UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATÉMATICA

JOSÉ GLEISON CARNEIRO DA SILVA

ESTIMATIVAS DE FRONTEIRA PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE PERTURBAÇAO SINGULAR NA TEORIA DE COMBUSTÃO

FORTALEZA
2016

JOSÉ GLEISON CARNEIRO DA SILVA

ESTIMATIVAS DE FRONTEIRA PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE PERTURBAÇAO SINGULAR NA TEORIA DE COMBUSTÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58e Silva, José Gleison Carneiro da.
Estimativas de Fronteira para problemas Elípticos de Pertubação Singular na Teoria de Combustão / José Gleison Carneiro da Silva. – 2019.
77 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, 0, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira.

1. Regularidade Lipschitz. 2. Estimativas de Fronteira. I. Título.

CDD

JOSÉ GLEISON CARNEIRO DA SILVA

ESTIMATIVAS DE FRONTEIRA PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS DE PERTURBAÇAO SINGULAR NA TEORIA DE COMBUSTÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 12 / 02 / 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Flávio França Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Dr. Jorge Hebert Soares de Lira, Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa, Dr. Florentinu Daniel Cibotaru e Dr. Flávio França Cruz e pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Um agradecimento especial ao colega de doutorado Jos Ederson Melo Braga.

Aos colegas da turma de doutorado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

RESUMO

Neste trabalho estudamos estimativas Lipschitz até a fronteira para uma classe de problemas de pertubação singular que aparecem na teoria de combustão no estudo de problemas de propagação de chamas. Aqui nós estudamos problemas envolvendo equações totalmente não lineares e equações do tipo quasilinear ambas envolvendo termos de força (RHS) não limitados.

Palavras-chave: Fronteira Livre. Regularidade Lipschitz. Estimativas de Fronteira.

ABSTRACT

In this work we study up to the boundary Lipschitz estimates for classes of singular perturbation problems appearing in the combustion theory in the study of flame propagation issues. Here we study problems involving the fully nonlinear equation and quasilinear type equations both involving unbounded force terms (RHS).

Keywords: Free Boundary. Lipschitz Regularity. Boundary Estimates.

NOTAÇÕES

$\mathcal{M}_{n\times n}$	o espaço das matrizes n por n
$\|\|T\|\|$	$\sup_{\|\nu\|=1} \|T\nu\|$ para uma matriz $T \in \mathcal{M}_{n\times n}$
$\mathbb{R}^n_+$	o espaço $\{x \in \mathbb{R}^n \; ; x_n \geq 0\}$
x'	se $x = (x_1, \cdots, x_n)$, entao x' denota o ponto $(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$
$B_r(x)$	a bola centrada num ponto x e raio r do $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}_n$	o espaço das matrizes simétricas de ordem n
$\mathcal{P}^-_{\lambda,\lambda}$	operador minimal de Pucci $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) := \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i$, onde $e_1 \cdots, e_n$ sao os autovalores de M
$\mathcal{P}^+_{\lambda,\lambda}$	operador maximal de Pucci $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) := \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i$, onde $e_1 \cdots, e_n$ são os autovalores de M
Γ_x	o cone com vertice em x: $\left\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \; ; \|y - y'\| > \dfrac{\|y-x\|}{2} \right\}$, onde x é um ponto no plano $\{x_n = 0\}$
$\beta_F(x,y)$	$\sup_{M \in \mathcal{S}_n \setminus \{0\}} \dfrac{\|F(M,0,x) - F(M,0,y)\|}{\|\|M\|\|}$, onde $F : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ é um operador totalmente não linear
J_Φ	Jacobiano de uma aplicação diferenciável $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto
$F(u)$	$\partial\{u > 0\} \cap \Omega$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto
$\|\|\varphi\|\|^*_{C^{1,\alpha}(B_r)}$	$\|\|\varphi\|\|_{L^\infty(B_r)} + r\|\|\nabla\varphi\|\|_{L^\infty(B_r)} + r^{1+\alpha}[\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(B_r)}$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_r)$
$\Omega^-_\varepsilon(u)$	$\Omega \cap \{u \leq \varepsilon\}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.
$\Omega^+_\varepsilon(u)$	$\Omega \cap \{u \geq \varepsilon\}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.
S_ε	$\{x = (x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; 0 \leq x_n \leq \varepsilon\}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 2006, no paper [11] A. Karakhanyan estudou o problema de perturbação singular de uma fase para equações elípticas singulares/degeneradas do tipo

$$\begin{cases} \Delta_p u_\varepsilon = \beta_\varepsilon(x) & \text{in } \Omega, \\ \\ 0 \le u_\varepsilon \le 1 & \text{em } \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio $C^{1,\alpha}$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\beta \in C^0(\mathbb{R})$ tal que supp$\beta \subset [0,1]$, $0 \le \beta \le B$ e $\beta_\varepsilon(s) := \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$. Sob estas hipóteses foi provado o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Teorema 3.1 - [11])**.** *Considere u_ε uma solução do problema de perturbação singular (1) tal que $\|f_\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \le R$. Então existe uma constante $C = C(n,p,B,R) > 0$, independente de ε, tal que*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \le C.$$

Nós extendemos este resultado para o problema de propagação de chamas não homogêneo. A despeito de [11] nós enfatizamos aqui a necessidade de pedir regularidade C^2 do domínio Ω em vez de pedir que seja meramente $C^{1,\alpha}$. Mais precisamente, o principal resultado desta tese consiste no seguinte teorema:

Teorema 1.2 (**Estimativa Lipschitz uniforme até a fronteira para o problema de perturbação singular**)**.** *Suponha que Ω é um domínio C^2 e que u_ε é uma L^n-solução no sentido da viscosidade ou uma solução fraca de um dos seguintes problemas de perturbação singular.*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}), \\ \\ F(D^2u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, x) = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & em\ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon \ge 0 & em\ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = \varphi & na\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

ou

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega), \\ \\ Q_{\mathcal{A}}[u_\varepsilon] = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & em\ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon \geq 0 & em\ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = \varphi & na\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

onde $f_\varepsilon \in L^q(\Omega)$, $q > n$ *no caso totalmente não linear e* $q = \infty$ *no caso quasilinear;* $\varphi \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$*;* F *satisfaz as condições (9) e (10);* $\mathcal{A}$ *satisfaz* $Q_1)$ *a* $Q_7)$ *em* Ω*, com* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(\Omega)$ *(vide páginas 16,17 em Preliminares para definição destas condições). Então existe uma constante universal* $C > 0$*, i.e.,* $C = C(n, q, \alpha, \lambda, \Lambda, \gamma)$ *no caso totalmente não linear, e* $C = C(n, p, \alpha, \lambda, \Lambda, \gamma, \lambda_0, \Lambda_0, \overline{\lambda_0}, \overline{\Lambda_0}, \alpha_0, \underline{\varrho})$ *no caso quasilinear, tal que*

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq C \cdot \left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)} + \left(||f_\varepsilon||_{L^q(\Omega)} + ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\right]. \tag{4}$$

onde

$$\chi := \begin{cases} 1, & \text{no caso totalmente não linear,} \\ \\ (p-1)^{-1}, & \text{na caso quasilinear.} \end{cases} \tag{5}$$

Em particular, se

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\{ ||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)}, ||f_\varepsilon||_{L^q(\Omega)} \right\} < \infty$$

então a família $\{u_\varepsilon\}$ *é uniformemente Lipschitz.*

2 RESULTADOS DE FRONTEIRA LIVRE

No que segue, equações e inequações totalmente não lineares e quasilineares serão entendidas no sentido L^n da viscosidade e no sentido fraco respectivamente (vide definições (4.1) e (4.2)). Além disso, definiremos certas constantes que serão carregadas ao longo da tese.

$$\gamma_{_{R_0}} := \max\big\{\gamma, \gamma R_0\big\}. \tag{6}$$

$$\chi := \begin{cases} 1, & \text{sempre que o operador envolvido for totalmente não linear,} \\ \\ (p-1)^{-1}, & \text{sempre que o operador envolvido for quasilinear.} \end{cases} \tag{7}$$

Teorema 2.1 (Estimativas de fronteira livre até o bordo). *Fixados $\gamma \geq 0$, $0 < r \leq R_0$, suponha que $u \in C^0(\overline{B_r^+})$ ou $C^0(\overline{B_r^+}) \cap W^{1,p}(B_r^+)$ é solução de um dos seguintes problemas de fronteira livre*

$$\begin{cases} F(D^2u, \nabla u, x) \geq f(x) & \textit{in } B_r^+ \\ \\ F(D^2u, \nabla u, x) = f(x) & \textit{in } \big\{u > 0\big\} \cap B_r^+ \\ \\ |\nabla u^+| \leq g & \textit{along } F(u) \\ \\ u = \varphi & \textit{on } \ B_r' \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{A}}[u] \geq f(x) & \textit{in } B_r^+ \\ \\ Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x) & \textit{in } \big\{u > 0\big\} \cap B_r^+ \\ \\ |\nabla u^+| \leq g & \textit{along } F(u) \\ \\ u = \varphi & \textit{on } \ B_r' \end{cases}$$

onde $0 \leq g$ é uma função limitada em $F(u)$, $\varphi \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(B_r')$ para algum $\alpha \in (0,1)$, $f \in L^q(B_r^+)$, $q > n$ no caso totalmente não linear e $q = \infty$ no caso quasilinear; F satisfaz as condições (9) e (10); $\mathcal{A}$ satisfaz $Q_1)$ a $Q_7)$ em $\{u > 0\}$, com $A \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(\big\{u > 0\big\})$.

Então, $u^+ \in C^{0,1}(\overline{B}^+_{r/8})$ *e existe uma constante universal* $\overline{C} > 0$ *tal que*

$$||\nabla u^+||_{L^\infty(\overline{B^+_{r/8}})} \leq \overline{C} \cdot \left(\sup_{F(u)} g + \frac{||u||_{L^\infty(B^+_r)}}{r} + \frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B'_r)}}{r} + \left(r^{1-n/q} \cdot ||f||_{L^q(B^+_r)} \right)^\chi \right). \quad (8)$$

Precisamente, a constante $\overline{C}$ *tem a seguinte dependência*

$$\overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \Lambda, \gamma_{R_0}, q, \alpha, C_0, \mu_0, R_0), \quad \overline{C} = \overline{C}(n, \lambda, \Lambda, \gamma_{R_0}, \lambda_0, \Lambda_0, \overline{\lambda_0}, \overline{\Lambda_0}, p, q, R_0, \alpha_0, \alpha, \underline{\varrho})$$

nos casos totalmente não linear e quasilinear respectivamente.

Lema 2.1 (Expansão do conjunto de positividade da fronteira). *Fixados* $\gamma \geq 0$, $0 < r \leq R_0$, *suponha que* $u : B^+_r \to \mathbb{R}$, $u \geq 0$ *satisfaz*

$$\begin{cases} u \in C^0(\overline{B^+_r}) \\ F\left(D^2 u, \nabla u, x\right) = f(x), \ B^+_r \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} u \in C^0(\overline{B^+_r}) \cap W^{1,p}(B^+_r) \\ Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x), \ B^+_r \end{cases}$$

onde $f \in L^q(B^+_r)$, $q > n$, *no caso totalmente não linear e* $q = \infty$ *no caso quasilinear;* F *satisfaz as condições (9) e (10); e* $Q_{\mathcal{A}}$ *satisfaz as condições* $Q_1)$ - $Q_7)$ *com* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B^+_r)$. *Então existem constantes universais* $C_1, D_1 > 0$, *tais que*

$$\begin{cases} r^{1+\chi\cdot(1-\frac{n}{q})} \cdot \left(||f||_{L^q(B^+_r)}\right)^\chi \leq C_1 \cdot M, \\ \\ u \geq M \ \text{ on } \ B'_r. \end{cases} \implies u \geq D_1 \cdot M \quad in \ \ \overline{B}^+_{\frac{3}{4}r}.$$

Equivalentemente, existe uma constante universal $C > 1$, tal que

$$\inf_{B'_r} u \leq C \cdot \left[\inf_{B^+_{\frac{3r}{4}}} u + r \cdot \left(r^{1-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B^+_r)} \right)^\chi \right]$$

3 MISCELÂNIA DE RESULTADOS SOBRE REGULARIDADE

Teorema 3.1 (**Estimativa ABP para equações quasilineares**). *Seja* $u : B_1^+ \to \mathbb{R}$ *solução da equação* $Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x)$, *onde* $f \in L^\infty(B_1^+)$ *e* $\mathcal{A}$ *satisfaz* $Q_1)$ *a* $Q_7)$ *em* B_1^+, *com* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_1^+)$. *Então existe uma constante universal* $C > 0$ *tal que*

$$||u||_{L^\infty(B_1^+)} \leq ||u||_{L^\infty(\partial B_1^+)} + C||f||_{L^\infty(B_1^+)}^{\frac{1}{p-1}}$$

Demonstração. Vide Teorema 6.1.5 de [5] □

Teorema 3.2 (**Estimativa ABP para equações totalmente não lineares**). *Suponha que* $u \in C^0(\overline{B_1^+})$ *seja uma solução da equação* $F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$, *onde* $f \in L^n(B_1^+)$ *e* F *satisfaz (9) em* B_1^+. *Então existe uma constante universal* $C > 0$ *tal que*

$$||u||_{L^\infty(B_1^+)} \leq ||u||_{L^\infty(\partial B_1^+)} + C||f||_{L^n(B_1^+)}$$

Demonstração. Vide Proposição 2.3 de [6] □

Teorema 3.3 (**Princípio da Comparação para equações quasilineares**). *Sejam* $u, v \in C^0(\overline{B_1^+})$ *subsolução e supersolução respectivamente da equação* $Q_{\mathcal{A}}[w] = f(x)$,*onde* $f \in L^\infty(B_1^+)$ *e* $\mathcal{A}$ *satisfaz* $Q_1)$ *a* $Q_7)$ *em* B_1^+, *com* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_1^+)$. *Se* $u \leq v$ *na* ∂B_1^+, *então* $u \leq v$ *em toda semi-bola* B_1^+.

Demonstração. Vide Teorema 2.4.1 de [5] □

Teorema 3.4 (**Princípio da Comparação para equações totalmente não lineares**). *Sejam* $u, v \in C^0(\overline{B_1^+})$ L^n-*subsolução no sentido da viscosidade e* L^n-*supersolução forte respectivamente da equação* $F(D^2w, \nabla w, x) = f(x)$,*onde* $f \in L^n(B_1^+)$, *e* F *satisfaz (9) em* B_1^+. *Se* $u \leq v$ *na* ∂B_1^+, *então* $u \leq v$ *em toda semi-bola* B_1^+

Demonstração. Vide Teorema 2.10 de [1] □

Teorema 3.5 (**Estimativa** $C^{1,\alpha}$ **interior para equações quasilineares**). *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *e* $r > 0$, *suponha que* $u : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ *seja solução de* $Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x)$, *onde* $f \in L^\infty(B_r(x_0))$ *e* $\mathcal{A}$ *satisfaz* $Q_1)$ *a* $Q_7)$ *em* $B_r(x_0)$, *com* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_r(x_0))$. *Então existe uma constante universal* $C > 0$, *tal que*

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))} \leq C\left(\frac{||u||_{L^\infty(B_r(x_0))}}{r} + \left(r||f||_{L^\infty(B_r(x_0))}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

Demonstração. Vide Teorema 1 de [4] □

Teorema 3.6 (**Estimativa** $C^{1,\alpha}$ **interior para equações totalmente não lineares**). *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *e* $\rho > 0$, *suponha que* $u : B_\rho(x_0) \to \mathbb{R}$ *seja solução de* $F(D^2u, \nabla u, x) =$

$f(x)$, onde $f \in L^q(B_\rho(x_0))$, $q > n$, e F satisfaz (9) em $B_\rho(x_0)$. Então existe uma constante universal θ, tal que se para um certo $r_0 > 0$ e $\forall y \in B_\rho(x_0)$

$$\left(\frac{1}{|B_r(y) \cap B_\rho(x_0)|} \int_{B_r(y)\cap B_\rho(x_0)} \beta_F(x,y)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \theta, \text{ sempre que } r \leq r_0$$

então existe uma constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, C_0, \mu_0, \gamma, r_0)$ tal que

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_{\rho/2}(x_0))} \leq C\left(\frac{||u||_{L^\infty(B_\rho(x_0))}}{\rho} + \rho^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_\rho(x_0))}\right)$$

Demonstração. Vide Teorema 3.1 de [9] □

Teorema 3.7 (**Estimativa $C^{1,\alpha}$ até a fronteira para equações quasilineares**). *Dados $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, e $r > 0$, suponha que $u \in C^0(\overline{B_1^+})$ seja solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x), & \text{em } B_r^+(x_0) \\ u = \varphi, & \text{em } B_r'(x_0) \end{cases}$$

onde $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_r^+(x_0))$, $f \in L^\infty(B_r^+(x_0))$ e $\mathcal{A}$ satisfaz Q_1) a Q_7) em $B_r^+(x_0)$, com $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_r^+(x_0))$. Então existe uma constante universal $C > 0$, tal que

$$||\nabla u||_{L^\infty(B^+_{3r/4}(x_0))} \leq C\left(\frac{||u||_{L^\infty(B_r^+(x_0))}}{r} + \frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B_r'(x_0))}}{r} + \left(r||f||_{L^\infty(B_r^+(x_0))}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

