n-1)-$umbílica com $n-1$ curvaturas principais constantes e iguais.

Neste resultado, $K^\perp$ é a folheação associada à distribuição definida por tomar o complemento ortogonal de K.

Entre alguns outros fatos básicos, provamos condições em que as folhas de $K^\perp$ tem curvatura média constante (veja a Proposição 17).

No Capitulo 3, mostramos a existência de um campo de vetores parcialmente conforme fechado em um subconjunto aberto das formas espaçiais Q_c^{n+1} com curvatura constante e note que estes subconjuntos abertos podem ser escritos como um produto warped da forma $J \times (I \times_f P^{n-1})$. A relação entre campos de vetores parcialmente conforme fechadas e produtos warped é reforçada provando-se que uma variedade admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado (com uma condição adicional) deve ter esta estrutura de produto. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado (veja Teorema 4.1):

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana.

1. *Se $\overline{M} = J \times (I \times_f P^{n-1})$, então $\overline{M}$ admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado.*

2. *Se $\overline{M}$ admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K e o campo de vetores associado W conforme fechado, então localmente $\overline{M}$ é isométrico a $\overline{M} = J \times (I \times_f P^{n-1})$.*

Como consequência, quando o espaço ambiente é uma forma espacial, damos uma descrição das folheações dada por campos de vetores parcialmente conformes fechados, como se segue (veja Corolário 2 e Definição 14):

Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado definido em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Suponha adicionalmente que W é conforme fechado. Então a folheação associada a $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ é uma folheação por hiperplanos, hiperesferas ou tubos.

Vale a pena notar que, no contexto de imersões conformalmente flat, em [11] é dada uma descrição completa de hipersuperfícies compactas $(n-1)-$umbílicas em formas espaciais.

No Capitulo 3 voltamos ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e daremos uma descrição das folheações cujas folhas têm curvatura média constante e estão associados a campos de vetores parcialmente conformes fechados, como se segue (veja Teorema 3.4):

Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde as folhas são completas e tem curvatura média constante. Então a *folheação $\mathcal{K}^{\perp}$ é uma folheação por hiperplanos, hiperesferas ou por cilindros coaxiais.*

No Capitulo 4, responderemos à primeira parte da nossa segunda pergunta: para estabelecer condições para uma hipersuperfície mergulhada a ser $(n-1)-$umbílica, como se segue (Veja Teorema 4.2):

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de ricci não-negativa a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K e campo associado W. Seja M uma hipersuperfície de $\overline{M}$ transversal em todo o K, e N um campo de vetores normal unitário a M. Suponha que a direção determinada por $W^* = W - \langle W, N\rangle N$ é uma direção principal de M e que através de cada ponto de M passa uma subvariedade compacta $(n-1)-$dimensional de M, em toda parte ortogonal a W^*, e uma hipersuperfície totalmente umbílica M que tem curvatura média constante relativa a N. Então M é $(n-1)-$umbílica.

Finalmente, no Capitulo 5 respondemos a última parte da nossa segunda questão, isto é, damos condições para uma hipersuperfície com curvatura média constante ser uma folha da folheação determinada por um campo de vetores parcialmente conforme fechado, assim sendo $(n-1)-$umbílica.

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com campo vetores associado W tais que W é conforme fechado, pelo Teorema 4.1, $\overline{M}$ pode ser expresso localmente como $J \times (I \times_f P^{n-1})$. Denotamos $\overline{M}_t = \{t\} \times (I \times_f P^{n-1})$. Vamos supor, adicionalmente, que o logaritmo da função f do produto warped é convexa. Nosso resultado é o seguinte (veja Teorema 5.1):

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechados K com o campo de vetores associado conforme fechado W, tal que $\overline{M}$ é localmente da forma $J \times I \times_f P^{n-1}$ com $\log f$ convexo. Seja M uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}$, tranversal em toda parte a K, com curvatura média constante em $\overline{M}$. Suponha que existe $t \in J$ tal que

M_t é uma hipersuperfície compacta de $\overline{M}_t$ com curvatura média constante. Suponha adicionalmente a existência de um ponto $p \in M_t$ tal que

1. *O vetor unitário $N(p)$ é normal a M em p é igual a o vetor unitário $\widehat{K}(p)$ normal a folha $\mathcal{K}$ passando por p,*

2. *Localmente, M está acima da folha de $\mathcal{K}^{\perp}$ passando por p com respeito de K, isto é, existe uma vizinhança U de p em M tal que cada ponto $q \in U$ tem a forma $q = \phi_s(q')$, onde q' é mencionado na folha, $s \geq 0$ e ϕ_s é o fluxo de K,*

3. *A derivada de $\langle N, W \rangle$ com respeito ao vetor $W(p)$ é positiva.*

Então M coincide localmente com a folha de $\mathcal{K}^{\perp}$ passando por p. Em particular, localmente M é $(n-1)$-umbílica. Além disso, se a folha de $\mathcal{K}^{\perp}$ passando por p tem curvatura média constante, esta coincide globalmente com M.

Capítulo 2

Preliminares

Neste trabalho iremos considerar $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$ e classe C^∞, com métrica $\langle , \rangle$, conexão $\overline{\nabla}$, tensor curvatura $\overline{R}$ e $\mathcal{D}(\overline{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\overline{M}$. Se $p \in \overline{M}$ então $T_p\overline{M}$ denotará o espaço tangente a $\overline{M}$ e $T\overline{M}$ o fibrado tangente a $\overline{M}$ em p. Também, $\mathcal{X}(\overline{M})$ é o módulo dos campos de vetores definido em $\overline{M}$. Para subvariedades de $\overline{M}$ denotaremos por M e sua conexão é simbolizada por ∇. Todas as variedades são supostas serem conexas, incluindo a folha associada a alguma folheação.

Para cada campo $K \in \mathcal{X}(\overline{M})$ denotamos por $K^\perp$ a $n-$dimensional distribuição definida em cada ponto tomando o complemento ortogonal de K. Neste contexto, se a distribuição é involutiva, denotaremos por $\mathcal{K}^\perp$ a correspondente variedade integral.

Vamos denotar por $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa, simplismente conexa com curvatura constante c. Isto é, para $c = 0$ temos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, para $c > 0$ temos a esfera $\mathbb{S}_c^{n+1}$, e para $c < 0$ temos o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_c^{n+1}$.

2.1 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Definição 1. *Seja $f \in \mathcal{D}(\overline{M})$. O gradiente de f, denotado por* $\text{grad} f$*, é o campo de vetores em $\overline{M}$, definido pela seguinte condição:*

$$\langle \text{grad} f, X \rangle = X(f), \qquad \forall X \in T\overline{M}.$$

Decorre da definição que se $f, g \in \mathcal{D}(M)$ então:

1. $\text{grad}(f+g) = \text{grad} f + \text{grad}\ g$
2. $\text{grad}(fg) = g\text{grad} f + f\text{grad}\ g$

Definição 2. *Seja $X \in T\overline{M}$. A divergência de X é a função $divX : \overline{M} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$divX(p) = Tr[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde Tr significa o traço da aplicação.

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $div(X+Y) = divX + divY$
2. $div(fX) = fdivX + \langle \text{grad} f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in TM$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$.

Teorema 2.1. (Teorema da Divergência). *Seja $X \in C^1(\overline{M}), \overline{M}$ uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Então*

$$\int_{\overline{M}} divX\, d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \langle X, \xi \rangle\, dS,$$

onde ξ é o campo unitário normal a $\partial\overline{M}$ apontando para fora de $\overline{M}$.

Definição 3. *Seja $f \in \mathcal{D}(\overline{M})$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : \mathcal{D}(\overline{M}) \to \mathcal{D}(\overline{M})$ definido por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, temos :

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$
2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \text{grad} f, \text{grad } g\rangle,$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(\overline{M})$.

Observação 1. (Referencial móvel) *Seja $\overline{M}^n$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, e $p \in \overline{M}$. Então existe uma vizinhança $U \subset \overline{M}$ de p e n campos de vetores linearmente independentes $E_1, \ldots, E_n \in T\overline{M}$ ortogonais, tais que, $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}, \forall i, j \in 1, \ldots, n$. Denominaremos $E_1, ..., E_n$ referencial ortonormal local.*

Proposição 1. *Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em $\overline{M}$, então,*

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

Demonstração. Escrevendo $\text{grad} f = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, temos que

$$E_j(f) = \langle \text{grad} f, E_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i, E_j \right\rangle = a_j.$$

Logo,

$$\text{grad} f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i.$$

□

Proposição 2. *Se* $X = \sum X_i E_i$*, onde* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *é um referencial local em* $\overline{M}$*, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle).$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j E_j \right), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle E_i(X_j) E_j, E_i \rangle + \langle X_j \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, tem-se que
$0 = E_i \langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} E_j \rangle$, ou seja, $\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle$.

Daí,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle). \end{aligned}$$

□

Definição 4. *Seja* $f \in \mathcal{D}(\overline{M})$*. Definimos a hessiana de* f *em* $p \in M$ *como o operador linear* $Hessf : T_pM \to T_pM$*, dado por*

$$(Hessf)Y = \nabla_Y (\text{grad} f), \quad \forall Y \in T\overline{M}.$$

Podemos considerar $Hessf$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in T\overline{M}$, temos

$$(Hessf)(X, Y) = \langle (Hessf)(X), Y \rangle.$$

Proposição 3. *Se* $f : \overline{M}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $p \in \overline{M}$, *então* $(Hessf)p : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [17]. □

2.2 Imersões Isométricas

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+m$, isto é, dado $p \in M^n$ temos que $d\psi_p : T_pM \to T_{\psi(p)}\overline{M}$ é injetiva. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: Se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle d\psi_p(v_1), d\psi_p(v_2)\rangle_{\psi(p)}$. Nesta situação, ψ passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$.

2.2.1 A segunda forma fundamental

Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Dado $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ contendo p tal que $\psi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $\psi(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \subset \overline{M} \to V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ em uma aberto V de $\mathbb{R}^{n+m}$, tal que φ aplica difeomorficamente $\psi(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Para simplificar a notação, identificamos U com $\psi(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $d\psi_q(v) \in T_{\psi(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \quad e \quad (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

Denotando a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$, então se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}.$$

É possível provar que ∇ é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por ψ.

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $\psi : M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} Y,$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disto, se $\overline{Y}_1$ é outra extensão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto, $B(X,Y)$ está bem definida. No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $\psi(U) \approx U$.

Proposição 4. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX,Y) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, teremos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{f}\overline{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em M, $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X,Y)$, isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Como em M, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X,Y]$, concluímos que $B(X,Y) = B(Y,X)$.

□

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

é pela Proposição 4, uma forma bilinear simétrica.

Definição 5. *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de ψ em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^\perp$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta, chamada *aplicação de Weingarten*, $A_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle.$$

Proposição 5. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então, $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X, Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$.

