UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES

MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN EM VARIEDADES COMPACTAS

FORTALEZA

2012

RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES

MÉTRICAS m-QUASI-EINSTEIN EM VARIEDADES COMPACTAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção de Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

FORTALEZA
2012

D622m Diógenes, Rafael Jorge Pontes

Métricas m-Quasi-Einstein em Variedades compactas/

Rafael Jorge Pontes Diógenes - 2012. 71f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Geometria diferencial. 2. Grupos finitos.

CDD 516.36

À Deus, minha mãe Criseli Diógenes e meus irmãos Ricardo e Álvaro Diógenes.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, príncipio e fim último da minha vida, motivo maior da minha escolha pelo mestrado, que me proporcionou essa graça de cursar o mestrado e por ter cuidado de todos os detalhes, para que meu curso fosse bem aproveitado.

A minha querida e amada família, minha mãe Criseli Diógenes, que por todos esses anos não mediu esforços para cuidar de mim, meu irmão Ricardo Diógenes, que sempre acreditou no meu potencial e custiou minha preparação para o vestibular tornando-se assim, um dos grandes responsáveis por esta etapa na minha vida. Meu irmão Álvaro Diógenes, que por ser uma pessoa especial me faz sempre ser mais humano.

Aos meus irmãos da Comunidade Católica Shalom, que durante esses anos compreenderam meu chamado e me apoiaram nos momentos mais difíceis. Em particular à Aline e Daniel Abtibol, Lisieux Rocha e Felipe Ponte, Zé Maria, Breno Sindeaux, aos meus irmão da célula aliança de misericórdia e do Shalom da Parangaba. Ao jovens do grupo de oração Yimlah, que me faz desejar cada vez mais à Deus.

Agradeço também ao professor Ernani Ribeiro Jr., pela orientação, o incentivo, a paciência, a ajuda e colaboração para este meu primeiro trabalho científico. Ao professor Abdênago Barros, pelo apoio, incentivo e por ter aceitado o convite de participar da banca. Também agradeço ao professor Cícero Aquino por aceitar participar da banca.

Também agradeço aos amigos da pós-graduação em matemática da UFC, Leonardo Tavares, Oslenne Nogueira e Renivaldo Senna, pelo apoio, colaboração e amizade. À João Nunes, João Vitor, Selene, Breno Sampaio, Rui Brasileiro, Zé Eduardo, Rodrigo Mendes, Rondinelle Marcolino, Assis Benjamim e Loester Carneiro pelo apoio. Também agradeço à Elaine Sampaio, Raquel Costa, André Pinheiro e Renato Araújo.

Agradecimentos especiais aos meus amigos, Daniele Gomes, Magna Amaro, Dávila Amaro, Gleiciane Paulino, Carol Magalhães, Rafael Rosemberg, Luana Leticia, Lyana Nara, Lina Patrício, Luiza Michel, Kleyane de Paula, Edson Alves, Leandro Hercules, Márcia Xavier, Laura Carolina, Meire Martins, Araújo Júnior, Celeste Paulino, Gerlane Paulino, Rebeca Paulino e Raísa Barros, pelo apoio e amizade. Rosana Fernandes e Rui Rodrigues, pelo acolhimento.

Não podia deixar de lembrar os professores da UECE, Alberto Flávio, João Marques, Thelmo de Araújo, João Montenegro, Marina, Maildo e Esmeraldo, pelo ensino e incentivo. À Yalga que sempre me apoiou. Aos meu amigos de graduação: Raquel Vitoriano, Virlane Nogueira, Ticiane Aragão, Tiganá Queiroz, Rubem Dutra, Michel, Marcelo, Heitor Barros e Monique Stefanie.

À Andréa pela competência e agilidade.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

"Felizes os pobres em espírito, porque deles é o Reino do Céu. Felizes os aflitos, porque serão consolados. Felizes os mansos, porque possuirão a Terra. Felizes os que têm fome e sede de justiça, porque serão saciados. Felizes os que são misericordiosos, porque encontrarão misericórdia. Felizes os puros de coração, porque verão a Deus. Felizes os que promovem a paz, porque serão chamados filhos de Deus. Felizes os que são perseguidos por causa da justiça, porque deles é o Reino do Céu. Felizes de vós, se fordes insultados e perseguidos, e se disserem toda a espécie de calúnia contra vós por causa de Mim. Ficai alegres e contentes, porque será grande para vós a recompensa no Céu. Do mesmo modo perseguiram os profetas que vieram antes de vós"
(Mateus 5, 3-12)

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar uma generalização das métricas quasi-Einstein para campo de vetores suaves não necessariamente gradiente, além disso, apresentar algumas fórmulas integrais para métricas quasi-Einstein gradiente definidas numa variedade compacta e como aplicação expor três resultados importantes, sendo um deles uma caracterização para tais classes de variedades compactas de dimensão dois.

Palavras-chaves: Métricas quasi-Einstein, curvatura escalar, variedades de Einstein.

Abstract

Our objective in this work is to present a generalization of quasi-Einstein metrics for vector field is not necessarily smooth gradient also present some integral formulas for compact quasi-Einstein metrics defined in a compact and as application set out three important results, one being characterized such classes for a compact manifolds of dimension two.

Keywords: Quasi-Einstein metrics, scalar curvature, Einstein manifolds.

Sumário

Introdução

Uma questão interessante proposta por Besse, veja [3], é a de determinar quando se é possível construir um exemplo de variedade de Einsten que seja um produto *warped*. Um resultado conhecido é:

Se (M, g) e (N^m, h) são variedades Riemannianas, o produto warped $(M \times N, \overline{g})$, onde $\overline{g} = g + e^{-2\frac{f}{m}}h$, é de Einstein se, e somente se, (N, h) é de Einstein e

$$Ric_f^m = \lambda g$$

e

$$\Delta_f f - m\lambda = -\mu e^{2\frac{f}{m}},$$

onde $Ric\,(h) = \mu h$, $Ric\,(\overline{g}) = \lambda \overline{g}$,

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df$$

é o m-Bakry-Émeri tensor de Ricci, ∇^2 denota o hessiano e $\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle$.

Extendendo um pouco mais este tensor que aparece naturalmente, para o caso $m = \infty$, define-se então este tensor por,

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df,$$

onde $0 < m \leq \infty$.

Barros e Ribeiro Jr., veja [2], generalizaram este tensor para um campo de vetores suave X, ao invés do gradiente de uma função, isto é,

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^\flat \otimes X^\flat,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X e $X^\flat$ é a 1-forma associada a X.

A partir daí define-se que uma variedade é m-quasi-Einstein se

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g,$$

vale para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vale ressaltar que quando $m = \infty$, temos a equação que define os solitons de Ricci, assim temos uma generalização. Quando isso acontece, a primeira coisa a se fazer é saber que resultados continuam válidos ou mesmo determinar identidades similares. Os dois primeiros resultados que provaremos, e podem ser encontrados em [2], são:

Teorema 0.1. *Seja (M^n, g, X), $n \geq 3$, variedade Riemanniana compacta satisfazendo $Ric_X^m = \lambda g$. Então M é uma variedade de Einstein desde que:*

(1) $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div}\, X dM$.

(2) X é um campo conforme e $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0$.

(3) $|X|$ é constante e $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0$.

Compensando a compacidade, vamos assumir que $|X| \in L^1(M^n)$ e obtemos o seguinte resultado.

Teorema 0.2. *Seja (M^n, g, X) variedade Riemanniana completa, não-compacta tal que $Ric_X^m = \lambda g$. Se $n\lambda \geq R$ e $|X| \in L^1(M^n)$, então M^n é variedade de Einstein.*

Esses resultados são os teoremas de rigidez para tais métricas.

No caso particular em que $X = \nabla f$ é campo gradiente, quando m é finito e inteiro, existe uma relação com produto *warped*. Quando se faz $u = e^{-\frac{f}{m}}$, então estudar

$$Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g$$

equivale a estudar

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g.$$

Assim tendo por definição que uma métrica quasi-Einstein é trivial se $X \equiv 0$ (no caso de campos gradientes f ser constante), temos um primeiro resultado que já é válido para solitons de Ricci gradiente.

Proposição 0.3. *Toda métrica quasi-Einstein gradiente definida numa variedade compacta com curvatura escalar constante é trivial.*

Apresentaremos algumas fórmulas integrais, que são extensões das fórmulas obtidas em [1] para solitons de Ricci gradientes, bem como resultados similares ali também obtidos.

Corolário 0.4. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana compacta orientável satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então temos:*

(1) $\displaystyle\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle dM + \frac{n+2}{2n} \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle dM.$

(2) $\displaystyle\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle dM.$

(3) $\displaystyle\int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle dM = \frac{3}{2} \int_M (\Delta f)^2 dM.$

Como aplicação desse resultado obtemos:

Teorema 0.5. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana, orientável e compacta satisfazendo $Ric^{\,m}_{\nabla f} = \lambda g$, então M é variedade de Einstein se $\displaystyle\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM \leq 0$.*

Mais ainda, também temos:

Teorema 0.6. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana, orientável e compacta satisfazendo $Ric^{\,m}_{\nabla f} = \lambda g$. Então ∇f não pode ser campo de vetores conforme não trivial.*

Por fim temos um resultado que é devido à Case at al. em [10], mas que aqui apresentaremos uma prova alternativa.

Corolário 0.7. *Toda métrica quasi-Einstein gradiente em uma variedade compacta de dimensão dois é trivial.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Alguns conceitos sobre tensores

A estrutura de produto interno sobre os espaços tangentes a uma variedade Riemanniana torna possível visualizar tensores de diferentes maneiras. Veremos isso com o tensor Hessiano e o tensor de Ricci. Mas a observação fundamental é que uma aplicação bilinear pode ser interpretada como uma aplicação linear quando se tem uma estrutura de produto interno, como ensina o lema

Lema 1.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre o espaço $T_k^{l+1}(V)$ dos $(l+1,k)-$tensores e o espaço das aplicações multilineares*

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Demonstração. Denote por $\mathcal{A}(V)$ o espaço vetorial das aplicações multilineares

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Defina $\Phi : \mathcal{A}(V) \to T_k^{l+1}(V)$ que associa cada $A \in \mathcal{A}(V)$ ao $(l+1,k)-$tensor

$$\Phi A\,(\omega, \omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) = \omega(A(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k)).$$

É fácil ver que esta aplicação é linear, note também que Φ é injetiva, pois dados $\omega, \omega^1, \ldots,$ $\omega^l \in V^*$ e $X_1, \ldots, X_k \in V$ quaisquer, se

$$\Phi A\,(\omega, \omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) = 0$$

então

$$\omega(A(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k)) = 0.$$

Como os vetores e covetores são arbitrários, segue que

$$A(\omega^1, \ldots, \omega^l, X_1, \ldots, X_k) = 0,$$

donde $A = 0$. Além disso, $\dim\mathcal{A}(\mathrm{V}) = \dim \mathrm{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{l}+1}(\mathrm{V})$, logo Φ é o isomorfismo procurado. $\square$

Assim, em todo este trabalho sempre que nos referirmos a um $(l+1, k)-$tensor, iremos trabalhar com este na forma de uma aplicação multilinear como vimos no lema anterior. Além disso, em todo o texto usaremos a convenção de Einstein para soma, que consiste em omitir o sinal do somatório quando temos índices cruzados repetidos, por exemplo

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j E_j$$

é equivalente a $y_i = x_i^j E_j$.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, dado um $(s,t)-$tensor T em M podemos tornar T um $(s-k, t+k)-$tensor para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s-k$ e $t+k$ sejam não negativos. Abstratamente, isto é feito da seguinte forma. Sobre uma variedade Riemanniana (M, g) existe um isomorfismo natural entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)$; este isomorfismo é dado pela aplicação que associa cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ a aplicação linear $(W \mapsto g(X, W)) \in \mathfrak{X}^*(M)$. Usando este isomorfismo, podemos substituir $\mathfrak{X}(M)$ por $\mathfrak{X}^*(M)$ ou vice-versa, e assim mudar o tipo de tensor.

Vejamos como mudar o tipo de um tensor. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial em $\mathfrak{X}(M)$ e $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^n\} \subset \mathfrak{X}^*(M)$ sua base dual, isto é, $\sigma^i(E_j) = \delta^i_j$. Os vetores e os covetores podem ser escritos como

$$\begin{aligned} v &= v^i E_i = \sigma^i(v) E_i, \\ \omega &= \alpha_j \sigma^j = \omega(E_j)\sigma^j. \end{aligned}$$

O tensor T pode agora ser escrito como

$$T = T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t} \sigma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j_t} \otimes E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_s},$$

onde $T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_t} = T(\sigma^{i_1}, \cdots, \sigma^{i_s}, E_{j_1}, \cdots, E_{j_t})$.

Agora vejamos como podemos mudar E_i num covetor e σ^j em um vetor. Lembre que o dual de E_i é o covetor $w \mapsto g(E_i, w)$, que pode ser escrito como

$$g(E_i, w) = g(E_i, E_j)\sigma^j(w) = g_{ij}\sigma^j(w).$$

Por outro lado, temos que encontrar o vetor v correspondente ao covetor σ^j. A propriedade que o define é

$$g(v, w) = \sigma^j(w).$$

Assim, temos

$$g(v, E_i) = \delta_i^j.$$

Escrevendo $v = v^k E_k$, temos que

$$g_{ki}v^k = \delta_i^j.$$

Sendo (g^{ij}) a inversa de (g_{ij}), temos portanto

$$v = v^i E_i = g^{ij} E_i.$$

Assim,

$$E_i \to g_{ij}\sigma^j,$$

$$\sigma^j \to g^{ij} E_i.$$

Para exemplificar, provemos que na forma de $(1, 1)-$tensor, o tensor métrico g é igual a aplicação identidade $I : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, escrevendo o tensor g na forma de $(1, 1)-$tensor

$$g(E_i) = g_i^j E_j,$$

e

$$g = g_j^i E_i \otimes \sigma^j.$$

Assim na forma de $(0, 2)-$tensor teremos

$$g = g_{kj}\sigma^k \otimes \sigma^j = g_j^i g_{ik}\sigma^k \otimes \sigma^j,$$

e na forma de $(2, 0)-$tensor temos que

$$g = g^{ik} E_i \otimes E_k = g_j^i g^{kj} E_i \otimes E_k,$$

assim

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} &= g_{kj} \\ g^i_j g^{kj} &= g^{ik}, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} g^i_j g^{kj} &= g_{kj} g^{ik} \\ g^i_j \delta^j_i g^i_j &= \delta^i_j \\ g^i_j &= \delta^i_j, \end{aligned}$$

implicando que $g^i_j = 0$ se $i \neq j$ e $g^j_j = 1$. Logo $g(E_i) = E_i$, o que prova o afirmado.