Demonstração. Vide Lema 8.3 de [13] □

Teorema 3.8 (**Estimativa $C^{1,\alpha}$ até a fronteira para equações totalmente não lineares**). *Dados $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, e $\rho > 0$, suponha que $u : B_\rho^+(x_0) \to \mathbb{R}$ seja solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2u, \nabla u, x) = f(x), & \text{em } B_\rho^+(x_0) \\ u = \varphi, & \text{em } B_\rho'(x_0) \end{cases}$$

onde $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_\rho'(x_0))$, $f \in L^q(B_\rho^+(x_0))$, $q > n$, e F satisfaz (9) em $B_\rho^+(x_0)$. Então existe uma constante universal θ, tal que se para um certo $r_0 > 0$ e $\forall y \in B_\rho^+(x_0)$

$$\left(\frac{1}{|B_r(y) \cap B_\rho^+(x_0)|} \int_{B_r(y)\cap B_\rho^+(x_0)} \beta_F(x,y)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \theta, \text{ sempre que } r \leq r_0$$

então existe uma constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, C_0, \mu_0, \gamma, r_0)$ tal que

$$||\nabla u||_{L^\infty(B^+_{3\rho/4}(x_0))} \leq C\left(\frac{||u||_{L^\infty(B^+_\rho(x_0))}}{\rho} + \frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B'_\rho(x_0))}}{\rho} + \rho^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B^+_\rho(x_0))}\right)$$

Demonstração. Vide Lema 8.3 de [13] □

Teorema 3.9 (**Desigualdade de Harnack para equações totalmente não lineares**). *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, suponha que $u : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ seja uma solução da equação $F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$, onde $f \in L^q(B(x_0, r)$, $q > n$, e F satisfaz (9) e (10) em $B(x_0, r)$. Então existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$\sup_{B_{r/2}(x_0)} u \leq C\left(\inf_{B_{r/2}(x_0)} u + r^{2-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_r(x_0))}\right)$$

Demonstração. Vide Corolário 5.12 de [3] □

Teorema 3.10 (**Desigualdade de Harnack para equações quasilineares**). *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, suponha que $u : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ seja uma solução da equação $Q_{\mathcal{A}}[u] = f(x)$, onde $f \in L^q(B_1^+), q > n$, e $\mathcal{A}$ satisfaz $Q_1)$ a $Q_7)$ em $B(x_0, r)$, com $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B(x_0, r))$. Então existe uma constante universal $C > 0$ tal que*

$$\sup_{B_{r/2}(x_0)} u \leq C\left(\inf_{B_{r/2}(x_0)} u + r^{\frac{p-n/q}{p-1}}||f||_{L^q(B_r(x_0))}\right)$$

Demonstração. Vide Teorema 7.1.2 e 7.4.1 de [5] □

Teorema 3.11 (**Solubilidade do problema de Dirichlet para equações quasilineares**). *Sejam $\varphi \in W^{1,p}(\partial B_1^+)$, $0 < \alpha < 1$; $f \in L^\infty(B_1^+)$ e suponha que $\mathcal{A} : B_1^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz $Q_1)$ a $Q_7)$ em B_1^+, com $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_1^+)$. Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{A}}[w](x) = f(x) & , \ B_1^+ \\ w(x) = \varphi(x) & , \ \partial B_1^+ \end{cases}$$

admite solução.

Demonstração. Vide Proposição 5.1 de [7] □

Teorema 3.12 (**Solubilidade do problema de Dirichlet para equações totalmente não lineares**). *Sejam $\varphi \in C^0(\partial B_1^+)$, $0 < \alpha < 1$; $f \in L^n(B_1^+)$, e suponha que F : $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times B_1^+ \times \mathbb{R}^n$ satisfaz (9) em B_1^+. Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2w, \nabla w, x) = f(x) & , \ B_1^+ \\ w(x) = \varphi(x) & , \ \partial B_1^+ \end{cases}$$

admite L^n-solução no sentido da viscosidade.

Demonstração. Vide Teorema 4.1 de [2] □

O Teorema a seguir também é um resultado de solubilidade para equações totalmente não lineares. Ele garante que sob a hipótese de concavidade ou convexidade do operador existem soluções para problemas de Dirichlet como acima em $W^{2,n}_{loc} \cap C^0$.

Teorema 3.13. *Sejam* $f \in L^n(B_1^+)$ *e* $F : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times B_1^+ \to \mathbb{R}$ *um operador concavo ou convexo na primeira variável satisfazendo (9). Então existe um* $\theta = \theta(n, q, \lambda, \Lambda)$ *tal que se para algum* $r_0 > 0$ *e* $\forall y \in B_1^+$

$$\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r(y)} \beta_F(x,y)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \theta, \text{ sempre que } \; r \leq r_0$$

então qualquer que seja a função $u_0 \in C^0(\partial B_1^+)$*, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2u, \nabla u, x) = f(x) & , \; B_1^+ \\ u(x) = u_0(x) & , \; \partial B_1^+ \end{cases}$$

adimte uma única L^n*-solução no sentido da viscosidade a qual está em* $W^{2,n}_{loc}(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$.

Demonstração. Vide Teorema 3.1 de [15] $\square$

4 PRELIMINARES

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ um operador uniformemente elíptico, i.e, existem constantes $\lambda, \Lambda, \gamma > 0$, com $\lambda \leq \Lambda$, tais que para quaisquer $M, N \in \mathcal{S}_n$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ tem-se

$$\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M-N) - \gamma|\xi-\eta| \leq F(M,\xi,x) - F(N,\eta,x) \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M-N) + \gamma|\xi-\eta|, \qquad (9)$$

Assumamos ainda que F admite uma dependência Hölder na variável x, i.e., exitem constantes $C_0 > 0$, $\mu_0 \in (0,1)$, tais que

$$\begin{cases} |F(M,\xi,x) - F(M,\xi,y)| \leq C_0|x-y|^{\mu_0}(|M| + |\xi|) \\ F(0,0,0) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Note que as duas propriedades acima implicam que $F(0,0,x) = 0$, $\forall x \in \Omega$. Com respeito à teoria quasilinear, suporemos que $Q_{\mathcal{A}}$ é um operador não linear singular/degenerado da forma divergente:

$$Q_{\mathcal{A}}[v] := div\Big(\mathcal{A}(x, \nabla v)\Big). \qquad (11)$$

onde $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n) \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua tal que para certas constantes positivas $p, q, \lambda_0, \Lambda_0, \overline{\lambda_0}, \overline{\Lambda_0}, \alpha_0$, com $p > 1$, $q > n$, $\alpha_0 \in (0,1]$ valem as seguintes propriedades.

Q_1) $\langle \mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta), \xi - \eta \rangle > 0, \quad \forall\,(x,\xi,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,\ \xi \neq \eta;$

Q_2) $|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \Lambda_0 \cdot |\xi|^{p-1} \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n;$

Q_3) $\langle \mathcal{A}(x,\xi), \xi \rangle \geq \lambda_0 \cdot |\xi|^p \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n;$

Q_4) As seguintes derivadas parciais existem e são contínuas em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$(\partial_\xi \mathcal{A}(x,\xi))_{ij} := \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \xi_j}(x,\xi) \qquad i,j = 1, \cdots, n;$$

Q_5) $\langle \partial_\xi \mathcal{A}(x,\xi) \cdot \eta, \eta \rangle \geq \overline{\lambda_0} \cdot |\xi|^{p-2} \cdot |\eta|^2, \quad \forall (x,\xi,\eta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n;$

Q_6) $||\partial_\xi \mathcal{A}(x,\xi)|| \leq \overline{\Lambda_0} \cdot |\xi|^{p-2}, \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\});$

Q_7) $||\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(y,\xi)|| \leq \overline{\Lambda_0} \cdot |\xi|^{p-1} \cdot |x-y|^{\alpha_0}, \quad \forall (x,y,\xi) \in \Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\,.$

Fixado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, denote $L_\nabla(U)$ o conjunto de todas as funções em $W^{1,1}(U)$, cujo gradiente é limitado por cima e por baixo. Mais precisamente,

$$L_\nabla(U) := \left\{ v \in W^{1,1}(U) : \log|\nabla v| \in L^\infty(U) \right\}$$

Além das propriedades Q_1)-Q_7), assumiremos adicionalmente que $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade de controle via Pucci por baixo em Ω, conceito introduzido em [13] (e escreveremos simplificadamente $A \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)\,(\Omega)$, onde a sigla "*LPC*" vem do inglês *Lower Pucci Control*), i.e, existem constantes positivas $\lambda, \Lambda, \underline{\varrho}, \gamma$, com $\lambda \le \Lambda$, tais que

$$\begin{cases} \forall U \subset \Omega,\ U \text{ aberto} \\ \\ \forall \phi \in W^{2,1}(U) \cap L_\nabla(U) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{\mathcal{A},\phi} := \mathcal{A}(\cdot, \nabla\phi) \in W^{1,1}_{loc}(U), \text{ e para q.t.p. } x \in U, \\ \\ \operatorname{div}(X_{\mathcal{A},\phi})(x) \ge \underline{\varrho}|\nabla\phi(x)|^{p-2}\left(\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi(x)) - \gamma|\nabla\phi(x)|\right) \end{cases}$$

As propriedades (9), e (10) no caso totalmente não linear, bem como as propriedades Q_1) a Q_7), mais a propriedade de controle via Pucci por baixo no caso quasilinear, serão chamadas de **condições de estrutura** e as constantes relacionadas a estas propriedades serão chamadas de **constantes de estrutura**.

É fácil ver que o operador $p-$*laplaciano* satisfaz todas as condições acima com $\gamma = 0$.

Definição 4.1. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ um operador não decrescente na primeira variável, $q > \dfrac{n}{2}$ e uma função $f \in L^q_{loc}(\Omega)$, diremos que uma função $u \in C^0(\Omega)$ é uma L^q-subsolução (supersolução) no sentido da viscosidade de $F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$ em Ω se para quaisquer $\varphi \in W^{2,q}_{loc}(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$ tais que $u - \varphi$ tem máximo local (respectivamente mínimo local) no ponto x_0 tivermos*

$$\lim_{x \to x_0} \sup ess\left(F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), x) - f(x)\right) \ge 0 \tag{12}$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} \inf ess\left(F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), x) - f(x)\right) \le 0\right)$$

Além disso diremos que u é uma L^q-solução de $F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$ em Ω, quando ela for simultaneamente uma L^q-subsolução e uma L^q-supersolução desta equação em Ω.

Observação 4.1. *Note que (12) equivale a dizer que para quaisquer $\varepsilon, r > 0$, existe um conjunto $A \subset B_r(x_0)$, de medida positiva tal que $F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), x) - f(x) \ge -\varepsilon$, $\forall x \in A$.*

Observação 4.2. *A hipótese $q > \dfrac{n}{2}$ na definição acima é apenas para garantir, via mergulho de Sobolev, que φ é contínua e assim faça sentido falarmos de um máximo local para a função $u - \varphi$.*

Definição 4.2. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p > 1$ e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, diremos que uma função $u \in$*

$W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ é uma subsolução (supersolução) fraca da equação $Q_{\mathcal{A}}[u](x) = \mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u) = f(x)$ em Ω se para toda $0 \leq \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ tivermos

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi(x)dx \leq -\int_{\Omega}\varphi(x)f(x)dx.$$

$$\left(\int_{\Omega} \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi(x)dx \geq -\int_{\Omega}\varphi(x)f(x)dx\right)$$

Além disso diremos que u é uma solução fraca de $Q_{\mathcal{A}}[u](x) = f(x)$ em Ω, quando ela for simultaneamente uma subsolução e uma supersolução fraca desta equação em Ω.

A partir de agora caminharemos na direção de mostrar todas as ferramentas necessárias para demostrarmos o Teorema 1.2. Faremos isto no caso em que $\Omega = B_1^+$. Mais precisamente provaremos o seguinte Teorema

Teorema 4.1 (**Estimativa Lipschitz até a fronteira para o problema de perturbação singular**). *Suponha que u_ε é uma solução de um dos seguintes problemas de perturbação singular.*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}), & \\ F(D^2u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, x) = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & \text{em } B_1^+, \\ u_\varepsilon \geq 0 & \text{em } B_1^+, \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{em } B_1' \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}) \cap W^{1,p}(B_1^+), & \\ Q_{\mathcal{A}}[u_\varepsilon] = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & \text{em } B_1^+, \\ u_\varepsilon \geq 0 & \text{em } B_1^+, \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{em } B_1'. \end{cases}$$

onde $f_\varepsilon \in L^q(B_1^+)$, $q > n$ no caso totalmente não linear e $q = \infty$ no caso quasilinear; $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1')$; F satisfaz as condições (9) e (10); $\mathcal{A}$ satisfaz $Q_1)$ a $Q_7)$ em B_1^+, com $A \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_1^+)$. Então existe uma constante universal $C > 0$, i.e., $C = C(n,q,\alpha,\lambda,\Lambda,\gamma)$ no caso totalmente não linear, e $C = C(n,p,\alpha,\lambda,\Lambda,\gamma,\lambda_0,\Lambda_0,\overline{\lambda_0},\overline{\Lambda_0},\alpha_0,\underline{\varrho})$ no caso quasi-

linear, tal que

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{1/4})} \leq C \cdot \left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)} + \Big(||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)} + ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B'_1)}\right]. \quad (13)$$

onde

$$\chi := \begin{cases} 1, & \textit{no caso totalmente não linear,} \\ \\ (p-1)^{-1}, & \textit{na caso quasilinear.} \end{cases} \quad (14)$$

Em particular, se

$$\sup_{\varepsilon>0}\Big\{||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}, ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\Big\} < \infty$$

então a família $\{u_\varepsilon\}$ é uniformemente Lipschitz.

Começamos nossa empreitada pelo coração do Teorema que nós o chamamos de Estimativa do Traço.

Lema 4.1. *A estimativa do traço é verdadeira sempre que x admite projeção não tangencial sobre $\Omega^-_\varepsilon(u_\varepsilon)$, i.e, $\Pi_x \cap \Gamma_x \neq \emptyset$, onde $\Pi_x := \{\ y \in \Omega^-_\varepsilon; \quad |y - x| = dist\,(x, \Omega^-_\varepsilon)\}$.*

Demonstração. Fixado um ponto $x_0 \in B'_{1/2}$, defina $d_\varepsilon := dist(x_0, \Omega^-_\varepsilon)$. Note que podemos supor sem perda de generalidade que $0 < d_\varepsilon < \frac{1}{4}$. Com efeito, se $d_\varepsilon = 0$ a estimativa é trivial uma vez que esta igualdade implica que $x_0 \in \Omega^-_\varepsilon$, e se $d_\varepsilon \geq \frac{1}{4}$, então

$$u_\varepsilon(x_0) = \varphi(x_0) \leq ||\varphi||_{C^{0,1}(B'_1)} \leq 4||\varphi||_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot d_\varepsilon$$

Portanto, daqui para frente suporemos $0 < d_\varepsilon < \frac{1}{4}$. Como $|x_0| + d_\varepsilon \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$, temos que $B^+_{d_\varepsilon}(x_0) \subset B^+_1$. Ademais, $\forall x \in B'_{d_\varepsilon}(x_0)$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &\geq u_\varepsilon(x_0) - [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot |x - x_0| \\ \\ &\geq u_\varepsilon(x_0) - ||\varphi||_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot d_\varepsilon \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema (2.1) segue-se que existe uma constante universal C, tal que

$$\begin{aligned} \inf_{B^+_{\frac{3d_\varepsilon}{4}}(x_0)} u_\varepsilon &\geq C \cdot \inf_{B'_{d_\varepsilon}(x_0)} u_\varepsilon - d_\varepsilon \cdot \left(d_\varepsilon^{1-\frac{n}{q}} ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_{d_\varepsilon}(x_0))} \right)^\chi \\ &\geq C \cdot \left(u_\varepsilon(x_0') - ||\varphi||_{C^{0,1}(B_1')} \cdot d_\varepsilon \right) - d_\varepsilon \cdot ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)} \end{aligned}$$

Sejam x_ε uma projeção não tangencial de x_0 sobre Ω_ε^- e $\xi := x_0 + \dfrac{3}{4} \cdot (x_\varepsilon - x_0)$, o qual claramente é um ponto na semi-bola $B^+_{\frac{3d_\varepsilon}{4}}(x_0)$. Pela estimativa acima, para mostrarmos (*) é suficiente portanto provarmos que para alguma constante universal $\overline{C}$

$$u_\varepsilon(\xi) \leq \overline{C} \cdot \left\{ \varepsilon + \left(1 + ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^\chi \cdot d_\varepsilon \right\} \tag{15}$$

Consideremos 2 casos.

