

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Francisco de Assis Leandro Filho**

# **Escoamento Viscoso em Fraturas Auto-Afins**

Fortaleza - CE

Janeiro - 2019

**Francisco de Assis Leandro Filho**

# **Escoamento Viscoso em Fraturas Auto-Afins**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona

**Fortaleza - CE**

**Janeiro - 2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Setorial de Física

T264p Leandro Filho, Francisco de Assis.  
*Escoamento Viscoso em Fraturas Auto-Afins* / Francisco de Assis Leandro Filho. – Janeiro - 2019.  
100 p.;il.

Tese de Doutorado - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Centro de Ciências, Fortaleza, Janeiro - 2019.  
Área de Concentração: Física  
Orientação: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona

1. Escoamento. 2. Fluidos. 3. Auto-Afim. 4. Fluent. I.

CDD:530

**Francisco de Assis Leandro Filho**

# **Escoamento Viscoso em Fraturas Auto-Afins**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física

Aprovada em 18/01/2019

## **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Ascânio Dias Araújo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

---

Prof. Dr. Erneson Alves de Oliveira  
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

*A Deus  
a minha Esposa  
e a todos os meus familiares*

*“A imprensa mundial, os grandes historiadores, os grandes conceituadores, quem é ateu, quem não é ateu, quem gosta, quem não gosta, todos sabem que tem um túmulo vazio em Jerusalém, pois, ‘Ele ressuscitou, Ele está à direita de Deus’ e é este Cristo que está entre nós”.*”

PR. JECER GOES FERREIRA

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus.

Agradeço a todos os meus familiares, principalmente a minha esposa Raquel Melo.

Agradeço ao meu orientador professor Humberto de Andrade Carmona pela orientação acadêmica, pela confiança durante o curso de Doutorado, pela sua paciência e dedicação. Agradeço por nunca deixar de me apoiar e nem de me orientar apesar de todas as dificuldades.

Agradeço ao professor Ascânio Dias Araújo pela excelente disciplina de “Fenômenos de Transporte em Meios Porosos”, que me forneceu a oportunidade de trabalhar com Dinâmica de Fluidos Computacional. Agradeço a confiança depositada em mim ao sugerir este trabalho.

Agradeço ao professor José Soares de Andrade Júnior por participar da minha banca examinadora, e além disso por ter acompanhado o trabalho e por fornecer ótimas sugestões ao longo de todo esse tempo.

Agradeço aos professores Luciano da Silva (UFRN) e Erneson Oliveira (UNIFOR) por aceitarem participar da banca examinadora, assim como pelas contribuições e sugestões dadas com o objetivo de melhorar o trabalho.

Agradeço ao professor Hansjoerg Seybold pela grandiosa ajuda com as simulações que foram realizadas no ETH Zurich. Muito obrigado. Sem isso esse trabalho não existiria.

Agradeço a coordenação da pós-graduação em Física pelo apoio e manutenção da infraestrutura necessária para realização deste trabalho.

Agradeço aos colegas com os quais trabalhei durante o curso de Doutorado compartilhando uma excelente amizade. São eles: Aurélio Wildson, Diego Frota, Maurício Soares e Roberto Lima.

Agradeço aos meus colegas de trabalho do Instituto Federal do Ceará, sobretudo os que fazem parte do *campus* Camocim e do *campus* avançado de Jaguaruana, a minha sincera gratidão por toda a compreensão necessária quando precisei conciliar os meus trabalhos.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o processo de escoamento de um fluido através de superfícies irregulares. Inicialmente será abordado, a dinâmica do escoamento através de superfícies rugosas com geometria auto-afim. Essencialmente, os aspectos relevantes na compreensão do escoamento em sistemas irregulares são o estrutural, intimamente associado à formação topológica e morfológica do meio. Será descrita a topologia e a morfologia do sistema irregular. Será considerado que a geometria das interfaces que constituem o canal rugoso apresentam propriedades estatísticas invariantes sob transformações de escala anisotrópicas, ou seja, podem ser caracterizadas como superfícies fractais auto-afins. O caráter irregular desta geometria adiciona um grau de complexidade ao problema do escoamento, refletindo-se nas propriedades dos campos de velocidade e pressão. Será investigado o escoamento de fluido em superfícies auto-afins através de simulações numéricas diretas das equações de Navier-Stokes. Investigamos a influência da rugosidade superficial no fluxo viscoso e não viscoso de fluidos newtonianos em articulações auto-afins e superfícies fraturadas. Denotou-se que a permeabilidade efetiva decai exponencialmente com o expoente de Hurst, usado como uma medida quantitativa da rugosidade da superfície. Contribuições não-lineares para a resistência hidráulica fluida tornam-se importantes para números de Reynolds suficientemente altos, devido às contribuições das forças inerciais, o que é típico dos experimentos. Em ordem cúbica, conclui-se que é possível encontrar um comportamento universal da resistência hidráulica do sistema, com o início das correções não-lineares da lei de Darcy sendo proporcional ao expoente de Hurst. Isto implica que o sistema pode ser descrito macroscopicamente apenas pela permeabilidade mesmo para superfícies muito rugosas ( $H \sim 0.3$ ). Também encontramos a ocorrência espontânea de canalização quase unidimensional no fluxo, mesmo sem o relativo deslocamento de cisalhamento entre as superfícies superior e inferior das próprias articulações de fratura. Esse comportamento inesperado é quantificado aqui usando o índice de participação.

**Palavras-chave:** Escoamento. Fluidos. Auto-Afim. Fluent.



# Abstract

This work aims to study the process of flow of a fluid through uneven surfaces. Initially we will address the dynamics of flow through rough surfaces with self-affine geometry. Essentially, the relevant aspects in understanding the flow of irregular structural systems are closely associated with topological and morphological formation of the half. The topology and morphology of the irregular system will be described. It will be appreciated that the geometry of the interfaces that constitute the rough channel feature invariant under transformations statistical properties of anisotropic scale, i.e., can be characterized as self-affine fractal surfaces. The irregular nature of this geometry adds a degree of complexity to the flow problem, reflecting on the properties of velocity and pressure fields. This study aims to investigate the fluid flow in self-affines surfaces through direct numerical simulations of the Navier-Stokes equations. We investigate the influence of the surface roughness to the viscous and non-viscous flow of Newtonian fluids in self-affine joints and fractured surfaces. We denote that the effective permeability of the decays exponentially with the Hurst exponent, used as a quantitative measure of the surface roughness. Nonlinear contributions to the fluid hydraulic resistance become important for sufficiently high Reynolds numbers, due inertial forces contributions, which is typical of experiments. To cubic order, we find that it is possible to find a universal behavior of the hydraulic resistance of the system, with the onset of the nonlinear corrections to Darcy's law being proportional to the Hurst exponent. This implies that the system can be described macroscopically only by the permeability even for very rough surfaces ( $H \sim 0.3$ ). We also find the spontaneous occurrence quasi-one-dimensional channeling in the flow, even with no relative shear displacement between the upper and lower surfaces of the self-affine fracture joints. This unexpected behavior is quantified here using the participation index.

**Keywords:** Flow. Fluid. Self-Affine. Fluent.

# Lista de Figuras

- 1 Partícula fluida escoando com velocidade  $\mathbf{u}$  em uma região do espaço  $\mathcal{D}$ . p. 23
- 2 A massa que cruza o limite  $\partial W$  por unidade de tempo é igual à integral da superfície de  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  sobre  $\partial W$ . . . . . p. 24
- 3 Forças de pressão através de uma superfície  $W$ . . . . . p. 27
- 4 Dois elementos de fluido movendo-se em contato com uma superfície  $S$ . p. 29
- 5 Representação de um reservatório de água com um fluxo de entrada  $\xi(t)$  e de saída  $\langle \xi(t) \rangle_\tau$ .  $X(t, \tau)$  representa a diferença acumulada de entrada e saída de água.  $R$  o volume do reservatório que o faz um reservatório ideal. Fonte: [1] . . . . . p. 33
- 6 Volume anual (fluxo de entrada) do lago Albert  $\xi(t)$  (linha pontilhada) e a diferença acumulada  $X(t)$  (linha contínua).  $R$  representa o volume do reservatório para que nunca se esvazie ou transborde. Fonte: [1] . . p. 34
- 7 Análise de Flutuação sem Tendência (DFA) de uma série temporal de aproximadamente  $N = 10000$  pontos de dados. As séries foram divididas em  $m$  partições com  $s$  pontos cada (topo esquerda), depois cada uma foi ajustada separadamente com um polinômio de primeira ordem  $f_1(i)$  (linhas vermelhas), obtendo as séries retransmitidas subtraindo o sinal pela tendência (topo direita). A função de flutuação (o desvio padrão do sinal retificado) é calculada para vários valores de  $s$  (inferior). O expoente de Hurst é então determinado ajustando a função de flutuação com uma lei de potência  $F(s) \sim s^H$ . Fonte: Adaptado de [2] . . . . . p. 37
- 8 Superfícies geradas para diferentes valores de expoente de Hurst  $H$  com tamanho  $L = 256$  (a)  $H = -1$  (caso não-correlacionado). (b)  $H = 0.1$ , (c)  $H = 0.5$  e (d)  $H = 0.9$  (casos correlacionados). . . . . p. 47
- 9 Perfil de velocidade para o Fluxo de Poiseuille em um canal liso. . . . . p. 47

10	Superfície gerada para o escoamento bidimensional com $L = 1024$ gerada utilizando o método de <i>Fourier Filtering</i> . . . . .	p. 60
11	Determinação do Expoente de Hurst ( $H = \alpha - 1$ ) da série de dados da Figura 10 utilizando a Análise de Flutuação sem Tendência (DFA). . .	p. 60
12	Desenho esquemático da fratura utilizada nas simulações com expoente de rugosidade $H = 0.8$ , tamanho $L \times L = 512 \times 512$ com amplitude $a = 40$ e largura $w = 40$ . As duas superfícies delimitadoras são complementares e auto-afins. . . . .	p. 62
13	Geração de malha inicial no processo de criação de malhas do <i>snappyHexMesh</i> . . . . .	p. 63
14	Divisão de células por superfície no processo de malhas <i>snappyHexMesh</i>	p. 64
15	Remoção de células no processo de malhas <i>snappyHexMesh</i> . . . . .	p. 65
16	Detalhe da malha numérica de uma superfície com expoente de rugosidade $H = 0.8$ , tamanho $L \times L = 512 \times 512$ com amplitude $a = 40$ e largura $w = 40$ . . . . .	p. 65
17	Pressão média em função da direção $x$ do fluxo para $H$ variando de 0.4 a 0.9 para (a) $Re = 0.01$ e (b) $Re = 100$ . Para cada valor de expoente de Hurst $H$ , cinco amostras foram geradas e simuladas em uma ampla gama de números de Reynolds. . . . .	p. 70
18	Campos de pressão no interior de superfícies rugosas auto-afins. . . . .	p. 71
19	Dependência da resistência hidráulica $G$ no número de Reynolds para diferentes valores do expoente da rugosidade $H$ . . . . .	p. 72
20	Variação do parâmetro $\alpha w^2$ na Equação 2.104 com o expoente $H$ caracterizando a rugosidade da geometria do canal. . . . .	p. 72
21	Variação dos parâmetros $\beta w$ e $\gamma$ na Equação 2.104 com o expoente $H$ caracterizando a rugosidade da geometria do canal. . . . .	p. 73
22	Resistência hidráulica normalizada $\bar{G}$ como uma função de $Re/H$ . . . . .	p. 73
23	Contorno da magnitude da velocidade local ao longo de realizações típicas de canais rugosos auto-afins para vários expoentes de Hurst $H$ submetido a um baixo valor de Reynolds ( $Re = 0.01$ ). . . . .	p. 74

24	Contorno da magnitude da velocidade local ao longo de realizações típicas de canais rugosos auto-afins para vários expoentes de Hurst $H$ submetido a um alto valor de Reynolds ( $Re = 100$ ). . . . .	p. 75
25	Perfil da magnitude da velocidade ao longo da linha de fluxo localizada no centro do canal rugoso para um campo de fluxo calculado em condições baixas de Reynolds ( $Re = 0.01$ ) e ( $Re = 100$ ). . . . .	p. 76
26	Gráfico logarítmico da função de flutuação sem tendência $F(\Delta x)$ calculada a partir de 5 realizações de perfis de magnitude de velocidade para Reynolds (a) $Re = 10$ , $Re = 20$ , $Re = 50$ e $Re = 100$ e (b) $Re = 1$ , $Re = 5$ e $Re = 10$ . . . . .	p. 78
27	Queda de pressão média ao longo da direção do fluxo para (a) $H = 0.2$ e $Re = 59$ (b) $H = 0.8$ e $Re = 579$ . . . . .	p. 79
28	Campos de pressão no interior de superfícies rugosas auto-afins. A magnitude da pressão varia desde $2.5 \times 10^2 Pa$ (regiões em vermelho) até 1 (regiões em azul escuro). . . . .	p. 80
29	Dependência da resistência hidráulica $G$ no número de Reynolds para diferentes valores do expoente da rugosidade $H$ . . . . .	p. 80
30	Variação do parâmetro $\alpha$ como na Eq. (2.104) com o expoente $H$ . As barras de erro são menores que os tamanhos simples. A linha tracejada corresponde a um ajuste $\alpha/\alpha_0 - a = be^{-ch}$ , com $a = 1.22 \pm 0.01$ , $b = 24.8 \pm 1.0$ e $c = 6.3 \pm 0.1$ , as barras de erro são menores que os símbolos. . . . .	p. 81
31	(a) Variação do parâmetro $\beta w$ em função de $\alpha w^2/H$ e (b) $\gamma$ em função de $\alpha w^2/H^2$ . . . . .	p. 82
32	Resistência hidráulica normalizada $\bar{G} \equiv G/\alpha w^2$ como uma função de $Re/H$ . O colapso dos dados da simulação em uma única curva é uma indicação de que o início das contribuições não-lineares à resistência hidráulica aumenta aproximadamente linearmente com o expoente de Hurst. . . . .	p. 83

- 33 O parâmetro  $\beta H/\alpha_0 w$  como função de  $\alpha/\alpha_0$ . A linha sólida corresponde a um ajuste aos dados usando  $\beta H/\alpha_0 w = c\alpha/\alpha_0$  com  $c = 0.0023 \pm 0.0001$  e coeficiente de correlação de Pearson  $R = 0.9993$ . A inserção mostra a relação entre o parâmetro  $\gamma H^2$  e  $\alpha w^2$  que se desvia da linearidade esperada, especialmente para pequenos expoentes de Hurst. . . . . p. 84
- 34 Gráficos de contorno típicos do campo de magnitude da velocidade para uma seção transversal do canal paralela à direção do fluxo para baixo um número de Reynolds  $Re = 60$  com (a)  $H = 0.2$  e (b)  $H = 0.8$ . . . . p. 84
- 35 Contorno de amplitude de velocidade na superfície no centro do canal para  $H = 0.2$ . (a)  $Re = 20$  e (b)  $Re = 420$ . As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, respectivamente, normalizadas de 0 a 1 em cada condição. . . . . p. 85
- 36 Contorno de amplitude de velocidade na superfície no centro do canal para  $H = 0.4$ . (a)  $Re = 20$  e (b)  $Re = 580$ . As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, respectivamente, normalizadas de 0 a 1 em cada condição. . . . . p. 86
- 37 Gráficos de contorno do campo de magnitude da velocidade para diferentes seções transversais do canal perpendiculares à direção do fluxo principal para  $Re = 100$ . (a)  $H = 0.8$  e (b)  $H = 0.4$ . . . . . p. 87
- 38 Índice de participação  $\pi/\pi_0$  como uma função do expoente de Hurst  $H$ . Os círculos vermelhos correspondem ao índice de participação no volume, normalizado pelo valor da participação para placas paralelas  $\pi_0 = 0.7$ . Os triângulos azuis denotam o índice de participação no nível da superfície  $w/2$ , obtido pela translação da superfície inferior do canal de  $w/2$  na direção  $z$ . A inserção mostra o gráfico de contorno da magnitude da velocidade no nível da superfície  $w/2$ . . . . . p. 88

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 15
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	p. 22
2.1	Equações Básicas da Dinâmica dos Fluidos . . . . .	p. 22
2.1.1	Equações de Euler . . . . .	p. 23
2.1.2	Equações de Navier-Stokes . . . . .	p. 28
2.2	Superfícies Correlacionadas . . . . .	p. 33
2.2.1	Análise de Hurst . . . . .	p. 33
2.2.2	Análise de Flutuação sem Tendência . . . . .	p. 35
2.2.3	Movimento Browniano . . . . .	p. 36
2.2.4	Autoafinidade . . . . .	p. 38
2.2.5	Movimento Browniano Fracionário . . . . .	p. 40
2.2.6	Método de <i>Fourier Filtering</i> . . . . .	p. 42
2.3	Equações de Fluxo Macroscópico . . . . .	p. 46
2.3.1	Lei de Darcy . . . . .	p. 49
2.3.2	Equação de Forchheimer . . . . .	p. 51
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	p. 56
3.1	Dinâmica de Fluidos Computacional . . . . .	p. 56
3.2	Métodos de Discretização . . . . .	p. 57
3.3	Geração das Superfícies . . . . .	p. 60
3.4	Discretização do Espaço . . . . .	p. 61

3.5	Solução Numérica . . . . .	p. 65
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	p. 68
4.1	Escoamento em Fraturas Bidimensionais . . . . .	p. 69
4.1.1	Campo de Pressão (2D) . . . . .	p. 69
4.1.2	Resistência Hidráulica (2D) . . . . .	p. 70
4.1.3	Campo de Velocidade (2D) . . . . .	p. 72
4.1.4	Flutuações da Velocidade (2D) . . . . .	p. 75
4.2	Escoamento em Fraturas Tridimensionais . . . . .	p. 77
4.2.1	Campo de Pressão (3D) . . . . .	p. 77
4.2.2	Resistência Hidráulica (3D) . . . . .	p. 77
4.2.3	Campo de Velocidade (3D) . . . . .	p. 81
4.2.4	Canais Preferenciais (3D) . . . . .	p. 83
<b>5</b>	<b>Considerações e Perspectivas</b>	p. 89
	<b>Referências</b>	p. 91

# 1 Introdução

O fenômeno de escoamento de fluido através de estruturas irregulares, como meios porosos e meios geológicos fraturados, tais como reservatórios de água e hidrocarbonetos, pode ser considerado um campo de pesquisa muito importante em várias áreas da Física e da Engenharia, estando presente principalmente na Engenharia de Petróleo.

Na indústria do petróleo existem, pelo menos, dois problemas básicos. O primeiro é encontrar o petróleo no subsolo e o segundo é retirá-lo de maneira eficiente. É necessário estudar os problemas ligados a esses processos, uma vez que novas reservas de petróleo precisam ser descobertas e novos tipos de reservatórios precisam ser explorados, tais como, reservatórios com petróleo altamente viscoso, reservatórios em rochas fraturadas e reservatórios do Pré-Sal. Devido ao uso contínuo do petróleo, grande parte das reservas petrolíferas existentes encontram-se em declínio de produção [3]. Neste sentido, é necessário investigar em detalhes o escoamento de fluidos em reservatórios fraturados, permitindo a caracterização de reservatórios de petróleo, em termos de suas propriedades hidrodinâmicas, garantindo assim uma produção mais eficiente.

Os progressos realizados no estudo da morfologia das fraturas nos últimos anos revelaram um grande número de questões básicas a serem respondidas neste campo de pesquisa. O escoamento de um fluido em fraturas é um problema que tem sido objeto de muitos estudos teóricos, computacionais, e experimentais e ainda está longe de ser completamente compreendido [4]. Esse problema ganha mais relevância no caso de reservatórios de hidrocarbonetos fraturados [5]. Para o Brasil estudos com esse foco são estratégicos porque as maiores reservas de petróleo descobertas recentemente em nosso país estão na camada de Pré-Sal [6], que são compostos por rochas carbonáticas altamente heterogêneas e esses reservatórios são normalmente fraturados [7]. Além disso pelo menos 20% das reservas mundiais de óleo estão em reservatórios naturalmente fraturados [8], e portanto, estudos desse tipo são extremamente importantes.