Definição 1.2. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $L : V \to V$ um $(1,1)-$tensor, definimos a norma do tensor L por*

$$|L| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(L^* \circ L)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(L \circ L^*)},$$

onde $L^* : V \to V$ é a adjunta de L.

Note que, se V tem dimensão finita n e $L : V \to V$ é auto-adjunto então existe uma base de autovetores associados ao seus aautovalores $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ contados com suas respectivas multiplicidades, donde $|L| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$.

1.2 Operadores diferenciais e curvaturas

Em tudo o que segue (M, g) denotará uma variedade Riemannnina n-dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3. *Definamos a **derivada covariante** de um $(1,r)-$tensor S, como sendo o $(1, r+1)-$tensor $\nabla S : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla S(X, Y_1, .., Y_r) &= (\nabla_X S)(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &= \nabla_X (S(Y_1, \ldots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor S é **paralelo** se $\nabla S = 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo, pois

$$(\nabla g)(X, Y_1, Y_2) \;=\; \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0,$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.4. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***gradiente*** *de f é o campo diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$g(\nabla f, X) = D_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.5. *Sejam $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então*

(1) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.

(2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Demonstração. Basta ver que, sendo X um campo diferenciável sobre M, temos

$$\begin{aligned} g(\nabla(f+h), X) &= D_X(f+h) = D_X f + D_X h \\ &= g(\nabla f, X) + g(\nabla h, X) \\ &= g(\nabla f + \nabla h, X) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\nabla(fh), X) &= D_X(fh) = hD_X f + fD_X h \\ &= g(h\nabla f, X) + g(f\nabla h, X) \\ &= g(h\nabla f + f\nabla h, X). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.6. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou de mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Para a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', temos

$$g(\nabla f, v)(p) = D_X f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ uma vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é como no enunciado da proposição, então $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como a igualdade anterior é válida para todo $v \in T_pM$, então $\nabla f(p) = 0$. □

Corolário 1.7. *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f. \tag{1.2}$$

Demonstração. Se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} g(\nabla(\phi \circ f), v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= (\phi' \circ f)g(\nabla f, v)(p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.8. *Dada uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que $p \in M$ é* ***um ponto crítico*** *de f se $\nabla f(p) = 0$. Em particular, segue da Proposição 1.6 que todo ponto de máximo ou de mínimo local de f é um ponto crítico de f.*

Corolário 1.9. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração. Fixe $p \in M$ e seja $A = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$. A continuidade de f garante que A é fechado em M. Como $A \neq \emptyset$ (pois $p \in M$), se mostrarmos que A é aberto em M seguirá da conexidade de M que $A = M$, isto é, f será constante. Seja então $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada conexa de q. Para todo $q' \in U$, existe uma curva diferenciável $\gamma : [0,1] \to U$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = q'$. Segue da Proposição 1.6 que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = g\Big(\nabla f, \frac{d\gamma}{dt}\Big)(\gamma(t)) = 0,$$

e daí a função $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(q'),$$

donde $q' \in A$. Sendo $q' \in U$ arbitrário, concluímos que $U \subset A$, ou seja, A é aberto em M. $\square$

Proposição 1.10. *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Demonstração. Se $\nabla f = a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x^l} = g\Big(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big) = a^j g\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big),$$

de maneira que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} = a^j g^{kl} g_{jl} = a^j \delta_{kj} = a^k.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= g\Big(g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}, g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) \\ &= g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.11. *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A **divergência** de X é uma função diferenciável* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.3}$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

De maneira similar a definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1, r)-$tensor S como sendo o $(0, r)$-tensor

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} S)(v_1, \ldots, v_r) &= \operatorname{tr}\{w \mapsto (\nabla_w S)(v_1, \ldots, v_r)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} g\Big((\nabla_{e_i} S)(v_1, \ldots, v_r), e_i\Big),\end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Lembre que um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja Capítulo 3 de [8].

Definição 1.12. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.4}$$

Definição 1.13. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Hessiano** de f é o campo de operadores lineares $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\operatorname{Hess} f)_p\,(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da definição da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$(\operatorname{Hess} f)_p\,(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 1.14. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Se $v, w \in T_pM$ e V, W denotam respectivamente extensões de v, w a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\begin{aligned}g((\operatorname{Hess} f)_p(v), w)(p) &= g(\nabla_V \nabla f, W)(p) \\ &= D_V g(\nabla f, W)(p) - g(\nabla f, \nabla_V W)(p) \\ &= (D_V(D_W f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V + [V, W])(p) \\ &= (D_W(D_V f))(p) + (D_{[V,W]} f)(p) \\ &\quad -g(\nabla f, \nabla_W V)(p) - g(\nabla f, [V, W])(p) \\ &= (D_W(D_V f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= D_W g(\nabla f, V)(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p) \\
&= g(\nabla_W \nabla f, V)(p) \\
&= g((\mathrm{Hess}\, f)_p(w), v)(p).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.15. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f). \tag{1.5}$$

Demonstração. É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f)_p &= \sum_{i=1}^{n} g((\mathrm{Hess}\, f)_p(e_i), e_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i)(p) \\
&= \mathrm{div}\,(\nabla f)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.16. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

(a) Se $p \in M$ é ponto crítico de f, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$, então

$$(\mathrm{Hess}\, f)_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.6}$$

(b) Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma geodésica de M, então

$$(\mathrm{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t). \tag{1.7}$$

Demonstração. Façamos a prova de (a), sendo a prova de (b) análoga. Basta ver que

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}\, f)_p(v, v) &= g(\nabla_{\frac{dc}{dt}} \nabla f, c')(p) \\
&= \frac{d}{dt} g(\nabla f, c')\Big|_{t=0} - g\Big(\nabla f, \frac{Dc'}{dt}\Big)(p) \\
&= \frac{d}{dt} g\Big(\nabla f, \frac{dc}{dt}\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

□

Agora observe que podemos definir o *Hessiano* como o $(1,1)-$tensor $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ dado por $\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f$, a Proposição 1.14 sugere uma definição na forma de um $(0,2)-$tensor simétrico $\mathrm{Hess}\, f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$, tal que

$$g(\nabla^2 f(X), Y) = g(\nabla^2 f(Y), X).$$

Diremos que $\nabla^2 f \geq k(\leq k)$, se todos os seus autovalores forem $\geq k(\leq k)$.

Observação 1.17. *Durante todo este trabalho escreveremos* $\mathrm{Hess} f$ *ou* $\nabla\nabla f$ *ou* $\nabla^2 f$*, para denotar o Hessiano da função* f*.*

Definição 1.18. *Uma função diferenciável* $f : M \to \mathbb{R}$ *é dita* ***convexa****, se para cada geodésica* $\gamma : [a,b] \to M$ *a função* $(f \circ \gamma)$ *for convexa, isto é*

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-a) + f(\gamma(a)),$$

ou equivalentemente

$$f(\gamma(s)) \leq \frac{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}{b-a}(s-b) + f(\gamma(b))$$

para todo $s \in [a,b]$*.*

Lema 1.19. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Então* $\nabla^2 f \geq 0$ *se, e somente se,* f *é convexa.*

Demonstração. Suponha $\nabla^2 f \geq 0$, então para uma geodésica qualquer $\gamma : [0,1] \to M$ temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t) = (\mathrm{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq 0,$$

para todo $t \in [0,1]$. Então, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, quaisquer que sejam $t, t+h \in [0,1]$, existe c entre t e $t+h$, com

$$(f \circ \gamma)(t+h) = (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h + \frac{(f \circ \gamma)''(c)}{2}h^2.$$

Como $(f \circ \gamma)''(c) \geq 0$, temos $(f \circ \gamma)(t+h) \geq (f \circ \gamma)(t) + (f \circ \gamma)'(t)h$. Logo

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \leq (f \circ \gamma)'(t),$$

se $h < 0$, e

$$\frac{(f \circ \gamma)(t+h) - (f \circ \gamma)(t)}{h} \geq (f \circ \gamma)'(t),$$

quando $h > 0$. Equivalentemente: se $0 < s < 1$, então

$$\frac{(f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(0)}{s} \leq \frac{(f\circ\gamma)(1)-(f\circ\gamma)(s)}{1-s},$$

e

$$\begin{aligned}(1-s)((f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(0)) &\leq s(f\circ\gamma)(1)-s(f\circ\gamma)(s)\\ (f\circ\gamma)(s) &\leq (1-s)(f\circ\gamma)(0)+s(f\circ\gamma)(1).\end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

Reciprocamente, seja $\gamma : [r,t] \to M$ uma geodésica qualquer. Se f é convexa então, para quaisquer $s, a, b \in \mathbb{R}$ tais que, $s \in (a,b) \subset [r,t]$, temos

$$\frac{(f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(a)}{s-a} \leq \frac{(f\circ\gamma)(b)-(f\circ\gamma)(a)}{b-a} \leq \frac{(f\circ\gamma)(s)-(f\circ\gamma)(b)}{s-b},$$

fazendo $s \to a$ na primeira desigualdade e $s \to b$ na segunda, obtemos

$$(f\circ\gamma)'(a) \leq (f\circ\gamma)'(b).$$

Logo $(f\circ\gamma)'(s)$ é não-decrescente em $[r,t]$, donde $(f\circ\gamma)''(s) \geq 0$ para todo $[r,s]$, mas já sabemos que

$$(f\circ\gamma)''(s) = \text{Hess}\, f_{\gamma(s)}(\gamma', \gamma'),$$

assim provando o lema. □

Lema 1.20. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana completa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $p \in M$ é um ponto crítico de f, então p é um mínimo global de f.*

Demonstração. Suponha que $p \in M$ é um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(p) = 0$. Dado qualquer $q \in M$, seja $\gamma : [0,1] \to M$ geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ (tal geodésica existe, pois M é completa), como f é convexa, então pelo lema anterior

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = (\text{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq 0.$$

Integrando e usando o teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) - \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) \geq 0.$$

Como

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = g(\nabla f(p), \gamma'(0)) = 0,$$

integrando novamente temos

$$(f \circ \gamma)(t) \geq (f \circ \gamma)(0),$$

para todo $t \in [0,1]$. Consequentemente $f(q) \geq f(p)$. $\square$

Definição 1.21. *Seja (M, g) uma variedade Riemannina. O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)-$tensor $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \nabla^2_{X,Y}Z - \nabla^2_{Y,Z}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $\mathrm{Rm} : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z, W).$$

Proposição 1.22. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = -\mathrm{Rm}\,(Y,X,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Y,X,W,Z)$.

(2) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Z,W,X,Y)$.

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z + \mathrm{Rm}\,(Y,Z)X + \mathrm{Rm}\,(Z,X)Y = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z\mathrm{Rm})(X,Y,W) + (\nabla_X\mathrm{Rm})(Y,Z,W) + (\nabla_Y\mathrm{Rm})(Z,X,W) = 0.$$

Para uma prova veja Capítulo 3 de [20].

Definição 1.23. *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A **curvatura seccional** de P em p é dada por*

$$\sec\,(X,Y) = \frac{g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2},$$

onde $X, Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM. É possivel mostrar que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [8]).

Observe que, se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de P, então

$$\sec(e_1, e_2) = g(\mathrm{Rm}(e_1, e_2)e_2, e_1).$$

Definição 1.24. *O* ***tensor curvatura de Ricci*** $Ric : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *é o* $(0,2)-$*tensor obtido pelo "traço"do tensor curvatura de Riemann, isto é,*

$$Ric(Y, Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto \mathrm{Rm}(X, Y)Z\},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$Ric(v, w) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}(e_i, v)w, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}(e_i, w)v, e_i).$$

Assim Ric é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o $(1,1)-$tensor simétrico

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rm}(v, e_i)e_i.$$

Diremos que $Ric \geq k(\leq k)$ se todos os autovalores de $Ric(v)$ são $\geq k\,(\leq k)$. Se (M^n, g) satisfaz $Ric(v) = kv$, ou equivalentemente, $Ric(v, v) = kg(v, v)$, onde $k{:}M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então (M^n, g) é dita uma **variedade de Einstein**. Quando $n \geq 3$ temos que k é constante e chamamos de **constante de Einstein**.