□

Sejam K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidas por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

$$\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\langle R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{X}, \overline{Y}\rangle}{\|\overline{X}\|^2\|\overline{Y}\|^2 - \langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle^2}$$

onde

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Teorema 2.2. (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y) \rangle - \|B(x,y)\|^2.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [17]. □

Definição 6. *Uma imersão $\psi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão ψ é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.*

Proposição 6. *Uma imersão $\psi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e só se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Demonstração. Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N \rangle = 0$, obteremos em p,

$$\begin{aligned} H_\eta(x,x) &= \langle A_\eta(x), x \rangle = -\langle \overline{\nabla}_X N, X \rangle \\ &= -X\langle N, X \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X \rangle = \langle N, \overline{\nabla}_X X \rangle. \end{aligned}$$

Decorre daí que ψ é geodésica em p se, e só se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz a condição: $\overline{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto, ψ é geodésica em p se, e só se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

□

Escolhendo um referencial ortonormal $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p onde ψ é um mergulho, podemos escrever, em p,

$$B(x,y) = \sum_i H_{\eta_i}(x,y)\eta_i, \quad x, y \in T_pM, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (TrA_{\eta_i})\eta_i$$

não depende do referencial η_i escolhido. O vetor H é chamado o *vetor curvatura média* de ψ. Se a imersão tem codimensâo um, então $(1/n)trA$ denomina-se curvatura média da imersão.

2.2.2 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

Dada uma imersão isométrica $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^\perp$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas $X, Y, Z, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas $\xi, \eta, \zeta, etc.$, para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\eta)^T = -A_\eta X$. A componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, chamada conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão é dada por

$$\nabla^\perp_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^N = \overline{\nabla}_X\eta - (\overline{\nabla}_X\eta)^T = \overline{\nabla}_X\eta + A_\eta X.$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η, e

$$\nabla^\perp_X(f\eta) = f\nabla^\perp_X\eta + X(f)\eta, \qquad f \in \mathcal{D}(M).$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão e definida por

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\eta - \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta.$$

Proposição 7. *As seguintes equações se verificam*

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X,Y\rangle,$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ *indica o operador* $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração. Pode ser encontrada em [17]. □

Observação 2. *Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano (flat) se* $R^{\perp} = 0$. *Admita que o espaço ambiente* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [A_\eta, A_\zeta]X,Y\rangle.$$

Decorre daí que $R^{\perp} = 0$ se, e só se, $[A_\eta, A_\zeta] = 0$ para todo η,ζ, isto é, se, e só se, para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os A_η.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y),\eta\rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y,Z,\eta) - B(Y,\nabla_X Z,\eta) - B(Y,Z,\nabla^{\perp}_X \eta).$$

Proposição 8. *(Equação de Codazzi) Com a notação acima*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [17] □

Observação 3. *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta).$$

Se além disto, a codimensão da imersão é um, $\nabla^{\perp}_X \eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X B(Y,Z,\eta) &= X\langle A_\eta Y, Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle A_\eta Y, \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(A_\eta Y), Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(A_\eta Y) - \nabla_Y(A_\eta X) = A_\eta([X,Y]).$$

Definição 7. *Seja $\psi : M^n \to M^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten. A derivada covariante de A é a aplicação $\nabla A : TM^n \times TM^n \to TM^n$ dada por*

$$\nabla A(X,Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X).$$

Proposição 9. *Seja $A : TM^n \to TM^n$ o tensor de Weingarten. Então a derivada covariante ∇A é bilinear.*

Demonstração. Dados $X, Y, Z \in TM^n$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla A(X + fY, Z) &= \nabla_Z(A(X + fY)) - A(\nabla_Z(X + fY)) \\
&= \nabla_Z(AX) + \nabla_Z(fAY) - A(\nabla_Z X) - A(\nabla_Z(fY)) \\
&= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f\nabla_Z(AY) + Z(f)AY \\
&\quad -fA(\nabla_Z Y) - Z(f)AY \\
&= \nabla A(X, Z) + f(\nabla_Z(AY) - A(\nabla_Z Y)) \\
&= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(Y, Z).
\end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned}
\nabla A(X, Z + fY) &= \nabla_{Z+fY}(AX) - A(\nabla_{Z+fY} X) \\
&= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f(\nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)) \\
&= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 10. *Seja $\psi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante. Então ∇A é simétrica, isto é,*

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X),$$

para $X, Y \in TM^n$.

Demonstração. Desde que $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante e ψ tem codimensão um, segue-se da equação de Codazzi que

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X, Y]) = A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X),$$

para $X, Y \in TM^n$.

□

Definição 8. *Dado um tensor simétrico* $T : TM^n \times TM^n \to TM^n$*, definimos o traço de* T *como sendo*

$$TrT = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i),$$

onde $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ *é um referencial ortonormal.*

Definição 9. *Sejam* $A : TM \to TM$ *e* $B : TM \to TM$ 1*-tensores na variedade Riemanniana* M*. O produto interno dos* 1*-tensores* A *e* B *é a aplicação* $\langle A, B\rangle : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle A, B\rangle(p) = Tr(A(p).B^*(p)),$$

onde $B^*(p)$ *é o operador adjunto de* $B(p)$*.*

Definição 10. (hipersuperfícies umbílicas) *Seja* $(\overline{M}^{n+1}, g)$ *uma variedade com métrica Riemanniana* g *e seja* $\overline{\nabla}$ *a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é (totalmente) umbílica se para todo* $p \in M$*, a segunda forma fundamental* B *de* x *em* p *satisfaz*

$$\langle B(X, Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par $X, Y \in TM$ *e todo compo unitário* η *normal a* $x(M)$*; aqui estamos usando* $\langle, \rangle$ *para indicar a métrica* g *em* $\overline{M}$ *e a métrica induzida por* x *em* M*.*

2.3 Derivada de Lie e Campos de Killing

Definição 11. *Sejam* $X, Y \in \mathcal{X}(\overline{M})$ *campos de vetores, defina um novo campo de vetores dado por* $Zf = (XY - YX)f$ *chamado de colchete.*

Proposição 11. *Sejam* X *e* Y *campos de vetores diferenciaveis em uma variedade* $\overline{M}$*. Então existe um único campo de vetores* Z *talque, para todo* $f \in \mathcal{D}$*,* $Zf = (XY - YX)f$*.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [9]. □

Proposição 12. *Sejam X, Y e Z campos de vetores em $\overline{M}$ e $f, g \in \mathcal{D}$ então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(chamada de identidade de Jacobi)*
4. $[fX, gZ] = fg[X, Y] + fX(g) - gY(f)X$

Demonstração. Pode ser encontrada em [9]. □

Definição 12. *Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ o tensor derivação L_V tal que:*

1. $L_V(f) = Vf$ *qualquer que seja* $f \in \mathcal{D}$,
2. $L_V(X) = [V, X]$ *qualquer que seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$

   é chamada de derivada de Lie relativa a V.

Proposição 13. *Seja $X, V, W \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$.*

1. $L_V(fX) = VfX + fL_V(X)$.
2. $L_{aV+bW} = L_{aV} + L_{bW}$.
3. $[L_V, L_W] = L_{[V,W]}$.
4. $L_V(df) = d(L_V)$.

Demonstração. As propriedades acima seguem facilmente da definição. □

Definição 13. *Um campo de vetores X em uma variedade Riemanniana é dito ser Killing se a derivada de Lie do tensor métrico é nulo, ou seja $L_X\langle , \rangle = 0$.*

Proposição 14. *Um campo de vetores é Killing se, e somente se, para todo t o fluxo ψ_t é uma isometria.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [17]. □

Proposição 15. *As seguintes condições para um campo de vetores X são equivalentes:*

1. *X é Killing, isto é, $L_X\langle , \rangle = 0$.*
2. *$X\langle V, W\rangle = \langle [X, V], W\rangle + \langle V, [X, W]\rangle$ para todo $V, W \in \mathcal{X}(M)$.*
3. *$\overline{\nabla} X$ é auto-adjunta relativa a $\langle , \rangle$, isto é, $\langle \overline{\nabla}_V X, W\rangle + \langle \overline{\nabla}_W X, V\rangle = 0$ para todo $V, W \in \mathcal{X}(M)$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [17]. □

2.4 Folheações e Distribuições

Definição 14. *Seja M^{n+1} uma variedade de dimensão n e classe $\mathcal{C}^\infty$. Uma folha de classe $\mathcal{C}^r$ e dimensão k de M é um atlas máximal de coordenadas (U, ϕ) de classe $\mathcal{C}^r$ em M satisfazendo:*

1. *$\Phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, U_1 e U_2 abertos de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$, respectivamente.*
2. *Se as coordenadas (U, Φ) e (V, Ψ) são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas $h = \Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V)$ é da forma $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^k \cap \mathbb{R}^{n-k}$.*

Observação 4. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade Riemanniana com campo de vetores não trivial* X. *Então a distribuição n-dimensional dada por*

$$p \in \overline{M} \mapsto \mathcal{D}(p) = \{v \in T_p\overline{M}; \langle X(p), v \rangle = 0\}$$

determina uma folheação $\mathcal{F}(X)$ *de codimensão 1, a qual é orientada por* X*(ver referência de C. Camacho e A.Lins Neto).*

2.5 Produtos Warped

Em uma variedade produto $B \times F$ seu tensor métrico é $\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$, onde π e σ são as projeções de $B \times F$ sobre B e F respectivamete.

Seja $B \times F$ uma variedade produto. Usando o sistema de coordenadas produto em $B \times F$ é fácil verificar os seguintes fatos (veja [17], Capitulo 1, Lema 43):

1. As projeções

$$\pi_B : B \times F \to B, \quad \pi_B(p, q) = p,$$

$$\pi_F : B \times F \to F, \quad \pi_B(p, q) = q,$$

   são aplicações $\mathcal{C}^\infty$.

2. Uma aplicação $\phi : P \to B \times F$ é $\mathcal{C}^\infty$ se, e somente se, $\pi_B \circ B$ e $\pi_F \circ B$ são $\mathcal{C}^\infty$, onde P é uma variedade diferenciável.

3. Para cada $(p, q) \in B \times F$ os subconjuntos

$$B \times q = \{(r, q) \in B \times F; r \in B\},$$

$$p \times F = \{(p, q) \in B \times F; r \in F\},$$

   são subvariedades de $B \times F$.

4. Para cada $(p,q) \in B \times F$,

   $\pi_B|_{B\times q}$ é um difeomorfismo de $B \times q$ em B,

   $\pi_B|_{p\times F}$ é um difeomorfismo de $p \times F$ em F.

5. Os espaços tangentes

   $$T_{(p,q)}(B \times q) \quad e \quad T_{(p,q)}(p \times F),$$

   são subespaços tangentes a $T_{(p,q)}(B \times F)$. Além disso,

   $$T_{(p,q)}(B \times F) = T_{(p,q)}(B \times q) \oplus T_{(p,q)}(p \times F),$$

   ou seja, cada vetores $v \in T_{(p,q)}(B \times F)$ possui uma única expressão $v = x + y$, onde $x \in T_{(p,q)}(B \times q)$ e $y \in T_{(p,q)}(p \times F)$.