1) $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$:

Como $|x_\varepsilon| + \dfrac{d_\varepsilon}{2} \leq |x_\varepsilon - x_0| + |x_0| + \dfrac{d_\varepsilon}{2} \leq d_\varepsilon + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} < 1$ e $x_\varepsilon \in \Gamma_{x_0}$ (donde segue que $B_{\frac{d_\varepsilon}{2}}(x_\varepsilon) = B_{\frac{|x_\varepsilon - x_0|}{2}}(x_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n_+$), temos que $B_{\frac{d_\varepsilon}{2}}(x_\varepsilon) \subset B_1^+$. Usando a desigualdade de Harnack na função $u_\varepsilon|_{B_{\frac{d_\varepsilon}{2}}(x_\varepsilon)}$, segue-se que existe uma constante universal C_1 tal que

$$u_\varepsilon(\xi) \leq \sup_{B_{d_\varepsilon/4}(x_\varepsilon)} u_\varepsilon \leq C_1 \left(\inf_{B_{d_\varepsilon/4}(x_\varepsilon)} u_\varepsilon + \left(\frac{d_\varepsilon}{2} \right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f||^\chi_{L^q(B_{d_\varepsilon/2}(x_\varepsilon))} \right) \tag{16}$$

Como $x_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$, temos que

$$\inf_{B_{d_\varepsilon/4}(x_\varepsilon)} u_\varepsilon \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \varepsilon \tag{17}$$

Além disso, para quaisquer $x \in \Omega_\varepsilon^-$, $0 < r \leq dist(x, \partial B_1^+)$

$$\begin{aligned} r^{1-\frac{n}{q}} \cdot ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||_{L^q(B_r^+(x))} &= r \cdot ||\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon(x+ry)\right) + f_\varepsilon(x+ry)||_{L^q(B_1^+)} \\ &\leq r \cdot ||\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon(x+ry)\right)||_{L^q(B_1^+)} + r \cdot ||f_\varepsilon(x_\varepsilon + d_\varepsilon y)||_{L^q(B_1^+)} \\ &= \frac{r}{\varepsilon} \cdot \left|\left| \beta\left(\frac{u_\varepsilon(x+ry)}{\varepsilon} \right) \right|\right|_{L^q(B_1^+)} + r^{1-\frac{n}{q}} \cdot ||f_\varepsilon||_{L^q(B_r^+(x))} \\ &\leq \frac{r}{\varepsilon} \cdot ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
r^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}\cdot||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)+f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_r(x))} &= r\cdot\left(r^{1-\frac{n}{q}}\cdot||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)+f_\varepsilon||_{L^q(B_r^+(x))}\right)^{\chi}\\
&\leq r\cdot\left(\frac{r}{\varepsilon}\cdot||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\chi}
\end{aligned}
$$

Como $x_\varepsilon\in S_\varepsilon\cap\Gamma_{x_0}$, temos $\varepsilon>|x_\varepsilon-x'_\varepsilon|\geq\dfrac{|x_\varepsilon-x_0|}{2}=\dfrac{d_\varepsilon}{2}$ e portanto

$$
\left(\frac{d_\varepsilon}{2}\right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)+f||^{\chi}_{L^q(B_{d_\varepsilon/2}(x_\varepsilon))}\leq\frac{d_\varepsilon}{2}\cdot\left(2\cdot||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\chi} \tag{18}
$$

(16), (17) e (18) claramente implicam em (15).

2) $x_\varepsilon\notin S_\varepsilon$:

Neste caso, o Lema de Hopf aplicado a função $v_\varepsilon:=u_\varepsilon-\varepsilon$ na bola $B_{\frac{d_\varepsilon}{4}}(\xi)$ garante que existe uma existe uma constante universal $C>0$, tal que

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(\xi)-\varepsilon &= v_\varepsilon(\xi)\\
&\leq C\cdot\frac{d_\varepsilon}{4}\cdot\left[\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\nu}(x_\varepsilon)+\left(\frac{d_\varepsilon}{4}\right)^{\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}\cdot||f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_{\frac{d_\varepsilon}{4}}(\xi))}\right]\\
&\leq C\cdot d_\varepsilon\cdot\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}(x_\varepsilon)+||f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_1^+)}\right] \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Pela proposição (), temos que

$$
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}(x_\varepsilon)\leq|\nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon)|\leq\widetilde{C}\cdot\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\chi}\right] \tag{20}
$$

(19) e (20) claramente implicam em (15).

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d_0}{2}\right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)+f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))} &\leq \frac{d_0}{2}\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\chi}\\
&\leq \varepsilon\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\chi} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Usando (30) e (31) em (29), obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{d_0/4}(x_1)} u_\varepsilon &\leq C\left[\varepsilon + \varepsilon\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))}\right)^\chi\right] \\ &= C\left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))}\right)^\chi\right] \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{22}$$

Aplicando (28) e (32) no ponto $\xi \in \partial B_{(3d_0)/4}(x_0') \cap \partial B_{d_0/4}(x_1)$, obtemos que

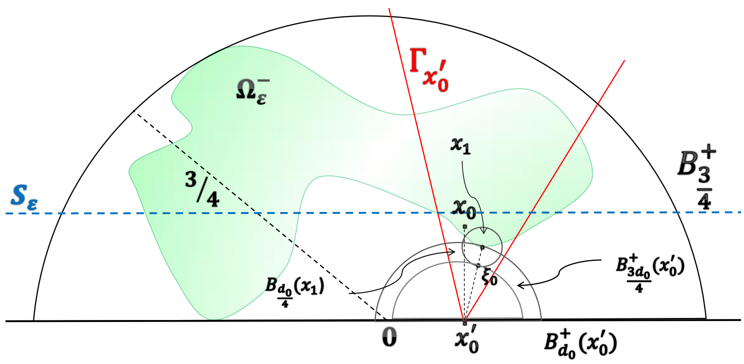
$$D_1\left(u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')} \cdot \varepsilon\right) \leq u_\varepsilon(\xi) \leq C\left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right] \cdot \varepsilon$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_0') &\leq \left\{\frac{C}{D_1}\left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right] + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right\} \cdot \varepsilon \\ &\leq \max\left\{\frac{C}{D_1}, 1\right\}\left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right] \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

O que prova a proposição.

Figura 1 – Projeção não tangencial sobre $\Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)$.



□

Proposição 4.1 (Estimativa do traço). *Suponha que u_ε é uma solução de um dos* *seguintes problemas de perturbação singular.*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}), \\ \\ F(D^2u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, x) = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & em\ B_1^+, \\ \\ u_\varepsilon \geq 0 & em\ B_1^+, \\ \\ u_\varepsilon = \varphi & em\ B_1' \end{cases} \tag{23}$$

ou

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}) \cap W^{1,p}(B_1^+), \\ \\ Q_{\mathcal{A}}[u_\varepsilon] = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) & em\ B_1^+, \\ \\ u_\varepsilon \geq 0 & em\ B_1^+, \\ \\ u_\varepsilon = \varphi & em\ B_1'. \end{cases} \tag{24}$$

onde $f_\varepsilon \in L^q(B_1^+)$, $\varphi \in C^{0,1}(B_1')$, F satisfaz as condições de estrutura (9) e (10); e $Q_{\mathcal{A}}$ satisfaz as condições $Q_1)$ - $Q_7)$ em B_1^+, com $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(B_1^+)$. Então existe uma constante universal C, tal que para todo $x \in \Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon) \cap B_{1/2}^+ \cap S_\varepsilon$

$$u_\varepsilon(x') \leq C \left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{0,1}(B_1')}\right] \cdot \varepsilon. \tag{25}$$

Demonstração. Fixado um ponto $x_0 \in \Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon) \cap B_{1/2}^+ \cap S_\varepsilon$, defina $d_0 := dist(x_0', \Omega_\varepsilon)$. Note que

$$\begin{aligned} d_0 &= dist(x_0', \Omega_\varepsilon) \\ &\leq |x_0' - x_0| \qquad \text{pois } x_0 \in \Omega_\varepsilon \\ &\leq \varepsilon \qquad\qquad\quad \text{pois } x_0 \in S_\varepsilon \end{aligned}$$

Seja x_1 um ponto em Ω_ε tal que $|x_1 - x_0'| = d_0$. Note que se $d_0 = 0$, i.e, $x_1 = x_0'$, a estimativa (25) é trivialmente satisfeita. Portanto suporemos sem perda de generalidade que $d_0 > 0$.

Suponhamos adicionalmente que $x_1 \in \Gamma_{x_0'}$. Caso

$$\varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi > C_1 \left(u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')} \cdot \varepsilon\right)$$

onde C_1 é a constante do Teorema (2.1), então a proposição segue uma vez que esta estimativa implica que

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x_0') &\leq \left[\frac{1}{C_1}\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{C_1},1\right\}\left[\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto podemos supor sem perda de generalidade que

$$\varepsilon\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi \leq C_1\left(u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon\right) =: C_1 M \tag{26}$$

Como $|x_0'| + d_0 \leq |x_0| + d_0 \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} < 1$, temos que $B_{d_0}^+(x_0') \subset B_1^+$. Ademais, $\forall x \in B_{d_0}'(x_0')$

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &\geq u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot|x - x_0'| \\
&\geq u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot d_0 \\
&\geq u_\varepsilon(x_0') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon \\
&= M
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
d_0^{1-\frac{n}{q}}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0}^+(x'))} &= d_0||\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon(x' + d_0 y)\right) + f_\varepsilon(x' + d_0 y)||_{L^q(B_1^+)} \\
&\leq d_0||\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon(x' + d_0 y)\right)||_{L^q(B_1^+)} + d_0||f_\varepsilon(x' + d_0 y)||_{L^q(B_1^+)} \\
&= \frac{d_0}{\varepsilon}\left|\left|\beta\left(\frac{u_\varepsilon(x' + d_0 y)}{\varepsilon}\right)\right|\right|_{L^q(B_1^+)} + d_0^{1-\frac{n}{q}}||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0}^+(x'))} \\
&\leq ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}
\end{aligned} \tag{27}
$$

Consequentemente, por (26)

$$
\begin{aligned}
d_0^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B^+_{d_0}(x'))} &\leq d_0 \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)} \right)^\chi \\
&\leq \varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)} \right)^\chi \\
&\leq C_1 M
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema (2.1), existe uma constante universal D_1, tal que

$$
u_\varepsilon|_{B^+_{\frac{3d_0}{4}}(x'_0)} \geq D_1 M = D_1 \left(u_\varepsilon(x'_0) - [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot \varepsilon \right) \tag{28}
$$

Agora, como

$$
|x_1| + \frac{d_0}{2} \leq |x_1 - x'_0| + |x'_0| + \frac{d_0}{2} \leq d_0 + |x_0| + \frac{d_0}{2} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} < 1
$$

e $x_1 \in \Gamma_{x'_o}$ (donde segue que $B_{\frac{d_0}{2}}(x_1) = B_{\frac{|x_1 - x'_0|}{2}}(x_1) \subset \mathbb{R}^+_n$), temos que $B_{\frac{d_0}{2}}(x_1) \subset B^+_1$. Usando a desigualdade de Harnack na função $u_\varepsilon|_{B_{\frac{d_0}{2}}(x_1)}$ (vide Corolário 5.12 em [3] para o caso totalmente não linear e Teoremas 7.1.2 e 7.4.1 em [5] para o caso quasilinear), segue-se que existe uma constante universal C tal que

$$
\sup_{B_{d_0/4}(x_1)} u_\varepsilon \leq C \left(\inf_{B_{d_0/4}(x_1)} u_\varepsilon + \left(\frac{d_0}{2}\right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f||^\chi_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))} \right) \tag{29}
$$

Como $x_1 \in \Omega_\varepsilon$, temos que

$$
\inf_{B_{d_0/4}(x_1)} u_\varepsilon \leq u_\varepsilon(x_1) \leq \varepsilon \tag{30}
$$

e assim como na prova de (27), temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d_0}{2}\right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))} &\leq \frac{d_0}{2} \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)} \right)^\chi \\
&\leq \varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)} \right)^\chi
\end{aligned} \tag{31}
$$

Usando (30) e (31) em (29), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_{d_0/4}(x_1)} u_\varepsilon &\leq C\left[\varepsilon+\varepsilon\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))}\right)^\chi\right] \\
&= C\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))}\right)^\chi\right]\cdot\varepsilon \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Aplicando (28) e (32) no ponto $\xi \in \partial B_{(3d_0)/4}(x_0') \cap \partial B_{d_0/4}(x_1)$, obtemos que

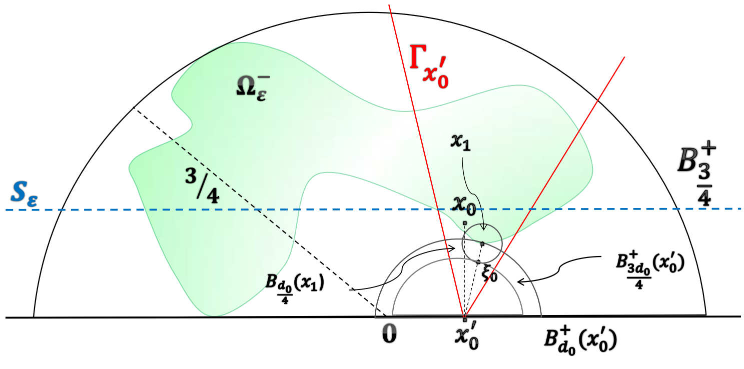
$$
D_1\left(u_\varepsilon(x_0')-[\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon\right) \leq u_\varepsilon(\xi) \leq C\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]\cdot\varepsilon
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x_0') &\leq \left\{\frac{C}{D_1}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]+[\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right\}\cdot\varepsilon \\
&\leq \max\left\{\frac{C}{D_1},1\right\}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi+[\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

O que prova a proposição.

Figura 2 – Projeção não tangencial sobre $\Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)$.



Suponha agora que $x_1 \notin \Gamma_{x_0'}$, e suponha definidos indutivamente pontos $x_0, x_1, \cdots, x_k \in \Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)$, tais que, $\forall j = 1, 2, \cdots, k$

$$
\left\{\begin{array}{lll} d_{j-1} & := & dist(x_{j-1}', \Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)) = |x_j - x_{j-1}'| \\ x_j & \notin & \Gamma_{x_{j-1}'} \end{array}\right. \qquad (33)
$$

Seja x_{k+1} um ponto em $\Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)$ tal que

$$d_k := dist(x'_k, \Omega^-_\varepsilon(u_\varepsilon)) = |x_{k+1} - x'_k|$$

.

Inicialmente note que por (33), $\forall j = 1, \cdots, k$

$$\begin{aligned} d_j &= dist(x'_j, \Omega_\varepsilon) \\ &\leq |x'_j - x_j| \qquad \text{(pois } x_j \in \Omega_\varepsilon) \\ &\leq \frac{|x_j - x'_{j-1}|}{2} \qquad \text{(pois } x_j \notin \Gamma_{x'_{j-1}}) \\ &= \frac{d_{j-1}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\forall j = 1, \cdots, k$, $d_j \leq \dfrac{d_0}{2^j}$, e além disso,

$$\begin{aligned} |x_j - x'_0| &\leq |x_j - x'_{j-1}| + |x'_{j-1} - x'_{j-2}| + \cdots + |x'_1 - x'_0| \\ &\leq |x_j - x'_{j-1}| + |x_{j-1} - x'_{j-2}| + \cdots + |x_1 - x'_0| \\ &= d_{j-1} + d_{j-2} \cdots + d_0 \\ &\leq d_0 \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{2^l} \end{aligned} \tag{34}$$

Se $d_k = 0$, i.e, $x_{k+1} = x'_k$, então proposição segue uma vez que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x'_0) &\leq u_\varepsilon(x'_k) + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot |x'_0 - x'_k| \\ &\leq \varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot |x'_0 - x_k| \\ &\leq \varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot d_0 \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{2^l} \\ &\leq \varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot 2d_0 \\ &\leq \left(1 + 2[\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\right) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto podemos supor sem perda de generalidade que $d_k > 0$. Se $x_{k+1} \in \Gamma_{x'_k}$, podemos argumentar de modo análogo ao caso $x_1 \in \Gamma_{x'_0}$. De fato, caso

$$\varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^\chi > C_1 \left(u_\varepsilon(x'_k) - [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)} \cdot \varepsilon \right)$$

onde C_1 é a constante do Lema 2.1, então a proposição segue uma vez que esta estimativa implica que

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x_0') &\leq u_\varepsilon(x_k') + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}|x_k' - x_0'| \\
&\leq \left[\frac{1}{C_1}\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot d_0\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{2^l} \\
&\leq \left[\frac{1}{C_1}\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot 2d_0 \\
&\leq \left[\frac{1}{C_1}\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot 2\varepsilon \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{C_1}, 3\right\}\left[\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right]\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto podemos supor sem perda de generalidade que

$$\varepsilon\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi \leq C_1\left(u_\varepsilon(x_k') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon\right) \tag{35}$$

Como

$$|x_k'| + d_k \leq |x_k' - x_0'| + |x_0'| + d_k \leq d_0\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{2^l} + |x_0| + \frac{d_0}{2^k} \leq 2d_0 + |x_0| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1$$

temos que $B^+_{d_k}(x_k') \subset B_1^+$. De modo inteiramente análogo ao caso $x_1 \in \Gamma_{x_0'}$, obtemos que

$$u_\varepsilon|_{B_{d_k}(x_k')} \geq u_\varepsilon(x_k') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon$$

e via (35) que

$$d_k^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_{d_0}(x_k'))} \leq C_1\left(u_\varepsilon(x_k') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon\right)$$