Definição 1.25. *A* ***curvatura escalar*** *de uma variedade é a função* $\mathrm{R} : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = \mathrm{tr}\,Ric.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{tr}\,Ric \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(Ric(e_j), e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(\mathrm{Rm}(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i<j} g(\mathrm{Rm}(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i<j} \sec(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Proposição 1.26. *(Segunda Identidade de Bianchi contraída)*

$$\mathrm{d}R = 2\mathrm{div}\, Ric.$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de $p \in M$ qualquer, $X \in \mathfrak{X}(M)$, usando a segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}R\,(X) &= D_X R \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_X \mathrm{Rm})(E_i, E_j, E_j, E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_{E_j} \mathrm{Rm})(E_i, X, E_j, E_i) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_{E_i} \mathrm{Rm})(E_j, X, E_j, E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_{E_j} \mathrm{Rm})(E_i, X, E_j, E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_{E_j} \mathrm{Rm})(E_j, E_i, E_i, X) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{E_j} (\mathrm{Rm}\,(E_j, E_i, E_i, X)) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} \nabla_{E_j} g(Ric\,(E_j), X) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} g((\nabla_{E_j} Ric)(X), E_j).
\end{aligned}$$

Usando a definição 1.11 concluimos que

$$\mathrm{d}R\,(X) = 2\mathrm{div}\, Ric\,(X),$$

como queriamos provar. □

Definição 1.27. *Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}$, onde $U \subset (M, g)$ é aberto, é uma* ***função distância*** *se $|\nabla f| = 1$ sobre U.*

Provaremos agora as três equações fundamentais da geometria Riemanniana, onde a segunda e a terceira são conhecidas como, **equação de Gauss** e **equação de Codazzi-Mainardi**, respectivamente.

Teorema 1.28. *(Equação da Curvatura Radial) Se $U \subset (M, g)$ é um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função distância, então*

$$\nabla_N S + S^2 = -\mathrm{Rm}_N,$$

onde $N = \nabla f$, $S = \nabla^2 f$ e $\mathrm{Rm}_N = \mathrm{Rm}\,(\cdot, N)N$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ qualquer, então

$$\begin{aligned}(\nabla_N S)(X) + S^2(X) &= \nabla_N(S(X)) - S(\nabla_N X) + S(S(X)) \\ &= \nabla_N \nabla_X N - \nabla_{\nabla_N X} N + \nabla_{\nabla_X N} N \\ &= \nabla_N \nabla_X N - \nabla_{[N,X]} N \\ &= -\mathrm{Rm}\,(X, N)N + \nabla_X \nabla_N N.\end{aligned}$$

Contudo, já que $|N| = 1$, então $\nabla_N N = 0$, pois para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$

$$\begin{aligned}g(\nabla_N N, Y) &= g(S(N), Y) \\ &= g(N, S(Y)) \\ &= g(N, \nabla_Y N) \\ &= \frac{1}{2} D_Y g(N, N).\end{aligned}$$

Como N é unitário, segue o afirmado. □

Em particular, $\nabla_N N = S(N) = 0$ sobre U, isto é, as curvas integrais de N são geodésicas em U.

Teorema 1.29. *(Equação da Curvatura Tangencial)*

$$\begin{aligned}\tan \mathrm{Rm}\,(X, Y)Z &= \mathrm{Rm}^r\,(X, Y)Z - \mathrm{II}(Y, Z)S(X) + \mathrm{II}(X, Z)S(Y) \\ &= \mathrm{Rm}^r\,(X, Y)Z - g(S(Y), Z)S(X) + g(S(X), Z)S(Y),\end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U_r)$ sendo $U_r = f^{-1}(r)$ e Rm^r é o tensor curvatura de Riemann de (U_r, g_r), $\tan(W) = W - g(W, N)N$ é a projeção de W sobre TU_r, e $\mathrm{II}(U, V) = g(S(U), V)$.

Teorema 1.30. *(Equação da Curvatura Normal)*

$$\mathrm{nor}\,\mathrm{Rm}\,(X, Y)Z = g(-(\nabla_X S)(Y) + (\nabla_Y S)(X), Z)N,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U_r)$ e $\mathrm{nor}\,(W) = g(W, N)N$ é projeção de W sobre N.

Demonstração. As duas equações da curvatura acima, são obtidas calculando $\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z$. Se $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(U_r)$, então

$$\begin{aligned}\nabla^r_X Y &= \tan(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, N)N,\end{aligned}$$

como $g(Y,N)=0$, então $-g(\nabla_X Y, N) = g(Y, \nabla_X N)$ daí

$$\begin{aligned}\nabla^r_X Y &= \nabla_X Y + g(S(X),Y)N\\ &= \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)N.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \nabla_X(\nabla^r_Y Z - g(S(Y),Z)N) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z - g(S(X),Z)N)\\ &\quad -\nabla^r_{[X,Y]}Z + g(S([X,Y]),Y)N\\ &= \nabla_X\nabla^r_Y Z - \nabla_Y\nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]}Z\\ &\quad -\nabla_X(g(S(Y),Z)N) + \nabla_Y(g(S(X),Z)N)\\ &\quad +g(S([X,Y]),Z)N,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z &= \mathrm{Rm}^r\,(X,Y)Z\\ &\quad -g(S(X),\nabla^r_Y Z)N + g(S(Y),\nabla^r_X Z)N + g(S([X,Y]),Z)N\\ &\quad -g(\nabla_X S(Y),Z)N - g(S(Y),\nabla_X Z)N - g(S(Y),Z)\nabla_X N\\ &\quad +g(\nabla_Y S(X),Z)N + g(S(X),\nabla_Y Z)N + g(S(X),Z)\nabla_Y N,\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}g(S(X),\nabla_Y Z) &= g(S(X),\nabla^r_Y Z) + g(\nabla_Y Z, N)g(S(X),N)\\ &= g(S(X),\nabla^r_Y Z) - g(S(Y),Z)g(S(X),N).\\ g(S(Y),\nabla_X Z) &= g(S(Y),\nabla^r_X Z) + g(\nabla_X Z, N)g(S(Y),N)\\ &= g(S(Y),\nabla^r_X Z) - g(S(X),Z)g(S(Y),N),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g(S(X),N) &= g(X,S(N)) = 0\\ g(S(Y),N) &= g(Y,S(N)) = 0,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\operatorname{Rm}(X,Y)Z &= \operatorname{Rm}^{r}(X,Y)Z\\ &\quad -g(S(Y),Z)S(X)+g(S(X),Z)S(Y)\\ &\quad +(-g(\nabla_X S(Y),Z)+g(\nabla_Y S(X),Z))N\\ &\quad +(g(S(\nabla_X Y),Z)-g(S(\nabla_Y X),Z))N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \operatorname{Rm}^{r}(X,Y)Z-g(S(Y),Z)S(X)+g(S(X),Z)S(Y)\\ &\quad +g(-(\nabla_X S)(Y)+(\nabla_Y S)(X),Z)N.\end{aligned}$$

□

1.3 Derivadas de Lie

Lembre que um campo de vetores X é dito **completo** se houver um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ gerado por X.

Definição 1.31. *Seja α um tensor e X um campo completo (esta definição estender-se ao caso em que X não é completo e somente define um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos locais), a* ***derivada de Lie*** *de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\alpha=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^{*}\alpha-\alpha)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^{*}\alpha,$$

onde φ_t^{*} é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 1.32. *A derivada de Lie com respeito a $X\in\mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se $f\in\mathcal{C}^{\infty}(M)$, então $\mathcal{L}_X f=D_X f$.*

(2) *Se $Y\in\mathfrak{X}(M)$, então $\mathcal{L}_X Y=[X,Y]$.*

(3) *Sejam α e β tensores, então $\mathcal{L}_X(\alpha\otimes\beta)=(\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\beta+\alpha\otimes(\mathcal{L}_X\beta)$.*

(4) *Se α é um $(0,r)-$tensor, então para quaisquer $Y_1,\dots,Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\alpha)(Y_1,\dots,Y_r) &= D_X\alpha(Y_1,\dots,Y_r)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\dots,Y_{r-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\dots,Y_r)\\ &= (\nabla_X\alpha)(Y_1,\dots,Y_r)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\dots,Y_{i-1},\nabla_{Y_i}X,Y_{i+1},\dots,Y_r).\end{aligned}$$

Para uma prova veja Capítulo 13 de [17].

Agora note que da proposição acima, e do fato que $\nabla g = 0$ temos que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X,Z) + g(Y,\nabla_Z X), \tag{1.8}$$

para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, se $X = \nabla f$ para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = 2\mathrm{Hess}\, f(Y,Z). \tag{1.9}$$

Observação 1.33. Se $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo , α um tensor e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\alpha).$$

Se $f : M \to \mathbb{R}$, então

$$\varphi^*(\mathrm{grad}_g f) = \mathrm{grad}_{\varphi^*g}(f\circ\varphi).$$

Se $\varphi(t) : M \to M$ é uma família a $1-$parâmetro de difeomorfismos e α é um tensor, então

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)^*\alpha) = \mathcal{L}_{X(t)}\varphi(t)^*\alpha,$$

onde

$$X(t_0) \doteq \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varphi(t_0)^{-1}\circ\varphi(t)\Big)\Big|_{t=t_0} = \Big(\varphi(t_0)^{-1}\Big)_*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\Big|_{t=t_0}\Big).$$

Definição 1.34. *Um difeomorfismo $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ diz-se uma **isometria**, se $\varphi^*h = g$. Se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que $\varphi_{|_U} : U \to \varphi(U)$ é uma isometria, então este será uma **isometria local**.*

Proposição 1.35. *Se $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ é uma isometria, então $d\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\varphi(X)}(d\varphi(Y))$, para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para uma prova veja Capítulo 3 de [18].

Com este resultado, podemos verificar alguns resultados que usaremos posteriormente.

Lema 1.36. *Seja $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ isometria. Então*

(1) $d\varphi(\mathrm{Rm}_1(X,Y)Z) = \mathrm{Rm}_2(d\varphi(X), d\varphi(Y))(d\varphi(Z))$.

(2) $\varphi^*(R_{\mathrm{N}}) = R_{\mathrm{M}}$, *isto é,* $R_{\mathrm{N}} \circ \varphi = R_{\mathrm{M}}$.

(3) $\varphi^*(Ric_{\mathrm{N}}) = Ric_{\mathrm{M}}$,

onde Rm_1 *e* Rm_2 *são os tensores curvatura de Riemann de* M *e* N *respectivamente,* Ric_{M} *e* Ric_{N} *seus tensores Ricci e* R_{M} *e* R_{N} *suas curvaturas escalar.*

Demonstração. Para (1), note que dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1(X,Y)Z) &= d\varphi(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= d\varphi(\nabla_X\nabla_Y Z) - d\varphi(\nabla_Y\nabla_X Z) - d\varphi(\nabla_{[X,Y]}Z). \end{aligned}$$

da proposição anterior e usando o fato que $[d\varphi(X), d\varphi(Y)] = d\varphi([X,Y])$, obtemos

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1(X,Y)Z) &= \nabla_{d\varphi(X)}\nabla_{d\varphi(Y)}d\varphi(Z) - \nabla_{d\varphi(Y)}\nabla_{d\varphi(X)}d\varphi(Z) \\ &\quad -\nabla_{[d\varphi(X),d\varphi(Y)]}d\varphi(Z) \\ &= \mathrm{Rm}_2(d\varphi(X), d\varphi(Y))d\varphi(Z). \end{aligned}$$

Para (2), veja que dados $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $P \subset T_pM$, então

$$\begin{aligned} \sec(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2)) &= g_N(\mathrm{Rm}_2(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2))d\varphi(e_2), d\varphi(e_1)) \\ &= g_N(d\varphi(\mathrm{Rm}_1(e_1,e_2)e_2), d\varphi(e_1)) \\ &= g_M(\mathrm{Rm}_1(e_1,e_2)e_2, e_1). \end{aligned}$$

Assim $\mathrm{R}_{\mathrm{N}} \circ \varphi = \mathrm{R}_{\mathrm{M}}$. Um racíocinio análogo leva a (3). □

O próximo lema pode ser encontrado em [21].

Lema 1.37. *Dados uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric\,(X,X) + D_X \mathrm{div}\, X. \tag{1.10}$$

Em particular, se $X = \nabla f$ *e* $Z \in \mathfrak{X}(M)$, *então*

$$\mathrm{div}\,(\mathcal{L}_X g)(Z) = 2Ric\,(Z,X) + 2D_Z \mathrm{div}\, X, \tag{1.11}$$

ou na notação de $(1,1)$*-tensor*

$$\mathrm{div}\,\nabla\nabla f = Ric\,(\nabla f) + \nabla\Delta f. \tag{1.12}$$

Demonstração: Sejam $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial geodésico em torno de $p \in M$ qualquer e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}\mathcal{L}_X g)(E_i, X) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g(E_i, X)) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(\nabla_{E_i}E_i, X) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(E_i, \nabla_{E_i}X),
\end{aligned}$$

como $\mathcal{L}_X g(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X) + g(E_i, \nabla_X X)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^n g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} g(\nabla_{E_i}X, X) + \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} g(E_i, \nabla_X X) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^n g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\frac{1}{2}\nabla|X|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j E_j$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= g(\frac{1}{2}\nabla|X|^2, E_j) \\
&= D_{E_j}(\frac{1}{2}|X|^2) \\
&= g(\nabla_{E_j}X, X).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\nabla|X|^2 = \sum_{j=1}^n g(\nabla_{E_j}X, X)E_j,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= \operatorname{div}(\frac{1}{2}\nabla|X|^2) \\
&= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}(\frac{1}{2}\nabla|X|^2), E_i).
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}(\frac{1}{2}\nabla|X|^2) &= \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^n g(\nabla_{E_j}X, X)E_j, E_i) \\
&= \sum_{j=1}^n \{g(\nabla_{E_j}X, X)\nabla_{E_i}E_j + E_i(g(\nabla_{E_j}X, X))E_j\} \\
&= \sum_{j=1}^n \nabla_{E_i} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= \sum_{i=1}^{n} g(\sum_{j=1}^{n} \nabla_{E_i} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j, E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} g(\nabla_{E_i}X, X).\end{aligned}$$

Agora olhando ∇X como $(1,1)$-tensor, isto é, $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$, temos que,

$$|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(E_i, \nabla_X X)) - |\nabla X|^2 - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)\\ &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}E_i, \nabla_X X)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{E_i}\nabla_X X) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)\\ &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_X X - \nabla_{\nabla_{E_i}X}X, E_i).\end{aligned}$$

Observe que, fazendo $X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j$, temos $\nabla_X E_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \nabla_{E_j}E_i = 0$ e completando $\nabla_{E_i}\nabla_X X - \nabla_{\nabla_{E_i}X}X$ para $\operatorname{Rm}(E_i, X)X$, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_X X - \nabla_X\nabla_{E_i}X - \nabla_{\nabla_{E_i}X - \nabla_X E_i}X + \nabla_X\nabla_{E_i}X, E_i)\\ &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\operatorname{Rm}(E_i, X)X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X\nabla_{E_i}X, E_i)\\ &= \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric\,(X, X) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X\nabla_{E_i}X, E_i).\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}D_X\operatorname{div}X &= \nabla_X(\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_X(g(\nabla_{E_i}X, E_i))\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X\nabla_{E_i}X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_X E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X\nabla_{E_i}X, E_i).\end{aligned}$$

Daí,

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric\,(X,X) + D_X \operatorname{div} X,$$

o que prova (1.10).