Um reservatório fraturado é aquele onde as fraturas ocorrem naturalmente, devido às



interações das tensões atuantes no subsolo ou são induzidas através da perfuração, e que possuem um efeito significativo no escoamento dos fluidos no reservatório aumentando, por exemplo, a permeabilidade do mesmo. Fraturas e falhas naturais são as principais vias de migração e produção de hidrocarbonetos em muitos reservatórios. Infelizmente, essas também podem atuar como canais para o surgimento de cones de água e gás, que é o processo no qual o gás da capa (parte superior de um reservatório de petróleo saturado, cujos poros são preenchidos por gás livre e água) ou a água de fundo (localizada abaixo da zona de óleo, formando um aquífero associado ao reservatório) se infiltram na zona de perfuração na área próxima ao poço e reduz a produção de petróleo [9]. O conhecimento dessas fraturas e suas condutividades hidráulicas em relação às tensões das rochas ajuda engenheiros e geocientistas a otimizar o desempenho dos reservatórios e poços [10].

O impacto da morfologia do canal (ou fratura) no escoamento de um fluido através dele tem sido estudado por muitos pesquisadores [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. A superfície de uma única fratura parece razoavelmente lisa, com exceção de alguma aspereza superficial aleatória. Tal fato sugere que o escoamento de Poiseuille em um canal liso é um modelo apropriado para o escoamento de fluidos [21]. Por conta disso, o modelo de reservatório fraturado que é normalmente utilizado em simulações nessas estruturas é o modelo de placas paralelas para uma única fratura, um modelo mais simples onde as fraturas são modeladas com uma abertura média [10]. No entanto, simulações numéricas [22] indicam que esta visão tradicional da rocha fraturada como um canal liso não é adequada para descrever o escoamento de fluidos, mesmo em baixas velocidades. Pois determinar a abertura da fratura não é simples.

A irregularidade de uma superfície (rugosidade [23]) pode ser definida em termos da distribuição de suas alturas ou a forma destas [24]. A morfologia de um reservatório fraturado está fortemente relacionada com o arranjo de uma rede de fraturas naturais. As propriedades morfológicas de fraturas em rochas podem ter uma influência significativa sobre o comportamento do escoamento através das mesmas. Métodos empíricos e estatísticos têm sido propostos para caracterizar a rugosidade dessas superfícies, na tentativa de vinculá-los ao comportamento hidromecânico das fraturas. Estes métodos são incapazes de incorporar adequadamente o efeito da geometria da fratura no comportamento do escoamento do fluido [25].

O processo de escoamento em meios fraturados envolve uma combinação de fenômenos em diferentes escalas. Em nível microscópico, o transporte do fluido é efetuado através do espaço entre os poros existentes na rocha [26]. Este problema tem sido investi-

gado pela comunidade científica por meio de modelos que tratam os poros como uma rede aleatória, e conceitos de teoria da percolação são utilizados para resolver o transporte de fluidos [21]. Macroscopicamente, o fluido escoar através de canais rugosos tais como as fraturas e esta é, em muitos casos, a escala dominante. Entender o escoamento através de fraturas é um pré-requisito para a investigação e modelagem de casos mais complexos, tais como o escoamento através de redes macroscópicas fraturadas. Outra abordagem do processo de transporte em sistemas geológicos, o transporte de partículas carregadas por um fluido, também requer um conhecimento adequado acerca das propriedades de escoamento bem como das propriedades estatísticas do campo de velocidades no interior de fraturas.

A caracterização das propriedades em fraturas de rochas pode ser realizada de duas formas: na escala de uma única fratura; e considerando uma rede de fraturas interconectadas. O primeiro caso é aplicado quando se leva em consideração o fato de que a fratura não é somente um par de placas paralelas, como foi proposto em muitos estudos destes meios [27, 28]. A superfície interna de uma fratura é geralmente áspera, e esta aspereza pode ter forte influência sobre as propriedades do escoamento. Já o segundo caso é utilizado quando se tem uma topologia complexa. Em particular, a orientação das fraturas não é completamente aleatória pois, geralmente, há alguma correlação entre as orientações de fraturas próximas em quaisquer conjuntos rochosos, dependendo da história da rocha [21].

A topologia da rede de fraturas reflete a história geológica do reservatório. A geometria das conexões entre as fraturas é determinada pelos mecanismos envolvidos na formação das mesmas. A morfologia das fraturas seguem certas leis de escala observadas pela primeira vez em meados dos anos oitenta [29, 30, 31], quando pesquisadores mostraram que as geometrias comuns resultantes da conexão de fraturas possuem propriedades estatísticas invariantes sob transformações anisotrópicas sendo caracterizadas como superfícies auto-afins. As propriedades do escoamento no interior da fratura são fortemente influenciadas pela geometria rugosa bem como pela conexão entre as fraturas e, conseqüentemente, a característica auto-afim reflete-se nas propriedades de escala do escoamento. Propriedades fractais de meios porosos e rochas fraturadas têm atraído atenção considerável [32]. Fractais auto-afins são utilizados para descrever sistemas que possuem diferentes propriedades de invariância de escala, paralela e perpendicularmente à superfície. Isto é, redimensionar o vetor no plano  $\mathbf{r}$  por  $\lambda\mathbf{r}$  requer que, para a escala fora do plano,  $z$  seja reescalado por  $\lambda^H z$  para a superfície permanecer estatisticamente inalterada, com  $H$  sendo o expoente da rugosidade, também chamado de expoente de Hurst.

No início dos anos noventa, foi sugerido que, para fraturas em rochas,  $H$  é universal e tem um valor de 0.8 [32, 33, 34, 35, 36] constante para diferentes tipos de rochas fraturadas naturais ou artificiais. Outros valores do expoente de Hurst podem ocorrer, dependendo do material e como a fratura foi produzida [37], sugerindo mais de uma classe de universalidade. Entretanto, estudos cuidadosos indicam uma não-universalidade e, dependendo do tipo de material fraturado, o expoente da rugosidade pode assumir dois valores distintos,  $H = 0.8$  para materiais como vidro, cimento e granito [15, 33, 34, 38] e  $H = 0.5$  para arenitos [37], calcita [39] e esferas de vidro [40], entretanto, [41] analisaram dados extensivos para uma variedade de juntas de rochas e relataram valores não universais do expoente de rugosidade  $H$  no intervalo  $0 < H \leq 0.85$ . As simulações computacionais de [41] indicaram que o expoente da rugosidade também é fortemente dependente da anisotropia da rocha, que é obviamente prevalente.

O escoamento em fraturas auto-afins foi discutido pela primeira vez por Roux *et al.* [42]. Nesse trabalho eles consideraram uma falha de fratura consistindo de duas paredes correspondentes que foram movidas ao longo do plano da fratura uma em relação à outra. Se o movimento é na direção  $x$ , então – devido à auto-afinidade da falha – a amplitude da falha será proporcional a  $x^H$ . Foi afirmado em [42] que a permeabilidade de uma falha de fratura bidimensional seria dimensionada como  $x^{2H}$ , com base no uso da auto-afinidade para determinar as propriedades de dimensionamento de uma largura de canal efetiva. No entanto, estudos numéricos de Gutfraind *et al.* [43, 44] usando o *Lattice Gas Method*, demonstram que a permeabilidade deve ser controlada pela localização onde a amplitude da fratura é a menor, ou seja, o gargalo mais estreito da fratura. Este efeito de gargalo foi estendido em canais de fratura tridimensionais introduzindo caminhos ou barreiras críticas em [45, 46]. Foi encontrado que para os números de Reynolds pequenos, a permeabilidade apresenta três regimes diferentes de escala em função da abertura mínima do canal. Em uma faixa intermediária de aberturas, para canais tridimensionais, a permeabilidade escala com  $b_c^{2.25}$  para  $H = 0.8$  e  $b_c^{2.16}$  para  $H = 0.3$ , onde  $b_c$  é uma definição de abertura equivalente.

A permeabilidade de fraturas rugosas auto-afins com uma ampla faixa de aberturas foi investigada analiticamente e confirmada através de simulações numéricas usando o Método *Lattice-Boltzmann* [22, 47]. O escoamento em superfícies fraturadas auto-afins, onde as duas fraturas correspondentes são separadas por uma distância  $w$  mas sem qualquer movimento relativo no plano da fratura ( $x = 0$ ), foi previamente estudado em fraturas bidimensionais por Skjetne *et al.* [48] para o caso em que o expoente de Hurst é  $H = 0.8$ , com o número de Reynolds ( $Re$ ) variando de 0 a 52. Eles identificaram três regimes

de escoamento: primeiro, o regime em que a lei de Darcy é aplicável; segundo, o fraco regime de inércia em que a lei de Darcy é representada por uma correção da terceira ordem; terceiro, o forte regime de inércia onde a relação empírica Forchheimer entre o gradiente hidráulico e a velocidade se mostrou aplicável. Os autores mostraram que a baixas velocidades, as seções mais estreitas da fratura governavam a permeabilidade efetiva. Além disso, o campo de fluxo preenchia a maior parte da seção transversal de fratura em baixas velocidades. À medida em que o número de Reynolds é aumentado, o campo de fluxo diminuiu e as zonas de recirculação apareceram próximo a superfície. O termo linear na equação de Forchheimer foi relacionado às seções mais estreitas da fratura e o termo quadrático foi atribuído ao impacto do campo de fluxo em paredes de fratura onde houve mudanças significativas na direção do campo de fluxo causado por asperezas na parede da fratura.

Sarkar *et. al.* [49] abordaram a questão desafiadora de caracterizar as propriedades hidráulicas de fraturas estudando o escoamento de fluido através de fraturas usando simulações numéricas. Eles realizaram simulações de escoamento laminar viscoso para um fluido newtoniano com modelos de fratura bidimensionais e tridimensionais. Para isso, usaram a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD), do software comercial *Fluent*, utilizando um esquema de discretização com base no método de volumes finitos. Foram analisados os efeitos da geometria da fratura sobre o escoamento e o seu efeito sobre os caminhos de fluxo.

Giacomini *et. al.* [50] estudaram os fluxos, no regime de estado estacionário em um meio poroso. Eles aplicaram a lei de Darcy para uma rocha porosa saturada e desenvolveram um modelo numérico para investigar a anisotropia do fluxo através de uma fratura natural. Usando o Método de Elementos Finitos compararam seus resultados de estudos numéricos com testes de estresse de cisalhamento mecânico proposto originalmente por um estudo anterior [38].

Mais recentemente, os efeitos não lineares no escoamento de fluidos através de canais de fratura auto-afim foram abordados por Wang *et. al.* [51] também usando o Método *Lattice-Boltzmann*. Foi investigado os impactos da rugosidade superficial no escoamento de fluido não linear através de fraturas de rocha auto-afins tridimensionais, cuja rugosidade de superfície original é decomposta em rugosidade primária (ondulação em grande escala) e rugosidade secundária (a desigualdade em pequena escala) usando a técnica de *Wavelets* [52]. Os resultados das simulações mostram que a rugosidade primária controla principalmente a distribuição de pressão e os caminhos de fluxo na fratura em grande

escala, enquanto a rugosidade secundária determina as propriedades não-lineares do escoamento de fluido em uma escala local. À medida que o gradiente de pressão aumenta, a rugosidade secundária aumenta a complexidade local da distribuição de velocidades, gerando e ampliando as regiões de fluxo de redemoinho e refluxo na proximidade das asperidades. Verificou-se que a lei de Forchheimer caracteriza bem o comportamento do escoamento não-linear em fraturas de diferentes rugosidades. Os efeitos inerciais induzidos pela rugosidade primária diferem apenas marginalmente em fraturas com o expoente de rugosidade  $H$  variando de 0.5 a 0.8. Além disso, foram examinados os efeitos da rugosidade da superfície na transmissividade, abertura hidráulica e tortuosidade dos caminhos de fluxo, demonstrando novamente o papel dominante da rugosidade secundária, especialmente para a transmissividade aparente e a abertura hidráulica equivalente em gradiente de alta pressão ou número elevado de Reynolds. Os resultados mostram que o início da não-linearidade ocorre em números de Reynolds que aumentam monotonicamente com o expoente da rugosidade, mais intensamente para as fraturas secundárias.

Em trabalho posterior [53], o comportamento do escoamento em fraturas também foi investigado no regime laminar usando o Método *Lattice-Boltzmann* em canais de fratura bidimensionais. Foi analisado o efeito do aumento da rugosidade na abertura hidráulica efetiva, utilizando os parâmetros de Izbash e Forchheimer em função do número de Reynolds ( $Re$ ) variando de 0.01 a 500. O crescimento de características de fluxo complexas, tais como turbilhões perto da superfície da fratura, foi diretamente associado a alterações na rugosidade da superfície. O crescimento rápido de redemoinhos para valores de  $Re$  acima de 1 é seguido por um crescimento mais lento para valores de  $Re$  superiores, que sugeriu um modelo não linear de três zonas para fluxo em fraturas ásperas. Este modelo de três zonas, relaciona a condutividade hidráulica efetiva com o  $Re$ . O aumento da rugosidade da fratura levou a maiores volumes de redemoinhos e a uma menor condutividade hidráulica efetiva para os mesmos valores  $Re$ .

Huang *et. al* [54] investigaram os papéis da rugosidade da fratura, da tensão normal e da tensão de cisalhamento sobre as características do escoamento de fluido através de fraturas tridimensionais auto-afins. Uma série de testes sob diferentes tensões normais e de cisalhamento foram realizados em fraturas para analisar o comportamento da permeabilidade em relação à abertura de fratura. Os resultados mostram que tanto a abertura média quanto a permeabilidade da fratura aumentam com o incremento da rugosidade da superfície e a diminuição do estresse normal. Em relação à tensão de cisalhamento, no início, a permeabilidade aumenta notavelmente e, em seguida, torna-se gradualmente constante.

Estritamente falando, o conceito de permeabilidade como um índice global para escoamento em fraturas deve ser restrito a condições de fluxo viscoso (linear). Mais precisamente, a lei de Darcy só deveria ser aplicável quando o número de Reynolds é suficientemente baixo. É bem conhecido, no entanto, que o papel das forças inerciais (convecção) no escoamento em meios desordenados é importante, e esse deve ser examinado no âmbito do regime laminar [55, 56, 57, 58]. No entanto, a questão de como a permeabilidade e os efeitos não-lineares no escoamento através dos canais de fratura dependem do expoente da rugosidade  $H$  ainda não está clara. Além disso, é desejável caracterizar uma transição do comportamento linear para o comportamento não-linear em termos das correlações espaciais na velocidade do fluido em fraturas auto-afins. Isso permitiria elucidar características do escoamento através de geometrias fraturadas que não foram estudadas anteriormente.

Este trabalho tem como objetivo estudar, através de simulação direta das equações de Navier-Stokes, o comportamento de fluidos em superfícies rugosas com geometria auto-afim para diferentes expoentes de rugosidade e em diferentes regimes de número de Reynolds. Será apresentada uma abordagem macroscópica do processo de escoamento ocorrendo através das superfícies, denominadas aqui como fraturas. A topologia da superfície fraturada será descrita considerando que tal estrutura possui propriedades estatísticas invariantes sob transformações de escala anisotrópicas. Será mostrado que as propriedades do campo de velocidade do escoamento no interior da fratura são fortemente influenciadas pela topologia da fratura. O fluido é definido como contínuo e os resultados são analisados em termos da lei de Forchheimer para cada regime de escoamento através das fraturas auto-afins. Investigamos o quanto o fluxo se desvia da lei de Darcy no fluxo laminar, focando nos efeitos das correlações de longo alcance. Confirmamos que a descrição física subjacente a uma equação cúbica fornece uma correlação legítima para o fluxo na fratura em uma ampla faixa de número de Reynolds. Demonstramos também que é possível caracterizar essa transição do comportamento linear para o não-linear em termos do expoente de Hurst e relacionamos os efeitos com a canalização no meio poroso devido a forças inerciais. Para chegar a esses resultados, foram criadas fraturas artificiais para simular numericamente o escoamento de fluidos sobre cada uma delas. Os softwares *Fluent* e *OpenFOAM* foram utilizados para realização das simulações numéricas neste estudo. Simulações numéricas, tanto bidimensionais quanto tridimensionais, foram realizadas assumindo o regime de fluxo laminar. Os resultados buscam demonstrar como a análise detalhada da geometria da superfície pode proporcionar informações valiosas sobre o comportamento de escoamento superficial.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Equações Básicas da Dinâmica dos Fluidos

A Mecânica dos Fluidos é um ramo da Física que estuda as forças que são aplicadas sobre os líquidos, gases e plasmas. A Mecânica dos Fluidos pode ser dividida em três categorias. A Estática dos Fluidos, que diz respeito ao estudo de Fluidos em repouso; a Cinemática dos Fluidos, que diz respeito ao estudo de fluidos em movimento; e a Dinâmica dos Fluidos, que diz respeito ao estudo do efeito das forças nos escoamentos de fluidos.

Todos os fluidos são compressíveis até certo ponto, isto é, mudanças na pressão ou temperatura resultarão em mudanças na densidade. No entanto, em muitas situações, as mudanças na pressão e temperatura são suficientemente pequenas para que as mudanças na densidade possam ser negligenciadas. Nesse caso, o fluido pode ser modelado como um fluido incompressível [59, 60]. Nesta tese, considerou-se apenas fluidos incompressíveis.

Massey e Ward-Smith [61] apresentam uma definição para a viscosidade dinâmica, afirmando que todos os fluidos oferecem resistência a qualquer força que tenda a fazer com que uma camada se mova sobre outra. A viscosidade, frequentemente representada por  $\mu$ , é a propriedade do fluido responsável por essa resistência. Encontra-se empiricamente que, para uma grande classe de fluidos, a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional ao gradiente de velocidade tendo a viscosidade dinâmica como constante de proporcionalidade. Tais fluidos são reconhecidos como fluidos newtonianos. Nesta tese, considerou-se apenas fluidos newtonianos.

A formulação de equações diferenciais parciais do escoamento de fluido é baseada na hipótese do contínuo e expressa as leis fundamentais de conservação da física. Da perspectiva microscópica, um fluido consiste em moléculas que estão individualmente em um estado de movimento aleatório. Pela hipótese do continuum, apenas o movimento (macroscópico) em larga escala dessas moléculas é percebido; portanto, presume-se que as várias propriedades do fluido em movimento variam continuamente com a posição e o

tempo. Normalmente, as propriedades físicas de interesse são a densidade, a pressão, a temperatura e a velocidade (ou o momento). As equações descritas nesta tese partem da suposição de que o fluido é um continuum e que o mesmo obedece as leis de Newton, sem o intuito de descrever as interações entre as moléculas do fluido.

Ao se derivar as equações governantes da dinâmica dos fluidos, é postulado que a massa, o momento e a energia são conservados. A fim de derivar as formulações matemáticas das leis de conservação correspondentes, consideramos um volume de controle fechado  $W$  no domínio fluido, que é fixado no espaço e no tempo em um sistema de coordenadas Euleriano. O limite de  $W$  é uma superfície orientável  $\partial W$ , com o vetor unitário  $\mathbf{n}$  normal a  $\partial W$  apontando do interior de  $W$  para fora.

### 2.1.1 Equações de Euler

Seja  $D$  uma região do espaço bidimensional, ou tridimensional, preenchida com um fluido. Nosso objetivo é descrever o seu movimento. Seja  $\mathbf{x} \in D$  um ponto em  $D$  e considere a partícula de fluido movendo-se através de  $\mathbf{x}$  no tempo  $t$ . Em relação às coordenadas euclidianas padrão no espaço, escrevemos  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Imagine uma partícula no fluido. Essa partícula percorre uma trajetória bem definida. Seja  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  a velocidade da partícula do fluido que está se movendo através de  $\mathbf{x}$  no tempo  $t$ . Assim, para cada tempo fixo,  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial em  $D$ , como ilustra a Figura 1, que será chamado de campo de velocidade (espacial) do fluido.

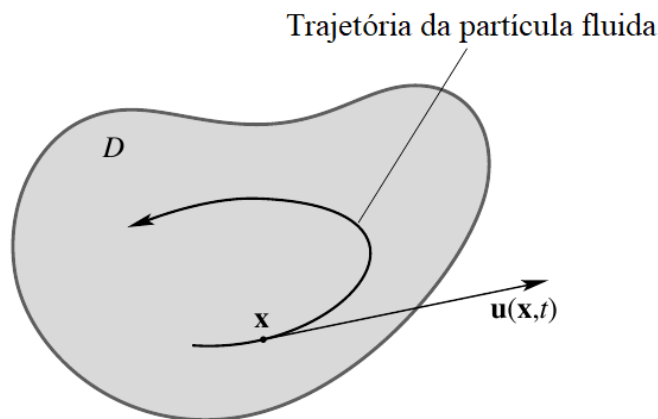


Figura 1: Partícula fluída escoando com velocidade  $\mathbf{u}$  em uma região do espaço  $D$ .