Logo, pelo Teorema 2.1, existe uma constante universal D_1, tal que

$$u_\varepsilon|_{B^+_{\frac{3d_k}{4}}(x_k')} \geq D_1\left(u_\varepsilon(x_k') - [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\cdot\varepsilon\right) \tag{36}$$

Agora, como

$$|x_{k+1}| + \frac{d_k}{2} \leq |x_{k+1} - x_0'| + |x_0'| + \frac{d_k}{2} \leq d_0\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{2^l} + |x_0| + \frac{1}{2}\frac{d_0}{2^k} \leq 2d_0 + \frac{1}{2} < 1$$

e $x_{k+1} \in \Gamma_{x'_k}$ (donde segue que $B_{\frac{d_k}{2}}(x_{k+1}) = B_{\frac{|x_{k+1}-x'_k|}{2}}(x_{k+1}) \subset \mathbb{R}^+_n$), temos que $B_{\frac{d_k}{2}}(x_{k+1}) \subset B_1^+$

De modo inteiramente análogo ao caso $x_1 \in \Gamma_{x'_0}$, obtemos, via desigualdade de Harnack, que existe uma constante universal C tal que

$$u_\varepsilon|_{B_{d_k/4}(x_{k+1})} \leq C\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]\cdot\varepsilon \tag{37}$$

Aplicando (36) e (37) no ponto $\xi_k \in \partial B^+_{\frac{3d_k}{4}}(x'_k) \cap \partial B_{d_k/4}(x_{k+1})$, obtemos que

$$D_1\left(u_\varepsilon(x'_k) - [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\right)\cdot\varepsilon \leq u_\varepsilon(\xi_k) \leq C\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]\cdot\varepsilon$$

Logo,

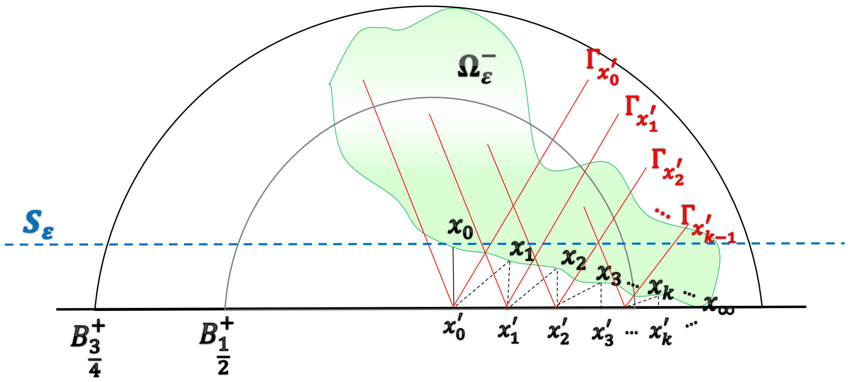
$$\begin{aligned}
&u_\varepsilon(x'_0)\\
&\leq \; u_\varepsilon(x'_k) + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}|x'_k - x'_0|\\
&\leq \; \left\{\frac{C}{D_1}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]+||\varphi||_{C^{0,1}(B'_1)}\right\}\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\cdot d_0\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{2^l}\\
&\leq \; \left\{\frac{C}{D_1}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]+||\varphi||_{C^{0,1}(B'_1)}\right\}\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\cdot 2d_0\\
&\leq \; \left\{\frac{C}{D_1}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi\right]+[\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\right\}\cdot\varepsilon + [\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\cdot 2\varepsilon\\
&\leq \; \max\left\{\frac{C}{D_1},3\right\}\left[1+\left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})}+||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi+[\varphi]_{C^{0,1}(B'_1)}\right]\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

Se $x_{k+1} \notin \Gamma_{x'_k}$, então prosseguimos definindo os pontos $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots$, até obtermos um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_0+1} \in \Gamma_{x'_{k_0}}$. Se este k_0 existir, procedemos como anteriormente para estimar $u_\varepsilon(x'_0)$. Caso este k_0 não exista, então obtemos uma seqüência de pontos $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset \Omega_\varepsilon$ satisfazendo (33) (e consequentemente (34)), $\forall j$. Por compacidade, obtemos módulo subsequência que

$$x_k \to x_\infty \in \Omega_\varepsilon \cap \overline{B_{2d_0}(x'_0)}$$

Note ainda que $x_\infty \in \partial\mathbb{R}^+_n$, pois como $x_k \notin \Gamma_{x'_{k-1}}$, $|x_k - x'_k| \leq |x_k - x'_{k-1}|/2 = d_k/2 \to 0$, quando $k \to \infty$. Daí,

Figura 3 – Seqüência infinita de Projeções tangenciais.



$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x_0') &= \varphi(x_0') \\
&\leq [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}|x_0' - x_\infty| + \varphi(x_\infty) \\
&\leq [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')} \cdot 2d_0 + \varepsilon \\
&\leq [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')} \cdot 2\varepsilon + \varepsilon \\
&= \left(2[\varphi]_{C^{0,1}(B_1')} + 1\right) \cdot \varepsilon \\
&\leq 2\left(1 + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1')}\right) \cdot \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.2. *Nas mesmas condições do Teorema 4.1, existe uma constante universal C tal que*

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{1/2}^+ \cap \Omega_\varepsilon)} \leq C\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right] \cdot \varepsilon$$

Demonstração. Fixado um $x_0 \in B_{1/2}^+ \cap \Omega_\varepsilon^-(u_\varepsilon)$ considere dois casos

Caso 1 : $\quad dist(x_0, B_1') > \varepsilon.$

Então $B_\varepsilon(x_0) \subset B_1^+$, e daí Harnack aplicado a $u_\varepsilon|_{B_\varepsilon(x_0)}$ nós dá que existe uma constante universal C tal que

$$\sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon \leq C\left(\inf_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon + \varepsilon^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_\varepsilon(x))}\right) \tag{38}$$

Como $x_0 \in \Omega_\varepsilon$, temos que

$$\inf_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon \leq u_\varepsilon(x_0) \leq \varepsilon \tag{39}$$

e assim como na prova de (27), temos que

$$\varepsilon^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_\varepsilon(x_0))} \leq \varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^{\chi} \tag{40}$$

Usando (39) e (40) em (38), obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon &\leq C \left[\varepsilon + \varepsilon \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))} \right)^{\chi} \right] \\ &= C \left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_{d_0/2}(x_1))} \right)^{\chi} \right] \cdot \varepsilon \end{aligned} \tag{41}$$

Logo, pela estimativa interior do gradiente, temos que para uma certa constante universal C_1

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x_0)| &\leq ||\nabla u_\varepsilon||_{B_{\varepsilon/4}(x_0)} \\ &\leq \frac{C_1}{\varepsilon/2} \left(\sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1+\chi\left(1-\frac{n}{q}\right)} ||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||^{\chi}_{L^q(B_{\varepsilon/2}(x_0))} \right) \\ &\leq \frac{2C_1}{\varepsilon} \left[\sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^{\chi} \right] \\ &\leq 2C_1 \left[\frac{1}{\varepsilon} \sup_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} u_\varepsilon + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^{\chi} \right] \\ &\leq \widetilde{C} \left[1 + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} \right)^{\chi} \right] \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}$ é uma constante universal.

Caso 2 : $dist(x_0, B_1') \leq \varepsilon$.
Neste caso nós consideramos a função w_ε solução de um dos seguintes problemas conforme u_ε satisfaça (23) ou (24)

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2 w_\varepsilon) - \gamma|\nabla w_\varepsilon| = f_\varepsilon(x) & , \ B_1^+ \\ w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) & , \ \partial B_1^+ \end{cases} \tag{42}$$

ou

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{A}}[w_\varepsilon](x) = f_\varepsilon(x) & , \ B_1^+ \\ w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) & , \ \partial B_1^+ \end{cases} \tag{43}$$

A existência de w_ε é garantida pelos Teoremas (3.12) e (3.11). Note que qualquer domínio Ω com a propriedade do cone exterior, em particular a semi bola B_1^+, é regular, i.e, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existem constantes $\theta, r_0 > 0$, tais que

$$\frac{|B_r(x_0) - \Omega|}{|B_r(x_0)|} \geq \theta \quad \text{,sempre que} \ \ r \leq r_0$$

Portanto, no caso quasilinear, como $u_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}) \cap W^{1,p}(B_1^+)$ o Corolário 4.2 de [?] garante que $w_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+})$. Estimativa até a fronteira do gradiente e estimativa ABP (Teoremas (3.8) e (3.2) para o caso totalmente não linear e Teoremas (3.7) e (3.1) para o caso quasilinear) garantem então que existem constantes universais C, $\widetilde{C}$ tais que

$$\begin{aligned} ||\nabla w_\varepsilon||_{L^\infty(B_{3/4}^+)} &\leq C\left(||w_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||w_\varepsilon||_{C^{1,\alpha}(B_1')} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right) \\ &\leq C\left[\left(||w_\varepsilon||_{L^\infty(\partial B_1^+)} + \widetilde{C}||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right) + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right] \\ &= C\left(||u_\varepsilon||_{L^\infty(\partial B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')} + \left(\widetilde{C}+1\right)||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right) \\ &\leq C\left(||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')} + \left(\widetilde{C}+1\right)||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right) \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}\left(||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)}\right) \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\widetilde{C}} = C\left(\widetilde{C}+1\right)$. Como $|x_0| + 2\varepsilon \leq \dfrac{1}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$, temos que $B^+_{2\varepsilon}(x_0') \subset B^+_{3/4}$. A estimativa logo acima junto com a estimativa do traço garantem que $\forall x \in B^+_{2\varepsilon}(x'_0)$,

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x) &\leq w_\varepsilon(x'_0) + ||\nabla w_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{3/4})} \cdot |x - x'_0| \\ &\leq u_\varepsilon(x'_0) + \widetilde{\widetilde{C}}\left(||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B'_1)} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B^+_1)}\right) \cdot 2\varepsilon \\ &\leq \overline{C}\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B'_1)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi\right] \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante universal.
Como o operador dado em (42) claramente é concavo e tem oscilção nula, o Teorema (3.13) garante que no caso totalmente não linear, $w_\varepsilon \in W^{2,n}_{loc}(B^+_1)$, e consequentemente, pelo Teorema (.1), w_ε é uma L^n-solução forte de (42). Pelo Princípio da Comparação (Teorema (3.4) no caso totalmente não linear e Teorema (3.3) no caso quasilinear), temos $u_\varepsilon \leq w_\varepsilon$, em B^+_1, e consequentemente a estimativa acima também é verdadeira para u_ε em $B^+_{2\varepsilon}(x'_0)$.
Como $dist(x_0, B'_1) < \varepsilon$, temos que $x_0 \in B^+_\varepsilon(x'_0) \subset B^+_{3\varepsilon/2}(x'_0)$. Aplicando mais uma vez a estimativa até a fronteira do gradiente só que desta vez para $u_\varepsilon|_{B^+_{2\varepsilon}(x'_0)}$, obtemos que

$$\begin{aligned} &|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \\ &\leq ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{3\varepsilon/2}(x'_0))} \\ &\leq C\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\sup_{B^+_{2\varepsilon}(x'_0)} u_\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}||\nabla\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B'_{2\varepsilon}(x'_0))} + \left((2\varepsilon)^{1-\frac{n}{q}}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon||_{L^q(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))}\right)^\chi\Big) \\ &\leq C\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sup_{B^+_{2\varepsilon}(x'_0)} u_\varepsilon + ||\nabla\varphi||_{L^\infty(B'_{2\varepsilon}(x'_0))} + (2\varepsilon)^\alpha[\nabla\varphi]_{C^\alpha(B'_{2\varepsilon}(x'_0))} \\ &\quad + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi\Big) \\ &\leq C\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sup_{B^+_{2\varepsilon}(x')} u_\varepsilon + ||\nabla\varphi||_{L^\infty(B'_1)} + (2\varepsilon)^\alpha[\nabla\varphi]_{C^\alpha(B'_1)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi\Big) \\ &\leq C\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sup_{B^+_{2\varepsilon}(x'_0)} u_\varepsilon + ||\nabla\varphi||_{C^{0,\alpha}(B'_1)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi\Big) \\ &\leq \widetilde{C}\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B'_1)}\right] \end{aligned}$$

onde na quarta linha acima usamos que assim como na prova de (27), $(2\varepsilon)^{1-\frac{n}{q}}||\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) +$

$f_\varepsilon||_{L^q(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))} \leq ||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}$. $\square$

5 PROVA DO TEOREMA 1.2

Demonstração. **Prova do Teorema 1.2:** Pela proposição anterior basta estimarmos o gradiente de u_ε em $B^+_{1/4} \setminus \Omega_\varepsilon$. Considere a função

$$v_\varepsilon(x) := u_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon, \qquad x \in B^+_1$$

Pelas Proposições .1 e .2 temos que v_ε satisfaz a uma equação do tipo

$$\overline{F}(D^2 v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, x) = \frac{1}{4}\left[\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right) + f_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right] \tag{44}$$

ou

$$Q_{\overline{\mathcal{A}}}[v_\varepsilon] = \frac{1}{2^p}\left[\beta_\varepsilon\left(u_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right) + f_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

confome u_ε satisfaça (2) ou (3), onde $\overline{F}$ satisfaz as condições de estrutura (9) e (10) com as mesmas constantes de estrutura; e $Q_{\overline{\mathcal{A}}}$ satisfaz as condições Q_1) a Q_7), com $\overline{\mathcal{A}} \in O_{LPC}(\gamma)(B^+_1)$.
Note que $\{v_\varepsilon > 0\} \cap B^+_1 = 2\left(B^+_{1/2} \setminus \Omega_\varepsilon\right)$ e portanto para todo x neste conjunto, a primeira parcela dentro do colchete das duas equações logo acima são nulas. Note ainda que

$$F(v_\varepsilon) = \partial\{v_\varepsilon > 0\} \cap B^+_1 \subset \{v_\varepsilon = 0\} \cap B^+_1 = (2\{u_\varepsilon = \varepsilon\}) \cap B^+_1 \subset (2\Omega_\varepsilon) \cap B^+_1 = 2\left(\Omega_\varepsilon \cap B^+_{1/2}\right)$$

e pela proposição anterior, existe uma constante universal $C > 0$, tal que $\forall x \in 2\left(\Omega_\varepsilon \cap B^+_{1/2}\right)$

$$\left|\nabla u_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq C\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B^+_1)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B'_1)}\right]$$

Segue desta análise que fizemos que v_ε é solução de um dos seguintes problemas de fronteira livre

$$\begin{cases} \overline{F}(D^2 v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, x) \geq \frac{1}{4} f_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) & \text{in } B^+_1(0), \\ \overline{F}(D^2 v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, x) = \frac{1}{4} f_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) & \text{in } \{v_\varepsilon > 0\} \cap B^+_1(0), \\ |\nabla v^+_\varepsilon| \leq g(x) & \\ v_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon & \text{on } B'_1 \end{cases} \tag{45}$$

ou

$$\begin{cases} Q_{\overline{\mathcal{A}}}[v_\varepsilon] \geq \dfrac{1}{2^p} f_\varepsilon\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{in } B_1^+(0), \\ \\ Q_{\overline{\mathcal{A}}}[v_\varepsilon] = \dfrac{1}{2^p} f_\varepsilon\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{in } \{v_\varepsilon > 0\} \cap B_1^+(0), \\ \\ |\nabla v_\varepsilon^+| \leq g(x) & \\ \\ v_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) - \varepsilon & \text{on } B_1' \end{cases}$$

onde g é a função constante dada por

$$g(x) = \frac{C}{2}\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right]$$

Observando que $\{v_\varepsilon > 0\} \cap B_{1/2}^+ = 2\left(B_{1/4}^+ \setminus \Omega_\varepsilon\right)$, segue pelo teorema (2.1) que existe uma constante universal $\overline{C}$ tal que

$$\begin{aligned} ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{1/4}^+ \setminus \Omega_\varepsilon)} &= 2||\nabla v_\varepsilon||_{L^\infty(\{v_\varepsilon > 0\} \cap B_{1/2}^+)} \\ &= 2||\nabla v_\varepsilon^+||_{L^\infty(B_{1/2}^+)} \\ &\leq \overline{C} \cdot \left(\sup_{F(v_\varepsilon)} g + ||v_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + \left|\left|f_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right|^\chi_{L^q(B_1^+)} + \left|\left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right|_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{1/4}^+ \setminus \Omega_\varepsilon)} &\leq \overline{C} \cdot \left(\sup_{\overline{B_1^+}} g + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{1/2}^+)} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_{1/2}^+)} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} \cdot ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_{1/2}')}\right) \\ &\leq \overline{C} \cdot \left(\sup_{\overline{B_1^+}} g + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||f_\varepsilon||^\chi_{L^q(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right) \\ &\leq \overline{\overline{C}}\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right] \end{aligned}$$

onde $\overline{\overline{C}}$ é uma constante universal. □

6 CONCLUSÃO

A partir deste trabalho pudemos obter estimativas Lipschitz até a fronteira para problemas de pertubação singular, que por sua vez levam a estimativa do mesmo tipo para o problema de fronteira livre correspondente.