Relacionando a geometria da variedade produto $M \times N$ com a geometria das variedades B e F, é necessário o conceito de levantamento para $M \times N$ de funções de vetores tangentes de B e de F, que daremos a seguir:

1. Se $f \in \mathcal{D}(M)$, então o levantamento de f em $M \times N$ é $\widetilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{D}(M \times N)$.

2. Se $x \in T_p(M)$ e $q \in N$, então o levantamento $\widetilde{x}$ de x em (p,q) é o único vetor em $T_{(p,q)}M$ tal que $d\pi(\widetilde{x}) = x$.

3. Se $X \in \mathcal{X}(M)$, então o levantamento de X em $M \times N$ é o campo de vetores $\widetilde{X}$, onde em cada (p,q) temos o levantamento de $X(p)$ em $B \times F$. Equivalentemente, o levantamento $\widetilde{X}$ de X para $B \times F$ é o único campo $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(B \times F)$ tal que $d\pi_B(\widetilde{X}) = X$ e $d\pi_F(\widetilde{X}) = 0$.

O levantamento acima chamamos de levantamento horizontal. Daí o conjunto de todos os levantamentos horizontais denotamos por $\mathfrak{L}(M)$.

De maneira analoga definimos o levantamento vertical basta usarmos a projeção π_F e denotamos por $\mathfrak{L}(N)$.

Em uma variedade produto $B \times F$ o tensor métrico é dado por $\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$, onde π, σ são as projeções de $B \times F$ sobre, B e F, respectivamente.

Definição 15. *Suponha que B e F são variedades Riemanniana, e seja $f > 0$ é uma função diferenciavel em B. O produto warped $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ equipado com tensor métrico*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \sigma^*(g_F).$$

Explicitamente, se x é tangente a $B \times F$ em (p, q), então

$$\langle x, x\rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x)\rangle_B + f^2(p)\langle d\sigma(x), d\sigma(x)\rangle_F.$$

B é chamado de base de $M = B \times_f F$, e F a fibra. Nosso objetivo é expressar a geometria de M em termos da função warped f e das geometrias de B e F.

No caso de produtos riemannianos é fácil ver que a fibra $p \times F = \pi^{-1}(p)$ e a folha $B \times q = \sigma^{-1}(p)$ são subvariedades Riemannianas de M, a metrica warped é caracterizada por:

1. Para cada $q \in F$, a aplicação $\pi|(B \times q)$ é uma isometria sobre B.

2. Para cada $p \in B$, a aplicação $\sigma|(p \times F)$ é uma homotetia positiva sobre F, com fator escalar $1/f(p)$.

3. Para cada $(p, q) \in M$, a folha $B \times q$ e a fibra $p \times F$ são ortogonais a (p, q).

Para mais detalhes veja [17].

Proposição 16. *Seja $M = B \times_f F$, se $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, então*

1. $\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$ *é o levantamento de* $\nabla_X Y$ *em* B.

2. $\nabla_X V = \nabla_V X = (Xf/f)V$.

3. $(\nabla_V W)^\perp = II(V,W) = -(\langle V,W\rangle/f)\mathrm{grad}f$.

4. $(\nabla_V W)^\top \in \mathfrak{L}(F)$ *é o levantamento de* $\nabla_V W$ *em* F.

Demonstração. Veja [17]. $\square$

Capítulo 3

Campos Parcialmente Conformes Fechados

Definição 16. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade Rimanniana e* $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$*. Nós dizemos que* K *é parcialmente conforme fechado em* $\overline{M}$ *se existir um campo de vetores unitários* $W \in \mathfrak{X}(M)$ *ortogonal a* K *e funçoes* $\phi, \psi : \overline{M} \to \mathbb{R}$ *tais que* $\overline{\nabla}_X K = \phi X$ *para* $\langle X, W\rangle = 0$ *e* $\overline{\nabla}_W K = \psi W$ *ou, equivalentemente,*

$$\overline{\nabla}_X K = \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W \tag{3.1}$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$*.* W *é chamado de campo de vetores associado a* K*.*

Observação: Note que a noção de campo de vetores parcialmente conforme fechado está intimamente relacionado com campos conformes fechados, basta que $\phi = \psi$. Em [12], Montiel, prova que o conjunto dos zeros de um campo de vetores conforme fechado não nulo é um conjunto discreto, assim em um conjunto compacto temos que o conjunto dos zeros é finito. O conjunto $\mathcal{Z}(K)$ dos zeros de um campo de vetores parcialmente conforme fechado pode ser extremamente grande, assim nós vamos assumir que $\mathcal{Z}$ pode ser no máximo um subconjunto discreto ou uma união de segmentos de curva. Fora de $\mathcal{Z}$ nós podemos definir um campo de vetores unitário $\widehat{K} = K/|K|$.

Da definição temos que:

$$\overline{\nabla}_W \widehat{K} = \overline{\nabla}_W \frac{K}{|K|} = \frac{1}{|K|}\overline{\nabla}_W K + W(\frac{1}{|K|})K = \frac{1}{|K|}\psi K + W(\frac{1}{|K|})K$$

$$\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \overline{\nabla}_X \frac{K}{|K|} = \frac{1}{|K|}\overline{\nabla}_X K + X(\frac{1}{|K|})K = \frac{1}{|K|}\phi X + X(\frac{1}{|K|})K$$

Vamos mostrar que $W(\frac{1}{|K|})K = 0$ e $X(\frac{1}{|K|})K = 0$

$X(\frac{1}{|K|}) = -\frac{1}{|K|^2}X(|K|) = -\frac{1}{|K|^3}\langle K, \overline{\nabla}_X K\rangle = -\frac{1}{|K|^3}\langle K, \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W\rangle = -\frac{1}{|K|^3}\langle K, \phi X\rangle + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle\langle K, W\rangle = 0$, para todo X.

Em particular, a expressão se anula se $\langle X, K\rangle = 0$. Também

$W(\frac{1}{|K|}) = -\frac{1}{|K|^2}W(|K|) = -\frac{1}{|K|^3}\langle K, \overline{\nabla}_W K\rangle = -\frac{1}{|K|^3}\langle K, \psi W\rangle = 0.$

Usando o fato que $\overline{\nabla}_W \widehat{K} = \frac{1}{|K|}\psi K$ e $\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \frac{1}{|K|}\phi X$.

temos:

$$\overline{\nabla}_{\widehat{K}} \widehat{K} = \overline{\nabla}_{\widehat{K}} \frac{K}{|K|} = \frac{1}{|K|}\overline{\nabla}_{\widehat{K}} K + \widehat{K}(\frac{1}{|K|})K = \frac{1}{|K|^2}\overline{\nabla}_K K + \widehat{K}(\frac{1}{|K|})K = 0.$$

Nós podemos reduzir as equações acima obtendo

$$\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \frac{1}{|K|}(\phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W) - \phi\frac{\langle K, X\rangle}{|K|^3}K. \tag{3.2}$$

Agora note que ψ está relacionada com a curvatura normal k de uma curva integral em W, desde que $k = \langle \overline{\nabla}_W W, \widehat{K} \rangle = W\langle W, \widehat{K} \rangle - \langle W, \overline{\nabla}_W \widehat{K} \rangle = -\langle W, \overline{\nabla}_W \widehat{K} \rangle = -\langle W, \frac{\psi}{|K|} W \rangle = -\frac{\psi}{|K|}$.

Teorema 3.1. *$K^\perp$ é uma distribuição involutiva. Além disso, cada folha da folheação determinada por $K^\perp$ em $\overline{M} \backslash \mathcal{Z}(K)$ é $(n-1)-$umbílica.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $K^\perp$ é uma distribuição involutiva. De fato, Sejam X, Y são campos de vetores em $K^\perp$. Sabemos que

$$\overline{\nabla}_X K = \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W \rangle W$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, daí temos

$$\begin{aligned}
&\langle [X, Y], K \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X, K \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, K \rangle - \langle \overline{\nabla}_Y X, K \rangle \\
&= (X\langle Y, K \rangle - \langle Y, \overline{\nabla}_X K \rangle) - (Y\langle X, K \rangle - \langle X, \overline{\nabla}_Y K \rangle) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X K \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_Y K \rangle \\
&= -\langle Y, \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W \rangle W \rangle + \langle X, \phi Y + (\psi - \phi)\langle Y, W \rangle W \rangle \\
&= -\phi\langle Y, X \rangle - \langle Y, (\psi - \phi)\langle X, W \rangle W \rangle + \phi\langle X, Y \rangle + \langle X, (\psi - \phi)\langle Y, W \rangle W \rangle \\
&= -\phi\langle Y, X \rangle - (\psi - \phi)\langle X, W \rangle\langle Y, W \rangle + \phi\langle X, Y \rangle + (\psi - \phi)\langle Y, W \rangle\langle X, W \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $[X, Y] \in K^\perp$, logo a distribuição é involutiva.

Agora, vamos mostrar que cada folha da folheação determinada por $K^\perp$ é (n-1)-umbílica, para isto devemos mostra que existe uma função ϕ , C^∞ tal que vale $\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \phi X$ para cada $X \in K^\perp \cap W^\perp$. De fato, denotemos por $\mathcal{K}^\perp$ uma correspondente folha da folheação definida em $\overline{M} \backslash \mathcal{Z}(K)$.

Agora, fixe uma folha de $\mathcal{K}^\perp$ em $\overline{M} \backslash \mathcal{Z}(K)$, assim o campo de vetores $\widehat{K}$ restrito a folha é seu normal unitário. Sabendo que $\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \frac{1}{|K|}(\phi X + (\psi - \phi)\langle X, W \rangle W) - \phi\frac{\langle K, W \rangle}{|K|^3} K$, daí temos que $\overline{\nabla}_X \widehat{K} = \frac{\phi}{|K|} X$ para $X \in K^\perp \cap W^\perp$.

Assim a $(n-1)-$dimensional distribição $X \in K^{\perp} \cap W^{\perp}$ satisfaz a definição (12) e a folha é portanto $(n-1)-$umbílica. $\square$

Observação: Construiremos exemplos de campos parcialmente conformes em subconjuntos de variedades de curvatura constante. Usaremos a idéia da folheação do espaço euclidiano por cilindros, onde cada cilindro é equidistante de uma reta.

Seja γ uma curva em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ e tome $r(.) = d(.,\gamma)$; isto é, a distância a γ. Além disso, defina a função S_c por:

$$S_c(r) = \begin{cases} r, & \text{se} \quad r = 0 \\ sen(r\sqrt{c})/\sqrt{c}, & \text{se} \quad r > 0 \\ senh(r\sqrt{-c})/\sqrt{-c}, & \text{se} \quad r < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.2. *O campo de vetores definido por $K = S_c(r)\operatorname{grad} r$ é parcialmente conforme fechado, definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{Q}_c^{n+1} \backslash \gamma$*

Demonstração. Dado $p \in \mathbb{Q}_c^{n+1} \backslash \gamma$, seja P uma hipersuperfície totalmente geodésica passando por p e ortogonal a γ.