Para cada instante de tempo  $t$ , assumimos que o fluido tem uma densidade bem definida  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Assim, se  $W$  é um volume de controle em  $D$ , a massa do fluido em  $W$  no instante  $t$  é dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2.1)$$



onde  $dV$  é um elemento de volume no espaço.

Vamos supor que as funções  $\mathbf{u}$  e  $\rho$  são suaves o suficiente para que as operações padrões de cálculo possam ser executadas nelas. A suposição de que  $\rho$  existe é uma aproximação para o continuum. Claramente, essa não se sustenta se a estrutura molecular da matéria é levada em consideração. Para a maioria dos fenômenos macroscópicos que ocorrem na natureza, acredita-se que essa suposição é extremamente precisa.

Três princípios básicos servem de alicerce para a derivação das equações governantes da dinâmica de um elemento de fluido. O primeiro afirma que a massa não é criada, nem destruída. O segundo diz que a taxa de mudança do momento de uma porção do fluido é igual à força aplicada nele (segunda lei de Newton). E por fim, o princípio que afirma que a energia não é criada, nem destruída.

### Conservação da massa

Seja  $W$  uma sub-região fixa de  $D$  ( $W$  não muda com o tempo). A taxa de mudança de massa em  $W$  é

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.2)$$

Chamamos de  $\partial W$  o limite de  $W$ , assumido como suave; seja  $\mathbf{n}$  a normal definida em pontos de  $\partial W$ ; e definimos  $dA$  como sendo o elemento de área em  $\partial W$ . A vazão volumétrica em  $\partial W$  por unidade de área é  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  e a vazão mássica por unidade de área é  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  (Figura 2).

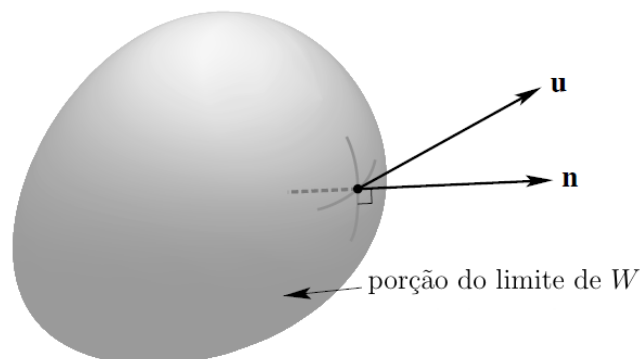


Figura 2: A massa que cruza o limite  $\partial W$  por unidade de tempo é igual à integral da superfície de  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  sobre  $\partial W$ .

A lei de conservação de massa afirma que a taxa de acumulação de massa em um volume  $W$  é exatamente balanceada pelo fluxo de massa através de seu limite  $\partial W$  expressada

como

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.3)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido. A integral de superfície na Equação 2.3 pode ser convertida em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência de Gauss, com isso a Equação 2.3 pode ser escrita como

$$\int_W \left[ \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad (2.4)$$

que dá a forma integral de conservação de massa. A partir de agora assumimos que todas as funções consideradas são contínuas e suficientemente diferenciáveis. Como  $W$  é arbitrário,

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.5)$$

Por simples análise vetorial, a Eq. 2.5 implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

onde

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (2.8)$$

é chamada de derivada material ou derivada substancial de  $\rho$ . A derivada material é frequentemente usada na dinâmica de fluidos, e especifica a taxa de mudança de uma quantidade física ao se mover com o fluxo de fluido.

As Equações 2.5 e 2.7 são frequentemente referidas como formas da equação de continuidade. Se o fluido é incompressível, a densidade  $\rho$  é constante em relação ao espaço e ao tempo, portanto  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  e

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

que é a condição de incompressibilidade para o campo de velocidade.

### Conservação do momento

Seja  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  um caminho seguido por uma partícula do fluido, de modo que o campo de velocidade seja dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t). \quad (2.10)$$

A aceleração de uma partícula do fluido é dada por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t). \quad (2.11)$$

Pela regra da cadeia, a equação acima torna-se

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

ou seja,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$  é um operador. Em geral, para qualquer função  $f(\vec{r}, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (2.14)$$

Para qualquer continuum, as forças que atuam em uma parcela  $W$  do material são de dois tipos. Primeiro, há forças de tensão, pelas quais uma parte do material é acionada por forças em toda a sua superfície pelo resto do contínuo. Em segundo lugar, existem forças externas, ou de corpo, como a gravidade ou um campo magnético, que exercem uma força por unidade de volume no contínuo. O claro isolamento das forças superficiais do estresse em um contínuo é geralmente atribuído a Cauchy. Este tipo de força é também chamado de força de volume ou de corpo.

Um fluido ideal é definido como aquele em que para qualquer movimento existe uma função  $p(\mathbf{r}, t)$ , chamada de pressão, tal que se  $\partial W$  é uma superfície no fluido com vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , a força de tensão exercida nessa superfície por unidade de área em  $\mathbf{r} \in \partial W$  no instante  $t$  é  $-p(\mathbf{r}, t)\mathbf{n}$ . Note que a força atua na direção de  $\mathbf{n}$  sendo perpendicular à superfície  $\delta W$ .

Note que a força está na direção  $\mathbf{n}$  e que a força atua ortogonalmente à superfície  $W$ ; isto é, não há forças tangenciais (Figura 3).

Intuitivamente, a ausência de forças tangenciais implica que não há como rotações iniciarem-se neste fluido, ou uma vez que elas estejam presentes, permanecerão *ad infinitum*. Obviamente, um fluido ideal não pode descrever simples fenômenos físicos presentes na dinâmica de fluidos. Não obstante, o fluido ideal de Euler pode dar ideia de uma classe restrita de outros fenômenos.

Se  $W$  é uma região no fluido num instante particular  $t$ , a força total exercida sobre o

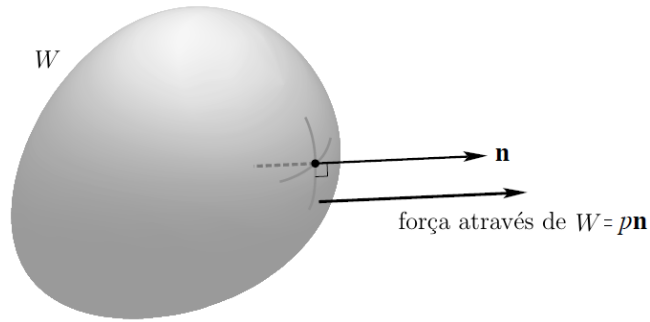


Figura 3: Forças de pressão através de uma superfície  $W$ .

fluido dentro de  $W$  por meio da tensão em seu limite é

$$\mathbf{F}_{\partial W} = - \int_{\partial W} p \mathbf{n} dA \quad (2.15)$$

Seja  $\mathbf{e}$  qualquer vetor fixo no espaço, o Teorema da Divergência dá

$$\mathbf{F}_{\partial W} \cdot \mathbf{e} = - \int_{\partial W} p \mathbf{e} \cdot d\mathbf{A} = - \int_W \nabla \cdot (p \mathbf{e}) dV = - \int_W (\nabla p) \cdot \mathbf{e} dV. \quad (2.16)$$

Tal que

$$\mathbf{F}_{\partial W} = - \int_W (\nabla p) dV. \quad (2.17)$$

Se  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  for uma dada força de corpo por unidade de massa que também atua em  $W$ , a força total na ausência de forças viscosas é

$$\mathbf{F} = \int_W \rho \mathbf{f} dV \quad (2.18)$$

A força por unidade de volume para qualquer elemento de fluido é  $-\nabla p + \rho \mathbf{f}$ . De acordo com a segunda lei de Newton, a força atuando num elemento de fluido tem de ser igual à variação do momento linear desse elemento em relação ao tempo, assim

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

A Eq. 2.19 juntamente com a Eq. 2.7 são as equações de Euler.

### Conservação da energia

Para um fluido movendo-se num domínio  $D$ , com campo de velocidades  $\mathbf{u}$ , a energia cinética contida em um volume representativo  $W \subset D$  é

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_W \rho |\mathbf{u}|^2 dV \quad (2.20)$$

onde  $\|\mathbf{u}\|^2 = (u^2 + v^2 + w^2)$  é o comprimento quadrado da função vetorial  $\mathbf{u}$ . Nós assumimos que a energia total do fluido pode ser escrita como

$$E_{total} = E_{cinetica} + E_{interna} \quad (2.21)$$

onde  $E_{interna}$  é a energia interna, que é a energia que não podemos “ver” em uma escala macroscópica, e deriva de fontes como potenciais intermoleculares e vibrações moleculares internas. Se a energia for bombeada para o fluido ou se permitirmos que o fluido funcione, a  $E_{total}$  mudará.

A taxa de mudança da energia cinética de uma porção móvel  $W_t$  de fluido é calculada usando o Teorema de Transporte [62]:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{1}{2} \int_W \rho \frac{D}{Dt} |\mathbf{u}^2| dV = \int \mathbf{u} \cdot \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_W \rho \left[ \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right] \quad (2.22)$$

mas,  $dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ , e portanto

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \int_W \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_W \mathbf{u} \cdot (\nabla p) dV, \quad (2.23)$$

comparando a Eq. 2.23 e a Eq. 2.22 tem-se

$$\rho \left[ \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \right] = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - \mathbf{u} \cdot (\nabla p). \quad (2.24)$$

que é a mesma Eq. 2.19. As equações de Euler são válidas quando não há força viscosa e a energia é conservada.

## 2.1.2 Equações de Navier-Stokes

Definimos um fluido ideal como aquele em que as forças através de uma superfície eram normais àquela superfície. Agora consideramos mais fluidos gerais. Considere a situação mostrada na Figura 4. Aqui o campo de velocidade  $\mathbf{u}$  é paralelo a uma superfície  $S$ , mas salta em magnitude de repente ou rapidamente quando cruzamos  $S$ . Se as forças forem todas normais a  $S$ , não haverá transferência de momento entre os volumes de fluido denotados por  $W$  e  $W'$  em Figura 4. No entanto, se nos lembrarmos da teoria cinética da matéria, vemos que isso é realmente irracional. Moléculas mais rápidas de cima  $S$  difundirão através de  $S$  e darão impulso ao fluido abaixo, e, da mesma forma, moléculas mais lentas abaixo de  $S$  se difundirão por  $S$  para retardar o fluido acima de  $S$ . Para mudanças razoavelmente rápidas de velocidade em curta distância, este efeito é importante.

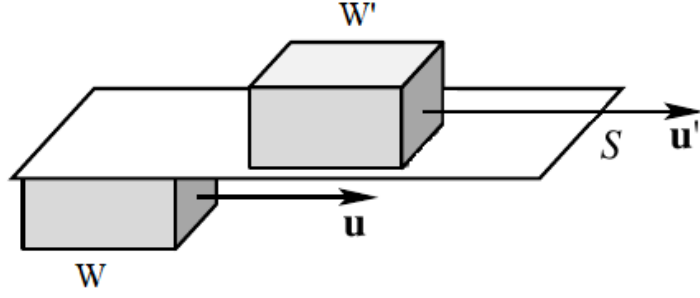


Figura 4: Dois elementos de fluido movendo-se em contato com uma superfície  $S$ .

Vamos supor, agora, que as forças de contato possam ser escritas como

$$\mathbf{F} = \oint_S [-p(\mathbf{r}, t) + \mathcal{T}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{A} \quad (2.25)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o tensor de tensão de cisalhamento. Aqui, o produto  $\mathcal{T} \cdot d\mathbf{A}$  não é necessariamente paralelo ao vetor normal  $d\mathbf{A}$ . A segunda lei de Newton afirma que a taxa de mudança de qualquer porção  $W$  do fluido que se move é igual à força atuando nela:

$$\mathbf{F}_W = \oint_{\delta W} \sigma \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.26)$$

onde  $\sigma$  é o tensor de tensão de Cauchy [62]. Por definição  $\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathcal{T}}^{(\hat{\mathbf{n}})}$  é o vetor de tensão (força por unidade de área) atuando sobre uma superfície com normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . É possível mostrar que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Temos que  $\mathcal{T}_j^{(\hat{\mathbf{n}})} = \sigma_{ij}n_i$  é a componente  $j$  de  $\mathcal{T}^{\hat{\mathbf{n}}}$ .

Em geral

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \sigma_n + \mathcal{T} \quad (2.27)$$

onde  $\sigma_n$  é a tensão normal e  $\mathcal{T}$  é a tensão de cisalhamento, ou tangencial.

Temos que  $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji}$ . Para um fluido em equilíbrio hidrostático  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ . Logo, a segunda lei de Newton fica

$$\oint_{\delta W} \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \oint_V \rho \vec{F} dV = \oint_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV \quad (2.28)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f} \quad (2.29)$$

escrevendo

$$\sigma_{ij} = -p_{ij}\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij} \quad (2.30)$$

temos portanto que

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \mathcal{T} + \rho \vec{f} \quad (2.31)$$

$\mathcal{T}$  deve ser simétrico, o que pode ser deduzido da conservação do momento angular.

Neste ponto, supõe-se que  $\mathcal{T}$  tem uma dependência linear com o gradiente de velocidade  $\nabla \mathbf{u}$ . Também é suposto que  $\mathcal{T}$  seja invariante sob rotações de corpo rígido, desde que não há difusão de momento quando o fluido sofre uma rotação de corpo rígido:  $\mathcal{T}(\mathcal{U} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathcal{U}^{-1}) = \mathcal{U} \cdot \mathcal{T}(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathcal{U}^{-1}$ , com  $\mathcal{U}$  sendo uma matriz ortogonal.

Como  $\mathcal{T}$  é simétrico, só pode depender da parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ , isto é, da taxa de deformação,  $\dot{\epsilon}$ . Como  $\mathcal{T}$  é uma função linear de  $\dot{\epsilon}$  e, ainda,  $\dot{\epsilon}$  e  $\mathcal{T}$  comutam, eles podem ser simultaneamente diagonalizados. Assim, os autovalores de  $\mathcal{T}$  são funções lineares dos auto-valores de  $\dot{\epsilon} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ . As únicas funções lineares que são simétricas neste sentido são da forma

$$\tau_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i, \quad (2.32)$$

onde  $\tau_i$  são os autovalores de  $\mathcal{T}$  e  $d_i$  são os de  $\dot{\epsilon}$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes. Assim é possível escrever o tensor de tensão como

$$\mathcal{T} = \lambda(\nabla \mathbf{u})\mathcal{I} + 2\mu\dot{\epsilon}, \quad (2.33)$$

onde  $\mathcal{I}$  é a identidade. Ainda, escrevendo separadamente o traço num só termo, tem-se

$$\mathcal{T} = 2\mu \left[ \dot{\epsilon} - \frac{1}{3}(\nabla \mathbf{u})\mathcal{I} \right] + \zeta(\nabla \mathbf{u})\mathcal{I} \quad (2.34)$$

onde  $\mu$  é chamado primeiro coeficiente da viscosidade e  $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  é chamado segundo coeficiente da viscosidade.

Aplicando a segunda Lei de Newton e o Teorema da Divergência obtém-se:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.35)$$

A equação 2.35 e a equação 2.7 são chamadas de Equações de Navier Stokes. Estas equações descrevem completamente o escoamento de um fluido Newtoniano compressível.

Para escoamentos incompressíveis, o conjunto completo de equações formam as equações de Navier-Stokes é dado por:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu\nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.37)$$

Em uma fronteira sólida em repouso a velocidade normal do fluido é zero, pois o mesmo não atravessa a fronteira do sólido. É comum, ainda, utilizar-se da condição da velocidade tangencial à fronteira sólida como sendo também zero (condição chamada condição de não-deslizamento nas paredes). Assim,  $\mathbf{u} = 0$  em  $\partial W$ . A necessidade matemática de mais condições de contorno aparece da necessidade de unicidade das soluções para uma dada condição inicial.

As Equações 2.36 e 2.37 são as equações governantes mais frequentemente encontradas na dinâmica de fluidos que foram derivadas independentemente por Claude-Louis Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903). Esta equação foi derivada primeiro por Navier usando argumentos moleculares, e depois por Stokes para um *continuum*. O lado esquerdo de 2.36 corresponde à força de inércia. O primeiro termo no lado direito representa a força de pressão; o segundo, a força viscosa; e o terceiro, a força gravitacional. A viscosidade é uma propriedade física e, portanto, depende do estado termodinâmico do fluido. É sensível à temperatura em ambos os gases e líquidos, e relativamente insensível à pressão sob condições comumente encontradas, com exceção de pressões anormalmente grandes [63].

Em seguida, discutiremos algumas propriedades de escalonamento das equações de Navier-Stokes com o objetivo de introduzir um parâmetro (o número de Reynolds) que mede o efeito da viscosidade no fluxo.

Para um determinado problema, seja  $L$  um comprimento característico e  $U$  uma velocidade característica. Esses números são escolhidos de maneira um tanto arbitrária. Por exemplo, se considerarmos o fluxo através de uma esfera,  $L$  poderia ser o raio ou o diâmetro da esfera, e  $U$  poderia ser a magnitude da velocidade do fluido no infinito.  $L$  e  $U$  são apenas escalas de comprimento e velocidade razoáveis, típicas do fluxo à mão. Sua escolha então determina uma escala de tempo por  $T = L/U$ .

Podemos medir  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ , e  $t$  como frações dessas escalas, alterando as variáveis e introduzindo as seguintes quantidades sem dimensão

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \text{e} \quad t' = \frac{t}{T}. \quad (2.38)$$

A componente  $x$  da equação de Navier-Stokes (homogênea) incompressível é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \quad (2.39)$$



A mudança de variáveis produz

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'U)}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + Uu' \frac{\partial(u'U)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + Uv' \frac{\partial(u'U)}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + Uw' \frac{\partial(u'U)}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lx')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Ly')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lz')^2} \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{U^2}{L} \right] \left[ \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right] = \\ - \left[ \frac{U^2}{L} \right] \frac{\partial(p/(\rho_0 U^2))}{\partial x'} + \left[ \frac{U}{L^2} \right] \nu \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Equações semelhantes são válidas para os componentes  $y$  e  $z$ . Se combinarmos todos os três componentes e dividirmos por  $U^2/L$ , obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla \cdot \mathbf{p}' + \frac{\nu}{LU} \Delta' \mathbf{u}' \quad (2.42)$$

onde  $p' = p/(\rho_0 U^2)$ . Para um fluido incompressível,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.43)$$

As equações 2.42 são as equações de Navier-Stokes em variáveis adimensionais. Nós definimos o número Reynolds  $Re$  como sendo o número adimensional

$$Re = \frac{LU}{\nu} \quad (2.44)$$

O número de Reynolds significa a razão entre os valores característicos das forças inerciais e viscosas. As forças de inércia têm a forma  $\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$  enquanto que as forças viscosas de atrito são da forma de  $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}$ . Então, se  $u_0$  é a velocidade do escoamento e  $L$  é o comprimento característico do sistema, as forças inerciais são da ordem de  $u_0^2/L$  e as forças viscosas são da ordem de  $\frac{\mu}{\rho} u_0/L^2$ . Assim

$$Re \equiv \frac{\frac{u_0^2}{L}}{\frac{\mu}{\rho} \frac{u_0}{L^2}} = \frac{\rho u_0 L}{\mu} = \frac{LU}{\nu} \quad (2.45)$$

## 2.2 Superfícies Correlacionadas

### 2.2.1 Análise de Hurst

Harold Edwin Hurst criou uma metodologia estatística para distinguir séries correlacionadas de séries não correlacionadas e sistemas para identificar a persistência de tendências. Esse método ficou conhecido como análise de Hurst ou método R/S (*Rescaled Range Analysis*). Para isso, durante vários anos, Hurst tentou modelar o nível do rio Nilo com o objetivo de analisar o processo de armazenamento de água, no intuito de projetar um reservatório perfeito, que nunca se esvaziasse e nunca transbordasse (Figura 5). O objeto de estudo de Hurst foi a variação do volume das águas do lago africano Albert [1].