REFERÊNCIAS

[1] CAFFARELLI, L. A. et. al. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. Comm. Pure Appl. Math., v. 49, n. 4, p. 365-397, 1996.

[2] CRANDALL, M. G. et al. Existence results for boundary problems for uniformly elliptic and parabolic fully nonlinear equations. Eletronic Journal of Differential equations, n. 24, p. 1-20, 1999.

[3] FOK, P. Some maximum principles and continuity estimates for fully nonlinear elliptic equations of second order. Santa Barbara University of California, 1996.

[4] LIEBERMAN, G. M. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic Equations. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. v. 12, n. 11, p. 1203-1219, 1988

[5] PUCCI, P.; SERRIN, J. The maximum principle. Basel:Birkhauser, c2007. 234p. (Progress in nonlinear differential equations and their applications ; v. 73)

[6] CRANDALL, M. G. On the equivalence of various weak notions of solutions of elliptic PDEs with measurable ingredients. In: ALVINO, A. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. 1994. p. 136-162

[7] SHOWALTER, R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Providence, RI : American Mathematical Society, c1997. 278 p. (Mathematical surveys and monographs, v. 49)

[8] TRUDINGER, N. On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 20, p. 721-747, 1967.

[9] WINTER, N. W2,p- and W1,p-Estimates at the Boundary for Solutions of Fully nonlinear, uniformly elliptic equations. Zeitschrift fur Analysis and ihre Anwendungen, v. 28, p. 129 - 164, 2009.

[10] CAFFARELLI, L. A.; CABRÉ, X. Fully nonlinear elliptic equations. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c1995. 104 p. (Colloquium publications American Mathematical Society, v.43)

[11] KARAKHANYAN, A. L. Up-to boundary regularity for a singular perturbation problem of p-Laplacian type. Journal of Differential Equations, v. 226, p. 558-571, 2006.

[12] RENARDY, M.; ROGERS, R. C. An introduction to partial differential equations. New York : Springer-Verlag, c1993.

[13] BRAGA, J. E. M. MOREIRA, D. R. Fine hopf. Preprint

[14] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. F. Sobolev spaces. 2nd ed. Amsterdam : Academic Press, 2003. (Pure and Applied Mathematics; 140)

[15] SWIECH, A. W1;p-interior estimates for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations. Adv. Differential Equations, v. 2, n. 6, 1997.

APÊNDICE A – PROBLEMAS ESCALONADOS

No que segue Ω denotará um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Definição .1. *Diremos que uma função contínua $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução no sentido da viscosidade da equação*

$$F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$$

se $\forall \phi \in C^2(\Omega)$ que toca a u por cima no ponto x_0, isto é $\phi(x) \geq u(x)$, $\forall x \in \Omega$ e $\phi(x_0) = u(x_0)$ tivermos,

$$F(D^2\phi(x_0), \nabla\phi(x_0), x_0) \geq f(x_0)$$

Definição .2. *Diremos que uma função $u \in W^{2,q}_{loc}(\Omega)$ é uma L^q-subsolução (supersolução) forte da equação $F(D^2u, \nabla u, x) = f(x)$ se $F(D^2u, \nabla u, x) \geq f(x)$ $(F(D^2u, \nabla u, x) \leq f(x))$ para q.t.p $x \in \Omega$.*

Teorema .1. *Suponha que $f \in L^n(\Omega)$ e $F : \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz (9). Se u é uma L^n-subsolução (supersolução) no sentido da viscosidade da equação $F(D^2u, \nabla u, x) = f$, e está em $W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ então u é uma L^n-subsolução (supersolução) forte da mesma equação.*

Demonstração. Vide Corolário 3.7 de [1]. $\square$

Teorema .2.

(1) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M)$

(2) $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda' \Rightarrow \mathcal{P}^-_{\lambda',\Lambda'}(M) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M)$ e $\mathcal{P}^+_{\lambda',\Lambda'}(M) \geq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M)$

(3) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = -\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-M)$

(4) $\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda}(\alpha M) = \alpha\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda}(M)$ se $\alpha \geq 0$

(5) $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(N)$

(6) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(N)$

(7) $N \geq 0 \Rightarrow \lambda||N|| \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(N) \leq n\Lambda||N||$

(8) $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}$ e $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$ são uniformemente elípticas com constantes de elipticidade $\lambda, n\Lambda$

Demonstração. Vide Lema 2.10, de [10] □

Proposição .1. *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$, $p > \frac{n}{2}$, e $u : U \to \mathbb{R}$, uma L^p-subsolução da equação*

$$F(D^2u, \nabla u, x) = f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u) \tag{46}$$

Fixados $a, b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$, defina $v : V := \frac{U}{b} + \{-x_0\} = \left\{\frac{x}{b} - x_0;\quad x \in U\right\} \to \mathbb{R}$, por

$$v(y) = au(x_0 + by)$$

Então v é uma L^p-subsolução da equação

$$G\left(D^2v, \nabla v, y\right) = ab^2\left[f_\varepsilon(x_0 + by) + \beta_\varepsilon\left(\frac{v}{a}\right)\right] \tag{47}$$

onde

$$G(M, p, y) = ab^2 F\left(\frac{M}{ab^2}, \frac{p}{ab}, x_0 + by\right)$$

Ademais, se F satisfizer as condições de estrutura (9) e (10), então G satisfaz as *condições de estrutura*

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M-N) - b\gamma|p-q| \leq G(M,p,y) - G(N,q,y) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M-N) + b\gamma|p-q| \\ |G(M,p,x) - G(M,p,y)| \leq C_0|x-y|^{\mu_0}(|M|+|p|) \\ G(0,0,0) = 0 \end{cases}$$

Em particular, se $b \leq 1$, então G satisfaz exatamente as mesmas condições de estrutura que F, com as mesmas constantes γ, μ_0

Demonstração. Suponha que $\psi \in C^2(V)$ e $y_1 \in V$ são tais que $v - \psi$ tem um máximo local no ponto y_1. Defina $x_1 := x_0 + by_1$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}$, por

$$\varphi(x) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x-x_0}{b}\right)$$

Então x_1 é claramente um ponto de máximo local da função $u - \varphi$. Logo, como u é uma L^p-subsolução de (46), temos que

$$\liminf_{x \to x_1} \big(F(D^2\varphi, \nabla\varphi, x) - f_\varepsilon(x) - \beta_\varepsilon(\varphi)\big) \geq 0$$

Mas então,

$$\begin{aligned} & \liminf_{y \to y_1} \left(G(D^2\psi(y), \nabla\psi(y), y) - ab^2 f_\varepsilon(x_0+by) - ab^2\beta_\varepsilon\left(\frac{\psi(y)}{a}\right)\right) \\ = \;& ab^2 \liminf_{y \to y_1} \left(F\left(\frac{D^2\psi(y)}{ab^2}, \frac{\nabla\psi(y)}{ab}, x_0+by\right) - f_\varepsilon(x_0+by) - \beta_\varepsilon\left(\frac{\psi(y)}{a}\right)\right) \\ = \;& ab^2 \liminf_{y \to y_1} \big(F\big(D^2\varphi(x_0+by), \nabla\varphi(x_0+by), x_0+by\big) - f_\varepsilon(x_0+by) - \beta_\varepsilon\left(\varphi(x_0+by)\right)\big) \\ = \;& ab^2 \liminf_{x \to x_1} \big(F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), x) - f_\varepsilon(x) - \beta_\varepsilon(\varphi(x))\big) \\ \geq \;& 0 \end{aligned}$$

o que prova que v é uma L^p-subsolução de (47). As condiçẽs de estrutura a serem satisfeitas por G são de checagem imediata.

$\square$

Observação .1. *A proposição é naturalmente verdadeira se trocarmos subsolução por supersolução.*

Proposição .2. *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : U \to \mathbb{R}$ uma subsolução da equação*

$$div(\mathcal{A}(x, \nabla u)) = \beta_\varepsilon(u) + f(x)$$

.

Então fixados $a, b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$, a função $v : V := \frac{1}{b}(U + \{-x_0\}) \to \mathbb{R}$, dada por

$$v(y) = au(x_0 + by)$$

é subsolução da equação

$$div(\overline{\mathcal{A}}(y, \nabla v)) = a^{p-1} b^p \left[\beta_\varepsilon\left(\frac{v}{a}\right) + f(x_0 + by)\right]$$

onde

$$\overline{\mathcal{A}}(y, \xi) = (ab)^{p-1} \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)$$

Ademais se $\mathcal{A}$ satisfizer as condições satisfaz as condições de estrutura $Q_1)$ a $Q_7)$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)(U)$, então $\overline{\mathcal{A}}$ satisfaz $Q_1)$ a $Q_6)$ com as mesmas constantes $\lambda_0, \overline{\lambda}_0, \Lambda_0, \overline{\Lambda}_0$.

Se $b \leq 1$, então Q_7) também é satisfeita com a mesma constante $\overline{\Lambda}_0$ e $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{O}_{LPC}(\gamma)\,(V)$. Em particular $\mathcal{A}$ e $\overline{\mathcal{A}}$ têm as mesmas constantes de elipticidade.

Demonstração. Seja $\psi \in C_c^{\infty}(V)$, e defina $\phi : U \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x - x_0}{b}\right)$$

Naturalmente, $\phi \in C_c^{\infty}(U)$, e pelo Teorema da Mudança de Variáveis (fazendo $x = x_0 + by$), temos que

$$\begin{aligned}
& a^{p-1}b^p \int_V \left[\beta_\varepsilon\left(\frac{v(y)}{a}\right) + f(x_0 + by)\right]\psi(y)dy \\
= \; & a^{p-1}b^p \int_U \left[\beta_\varepsilon\left(\frac{1}{a}\cdot v\left(\frac{x - x_0}{b}\right)\right) + f(x)\right]\psi\left(\frac{x - x_0}{b}\right)\frac{1}{b^n}dx \\
= \; & a^p b^{p-n} \int_U \left[\beta_\varepsilon(u(x)) + f(x)\right]\phi(x)dx \\
= \; & -a^p b^{p-n} \int_U \langle A(x, \nabla u(x)), \nabla\phi(x)\rangle dx \\
= \; & -a^p b^{p-n} \int_V \langle \mathcal{A}(x_0 + by, \nabla u(x_0 + by)), \nabla\phi(x_0 + by)\rangle b^n dy \\
= \; & -a^p b^p \int_V \left\langle \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\nabla v(y)}{ab}\right), \frac{\nabla\psi(y)}{ab}\right\rangle dy \\
= \; & -(ab)^{p-1} \int_V \left\langle \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\nabla v(y)}{ab}\right), \nabla\psi(y)\right\rangle dy \\
= \; & -\int_V \left\langle \overline{\mathcal{A}}\left(y, \frac{\nabla v(y)}{ab}\right), \nabla\psi(y)\right\rangle dy
\end{aligned}$$

Chequemos agora as condições estrutura.

$Q_1)$ $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \xi \neq \eta,$

$$\begin{aligned}
&\langle \overline{\mathcal{A}}(y,\xi) - \widetilde{\mathcal{A}}(y,\eta), \xi - \eta\rangle \\
&\qquad = \left\langle (ab)^{p-1}\mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right) - (ab)^{p-1}\mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\eta}{ab}\right), \xi - \eta\right\rangle \\
&\qquad = (ab)^{p-1}\left\langle \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right) - \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\eta}{ab}\right), \frac{\xi}{ab} - \frac{\eta}{ab}\right\rangle ab \\
&\qquad > 0
\end{aligned}$$

$Q_2)$ $\forall (y,\xi) \in V \times \mathbb{R}^n$

$$|\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)| = |(ab)^{p-1}\mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)| \leq (ab)^{p-1}\Lambda_0\left|\frac{\xi}{ab}\right|^{p-1} = \Lambda_0|\xi|^{p-1}$$

$Q_3)$

$$\langle \overline{\mathcal{A}}(y,\xi), \xi\rangle = \left\langle (ab)^{p-1}\mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right), \frac{\xi}{ab}\right\rangle ab \geq (ab)^p\lambda_0\left|\frac{\xi}{ab}\right|^p = \lambda_0|\xi|^p$$

$Q_4)$ Note que

$$\partial_\xi\overline{\mathcal{A}}(y,\xi) =$$

$$= \left(\frac{\partial\overline{\mathcal{A}}_i}{\partial\xi_j}(y,\xi)\right) = (ab)^{p-1}\frac{1}{ab}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\xi_j}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)\right) = (ab)^{p-2}\partial_\xi\mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)$$

$Q_5)$ $\langle \partial_\xi\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)\eta, \eta\rangle =$

$$= (ab)^{p-2}\left\langle \mathcal{A}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)\eta, \eta\right\rangle \geq (ab)^{p-2}\overline{\lambda}_0\left|\frac{\xi}{ab}\right|^{p-2}|\eta|^2 = \overline{\lambda}_0|\xi|^{p-2}|\eta|^2$$

$Q_6)$

$$||\partial_\xi\mathcal{A}(y,\xi)|| = (ab)^{p-2}\left|\left|\partial_\xi\overline{\mathcal{A}}\left(x_0 + by, \frac{\xi}{ab}\right)\right|\right| \leq (ab)^{p-2}\overline{\Lambda}_0\left|\frac{\xi}{ab}\right|^{p-2} = \Lambda_0|\xi|^{p-2}$$

$Q_7)$

$$
\begin{aligned}
||\overline{\mathcal{A}}(x,\xi)-\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)|| &= \left|\left|\mathcal{A}\left(x_0+bx,\frac{\xi}{ab}\right)-\mathcal{A}\left(x_0+by,\frac{\xi}{ab}\right)\right|\right| \\
&\leq (ab)^{p-1}\overline{\Lambda}_0\left|\frac{\xi}{ab}\right|^{p-1}|b(x-y)|^{\alpha_0} \\
&\leq b^{\alpha_0}\overline{\Lambda}_0\,|\xi|^{p-1}\,|x-y|^{\alpha_0}
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que $\overline{\mathcal{A}}\in\mathcal{O}_{LPC}(b\gamma)\,(V)$. Com efeito, se $\widetilde{V}$ é qualquer subconjunto aberto de V , e ψ é uma função em $W^{2,1}(\widetilde{V})\cap L_{\nabla}(\widetilde{V})$, então $\widetilde{U}:=\{x_0\}+b\widetilde{V}$ é claramente um subconjunto aberto de U e $\phi:U\to\mathbb{R}$ dada por $\phi(x)=\dfrac{1}{a}\psi\left(\dfrac{x-x_0}{b}\right)$ está em $W^{2,1}(\widetilde{U})\cap L_{\nabla}(\widetilde{U})$. Com efeito, isto segue imediatamente do Teorema (.3) e da relação $\nabla\phi(x)=\dfrac{1}{ab}\nabla\psi\left(\dfrac{x-x_0}{b}\right)$. Consequentemente, como $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade de controle via Pucci por baixo em U temos que

$$
\begin{cases}
X_{\mathcal{A},\phi}:=\mathcal{A}(\cdot,\nabla\phi)\in W^{1,1}_{loc}(\widetilde{U}), \text{ e para q.t.p. } x\in\widetilde{U}, \\
\\
\operatorname{div}(X_{\mathcal{A},\phi})(x)\geq\underline{\varrho}|\nabla\phi(x)|^{p-2}\left(\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi(x))-\gamma\cdot|\nabla\phi(x)|\right)
\end{cases}
\tag{48}
$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
X_{\overline{\mathcal{A}},\psi}(y)=\overline{A}(y,\nabla\psi(y)) = & \\
&= (ab)^{p-1}A\left(x_0+by,\frac{\nabla\psi(y)}{ab}\right) \\
&= (ab)^{p-1}A\left(x_0+by,\nabla\varphi(x_0+by)\right) \\
&= (ab)^{p-1}X_{\mathcal{A},\varphi}(x_0+by)
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema (.3) logo mais a frente, segue-se então que $X_{\overline{\mathcal{A}},\psi}\in W^{1,1}_{loc}(\widetilde{V})$. Segue também da expressão logo acima, da desigualdade em (48) e do fato de para q.t.p.