Consideremos o referencial ortogonal $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_{n+1}$ em $P\backslash\gamma$ onde $E_{n+1} = \operatorname{grad} r$.

Note que

$$\overline{\nabla}_{E_{n+1}} \operatorname{grad} r = 0.$$

De fato, sabemos que $|\operatorname{grad} r| = 1$.

$$X\langle \operatorname{grad} r, \operatorname{grad} r\rangle = 2\langle \operatorname{grad} r, \overline{\nabla}_X \operatorname{grad} r\rangle.$$

Usando o fato que a hessiana é auto-adjunta temos

$$\langle \operatorname{grad}\ r, \overline{\nabla}_X \operatorname{grad}\ r\rangle = \langle X, \overline{\nabla}_{\operatorname{grad} r} \operatorname{grad} r\rangle.$$

Portanto como X é qualquer temos que $\overline{\nabla}_{E_{n+1}}\mathrm{grad}\, r = 0$. Temos que

$$\overline{\nabla}_{E_{n+1}}K = \overline{\nabla}_{E_{n+1}}S_c(r)\mathrm{grad}\, r = S_c\overline{\nabla}_{E_{n+1}}\mathrm{grad}\, r + E_{n+1}(S_c)\mathrm{grad}\, r.$$

Portanto

$$\overline{\nabla}_{E_{n+1}}K = S_c' E_{n+1}, \tag{3.3}$$

onde nós denotamos por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$.

Para cada $i = 1, \ldots, n-1$ escrevemos $E_i = \langle \mathrm{grad}\ r, E_i \rangle \mathrm{grad}\, r + v_i$, onde v_i pertence ao plano gerado por E_i e $\mathrm{grad}\, r$. Então

$$\overline{\nabla}_{E_i}\mathrm{grad}\, r = \overline{\nabla}_{\langle \mathrm{grad}\, r, E_i\rangle \mathrm{grad}\, r + v_i}\mathrm{grad}\, r = \langle \mathrm{grad}\, r, E_i\rangle \overline{\nabla}_{\mathrm{grad}\, r} grad\, r + \overline{\nabla}_{v_i}\mathrm{grad}\, r = \overline{\nabla}_{v_i}\mathrm{grad}\, r,$$

Temos que

$$S_c(r) = \begin{cases} r, & \text{se} \quad r = 0 \\ sen(r\sqrt{c})/\sqrt{c}, & \text{se} \quad r > 0 \\ senh(r\sqrt{-c})/\sqrt{-c}, & \text{se} \quad r < 0 \end{cases}$$

Daí temos que

$$\overline{\nabla}_{v_i}\mathrm{grad}\, r = \frac{S_c'}{S_c}v_i.$$

De fato

Pela propriedade de Greene e Wu em [12] temos que

$$S_c\langle \overline{\nabla}_X grad\ r, Y\rangle = S_c'\langle X, Y\rangle - \langle grad\, r, X\rangle\langle grad\, r, Y\rangle,$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathbb{Q}_c^{n+1}$. Em particular, para $X = v_i$ o lado direito reduz-se a $S_c'\langle v_i, Y\rangle$. De fato, basta observar que v_i é tangente a um círculo geodésico de raio r em $\mathbb{Q}_c^n$ cuja curvatura gedésica é S_c'/S_c .

Portanto

$$\overline{\nabla}_{E_i}S_c\, grad\ r = S_c{}'E_i \tag{3.4}$$

já que $v_i S_c = 0$.

Como P é totalmente geodésica, as equações (3.2) e (3.3) permanecem válidos quando substituímos a conexão $\overline{\nabla}$ de $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ pela conexão induzida ∇ de P já que a segunda forma fundamental é nula. Estas equações mostram que K é um campo vetorial conforme fechado enquanto restrito a P. Portanto, pela Proposição 1 em [12], K restrito a P determina uma folheação por subvariedades $(n-1)-$dimensional totalmente umbílicas.

Agora , em $\mathbb{Q}_c^{n+1}\backslash\gamma$ defina $E_n = W$ um campo de vetores unitário satisfazendo $\langle W, K\rangle = 0$ e $\langle W, E_i\rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Fixe um ponto $p \in \mathbb{Q}_c^{n+1}\backslash\gamma$ e seja M uma hipersuperfície gerada tomando a subvariedade totalmente umbílica de P passando por p e movendo-a segundo o fluxo de W. As equações (3.2) e (3.3) significam que os campos de vetores $E_1, ..., E_{n-1}$ determinam direções principais de M. O campo vetorial W, sendo ortogonal a eles, também define uma direção principal de M e obtemos

$$\overline{\nabla}_W K = \psi W \tag{3.5}$$

para alguma função ψ.

Portanto, de (3.3),(3.4) e (3.5) nós temos que K é um campo de vetores parcialmente conforme fechado e definido em um aberto de $\mathbb{Q}_c^{n+1}\backslash\gamma$. □

Vimos que cada folha de K perpendicular é $(n-1)-$umbílica e em cada ponto tem $(n-1)$ curvaturas principais. Provaremos no próximo teorema que de fato estas curvaturas são constantes ao longo de cada folha. Antes apresentamos um lema que constitui a etapa fundamental da demostraçao do teorema.

Lema 1. *As funções $|K|^2, \phi$ e $K\phi$ são constantes ao longo de cada folha de $K^\perp$.*

Demonstração. Primeiro note que para cada $X \in \mathcal{X}(M)$. Temos

$$\begin{aligned} \langle grad|K|^2, X\rangle &= X(|K|^2) = X(\langle K, K\rangle) = 2\langle K, \nabla_X K\rangle = \\ &= 2\langle K, \phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W\rangle = 2\phi\langle K, X\rangle = \langle 2\phi K, X\rangle. \end{aligned}$$

Então

$$grad\,|K|^2 = 2\phi K.$$

Daí, para cada $X \in K^{\perp}$ temos que $X(|K|^2) = 0$. Assim $|K|^2$ é constante ao longo de cada folha de $K^{\perp}$. Agora sabemos que a hessiana de $|K|^2$ é dada por:

$$Hess|K|^2(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X(grad\,|K|^2), Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X(2\phi K), Y\rangle = 2\langle (X\phi)K + \phi\overline{\nabla}_X K, Y\rangle.$$

Usando (2.1), nós temos

$$\begin{aligned} Hess|K|^2(X,Y) &= 2\langle (X\phi)K + \phi(\phi X + (\psi - \phi)\langle X, W\rangle W), Y\rangle = \\ &= 2(X\phi)\langle K, Y\rangle + \phi^2\langle X, Y\rangle + \phi(\psi - \phi)\langle X, W\rangle\langle W, Y\rangle. \end{aligned}$$

Agora se nós subistituimos $Y = K, X \in K^{\perp}$ na expressão acima temos:

$$Hess|K|^2(X,Y) = X\phi\langle K, K\rangle = K\phi\langle K, X\rangle = 0,$$

porque o hessiano é simétrico, isto é,

$$Hess|K|^2(X,K) = Hess|K|^2(K,X).$$

Daí nós obtemos que $(X\phi)\langle K, K\rangle = 0$. Desde que estamos fora de $\mathcal{Z}(K)$, nós temos que $X\phi = 0$ e então $\langle grad\,\phi, X\rangle = 0$, para cada campo de vetores $X \in K^{\perp}$.

Por outro lado, nós temos

$$\langle grad\,\phi, \widehat{K}\rangle = \widehat{K}\phi = \frac{K\phi}{|K|}$$

a qual implica que $grad\,\phi$ é dado por:

$$grad\,\phi = (\widehat{K}\phi)\widehat{K} = \frac{K\phi}{|K|^2}K.$$

Seja $X \in K^{\perp}$. Então

$$0 = K\langle grad\phi, X\rangle = (Hess\phi)(K, X) + \langle grad\,\phi, \overline{\nabla}_K X\rangle.$$

Agora note que $\langle grad\,\phi, \overline{\nabla}_K X\rangle = 0$.

De fato,

$$\langle K, \overline{\nabla}_K X\rangle = K\langle K, X\rangle - \langle \overline{\nabla}_K K, X\rangle = -\phi\langle K, X\rangle = 0.$$

Consequentemente $(Hess\phi)(K, X) = 0$. Daí temos

$$X(K\phi) = X\langle grad\,\phi, K\rangle = (Hess\phi)(K, X) + \langle grad\,\phi, \overline{\nabla}_X K\rangle = \langle grad\,\phi, \overline{\nabla}_X K\rangle.$$

Mas, novamente, este último termo desaparece pelo fato de que

$$\langle K, \overline{\nabla}_X K\rangle = \frac{1}{2}X(|K|^2) = 0.$$

Consequentemente, $X(K\phi) = 0$ para cada $X \in K^{\perp}$ e $K\phi$ é constante ao longo de cada folha de $K^{\perp}$. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana possuindo uma campo de vetores parcialmente conforme fechado K. Então a distribuição $K^{\perp}$ definida no conjunto $M \setminus \mathcal{Z}(K)$ é involutiva em cada folha da folheação $K^{\perp}$ e é uma hipersuperfície $(n-1)$-umbílica com $n-1$ curvaturas principais constantes e iguais.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1 temos que, $K^\perp$ é involutiva e cada folha da folheação definida em $\overline{M}\backslash\mathcal{Z}(K)$ é uma hipersuperfície $(n-1)$-umbílica. Agora vamos mostrar que as curvaturas principais são constantes e iguais.

De fato, seja W um campo de vetores associado a K e seja o referencial $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n = W$ e $E_{n+1} = \widehat{K}$, onde $E_1, \ldots, E_n$ são as correspondente direções principais sobre a folha de $K^\perp$.

A curvaturas principais desta folha são dadas por

$$k_i = -\langle \overline{\nabla}_{E_i}\widehat{K}, E_i\rangle = -\frac{\phi}{|K|}, \quad k_n = -\langle \overline{\nabla}_{E_n}\widehat{K}, E_n\rangle = -\frac{\psi}{|K|}. \tag{3.6}$$

onde $i = 1, \ldots, n-1$. Pelo Lema 1, ϕ e $|K|$ são constantes ao longo de cada folha de $K^\perp$. Consequentemente as primeiras $n-1$ curvaturas principais são constantes ao longo de cada folha. □

Podemos perguntar se a função ψ na Definição 2.1 é constante ao longo de cada folha de $K^\perp$. Responderemos a essa questão na seguinte proposição.

Proposição 17. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana possuindo um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com um campo de vetores associado W. Dado uma folha de $K^\perp$, se qualquer das seguintes funções for constante ao longo desta folha, então o mesmo ocorre com os outras,*

1. *A função ψ dada na definição 2.1.*

2. *A curvatura principal $-\frac{\psi}{|K|}$.*

3. *O divergente de K.*

4. *A curvatura média H na folha.*

Demonstração. Nós usaremos o referencial $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n = W$ e $E_{n+1} = \widehat{K}$ dado na prova do Teorema 3.3.

Veja o fato de que ψ constante, implica que $-\frac{\psi}{|K|}$ também o é, já que $|K|$ é constante em cada folha pelo Lema 1.