A metodologia criada por Hurst é bem conhecida e aceita em fenômenos que mostram memória por muito tempo. A metodologia baseou-se inicialmente na determinação do volume de um reservatório, sabendo qual é o seu fluxo de entrada de água  $\xi(t)$ , e considerando que o fluxo de saída seja igual à média de  $\xi(t)$ , definida por  $\langle \xi(t) \rangle$  [1].

O fluxo médio de entrada durante o período de tempo  $\tau$  é

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \quad (2.46)$$

A diferença acumulada  $X(t, \tau)$  entre o fluxo de entrada  $\xi(t)$  e sua média  $\langle \xi(t) \rangle$  é dada por:

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t \{ \xi(i) - \langle \xi \rangle_\tau \} \dots (1 \leq t \leq \tau). \quad (2.47)$$

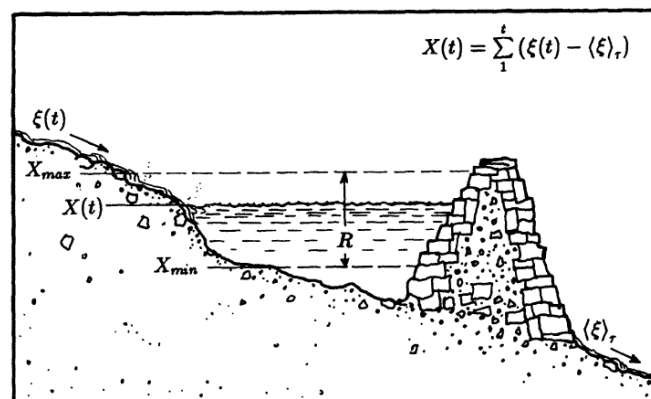


Figura 5: Representação de um reservatório de água com um fluxo de entrada  $\xi(t)$  e de saída  $\langle \xi(t) \rangle_\tau$ .  $X(t, \tau)$  representa a diferença acumulada de entrada e saída de água.  $R$  o volume do reservatório que o faz um reservatório ideal. Fonte: [1]

Hurst analisou a diferença entre os maiores e menores valores do fluxo acumulado

$X(t, \tau)$  durante o intervalo de tempo  $\tau$ . Essa diferença, definida como alcance  $R(\tau)$ , representa a capacidade indispensável de armazenamento que mantém o fluxo médio durante todo o período analisado (Figura 6), e pode ser calculada através de

$$R(\tau) = \max [X(t, \tau)]_{1 \leq t \leq \tau} - [\min X(t, \tau)]_{1 \leq t \leq \tau}, \quad (2.48)$$

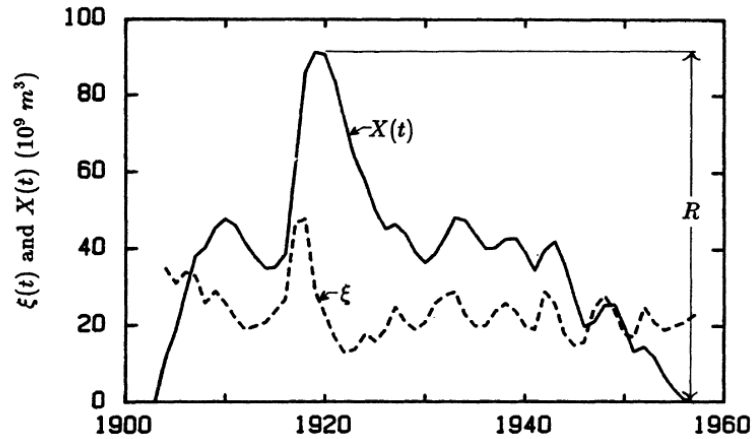


Figura 6: Volume anual (fluxo de entrada) do lago Albert  $\xi(t)$  (linha pontilhada) e a diferença acumulada  $X(t)$  (linha contínua).  $R$  representa o volume do reservatório para que nunca se esvazie ou transborde. Fonte: [1]

Hurst percebeu, após vários períodos de análise, que  $R(\tau)$  depende do fluxo  $\langle \xi(t) \rangle$ . Além disso, percebeu que tanto  $R(\tau)$  quanto  $\langle \xi(t) \rangle$  dependem do período  $\tau$ . Para finalizar, Hurst utilizou o desvio padrão do fluxo de entrada de água no reservatório como denominador de seu método. O desvio padrão é definido por

$$S = \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.49)$$

Hurst concluiu que a razão adimensional  $R/S$  possui uma dependência do período  $\tau$ , tomando como base vários registros de tempo. Esta relação empírica pode ser escrita como

$$\frac{R}{S} = \left( \frac{\tau}{2} \right)^H \quad (2.50)$$

onde  $H$  é chamado expoente de Hurst, e pode ser extraído a partir de observações.

O expoente de Hurst, que é uma grandeza adimensional, permite a comparação com outros fenômenos. Ele é também um parâmetro que descreve o comportamento de sistemas que são dependentes do tempo, compostos por um número muito alto de variáveis, sendo uma ferramenta capaz de caracterizar o grau de autossimilaridade de um processo, ou seja, é uma medida de correlação e persistência. Aplicando o logaritmo em ambos os

lados da equação 2.50, obtem-se:

$$\log_{10}(R/S) = H \log_{10}(\tau/2). \quad (2.51)$$

Traçando o gráfico de  $\log_{10}(R/S)$  em função de  $\log_{10}(\tau/2)$ , uma reta é obtida e a inclinação da mesma corresponde ao expoente de Hurst  $H$ .

O expoente de Hurst é o teste clássico para detectar memória em séries de dados. Hurst observou uma correlação nas séries analisadas e seus estudos deram origem à análise  $R/S$ , que permite definir o expoente de Hurst, também chamado de coeficiente de Hurst. O valor de  $H$ , que pode variar entre 0 e 1, permite classificar a série temporal em persistente ou antipersistente. Uma série que possui  $0.5 < H \leq 1$  exibe um comportamento de persistência [1]. Isso quer dizer que a um incremento na variável dependente é mais provável seguir-se um novo incremento, e que a uma diminuição na variável dependente é mais provável seguir-se uma nova diminuição. Uma série associada a  $0 \leq H < 0.5$  exibe um comportamento antipersistente, ou seja, a um aumento na variável dependente é mais provável seguir-se uma diminuição, e vice-versa. Uma série temporal associada a um processo aleatório decorrelacionado, como um movimento browniano regular, é caracterizada por  $H = 0.5$  [64]. As séries persistentes e antipersistentes possuem memória de longo alcance, enquanto que as não correlacionadas não possuem memória [65].

Nas superfícies fraturadas, o expoente de Hurst é limitado ao intervalo  $0 \leq H < 1$ , e se relaciona com as características geométricas do perfil. Este expoente foi utilizado para caracterizar as fraturas. Os valores do expoente de Hurst em fraturas reais dependem do material e a forma como a fratura foi produzida [21]. O valor do Expoente de Hurst  $H$  dá indicação sobre a natureza fractal da série de dados que representa a fratura. Para  $0 \leq H < 0.5$ , uma correlação positiva entre as variáveis (caso de persistência) e, para  $0.5 < H \leq 1$ , tem-se uma correlação negativa entre as variáveis (caso de antipersistência).  $H = 0.5$  corresponde a um movimento browniano, ou seja, tem-se um comportamento decorrelacionado entre as variáveis.

## 2.2.2 Análise de Flutuação sem Tendência

A Análise de Flutuação sem Tendência (Detrended Fluctuation Analysis – DFA) é uma técnica desenvolvida por Peng *et. al* [66] para quantificar com precisão as correlações de leis de potência de longo alcance incorporadas em séries não-estacionárias. O DFA tem sido muito utilizado para quantificar as correlações de longo alcance.

O método de DFA [67] pode ser utilizado para calcular o expoente de Hurst de uma série temporal através da eliminação das tendências que podem estar sobrepostas a um movimento browniano fracionário subjacente [68]. A técnica consiste em uma análise da raiz quadrada média modificada do caminho aleatório, projetada especificamente para detectar correlações de longo alcance em dados não-lineares ou não-estacionários.

No DFA, a média temporal da série temporal é subtraída da série original e, em seguida, é integrada. Dada uma série  $\xi_i$ , define-se

$$y(k) = \sum_{t=1}^k [\xi_t - \langle \xi \rangle] \quad (2.52)$$

onde  $t$  é o  $t$ -ésimo intervalo de tempo e  $\langle \xi \rangle$  é a média temporal.

A seguir, a série temporal integrada é dividida em intervalos de igual tamanho  $n$  não sobrepostos, e em cada um destes intervalos, uma curva  $y_n(k)$  é ajustada aos dados, usando mínimos quadrados, representando a tendência das séries nesse intervalo particular. O próximo passo é remover a tendência local  $y_n(k)$  da série acumulada  $y(k)$  em cada intervalo. O tamanho característico das flutuações  $F(n)$  é então calculado como o desvio médio entre  $y(k)$  e sua tendência em cada intervalo,

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (2.53)$$

O processo é repetido em diferentes escalas de tempo ( $n$ ).

A presença de escala é indicada por uma relação de lei de potência entre  $F(n)$  e  $n$

$$F(n) \propto n^\alpha \quad (2.54)$$

onde  $\alpha = H$ , é o expoente de escala [67, 66, 69].

### 2.2.3 Movimento Browniano

Robert Brown (1828) percebeu que o movimento caótico de grãos de pólen em água não era de natureza biológica, como se acreditava antes de sua época, mas sim de caráter completamente físico [70, 71]. As partículas dos materiais sólidos estão em constante movimento devido à energia térmica, embora tenham uma posição média bem definida. Albert Einstein (1905) [72, 71] mostrou que, independentemente do tamanho da partícula imersa no fluido, para uma dada temperatura absoluta  $T$ , a sua energia cinética média é

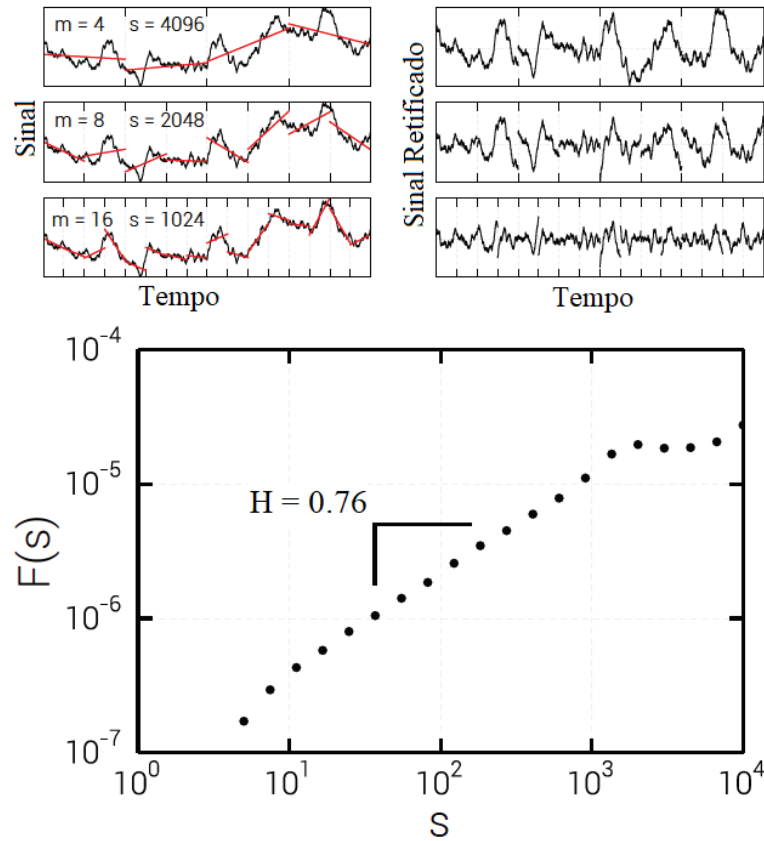


Figura 7: Análise de Flutuação sem Tendência (DFA) de uma série temporal de aproximadamente  $N = 10000$  pontos de dados. As séries foram divididas em  $m$  partições com  $s$  pontos cada (topo esquerda), depois cada uma foi ajustada separadamente com um polinômio de primeira ordem  $f_1(i)$  (linhas vermelhas), obtendo as séries retransmitidas subtraindo o sinal pela tendência (topo direita). A função de flutuação (o desvio padrão do sinal retificado) é calculada para vários valores de  $s$  (inferior). O expoente de Hurst é então determinado ajustando a função de flutuação com uma lei de potência  $F(s) \sim s^H$ . Fonte: Adaptado de [2]

$\frac{3}{2}kT$ . O movimento Browniano é aquele descrito por uma partícula que, aparentemente, move-se em direções aleatórias e com um certo valor característico para o comprimento em cada passo [71]. Considere que uma partícula se movimenta de  $\xi$ , em uma dimensão, a cada intervalo de tempo  $\tau$ , onde  $\xi$  é uma variável aleatória com a seguinte densidade de probabilidade

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D\tau}\right), \quad (2.55)$$

onde  $\langle \xi \rangle = 0$ . A variância desse processo é,

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2D\tau. \quad (2.56)$$

onde o parâmetro  $D$  é o coeficiente de difusão. Segue da equação 2.56 que o coeficiente de difusão é dado pela relação de Einstein:

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle \xi^2 \rangle. \quad (2.57)$$

Obtemos uma distribuição Gaussiana normalizada pela substituição  $\xi \rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}$  de modo que  $\langle \xi \rangle$  tenha média zero e variância  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ . Desse modo, a função aleatória  $x(t)$ , depois de  $n$  passos, fica sendo dada por,

$$x(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (2.58)$$

O valor médio da função aleatória fica

$$\langle |x(t) - x(s)| \rangle = 0, \quad (2.59)$$

para instantes de tempo que seguem a relação  $t > s$ . A variância obedece à seguinte relação,

$$\langle |x(t) - x(s)|^2 \rangle = 2D |t - s| \propto |t - s|. \quad (2.60)$$

Além disso, tal processo aleatório possui invariância de escala. Essa propriedade de escalonamento é dada pela transformação de auto-afinidade,

$$\xi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \xi \quad \text{e} \quad \tau = r\tau. \quad (2.61)$$

Resumindo, no movimento browniano os deslocamentos das partículas são independentes, embora, as posições claramente não o sejam, ou seja, a posição da partícula em um certo instante depende da sua posição no instante anterior. Para duas ou mais dimensões, o comportamento é completamente análogo, e a trajetória da partícula é auto-similar, embora o comportamento da posição no tempo seja auto-afim [1, 71].

## 2.2.4 Autoafinidade

A auto-afinidade é uma propriedade de uma série temporal fractal [73, 74]. É um caso especial de auto-similaridade, segundo o qual uma pequena parte de uma estrutura fractal é semelhante a toda à estrutura. Quando esta pequena parte é uma réplica exata do todo, então o fractal é exato, que é o caso dos fractais puramente matemáticos e geométricos (por exemplo, a curva de von Koch e a árvore de Mandelbrot [75]). Quando a auto-similaridade é expressa em termos de propriedades estatísticas, então o fractal

é um fractal estatístico. Enquanto a propriedade de auto-similaridade é isotrópica e se aplica ao longo de todas as dimensões de um objeto fractal, a auto-afinidade descreve a escala anisotrópica onde as propriedades estatísticas da escala fractal diferem ao longo de diferentes dimensões.

A natureza abriga alguns exemplos intrigantes de estruturas auto-similares, como a couve-flor romana, em que cópias quase exatas da flor inteira podem ser reconhecidas em várias escalas menores, aparente em pelo menos quatro níveis de ampliação [69]. Séries temporais fisiológicas podem exibir propriedades auto-afins estatísticas [76, 77]. Processos auto-afins e estruturas auto-similares têm em comum que a distribuição estatística da quantidade medida segue uma função de lei de potência, que é uma função matemática sem uma escala característica. Fenômenos auto-afins e auto-similares são, portanto, chamados de “livres de escala”. Enquanto fenômenos com escalas características são bem definidos pela sua média e desvio padrão, fenômenos livres de escala são melhor descritos pelo expoente de uma lei de potência, porque captura a relação entre objetos ou flutuações em diferentes escalas.

Um processo estocástico não-estacionário é dito auto-afim em um sentido estatístico, se uma versão reescalada de uma pequena parte de sua série temporal tiver a mesma distribuição estatística da maior parte. Para fins práticos, é suficiente avaliar o desvio padrão. Assim, uma função  $x(t)$  é auto-afim [78] se é invariante pela transformação

$$x(\lambda t) = \lambda^H x(t) \quad (2.62)$$

onde  $H$  é chamado de rugosidade ou expoente de Hurst. Na Equação 2.62, o desvio padrão em ambos os lados é idêntico [79].

Um processo  $x(t)$  é estacionário se a distribuição de  $x(t)$  é independente de  $t$ , e a distribuição conjunta de  $x(t_1 + \tau)$  e  $x(t_2 + \tau)$  é independente de  $\tau$ .

Ao realizar uma análise livre de escala de uma série temporal, é essencial ter um modelo para determinar se o processo subjacente é estacionário. Isso ocorre porque muitos dos métodos usados em uma série temporal para estimar  $H$  fazem suposições sobre se o processo é estacionário ou não. Por exemplo, a autoafinidade, como descrito acima, só se aplica a processos não estacionários porque, por definição, a variância de um processo estacionário não se altera com o intervalo de tempo de observação [79].

Processos livres de escala estacionários são modelados como ruído Gaussiano fracionário ( $fGn$ ) e processos não-estacionários são modelados como movimento browniano



fracionário ( $fBm$ ). No entanto, existe uma forte relação entre esses dois tipos de processos em que, por definição, os incrementos de um processo  $fBm$  são modelados como um processo  $fGn$  com o mesmo expoente de Hurst [78, 76]. Essa relação nos permite aplicar a definição de auto-afinidade dada por 2.62 a um processo de  $fGn$  estacionário, convertendo-o em seu equivalente  $fBm$  não estacionário. Dada a série temporal  $y(t)$ , definimos o perfil do sinal como a soma cumulativa do sinal:

$$x(t) = \sum_{k=1}^t (y(k) - \langle y \rangle) \quad (2.63)$$

onde  $\langle y \rangle$  é a média da série temporal. A subtração da média elimina a tendência global do sinal. A vantagem da aplicação de análise de escala para o perfil de sinal, em vez do sinal, é que ela não faz suposições a priori sobre a estacionariedade do sinal. Ao calcular o escalonamento do perfil de sinal, o expoente de escalonamento resultante,  $\alpha$ , é uma estimativa de  $H$ . Se  $\alpha$  está entre 0 e 1, então  $x$  foi produzido por um processo estacionário que pode ser modelado como um processo de  $fGn$  com  $H = \alpha$ . Se  $\alpha$  está entre 1 e 2, então  $x$  foi produzido por um processo não estacionário, e  $H = \alpha - 1$  [76].

Em resumo as flutuações variam de acordo com o tempo com:

- $0 < \alpha < 0.5$ , o processo tem memória e exibe anti-correlações. (pode ser modelado por um  $fGn$  com  $H = \alpha$ )
- $0.5 < \alpha < 1$ , o processo tem memória de longo prazo e exibe correlações positivas. (pode ser modelado por um  $fGn$  com  $H = \alpha$ )
- $\alpha = 0.5$ , o processo é indistinguível de um processo aleatório sem memória. (pode ser modelado por um  $fGn$  com  $H = \alpha$ )
- $1 < \alpha < 2$  então o processo não é estacionário. (pode ser modelado como um  $fBm$  com  $H = \alpha - 1$ ).

## 2.2.5 Movimento Browniano Fracionário

O movimento browniano fracionário foi apresentado inicialmente por Mandelbrot e Ness (1968) como a generalização do movimento browniano através de um expoente real  $H$ , o expoente de Hurst, que varia no intervalo  $[0, 1]$  [71, 80].

Considerando  $X(t)$  uma função aleatória, o incremento

$$X(t_2) - X(t_1) \quad (2.64)$$

tem distribuição gaussiana e os incrementos quadrados médios têm uma variação proporcional às diferenças de tempo,

$$E [|X(t_2) - X(t_1)|^2] \propto |t_2 - t_1|. \quad (2.65)$$

Aqui  $E$  denota o valor esperado de uma variável aleatória, ou, em outras palavras, a média sobre muitas amostras. Dizemos que os incrementos de  $X$  são estatisticamente semelhantes no sentido de que

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r}}(X(t_0 + rt) - X(t_0)) \quad (2.66)$$

têm as mesmas funções de distribuição conjunta de dimensão finita para qualquer  $t_0$  e  $r > 0$ . Se tomarmos por conveniência  $t_0 = 0$  e  $X(t_0) = 0$ , então isso significa que as duas funções aleatórias

$$X(t) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r}}X(rt) \quad (2.67)$$

são estatisticamente indistinguíveis. O segundo é apenas uma versão do primeiro reformulada adequadamente.