$y \in \widetilde{V}$, $D^2\psi(y) = ab^2 \cdot D^2\phi(x)$, $x = x_0 + by$, que para q.t.p. $y \in \widetilde{V}$

$$\begin{aligned}
div_y(X_{\overline{\mathcal{A}},\psi}(y)) &= (ab)^{p-1} div_y(X_{\mathcal{A},\varphi}(x_0 + by)) \\
&= (ab)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(X_{\mathcal{A},\varphi}(x_0 + by)) \\
&= (ab)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{\mathcal{A},\varphi}}{\partial x_i}(x_0 + by) \cdot b \cdot \delta_{ij} \\
&= a^{p-1} b^p \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_{\mathcal{A},\varphi}}{\partial x_j}(x_0 + by) \\
&= a^{p-1} b^p \cdot div_x(X_{\mathcal{A},\varphi}(x)) \qquad (x = x_0 + by) \\
&\geq a^{p-1} b^p \underline{\varrho} |\nabla\varphi(x)|^{p-2} \left(\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi(x)) - \gamma|\nabla\varphi(x)|\right) \\
&= a^{p-1} b^p \underline{\varrho} \left|\frac{\nabla\psi(y)}{ab}\right|^{p-2} \left(\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}\left(\frac{D^2\psi(y)}{ab^2}\right) - \gamma\left|\frac{\nabla\psi(y)}{ab}\right|\right) \\
&= \underline{\varrho}\, |\nabla\psi(y)|^{p-2} \left(\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}\left(D^2\psi(y)\right) - b\gamma\, |\nabla\widetilde{v}(y)|\right)
\end{aligned}$$

□

Definição .3. *Considere Ω e Ω' subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$. Uma bijeção $\Phi : \Omega \to \Omega'$ é chamado um k-difeomorfimo ($k \geq 1$) se*

1. *Φ e Φ^{-1} são de classe C^k e suas derivadas parciais são limitadas em Ω e Ω', respectivamente.*

2. *Existem constantes positivas c, C tais que*

$$c \leq |\det J_\Phi| \leq C$$

Definição .4. *Considere $\Phi : \Omega \to \Omega'$ um k-difeomorfimo. Então o operador pullback Φ^**

é definido por

$$\Phi^* u = u \circ \Phi$$

onde u é qualquer finção real definida em Ω.

Teorema .3. *Sejam $\Phi : \Omega \to \Omega'$ um k-difeomorfimo e $p > 1$. Então $\forall u \in W^{k,p}(\Omega')$, a função $\Phi^* u \in W^{k,p}(\Omega)$ e a aplicação $\Phi^* : W^{k,p}(\Omega') \to W^{k,p}(\Omega)$ é liner e contínua.*

Demonstração. Vide Teorema 3.41, pag.78, de [14]. □

Corolário .1. *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e Φ é um 1-difeomorfismo, então $u \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale a regra da cadeia*

$$(u \circ \Phi)_{x_i} = \langle \nabla u \circ \Phi, \Phi_{x_i}, \rangle \tag{49}$$

Demonstração. Que $u \circ \Phi = \Phi^*(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma consequência direta do Teorema anterior. Quanto à prova de (49), considere $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $C^{\infty}(\Omega)$ tais que $u_k \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Pela regra da cadeia usual temos que $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall i = 1, \cdots, n$

$$(u_k \circ \Phi)_{x_i} = \langle \nabla u_k \circ \Phi, \Phi_{x_i}, \rangle \tag{50}$$

Como $u_k \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, o Teorema anterior anterior garante que
$u_k \circ \Phi = \Phi^*(u_k) \to \Phi^*(u) = u \circ \Phi$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e consequentemente, $\forall i = 1, \cdots, n$

$$(u_k \circ \Phi)_{x_i} \to (u \circ \Phi)_{x_i} \qquad \text{,em } L^p(\Omega) \tag{51}$$

Como $\nabla u_k \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)$, obtemos novamente pelo Teorema anterior que

$$\nabla u_k \circ \Phi = \Phi^*(\nabla u_k) \to \Phi^*(\nabla u) = \nabla u \circ \Phi \qquad \text{,em } L^p(\Omega) \tag{52}$$

Passando ao limite em (50), e usando (51) e (52), obtemos o corolário.

□

Corolário .2. *Nas mesmas condições do corolário anterior,*

$$\nabla (u \circ \Phi) = J_\Phi^t \cdot \nabla u \circ \Phi$$

Demonstração. Pelo corolário anterior,

$$\begin{aligned}
\nabla u \circ \Phi &= \left((u \circ \Phi)_{x_1}, \cdots, (u \circ \Phi)_{x_n}\right) \\
&= \left(\langle \nabla u \circ \Phi, \Phi_{x_1} \rangle, \cdots, \langle \nabla u \circ \Phi, \Phi_{x_n} \rangle\right) \\
&= \begin{pmatrix} \Phi_{x_1} \\ \vdots \\ \Phi_{x_n} \end{pmatrix} \nabla u \circ \Phi \\
&= J_\Phi^t \cdot \nabla u \circ \Phi
\end{aligned}$$

□

Corolário .3. *Sejam $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos, $\Phi = (\Phi^1, \cdots, \Phi^n) : \Omega \to \Omega'$ um 2-difeomorfismo, e $u \in W^{2,p}(\Omega')$. Então $u \circ \Phi \in W^{2,p}(\Omega)$, e*

$$D^2 (u \circ \Phi) = J_\Phi^t \cdot D^2 u \circ \Phi \cdot J_\Phi + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \circ \Phi \cdot D^2 \Phi^k \tag{53}$$

Demonstração. Aplicando o lema anterior à expressão (49), obtemos que

$$(u\circ\Phi)_{x_ix_j}=\left\langle(\nabla u\circ\Phi)_{x_j},\Phi_{x_i}\right\rangle+\left\langle\nabla u\circ\Phi,\Phi_{x_ix_j}\right\rangle$$

Por outro lado, note que o corolário (.1) aplicada à cada função $u_{x_i}\circ\phi$ em vez de u nos permite obter que $\forall j=1,\cdots,n$

$$\begin{aligned}
(\nabla u\circ\Phi)_{x_j} &= \Big((u_{x_1}\circ\Phi)_{x_j},\cdots,(u_{x_n}\circ\Phi)_{x_j}\Big)\\
&= \left(\left\langle\nabla u_{x_1}\circ\Phi,\Phi_{x_j}\right\rangle,\cdots,\left\langle\nabla u_{x_n}\circ\Phi,\Phi_{x_j}\right\rangle\right)\\
&= \begin{pmatrix}\nabla u_{x_1}\circ\Phi\\ \vdots\\ \nabla u_{x_n}\circ\Phi\end{pmatrix}\Phi_{x_j}\\
&= D^2u\circ\Phi\cdot\Phi_{x_j}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(u\circ\Phi)_{x_ix_j}=\left\langle D^2u\circ\Phi\cdot\Phi_{x_j},\Phi_{x_i}\right\rangle+\left\langle\nabla u\circ\Phi,\Phi_{x_ix_j}\right\rangle$$

Notando que para qualquer matriz A, tem-se $(\langle Ae_j,e_i\rangle)=A$ (e_i o $i-$ésimo vetor coordenado canônico), temos que

$$\begin{aligned}
\left(\left\langle D^2u\circ\Phi\cdot\Phi_{x_j},\Phi_{x_i}\right\rangle\right) &= (\langle D^2u\circ\Phi\cdot J_\Phi\cdot e_j,J_\Phi\cdot e_i\rangle)\\
&= (\langle J_\Phi^t\cdot D^2u\circ\Phi\cdot J_\Phi\cdot e_j,e_i\rangle)\\
&= J_\Phi^t\cdot D^2u\circ\Phi\cdot J_\Phi
\end{aligned}$$

Logo,

$$D^2 u \circ \Phi = J_\Phi^t \cdot D^2 u \circ \Phi \cdot J_\Phi + \left(\left\langle \nabla u \circ \Phi, \Phi_{x_i x_j} \right\rangle\right)$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\left\langle \nabla u \circ \Phi, \Phi_{x_i x_j} \right\rangle\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \circ \Phi \cdot \Phi_{x_i x_j}^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \circ \Phi \cdot \left(\Phi_{x_i x_j}^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \circ \Phi \cdot D^2 \Phi^k
\end{aligned}$$

segue o corolário.

$\square$

APÊNDICE B – EXTENSÃO DO TEOREMA 1.2 A UM DOMÍNIO GERAL

Para provar o Teorema principal (1.2), inicialmente provaremos que a estimativa (13) é verdadeira numa vizinhança de um ponto qualquer da fronteira de Ω: fixado um ponto $x_0 \in \partial\Omega$, a menos de uma translação podemos supor sem perda de generalidade que $x_0 = 0$. Como Ω é C^2, existe um $r > 0$ e uma função $h \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$, tal que a menos de uma rotação e uma reindexação dos eixos coordenados

$$\begin{cases} \Omega \cap B_r = \{x = (x_1, \cdots, x_n) = (x', x_n) \in B_r \ ; \ x_n > h(x')\} \\ h(0) = 0 \\ \nabla h(0) = 0 \end{cases} \tag{54}$$

Sendo h uma função C^1, existe um $0 < \rho < \dfrac{r}{2}$ tal que

$$\begin{cases} ||h||_{L^\infty(B'_\rho)} < \dfrac{r}{2} \\ \\ ||\nabla h||_{L^\infty(B'_\rho)} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{55}$$

A aplicação $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Phi(x) = \Phi(x', x_n) := \frac{1}{\rho}(x', x_n - h(x'))$$

naturalmente é de classe C^2 e tem como inversa a aplicação $y \longmapsto (\rho y', \rho y_n + h(\rho y'))$.

Afirmo que $B_1^+ \subset \Phi(B_r \cap \Omega)$. De fato, se $y \in B_1^+$, então $x := \Phi^{-1}(y)$ satisfaz

$$\begin{cases} |x| = |\Phi^{-1}(y)| = |(\rho y', \rho y_n + h(\rho y'))| = |\rho y + h(\rho y')e_n| \leq \rho|y| + ||h||_{L^\infty(B'_\rho)} < \rho + \dfrac{r}{2} < r \\ x_n = \rho y_n + h(\rho y') > h(\rho y') = h(x') \qquad (y_n > 0 \text{ pois } y \in B^+_\rho) \end{cases}$$

Logo, por (54), segue-se que $x \in \Omega \cap B_r$.

No que segue procuraremos mostrar que a estimativa (13) é verdadeira em $\Phi^{-1}(B^+_{1/4})$. Mais precisamente, provaremos que nas mesmas condições do teorema (1.2) existe uma constante universal C tal que

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(\Phi^{-1}(B^+_{1/4}))} \leq C\left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f_\varepsilon||_{L^q(\Omega)}\right)^{\frac{1}{\chi}} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\Omega)}\right] \quad (56)$$

Para tanto, precisamos de três lemas preliminares.

Lema .1. *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, e $v := u \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \to \mathbb{R}$. Então valem as seguintes propriedades.*

(i) *Se $u \in W^{1,p}(U)$ então $v \in W^{1,p}(\Phi(U))$ e $\forall x \in U$ tem-se*

$$\nabla u(x) = \mathcal{A}_h(y')\nabla v(y) \qquad y = \Phi(x)$$

onde

$$\mathcal{A}_h(y') = J_\Phi(x)^t = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\nabla h(\rho y') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = \Phi(x)$$

(ii) *Se* $u \in W^{2,p}(U)$ *então* $v \in W^{2,p}\left(\Phi(U)\right)$ *e* $\forall x \in U$ *tem-se*

$$D^2u(x) = \mathcal{A}_h(y')D^2v(y)\mathcal{A}_h(y')^t + v_{y_n}(y)\mathcal{B}_h(y')$$

onde

$$\mathcal{B}_h(y') := -\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} D^2h(\rho y') & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $\forall (y', \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{|\xi|}{2\rho} \leq |\mathcal{A}_h(y')\xi| \leq \dfrac{3|\xi|}{2\rho} \\ |\mathcal{A}_h(y')^t\xi| \leq \dfrac{3|\xi|}{2\rho} \end{cases}$$

(iv) *Para qualquer matriz simétrica* M *de ordem* n *e* $\forall y' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathcal{P}^-_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\lambda}{4\rho^2}}(M) \leq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t\right) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t\right) \leq \mathcal{P}^+_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}(M)$$

Demonstração. :

(i) Segue diretamente do corolário (.2).

(ii) Segue diretamente do corolário (.3).

(iii) Note que $\forall (y', \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_h(y')\xi &= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\nabla h(\rho y') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi' \\ \xi_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\xi' - \xi_n \nabla h(\rho y'), \xi_n\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\xi - \xi_n \left(\nabla h(\rho y'), 0\right)\right)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}_h(y')\xi| &\leq \frac{1}{\rho}\left(|\xi| + |\xi_n| \left|\left(\nabla h(\rho y'), 0\right)\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\rho}\left(|\xi| + |\xi||\nabla h(\rho y')|\right) \\
&\leq \frac{|\xi|}{\rho}\left(1 + ||\nabla h||_{L^\infty(B'_\rho)}\right) \\
&\leq \frac{3|\xi|}{2\rho}
\end{aligned}
$$

De modo análogo obtemos que $|\mathcal{A}_h(y')\xi| \geq \dfrac{|\xi|}{2\rho}$. Note ainda que, $\forall y \in B_1^+$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_h(y')^t\eta &= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\nabla h(\rho y') & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta' \\ \eta_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\eta', -\langle \nabla h(\rho y'), \eta\rangle + \eta_n\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\eta - \langle \nabla h(\rho y'), \eta\rangle e_n\right)
\end{aligned}
$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_h(y')^t\xi| &\leq \frac{1}{\rho}\left(|\eta| + |\nabla h(\rho y')||\eta|\right) \\ &\leq \frac{|\xi|}{\rho}\Big(1 + ||\nabla h||_{L^\infty(B'_\rho)}\Big) \\ &\leq \frac{3|\xi|}{2\rho} \end{aligned}$$

(iv) Para quaisquer $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e M uma matriz simétrica satisfazendo $\lambda I \leq M \leq \Lambda I$, temos que

$$\frac{\lambda}{4\rho^2}|\xi|^2 \leq \lambda|\mathcal{A}_h(y')\xi|^2 \leq \langle M\mathcal{A}_h(y')\xi, \mathcal{A}_h(y')\xi\rangle \leq \Lambda|\mathcal{A}_h(y')\xi|^2 \leq \frac{9\Lambda}{4\rho^2}|\xi|^2$$

Como $\langle M\mathcal{A}_h(y')\xi, \mathcal{A}_h(y')\xi\rangle = \langle \mathcal{A}_h(y')^t M\mathcal{A}_h(y')\xi, \xi\rangle$, segue-se que

$$\frac{\lambda}{4\rho^2} \cdot I \leq \mathcal{A}_h(y')^t M \mathcal{A}_h(y') \leq \frac{9\Lambda}{4\rho^2} \cdot I \tag{57}$$

Claramente para quaisquer matrizes $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ de ordem n

$$tr(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}a_{j,i} = tr(BA)$$

e portanto para quaisquer matrizes $A_1, \cdots, A_m$ de ordem n temos que

$$tr(A_1 \cdots A_m) = tr(A_m A_1 \cdots A_{m-1}) = \cdots = tr(A_2 \cdots A_m A_1)$$

Logo, por (57), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t) &= \inf_{\lambda I\leq A\leq \Lambda I} tr(A\mathcal{A}_h(x')M\mathcal{A}_h(y')^t)\\
&= \inf_{\lambda I\leq A\leq \Lambda I} tr(\mathcal{A}_h(y')^t A\mathcal{A}_h(y')M)\\
&\geq \inf_{\frac{\lambda}{4\rho^2} I\leq B\leq \frac{9\Lambda}{4\rho^2} I} tr(BM)\\
&= \mathcal{P}^{-}_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}(M)
\end{aligned}$$

Isto prova a primeira desigualdade do item (iii). A segunda segue diretamente do primeiro item do Teorema (.2), e a terceira segue de modo análogo à primeira desigualdade.

□

Lema .2. *Se u_ε é solução do problema de perturbação singular (3), então $v_\varepsilon := u_\varepsilon \circ \Phi^{-1}|_{B_1^+} : B_1^+ \to \mathbb{R}$ é solução do problema de perturbação singular*

$$\begin{cases}
v_\varepsilon \in C^0(\overline{B_1^+}) \cap W^{1,p}(B_1^+), & \\
Q_{\overline{\mathcal{A}}}[v_\varepsilon] = g_\varepsilon(y) + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon) & em\ B_1^+,\\
v_\varepsilon \geq 0 & em\ B_1^+,\\
v_\varepsilon = \overline{\varphi} & em\ B_1'.
\end{cases} \tag{58}$$

onde $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \Phi^{-1}$, $\overline{\varphi} = \varphi \circ \Phi^{-1}$ e

$$\overline{\mathcal{A}}(y,\xi) = \mathcal{A}_h^t(y')\mathcal{A}(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi)$$

Ademais $\overline{\mathcal{A}}$ satisfaz as condições de estrutura $Q_1)$ a $Q_7)$, $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{O}_{LPC}(\tilde{\gamma})(B_1^+)$, e $\tilde{\gamma}$ e suas demais constantes de estrutura dependem apenas das constantes de estrutura de $\mathcal{A}$, e de

h.

Demonstração. De fato, como $u_\varepsilon \in W^{1,1}(\Phi^{-1}(B_1^+))$, o teorema (.3) garante que $v_\varepsilon = (\Phi^{-1})^*(u_\varepsilon) = u_\varepsilon \circ \Phi^{-1} \in W^{1,1}(B_1^+)$.