Para (1.11), observe que, sendo $X = \nabla f$, então

$$g(\nabla_Y X, Z) = \operatorname{Hess} f(Y,Z) = \operatorname{Hess} f(Z,Y) = g(\nabla_Z X, Y). \tag{1.13}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(Z) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g)(E_i, Z) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g(E_i, Z)) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(\nabla_{E_i} E_i, Z) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, \nabla_{E_i} Z) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i} X, Z) + g(E_i, \nabla_Z X)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i}) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X).
\end{aligned}$$

Usando (1.13), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(Z) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\{g(\nabla_Z X, E_i) + g(\nabla_Z X, E_i)\} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i} Z} X, E_i) - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i} Z} X, E_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}\{g(\nabla_Z X, E_i)\} - 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i} Z} X, E_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_Z X, E_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_Z X, \nabla_{E_i} E_i) - 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i} Z} X, E_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_Z X - \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X, E_i).
\end{aligned}$$

Tendo em vista que $\nabla_Z E_i = 0$, então completando $\nabla_{E_i}\nabla_Z X - \nabla_{\nabla_{E_i} Z} X$ para $\operatorname{Rm}(E_i, Z)X$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(Z) &= 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_{E_i}X - \nabla_{\nabla_{E_i}Z-\nabla_Z E_i}X + \nabla_Z\nabla_{E_i}X, E_i)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(E_i, Z)X, E_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_Z\nabla_{E_i}X, E_i)\\
&= 2Ric\,(Z, X) + 2\sum_{i=1}^{n} \nabla_Z(g(\nabla_{E_i}X, E_i)) - 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_Z E_i)\\
&= 2Ric\,(Z, X) + 2\nabla_Z(\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, E_i))\\
&= 2Ric\,(Z, X) + 2D_Z\operatorname{div} X,
\end{aligned}$$

ou como $(1, 1)$-tensor

$$2(\operatorname{div}\operatorname{Hess} f)(Z) = 2Ric\,(\nabla f, Z) + 2\nabla_Z\Delta f,$$

como

$$\nabla_Z\Delta f = Z(\Delta f) = \langle\nabla\Delta f, Z\rangle,$$

temos,

$$\operatorname{div}\nabla\nabla f = Ric\,(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

$\square$

Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.38. *Para uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$, onde M é uma variedade Riemanniana, vale:*

(1) $2(\operatorname{divHess} f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 + Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle$.

(2) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric\,(\nabla f, \nabla f) + |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle$.

Esta última é conhecida como fórmula de Bochner.

Demonstração: Fazendo $X = \nabla f$ em (1.10), temos

$$2(\operatorname{divHess} f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 + Ric\,(\nabla f, \nabla f) + D_{\nabla f}\Delta f).$$

Observe que $D_{\nabla f}\Delta f = \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle$. Logo

$$2(\operatorname{divHess} f)(\nabla f) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 + Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle$$

o que prova (1).

Para (2), fazendo $Z = \nabla f$ em (1.11), temos

$$2(\mathrm{divHess}\, f)(\nabla f) = 2Ric\,(\nabla f, \nabla f) + 2\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle.$$

Substituindo no item (1), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - |\mathrm{Hess}\, f|^2 + Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle = 2Ric\,(\nabla f, \nabla f) + 2\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle,$$

portanto,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + Ric\,(\nabla f, \nabla f).$$

$\square$

Capítulo 2

Métricas m-quasi-Einstein

Neste capítulo, definiremos as métricas quasi-Einstein e estabeleceremos algumas fórmulas. Nas duas primeiras seções trabalharemos com campo de vetores suave quaisquer. Nas seções seguintes trabalharemos no caso específico quando o campos em questão é um campo gradiente e provaremos alguns resultados. Essas fórmulas serão utilizadas no próximo capítulo. Neste capítulo M denotará uma variedade conexa e completa. No caso em que M for compacta, esta é sem bordo.

2.1 Definições e equações básicas

Definição 2.1. *Seja (M^n, g) uma Variedade Riemanniana, definimos o* ***m-Bakry-Emery tensor de Ricci por****:*

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat \tag{2.1}$$

onde $0 < m \leq \infty$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X^\flat$ é a 1-forma associada a X, $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X.

Vale observar que se $X = 0$, então o m-Bakry-Emery tensor de Ricci coincide com o tensor de Ricci.

Definição 2.2. *Uma métrica g em uma variedade (M^n, g) associado com um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, é dita ser* ***m-quasi-Einstein*** *ou simplesmente* ***quasi-Einstein****, se a seguinte relação*

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat = \lambda g \tag{2.2}$$

vale para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, se aplicarmos o campo X na igualdade acima, teremos

$$Ric\,(X,X) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(X,X) - \frac{1}{m}X^\flat \otimes X^\flat(X,X) = \lambda g(X,X),$$

ou ainda,

$$Ric\,(X,X) + \frac{1}{2}(g(\nabla_X X, X) + g(X, \nabla_X X)) - \frac{1}{m}|X|^2|X|^2 = \lambda|X|^2$$

e portanto

$$Ric\,(X,X) + \langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2. \tag{2.3}$$

Mais ainda, tendo em vista que

$$\mathrm{tr}(\mathcal{L}_X g) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i) = 2\mathrm{div}\, X$$

e

$$\mathrm{tr}(X^\flat \otimes X^\flat) = \sum_{i=1}^{n} X^\flat \otimes X^\flat(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} g(X, E_i)^2 = |X|^2,$$

então, tomando o traço na equação (2.2), deduzimos que

$$R + \mathrm{div}\, X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n. \tag{2.4}$$

Agora quando $m = \infty$ a equação (2.2) se reduz a

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g,$$

que é a equação que define os solitons de Ricci. Assim as métricas quasi-Einstein generalizam os solitons de Ricci.

Definição 2.3. *Uma métrica quasi-Einstein g é dita ser expansiva se $\lambda < 0$, estável se $\lambda = 0$ e contrátil se $\lambda > 0$.*

Vale a pena notar que quando $X \equiv 0$ a equação (2.2) reduz-se a $Ric = \lambda g$, que é a equação de Einstein. Isso nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.4. *Uma métrica quasi-Einstein é dita ser trivial se $X \equiv 0$.*

A trivialidade da métrica nos diz que a variedade é de Einstein. Na seção 2.2 apresentamos dois teoremas que nos diz sob que condições uma métrica quasi-Einstein é uma variedade de Einstein.

Exemplo 2.5. *Seja $(\mathbb{H}^n, g, \nabla f)$, o espaço hiperbólico com a métrica warped dada por $g = dt^2 + e^{2t}g_0$, onde g_0 é a métrica canônica do $\mathbb{R}^{n-1}$, e $f(t, x_2, \cdots, x_n) = -mt$. Então $Ric_{\nabla f}^{\,m} = -(m+n-1)g$.*

A verificação do exemplo será feita na seção 2.3, onde teremos todas as ferramentas necessárias para tal propósito.

Antes de provarmos o próximo lema, que nos ajudará a demonstrar os resultados da seção 2.2, vale ressaltar a seguinte observação.

Observação 2.6. *Seja $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial geódesico em torno de um ponto p qualquer, então*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat)(E_i) &= \operatorname{div}(X^\flat(E_i)X) \\
&= X^\flat(E_i)\operatorname{div} X + X(X^\flat(E_i)) \\
&= X^\flat(E_i)\operatorname{div} X + g(\nabla_X X, E_i) + g(X, \nabla_X E_i).
\end{aligned}$$

Fazendo $X = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j E_j$, *temos* $\nabla_X E_i = \nabla_{\sum_{j=1}^n x_j E_j} E_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j \nabla_{E_j} E_i = 0$, *logo*

$$\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat)(E_i) = X^\flat(E_i)\operatorname{div} X + (\nabla_X X)^\flat(E_i).$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = X^\flat \operatorname{div} X + (\nabla_X X)^\flat. \tag{2.5}$$

Relembramos que o operador difusão é dado por $\Delta_X = \Delta - D_X$, isto é, $\Delta_X f = \Delta f - D_X f$,. Nessas condições temos o seguinte lema, que é devido a Barros e Ribeiro Jr., veja [2]. Vale ressaltar que o item (1) foi obtido por Case et al em [10], para campo gradiente e estendido por Barros e Ribeiro Jr.

Lema 2.7. *Seja (M^n, g, X) uma variedade Riemanniana tal que $Ric_X^{\,m} = \lambda g$. Então:*

(1) $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 \operatorname{div} X$.

(2) $\frac{1}{2}\Delta_X|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2\operatorname{div} X - |X|^2)$.

(3) Se m for finito e $\nabla X = 0$, então $X = 0$.

Demonstração: Para provar (1) observe que por (1.10), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = \operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) + |\nabla X|^2 - Ric(X,X) - D_X \operatorname{div} X.$$

Sendo $\operatorname{div} g = 0$, então aplicando o divergente na igualdade (2.2)

$$\mathrm{div}Ric + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = 0,$$

isto é,

$$\operatorname{div}\mathcal{L}_X g = -2\mathrm{div}Ric + \frac{2}{m}\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat).$$

Por (2.5) e pela segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, temos

$$\operatorname{div}\mathcal{L}_X g = -\nabla R + \frac{2}{m}\operatorname{div} X X^\flat + \frac{2}{m}(\nabla_X X)^\flat.$$

Assim, aplicando no campo X obtemos

$$(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) = -\langle \nabla R\,, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2 \operatorname{div} X + \frac{2}{m}\langle \nabla_X X, X\rangle.$$

Aplicando a derivada covariante em $\mathrm{R} + \operatorname{div} X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n$, temos

$$\nabla \mathrm{R} + \nabla \operatorname{div} X - \frac{1}{m}\nabla |X|^2 = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= -\langle \frac{1}{m}\nabla|X|^2 - \nabla\operatorname{div} X, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle \\
&= -\frac{1}{m}\langle \nabla|X|^2, X\rangle + \langle\nabla\operatorname{div} X, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle \\
&= -\frac{1}{m}X(|X|^2) + D_X\operatorname{div} X + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle \\
&= -\frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle + D_X\operatorname{div} X + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X + \frac{2}{m}\langle\nabla_X X, X\rangle \\
&= D_X\operatorname{div} X + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= D_X\operatorname{div} X + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X + |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) - D_X\operatorname{div} X \\
&= |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

O que prova o primeiro item.

Para provar o item (2), por (2.3), temos

$$Ric\,(X,X) = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2 - \langle\nabla_X X, X\rangle.$$

Assim, substituindo no primeiro item

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \frac{1}{m}|X|^4 - \lambda|X|^2 + \langle\nabla_X X, X\rangle + \frac{2}{m}|X|^2\operatorname{div} X.$$

Observe que,

$$\langle \nabla_X X, X\rangle = D_X\langle X, X\rangle - \langle \nabla_X X, X\rangle,$$

donde,

$$\langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{2}D_X|X|^2.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 - \frac{1}{2}D_X|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2\mathrm{div}\, X - |X|^2),$$

o que prova o segundo item.

Para o terceiro item, suponha que $\nabla X = 0$, isto é, $\nabla_Y X = 0$, $\forall \;\; Y \in \mathfrak{X}(M)$. Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, então

$$Y(|X|^2) = 2\langle \nabla_Y X, X\rangle = 0,$$

o que implica $|X|^2$ é constante.

Observe também que,

$$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i) = 0.$$

Portanto, no primeiro item, temos $Ric\,(X, X) = 0$.

Daí, (2.3) se reduz a

$$\frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2 = 0.$$

Assim, temos duas possibilidades, $\lambda \geq 0$ ou $\lambda < 0$.

i) se $\lambda \geq 0$, então $|X|^2 = 0$ e portanto $X = 0$.

ii) se $\lambda < 0$, suponha por absurdo, que $X \neq 0$, então

$$\lambda|X|^2 = -\frac{1}{m}|X|^4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{m}|X|^2.$$

Assim aplicando X e Y em (2.2), com o valor de λ acima, temos

$$Ric\,(X, Y) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(X, Y) - \frac{1}{m}X^\flat(X) \otimes X^\flat(Y) = -\frac{1}{m}|X|^2 g(X, Y).$$

Observe que

$$\mathcal{L}_X g(X, Y) = g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_Y X) = 0,$$

então

$$Ric\,(X, Y) = \frac{1}{m}|X|^2 g(X, Y) - \frac{1}{m}|X|^2 g(X, Y) = 0,$$

qualquer que seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto M^n é Ricci flat. Por outro lado, se considerarmos Y ortogonal a X, teremos

$$\begin{aligned} Ric\,(Y,Y) &= \frac{1}{m}X^\flat(Y)X^\flat(Y) - \frac{1}{m}|X|^2 g(Y,Y) \\ &= \frac{1}{m}(g(X,Y)^2 - |X|^2|Y|^2) \\ &= -\frac{1}{m}|X|^2|Y|^2 < 0. \end{aligned}$$

O que é uma contradição, logo $X \equiv 0$. Provando assim o terceiro item e terminando a prova do lema. $\square$

Se fizermos $X = \nabla f$ no lema acima e escrevermos $\Delta_f = \Delta_{\nabla f}$, teremos o seguinte corolário.