Temos então um processo aleatório  $X(t)$  com incrementos gaussianos e

$$\langle |X(t_2) - X(t_1)|^2 \rangle \propto |t_2 - t_1|^{2H} \quad (2.68)$$

onde  $H = \frac{1}{2}$ . Este é chamado de movimento browniano ordinário.

A generalização para os parâmetros  $0 < H < 1$  é chamada de movimento browniano fracionário (fBm) [81]. Como no caso do movimento browniano comum, dizemos que os incrementos de  $X$  são estatisticamente auto-similares com o parâmetro  $H$ , em outras palavras

$$X(t_0 + t) - X(t_0) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r^H}}(X(t_0 + rt) - X(t_0)) \quad (2.69)$$

têm as mesmas funções de distribuição conjunta de dimensão finita para qualquer  $t_0$  e  $r > 0$ . Se tomarmos novamente por conveniência  $t_0 = 0$  e  $X(t_0) = 0$ , então isso significa que as duas funções aleatórias

$$X(t) \text{ e } \frac{1}{\sqrt{r^H}}X(rt) \quad (2.70)$$

são estatisticamente indistinguíveis.

## 2.2.6 Método de Fourier Filtering

O método de síntese espectral (também conhecido como método de filtragem de Fourier) para gerar fBm é baseado na representação espectral de amostras do processo  $X(t)$  [81]. Como a transformada de Fourier de  $X$  geralmente é indefinida, primeiro restringimos  $X(t)$  a um intervalo de tempo finito, como por exemplo  $0 < t < T$ :

$$\mathcal{X}(t, T) = \begin{cases} X(t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.71)$$

$F_{\mathcal{X}}(f, T)$  é a transformada de Fourier de  $X(t, T)$

$$F_{\mathcal{X}}(f, T) = \int_0^T X(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (2.72)$$

Temos então que

$$\mathcal{X}(t, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f, T) e^{2\pi i f t} df. \quad (2.73)$$

Agora  $|F_{\mathcal{X}}(f, T)|^2$  é a contribuição para a energia total de  $X(t, T)$  das componentes com frequências entre  $f$  e  $f + df$ . Definimos então

$$S_{\mathcal{X}}(f, T) = \frac{1}{T} |F_{\mathcal{X}}(f, T)|^2 \quad (2.74)$$

como sendo a densidade espectral de potência de  $X(t, T)$ .

A densidade espectral de  $X$  é então obtida no limite quando  $T \rightarrow \infty$

$$S_{\mathcal{X}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_{\mathcal{X}}(f, T)|^2 \quad (2.75)$$

A ideia fundamental da síntese espectral é criar uma "receita" para que certo tipo de densidade espectral  $S(f)$  dará origem a fBm com um expoente  $0 < H < 1$  [81]. No geral, um processo  $X(t)$  com uma densidade espectral proporcional a  $1/f^\beta$  corresponde a um fBm com  $H = \frac{\beta-1}{2}$ .

Se  $X(t)$  denota fBm com expoente  $0 < H < 1$  então a função aleatória adequadamente reescalada

$$Y(t) = \frac{1}{r^H} X(rt) \quad (2.76)$$

para um dado  $r > 0$  tem as mesmas propriedades estatísticas que  $X$ . Assim, também tem a mesma densidade espectral.

Temos que,

$$\mathcal{Y}(t, T) = \begin{cases} Y(t) = \frac{1}{r^H} X(rT), & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.77)$$

portanto,

$$F_{\mathcal{Y}}(f, T) = \int_0^T Y(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (2.78)$$

$$F_{\mathcal{Y}}(f, T) = \int_0^T \frac{1}{r^H} X(rT) e^{-2\pi i f t} dt.$$

Tomando  $s = rt$  temos que,

$$F_{\mathcal{Y}}(f, T) = \int_0^{rT} \frac{1}{r^H} X(s) e^{-2\pi i \frac{f}{r} s} \frac{ds}{r},$$

$$F_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{r^{H+1}} \int_0^{rT} X(s) e^{-2\pi i \frac{f}{r} s} ds \quad (2.79)$$

Assim, claramente

$$F_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{r^{H+1}} F_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \quad (2.80)$$

Agora segue para a densidade espectral de  $Y(t, T)$

$$S_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{T} |F_{\mathcal{Y}}(f, T)|^2$$

$$S_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{T} \frac{1}{r^{2H+1}} \left| F_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2$$

$$S_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{r^{2H+1}} \left( \frac{1}{rT} \left| F_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2 \right)$$

$$S_{\mathcal{Y}}(f, T) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \quad (2.81)$$

e no limite quando  $T \rightarrow \infty$  ou equivalentemente quando  $rT \rightarrow \infty$  concluimos que

$$S_{\mathcal{Y}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2H+1}} \frac{1}{rT} \left| F_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2$$

$$S_Y(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} \lim_{rT \rightarrow \infty} \frac{1}{rT} \left| F_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2$$

$$S_Y(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}\right) \quad (2.82)$$

Como  $Y$  é apenas uma versão de  $X$  adequadamente reescalada, suas densidades espectrais devem coincidir, assim, também

$$S_{\mathcal{X}}(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_{\mathcal{X}}\left(\frac{f}{r}\right) \quad (2.83)$$

Agora nós formalmente definimos  $f = 1$  e substituímos  $\frac{1}{r}$  novamente por  $f$  obtemos que

$$S_{\mathcal{X}}(1) = f^{2H+1} S_{\mathcal{X}}(f)$$

$$S_{\mathcal{X}}(f) = \frac{1}{f^{2H+1}} S_{\mathcal{X}}(1) \quad (2.84)$$

ou seja,

$$S_{\mathcal{X}}(f) \propto \frac{1}{f^{2H+1}} = \frac{1}{f^{\beta}} \quad (2.85)$$

onde  $\beta = 2H + 1$  é o expoente da densidade de potência espectral unidimensional. Dessa maneira, para  $\beta = 0$  ou  $H = -1/2$ , a densidade de potência espectral é independente da frequência, implicando em uma distribuição não-correlacionada. Para os limites do expoente de Hurst  $0 < H < 1$ , teremos os limites do expoente da densidade de potência espectral  $1 < \beta < 3$ . Para  $\beta < 2$  ou  $H < 1/2$ , temos o comportamento anti-correlacionado. Em  $\beta = 2$  ou  $H = 1/2$ , recuperamos o resultado do movimento browniano ordinário unidimensional. No intervalo  $\beta > 2$  ou  $H > 1/2$  temos o comportamento correlacionado [71, 81].

Para o algoritmo prático, temos que encontrar os coeficientes  $a_k$  da transformada de Fourier Discreta

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i k t} \quad (2.86)$$

Os coeficientes  $a_k$  estão em uma correspondência de 1 : 1 com os valores complexos  $\bar{X}(t_k)$ ,  $t_k = \frac{k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . A condição a ser imposta aos coeficientes para obter  $S(f) \propto \frac{1}{f^{\beta}}$  torna-se agora

$$E(|a_k|^2) \propto \frac{1}{k^{\beta}} \quad (2.87)$$

onde  $k$  denota essencialmente a frequência. O método consiste simplesmente em escolher aleatoriamente coeficientes sujeitos à relação 2.87 e então computar a transformada inversa de Fourier para obter  $X$  no domínio do tempo.

Em duas dimensões, a densidade espectral  $S$  geralmente dependerá de duas variáveis de frequência  $u$  e  $v$  correspondente às direções  $x$  e  $y$ . Mas, desde que todas as direções no plano  $-xy$  sejam equivalentes em relação às suas propriedades estatísticas,  $S$  depende apenas de  $\sqrt{u^2 + v^2}$ . Se cortarmos a superfície ao longo de uma linha reta no plano  $-xy$ , esperamos pela densidade espectral  $S$  deste fBm em apenas uma dimensão, uma lei de potência  $1/f^\beta$ , como antes. Este requisito implica que a densidade espectral bidimensional se comporte como

$$S(u, v) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{H+1}}. \quad (2.88)$$

A transformada de Fourier inversa discreta bidimensional é [81]

$$X(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{kl} e^{2\pi i(kx+ly)} \quad (2.89)$$

para  $x, y = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$  [82], e assim, especificamos para os coeficientes  $a_{kl}$  que

$$E(|a_{kl}|^2) \propto \frac{1}{(k^2 + l^2)^{H+1}}. \quad (2.90)$$

A dimensão fractal  $D_f$  da superfície vai ser  $D_f = 3 - H$ . O algoritmo para gerar uma superfície auto-afim em duas dimensões, então, consiste simplesmente em escolher os coeficientes de Fourier de acordo e executar uma transformação inversa bidimensional. Como no caso unidimensional pode-se reduzir o número de coeficientes, já que a função aleatória é apenas real [82].

A generalização para  $n$  dimensões do movimento browniano fracionário é direta. É um processo multidimensional (um campo aleatório)  $X(t_1, t_2, \dots, t_n)$  onde os incrementos  $X(t_1, t_2, \dots, t_n) - X(s_1, s_2, \dots, s_n)$  são gaussianos com média 0 e a variância dos incrementos  $X(t_1, t_2, \dots, t_n) - X(s_1, s_2, \dots, s_n)$  depende apenas da distância  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - s_i)^2}$  e de fato é proporcional a segunda potência da distância, onde o parâmetro  $H$ , chamado de expoente de Hurst, satisfaz  $0 < H < 1$ .

Portanto,

$$E(|X(t_1, t_2, \dots, t_n) - X(s_1, s_2, \dots, s_n)|^2) \propto \left( \sum_{i=1}^n (t_i - s_i)^2 \right)^H \quad (2.91)$$

No domínio da frequência nós temos para a densidade espectral

$$S(f_1, \dots, f_n) \propto \frac{1}{(\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2})^{2H+n}} \quad (2.92)$$

A dimensão fractal de uma amostra de  $X(t_1, t_2, \dots, t_n)$  é

$$D = n + 1 - H \quad (2.93)$$

Para  $H = 1/2$  o movimento browniano ordinário é recuperado. Em contraste com o movimento browniano comum, em  $fBm$ , para  $H \neq 1/2$ , os incrementos são correlacionados e o intervalo dessa correlação é infinito. Pode ser mostrado que a correlação entre dois incrementos de um  $fBm$ , é positiva se  $1/2 < H < 1$ , e negativo se  $0 < H < 1/2$ .

Como o campo aleatório é isotrópico e os incrementos são estacionários, a densidade de potência espectral fica

$$S_x(f_1, \dots, f_d) \propto \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d f_i^2}\right)^{2H+1}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^d f_i^2}\right)^\beta}, \quad (2.94)$$

onde  $\beta = 2H + d$  é o expoente da densidade de potência espectral para  $d$  dimensões. Na prática, para que seja produzida uma superfície correlacionada ( $d = 2$ ), temos de gerar os coeficientes de Fourier no espaço recíproco através de uma fase aleatória no intervalo  $[0, 2\pi[$  e uma amplitude distribuída de acordo com uma distribuição Gaussiana com valor máximo  $1/(\sqrt{f_1^2 + f_2^2})^\beta$ , onde  $f_1$  e  $f_2$  representam as frequências da transformada discreta de Fourier e  $\beta = 2H + 2$  [71]. Desse modo, a transformada inversa de Fourier pode ser aplicada para obtermos uma distribuição representando a superfície correlacionada [81, 71], como mostram as Figuras 8(a)-(d).

## 2.3 Equações de Fluxo Macroscópico

A superfície de uma única fratura parece razoavelmente lisa, com exceção de alguma aspereza superficial aleatória, sugerindo que o escoamento de Poiseuille em um canal liso é o modelo apropriado para o fluxo do fluido [21]. Um estudo do fluxo de fluido num canal liso que compreende duas placas paralelas é, talvez, o cenário de fluxo mais simples em um único canal. As equações do movimento para esta situação podem ser obtidas a partir das equações de Navier-Stokes [83]. O fluxo de Poiseuille pode ser produzido por um gradiente de pressão, em que, nas paredes superior e inferior do canal, o fluido tem velocidade nula.

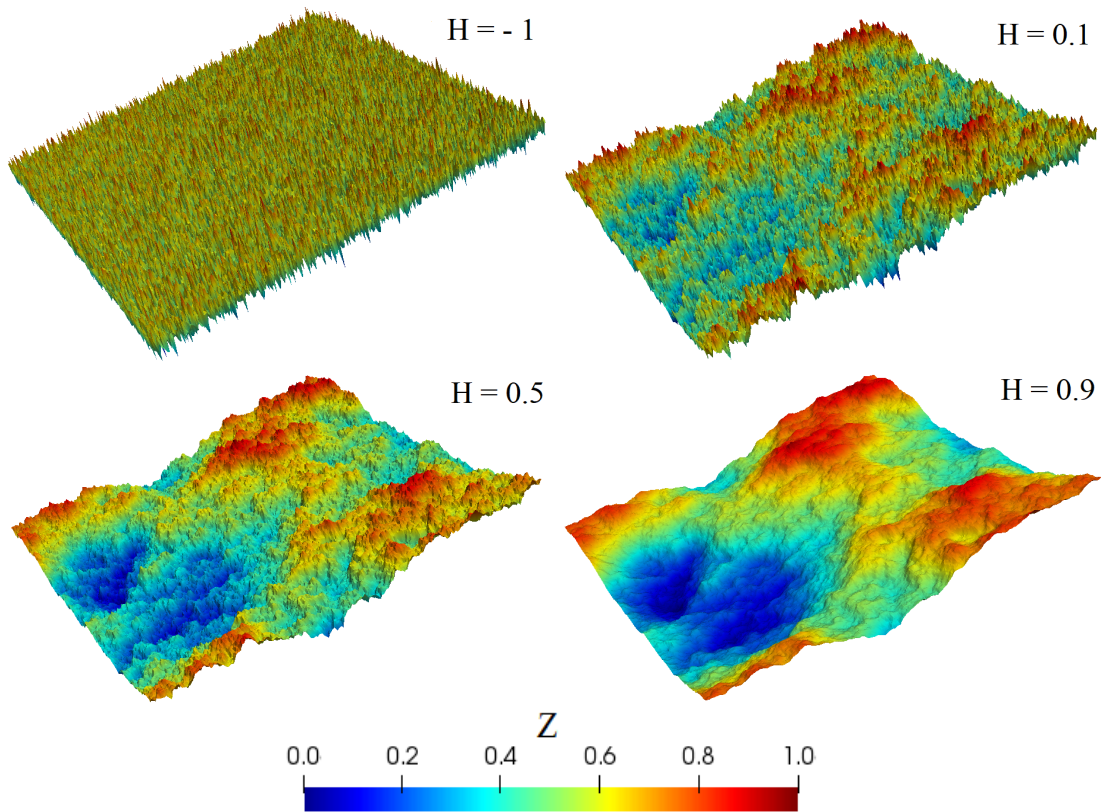


Figura 8: Superfícies geradas para diferentes valores de expoente de Hurst  $H$  com tamanho  $L = 256$  (a)  $H = -1$  (caso não-correlacionado). (b)  $H = 0.1$ , (c)  $H = 0.5$  e (d)  $H = 0.9$  (casos correlacionados).

A Figura 9 mostra o perfil de velocidade (linhas de fluxo) que corresponde ao fluxo de Poiseuille num canal liso.

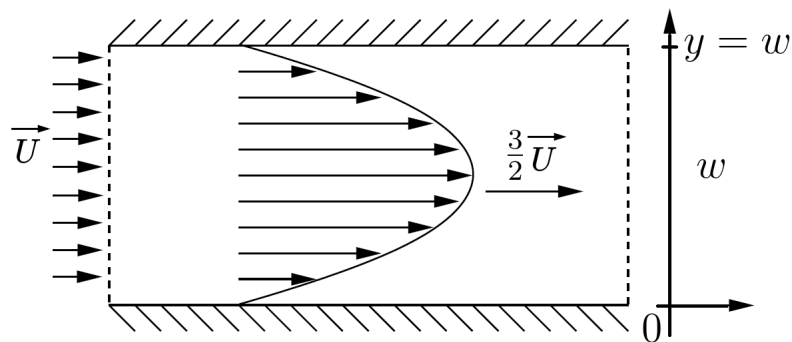


Figura 9: Perfil de velocidade para o Fluxo de Poiseuille em um canal liso.

Assumindo um fluido newtoniano, viscoso, incompressível e desprezando o efeito da gravidade, a equação de Navier-Stokes será reduzida a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.95)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mathbf{u}$  é a velocidade,  $p$  é a pressão, e  $\mu$  é a viscosidade



do fluido.

O termo do lado esquerdo da equação 2.95 representa a força de inércia convectiva não-linear, que representa a componente da aceleração do fluido em movimento. Igualando o termo inercial a zero, significa que as partículas estão em movimento com uma velocidade constante, o que é um resultado da aceleração zero para estas partículas. Isto resulta em um fluxo que segue as linhas de corrente, em que a dependência de cada partícula só pode ser perpendicular à direção do fluxo [84].

Descartando o termo inercial, a equação 2.95 se reduz a:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Para uma fratura unidimensional,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (2.96)$$

onde,  $u_x$  é a velocidade do fluido na direção  $x$ .

A condição limite sem deslizamento é aplicada para o fluxo de Poiseuille em meio não-poroso, em que  $u_x = 0$  para  $y = 0$  e  $y = w$  (ver Figura 9), onde  $w$  é a abertura do canal. Com a aplicação destas condições de contorno, a equação 2.96 reduz-se a um perfil de velocidade parabólico sob a forma de

$$u_x(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(w - y). \quad (2.97)$$

A equação 2.97 mostra que a velocidade é apenas uma função da viscosidade do fluido e do gradiente de pressão, e implica que a velocidade máxima de fluxo de Poiseuille parabólico tem lugar no meio do canal de escoamento (como ilustra a Figura 9).

Simulações numéricas [22] indicam que esta visão tradicional da rocha fraturada como um canal liso não é adequada para descrever o escoamento de fluidos mesmo a baixas velocidades. Com uma análise mais cuidadosa é possível mostrar que fraturas geológicas típicas apresentam-se espacialmente correlacionadas, podendo ser caracterizadas como superfícies fractais auto-afins. O expoente de Hurst que caracteriza a rugosidade assume o valor aproximado  $H = 0.8$  [32], surpreendentemente constante para diferentes tipos de rochas fraturadas naturais ou artificiais. Estudos numéricos e teóricos introduzem esta geometria mais complexa para tais fraturas com o intuito de calcular as propriedades de transporte do sistema [85]. Contudo, a maioria destes estudos ponderam que a

aproximação de Reynolds (aproximação de lubrificação) é válida desde que o campo de velocidades seja dado por um escoamento de Poiseuille, com perfil de velocidades parabólico através da abertura e na direção de escoamento médio. Essa aproximação é falha quando os efeitos da rugosidade passam a ser preponderantes. Na aproximação de lubrificação, as fraturas rugosas são equivalentes a canais com uma abertura de entrada constante, sem componentes verticais da velocidade do fluido, que são particularmente importantes no limite de fraturas estreitas onde a amplitude da rugosidade é grande, comparada à abertura.

O escoamento através de sistemas fraturados é o mecanismo de transporte de fluidos dominante em diversos reservatórios naturais ou artificiais. A compreensão do processo de escoamento em estruturas rugosas depende da investigação completa do processo de formação dos meios porosos. Com o intuito de entender as propriedades de transporte de fluidos no interior de rochas fraturadas, três aspectos devem ser observados:

- descrição da topologia da rede de fraturas, ou seja, o modo como os poros e/ou fraturas estão conectados uns aos outros,
- observação da geometria do meio poroso, isto é, a descrição das formas e tamanhos dos poros e/ou fraturas bem como da rugosidade da superfície,
- descrição dos campos de velocidade e pressão no interior da fratura.