A terceira e a quarta propriedade de (58) são trivialmente verificadas. Quanto à segunda propriedade, considere a mudança de variável $y = \Phi(x)$, e $\psi \in C_c^\infty(B_1^+)$. Então, pelo Teorema da mudança de variáveis,

$$\int_{B_1^+} [g_\varepsilon(y) + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon(y))]\,\psi(y)dy =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Phi^{-1}(B_1^+)} [g_\varepsilon(\Phi(x)) + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon(\Phi(x)))]\,\psi(\Phi(x))\,|\det J_\Phi(x)|dx \\ &= \frac{1}{\rho^n}\int_{\Phi^{-1}(B_1^+)} [f_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x))]\,\phi(x)\,dx \end{aligned} \tag{59}$$

onde $\phi(x) = \psi(\Phi(x))$, a qual é claramente uma função em $C_c^\infty(\Phi^{-1}(B_1^+)) \subset C_c^\infty(\Omega)$.

Por outro lado, como u_ε é solução de (3), pelo Teorema da mudança de variáveis e pelo Lema anterior temos que

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho^n}\int_{\Phi^{-1}(B_1^+)}\left[f_\varepsilon\left(x\right)+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\right]\phi\left(x\right)dx \\
= & -\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega}\left[f_\varepsilon\left(x\right)+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\right]\phi\left(x\right)dx \\
= & \frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega}\left\langle\mathcal{A}\left(x,\nabla u_\varepsilon(x)\right),\nabla\phi(x)\right\rangle dx \\
= & \frac{1}{\rho^n}\int_{\Phi^{-1}(B_1^+)}\left\langle\mathcal{A}\left(x,\nabla u_\varepsilon(x)\right),\nabla\phi(x)\right\rangle dx \\
= & \frac{1}{\rho^n}\int_{B_1^+}\left\langle\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\nabla u_\varepsilon(\Phi^{-1}(y))\right),\nabla\phi\left(\Phi^{-1}(y)\right)\right\rangle|\det J_{\Phi^{-1}(y)}|dy \\
= & \int_{B_1^+}\left\langle\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\nabla u_\varepsilon(\Phi^{-1}(y))\right),\nabla\phi\left(\Phi^{-1}(y)\right)\right\rangle dy \\
= & \int_{B_1^+}\left\langle\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\nabla v(y)\right),\mathcal{A}_h(y')\nabla\psi\left(y\right)\right\rangle dy \\
= & \int_{B_1^+}\left\langle\mathcal{A}_h(y')^t\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\nabla v_\varepsilon(y)\right),\nabla\psi\left(y\right)\right\rangle dy \\
= & \int_{B_1^+}\left\langle\overline{\mathcal{A}}\left(y',\nabla v_\varepsilon(y)\right),\nabla\psi\left(y\right)\right\rangle dy
\end{aligned}
$$

o que prova junto com (59) a segunda propriedade de (58).

Quanto às condições de estrutura vejamos

$Q_1)$ $\forall y\in B_1^+,\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^n,\xi\neq\eta$

$$
\left\langle\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)-\overline{\mathcal{A}}(y,\eta)\right\rangle=
$$

$$
\begin{aligned}
= & \left\langle\mathcal{A}_h(y')^t\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\xi\right)-\mathcal{A}_h(y')^t\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\eta\right),\xi-\eta\right\rangle \\
= & \left\langle\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\xi\right)-\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\eta\right),\mathcal{A}_h(y')\xi-\mathcal{A}_h(y')\eta\right\rangle \\
> & \ 0
\end{aligned}
$$

$Q_2)$ $\forall(y,\xi)\in B_1^+\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)| &= |\mathcal{A}_h(y')^t\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\xi\right)| \\
&\leq \frac{3}{2\rho}\left|\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y),\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right| \\
&\leq \frac{3}{2\rho}\Lambda_0\left|\mathcal{A}_h(y')\xi\right|^{p-1} \\
&\leq \left(\frac{3}{2\rho}\right)^p\Lambda_0\left|\xi\right|^{p-1}
\end{aligned}$$

Q_3) $\forall(y,\xi)\in B_1^+\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left\langle\overline{\mathcal{A}}(y,\xi),\xi\right\rangle &= \langle\mathcal{A}_h(y')^t\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right),\xi\rangle \\
&= \langle\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right),\mathcal{A}_h(y')\xi\rangle \\
&\geq \lambda_0|\mathcal{A}_h(y')\xi|^p \\
&\geq \frac{\lambda_0}{(2\rho)^p}|\xi|^p
\end{aligned}$$

Q_4) Pela regra da cadeia, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ existe a derivada parcial $\partial_\xi\overline{\mathcal{A}}:B_1^+\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ e é contínua uma vez que $\forall y\in B_1^+$

$$\partial_\xi\overline{\mathcal{A}}(y',\xi)=\mathcal{A}_h(y')^t\partial_\xi\left(\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right)=\mathcal{A}_h(y')^t\partial_\xi\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\mathcal{A}_h(y')$$

Q_5) $\forall(y,\xi,\eta)\in B_1^+\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left\langle\partial_\xi\overline{\mathcal{A}}(y,\xi)\eta,\eta\right\rangle &= \langle\mathcal{A}_h(y')^t\partial_\xi\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\mathcal{A}_h(y')\eta,\eta\rangle \\
&= \langle\partial_\xi\mathcal{A}\left(y,\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\mathcal{A}_h(y')\eta,\mathcal{A}_h(y')\eta\rangle \\
&\geq \overline{\lambda_0}|\mathcal{A}_h(y')\xi)|^{p-2}|\mathcal{A}_h(y')\eta|^2 \\
&\geq \frac{\overline{\lambda_0}}{(2\rho)^p}|\xi|^{p-2}|\eta|^2
\end{aligned}$$

$Q_6)$ $\forall (y,\xi) \in B_1^+ \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned}
||\partial_\xi \overline{\mathcal{A}}(y,\xi)|| &\leq ||\mathcal{A}_h(y')^t|| \cdot ||\partial_\xi \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi\right)|| \cdot ||\mathcal{A}_h(y')|| \\
&\leq \left(\frac{3}{2\rho}\right)^2 \overline{\Lambda_0} |\mathcal{A}_h(y')\xi|^{p-2} \\
&\leq \left(\frac{3}{2\rho}\right)^p \overline{\Lambda_0} |\xi|^{p-2}
\end{aligned}$$

$Q_7)$ $\forall x, y \in B_1^+$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{A}}(x,\xi) - \overline{\mathcal{A}}(y,\xi)| &= \left|\mathcal{A}_h(x')^t \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(x), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}_h(y')^t \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right| \\
&\leq \left|\mathcal{A}_h(x')^t \left[\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(x), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right]\right| \\
&+ \left|\left[\mathcal{A}_h(x')^t - \mathcal{A}_h(y')^t\right] \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right| \\
&+ \left|\mathcal{A}_h(y')^t \left[\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right]\right|
\end{aligned}$$

Portanto basta estimarmos as 3 parcelas do membro direito da desigualdade acima. Para a primeira parcela temos que

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{A}_h(x')^t \left[\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(x), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho} \left|\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(x), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho} \cdot \overline{\Lambda_0} \left|\mathcal{A}_h(x')\xi\right|^{p-1} \left|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\right|^{\alpha_0} \\
\leq\ & \left(\frac{3}{2\rho}\right)^p \cdot \overline{\Lambda_0} \left|\xi\right|^{p-1} \left|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\right|^{\alpha_0}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\right| &= |(\rho x', \rho x_n + h(\rho x')) - (\rho y', \rho y_n + h(\rho y'))| \\
&= |\rho(x-y) + [h(\rho x') - h(\rho y')]\, e_n| \\
&\leq \rho|x-y| + ||\nabla h||_{L^\infty(B'_\rho)}||\rho x' - \rho y'|| \\
&\leq \rho|x-y| + \frac{\rho}{2}|x-y| \\
&= \frac{3\rho}{2}|x-y| \qquad (60)
\end{aligned}$$

temos a estimativa para a primeira parcela,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{A}_h(x')^t\left[\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(x), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right]\right| \\
\leq\ &\left(\frac{3}{2}\right)^{p+\alpha_0} \rho^{\alpha_0 - p}\overline{\Lambda_0}|\xi|^{p-1}|x-y|^{\alpha_0}
\end{aligned}$$

Quanto à segunda parcela,

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\mathcal{A}_h(x')^t - \mathcal{A}_h(y')^t\right]\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right| \\
\leq\ &\left|\left|\mathcal{A}_h(x')^t - \mathcal{A}_h(y')^t\right|\right| \cdot \left|\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right)\right| \\
\leq\ &\frac{|\nabla h(\rho x') - \nabla h(\rho y')|}{\rho} \cdot \Lambda_0\,|\mathcal{A}_h(x')\xi|^{p-1} \\
\leq\ &||h||_{C^2(B'_\rho)}|x' - y'|\Lambda_0\left(\frac{3}{2\rho}\right)^{p-1}|\xi|^{p-1} \\
\leq\ &\left(\frac{3}{2\rho}\right)^{p-1}\Lambda_0||h||_{C^2(B'_\rho)}|\xi|^{p-1}|x-y|^{1-\alpha_0}|x-y|^{\alpha_0} \\
\leq\ &2^{1-\alpha_0}\left(\frac{3}{2\rho}\right)^{p-1}\Lambda_0||h||_{C^2(B'_\rho)}|\xi|^{p-1}|x-y|^{\alpha_0}
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade acima usamos que $|x-y| \leq diam(B_1^+) = 2$.
Finalmente com respeito à terceira parcela,

$$
\begin{aligned}
& \left|\mathcal{A}_h(y')^t \left[\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho}\left|\mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(x')\xi\right) - \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right| \\
\leq\ & \frac{3}{\rho}\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\left|\partial_\xi \mathcal{A}\left(\Phi^{-1}(y), (1-t)\mathcal{A}_h(x')\xi + t\mathcal{A}_h(y')\xi\right)\right|\right| \cdot |\mathcal{A}_h(x')\xi - \mathcal{A}_h(y')\xi| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho}\sup_{0\leq t\leq 1}\Lambda_0\left|(1-t)\mathcal{A}_h(x')\xi + t\mathcal{A}_h(y')\xi\right|^{p-2} \cdot ||\mathcal{A}_h(x') - \mathcal{A}_h(y')|| \cdot |\xi| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho}\Lambda_0 \sup_{0\leq t\leq 1}\left[(1-t)|\mathcal{A}_h(x')\xi| + t|\mathcal{A}_h(y')\xi|\right]^{p-2} \cdot \frac{|\nabla h(\rho x') - \nabla h(\rho y')|}{\rho} \cdot |\xi| \\
\leq\ & \frac{3}{2\rho}\Lambda_0 \sup_{0\leq t\leq 1}\left[(1-t)\frac{3}{2\rho}|\xi| + t\frac{3}{2\rho}|\xi|\right]^{p-2} \cdot ||h||_{C^2(B'_\rho)}\,|x'-y'| \cdot |\xi| \\
\leq\ & \left(\frac{3}{2\rho}\right)^{p-1}\Lambda_0 ||h||_{C^2(B'_\rho)}|\xi|^{p-1}|x-y|^{1-\alpha_0}|x-y|^{\alpha_0} \\
\leq\ & 2^{1-\alpha_0}\left(\frac{3}{2\rho}\right)^{p-1}\Lambda_0 ||h||_{C^2(B'_\rho)}|\xi|^{p-1}|x-y|^{\alpha_0}
\end{aligned}
$$

provando assim a condição Q_7).

Mostraremos agora que $\overline{\mathcal{A}}$ satisfaz a propriedade de controle via Pucci por baixo em B_1^+: sejam V um aberto de B_1^+ e $\psi \in W^{2,1}(V) \cap L_\nabla(V)$. Então existem constantes c_ψ, C_ψ tais que

$$
c_\psi \leq |\nabla \psi| \leq C_\psi \tag{61}
$$

Pelo Teorema (.3), a função $\phi := \Phi^*(\psi) = \psi \circ \Phi \in W^{2,1}(U)$, onde $U = \Phi^{-1}(V)$. Pelo lema anterior temos que $\nabla\phi(x) = \mathcal{A}_h(y')\nabla\psi(y)$, $y = \Phi(x)$, e que

$$\frac{c_\phi}{2\rho} \leq \frac{|\nabla\psi(y)|}{2\rho} \leq |\nabla\phi(x)| = |\mathcal{A}_h(y') \cdot \nabla\psi(y)| \leq \frac{|3\nabla\psi(y)|}{2\rho} \leq \frac{3C_\phi}{2\rho}$$

.

Ou seja $\phi \in L_\nabla(U)$. Como $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade de controle via Pucci por baixo em Ω, segue-se que

$$\begin{cases} X_{\mathcal{A},\phi} := \mathcal{A}(\cdot, \nabla\phi) \in W^{1,1}(U), \quad \text{e para q.t.p. } x \in U \\ \\ \operatorname{div}(X_{\mathcal{A},\phi})(x) \geq \underline{\varrho} \cdot |\nabla\phi(x)|^{p-2} \cdot \left[\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\varphi(x)) - \gamma \cdot |\nabla\varphi(x)|\right] \end{cases} \tag{62}$$

Pelo teorema (.3), segue-se que $(\Phi^{-1})^* \mathcal{A}(\cdot, \nabla\phi) = \mathcal{A}(\Phi^{-1}, \nabla\phi \circ \Phi^{-1}) \in W^{1,1}(V)$. Como $h \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$, a função $y \mapsto \mathcal{A}_h(y')$ está claramente em $C^1(\overline{V})$. Consequentemente a função $y \mapsto X_{\overline{\mathcal{A}},\psi}(y) = \overline{\mathcal{A}}(y, \nabla\psi(y)) = \mathcal{A}_h(y')\mathcal{A}(\Phi^{-1}(y), \mathcal{A}_h(y')\nabla\psi(y))$ está em $W^{1,1}(V)$.

Por (62) existe um conjunto de medida nula Z_1 tal que para todo $x \in U \setminus Z_1$

$$f(x) := div\,(\mathcal{A}(x, \nabla\phi(x))) \geq \underline{\varrho} \cdot |\nabla\varphi(x)|^{p-2} \cdot \left[\mathcal{P}_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi(x)) - \gamma|\nabla\phi(x)|\right] \tag{63}$$

Pelo que provamos anteriormente ψ satisfaz à seguinte equação no sentido das distribuições

$$div\left(\overline{\mathcal{A}}(y, \nabla\psi(y))\right) = g(y) := f \circ \Phi^{-1}(y)$$

Em particular, existe um conjunto de medida nula Z_2 , tal que a equação acima é satisfeita para todo $y \in V \setminus Z_2$. Como Φ é de classe C^1, $\Phi(Z_1)$ tem medida nula. Definido $Z := \Phi(Z_1) \cup Z_2$, segue-se que Z tem medida nula e $\forall y \in V \setminus Z$

$$
\begin{aligned}
&div(X_{\overline{\mathcal{A}},\psi})(y) = \\
&= \quad div\left(\overline{\mathcal{A}}\,(y,\nabla\psi(y))\right) \\
&= \quad g(y) \\
&= \quad f(x) \qquad\qquad\qquad\qquad (x := \Phi^{-1}(y)) \\
&= \quad div\,(\mathcal{A}(x,\nabla\phi(x))) \\
&\geq \quad \underline{\varrho}|\nabla\phi(x)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi(x)) - \gamma|\nabla\phi(x)|\right] \\
&= \quad \underline{\varrho}\,|\mathcal{A}_h(y')\nabla\psi(y)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')D^2\psi(y)\mathcal{A}_h(y')^t + \psi_{y_n}(y)\mathcal{B}_h(y')\right) - \gamma\,|\mathcal{A}_h(y')\nabla\psi(y)|\right] \\
&\geq \quad \frac{\underline{\varrho}}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')D^2\psi(y)\mathcal{A}_h(y')^t\right) + \mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda}\left(\psi_{y_n}(y)\mathcal{B}_h(y')\right) - \frac{3\gamma}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \quad \frac{\underline{\varrho}}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}\left(D^2\psi(y)\right) - n\Lambda\,||\psi_{y_n}(y)\mathcal{B}_h(y')|| - \frac{3\gamma}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\right] \\
&\geq \quad \frac{\underline{\varrho}}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}\left(D^2\psi(y)\right) - \frac{n\Lambda||D^2h||_{L^\infty(B'_\rho)}}{\rho}|\nabla\psi(y)| - \frac{3\gamma}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\right] \\
&= \quad \frac{\underline{\varrho}}{2\rho}\,|\nabla\psi(y)|\left[\mathcal{P}^{-}_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}\left(D^2\psi(y)\right) - \frac{\left(2n\Lambda||D^2h||_{L^\infty(B'_\rho)} + 3\gamma\right)}{\rho}\cdot|\nabla\psi(y)|\right]
\end{aligned}
$$

onde na quinta linha acima usamos que como $y \in V \setminus \Phi(Z_1)$, $x = \Phi^{-1}(y) \in U \setminus Z_1$, e daí vale (63).