Agora usando as propriedades de K, obtemos a expressão da divergência de K:

$$div\, K = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{E_i} K, E_i \rangle = n\phi + \psi,$$

que é constante se ψ o for, já que ϕ é constante em cada folha pelo Lema 1. Da expressão de curvatura principal dado em (2.3) nós temos que a curvatura media H em M é dada por

$$nH = n\left(\frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}\right) = -(n-1)\frac{\phi}{|K|} - \frac{\psi}{|K|}. \tag{3.7}$$

Que é constante já que ψ é constante.

Agora nós voltamos para a análise das distribuições $W^\perp$ e $K^\perp \cap W^\perp$. A seguinte proposição impõe uma condição em W semelhante ao de K para $W^\perp$ para ser involutivo. □

Proposição 18. *Seja* $\overline{M}^{n+1}$ *uma variedade riemanniana possuindo um campo de vetores parcialmente conforme fechado* K *com o campo de vetores associado* W. *A distribuição* $W^\perp$ *é involutiva se existir uma função* $\sigma : \overline{M} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\overline{\nabla}_X W = \sigma X \qquad para \quad X \in W^\perp. \tag{3.8}$$

Demonstração. Suponhamos que (3.8) vale. Se $X, Y \in W^\perp$, então

$$\langle [X,Y], W\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X, W\rangle = -\langle X, \overline{\nabla}_Y W\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X W\rangle = 0.$$

Portanto $W^\perp$ é involutiva. □

Corolário 1. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana possuindo um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com o campo de vetores associado W. Se W satisfaz* (3.8), *então a distribuição definida por $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ é involutiva.*

Observação 5. *Vamos supor que vale a condição* (3.8) *para cada campo de vetores $X \in X(\overline{M})$; na verdade, vamos supor que W é conforme fechado. Podemos facilmente ver que W é conforme fechado e que tem norma constante se, e somente se, W é paralelo (assim, $\sigma = 0$ em* (3.8) *). Isto, por sua vez implica que W é um campo de Killing.*

Suponhamos que K é um campo de vetores parcialmente conforme e que o campo de vetores associado W satisfaz (3.8). O Teorema 3.3, Proposição 18 e o Corolário 1 implicam respectivamente, que $K^{\perp}$, $W^{\perp}$ e $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ define uma correspondente folheação em $\overline{M}^{n+1}$, a qual vamos denotar pela letra caligrafica $\mathcal{K}^{\perp}$,$\mathcal{W}^{\perp}$ e $\mathcal{K}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$.

Para fechar essa seção nós analisaremos a distribuição $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ em um espaço ambiente com curvatura constante. É conhecido que nesse caso a distribuição é involutiva (veja [16]), mas nós incluiremos a prova para sermos completos.

Proposição 19. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado com o campo de vetores associado W, definido em um conjunto aberto de uma variedade riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de curvatura constante. Então a distribuição $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ é involutiva.*

Demonstração. Considere a folha de $\mathcal{K}^{\perp}$ passando por p. Assim a distribuição $(n-1)-$dimensional $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ é definida pelos campo de vetores X tangentes à folha tais que

$$\overline{\nabla}_X K = \phi X. \tag{3.9}$$

Agora para provar que $K^\perp \cap W^\perp$ é involutiva, tome X, Y tangente a folha satisfazendo (3.9).

Lembrando que ϕ é constante ao longo de cada folha (pelo Lema 1), nós temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{[X,Y]}K &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y K - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X K + \overline{R}(X,Y)K \\
&= \overline{\nabla}_X(\phi Y) - \overline{\nabla}_Y(\phi X) + c(\langle K, X\rangle Y - \langle K, Y\rangle X) \\
&= (X\phi)Y + \phi\overline{\nabla}_X Y - (Y\phi)X - \phi\overline{\nabla}_X Y + c(\langle K, X\rangle Y - \langle K, Y\rangle X) \\
&= \phi[X,Y] + (X\phi)Y - (Y\phi)X = \phi[X,Y].
\end{aligned}$$

Aqui, $\overline{R}$ denota o tensor curvatura e c é a curvatura constante de $\overline{M}^{n+1}$. Então [X,Y] satisfaz (3.9) e portanto $K^\perp \cap W^\perp$ é involutiva. □

Agora nós classificaremos as folhas completas com curvatura média constante da folheação $\mathcal{K}^\perp$ associada a um campo de vetores parcialmente conforme fechado K no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ em quatro tipos: hiperplanos, hiperesferas e produtos da forma $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$ ou $\mathbb{R} \times S^{n-1}$. Lembre que se consideramos a folha de $K^\perp$, o Lema 1 implica que a função ϕ é constante ao longo da folha, enquanto se a folha tenha curvatura média constante, a Proposição 17 implica que a função ψ é constante ao longo desta folha.

Lema 2. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponha que cada folha é completa e tem curvatura média constante. Seja $p \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\mathcal{Z}(K)$ e seja $\phi = \phi(p)$, $\psi = \psi(p)$ são funções dadas em (2.1), constante ao longo da folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por p.*

1. *Se $\phi = 0 = \psi$, então a folha é um hiperplano.*

2. *Se $\phi = 0$ e $\phi \neq \psi$, então a folha é um cilindro $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$.*

3. *Se $\phi \neq 0$ e $\phi = \psi$, então a folha é uma hiperesfera.*

4. *Se $\phi \neq 0$ e $\phi \neq \psi$, então a folha é um cilindro $\mathbb{R} \times S^{n-1}$.*

Demonstração. Para $\phi = 0 = \psi$, temos do Teorema 3.3, que

$$k_i = -\langle \nabla_{E_i} \widehat{K}, E_i \rangle = -\frac{\phi}{|K|} = 0,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, enquanto k_n é dado por:

$$k_n = -\langle \nabla_{E_n} \widehat{K}, E_n \rangle = -\frac{\psi}{|K|} = 0.$$

Daí, temos que todas as curvaturas principais são nulas. Logo a folha é totalmente geodésica, sendo completa, é um hiperplano.

Agora se $\phi = 0$ e $\phi \neq \psi$ queremos concluir que a folha é um cilindro da forma $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$. Temos que

$$k_i = -\frac{\phi}{|K|} = 0$$

para $1 \leq i \leq n-1$ e

$$k_n = -\frac{\psi}{|K|} = c \neq 0.$$

Como $sec_{\mathbb{R}^{n+1}}(e_i, e_j) = 0$, temos que $sec_M(e_i, e_j) = 0$, ou seja, M é flat. Por um lado, $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1} = 0$ são as curvaturas principais da variedade integral da distribuição involutiva $K^{\perp} \cap W^{\perp}$ que é então totalmente geodésica. Logo, parte de um hiperplano $\mathbb{R}^{n-1}$. Por outro lado, $k_n = c$ corresponde à curva integral de W que assim é parte de um círculo S^1. Logo a folha é parte do cilindro $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$, sendo a folha completa, é o cilindro completo $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$.

Agora vamos mostrar que se $\phi \neq 0$ e $\phi = \psi$, então a folha é uma hiperesfera. De fato, temos da Proposição 1 que $k_1 = \ldots = k_{n-1} = k_n = -\frac{\phi}{|K|} = -\frac{\psi}{|K|} \neq 0$. Portanto tais curvaturas são constantes porque, por hipótese, a curvatura média de cada folha é constante. Logo a folha é umbílica.

Agora seja p um ponto da folha e $\eta(p)$ um vetor normal unitário a folha em p.

Vamos mostrar que o ponto

$$c = p + \frac{1}{k(p)} \eta(p)$$

é equidistante de qualquer ponto da folha.(Aqui $k(p) = k_1(p) = \ldots = k_n(p)$). Agora seja q um ponto qualquer da folha, e seja α um seguimento de curva da folha ligando p a q, ou seja, $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Agora estenda $\eta(p)$ a um campo de vetores normal unitário N sobre α, e considere a curva

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{k(p)} N \quad em \ \mathbb{R}^{n+1}.$$

Derivando γ temos,

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k(p)} N',$$

onde $N' = \nabla_{\alpha'} N = -S(\alpha') = -k\alpha'$, já que a folha é umbílica, temos que S é um múltiplo escalar de k. Logo

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k}(-k\alpha') = 0,$$

o que implica que a curva γ é constante. Em particular, $c = \gamma(0) = \gamma(1) = q + \frac{1}{k}\eta(q)$. Daí, $d(c, q) = \frac{1}{|k|}$ para todo q na folha, ou seja a folha é uma hiperesfera, já que é completa.

Agora se $\phi \neq 0$ e $\phi \neq \psi$. Aqui usamos um resultado de do Carmo e Dajczer [7] que afirma que a folha de $K^\perp$ através de p deve ser uma hipersuperfície de rotação. Como $-\frac{\psi}{|K|}$ é a curvatura da curva perfil de geração da folha no espaço de órbita, esta curva perfil é (parte de) um círculo ou uma reta. Uma vez que $\psi \neq \phi$ e $\phi \neq 0$, só temos uma hipersuperfície completa com curvatura média constante, exatamente quando a curva perfil é uma linha paralela ao eixo de rotação, de modo que a folha é um cilindro.

□

Antes de enunciar o seguinte lema, nós vamos chamar uma folha de $K^\perp$ não-singular se existir um ponto $p \notin Z(K)$ sobre a folha. Pelo Lema 2, existem apenas quatro tipos de folhas não singulares em nosso ambiente.

Definição 17. *Diremos que cada hipersuperfície obtida pelo processo do Teorema 3.2 é um tubo ao longo da curva γ. Se γ é uma geodésica em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$, diremos que a hipersuperfície é um cilindro.*

Lema 3. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde as folhas são completas e tem curvatura média constante. Então toda folha não singular tem o mesmo tipo. Além disso, quando todas as folhas não singulares, são cilindros, eles são coaxiais.*

Demonstração. Suponha primeiro que existe uma folha não-singular do tipo $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ e tome um ponto p na folha. Ao longo da $(n-1)$-esfera contida na folha e passando por p o campo de vetores $\widehat{K}$ normal a folha que está no mesmo n-plano que contém a $(n-1)$-esfera. Pela equação (3.2), o fluxo de $\widehat{K}$ é um fluxo geodésico em R^{n+1}, o que implica que a restrição de $\widehat{K}$ para este n-plano permanece em toda parte tangente ao plano e, portanto, é uma campo conforme fechado. A Proposição 2 de [12] implica que as folhas da folheação obtidos através da restrição de K ao n-plano são $(n-1)$-esferas concentricas. Este fato mostra que nenhuma sequência desses cilindros podem convergir para um cilindro $R^{n-1} \times S^1$ nem para um hiperplano. Devido a não-compacidade, esta sequência não pode convergir para uma hiperesfera. Portanto, temos que todas as folhas de $K^\perp$ são cilindros $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ com os mesmos eixos de rotação.

De maneira análoga, se a folha de $K^\perp$ passando por p é um hiperplano, tome P como o n-plano contendo p e ortogonal a W. Aplicando o argumento acima, as folhas definida por K em P são n-planos. Quando isso acontece para todos os p na folha, $K^\perp$ é uma folheação por hiperplanos.