As propriedades geométricas e dinâmicas de sistemas porosos são caracterizadas por correlações de longo alcance no espaço e/ou no tempo. O processo estocástico que foi utilizado para gerar superfícies fractais auto-afins é baseado na ideia de que uma série correlacionada espacialmente, como a superfície de uma fratura, pode ser representada por um processo auto-afim através de integração. Conseqüentemente, quantificar a característica auto-afim da superfície pode, indiretamente, informar sobre as propriedades de correlação do sistema.

### 2.3.1 Lei de Darcy

Em fluxos através de meios porosos fraturados, a velocidade média do escoamento depende do gradiente pressão que causa o movimento. Esta dependência varia com o número de Reynolds definido aqui como,

$$Re \equiv \frac{\rho U w}{\mu} \quad (2.98)$$

onde  $\rho$ ,  $U$ ,  $\mu$  e  $w$  representam a densidade, a velocidade média, a viscosidade do fluido, e a abertura da fratura, respectivamente.

A lei de Darcy implica que a força motriz é inteiramente equilibrada pela força resistiva. Essa relação foi descoberta pela primeira vez por Darcy, em 1856 [86], experimentalmente. Ela fornece uma equação governante para o fluxo em meios porosos em estado estacionário unidimensional com um número de Reynolds muito pequeno.

Para números de Reynolds muito pequenos ( $Re \ll 1$ ), forças viscosas dominam o fluxo e os efeitos de inércia podem ser negligenciados. A lei de Darcy descreve a dependência proporcional da velocidade média no gradiente de pressão:

$$\nabla \langle p \rangle_i = a \langle \mathbf{u} \rangle_s \quad (2.99)$$

onde  $\nabla \langle p \rangle_i$  e  $\langle \mathbf{u} \rangle_s$  representam o gradiente de pressão macroscópico e a velocidade superficial média. A constante de proporcionalidade  $a$  depende da permeabilidade  $K$  do meio poroso e da viscosidade dinâmica  $\mu$  do fluido e é definido como  $a = -\mu/K$ . Note que o  $K$  é intrínseco à geometria do meio poroso estudado e pode ser medido a partir de experimentos usando a lei de Darcy.  $K$  é um escalar em fluxos unidimensionais. Em casos tridimensionais,  $K$  se torna um tensor.

Admitindo que a permeabilidade  $K$  relaciona a velocidade média do fluido  $\langle U \rangle$  através dos poros com a diferença de pressão  $\Delta p$  medida ao longo do sistema, podemos obter a velocidade média do fluxo

$$\langle U \rangle = -\frac{K}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (2.100)$$

onde o parâmetro  $L$  é o comprimento da amostra na direção do escoamento.

A lei de Darcy possui suporte experimental, numérico e teórico. A escala de validade da lei de Darcy é expressa em termos do número de Reynolds, assim como vários outros parâmetros no estudo do escoamento de fluidos. A lei de Darcy é aplicável em regimes de baixo número de Reynolds, ou seja,  $Re \leq 10$ . Este é o regime de escoamento em que as forças viscosas são predominantes. Para  $Re = 10$ , existe uma zona de transição em que as forças inerciais começam a sobrepor-se às forças viscosas. Para regimes de elevados números de Reynolds,  $Re > 100$ , a zona de transição deixa de existir, observando-se, então, um regime de escoamento turbulento a altas velocidades. Nesta situação, o escoamento necessita ser descrito por outra formulação, visto que a lei de Darcy não é válida nestas condições. Portanto, termos de correção são incorporados à lei de Darcy com o intuito de descrever tais fenômenos. A aproximação clássica para caracterizar macroscopicamente o

efeito da inércia sobre escoamentos em meios porosos reais é a equação de Forchheimer [87].

## 2.3.2 Equação de Forchheimer

### Equação de Forchheimer e Regime de Inércia forte

O regime em que a lei de Darcy é válida é chamado de regime linear. O regime linear representa um estado em que o número de Reynolds é muito pequeno e os efeitos de inércia são fracos.

Em 1901, Philipp Forchheimer, descobriu que a relação entre o fluxo e o gradiente de potencial não é linear a uma velocidade suficientemente alta, e que essa não-linearidade aumenta com a taxa de fluxo. Inicialmente, ele atribuiu este aumento não linear à turbulência no fluxo do fluido (essa não-linearidade é devido a efeitos inerciais nos meios porosos), que ele determinou serem proporcionais a  $bu^2$ , com  $b$  sendo uma constante de proporcionalidade. Cornel e Katz (1953) [88] deram um valor de  $\beta\rho$  para  $b$ , onde  $\beta$  é chamado de fator inercial e  $\rho$  é a densidade do fluido que flui através do meio.

A queda de pressão adicional devido a perdas de inércia é principalmente devido aos efeitos de aceleração e desaceleração do fluido à medida que se desloca através do caminho de fluxo tortuoso dos meios porosos. A queda de pressão total é dada pelo modelo empírico de fluxo de Forchheimer, tradicionalmente dada por:

$$-\frac{\Delta p}{L} = \alpha\mu u + \beta\rho u^2. \quad (2.101)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes determinadas empiricamente.

À medida que as velocidades aumentam em magnitude, os efeitos inerciais se tornam mais fortes. Quando o número de Reynolds se torna comparável à unidade, a relação linear entre o gradiente de pressão e a velocidade média do fluxo pode não se manter. A partir da publicação de Forchheimer (1901) [89], várias formulações de uma correção para a relação linear 2.99 usando polinômios foram propostas na literatura, e todas elas com a mesma forma:

$$\nabla \langle p \rangle_i = a \langle \mathbf{u} \rangle_s + b \langle \mathbf{u} \rangle_s^m, \quad (2.102)$$

onde  $b$  é uma constante intrínseca ao meio poroso e  $m$  é uma constante.

Nos primeiros estudos, descobriu-se que  $m$  tem um valor próximo a 2 [90, 88]. Muitos pesquisadores denotam este regime como o regime de inércia forte, no qual a correção

quadrática  $b \langle \mathbf{u} \rangle_s^2$  é aplicada na equação 2.99 para representar completamente o equilíbrio de forças no fluxo. A equação 2.102 com  $m = 2$  é referida como a equação de Forchheimer, e o termo  $b \langle \mathbf{u} \rangle_s^2$  é referido como a correção de Forchheimer.

Resultados experimentais apoiaram essa correção quadrática. Em uma série de experimentos de Ergun (1952) [91] para determinar o fator de atrito de vários materiais, esta formulação quadrática pode ser observada. Dullien e Azzam (1973) [92] mediram a queda de pressão em relação à taxa de fluxo em tubos capilares em uma ampla faixa do número de Reynolds, e descobriram que a lei de Darcy só é válida até  $Re = 30 \sim 50$ , e os dados sobre o número de Reynolds devem então ser descritos pela equação quadrática de Forchheimer.

Esta correção quadrática também é suportada em base teórica. Pela média das equações de Navier-Stokes sobre um volume médio e resolvendo um problema de fechamento de estado estacionário, o tensor de permeabilidade de Darcy e o tensor de correção de Forchheimer podem ser determinados [93]. Esta teoria indica claramente que a correção de Forchheimer é quadrática para valores pequenos do número de Reynolds. Chen *et al.* (2001) [94] aplicaram o método de homogeneização à equação de Navier-Stokes no estado estacionário e eventualmente derivaram essa correção quadrática de Forchheimer. Hasanizadeh e Gray (1987) [95] adotaram a abordagem contínua para derivar uma equação macroscópica geral do movimento fluido. Nas suas derivações teóricas, esta correção quadrática está presente.

Essa correção quadrática de Forchheimer não só foi concluída a partir de experimentos e derivações teóricas, mas também de resultados computacionais. Coulaud *et al.* (1988) [96] realizaram simulações em escala de poros para arranjos de cilindros bidimensionais, com diâmetros iguais, dispostos em um padrão regular. As equações de Navier-Stokes foram discretizadas pelo método dos elementos finitos. Seus resultados apoiaram totalmente a equação de Forchheimer, começando com o número de Reynolds acima de 1. Fourar *et al.* (2004) [97] apresentaram resultados de simulação de vazões em altas velocidades através de arranjos de cilindros bidimensionais periódicos e esferas compactadas tridimensionais em vários números de Reynolds. Eles observaram a correção quadrática para altos números de Reynolds e concluíram que o fluxo de meio porosa tridimensional não linear pode ser corretamente modelado pela equação de Forchheimer.

A equação de Forchheimer assume que a lei de Darcy ainda é válida, mas que um termo adicional deve ser adicionado para explicar o aumento da queda de pressão. A equação 2.101 é baseada no ajustamento de uma equação empírica através de dados experimentais.

Também não é uma expressão puramente empírica, visto que pode ser derivada a partir de uma média apropriada da equação de Navier-Stokes unidimensional, para o escoamento laminar, incompressível e estacionário de um fluido Newtoniano no interior de um meio poroso rígido [55].

Forchheimer mais tarde propôs uma equação de terceira ordem dada por [98]:

$$-\frac{\Delta p}{L} = \alpha\mu U + \beta\rho U^2 + \frac{\gamma\rho^2 U^3}{\mu} \quad (2.103)$$

onde  $\alpha = 1/K$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros a serem determinados, geralmente um ajuste de curvas aos dados numéricos encontrados nos resultados encontrados nos experimentos ou em simulações.

O coeficiente  $\alpha$  corresponde ao recíproco da permeabilidade do material poroso, e os dois termos contendo  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser interpretados, respectivamente, como as correções de segunda e de terceira ordem que devem contabilizar a contribuição das forças de inércia no fluxo do fluido. Para baixos Reynolds a Equação 2.103 se reduz à lei de Darcy.

Esta formulação vem sendo aplicada há muito tempo nas pesquisas de escoamento em meios porosos. Justifica-se isso pelo fato de que existe a combinação entre a complexidade das equações de Navier-Stokes, que governam este fenômeno, e a geometria dos meios porosos naturais. Para isso, estudos numéricos sobre escoamento de fluidos em altas velocidades em meios porosos [31] foram realizados.

## Regime de Inércia Fraco e Regime de Turbulência

Mei e Auriault (1991) [99] usaram a teoria da homogeneização para examinar os efeitos não lineares devido à inércia convectiva fraca do fluido dentro do meio poroso. Eles descobriram que quando a inércia do fluido é pequena, mas finita, o termo de correção para o meio isotrópico e homogêneo é cúbico na velocidade média macroscópica. Eles também fizeram um estudo do caso do modelo unidimensional anisotrópico de tubos corrugados paralelos, concluindo que o termo de correção também é cúbico.

Balhoff *et al.* (2010) também usaram a homogeneização para modelar efeitos não-lineares em fluxos de mídia porosa em nível macroscópico, e executaram simulações numéricas que resolveram as equações de Navier-Stokes em uma geometria sinusoidal periódica. Tanto suas derivações quanto os resultados da simulação sustentam que, para os meios isotrópicos, particularmente para  $Re < 1$ , o termo de correção na velocidade média macroscópica é cúbico, e não quadrática.

Na base computacional, resultados numéricos também apoiaram essa descoberta. Skjetne *et al.* (1999) [48] resolveram numericamente as equações de Navier-Stokes para um canal auto-afim com uma abertura perpendicular constante, e verificou a existência de um chamado regime de inércia fraca, onde o termo de correção cúbico para a lei de Darcy é válido. Jacono *et al.* (2005) [100] realizaram simulações numéricas diretas tridimensionais para complementar a análise das equações de "Oseen-Poiseuille", que são desenvolvidas a partir de uma formulação assintótica das equações de Navier-Stokes para estudar a influência da inércia fraca. Seus resultados de simulação também apoiaram a existência do regime de inércia fraca, onde a correção cúbica está presente.

Essa correção cúbica revela-se mais precisa do que a quadrática no chamado regime de inércia fraca, que é ativado quando o número de Reynolds dos poros está na faixa de  $[\delta^{1/2}, 1]$ , onde  $\delta$  representa a razão entre as escalas de comprimento microscópicas e macroscópicas [101]. Entretanto, quando o número de Reynolds aumenta além do limite superior, o fluxo então entra no regime de inércia forte, com o número de Reynolds dos poros variando tipicamente de um a dez. Neste regime, a correção de Forchheimer é válida, isto é, uma correção para a lei clássica de Darcy com dependência quadrática da velocidade pode ser aplicada.

Acima do regime de forte inércia, o fluxo pode eventualmente entrar no regime de turbulência, quando o número de Reynolds é da ordem de 100. Isso foi observado em experimentos e simulações numéricas [102, 56].

Em resumo, o desvio não-linear da lei de Darcy pode ser classificado em três regimes diferentes: (a) o regime de inércia fraca, com o número de Reynolds no limite  $[\delta^{1/2}, 1]$ , onde a correção não linear é tomada como uma função cúbica da velocidade superficial; (b) o forte regime de inércia, com o Reynolds variando entre  $[1, 10]$ , onde a correção de velocidade para a lei clássica de Darcy é tomada como uma função quadrática, e a equação de Forchheimer é válida; e (c) o regime de turbulência, com um número de Reynolds maior que aproximadamente 100.

## Resistência Hidráulica

A equação de Forchheimer tem sido amplamente utilizada para descrever os efeitos inerciais macroscopicamente no fluxo através de meios porosos [103, 27, 55]. No entanto, evidências empíricas indicam que a adição de correções de terceira ordem na velocidade à equação de Forchheimer dá uma melhor concordância com dados experimentais no regime de fluxo não linear [104, 105, 57, 106]. Desta forma, a abordagem que adotamos aqui para

caracterizar macroscopicamente o efeito da convecção no fluxo através do canal auto-afim é empregar a relação cúbica dada pela Eq. 2.103 com  $\alpha$  correspondendo ao recíproco da permeabilidade do canal, e os coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$  representando as correções de segunda e terceira ordem, respectivamente, que devem explicar as contribuições de forças inerciais ao fluxo de fluido. Em Reynolds suficientemente baixos, a Eq. (2.103) se reduz a Lei de Darcy.

Em escoamentos através de um meio poroso rígido a Lei de Darcy, que é uma relação linear entre a velocidade média do escoamento e o gradiente de pressão na macroescala, está bem estabelecida experimentalmente para gradientes de pressão ou vazões suficientemente pequenos. A Lei de Darcy é geralmente válida mesmo para números não tão pequenos de Reynolds.

A abordagem adotada para caracterizar macroscopicamente o efeito de convecção do fluxo através do canal auto-afim se dá através do emprego da relação cúbica dada pela Equação 2.103. Reescrevendo a Equação 2.103 em termos do número de Reynolds, tem-se

$$G = \alpha\omega^2 + \beta\omega Re + \gamma Re^2, \quad (2.104)$$

com

$$G = \frac{-\Delta P\omega^2}{\mu u L} \quad (2.105)$$

com  $G \equiv -\Delta P\omega^2/\mu UL$  sendo uma medida adimensional da Resistência Hidráulica. Para um fluido incompressível que flui entre placas paralelas infinitas com abertura  $w$ , espera-se que a lei de Darcy seja independente dos Reynolds e  $\alpha_0 = 12/w^2$  e  $G_0 = 12$ .



## 3 Metodologia

### 3.1 Dinâmica de Fluidos Computacional

As equações de Navier-Stokes apresentadas no capítulo 2 são equações diferenciais parciais não-lineares. As soluções analíticas dessas equações existem apenas para um número pequeno de problemas com geometria simples. Para problemas cuja geometria torna a solução dessas equações inviáveis, utiliza-se a Dinâmica de Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics - CFD), que é utilizada para resolver numericamente problemas de escoamento de fluidos, sendo presente em trabalhos que buscam estudar uma vasta gama de aplicações da Física e da Engenharia. Esta envolve a substituição das equações diferenciais parciais apresentadas por equações algébricas discretizadas que aproximam as mesmas. Essas equações são então resolvidas numericamente para obter valores dos campos de velocidade e pressão nos pontos discretos no espaço e no tempo [107].

Esquemas de interpolação são usados para obter valores em locais sem pontos de grade. Existem diversos Softwares, proprietários e livres que implementam a CFD, dentre eles os softwares *Fluent* [108] e *OpenFOAM* [109]. Todos os códigos de CFD contêm três elementos principais: pré-processamento, solucionador (*solver*) e pós-processamento [110].

O pré-processamento é onde a geometria do escoamento é definida, conhecida como o domínio computacional. Em seguida, a discretização do domínio é feita gerando o que chamamos de grade ou malha. Finalmente é necessário definir as propriedades do fluido, e selecionar os fenômenos físicos e químicos que precisam ser modelados.

O *solver* pode calcular uma solução para o problema que foi definido no pré-processamento. Existem 4 métodos de solução numérica bastante utilizados em CFD, o Método de Elementos Finitos (FEM), o Método de Volumes Finitos (FVM), o Método de Diferenças Finitas (FDM) e Métodos Espectrais. O FEM e o FVM serão tratados nesta seção.

No pós-processamento, os resultados podem ser visualizados por gráficos vetoriais, geração de gráficos de superfícies para o escoamento bidimensional e tridimensional, rastreamento de partículas e manipulação de vistas.

Em todos os métodos de CFD citados acima, a precisão da solução é governada pelo número de células no domínio computacional. Para a maioria dos casos, quanto maior o número de células, mais preciso será o resultado, entretanto isso implicará em um alto custo computacional. Como a física envolvida na solução do problema de fluidos é complexa, é importante que o analista tenha conhecimento da física subjacente envolvida. Às vezes os resultados são visualmente bons, mas podem estar fisicamente incorretos. Para validar os resultados esses devem ser comparados com dados experimentais quando possível, ou com problemas semelhantes que são relatados de forma experimental se não existem dados.

## 3.2 Métodos de Discretização

A modelagem de superfícies rugosas fraturadas implica em um conjunto de equações diferenciais parciais que, em geral, não possuem solução analítica. Por conta disso, simulações numéricas são necessárias para a obtenção de uma compreensão mais profunda do fenômeno do escoamento [111].

O desenvolvimento de métodos numéricos rápidos e precisos tem sido um dos principais desafios dos pesquisadores em Dinâmica de Fluidos Computacional. O analista interessado em resolver um determinado problema tem à sua disposição basicamente três ferramentas: métodos analíticos; métodos numéricos (simulações numéricas); e experimentação de laboratório. Os métodos analíticos têm a desvantagem de serem aplicados apenas a problemas cujas hipóteses simplificativas os desviam demasiadamente do fenômeno físico real e, geralmente, só podem ser aplicados a geometria simples. A grande vantagem da experimentação em laboratório é o fato de se tratar com a configuração real, podendo-se verificar novos fenômenos. Pode-se dizer que a simulação numérica apresenta apenas as restrições computacionais, entretanto, pode-se resolver problemas com condições de contorno complicadas. No computador resolve-se problemas de escoamentos cujos experimentos são quase impossíveis de serem feitos em laboratório [111].

Inicialmente, resolvia-se os problemas de escoamento empregando o Método de Diferenças Finitas (FDM), enquanto que o Método de Elementos Finitos (FEM) era empregado na solução de mecânica dos sólidos. Uma das limitações do Método de Diferenças

Finitas é a não execução do balanço de massa local nos volumes do domínio em estudo. A versatilidade geométrica é uma característica notável do Método de Elementos Finitos, pois a geometria poderá possuir forma e condições de contorno arbitrárias. O Método de Elementos Finitos é fundamentado na existência de um princípio variacional para o operador em questão. Por outro lado, no Método de Elementos Finitos é difícil a obtenção de um operador para minimizar o funcional de massa, de forma que essa geralmente não é conservada localmente. O que é normalmente feito é a minimização da energia (através de métodos energéticos) [112].

O Método de Volumes Finitos (FVM) e o Método de Volume de Controle (CVM) surgiram com a finalidade de executar o balanço de massa local no domínio de cálculo, em que o mesmo se faz necessário [111]. Pode-se dizer que o Método de Volumes Finitos é oriundo do de Diferenças Finitas e o Método de Volume de Controle provém dos de Volumes Finitos e Elementos Finitos. Todos os métodos utilizados para resolver escoamentos tendem para um objetivo comum: solução de escoamentos sobre geometrias complexas; conservação das propriedades do fluido localmente; economia de tempo computacional [111].

### **Método de Diferenças Finitas**

O Método de Diferenças Finitas substitui as derivadas por diferenças finitas avaliadas nas variáveis localmente usando uma expansão da série de Taylor. As diferenças para cada variável são calculadas usando o valor da célula e os valores vizinhos adjacentes, dependendo da ordem da derivada. O método não é o preferido para a análise geral de CFD porque é limitado a redes simples e não conserva a massa em redes complexas.