$\square$

Lema .3. *Se u_ε é solução do problema de perturbação singular (2), então v_ε é solução do problema de perturbação singular*

$$\begin{cases} v_\varepsilon \in C^0(B_1^+), \\ \overline{F}(D^2 v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon, y) = g_\varepsilon(y) + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon) & em\ B_1^+, \\ v_\varepsilon \geq 0 & em\ B_1^+, \\ v_\varepsilon = \overline{\varphi} & em B_1' \end{cases} \tag{64}$$

onde $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \Phi^{-1}, \overline{\varphi} = \varphi \circ \Phi^{-1}$ *e*

$$\overline{F}(M, \xi, y) = F\left(\mathcal{A}_h(y') M \mathcal{A}_h(y')^t + \xi_n \mathcal{B}_h(y'), \mathcal{A}_h(y')\xi, \Phi^{-1}(y)\right)$$

Ademais $\overline{F}$ *satisfaz as condição de estrutura (9) e existe um* $r_0 > 0$,*tal que para qualquer* $y_0 \in B_1^+$

$$\left(\frac{1}{|B_r(y_0) \cap B_1^+|} \int_{B_r(y_0) \cap B_1^+} \beta_{\overline{F}}(y, y_0) dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \theta, \ \textit{sempre que} \ \ r \leq r_0 \tag{65}$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
& |\overline{F}(M,\xi,y)-\overline{F}(N,\eta,y)| \\
= \; & |F\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y'),\mathcal{A}_h(y')\xi,\Phi^{-1}(y)\right) \\
& -F\left(\mathcal{A}_h(y')N\mathcal{A}_h(y')^t+\eta_n\mathcal{B}_h(y'),\mathcal{A}_h(y')\eta,\Phi^{-1}(y)\right)| \\
\leq \; & \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')(M-N)\mathcal{A}_h(y')^t+(\xi_n-\eta_n)\mathcal{B}_h(y')\right)+\gamma\left|\mathcal{A}_h(y')(\xi-\eta)\right| \\
\leq \; & \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')(M-N)\mathcal{A}_h(y')^t\right)+\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\left((\xi_n-\eta_n)\mathcal{B}_h(y')\right)+\frac{3\rho\gamma}{2}|\xi-\eta| \\
\leq \; & \mathcal{P}^+_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}(M-N)+n\Lambda|\xi_n-\eta_n|\cdot||\mathcal{B}_h(y')||+\frac{3\rho\gamma}{2}|\xi-\eta| \\
\leq \; & \mathcal{P}^+_{\frac{\lambda}{4\rho^2},\frac{9\Lambda}{4\rho^2}}(M-N)+\left(\frac{n\Lambda||h||_{C^2(B'_\rho)}}{\rho}+\frac{3\rho\gamma}{2}\right)|\xi-\eta|
\end{aligned}
$$

Isto prova a elipticidade uniforme. Quanto a prova de (65) vejamos

$$
\begin{aligned}
& \left|\overline{F}(M,\xi,y)-\overline{F}(M,\xi,y_0)\right| \\
= \;& |F\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y'),\mathcal{A}_h(y')\xi,\Phi^{-1}(y)\right) \\
- \;& F\left(\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y_0'),\mathcal{A}_h(y_0')\xi,\Phi^{-1}(y_0)\right)| \\
\leq \;& |F\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y'),\mathcal{A}_h(y')\xi,\Phi^{-1}(y)\right) \\
- \;& F\left(\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y_0'),\mathcal{A}_h(y_0')\xi,\Phi^{-1}(y)\right)| \\
+ \;& |F\left(\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y_0'),\mathcal{A}_h(y_0')\xi,\Phi^{-1}(y)\right) \\
- \;& F\left(\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y_0'),\mathcal{A}_h(y_0')\xi,\Phi^{-1}(y_0)\right)| \\
\leq \;& \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y')M\mathcal{A}_h(y')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y')-\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t-\xi_n\mathcal{B}_h(y_0')\right)+ \\
+ \;& \gamma\left|\left(\mathcal{A}_h(y')-\mathcal{A}_h(y_0')\right)p\right| \\
+ \;& C_0\left|\Phi^{-1}(y)-\Phi^{-1}(y_0)\right|^{\mu_0}\left(||\mathcal{A}_h(y_0')M\mathcal{A}_h(y_0')^t+\xi_n\mathcal{B}_h(y_0')||+|\mathcal{A}_h(y_0')\xi|\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}\left(\left(\mathcal{A}_h(y') - \mathcal{A}_h(y'_0)\right) M \mathcal{A}_h(y')\right) + \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}\left(\mathcal{A}_h(y'_0) M \left(\mathcal{A}_h(y')^t - \mathcal{A}_h(y'_0)^t\right)\right) \\
&+ \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda}\left(\xi_n\left(\mathcal{B}_h(y') - \mathcal{B}_h(y'_0)\right)\right) + \gamma||\mathcal{A}_h(y') - \mathcal{A}_h(y'_0)|| \cdot |\xi| \\
&+ C_0||J_{\phi^{-1}}||^{\mu_0}_{L^\infty(B_1^+)}|y - y_0|^{\mu_0}\left(||\mathcal{A}_h(y'_0)|| \cdot ||M|| \cdot ||\mathcal{A}_h(y'_0)^t|| + |\xi_n| \cdot ||\mathcal{B}_h(y'_0)|| + \frac{3}{2\rho}|\xi|\right) \\
&\leq n\Lambda\, ||\mathcal{A}_h(y') - \mathcal{A}_h(y'_0)|| \cdot ||M|| \cdot ||\mathcal{A}_h(y')|| + n\Lambda||\mathcal{A}_h(y'_0)|| \cdot ||M|| \cdot ||\mathcal{A}_h(y')^y - \mathcal{A}_h(y'_0)^t|| \\
&+ n\Lambda|\xi_n| \cdot ||\mathcal{B}_h(y') - \mathcal{B}_h(y'_0)|| + \gamma \cdot \frac{|\nabla h(\rho y') - \nabla h(\rho y'_0)|}{\rho} \cdot |\xi| \\
&+ C_0||J_{\phi^{-1}}||^{\mu_0}_{L^\infty(B_1^+)}|y - y_0|^{\mu_0}\left(\left(\frac{3}{2\rho}\right)^2 ||M|| + \frac{||h||_{C^2(B'_\rho)}}{\rho} \cdot |\xi| + |\frac{3}{2\rho}|\xi|\right) \\
&\leq 2n\Lambda \cdot \frac{|\nabla h(\rho y') - \nabla h(\rho y'_0)|}{\rho} \cdot ||M|| \cdot \frac{3}{2\rho} + n\Lambda|\xi| \cdot \frac{||D^2h(\rho y') - D^2h(\rho y'_0)||}{\rho} \\
&+ \gamma \cdot ||h||_{C^2(B'_\rho)} \cdot |y' - y'_0| \cdot |\xi| + C(C_0, h)|y - y_0|^{\mu_0} \cdot (||M|| + |\xi|) \\
&\leq C(n, \Lambda, C_0, h)\,(||M|| + |\xi|) \cdot (|y - y_0| + ||D^2h(\rho y') - D^2h(\rho y'_0)|| + |y - y_0|^{\mu_0})
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\beta_{\overline{F}}(y, y_0) \leq C(n, \Lambda, C_0, h)\left(|y - y_0| + ||D^2h(\rho y') - D^2h(\rho y'_0)|| + |y - y_0|^{\mu_0}\right)
$$

Denotando simplesmente por C a constante $C(n, \Lambda, C_0, h)$ logo acima, obtemos que $\forall r > 0$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1^+}\beta_{\overline{F}}(y,y_0)dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\ C\left\{\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1^+}|y-y_0|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\quad+\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1^+}||D^2h(\rho y')-D^2h(\rho y_0')||^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \left.\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1^+}|y-y_0|^{p\cdot\mu_0}dy\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&\leq\ C\left\{r^p+r^{\mu\cdot p}+\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1'}||D^2h(\rho y')-D^2h(\rho y_0')||^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \qquad (66)
\end{aligned}
$$

Como $h\in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que D^2h é uniformemente contínua em B_1'. Logo existe um $\delta>0$ tal que para quaisquer $z,z_0\in B_1'$

$$|z-z_0|\leq\delta\Longrightarrow||D^2h(z)-D^2h(z_0)||<\frac{\theta}{3C}$$

Definindo $r_0:=\min\left\{\frac{\delta}{\rho},\left(\frac{\theta}{3C}\right)^{\frac{1}{p}},\left(\frac{\theta}{3C}\right)^{\frac{1}{\mu\cdot p}}\right\}$ obtemos, que se $y\in B_r(y_0)$, então $|\rho y'-\rho y_0'|\leq\rho r\leq\rho r_0\leq\delta$, e consequentemente $||D^2h(\rho y')-D^2h(\rho y_0')||<\frac{\theta}{3C}$ sempre que $0<r\leq r_0$. Logo para todo r nesse intervalo obtemos, via (66) e definição de r_0, que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B_r(y_0)\cap B_1^+|}\int_{B_r(y_0)\cap B_1^+}\beta_{\overline{F}}(y,y_0)dy\right)^{\frac{1}{p}}\ &\leq\ C\left(r_0^p+r_0^{\mu\cdot p}+\frac{\theta}{3C}\right)\\
&\leq\ C\left(\frac{\theta}{3C}+\frac{\theta}{3C}+\frac{\theta}{3C}\right)\\
&=\ \theta
\end{aligned}
$$

□

Retornando à prova de (56), para cada $0 < \varepsilon < 1$, defina $v_\varepsilon : B_1^+ \to \mathbb{R}$, por

$$v_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(x) \qquad\qquad y = \Phi(x)$$

Então $\forall x \in \Phi^{-1}(B_{1/4}^+)$, os lemas (.2), (.3) e o Teorema (4.1) nos dão que existe uma constante C universal tal que

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\varepsilon(x)| &= |\mathcal{A}_h(y')\nabla v_\varepsilon(y)| \\
&\leq \frac{3}{2\rho}\cdot|\nabla v_\varepsilon(y)| \\
&\leq \frac{3}{2\rho}C\left[1 + ||v_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||g_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)}\right)^{\frac{1}{\chi}} + ||\psi||_{C^{1,\alpha}(B_1')}\right]
\end{aligned}$$

onde $g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \Phi^{-1}$, $\psi = \varphi \circ \Phi^{-1}$. Para concluirmos a prova de (56), mostraremos que cada parcela dentro do colchete da expressão acima é dominada pela respectiva parcela dentro do colchete de (56). Com efeito, naturalmente
$||v_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} = ||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Phi^{-1}(B_1^+))} \leq ||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega)}$.

Ademais,

$$\begin{aligned}
||g_\varepsilon||_{L^q(B_1^+)} &= \left(\int_{B_1^+} |g_\varepsilon(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \left(\int_{\Phi^{-1}(B_1^+)} |g_\varepsilon\left(\Phi(x)\right)|^q \, |\det J_\Phi(x)|\right)^{\frac{1}{q}} dx \\
&\leq \left(\frac{1}{\rho^n}\int_\Omega |f_\varepsilon(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \\
&= \rho^{-\frac{n}{q}}||f_\varepsilon||_{L^q}(\Omega)
\end{aligned}$$

Portanto basta estimarmos

$$||\psi||_{C^{1,\alpha}(B_1')} = ||\psi||_{L^\infty(B_1')} + ||\nabla\psi||_{L^\infty(B_1')} + [\nabla\psi]_{C^{0,\alpha}(B_1')}.$$

Naturalmente, $||\psi||_{L^\infty(B_1')} = ||\varphi||_{L^\infty(\Phi^{-1}(B_1'))} \leq ||\varphi||_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Além disso pelo Lema (.1), temos que $\nabla\varphi(x) = \mathcal{A}_h(y')\nabla\psi(y)$ e consequentemente, $\nabla\psi(y) = \mathcal{C}_h(x')\nabla\varphi(x)$, onde

$$\mathcal{C}_h(x') = \mathcal{A}_h(y')^{-1} = \rho\begin{pmatrix} I_{n-1} & \nabla h(x') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e de modo análogo a prova do item (iii) do Lema (.1), temos que $|\mathcal{C}_h(x')\xi| \leq \dfrac{3\rho}{2}|\xi|$, $\forall x \in B_1^+$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Daí segue que, $||\nabla\psi||_{L^\infty(B_1')} \leq \dfrac{3\rho}{2}||\nabla\phi||_{L^\infty(\Omega)}$.

Resta portanto estimarmos $[\nabla\psi]_{C^{0,\alpha}(B_1')}$: para quaisquer $y_1, y_2 \in B_1'$, temos que

$$\frac{|\nabla\psi(y_2) - \nabla\psi(y_1)|}{|y_2 - y_1|^\alpha} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{|\Phi^{-1}(y_2) - \Phi^{-1}(y_1)|}{|y_2 - y_1|}\right)^\alpha \frac{|\mathcal{B}_h(x_2')\nabla\varphi(x_2) - \mathcal{B}_h(x_1')\nabla\varphi(x_1)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \\ &\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^\alpha \frac{|\mathcal{B}_h(x_2')\nabla\varphi(x_2) - \mathcal{B}_h(x_1')\nabla\varphi(x_1)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{|\mathcal{B}_h(x_2')\left[\nabla\varphi(x_2)-\nabla\varphi(x_1)\right]|}{|x_2-x_1|^{\alpha}}+\frac{||\mathcal{B}_h(x_1')-\mathcal{B}_h(x_2')||}{|x_2-x_1|^{\alpha}}|\nabla\varphi(x_1)|\right)\\
&\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{3\rho}{2}\cdot\frac{|\nabla\varphi(x_2)-\nabla\varphi(x_1)|}{|x_2-x_1|^{\alpha}}+\frac{|\nabla h(x_1')-\nabla h(x_2')|}{|x_1-x_2|^{\alpha}}||\nabla\varphi||_{L^{\infty}(\partial\Omega)}\right)\\
&\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{3\rho}{2}\cdot[\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}+\frac{||h||_{C^2(B_\rho')}(|x_1'-x_2'|)}{|x_1-x_2|^{\alpha}}\cdot||\nabla\varphi||_{L^{\infty}(\partial\Omega)}\right)\\
&\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{3\rho}{2}+||h||_{C^2(B_\rho')}|x_1'-x_2'|^{1-\alpha}\right)||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\\
&\leq \left(\frac{3\rho}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{3\rho}{2}+||h||_{C^2(B_\rho')}(2\rho)^{1-\alpha}\right)||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}
\end{aligned}
$$

Como o ponto x_0 foi escolhido arbitrariamente, concluimos que todo ponto $x \in \partial\Omega$ admite uma vizinhança aberta V_x tal que

$$||\nabla u||_{L^{\infty}(V_x\cap\overline{\Omega})} \leq C\left[||u||_{L^{\infty}(\Omega)}+\left(||\beta||_{L^{\infty}(\mathbb{R})}+||f||_{L^q(\Omega)}\right)^{\chi}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right]$$

Seja δ o número de Lebesgue da cobertura

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{x\in\partial\Omega} V_x$$

Então $\forall x \in \partial\Omega$, $B_\delta(x) \subset V_{\widetilde{x}}$, para algum $\widetilde{x} \in \partial\Omega$, e consequentemente pela estimativa logo acima temos que

$$||\nabla u||_{L^{\infty}(B_\delta(x)\cap\overline{\Omega})} \leq C\left[||u||_{L^{\infty}(\Omega)}+\left(||\beta||_{L^{\infty}(\mathbb{R})}+||f||_{L^q(\Omega)}\right)^{\chi}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right] \qquad (67)$$

Como Ω é limitado, temos que $\overline{\Omega}$ (e portanto a $\partial\Omega$) é compacto. Logo, a cobertura

$\partial\Omega \subset \bigcup_{x\in\partial\Omega} B_{\delta/2}(x)$ admite subcobertura finita

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\sigma} B_{\delta/2}(x_i) \tag{68}$$

Afirmo que

$$\Omega \subset \Omega_{\delta/2} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\sigma} B_{\delta}(x_i) \right) \tag{69}$$

onde

$$\Omega_{\delta/2} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \geq \delta/2\}$$

Com efeito, se $x \in \overline{\Omega}\backslash\Omega_{\delta/2}$, então $d(x, \partial\Omega) < \delta/2$. Logo, existe um $\overline{x} \in \partial\Omega$, tal que

$$|x - \overline{x}| < \delta/2$$

Por (68), existe um x_i tal que

$$|\overline{x} - x_i| < \delta/2$$

Logo,

$$|x - x_i| \leq |x - \overline{x}| + |\overline{x} - x_i| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Isto é, $x \in B_{\delta}(x_i)$, o que prova (69). Pelo Teorema de Estimativa Lipschitz Uniforme no caso interior (Teorema 6.10 de [?]), existe uma constante universal $C > 0$, tal que

$$||\nabla u||_{L^\infty(\Omega_{\delta/2})} \leq C\left[||u||_{L^\infty(\Omega)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f||_{L^q(\Omega)}\right)^\chi\right] \tag{70}$$

Por (67), também temos que $\forall i = 1, \cdots, \sigma$

$$||\nabla u||_{L^\infty(B_\delta(x_i)\cap\overline{\Omega})} \leq C\left[||u||_{L^\infty(\Omega)} + \left(||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R})} + ||f||_{L^q(\Omega)}\right)^\chi + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(\partial\Omega)}\right] \tag{71}$$

(70) e (71), junto com (69) implicam no Teorema (1.2).