Corolário 2.8. *Nas mesmas hipóteses do Lema 2.7, se $X = \nabla f$, temos:*

(1) $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla\nabla f|^2 - Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f.$

(2) $\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 = |\nabla\nabla f|^2 - \lambda|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2(2\Delta f - |\nabla f|^2).$

2.2 Teoremas de Rigidez para métricas quasi-Einstein

Nesta seção apresentaremos dois teoremas de rigidez para um campo de vetores qualquer, sendo um deles para uma variedade compacta e outro para não-compacta. Esses dois resultados são devidos a Barros e Ribeiro Jr. em [2].
Antes de apresentarmos esses teoremas, relembramos a seguinte definição.

Definição 2.9. *Dada uma variedade Riemanniana orientada (M^n, g), dizemos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é **campo conforme** se*

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g$$

*para alguma função suave ρ sobre M. A função ρ é o **fator de conformidade** de X.*

Nessas condições, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.10. *Seja (M^n, g, X), $n \geq 3$, variedade Riemanniana compacta satisfazendo $Ric_X^m = \lambda g$. Então M é uma variedade de Einstein se uma das seguintes condições ocorre:*

(1) $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div}\,X dM.$

(2) X é um campo conforme e $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0.$

(3) $|X|$ é constante e $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0.$

Demonstração: Por (1) do Lema 2.7, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric\,(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 \mathrm{div}\, X.$$

Integrando sobre M a equação acima, teremos

$$\frac{1}{2}\int_M \Delta|X|^2 dM = \int_M |\nabla X|^2 dM - \int_M Ric\,(X,X)dM + \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div}\, X dM.$$

Agora, observe que, usando o teorema da divergência, teremos

$$\int_M \Delta|X|^2 dM = \int_M \mathrm{div}(\nabla|X|^2)dM = \int_{\partial M} \langle \nabla|X|^2, N\rangle dS = 0,$$

pois $\partial M = \emptyset$. Assim

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric\,(X,X)dM - \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div}\, X dM. \tag{2.6}$$

Assumindo (1) como hipótese, (2.6) nos diz que

$$\int_M |\nabla X|^2 dM \leq 0.$$

Logo, $|\nabla X| \equiv 0$, o que implica $\nabla X \equiv 0$. Pelo item (3) do Lema 2.7, $X \equiv 0$ e portanto, M é uma variedade de Einstein.

Vamos agora assumir (2) como hipótese. Sendo X campo de vetores conforme, então, por definição, existe uma função suave ρ em M, tal que

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g. \tag{2.7}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(X,X) &= 2\rho g(X,X) \\ 2g(\nabla_X X, X) &= 2\rho|X|^2 \\ g(\nabla_X X, X) &= \rho|X|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tomando o traço na igualdade (2.7), teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathcal{L}_X) &= 2\rho \mathrm{tr}\, g \\ 2\mathrm{div}\, X &= 2\rho n \\ \mathrm{div}\, X &= \rho n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por outro lado, usando (2.8) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(|X|^2X) &= |X|^2\operatorname{div}X + X(|X|^2)\\ &= |X|^2\rho n + 2g(\nabla_X X, X)\\ &= |X|^2\rho n + 2\rho|X|^2\\ &= (n+2)\rho|X|^2.\end{aligned}$$

Assim, integrando sobre M

$$\int_M \operatorname{div}(|X|^2X)dM = (n+2)\int_M \rho|X|^2 dM,$$

porém, usando o teorema da divergência

$$\int_M \operatorname{div}(|X|^2X)dM = \int_{\partial M}\langle\nabla(|X|^2X), N\rangle dS = 0,$$

e por (2.9), $\rho = \frac{\operatorname{div}X}{n}$, concluímos que

$$\int_M |X|^2\operatorname{div}X dM = 0.$$

Logo (2.6), reduz-se a

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric\,(X,X)dM.$$

Mas, por hipótese, $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0$, portanto

$$\int_M |\nabla X|^2 dM \leq 0.$$

Daí, $|\nabla X|^2 \equiv 0$, logo $\nabla X \equiv 0$, por (3) do Lema 2.7, $X \equiv 0$. Portanto M é uma variedade de Einstein.

Supondo agora (3) como hipótese, então sendo $|X|$ constante e usando o Teorema da divergência, concluímos que

$$\int_M |X|^2\operatorname{div}X dM = |X|^2\int_M \operatorname{div}X dM = |X|^2\int_{\partial M}\langle\nabla X, N\rangle dS = 0.$$

Usando o fato de $\displaystyle\int_M Ric\,(X,X)dM \leq 0$, (2.6) nos diz que

$$\int_M |\nabla X|^2 dM \leq 0.$$

Daí concluímos que $\nabla X \equiv 0$. Pelo item (3) do Lema 2.7, $X \equiv 0$, e, portanto, M é uma variedade de Einstein. $\square$

S. T. Yau, em [22], obteve a seguinte versão do Teorema de Stokes em uma variedade Riemanniana completa e não-compacta M^n:

Teorema 2.11. *Se $w \in \Omega^{n-1}(M)$ é uma $n-1$ forma diferencial em M, então exite uma sequência B_i de domínios em M, tais que $B_i \subset B_{i+1}$, $M = \bigcup_{i\geq 1} B_i$ e*

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{B_i} w = 0.$$

Aplicando este resultado para $w = \iota_{\nabla f}$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $\iota_{\nabla f}$ a contração na direção de ∇f, Yau estabeleceu a seguinte extensão do Teorema de H. Hopf em uma variedade Riemanniana completa e não-compacta:

Teorema 2.12. *Uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ subharmônica, definida sobre uma variedade Riemanniana completa e não-compacta é constante, desde que $|\nabla f| \in L^1(M^n)$. Onde $L^1(M^n)$ é o espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue na variedade M.*

Recentemente este resultado foi estendido por Camargo et al. em [6] para campos de vetores quaisquer. Enunciaremos e demonstraremos agora esta proposição.

Proposição 2.13. *Sejam M^n variedade Riemanniana completa, não-compacta e orientável e $X \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $\operatorname{div} X$ não muda de sinal em M. Se $|X| \in L^1(M)$, então $\operatorname{div} X \equiv 0$ em M.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $\operatorname{div} X \geq 0$ em M. Seja w a $(n-1)$-forma em M dada por $w = \iota_X dM$, isto é, a contração de dM na direção do campos de vetores suaves X em M. Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$, com co-referencial $\{w_1, \cdots, w_n\}$, então

$$\iota_X dM = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\langle X, e_i\rangle w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_i} \wedge \cdots \wedge w_n.$$

Dado que as $n-1$ formas $w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_i} \wedge \cdots \wedge w_n$ são ortonormais em $\Omega^{n-1}(M)$, temos que

$$|w|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle X, e_i\rangle^2 = |X|^2.$$

Então $|w| \in L^1(M)$ e $dw = d(\iota_X dM) = (\operatorname{div} X)dM$. Considerando B_i da discursão acima, temos

$$\int_{B_i} (\operatorname{div} X)dM = \int_{B_i} dw \longrightarrow 0,$$

quando $i \to +\infty$. Mas, dado que $\operatorname{div} X \geq 0$ em M, segue que $\operatorname{div} X = 0$ em M. $\square$

Com o auxílio desta proposição provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.14. *Seja (M^n, g, X) variedade Riemanniana completa, não-compacta tal que $Ric_X^m = \lambda g$. Se $n\lambda \geq R$ e $|X| \in L^1(M^n)$, então M^n é variedade de Einstein.*

Demonstração: Como $Ric_X^m = \lambda g$, então $R + \operatorname{div} X - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n$, ou seja,

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{m}|X|^2 + \lambda n - R. \tag{2.10}$$

Por hipótese $n\lambda \geq R$, então da equação acima, temos que $\operatorname{div} X \geq 0$. Como $|X| \in L^1(M)$, pela Proposição 2.13, $\operatorname{div} X \equiv 0$ em M. Assim, (2.10) nos diz que,

$$\frac{1}{m}|X|^2 + \lambda n - R = 0.$$

Como $|X|^2 \geq 0$ e $\lambda n - R \geq 0$, então, $|X|^2 \equiv 0$ e $\lambda n = R$, o que implica $X \equiv 0$, portanto M^n é uma variedade de Einstein. $\square$

2.3 Métricas quasi-Einstein gradiente

Nesta seção trabalharemos com campos gradientes. Na realidade todo estudo de métricas quasi-Einstein foi iniciado com campos gradientes, veja por exemplo [9] e [10]. Este estudo foi estendido à campos quaisquer por Barros e Ribeiro Jr. em [2]. Assim, nesta seção dedicaremos nosso trabalho, para encontrar equações básicas desse tipo de métrica com campo gradiente.

Tendo em vista que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\operatorname{Hess} f$, então a definição 2.1, nos diz que:

$$Ric_{\nabla f}^m = Ric + \operatorname{Hess} f - \frac{1}{m} df \otimes df, \tag{2.11}$$

que chamaremos de **m-Bakry-Emery tensor de Ricci gradiente**.
Note que quando f é constante este tensor coincide com o tensor de Ricci. A partir da definição 2.2 temos a seguinte definição.

Definição 2.15. *Uma métrica g é dita ser **m-quasi-Einstein gradiente** se é uma métrica m-quasi-Einstein e $X = \nabla f$. Isto é,*

$$Ric_{\nabla f}^m = Ric + \operatorname{Hess} f - \frac{1}{m} df \otimes df = \lambda g \tag{2.12}$$

Quando $m = \infty$ temos a equação do soliton de Ricci gradiente. Quando m é inteiro positivo mostraremos que este corresponde a uma métrica de Einstein de um produto *warped*. Quando f é constante, então a equação acima se reduz a equação de Einstein. Assim da definição de métrica quasi-Einstein trivial temos que, no caso dos campos gradientes a métrica quasi-Einstein gradiente é trivial se f for constante.

Tendo em vista que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(df \otimes df) &= \sum_{i=1}^{n} df \otimes df(E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, E_i \rangle^2 \\
&= |\nabla f|^2,
\end{aligned}$$

então, tomando o traço em (2.12) temos

$$R + \Delta f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 = \lambda n. \tag{2.13}$$

Agora, aplicando a derivada covariante, deduzimos

$$\nabla R + \nabla \Delta f = \frac{1}{m}\nabla |\nabla f|^2. \tag{2.14}$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla |\nabla f|^2, Y \rangle &= Y(|\nabla f|^2) \\
&= 2\langle \nabla_Y \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= 2\mathrm{Hess}\, f(Y, \nabla f) \\
&= 2\mathrm{Hess}\, f(\nabla f, Y) \\
&= 2\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Y \rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla |\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f} \nabla f.$$

Portanto, (2.14) pode ser escrito como

$$\nabla R + \nabla \Delta f = \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f} \nabla f. \tag{2.15}$$

Mais ainda, aplicando o produto interno na equação acima com ∇f, temos

$$\langle \nabla R, \nabla f \rangle + \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle = \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla f \rangle. \tag{2.16}$$

Vamos neste momento provar uma relação que existe entre m ser um inteiro positivo com o produto *warped*. Para isto relembramos a seguinte definição.

Definição 2.16. *Sejam (M^n, g_M), (F^m, g_F) variedades Riemannianas e u uma função positiva em M, a métrica do produto warped em $M \times F$ é definido por*

$$g = g_M + u^2 g_F \tag{2.17}$$

e denotamos por $M \times_u F$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [18].

Proposição 2.17. *Em um produto warped $B = M \times_u F$ com $d = \dim F > 1$, sejam X, Y horizontais e V, W verticais. Então*

(1) $Ric\,(X, Y) = {}^M Ric\,(X, Y) - \frac{d}{u}\mathrm{Hess}u(X, Y)$.

(2) $Ric\,(X, V) = \nabla^2_M(X, V) = 0$.

(3) $Ric\,(V, W) = {}^F Ric\,(V, W) - \langle V, W\rangle \widetilde{u}$, *onde*

$$\widetilde{u} = \frac{\Delta u}{u} + (d-1)\frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

(4) $\nabla^2 u(X, X) = \nabla^2_M u(X, X)$.

(5) $\nabla^2 u(V, V) = u|\nabla u|^2_M g_F(V, V)$.

Seja $0 < m < \infty$ e considere $u = e^{-\frac{f}{m}}$, então temos

$$du = e^{-\frac{f}{m}}(-\frac{1}{m}df) = -\frac{1}{m}udf.$$

Logo

$$du(v) \quad = \quad -\frac{1}{m}udf(v),$$

isto é,

$$\langle \nabla u, v\rangle \quad = \quad -\frac{1}{m}u\langle \nabla f, v\rangle$$

para qualquer v, portanto

$$\nabla u = -\frac{1}{m}u\nabla f.$$

Mais ainda, seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de M e tendo em vista a equação acima, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} u(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla u, e_j \rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i} (-\frac{1}{m} u \nabla f), e_j \rangle \\
&= -\frac{1}{m} \langle \nabla_{e_i} (u \nabla f), e_j \rangle \\
&= -\frac{1}{m} \langle u \nabla_{e_i} \nabla f + e_i(u) \nabla f, e_j \rangle \\
&= -\frac{1}{m} (u \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle + du(e_i) \langle \nabla f, e_j \rangle) \\
&= -\frac{1}{m} (u \operatorname{Hess} f(e_i, e_j) - \frac{1}{m} u df(e_i) \langle \nabla f, e_j \rangle) \\
&= -\frac{u}{m} (\operatorname{Hess} f(e_i, e_j) - \frac{1}{m} \langle \nabla f, e_i \rangle \langle \nabla f, e_j \rangle),
\end{aligned}$$

assim

$$\frac{m}{u} \operatorname{Hess} u(e_i, e_j) = -\operatorname{Hess} f(e_i, e_j) + \frac{1}{m} df \otimes df(e_i, e_j),$$

portanto,

$$\frac{m}{u} \operatorname{Hess} u = -\operatorname{Hess} f + \frac{1}{m} df \otimes df. \tag{2.18}$$

Assim (2.12), pode ser escrito como

$$Ric - \frac{m}{u} \operatorname{Hess} u = \lambda g_M. \tag{2.19}$$

Por isso podemos usar a equação (2.19) para estudar (2.12) e vice-versa.