Em seguida, se uma folha é uma hiperesfera, tome P como o hiperplano definido antes, então que a folheação em P é de $(n-1)$-esferas. Como vimos, pela compacidade as folhas de $K^\perp$ não pode ser cilindros do tipo $\mathbb{R} \times S^{n-1}$, nem uma hipersuperfície dos outros tipos.

□

Teorema 3.4. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde as folhas são completas e têm curvatura média constante.*

Então a folheação $\mathcal{K}^{\perp}$ *é uma folheação por hiperplanos, por hiperesferas ou por cilindros coaxiais.*

Demonstração. Basta combinar os Lemas 2 e 3. $\square$

Capítulo 4

Condições para uma hipersuperfície ser $(n-1)-$umbílica

Neste capítulo provaremos um dos principais resultados desta dissertação: um teorma que estabelece condições para uma hipersuperfície ser $(n-1)-$umbílica. O ambiente deve possuir um campo de vetores parcialmente conforme fechado. Antes, provaremos ser esta condição localmente equivalente ao ambiente possuir estrutura de produto duplamente warped.

4.1 Produtos duplamente warped

Dos exemplos do Capítulo II temos a sugestão de que há uma relação entre a existência de um campo parcialmente conforme e a existência de certa estrutura de produto no espaço ambiente. De fato, provaremos o resultado a seguir.

Teorema 4.1. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade riemanniana.*

1. *Se $\overline{M} = J \times (I \times_f P^{n-1})$, então $\overline{M}$ admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado.*

2. *Se $\overline{M}$ admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K e o campo de vetores associado W conforme fechado, então localmente $\overline{M}$ é isométrico a $\overline{M} = J \times (I \times_f P^{n-1})$.*

Demonstração. Primeiro suponha que $\overline{M} = J \times (I \times_f P^{n-1})$. Tome $t \in J$, $s \in I$ e defina

$$K = f(s)\frac{\partial}{\partial s} \quad e \quad W = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pela estrutura do produto, todo campo de vetores $V \in \mathcal{X}(\overline{M})$ pode ser escrito como

$$V = a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial s} + X,$$

onde X é um levantamento para $\overline{M}$ de um campo tangente a P. Fazendo $a = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{b\frac{\partial}{\partial s}+X} K &= \overline{\nabla}_{b\frac{\partial}{\partial s}+X}(f\frac{\partial}{\partial s}) \\
&= \overline{\nabla}_{b\frac{\partial}{\partial s}}(f\frac{\partial}{\partial s}) + \overline{\nabla}_X(f\frac{\partial}{\partial s}) \\
&= b\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}(f\frac{\partial}{\partial s}) + \overline{\nabla}_X(f\frac{\partial}{\partial s}) \\
&= bf\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s} + b\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} + Xf\frac{\partial}{\partial s} + f\overline{\nabla}_X\frac{\partial}{\partial s} \\
&= b(f\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s} + f'(s)\frac{\partial}{\partial s}) + \frac{f}{f}f'(s)X \\
&= f'(s)(b\frac{\partial}{\partial s} + X),
\end{aligned}$$

onde nós estamos usado a fórmula $\overline{\nabla}_X Y = \frac{Yf}{f}X$ (veja [17], p.206, Prop.35) e os fatos $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s} = 0$ e $X(f) = 0$. Então a primeira condição de (3.1) é satisfeita com $\phi = f'(s)$. Por outro lado, nós temos que

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} K = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}(f(s)\frac{\partial}{\partial s}) = f(s)\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}f(s)\frac{\partial}{\partial s} = 0,$$

o que é obvio, já que f depende apenas de s. Assim a segunda condição de (3.1) é satisfeita com $\psi = 0$. Então, K é um campo parcialmente conforme fechado.

Agora para a segunda parte do teorema, suponha que W é conforme fechado. Pela Observação 1 e a condição (3.8) temos que $\sigma = 0$ e deste modo a distribuição $W^{\perp}$ é involutiva. Então K é um campo de vetores conforme fechado restrito a folha de $\mathcal{W}^{\perp}$. Pelo resultado provado por Montiel em [12](p.721), esta folha é isométrica a um produto warped $I \times_f P^{n-1}$. Desde que W tambem é Killing, temos que sua derivada de Lie é nula, segue-se daí que o fluxo obtido por um campo de vetores unitário W, nos dá uma isometria local entre $\overline{M}$ e $J \times (I \times_f P^{n-1})$. □

Como conseqüência do teorema acima, podemos dar uma primeira caracterização de folheação dada por campos de vetores parcialmente conformes fechados em formas espaciais.

Corolário 2. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fechado definido em $\mathbb{Q}_c^{n+1}$. Suponha adicionalmente que W é conforme fechado. Então a folheação associada a $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ é uma folheação por hiperplanos, hiperesferas ou tubos.*

Demonstração. Sendo W conforme fechado, da Proposição 18 temos que $W^{\perp}$ é involutiva. Logo a segunda parte do Teorema 4.1 implica que localmente $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ tem a forma $J \times (I \times_f P^{n-1})$. Sendo $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ da forma $J \times M$, onde $M = I \times_f P^{n-1}$. Para cada $t \in J$, vamos considerar o conjunto $(M)_t = \{(t,p) \in J \times M; p \in M\}$. Dessa forma a inclusão $i_t : M_t \to J \times M$ induz uma estrutura diferenciavel em M_t, de maneira que (M_t, ∇^t) é uma subvariedade riemanniana de $J \times M$ com conexão induzida pela inclusão, isto é

$$\nabla_X^t Y := \nabla_X^M Y$$

quaisquer que sejam $X, Y \in TM_t$.

Naturalmente M_t é difeomorfa a M e $(M)_t$ é uma subvariedade totalmente geodésica. De fato, seja γ uma geodésica de M_t vamos mostrar que γ é uma geodésica de $J \times M$, temos que as geodésicas de $J \times M$ são da forma $\gamma = (\gamma^J, \gamma^M)$ mas como $\gamma' \in TM$ já que é geodésica de M_t temos que $\gamma'^J = 0$ então $\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'^J}\gamma'^J + \nabla_{\gamma'^M}\gamma'^M = \nabla^t_{\gamma'}\gamma' = 0$, pela Proposição 2.9 em [18] temos que M_t é totalmente geodésica. De maneira análoga temos que M é uma subvariedade totalmente geodésica de $J \times M$; daí aplicando a equação de Gauss a $J \times M$ e M temos que $I \times_f P^{n-1}$ tem curvatura constante, já que a segunda forma fundamental é nula. Pela observação feita por Sánchez em [17], P^{n-1} tem também curvatura constante e sendo completa, é um conjunto aberto de uma esfera $(n-1)-$ dimensional ou hiperplano. Então temos que a folheação é dada por hiperplanos, hiperesferas ou tubos. □

Observação 6. *Na prova do Teorema 4.1 temos*

$$|K| = f(x), \quad \phi = f'(x) \quad e \quad \psi = 0;$$

consequentimente a curvatura média da folha de $\mathcal{K}^\perp$ é dada por

$$nH = -(n-1)\frac{\phi}{|K|} = -(n-1)\frac{f'}{f} = -(n-1)(\log f)'.$$

4.2 Demonstração do Teorema 4.2

Nesta seção trabalharemos com variedades que admitem um campo de vetores parcialmente conforme fechado para responder uma das perguntas feitas na Introdução, impondo condições que garantem que uma hipersuperfície seja $(n-1)-$umbílica. Primeiro vamos dar dois lemas técnicos.

Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K e um campo de vetores associado W. Seja M uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}$ em toda parte transversal a K, e

N um campo de vetores unitário normal a M. Note que a transversalidade implica que o campo de vetores $W^* = W - \langle W, N\rangle N$ é diferente de zero, já que sendo W unitário e $W \perp K$ temos da transversalidade de M que K nunca é tangente e portanto W nunca é normal. Logo sua componente tangente $W^* = W - \langle W, N\rangle N$ nunca é nula.

Lema 4. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana satisfazendo as condições dadas no parágrafo acima. Seja $A(X) = -\overline{\nabla}_X N$ o operador forma correspondente a N e seja o referencial ortonormal $E_1, \dots, E_n$ de autovetores de A com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Suponha que $E_n = W^*/|W^*|$ e defina*

$$K^\top = K - \langle K, N\rangle N - \langle K, E_n\rangle E_n,$$

$$(A(K^\top))^\top = A(K^\top) - \langle A(K^\top), E_n\rangle E_n.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{E_i}(A(K^\top))^\top, E_i\rangle$$

é igual

$$K^\top\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\Big) - Ric(K^\top, N) + \sum_{i=1}^{n-1}\langle A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top)\rangle. \tag{4.1}$$

Demonstração. Fixe $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Da definição de $(A(K^\top))^\top$, temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{E_i}((A(K^\top))^\top) &= \overline{\nabla}_{E_i}(A(K^\top) - \langle A(K^\top), E_n\rangle E_n) \\ &= \overline{\nabla}_{E_i}((A(K^\top)) - \langle A(K^\top), E_n\rangle \overline{\nabla}_{E_i}E_n - E_i\langle A(K^\top), E_n\rangle E_n.\end{aligned}$$

Usando os fatos de que A é auto-adjunta e que $A(E_n) = \lambda_n E_n$, então

$$\langle A(K^\top), E_n\rangle = \langle K^\top, A(E_n)\rangle = \lambda_n\langle K^\top, E_n\rangle = 0,$$

já que

$$\langle K^\top, E_n\rangle = \langle K - \langle K, N\rangle N - \langle K, E_n\rangle E_n, E_n\rangle = -\langle K, N\rangle\langle N, E_n\rangle = 0.$$

Consequentemente temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{E_i}((A(K^\top))^\top), E_i\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_i}(A(K^\top)), E_i\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{K^\top}(A(E_i)), E_i\rangle + \langle \overline{R}(K^\top, E_i)E_i, N\rangle \\
&\quad -\langle A(E_i), [K^\top, E_i]\rangle \\
&= K^\top(\langle A(E_i), E_i\rangle) - \langle \overline{R}(K^\top, E_i)N, E_i\rangle \\
&\quad +\langle A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top)\rangle - 2\langle A(E_i), \overline{\nabla}_{K^\top}(E_i)\rangle \\
&= K^\top(\langle A(E_i), E_i\rangle) - \langle \overline{R}(K^\top, E_i)N, E_i\rangle \\
&\quad +\langle A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top)\rangle.
\end{aligned}$$

Na passagem da primeira igualdade para a segunda estamos usando a equação de Codazzi e o fato que

$$\langle A(E_i), \overline{\nabla}_{K^\top}(E_i)\rangle = \lambda_i\langle E_i, \overline{\nabla}_{K^\top}(E_i)\rangle = 0,$$

já que $\langle E_i, E_i\rangle = 1$, então $0 = K^\top\langle E_i, E_i\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{K^\top}E_i, E_i\rangle$.