O processo de discretização por diferenças finitas pode ser descrito da seguinte forma: divisão do domínio em volumes de controle discretos usando uma malha computacional; integração das equações governantes nos volumes de controle para construir equações algébricas não-lineares para as variáveis dependentes discretas, tais como pressão e velocidade; e linearização das equações discretas e solução do sistema de equações lineares resultante para gerar valores atualizados das variáveis dependentes.

A malha computacional é oriunda de pontos onde os valores da variável independente devem ser determinados. A aproximação numérica da equação diferencial procede da especificação de tais pontos. O processo de criação da malha é fundamental para a obtenção de uma solução numérica de uma equação diferencial parcial. A malha mais eficiente é aquela cuja relação entre o erro numérico e o tempo computacional seja a

menor possível.

O software *Fluent* emprega uma técnica de conversão das equações governantes em equações algébricas não-lineares, passíveis de serem resolvidas numericamente. Esta técnica consiste em integrar as equações governantes em cada volume de controle, gerando equações discretas que conservam as quantidades de interesse.

### **Método de Elementos Finitos**

O Método de Elementos Finitos usa funções quadráticas para descrever a variação da variável dentro de uma célula. Conectando a função selecionada na equação de conservação para cada célula e aplicando as condições de contorno, um sistema linear de equações acopladas é obtido. Essas equações são então resolvidas (iterativamente) para a variável desconhecida em todos os locais de armazenamento.

Este método é popular para uso com códigos de análise estrutural e alguns códigos de Dinâmica de Fluidos Computacional. Nos primórdios da CFD, quando grades ortogonais estruturadas eram usadas para a maioria das aplicações do método de Volumes Finitos, o Método de Elementos Finitos oferecia o luxo de malhas não estruturadas com elementos não ortogonais de várias formas. Agora que o uso de malhas não estruturadas é comum entre *solvers* de Volumes Finitos, o Método de Elementos Finitos tem sido usado principalmente para certas áreas de aplicação da DFC. Em particular, é popular para fluxos que não são compressíveis nem altamente turbulentos, e para fluxos laminares envolvendo fluidos newtonianos e não newtonianos, especialmente aqueles com propriedades elásticas.

### **Método de Volumes Finitos**

O Método de Volumes Finitos é uma técnica numérica que transforma as equações diferenciais parciais que representam leis de conservação sobre volumes diferenciais em equações algébricas discretas sobre volumes finitos (ou elementos ou células). De maneira semelhante a Diferenças Finitas ou ao Método de Elementos Finitos, o primeiro passo no processo de solução é a discretização do domínio geométrico, que, no FVM, é discretizado em elementos não sobrepostos ou Volumes Finitos. As equações diferenciais parciais são então discretizadas/transformadas em equações algébricas, integrando-as sobre cada elemento discreto. O sistema de equações algébricas é então resolvido para calcular os valores da variável dependente para cada um dos elementos.

### 3.3 Geração das Superfícies

#### Escoamento Bidimensional

As superfícies auto-afins são geradas aqui com o método de *Fourier Filtering* (Seção 2.2.6). Para o caso em 2D especificamos o comprimento  $N$  e largura  $m$ , tanto em termos do número de nós, quanto do expoente da rugosidade  $H$ . A superfície é dada por  $y_i$  (medido em unidades da constante de rede), e  $m = \max y_i - \min y_i$ . Como a constante de rede é  $\delta$ , o comprimento do sistema é  $L = N\delta$  e sua amplitude é dada por  $a = m\delta$ . Quando  $L$  deve ser mudado, enquanto  $\delta$  deve ser mantido fixo, nós escalamos  $N \rightarrow \lambda N$  e  $m \rightarrow \lambda m$ . Por outro lado, quando  $\delta$  deve ser mudado, enquanto  $L$  deve ser mantido fixo, deixamos  $N \rightarrow \lambda N$  e mantemos  $m$  fixo. A abertura da fratura  $w$  é mantida fixa.

A Figura 10 mostra uma superfície bidimensional de tamanho  $L = 1024$ , enquanto a Figura 11 mostra a Análise de Flutuação sem Tendência (DFA) da superfície apresentada na figura 10.

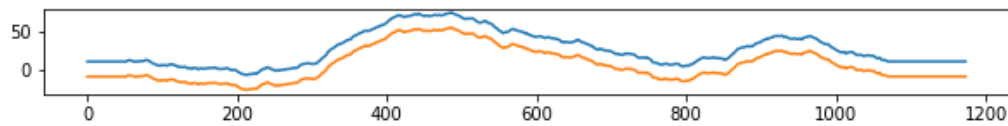


Figura 10: Superfície gerada para o escoamento bidimensional com  $L = 1024$  gerada utilizando o método de *Fourier Filtering*

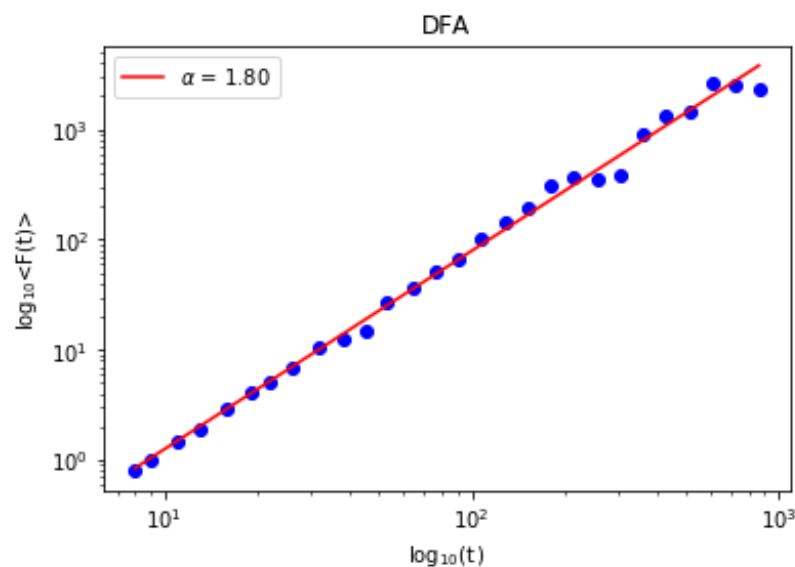


Figura 11: Determinação do Expoente de Hurst ( $H = \alpha - 1$ ) da série de dados da Figura 10 utilizando a Análise de Flutuação sem Tendência (DFA).

## Escoamento Tridimensional

Uma série de superfícies auto-afins bidimensionais foram obtidas como uma generalização do movimento browniano fracionário [80, 81]. Esta construção leva a superfícies auto-afins  $z_H(\mathbf{r})$  que satisfazem a relação de escala geral, como apresentado na seção 2.2.5

$$\langle [z_H(\mathbf{r}_2) - z_H(\mathbf{r}_1)]^2 \rangle \propto |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{2H}. \quad (3.1)$$

e as diferenças entre alturas em diferentes pontos em relação à altura média são obtidas através de uma distribuição gaussiana. Desta forma, o grau de correlação espacial pode ser ajustado pelo expoente de Hurst  $H$ . As superfícies brownianas fracionárias com as correlações espaciais desejadas são geradas aqui com um método de filtragem de Fourier [81, 113] (seção 2.2.6), que é baseado nas propriedades de suas densidades espectrais,

$$S_z(k) \propto \frac{1}{k^\beta} \quad (3.2)$$

onde  $\beta = 2 + 2H$  para superfícies bidimensionais [114].

Na prática, os coeficientes complexos da transformada discreta de Fourier bidimensional (DFT) das superfícies são gerados com fases aleatórias e amplitudes dadas por

$$|c_{ij}| = (i^2 + j^2)^{-\frac{\beta}{2}}, \quad (3.3)$$

levando à densidade espectral dada por 3.2. A superfície é então obtida usando um algoritmo DFT usando  $L$  termos, incluindo todas as escalas de distância de 1 a  $L$ . Depois de aplicando o DFT, as superfícies são deslocadas e normalizadas de modo que  $\langle z \rangle = 0$  e a amplitude  $a \equiv 2/L \sum_i |z_i|$  é a mesma para todas as superfícies. Nas simulações apresentadas aqui  $a = 0.2L$ . Para criar as juntas de fratura tridimensionais, duas superfícies brownianas fracionárias correspondentes com  $L = 512$  são deslocados na direção  $z$  a uma distância  $w$  sem qualquer movimento relativo no plano da fratura, como mostrado no esquema da Figura 12 para  $H = 0.8$ . A abertura do canal  $w$  foi escolhida de modo a ter a mesma ordem das amplitudes das superfícies.

## 3.4 Discretização do Espaço

Uma decisão importante a ser tomada no desenvolvimento de um modelo numérico é a natureza da malha. As malhas poderão ser de natureza estruturada e não estruturada.

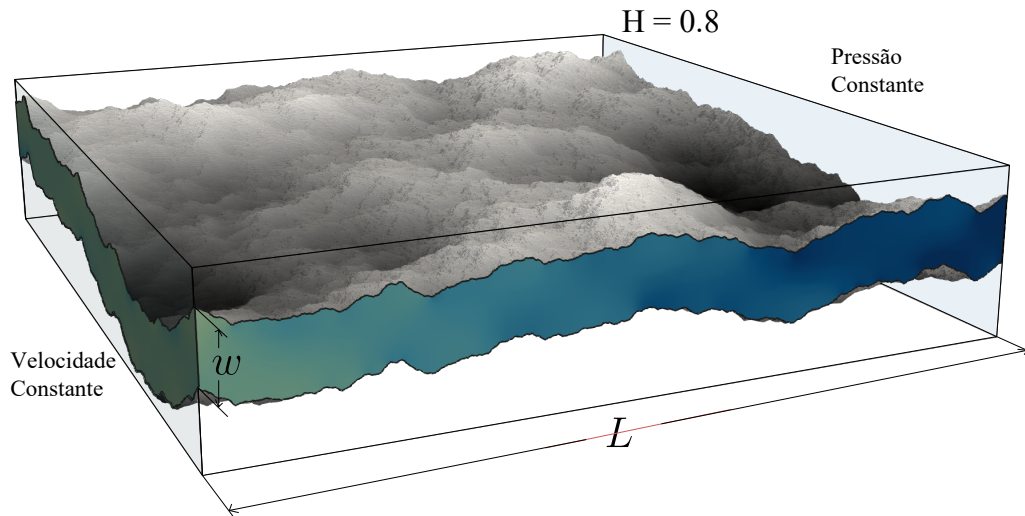


Figura 12: Desenho esquemático da fratura utilizada nas simulações com expoente de rugosidade  $H = 0.8$ , tamanho  $L \times L = 512 \times 512$  com amplitude  $a = 40$  e largura  $w = 40$ . As duas superfícies delimitadoras são complementares e auto-afins.

Uma malha não estruturada é aquela para a qual não há uma regra aparente de formação. As principais vantagens de uma malha estruturada são as seguintes: conexão entre os pontos estabelecidos por uma regra, facilidade de implementação computacional e solução de sistemas lineares facilitada. Dentre as vantagens de uma malha não estruturada podemos citar a facilidade de concentração nas regiões desejadas e o menor número de volumes no domínio.

A solução de um sistema de equações diferenciais pode ser geralmente simplificada através do emprego de uma malha bem construída. O processo de geração de malhas determina o mapeamento que transforma os pontos da malha do domínio físico no domínio transformado.

Nesse trabalho utilizamos um utilitário incluído no *OpenFOAM*, o *snappyHexMesh*. Devido à sua importância, vamos detalhar um pouco mais.

### ***snappyHexMesh***

O *snappyHexMesh* é um utilitário de geração de malhas fornecido com o *OpenFOAM*. Este gera malhas tridimensionais contendo hexaedros e semi-hexaedros, sendo capaz de ler uma geometria de superfícies trianguladas (“*tri-surfaces*”) no formato *STereoLithography* (STL) ou no formato *Wavefront Object* (OBJ) e gerar uma malha em torno desta. É uma ferramenta capaz de mesclar geometrias complexas, adicionar camadas de superfície,

efetuar vários refinamentos entre outras finalidades.

Para executar o *snappyHexMesh*, primeiro criamos uma malha hexagonal de fundo que define a extensão do domínio computacional e um tamanho de malha de nível de base que corresponde a maiores células possível após o final do processo. O processo de geração de uma malha se dá então criando inicialmente uma região de forma retangular em torno de um objeto descrito por uma superfície. Deve ser criada então uma malha de fundo de células hexaédricas que preenche toda a região dentro do limite externo.

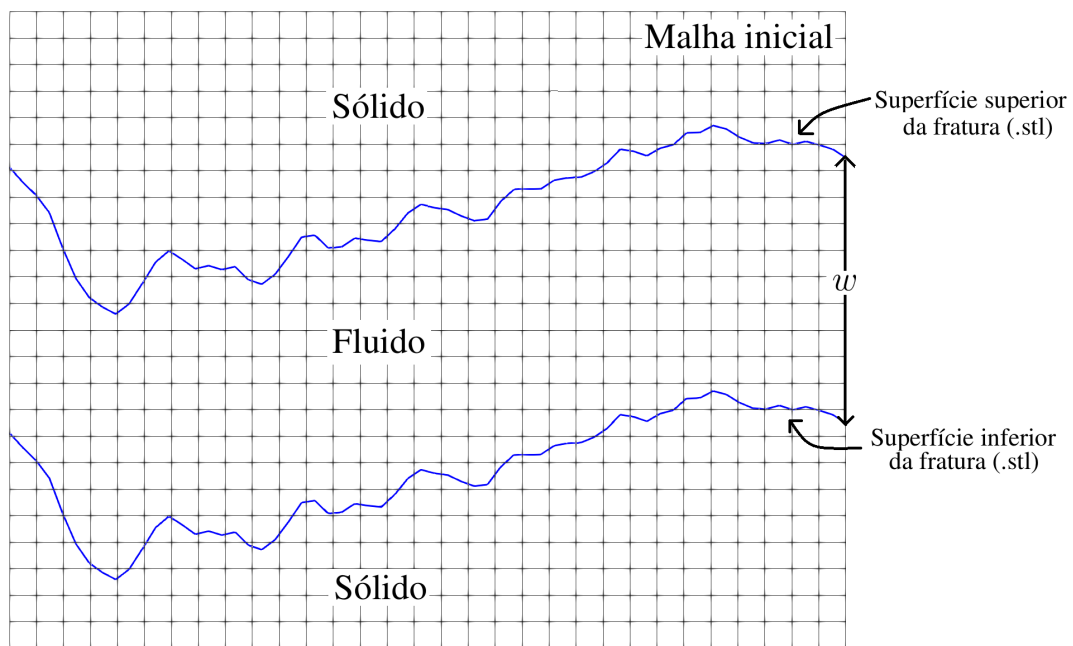


Figura 13: Geração de malha inicial no processo de criação de malhas do *snappyHexMesh*

Isso pode ser feito simplesmente usando o *blockMesh*, um dos geradores de malha mais básicos do *OpenFOAM*. Os seguintes critérios devem ser observados ao criar a malha de fundo: a malha deve ser constituída puramente de hexágonos; o tamanho da *mesh* de cada célula deve ser de aproximadamente 1, caso contrário, a convergência do procedimento é lenta; e deve haver pelo menos uma interseção de uma borda de célula com a “*tri-surface*”, ou seja, uma malha com uma única célula não funcionará. A Figura 13 mostra essa etapa em 2 dimensões e para uma malha pequena para melhor visualização.

A divisão de células é realizada de acordo com a especificação fornecida pelo usuário. O processo de refinamento inicia-se com as células selecionadas de acordo com a borda especificada dentro do domínio. Após o refinamento da borda, as células são selecionadas de forma a dividir a localização das superfícies especificadas, conforme ilustrado na Figura 14. O refinamento pode opcionalmente ser substituído em uma ou mais regiões específicas (entrada ou saída da superfície rugosa, etc.) da superfície STL.



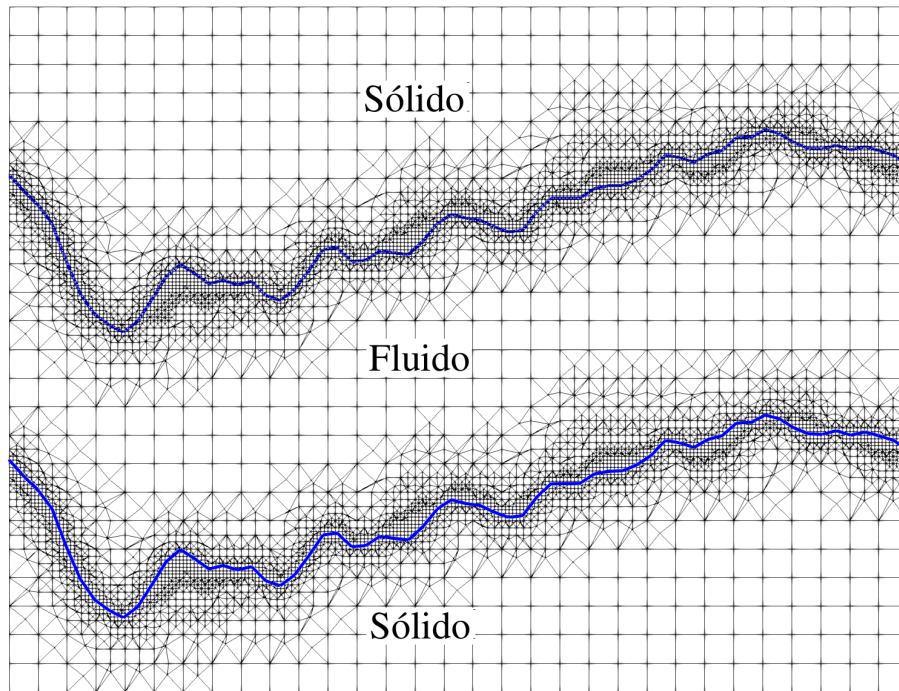


Figura 14: Divisão de células por superfície no processo de malhas *snappyHexMesh*

Uma vez que a divisão da superfície esteja concluída, um processo de remoção da célula será iniciado. A remoção das células requer uma ou mais regiões inteiramente fechadas por uma superfície delimitadora dentro do domínio. A região na qual as células são mantidas é simplesmente identificada por um vetor de localização dentro dessa região. As células são mantidas se, aproximadamente, 50% ou mais de seu volume estiver dentro da região. As células restantes são removidas, conforme ilustrado na Figura 15. Um modo de refinamento é aplicado a cada região, que pode ser o refinamento dentro do volume ou refinamento fora da região do volume. Ainda é possível refinar de acordo com a distância à superfície criando diferentes níveis de refinamento.

A Figura 16 apresenta a malha numérica de uma superfície com expoente de rugosidade  $H = 0.8$ , tamanho  $L \times L = 512 \times 512$  com amplitude  $a = 40$  e largura  $w = 40$  gerada utilizando o *snappyHexMesh*. O refinamento perto da superfície contém aproximadamente  $1400 \times 1400$  células, para valores pequenos de  $H$  esse número pode aumentar até  $2400 \times 2400$ .