Observando a Proposição 2.17 com $d = m$ e $u = e^{-\frac{f}{m}}$, para vetores X, Y horizontais, (2.19) nos diz que

$${}^{B}Ric\,(X, Y) = \lambda g_M(X, Y) = \lambda g(X, Y), \tag{2.20}$$

onde $g = g_M + u^2 g_F$ é métrica de B. Assim as métricas quasi-Einstein definem o Ric do produto *warped* nos campos de vetores horizontais. Mais ainda, nos diz que para B ser uma variedade de Einsten, uma das condições é que M seja quasi-Einstein.

Vamos agora verificar a veracidade do exemplo 2.5.

Demonstração. Seja $U_1, U_2, \cdots, U_n$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Defina então,

$$E_1 = U_1$$

e

$$E_j = \frac{1}{e^t} U_j, \ \ j \geq 2.$$

Temos que $E_1, E_2, \cdots, E_n$ é uma base ortonormal para T_pM. Usando a Proposição 2.17, temos

$$\begin{aligned} Ric\,(E_1, E_1) &= {}^{\mathbb{R}}Ric\,(E_1, E_1) - \frac{n-1}{e^t}\nabla^2 e^t\,(E_1, E_1) \\ &= -\frac{n-1}{e^t}e^t \\ &= -(n-1). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Ric^m_{\nabla f}(E_1, E_1) &= Ric\,(E_1, E_1) - \frac{m}{e^t}\nabla^2 e^t\,(E_1, E_1) \\ &= -(n-1) - m = -(m+n-1) = -(m+n-1)g(E_1, E_1). \end{aligned}$$

Para $j \geq 2$

$$Ric\,(E_1, E_j) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} Ric^m_{\nabla f}(E_1, E_j) &= Ric\,(E_1, E_j) - \frac{m}{e^t}\nabla^2 e^t\,(E_1, E_j) = 0 \\ &= -(m+n-1)g(E_1, E_j). \end{aligned}$$

Para $i, j \geq 2$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned} Ric\,(E_i, E_j) &= {}^{\mathbb{R}^{n-1}}Ric\,(E_i, E_j) - g(E_i, E_j)(\frac{\Delta e^t}{e^t} + (n-2)\frac{g(\nabla e^t, \nabla e^t)}{e^{2t}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Ric^m_{\nabla f}(E_i, E_j) &= Ric\,(E_i, E_j) - \frac{m}{e^t}\nabla^2 e^t\,(E_i, E_j) \\ &= 0 = -(m+n-1)g(E_i, E_j). \end{aligned}$$

Para $i \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} Ric^m_{\nabla f}(E_i, E_i) &= Ric\,(E_i, E_i) - \frac{m}{e^t}\nabla^2 e^t\,(E_i, E_i) \\ &= -(n-1) - \frac{m}{e^t}e^t e^{2t} g_F(E_i, E_i) \\ &= -(n-1) - me^{2t}\frac{1}{e^{2t}}g_F(U_i, U_i) \\ &= -(n-1) - m = -(m+n-1)g(E_i, E_i). \end{aligned}$$

Assim, $(Ric^m_{\nabla f})_{ij} = \lambda g_{ij}$, onde $\lambda = -(m+n-1)$. $\square$

Tomando o traço em (2.19), temos

$$R - \frac{m}{u}\Delta u = \lambda n,$$

o que implica

$$fracmu\Delta u = R - \lambda n,$$

portanto

$$\Delta u = \frac{u}{m}(R - \lambda n). \tag{2.21}$$

Uma vez que $u > 0$ temos imediatamente o seguinte resultado.

Proposição 2.18. *Uma métrica quasi-Einstein gradiente numa variedade compacta com curvatura escalar constante é trivial.*

Demonstração: Se $m = \infty$, então (2.12) se reduz à

$$Ric + \operatorname{Hess} f = \lambda g.$$

Tomando o traço,

$$R + \Delta f = \lambda n,$$

logo

$$\Delta f = \lambda n - R.$$

Como n, λ e R são constantes, então $\Delta f \geq 0$ ou $\Delta f \leq 0$. Como M é compacta, usando o princípio do máximo de Hopf, concluímos que f é constante.
Se $0 < m < \infty$, então fazendo $u = e^{-\frac{f}{m}}$, temos por (2.21)

$$\frac{1}{u}\Delta u = \frac{R - \lambda n}{m}.$$

Como R, λ, n e m são constantes, então

$$\frac{1}{u}\Delta u \geq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u}\Delta u \leq 0$$

como $u > 0$, então $\Delta u \geq 0$ ou $\Delta u \leq 0$. Como M é compacta, pelo princípio do máximo de Hopf, u é constante, isto é, f é constante. $\square$

Observação 2.19. $\operatorname{div}(df \otimes df) = \Delta f df + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat$

De fato, tomando $\{E_i\}_{i=1}^n$ *referencial geodésico*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(df \otimes df)(E_i) &= \operatorname{div}(df(E_i)\nabla f)\\
&= df(E_i)\Delta f + \nabla f(df(E_i))\\
&= df(E_i)\Delta f + \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla f, \nabla_{\nabla f}E_i\rangle\\
&= df(E_i)\Delta f + (\nabla_{\nabla f}\nabla f)^\flat(E_i).
\end{aligned}$$

Observação 2.20. *Aplicando* ∇f *e* X *em* (2.12)*, temos*

$$Ric\,(\nabla f, X) + \operatorname{Hess} f(\nabla f, X) - \frac{1}{m} df \otimes df(\nabla f, X) = \lambda g(\nabla f, X),$$

$$g(Ric\,(\nabla f), X) + g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, X) - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 g(\nabla f, X) = g(\lambda \nabla f, X),$$

$$g(Ric\,(\nabla f) + \nabla_{\nabla f}\nabla f - \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f, X) = g(\lambda\nabla f, X),$$

isto é,

$$Ric\,(\nabla f) + \operatorname{Hess} f(\nabla f) = \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f + \lambda\nabla f. \tag{2.22}$$

No próximo lema utilizaremos a notação tensorial na igualdade que define a métrica quasi-Einstein gradiente, isto é,

$$Ric_{ij} + (\operatorname{Hess} f)_{ij} - \frac{1}{m}(df \otimes df)_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Mas, $Ric_{ij} = R_{ij}$, $(\operatorname{Hess} f)_{ij} = \nabla_i\nabla_j f$ e

$$(df \otimes df)_{ij} = \langle \nabla f, E_i\rangle\langle \nabla f, E_j\rangle = \nabla_i f \nabla_j f.$$

Assim,

$$R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{m}\nabla_i f\nabla_j f = \lambda g_{ij}. \tag{2.23}$$

O próximo lema nos apresenta três resultados, o primeiro é devido a Case et al., veja [10] e o outros dois foram obtidos por a Barros e Ribeiro Jr., veja [2].

Lema 2.21. *Seja* $(M^n, g, \nabla f)$ *variedade Riemanniana tal que* $n \geq 3$ *e* $Ric_{\nabla f}^m = \lambda g$*. Então as seguintes fórmulas valem:*

(1) $\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m} Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f.$

(2) $\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = R_{kjis}\nabla^s f + \frac{1}{m}(R_{ij}\nabla_k f - R_{ik}\nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij}\nabla_k f - g_{ik}\nabla_j f)$.

(3) $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = \frac{2}{m}\{\nabla_{\nabla f}\nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f\}$.

Demonstração: Usando a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes e aplicando o divergente em (2.12), concluímos pela Observação 2.19 que

$$\begin{aligned}\nabla R &= 2\mathrm{div}Ric\\ &= -2\mathrm{div}\mathrm{Hess}\, f + \frac{2}{m}\mathrm{div}\,(df\otimes df)\\ &= -2\mathrm{div}\mathrm{Hess}\, f + \frac{2}{m}\Delta f df + \frac{2}{m}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)^{\flat}.\end{aligned}$$

Usando (1.12) temos

$$\nabla R = -2Ric\,(\nabla f) - 2\nabla\Delta f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Por (2.15), $\nabla\Delta f = \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla R$, assim

$$\nabla R = -2Ric\,(\nabla f) + 2\nabla R - \frac{4}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f + \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f,$$

isto é,

$$\nabla R = 2Ric\,(\nabla f) - \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Por (2.22) temos

$$\nabla_{\nabla f}\nabla f = (\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\nabla f - Ric\,(\nabla f),$$

portanto,

$$\nabla R = 2Ric\,(\nabla f) - \frac{2}{m}\Delta f\nabla f + \frac{2}{m}((\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2)\nabla f) - \frac{2}{m}Ric\,(\nabla f),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f.$$

Usando o fato de $\Delta f = \lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - R$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla R &= \frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(\lambda + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \lambda n - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 + R)\nabla f\\ &= \frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f,\end{aligned}$$

o que prova (1).

Para (2), pela observação 2.20, $(df\otimes df)_{ij} = \nabla_i f\nabla_j f$ e $R_{ij} = -\nabla_i\nabla_j f + \frac{1}{m}\nabla_i f\nabla_j f + \lambda g_{ij}$.

Assim, tendo em vista que $\nabla g = 0$ e $\nabla_i \nabla_j f = \nabla_j \nabla_i f$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= -(\nabla_k \nabla_i \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f) + \frac{1}{m}(\nabla_k(\nabla_i f \nabla_j f) - \nabla_j(\nabla_i f \nabla_k f)) \\
&= -(\nabla_k \nabla_j \nabla_i f - \nabla_j \nabla_k \nabla_i f) \\
&\quad + \frac{1}{m}(\nabla_k \nabla_i f \nabla_j f + \nabla_k \nabla_j f \nabla_i f - \nabla_j \nabla_i f \nabla_k f - \nabla_j \nabla_k f \nabla_i f) \\
&= -(\nabla_k \nabla_j \nabla_i f - \nabla_j \nabla_k \nabla_i f) + \frac{1}{m}(\nabla_k \nabla_i f \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i f \nabla_k f).
\end{aligned}$$

Como $\nabla_k \nabla_j \nabla_i f = \nabla_j \nabla_k \nabla_i f - R^s_{kji} \nabla_s f$ e tendo em vista que

$$\nabla_i \nabla_j f = -Rij + \frac{1}{m} \nabla_i f \nabla_j f + \lambda g_{ij},$$

temos

$$\begin{aligned}
\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= -(\nabla_j \nabla_k \nabla_i f - R^s_{kji} \nabla_s) + \frac{1}{m}(-R_{ki} \nabla_j + \frac{1}{m} \nabla_k f \nabla_i f \nabla_j f + \lambda g_{ki} \nabla_j \\
&\quad + R_{ji} \nabla_k f - \frac{1}{m} \nabla_j \nabla_i \nabla_k f - \lambda g_{ji} \nabla_k f) \\
&= R^s_{kji} \nabla_s f + \frac{1}{m}(R_{ij} \nabla_k f - R_{ik} \nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij} \nabla_k f - g_{ik} \nabla_j f).
\end{aligned}$$

Como $R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}$, então $R_{ijks} \nabla^s f = g_{sm} R^m_{ijk} \nabla^s f = R^s_{ijk} \nabla_s f$. Assim,

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = R_{kjis} \nabla^s f \frac{1}{m}(R_{ij} \nabla_k f - R_{ik} \nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij} \nabla_k - g_{ik} \nabla_j f).$$

Para (3), pelo item (1) e pelo fato de $\nabla |\nabla f|^2 = 2 \nabla_{\nabla f} \nabla f$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) &= \nabla R + \nabla |\nabla f|^2 - 2\lambda \nabla f \\
&= 2\frac{(m-1)}{m} Ric\,(\nabla f) + \frac{2}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + 2\nabla_{\nabla f} \nabla f - 2\lambda \nabla f \\
&= 2Ric\,(\nabla f) - \frac{2}{m} Ric\,(\nabla f) + \frac{2}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f \\
&\quad + 2\nabla_{\nabla f} \nabla f - 2\lambda \nabla f.
\end{aligned}$$

Usando a expressão (2.22) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) &= \frac{2}{m} |\nabla f|^2 \nabla f + 2\lambda \nabla f - \frac{2}{m} Ric\,(\nabla f) \\
&\quad + \frac{2}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f - 2\lambda \nabla f \\
&= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2 + R - n\lambda + \lambda)\nabla f - Ric\,(\nabla f)\}.
\end{aligned}$$

Usando as expressões (2.13) e (2.22), temos que

$$\begin{aligned}
\nabla(R+|\nabla f|^2-2\lambda f) &= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2+\frac{1}{m}|\nabla f|^2-\Delta f+\lambda)\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\
&= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\nabla f+\frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f+\lambda\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\
&= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\nabla f+Ric(\nabla f)+\nabla_{\nabla f}\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\
&= \frac{2}{m}\{\nabla_{\nabla f}\nabla f+(|\nabla f|^2-\Delta f)\nabla f\}.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.22. *É conveniente notar que se $m=\infty$, o terceiro item do lema acima nos diz que*

$$R+|\nabla f|^2-2\lambda f=C, \tag{2.24}$$

onde C é uma constante. Esta é a clássica equação de Hamilton para solitons de Ricci gradiente.