Somando a expressão acima em i, onde $i = 1, \ldots, n-1$ obtemos o resultado. $\square$

Seguindo [3] usaremos a expressão dada na equação (4.1) para caracterizar hipersuperfície $(n-1)$ -umbílica.

Lema 5. *Sob as mesma hipóteses do Lema 4, considerando*

$$(n-1)H_0 = \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i$$

a expressão

$$\sum_{i=1}^{n-1}\langle H_0\overline{\nabla}_{E_i}(K^\top) - \overline{\nabla}_{E_i}(A(K^\top))^\top, E_i\rangle,$$

é igual a

$$-K^\top((n-1)H_0) + Ric(K^\top, N) - \sum_{i=1}^{n-1}(\langle (H_0I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top - K)\rangle). \quad (4.2)$$

Demonstração. Por (4.1) temos de analisar

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\langle H_0\overline{\nabla}_{E_i}(K^\top), E_i\rangle - \langle A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top)\rangle).$$

Temos que

$$\langle H_0\overline{\nabla}_{E_i}(K^\top), E_i\rangle - \langle A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top)\rangle = \langle \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top), (H_0 I - A)(E_i)\rangle.$$

Observamos que $\langle E_i, W\rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \langle E_i, E_n\rangle \\
&= \langle E_i, \frac{W^*}{|W^*|}\rangle \\
&= \frac{1}{|W^*|}\langle E_i, W - \langle W, N\rangle N\rangle \\
&= \langle E_i, W\rangle - \langle W, N\rangle\langle E_i, N\rangle \\
&= \langle E_i, W\rangle
\end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, n-1$. Daí, sendo K parcialmente conforme fechado

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top), (H_0 I - A)(E_i)\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{E_i}(K + K^\top - K), (H_0 I - A)(E_i)\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{E_i}K + \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top - K), (H_0 I - A)(E_i)\rangle \\
&= \phi\langle E_i, (H_0 I - A(E_i))\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top - K), (H_0 I - A)(E_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Agora somando em $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\langle E_i, (H_0 I - A)(E_i)) = (n-1)H_0 - (n-1)H_0 = 0.$$

Isto finaliza a prova do Lema.

□

Antes de enunciar nosso teorema sobre as condições para uma hipersuperfície ser $(n-1)-$ umbílica, definimos uma noção conveniente de curvatura média constante. Seja $M_0^{n-1} \subset \overline{M}^{n+1}$ uma subvariedade de $\overline{M}$, N um campo de vetores unitário normal a M_0 e E_i, $i = 1, \ldots, n-1$ um referencial ortonormal definido ao longo de M_0. A curvatura média de M_0 relativa a N é, por definição,

$$(n-1)H_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle \overline{\nabla}_{E_i} N, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i,$$

onde os λ_i são os autovalores do operador forma A_0 de M_0 relativo a N. Dizemos que M_0 tem curvatura média constante em relação ao N se a soma acima é constante ao longo de M_0.

Teorema 4.2. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K e campo associado W. Seja M uma hipersuperfície de $\overline{M}$ transversal em todo o K, e N um campo de vetores unitário normal a M. Suponha que a direção determinada por $W^* = W - \langle W, N \rangle N$ é uma direção principal de M e que através de cada ponto de M passa uma subvariedade compacta $(n-1)-$dimensional de M, em toda parte ortogonal a W^*, totalmente umbílica como hipersuperfície de M e tendo curvatura média constante relativa a N. Então M é $(n-1)-$umbílica.*

Antes de iniciar a prova, observaremos que cada subvariedade $(n-1)-$ dimensional dada pelo teorema tem codimensão dois relativa a $\overline{M}^{n+1}$; vamos provar que se esta é uma subvariedade umbílica em M (isto é, usando o campo de vetores normal $(W^*/|W^*|)$, então é $(n-1)-$ umbílica em M^{n+1} (ou seja, em relação ao campo de vetores normal N). Mais precisamente, usando a umbilicidade em M (isto é, relativa $W^*/|W^*|$) de tal subvariedade compacta M_0 de dimensão $n-1$, provaremos (via teorema de Stokes) que

$$Tr(A_0^2) = (n-1)H_0^2,$$

onde A_0 e H_0 denotam a segunda forma fundamental e a curvatura média relativas a N.

Demonstração. Usaremos a notação e resultados dos dois lemas anteriores. Fixe $p \in M$ e seja M_0 a subvariedade compacta $(n-1)-$dimensional de M passando por p, e satisfazendo as hipóteses do teorema. Seja $E_1, \ldots, E_n = W^* \backslash |W^*|$ um referencial ortonormal de autovetores de A em uma vizinhança de p em M e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seus correspondentes autovalores. Então

$$\begin{aligned}
&H_0 div_{M_0}(K^\top) - div_{M_0}((A(K^\top))^\top) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} H_0 \langle \overline{\nabla}_{E_i} K^\top, E_i \rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_i}((A(K^\top))^\top), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle H_0 \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top) - \overline{\nabla}_{E_i}((A(K^\top))^\top), E_i \rangle \\
&= -K^\top((n-1)H_0) + Ric(K^\top, N) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top - K) \rangle.
\end{aligned}$$

Desde que M_0 tem curvatura média constante relativa a N, H_0 é constante ao longo de M_0, daí temos que $K^\top((n-1)H_0) = 0$. Agora vamos analisar o que ocorre com

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n-1} \langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(K^\top - K) \rangle &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i}(\langle K, N \rangle) N \\
&\quad + \langle K, E_n \rangle E_n \rangle \\
&= \langle K, N \rangle \sum_{i=1}^{n-1} \langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle \\
&\quad + \langle K, E_n \rangle \sum_{i=1}^{n-1} \langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i} E_n \rangle.
\end{aligned}$$

Sabemos que $A(E_i) = -\overline{\nabla}_{E_i} N$. Daí temos

$$\begin{aligned}
\langle (H_0 I - A)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle &= \langle (H_0 I)(E_i), \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle + \langle -A(E_i), \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle \\
&= H_0 \langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle - \lambda_i \langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i} N \rangle \\
&= -H_0 \lambda_i + \lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Agora somando a expressão acima com $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$\sum_{i=1}^{n-1}\langle (H_0I-A)(E_i),\overline{\nabla}_{E_i}N\rangle = \sum_{i=1}^{n-1}(-H_0\lambda_i+\lambda_i^2) = -(n-1)H_0^2+Tr(A_0^2),$$

onde A_0 é o operador forma de M_0 relativo a N. Esta última expressão é facilmente vista ser globalmente definida, já que o traço e a curvatura média independem do referencial tomado e segue-se pela desigualdade de Schwarz ser não negativa. Além disso é nula se, e somente se, M é $(n-1)-$umbílica.

Agora para o último termo usaremos o fato de M_0 ser umbílica em M, o que significa que $\overline{\nabla}_X E_n = -S_{E_n}(X) = kX$ para cada campo de vetores tangente a M_0. Obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1}\langle (H_0I-A)(E_i),\overline{\nabla}_{E_i}E_n\rangle = k\sum_{i=1}^{n-1}\langle (H_0I-A)(E_i),E_i\rangle = 0.$$

Reunindo todas as informações temos

$$H_0 div_{M_0}(K^{\top}) - div_{M_0}((A(K^{\top}))^{\top}) = Ric(K^{\top},N)+\langle K,N\rangle(Tr(A_0^2)-(n-1)H_0^2).$$

Integrando sobre M_0, temos

$$0=\int_{M_0}(Ric(K^{\top},N)+\langle K,N\rangle(Tr(A_0^2)-(n-1)H_0^2)).$$

Acima estamos usando o teorema de Stokes e o fato de que M_0 tem bordo vazio.

Desde que M é transversal a K, temos que $\langle K,N\rangle$ não muda de sinal ao longo de M; já que $\langle K,N\rangle$ é continua, podemos também supor que é positiva em toda parte. Desde que Ric é não negativa, concluimos que $Tr(A_0^2)-(n-1)H_0^2 \leq 0$; daí concluimos que é $Tr(A_0^2)-(n-1)H_0^2$ identicamente nulo e então M é $(n-1)-$umbílica. $\square$

Para fechar esta seção, observamos que a hipótese sobre a curvatura de Ricci pode ser substituída pela hipótese de K^T ser ortogonal a $\overline{Ric(N)}$, onde $\overline{Ric}$ é o operador de Ricci do espaço ambiente M^{n+1}. Esta condição foi usada antes em outros contextos, veja, por exemplo, [1], p. 475.

Capítulo 5

Condiçoes para uma hipersuperfície de curvatura média constante ser uma folha

Daqui por diante vamos supor que $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade riemanniana a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com campo de vetores associado W tais que W é conforme fechado. Pela segunda parte do Teorema 4.1, $\overline{M}$ é localmente isométrica a $J \times (I \times_f P^{n-1})$. Para cada $t \in J$, seja $\overline{M}_t = \{t\} \times (I \times_f P^{n-1})$. Além disso, se M é qualquer hipersuperfície de $\overline{M}$, que intersecta transversalmente com $\overline{M}_t$, denotamos $M_t = M \cap \overline{M}_t$. Na seguinte proposição obtemos uma expressão para a curvatura média de M.

Proposição 20. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade na qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com o campo de vetores associado W tal que W é conforme fechado. Seja M uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}$, em toda parte transversal a K. Usando a notação anterior nesta proposição, suponha também que para cada $t \in J$ a subvariedade $(n-1)-$dimensional M_t está contida em uma folha de $\mathcal{K}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp}$. Então a curvatura média H_M*

de M é dada por

$$nH_M = -(n-1)\langle N, \widehat{K}\rangle \frac{\phi}{|K|} - \frac{\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle}{\sqrt{1-\langle N, W\rangle^2}}, \tag{5.1}$$

onde $N = \langle N, \widehat{K}\rangle \widehat{K} + \langle N, W\rangle W$ e $\widetilde{E}_n = -\langle N, W\rangle \widehat{K} + \langle N, \widehat{K}\rangle W$.

Demonstração. Usamos um referencial de tal forma que $E_1, \ldots, E_{n-1}$ gera $K^\perp \cap W^\perp, E_n = W$ e $E_{n+1} = \widehat{K}$. Note que o fato de M_t está contido em uma folha de $\mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$ implica que o campo de vetores N é de fato unitário e normal em toda a M. Para $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_i} N &= \overline{\nabla}_{E_i}(\langle N, \widehat{K}\rangle \widehat{K} + \langle N, W\rangle W) \\
&= \langle N, \widehat{K}\rangle \overline{\nabla}_{E_i}\widehat{K} + \langle N, W\rangle \overline{\nabla}_{E_i} W + (E_i\langle N, \widehat{K}\rangle)\widehat{K} + (E_i\langle N, W\rangle)W \\
&= \langle N, \widehat{K}\rangle \frac{\phi}{|K|} E_i + (E_i\langle N, \widehat{K}\rangle)\widehat{K} + (E_i\langle N, W\rangle)W,
\end{aligned}$$

onde estamos usando o fato que W é paralelo (Veja Observação 4).