Como consequência deste lema, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.23. *Seja $(M^n,g,\nabla f)$ variedade Riemannina tal que $n\geq 3$ e $Ric^m_{\nabla f}=\lambda g$. Então as seguintes fórmulas valem:*

(1) $\frac{1}{2}\langle\nabla R,\nabla f\rangle = \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla f)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2$.

(2) $\frac{1}{2}|\nabla R|^2 = \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla R)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\langle\nabla f,\nabla R\rangle$.

Demonstração: Seja $Z\in\mathfrak{X}(M)$, então fazendo o produto interno no item (1) do Lema 2.21 com Z, teremos

$$\frac{1}{2}\langle\nabla R,Z\rangle=\frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,Z)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\langle\nabla f,Z\rangle.$$

Assim, para (1) basta fazer $Z=\nabla f$ e para (2) basta fazer $Z=\nabla R$. □

Lema 2.24. *Seja $(M^n,g,\nabla f)$ variedade Riemanniana satisfazendo $Ric^m_{\nabla f}=\lambda g$. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R-\frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R &= \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric\circ(\lambda I-Ric))-\frac{1}{m}(R-n\lambda)(R-(n-1)\lambda) \\
&= -\frac{m-1}{m}|Ric-\frac{1}{n}Rg|^2 \\
&\quad -\frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)(R-\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Demonstração: Aplicando o divergente na equação (1) do Lema 2.21

$$\frac{1}{2}\Delta R = \frac{m-1}{m}\mathrm{div}(Ric(\nabla f)) + \frac{1}{m}\mathrm{div}((R-(n-1)\lambda)\nabla f). \tag{2.26}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(Ric(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}(Ric(\nabla f)), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{e_i}Ric)(\nabla f) + Ric(\nabla_{e_i}\nabla f), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{e_i}Ric)(\nabla f), e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(Ric(\mathrm{Hess}f(e_i)), e_i) \\
&= \mathrm{div}Ric(\nabla f) + \mathrm{tr}(Ric \circ (\mathrm{Hess}f) \\
&= \langle \mathrm{div}Ric, \nabla f\rangle + \mathrm{tr}(Ric \circ (\mathrm{Hess}f).
\end{aligned}$$

Usando (2.12) e a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(Ric(\nabla f)) &= \langle \frac{1}{2}\nabla R, \nabla f\rangle + \mathrm{tr}(Ric \circ (\frac{1}{m}df \otimes df + \lambda g - Ric)) \\
&= \langle \frac{1}{2}\nabla R, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}\mathrm{tr}(Ric \circ (df \otimes df)) + \mathrm{tr}(Ric \circ (\lambda g - Ric)).
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{tr}(Ric \circ (df \otimes df)) = Ric(\nabla f, \nabla f)$, então

$$\mathrm{div}(Ric(\nabla f)) = \langle \frac{1}{2}\nabla R, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}Ric(\nabla f, \nabla f) + \mathrm{tr}(Ric \circ (\lambda g - Ric)). \tag{2.27}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}((R-(n-1)\lambda)\nabla f) &= (R-(n-1)\lambda)\mathrm{div}(\nabla f) + \langle \nabla(R-(n-1)\lambda), \nabla f\rangle \\
&= (R-(n-1)\lambda)\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (2.27) e (2.28) em (2.26), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= \frac{1}{2}\frac{m-1}{m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{m-1}{m^2}Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric \circ (\lambda g - Ric)) \\
&\quad + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\Delta f + \frac{1}{m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

Por (2.13), $\Delta f = \lambda n - R + \frac{1}{m}|\nabla f|^2$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= \frac{m-1+2}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric \circ (\lambda g - Ric)) \\
&\quad + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(\lambda n - R + \frac{1}{m}|\nabla f|^2) + \frac{m-1}{m^2}Ric(\nabla f, \nabla f) \\
&= \frac{m+1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric \circ (\lambda g - Ric)) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(\lambda n - R) \\
&\quad + \frac{1}{m}(\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2) + \frac{m-1}{m^2}Ric(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}$$

Pela equação (1) do Corolário 2.23, temos

$$\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - \frac{m-1}{m} Ric(\nabla f, \nabla f),$$

assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= \frac{m+1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric\circ(\lambda g - Ric)) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)(\lambda n - R)\\ &+\frac{1}{2m}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - \frac{m-1}{m^2}Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{m-1}{m^2}Ric(\nabla f, \nabla f).\end{aligned}$$

Portanto, tendo em vista que $\langle \nabla R, \nabla f\rangle = \nabla_{\nabla f} R$, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R = \frac{m-1}{m}\mathrm{tr}(Ric\circ(\lambda g - Ric)) - \frac{1}{m}(R-\lambda n)(R-(n-1)\lambda).$$

Como Ric é auto-adjunto, então pelo teorema espectral, existe uma base de autovetores $\{E_i\}_{i=1}^n$ tais que $Ric(E_i) = \lambda_i E_i$. Assim, $R = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ e $|Ric|^2 = \mathrm{tr}(Ric(Ric)^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, onde $(Ric)^*$ é a adjunta do tensor de Ricci na forma de $(1,1)$-tensor. Assim

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(Ric\circ(\lambda I - Ric)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(\lambda-\lambda_i)\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\lambda - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\\ &= \lambda R - |Ric|^2.\end{aligned}$$

Denotando por g^* a adjunta do tensor métrico na forma de $(1,1)$-tensor, temos

$$\begin{aligned}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 &= \mathrm{tr}\{(Ric-\frac{1}{n}Rg)(Ric-\frac{1}{n}Rg)^*\}\\ &= \mathrm{tr}\{(Ric-\frac{1}{n}Rg)((Ric)^*-\frac{1}{n}Rg^*)\}\\ &= \mathrm{tr}\{Ric(Ric)^* - \frac{1}{n}R\,\mathrm{tr}(Ricg^*) - \frac{1}{n}R\,\mathrm{tr}(g(Ric)^*) + \frac{1}{n^2}R^2\,\mathrm{tr}(gg^*)\}\\ &= \mathrm{tr}\{Ric(Ric)^*\} - \frac{1}{n}R\,\mathrm{tr}(Ricg^*) - \frac{1}{n}R\,\mathrm{tr}\{g(Ric)^*\} + \frac{1}{n^2}R^2\,\mathrm{tr}(gg^*)\\ &= |Ric|^2 - \frac{1}{n}R\sum_{i=1}^n\lambda_i - \frac{1}{n}R\sum_{i=1}^n\lambda_i + \frac{1}{n^2}R^2 n\\ &= |Ric|^2 - \frac{1}{n}R^2 - \frac{1}{n}R^2 + \frac{1}{n}R^2\\ &= |Ric|^2 - \frac{1}{n}R^2.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|Ric|^2 = |Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 + \frac{1}{n}R^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(Ric \circ (\lambda I - Ric)) &= \lambda R - |Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{1}{n}R^2 \\ &= -|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 + R(\lambda - \frac{1}{n}R).\end{aligned}$$

Portanto, substituindo na primeira igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f}R &= \frac{m-1}{m}\{-|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 + R(\lambda - \frac{1}{n}R)\} \\ &\quad -\frac{1}{m}(R-\lambda n)(R-(n-1)\lambda) \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 + \frac{m-1}{m}\frac{R}{n}(n\lambda - R) \\ &\quad -\frac{1}{m}(R-\lambda n)(R-(n-1)\lambda) \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{R-n\lambda}{mn}\{(m-1)R + n(R-(n-1)\lambda)\} \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{R-n\lambda}{mn}\{(m-1)R + nR - n(n-1)\lambda\} \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{R-n\lambda}{mn}\{(m+n-1)R - n(n-1)\lambda\} \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 - \frac{m+n-1}{mn}(R-n\lambda)(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}).\end{aligned}$$

□

2.4 Alguns resultados para métricas quasi-Einstein gradiente

Os resultados desta seção são devidos à Case at al., veja [10], exceto o resultado da Proposição 2.25, quando $m = 1$ que é devido ao autor.

Proposição 2.25. *Quando $m \neq 1$, uma métrica quasi-Einstein gradiente tem curvatura escalar constante se, e somente se,*

$$Ric\,(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f.$$

Quando $m = 1$, se uma métrica quasi-Einstein gradiente tem curvatura escalar constante, então $R = n\lambda$ ou $R = (n-1)\lambda$.

Demonstração: i) Suponha $m \neq 1$, então pelo Lema 2.21, item (1)

$$\frac{1}{2}\nabla R = \frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f.$$

Assim R é constante se, e somente se,

$$\frac{m-1}{m}Ric\,(\nabla f) + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla f = 0,$$

ou seja, se, e somente se,

$$Ric\,(\nabla f) = -\frac{1}{m-1}(R-(n-1)\lambda)\nabla f.$$

ii) Suponha $m=1$, então se R for constante, pelo Corolário 2.23, item (1), temos que,

$$(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2 = 0.$$

Daí $|\nabla f|^2 = 0$ ou $R-(n-1)\lambda = 0$, isto é, f é constante ou $R=(n-1)\lambda$. Sendo f constande de $R+\Delta f - |\nabla f|^2 = n\lambda$, temos, $R = n\lambda$. Assim $R = n\lambda$ ou $R=(n-1)\lambda$. $\square$

Proposição 2.26. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana tal que $Ric^{m}_{\nabla f} = \lambda g$ e $m \geq 1$.*

(1) Se $\lambda > 0$ e M é compacta, então a curvatura escalar é limitada por baixo por

$$\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq R.$$

(2) Se $\lambda = 0$, R constante e $m > 1$, então M é Ricci flat.

(3) Se $\lambda < 0$ e R é constante, então

$$n\lambda \leq R \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda.$$

E quando $m > 1$, R é igual a um dos extremos se M for de Einstein.

Demonstração: Para (1), sendo M compacta, aplicando a equação (2.25) para o ponto minímo de R, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta R_{min} - \frac{m+2}{2m}\nabla_{\nabla f} R_{min} \\ &= -\frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}R_{min}g|^2 - \frac{m+n-1}{mn}(R_{min}-n\lambda)(R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda) \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R_{min}-n\lambda)(R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda) = \frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}R_{min}g|^2 \geq 0.$$

Assim,

$$R_{min} - \lambda n \leq 0 \text{ e } R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \geq 0$$

ou

$$R_{min} - \lambda n \geq 0 \text{ e } R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq 0.$$

Se fosse $R_{min} - \lambda n \geq 0$ e $R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq 0$, então

$$\lambda n \leq R_{min}$$

e

$$R_{min} \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda,$$

isto é,

$$\lambda n \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda.$$

Como $\lambda > 0$, dividindo a desigualdade acima por λn, concluímos que

$$1 \leq \frac{n-1}{m+n-1},$$

o que é um absurdo, pois $m \geq 1$. Logo temos

$$R_{min} - \lambda n \leq 0$$

e

$$R_{min} - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \geq 0,$$

ou seja,

$$\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq R_{min} \leq R.$$

Para (2) e (3) observe que se R for constante, então

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R - n\lambda)(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda) = \frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 \geq 0. \tag{2.29}$$

(2) Se $\lambda = 0$ e $m > 1$, então

$$-\frac{m+n-1}{mn}R^2 = \frac{m-1}{m}|Ric - \frac{1}{n}Rg|^2 \geq 0,$$

e, portanto, $R \equiv 0$. Substituindo na expressão acima concluimos que $|Ric|^2 \equiv 0$, isto é, $Ric \equiv 0$, logo M é Ricci flat.

(3) Se $\lambda < 0$, então de (2.29) temos

$$R - n\lambda \leq 0 \text{ e } R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \geq 0$$

ou

$$R - n\lambda \geq 0 \text{ e } R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq 0.$$

Se fosse $R - n\lambda \leq 0$ e $R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \geq 0$, então

$$\frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq R \leq n\lambda.$$

Dado que $\lambda < 0$, então dividindo a expressão acima por $n\lambda$, teremos

$$1 \leq \frac{n-1}{m+n-1},$$

o que é um absurdo. Assim temos que $R - n\lambda \geq 0$ e $R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda \leq 0$, isto é,

$$n\lambda \leq R \leq \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda.$$

Se M for variedade de Einstein, então $Ric = \mu g$, para alguma função suave $\mu : M \to \mathbb{R}$. Tomando o traço, temos que $R = \mu n$. Assim

$$Ric = \frac{R}{n}g.$$

Portanto de (2.29), temos que

$$-\frac{m+n-1}{mn}(R - n\lambda)(R - \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda) = 0,$$

ou seja, $R = n\lambda$ ou $R = \frac{n(n-1)}{m+n-1}\lambda$ $\square$

Capítulo 3

Fórmulas Integrais e Aplicações

3.1 Fórmulas Integrais

Nesta seção mostraremos algumas fórmulas integrais para variedades quasi-Einstein compactas, que são generalizações de resultados obtidos para solitons de Ricci em [1]. Essas fórmulas permitem encontrar alguns resultados de rigidez para estas classes de variedades, e podem ser encontradas em [2].