Tomando o produto escalar com E_i obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} N, E_i\rangle = \langle N, \widehat{K}\rangle \frac{\phi}{|K|}. \tag{5.2}$$

Agora nós usaremos o campo de vetores $\widetilde{E}_n = -\langle N, W\rangle \widehat{K} + \langle N, \widehat{K}\rangle$ para obter

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n} N &= \overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n}(\langle N, \widehat{K}\rangle \widehat{K} + \langle N, W\rangle W) \\
&= \langle N, \widehat{K}\rangle \overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n}\widehat{K} + \langle N, W\rangle \overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n} W + (\widetilde{E}_n\langle N, \widehat{K}\rangle)\widehat{K} + (\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle)W \\
&= (\widetilde{E}_n\langle N, \widehat{K}\rangle)\widehat{K} + (\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle)W,
\end{aligned}$$

onde

$$\overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n}\widehat{K} = -\langle N, W\rangle \overline{\nabla}_{\widehat{K}}\widehat{K} + \langle N, \widehat{K}\rangle \overline{\nabla}_W \widehat{K},$$

usando o fato que W é paralelo, $\psi = 0$ e $\overline{\nabla}_{\widehat{K}}\widehat{K} = 0$; fazendo o produto escalar com $\widetilde{E}_n$ nós temos

$$\langle \overline{\nabla}_{\widetilde{E}_n} N, \widetilde{E}_n\rangle = (\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle)\langle N, \widehat{K}\rangle - (\widetilde{E}_n\langle N, \widehat{K}\rangle)\langle N, W\rangle. \tag{5.3}$$

Podemos simplificar os dois últimos termos da seguinte forma. Do fato que $\langle N, N\rangle = 1$ segue-se que

$$\langle N, \widehat{K}\rangle^2 + \langle N, W\rangle^2 = 1.$$

Derivando esta expressão com respeito a $\widetilde{E}_n$, substituindo o resultado em (5.3) obtemos

$$(\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle)\langle N, \widehat{K}\rangle - (\widetilde{E}_n\langle N, \widehat{K}\rangle)\langle N, W\rangle = \frac{\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle}{\sqrt{1-\langle N, W\rangle^2}}.$$

Usando a expressão acima com (5.2), concluimos que a curvatura média de M é dada por

$$nH_M = -\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i}N, E_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n-1}\langle \overline{\nabla}_{E_i}N, E_i\rangle - \langle \overline{\nabla}_{E_n}N, E_n\rangle.$$

Daí obtemos que

$$nH_M = -(n-1)\langle N, \widehat{K}\rangle\frac{\phi}{|K|} - \frac{\widetilde{E}_n\langle N, W\rangle}{\sqrt{1-\langle N, W\rangle^2}}.$$

□

Teorema 5.1. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade a qual admite um campo de vetores parcialmente conforme fechado K com o campo de vetores associado conforme fechado W tal $\overline{M}$ é localmente da forma $J \times I \times_f P^{n-1}$ com* $\log f$ *convexo. Seja M uma hipersuperfície orientável de $\overline{M}$, tranversal em toda parte a K, com curvatura média constante em $\overline{M}$. Suponha que existe $t \in J$ tal que M_t é uma hipersuperfície compacta de $\overline{M}_t$ com curvatura média constante. Suponha adcionalmente a existência de um ponto $p \in M_t$ tal que*

1. *O vetor unitário $N(p)$ é normal a M em p e igual ao vetor unitário $\widehat{K}(p)$ normal a folha $\mathcal{K}$ passando por p,*

2. *Localmente, M está acima da folha de $\mathcal{K}^{\perp}$ passando por p com respeito de K, isto é, existe uma vizinhança U de p em M tal que cada ponto*

$q \in U$ tem a forma $q = \phi_s(q')$, onde q' é mencionado na folha, $s \geq 0$ e ϕ_s é o fluxo de K,

3. A derivada de $\langle N, W \rangle$ com respeito ao vetor $W(p)$ é positiva.

Então M coincide localmente com a folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por p. Em particular, localmente M é $(n-1)-$umbílica. Além disso, se a folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por p tem curvatura média constante, esta coincide globalmente com M.

Demonstração. Observe primeiro que a hipótese de $\log f$ convexa é equivalente a $\mathcal{H}' \geq 0$, onde $\mathcal{H} = f'/f = (\log f)'$. Pelo fato que M é transversal em todo o K implica que o ângulo θ entre o normal de M_t em $\overline{M}_t$ e K (a qual é tangente a $\overline{M}_t$) não muda de sinal. Pelo Teorema 4 em Alías-Dacjzer [2], M_t é uma folha de $\mathcal{K}^\perp$ em $\overline{M}_t$.

Desde que M_t está contido numa folha de $\mathcal{W}^\perp$, temos que M_t está contido na folha de $\mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{W}^\perp$. Da Proposição 20, M tem curvatura média constante dada por

$$nH_M = -(n-1)\langle N, \widehat{K} \rangle \frac{\phi}{|K|} - \frac{\widetilde{E}_n \langle N, W \rangle}{\sqrt{1 - \langle N, W \rangle^2}},$$

onde $N = \langle N, \widehat{K} \rangle \widehat{K} + \langle N, W \rangle W$ é normal a M e $\widetilde{E}_n = -\langle N, W \rangle \widehat{K} + \langle N, \widehat{K} \rangle W$. Temos por hipótese que $\widehat{K}(p) = N(p)$, então $\widetilde{E}_n(p) = W(p)$. A hipótese 3 e a continuidade implicam que $\langle N, \widehat{K} \rangle$ e $\widetilde{E}_n \langle N, W \rangle$ são positivas em uma vizinhança de p em M. Note também que podemos supor que $\phi \leq 0$, ou equivalentemente que $H_M \geq 0$, uma vez que este sinal depende da escolha de um campo de vetores parcialmente conforme fechado K ou $-K$. Levando estes fatos em conta, em cada ponto q nesta vizinhança, temos que

$$nH_M \leq -(n-1)\frac{\phi}{|K|}(q).$$

Pela Observação 5, o lado direito da inequação é a curvatura média da folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por q, isto é, a curvatura média de M em q é menor ou igual a curvatura média da folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por q.

Queremos comparar a curvatura média da folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por p com a folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por q. Note que a hipótese 2 implica que a folha de $\mathcal{K}^\perp$ através de q fica acima da folha passando por p. Usando novamente a equação (12) da Observação 5, a curvatura média das folhas de $\mathcal{K}^\perp$ são dadas por

$$nH = -(n-1)\frac{f'}{f} = -(n-1)(\log f)'.$$

Agora $\log f$ convexa implica que nH é uma função não-crescente em I, o que implica, por sua vez que a curvatura média da folha passando por q é menor do que ou igual à curvatura média da folha passando por p.

Em uma vizinhança de p, temos que M está acima da folha passando por p com respeito a K e a curvatura média de M é menor ou igual a curvatura média desta folha. Pelo princípio de tangência (veja por exemplo [9]), essas hipersuperfícies coincidem localmente. Em particular, localmente M é $(n-1)-$ umbílica. Finalmente, se ambos hipersuperfícies tem curvatura média constante, é sabido que elas coincidem globalmente.

$\square$

Corolário 3. *Seja K um campo de vetores parcialmente conforme fehado definido em um conjunto aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ com campo de vetores associado W conforme fechado. Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável satisfazendo as hipóteses da Proposição 20, bem como as condições no Teorema 5.1. Então M é localmente um hiperplano, uma hiperesfera ou um cilindro.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1, sabemos que M coincide localmente com a folha de $\mathcal{K}^\perp$ passando por p. Desde que M tem curvatura média constante, pelo Proposição 17 nós temos que a função ψ associada a K é localmente constante. Pela versão local do Lema 2, M é localmente um hiperplano, uma hiperesfera ou um cilindro. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ALÍAS,L.J.BRASIL JR,A.COLARES,A.G., Integral formulas for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications, *Proc. of the Edinburgh Math.*v.46,p. 465-488, 2006.

[2] ALÍAS,L.J. and DAJCZER.M., Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces, *Proc. of the Edinburgh Math*, v.50 ,p. 511-526, 2007.

[3] ALÍAS,L.J. ROMERO.A and SANCHEZ.M., Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature spacetimes, *Nonlinear-Analysis, Theory, Methods and applications*.v.30, p.655-661, 1997.

[4] ASPERTI.A.C. and DAJCZER.M., N-dimensional submanifolds of RN+1 and SN+2,*Illinois Jour. of Math*.v.28 , p.621-645, 1984 .

[5] C.Camacho, e A. Lins Neto., *Teoria geométrica das folheações*. Rio de janeiro: IMPA, 1979, Projeto Euclides.

[6] COLARES.A.G. and PALMAS.O., Addendum to Complete rotation hypersurfaces with Hk constant in space forms, *Bol. Soc. Bras. Math*.v. 39 , p.11-20, 2008.

[7] COLARES.A.G. and PALMAS.O., On Riemannian manifolds foliated by (n - 1)-umbilical hypersurfaces,*Bol. Soc. Bras. Math*.v. 42 , p.105-130, 2011.

[8] DAJCZER.M. and FLORIT.L., On Chens basic equality. Illinois Jour,*Illinois Jour. of Math.*v. 42 , p.97-106, 1998.

[9] M.Carmo.,*Geometria Riemanniana*, Rio de janeiro:IMPA,1971, Projeto Euclides.

[10] CARMO.M.P. and DAJCZER.M., Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature, *Trans. Amer. Math.*v. 277 , p.685-709, 1983.

[11] CARMO.M.P. DAJCZER.M. and MERCURI.F., Compact Conformally Flat Hypersurfaces,*Trans. Amer. Math* v.288 , p.189-203, 1985.

[12] FONTENELE.F. and SILVA.S.L. , A tangency principle and applications, *Illinois Jour. of Math.*v.45 , p.213-228, 2001.

[13] HARTMAN.P., On complete hypersurfaces of nonnegative sectional curvatures and constant m-th mean curvature,*Trans. AMS*v. 245 , p.363-374, 1978.

[14] HSIANG.W.Y., On rotational W-hypersurfaces in spaces of constant curvature and generalized laws of sine and cosine,*Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica.*v. 11 , p.349-373, 1983.

[15] MONTIEL.S., Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds.*Indiana Univ. Math. Journal.*v. 48 , p.711-748, 1999.

[16] MONTIEL.S., Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes,*Math. Ann.* v.314 , p.529-553, 1999.

[17] B.O'Neill., *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press (1983).

[18] PALMAS.O., Complete rotation hypersurfaces with Hk constant in space forms,*Bol. Soc. Bras. Mat* v.30 , p.139-161, 1999.

[19] RECKZIEGEL.H., On the eigenvalues of the shape operator of an isometric immersion into a space of constant curvature.*Math. Ann.*v. 243 , p.71-82, 1979.

[20] SANCHEZ.M., On the geometry of generalized Robertson-Walker spacetimes: curvature and Killing fields,*Jour. of Geom. and phys* ,v. 31 , p.1-15, 1999.