Observação 3.1. *Seja* $T = \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g$, *então* $\mathrm{tr} T = \Delta f - \frac{\Delta f}{n} n = 0$, *isto é,* T *tem traço nulo. Assim*

$$|T|^2 = |\nabla^2 f|^2 - |\frac{\Delta f}{n} g|^2$$

Isto é,

$$|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n}$$
$$|\nabla^2 f|^2 = |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 + \frac{(\Delta f)^2}{n}$$

Lema 3.2. *Seja* $(M^n, g, \nabla f)$ *uma variedade Riemanniana satisfazendo* $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. *Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta R &= -Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda \Delta f + \langle \nabla R, \nabla f \rangle \\ &\quad + \frac{1}{m}\{|\nabla f|^2 \Delta f + \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f} \nabla f - \Delta f \nabla f)\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração: No capítulo 2 mostramos que

$$\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = \frac{2}{m}\{\nabla_{\nabla f} \nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f\}.$$

Então aplicando o divergente na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\Delta R + \Delta|\nabla f|^2 - 2\lambda\Delta f &= \frac{2}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f)\\
&= \frac{2}{m}\{\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f) + \mathrm{div}(|\nabla f|^2\nabla f)\}\\
&= \frac{2}{m}\{\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f) + |\nabla f|^2\Delta f + \langle\nabla|\nabla f|^2, \nabla f\rangle\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\Delta R = -\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 + \lambda\Delta f + \frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}\{|\nabla f|^2\Delta f + \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f)\}.$$

Usando a fórmula de Bochner ($\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric\,(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle$) e a observação 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric\,(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} - \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle + \lambda\Delta f\\
&\quad + \frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}\{|\nabla f|^2\Delta f + \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f)\}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de $\langle\nabla R, \nabla f\rangle + \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle = \frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric\,(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f + \langle\nabla R, \nabla f\rangle\\
&\quad + \frac{1}{m}\{|\nabla f|^2\Delta f + \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f)\}.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.3. *Pelo item* (1) *do Corolário* 2.9*, temos*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f$$

e pela fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric\,(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle.$$

Igualando essas identidades, temos

$$|\nabla^2 f|^2 - Ric\,(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f = Ric\,(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle,$$

$$2Ric\,(\nabla f, \nabla f) = \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f - \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle,$$

isto é,

$$Ric\,(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle. \tag{3.2}$$

Teorema 3.4. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda \Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla R\rangle \\ &\quad + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + \frac{1}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demonstração: Usando o Lema 3.2, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= \frac{1}{2}\Delta R - \frac{1}{2}D_{\nabla f}R \\ &= \frac{1}{2}\Delta R - \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &= -Ric\,(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f + \langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &\quad + \frac{1}{m}[|\nabla f|^2 \Delta f + \mathrm{div}\,(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f)] - \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &= -Ric\,(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &\quad + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f + \frac{1}{m}\mathrm{div}\,(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f).\end{aligned}$$

Usando a equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -\frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle - |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda \Delta f \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f + \frac{1}{m}\mathrm{div}\,(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f) \\ &= -|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla R\rangle \\ &\quad + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + \frac{1}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f).\end{aligned}$$

□

Como consequência desse resultado, obtemos as seguintes fórmulas integrais.

Corolário 3.5. *Seja $(M^n, g, \nabla f)$ variedade Riemanniana compacta orientável satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então temos:*

(1) $\displaystyle\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \frac{n+2}{2n}\int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle dM.$

(2) $\displaystyle\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM.$

(3) $\displaystyle\int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM = \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 dM.$

Demonstração: Integrando sobre M a identidade do Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M \Delta_f R dM &= -\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM + \lambda\int_M \Delta f dM \\ &+\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle dM \\ &+\frac{1}{m}\int_M \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f) dM.\end{aligned}$$

Sendo M^n compacta ($\partial M = \emptyset$), usando o Teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \Delta_f R dM &= \int_M \Delta R dM - \int_M D_{\nabla f} R dM \\ &= \int_{\partial M} \langle \nabla R, N\rangle dS - \int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM \\ &= -\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM,\end{aligned}$$

observe também que,

$$\int_M \Delta f dM = \int_{\partial M} \langle \nabla f, N\rangle dS = 0,$$

além disso,

$$\int_M \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f \nabla f) dM = \int_{\partial M} \langle \nabla(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f), N\rangle dS = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM &= -\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM \\ &+\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle dM,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM - \frac{1}{n}\int_M (\Delta f)^2 dM + \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle dM. \quad (3.4)$$

Observe que

$$\operatorname{div}(\Delta f \nabla f) = (\Delta f)^2 + \langle \nabla \Delta f, \nabla f\rangle,$$

assim, integrando sobre M

$$\int_M \operatorname{div}(\Delta f \nabla f) dM = \int_M (\Delta f)^2 dM + \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f\rangle dM.$$

Mas,

$$\int_M \operatorname{div}(\Delta f \nabla f) dM = \int_{\partial M} \langle \nabla(\Delta f \nabla f), N\rangle dS = 0,$$

logo

$$-\int_M (\Delta f)^2 dM = \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dM. \tag{3.5}$$

Substituindo a expressão acima em (3.4), obteremos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM &= \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM + \frac{1}{n} \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dM + \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle dM \\ &= \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM + \frac{n+2}{2n} \int_M \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle dM,\end{aligned}$$

o que prova (1).

Para (2), substituindo (3.5) no item (1) deste corolário, temos

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM - \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM,$$

e

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM = \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM.$$

Para (3), integrando sobre M a fórmula de Bochner, temos

$$\frac{1}{2} \int_M \Delta |\nabla f|^2 dM = \int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M |\nabla^2 f|^2 dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle dM.$$

Observe que

$$\int_M \Delta |\nabla f|^2 dM = \int_{\partial M} \langle \nabla |\nabla f|^2, N \rangle dS = 0$$

e pelo fato de $|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n}$, temos

$$\int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle dM = 0.$$

Pelo item (2) deste corolário e por (3.5), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle dM &= \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM - \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dM \\ &\quad + \int_M (\Delta f)^2 dM,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M Ric\,(\nabla f, \nabla f) dM + \int_M \langle \nabla f, \nabla R \rangle dM = \frac{3}{2} \int_M (\Delta f)^2 dM,$$

o que prova (3). □

3.2 Aplicações

Nesta seção apresentaremos os três principais resultados dessa dissertação. São eles: Teoremas 3.6 e 3.9 e o Corolário 3.11. Os dois primeiros foram obtidos por Barros e Ribeiro Jr. em [2], já o último pode ser encontrado em [10].

Teorema 3.6. *Seja* $(M^n, g, \nabla f)$ *variedade Riemanniana, orientável e compacta satisfazendo* $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$*, então* M *é uma variedade de Einstein se* $\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM \leq 0$.

Demosntração: Desde que $\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM \leq 0$, o item (2) do corolário 3.5, nos diz que

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 dM \leq 0.$$

Logo $|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = 0$ e $(\Delta f)^2 = 0$, isto é $\nabla^2 f = \frac{1}{n}\Delta f g$ e $\Delta f = 0$. Assim pelo princípio do máximo de Hopf, f é constane e portanto M é uma variedade de Einstein. □

Observação 3.7. *Vale observar que o Teorema acima nos diz que se* $(M^n, g, \nabla f)$ *for variedade Riemanniana, orientável e compacta tal que* $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$ *e* R *for constante, então* M *é variedade de Einstein. Resultado já obtido no capítulo 2.*

O próximo teorema é devido à Bourguignon e Ezin e pode ser encontrado em [5].

Teorema 3.8. (Bourguignon-Ezin) *Para qualquer campo de vetores conforme* X *numa variedade Riemanniana compacta* (M, g)*, vale a seguinte identidade*

$$\int_M \langle X, \nabla R\rangle dM = 0$$

Teorema 3.9. *Seja* $(M^n, g, \nabla f)$ *variedade Riemanniana, orientável e compacta satisfazendo* $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$*. Então* ∇f *não pode ser campo de vetores conforme não trivial.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que ∇f seja campo conforme não-trivial, isto é,

$$\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\rho g,$$

com ρ não constante. Pelo Teorema 3.8, temos que

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM = 0.$$

Portanto, o item (2) do Corolário 3.5, nos diz que

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM + \frac{n+2}{2n} \int_M (\Delta f)^2 dM = 0,$$

ou seja, $\Delta f \equiv 0$, pelo princípio do máximo de Hopf, f é constante. Assim, tendo em vista que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f$ e $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\rho g$, temos

$$\rho n = \Delta f,$$

mas como f é constante, então $\rho = 0$. Isto nos dá um absurdo e terminamos a prova do teorema. □

Observação 3.10. *Quando $n = 2$, então $Ric = \frac{K}{2} g$, onde K é a curvatura Gaussiana de M*

De fato, seja $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ base ortonormal, então

$$Ric\,(E_i, E_j) = \sum_{k=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(E_k, E_i)E_j, E_k) = R_{1ij1} + R_{2ij2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Ric\,(E_1, E_1) &= R_{2112} = R_{1221}, \\ Ric\,(E_1, E_2) &= 0, \\ Ric\,(E_2, E_2) &= R_{1221}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Ric\,(E_i, E_j) &= 0 = R_{1221} g(E_i, E_j), \quad \text{se } i \neq j \\ Ric\,(E_i, E_i) &= R_{1ii1} + R_{2ii2} = R_{1221} g(E_i, E_i), \end{aligned}$$

isto é,

$$Ric = R_{1221} g.$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{trRic} = Ric\,(E_1, E_1) + Ric\,(E_2, E_2) \\ &= R_{2112} + R_{1221} = 2R_{1221}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ric = \frac{K}{2} g.$$

O próximo resultado foi obtido por Case at al., veja [10]. Aqui temos uma prova alternativa, construída sobre os resultado apresentados por Barros e Ribeiro Jr. em [2].

Corolário 3.11. *Toda métrica quasi-Einstein gradiente 2-dimensional de uma variedade compacta é trivial.*

Demonstração: Seja $(M^2, g, \nabla f)$ a variedade em questão. Se $m < \infty$, então por (2.19) temos

$$Ric - \frac{m}{u}\mathrm{Hess}\, f = \lambda g,$$

onde $u = e^{-\frac{f}{m}}$. Assim pela observação 3.10, temos

$$\frac{K}{2}g - \frac{m}{u}\mathrm{Hess}\, u = \lambda g,$$

isto é,

$$\mathrm{Hess}\, u = \frac{u}{m}(\frac{K}{2} - \lambda)g.$$

Mas, $\mathrm{Hess}\, u = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u}g$, então fazendo $\rho = \frac{u}{m}(\frac{K}{2} - \lambda)$, temos que ρ está definida em M e é suave. Assim

$$\mathcal{L}_{\nabla u}g = 2\rho g,$$

ou seja, ∇u é campo conforme. Pelo Teorema 3.8, temos que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla R\rangle dM = 0.$$

Usando o fato de $\nabla u = -\frac{1}{m}u\nabla f$ e a integral de Dirichlet ser um invariante conforme, concluímos que

$$0 = \int_M \langle \nabla u, \nabla R\rangle dM = -\frac{1}{m}\int_M u\langle \nabla f, \nabla R\rangle dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM.$$

Então, pelo Corolário 3.5, item (2) concluímos que f é constante.

Se $m = \infty$, então $Ric + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g$, usando a observação 3.10 e o fato de $\mathrm{Hess}\, f = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla f}g$, temos

$$\frac{K}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla f}g = \lambda g,$$

isto é,

$$\mathcal{L}_{\nabla f}g = 2(\frac{K}{2} - \lambda)g.$$

Pelo Teorema 3.9, $\nabla f \equiv 0$, ou seja, f é constante. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] AQUINO, C.; BARROS, A.; RIBEIRO JR, E.: Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results Math.*, v. 60, p. 245-254, 2011.

[2] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E.: Integral formulae on quasi-Einstein manifolds and applications. *Glasgow Math. Journal*, v. 54, p. 213-223, 2012.

[3] BESSE, A. L.; *Einstein manifolds*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. (Classics Mathematics)

[4] BATISTA, R.: Rigidez de solitons gradiente. 2010, 74f. Fortaleza: Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Ceará, Pós-graduação em Matemática, 2010.

[5] BOURGUIGNON, J. P.; EZIN, J. P.: Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 301, p. 723-736, 1987.

[6] CAMARGO, F.; CAMINHA, A.; SOUZA, P.: Complete foliations of space forms by hypesurfaces. *Bull. Braz. Math. Soc.*, v. 41, p. 339-353, 2010.

[7] CAMINHA, A.: Tópicos de geometria diferencial. *Preprint*.

[8] CARMO, M. P. DO: *Geometria riemanniana. 3ª ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

[9] CASE, J.: On the nonexistence of quasi-Einstein metrics. *Pacific J. Math.*, v. 248, p. 227-284, 2010.

[10] CASE, J.; SHU, Y.; WEI, G.: Rigidity of quasi-Einstein metrics. *Diff. Geo. Appl.*, v. 29, p. 93-100, 2010.

[11] CHOW, B; LU, P.; NI, L.: *Hamilton's Ricci flow.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2006. (Graduate studies in mathematics. v. 77)

[12] EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZZA, C.: Ricci solitons: the equation point of view. *Manuscripta Math.*, v. 127, p. 345-367, 2008.

[13] HAMILTON, R. S.: The formation of singularities in the Ricci flow. *Surv. Diff. Geom.*, v. 2, p. 7-136, 1993.

[14] HAMILTON, R. S.: The Ricci flow on surface. *In Mathematics and general relativity.* Providence, R.I.: AMS, 1988. (Contemporary Mathematics, v. 71)

[15] ISHIHARA, S.; TASHIRO, Y.: On Riemannian manifolds admitting a concircular transformation. *Math. J. Okayama Univ.*, v. 9, p. 14-47, 1959.

[16] KIM, D. S.; KIM, Y. H.: Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. *Proc. Am. Math. Soc.*, v. 131, p. 2573-2576, 2003.

[17] LEE, J. M.: *Introduction to smooth manifolds.* New York: Springer-Verlag, 2002. (Graduate texts in mathematics. v. 218)

[18] O'NEILL, B.: *Semi-riemannian geometry with applications to general relativity.* New York: Academic Press, 1983.

[19] OBATA, M.; YANO, K.: Conformal changes of Riemannian metrics. *J. Diff. Geo.*, v. 4, p. 53-72, 1970.

[20] PETERSEN, P.: *Riemannian geometry.* New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in Mathematics. v. 171)

[21] PETERSEN, P.; WYLIE, W.: Rigidity of gradient Ricci solitons. *Pacific J. of Math.*, v. 241, n.2, p. 329-345, 2009.

[22] YAU, S. T.: Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.