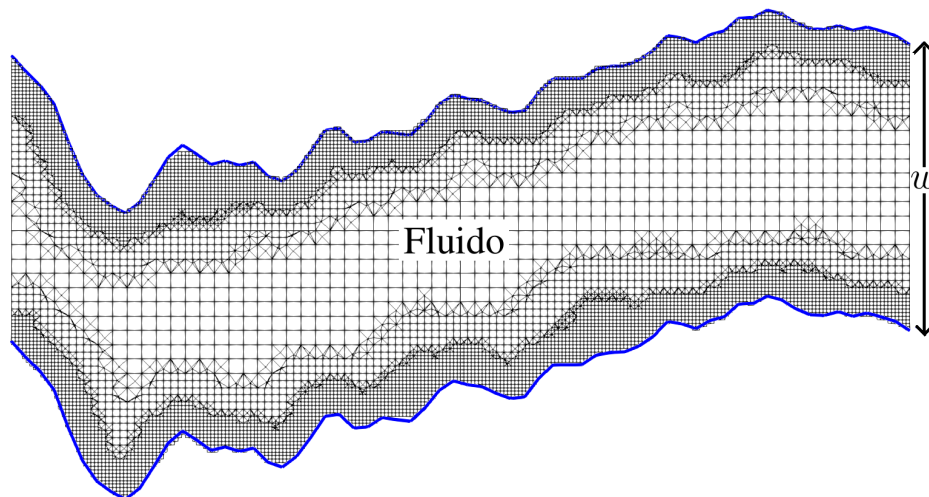


Figura 15: Remoção de células no processo de malhas *snappyHexMesh*

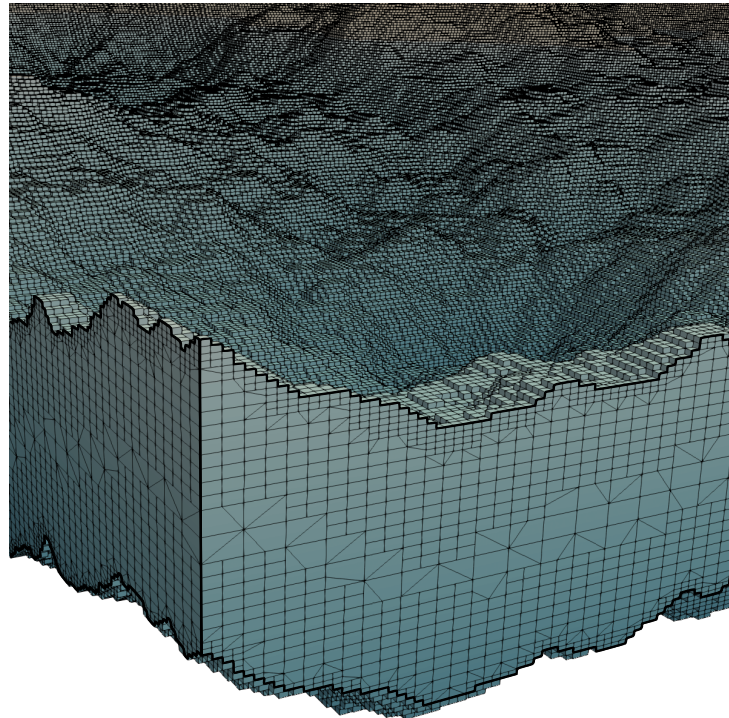


Figura 16: Detalhe da malha numérica de uma superfície com expoente de rugosidade  $H = 0.8$ , tamanho  $L \times L = 512 \times 512$  com amplitude  $a = 40$  e largura  $w = 40$ .

### 3.5 Solução Numérica

Várias fraturas, com rugosidades diferentes, geradas artificialmente foram utilizadas para o estudo de escoamento neste trabalho. Essas fraturas foram geradas de tal forma que as autocorrelações nas flutuações das superfícies que correspondem a suas rugosidades são determinadas por diferentes expoentes de Hurst [1].

Nas simulações bidimensionais a solução numérica das equações 2.36 e 2.37 para os campos de velocidade e pressão na superfície rugosa é obtida através da técnica de discretização por diferenças finitas em volume de controle. Esta técnica consiste na conversão das equações diferenciais parciais que governam o fenômeno em equações algébricas não-lineares, que podem ser resolvidas numericamente [108]. A vantagem de tal técnica e do processo de discretização é a substituição do problema de encontrar soluções exatas e contínuas por soluções discretas no tempo e no espaço. Para a aplicação de tal técnica foi utilizado o software comercial *Fluent*.

Já para as simulações tridimensionais a solução numérica das Eqs. (2.36) e (2.37) para os campos de velocidade e pressão é obtida através de discretização por meio do método de volumes-finitos [112]. Considerando as geometrias complexas envolvidas, inicialmente construímos uma malha não estruturada para as superfícies superior e inferior, que são usadas para criar a malha interna, também não estruturada, com células hexahédricas refinadas próximas à superfície usando solucionador *snappyHexMesh* no *OpenFOAM* [115].

Em nossas simulações, consideramos condições de contorno sem deslizamento em toda a interface sólido-fluido. Além disso, um perfil de velocidade uniforme  $u = (V, 0, 0)$  é imposto na entrada do canal, tomado como o plano  $x = 0$ , enquanto uma pressão constante é imposta na saída  $x = L$ . As condições de contorno do plano de simetria são aplicadas nos limites  $y = 0$  e  $y = L$ .

O efeito da rugosidade sobre o escoamento é estudado para vários regimes, de fraturas aleatórias até fraturas com correlação de longo alcance. As superfícies fraturadas auto-afins foram construídas desta forma para valores do expoente de Hurst  $H$  variando de 0.3 a 0.9. Para o menor expoente de Hurst, nas simulações tridimensionais, após refinamento, o domínio computacional foi discretizado com aproximadamente  $1 \times 10^7$  volumes finitos. Para cada valor de  $H$ , foram construídos cinco diferentes canais para calcular as médias do conjunto e para cada um, simulações com diferentes velocidades de entrada, variando o número de Reynolds  $Re$  de 0.01 a 100 foram realizados. Os critérios de convergência usados nas simulações são definidos em termos de resíduos, ou seja, o grau até o qual as equações de conservação são satisfeitas ao longo do campo de fluxo. Em todas as nossas simulações, a convergência é considerada atingida somente quando cada um dos resíduos fica abaixo  $10^{-6}$ . Os resíduos são as magnitudes de erro das equações à medida que as iterações progridem. Estas incluem as equações governantes, por exemplo, a equação de momento de Navier-Stokes para cada direção (x, y e z em 3D ou apenas x e y para 2D). O resíduo é a diferença entre o resultado anterior e o resultado atual.

Para simulações de três dimensões, as três equações de movimento e a continuidade da equação se combinam para formar quatro equações para quatro incógnitas. Entre os componentes desconhecidos, um é pressão e três velocidades. A pressão não tem uma equação explícita e é por isso que algumas técnicas exclusivas foram criadas para extraí-la de maneira alternativa. A técnica bem conhecida é o algoritmo *SIMPLE*. O princípio do algoritmo é o seguinte. Um campo de pressão estimado é usado na solução das equações de momento. Em seguida, começa a calcular uma nova velocidade, mas em geral elas não se ajustam à equação de continuidade, de modo que as correções das velocidades são determinadas. Com base nas correções de velocidade, é calculada uma correção de pressão que, quando adicionada à pressão original, resulta em uma pressão atualizada. Após a solução das variáveis de problema restantes, a iteração é concluída e todo o processo é repetido.

## 4 Resultados

Várias fraturas, com rugosidades diferentes, geradas artificialmente foram utilizadas para o estudo de escoamento de fluido neste trabalho. Essas fraturas foram geradas de tal forma que as autocorrelações nas flutuações das superfícies que correspondem a suas rugosidades são determinadas por diferentes expoentes de Hurst. As simulações de escoamento foram realizadas por meio da utilização de dois softwares de Dinâmica de Fluidos Computacional, o *Fluent* e o *OpenFOAM*.

O primeiro passo do procedimento foi a geração das superfícies. Para a geração das superfícies utilizadas na análise bidimensional utilizou-se o Método de Filtragem de Fourier [81] (seção 2.2.6) onde várias séries unidimensionais foram geradas para cada expoente de Hurst. Para gerar a superfície com a característica auto-afim, simplesmente deslocamos uma cópia da série de uma distância  $w$ . Para a geração das superfícies utilizadas na análise tridimensional, utilizou-se o Método de Filtragem de Fourier [81] (seção 2.2.6) gerando uma superfície bidimensional e deslocando uma cópia da mesma de uma distância  $w$ . Tanto as superfícies utilizadas no escoamento bidimensional, quanto as superfícies utilizadas no escoamento tridimensional são invariantes sob transformações de escalas anisotrópicas.

O segundo passo foi a divisão do domínio onde o fenômeno ocorre em um conjunto de células ou subdomínios de mesma dimensão, originando uma malha ou rede computacional. As malhas das superfícies bidimensionais foram geradas no *GMSH* e as malhas das superfícies tridimensionais foram geradas no *OpenFOAM* com o utilitário *snappyHexMesh*.

Em seguida, as equações da continuidade e de Navier-Stokes foram aplicadas a cada célula do domínio e resolvidas numericamente, com as condições de contorno apropriadas. O software *Fluent* foi utilizado para a solução das simulações numéricas em  $2D$ , e o *OpenFOAM* foi utilizado para a solução em  $3D$ . Desta maneira, um conjunto de equações acopladas foi obtido. Estas equações, resolvidas numericamente e de forma ite-

rativa, originaram um conjunto de soluções para o campo de velocidades. Tais soluções constituíram-se em um resultado aproximado daquele que obteríamos se pudéssemos resolver analiticamente as equações governantes.

As equações governantes que descrevem a física do fenômeno do escoamento foram discretizadas em uma malha computacional e transformadas em equações algébricas, usualmente não-lineares, para serem resolvidas numericamente e de forma iterativa. Com as condições de contorno apropriadas, obtivemos a solução e os valores das incógnitas nos nós das malhas, os quais, por sua vez, podem ser apresentados graficamente para, então, procedermos a análise do fenômeno em estudo.

## 4.1 Escoamento em Fraturas Bidimensionais

Em nossas simulações bidimensionais, consideramos condições de contorno sem deslizamento ao longo de toda a interface sólido-fluido. Além disso, as mudanças nas taxas de velocidade são assumidas como zero na saída  $x = L$  (condições de contorno sem gradiente), considerando que um perfil de velocidade uniforme,  $u_x(0, y) = U$  e  $u_y(0, y) = 0$ , é imposto na entrada do canal. O número de Reynolds é ajustado em termos da velocidade de entrada do fluido no canal rugoso.

### 4.1.1 Campo de Pressão (2D)

A Figura 17 mostra a pressão média, integrada ao longo da direção vertical para vários valores de expoente de Hurst  $H$  e com número de Reynolds (a)  $Re = 0.01$  e (b)  $Re = 100$ . Em ambas as situações é possível perceber que as pressões mais elevadas ocorrem na entrada do canal e como pode ser visto na Figura 18, onde o campo de pressão é apresentado, o escoamento ocorre em direção às regiões de mais baixas pressões. As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta pressão, respectivamente. Para  $H = 0.4$  a magnitude da pressão varia de  $6.0 \times 10^{-1} Pa$  (regiões em vermelho) até zero (regiões em azul escuro) com  $Re = 0.01$  e de  $1.0 \times 10^4 Pa$  até zero com  $Re = 100$ . Já para  $H = 0.8$  a magnitude da pressão varia de  $2.9 \times 10^{-1} Pa$  (regiões em vermelho) até zero (regiões em azul escuro) com  $Re = 0.01$  e de  $3.4 \times 10^3 Pa$  até zero com  $Re = 100$ .

Este resultado concorda com as predições das Equações de Navier-Stokes, que mostram que o escoamento é regido por um gradiente de pressão negativo.

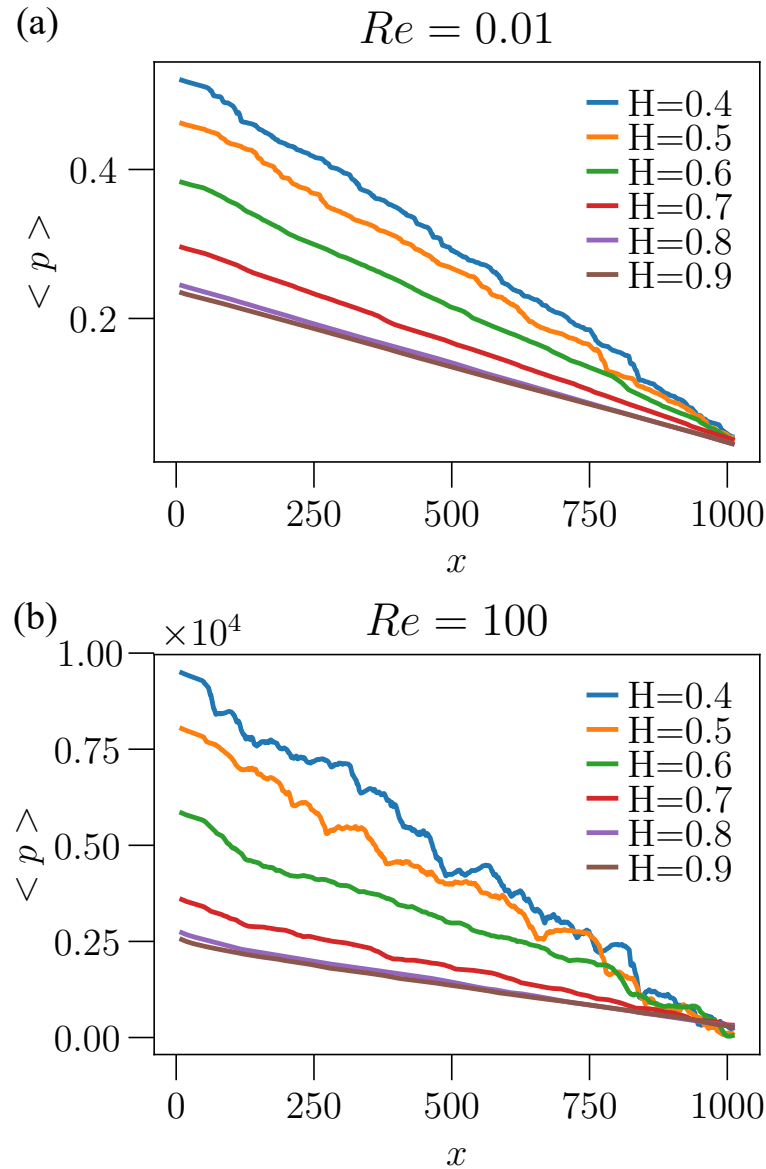


Figura 17: Pressão média em função da direção  $x$  do fluxo para  $H$  variando de 0.4 a 0.9 para (a)  $Re = 0.01$  e (b)  $Re = 100$ . Para cada valor de expoente de Hurst  $H$ , cinco amostras foram geradas e simuladas em uma ampla gama de números de Reynolds.

#### 4.1.2 Resistência Hidráulica (2D)

A Figura 19 mostra os resultados de nossas simulações de fluxo em termos da Resistência Hidráulica  $G$  (Eq. 2.104) e do número de Reynolds  $Re$  (Eq. 2.98) para diferentes valores do expoente de rugosidade  $H$ . Depois de calcular a média de  $G$  num total de 5 realizações para cada valor de  $H$  e uma ampla gama de números Reynolds, nós ajustamos os resultados com a Eq. (2.104) para estimar os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . De acordo com os resultados, observamos uma transição de  $G$  constante (Lei de Darcy) para o comportamento de fluxo não linear em um valor de  $Re$  que depende significativamente da

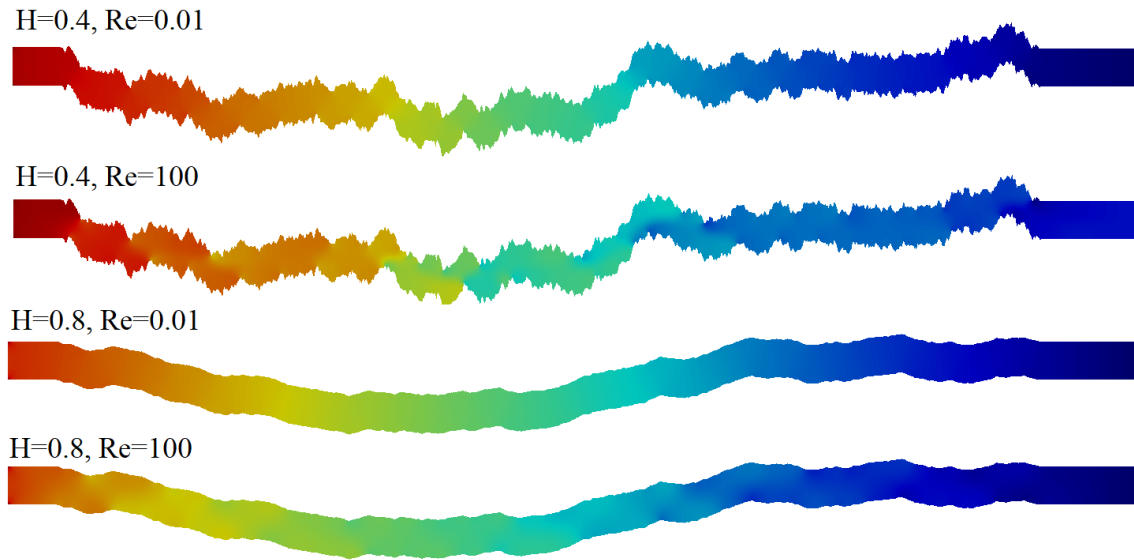


Figura 18: Campos de pressão no interior de superfícies rugosas auto-afins.

rugosidade. Em todos os casos, o intervalo correspondente à lei de Darcy ( $G$  constante) é seguido por um regime não-linear que reflete o efeito da convecção no fluxo. As propriedades de fluxo dentro da fratura são fortemente influenciadas pela geometria áspera e, conseqüentemente, a característica auto-afim se reflete na variabilidade do fluxo. As barras de erro são menores que os símbolos e as linhas sólidas representam o melhor ajuste (*fitting*) aos dados da Equação (2.104).

Em relação aos coeficientes da Equação (2.104), a Figura 20, apresenta que o coeficiente  $\alpha$  geralmente diminui com o expoente da rugosidade  $H$ . Existe um cruzamento em um valor próximo de  $H = 0.5$  separando dois regimes distintos que caracterizam a influência da geometria do canal no parâmetro  $\alpha$ . O valor  $H = 0.5$  corresponde exatamente ao ponto de transição entre a interface auto-afim anti-correlacionado ( $H < 0.5$ ) e correlacionado ( $H > 0.5$ ) [116]. Esta é a primeira vez que uma conexão clara pode ser estabelecida para relacionar o grau de correlação na geometria da interface e o comportamento do fluxo monofásico através de fraturas auto-afins.

Os resultados mostrados na Figura 21 revelam que os coeficientes  $\beta$  e  $\gamma$  também diminuem com  $H$  e exibem cruzamentos semelhantes se comportando de maneira muito similar ao coeficiente  $\alpha$  entre geometrias correlacionadas e anti-correlacionadas.

A Figura 22 mostra resistência hidráulica normalizada  $\bar{G} \equiv G/\alpha w^2$  com  $Re/H$ . O colapso dos dados das simulações indica que o número crítico de Reynolds para o qual os efeitos não-lineares se tornam importantes é proporcional ao expoente de Hurst.



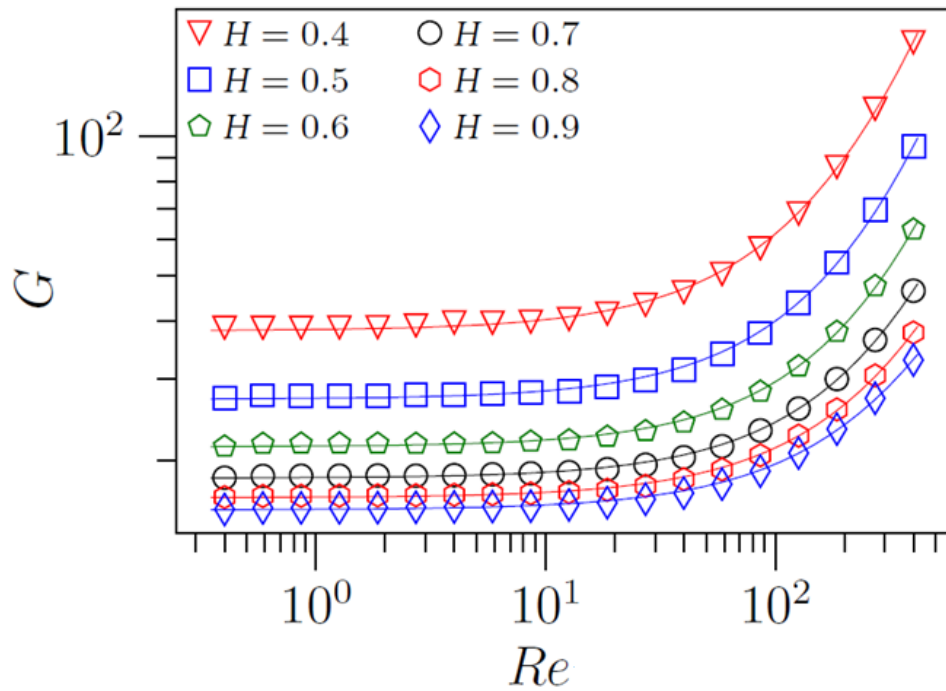


Figura 19: Dependência da resistência hidráulica  $G$  no número de Reynolds para diferentes valores do expoente da rugosidade  $H$ .

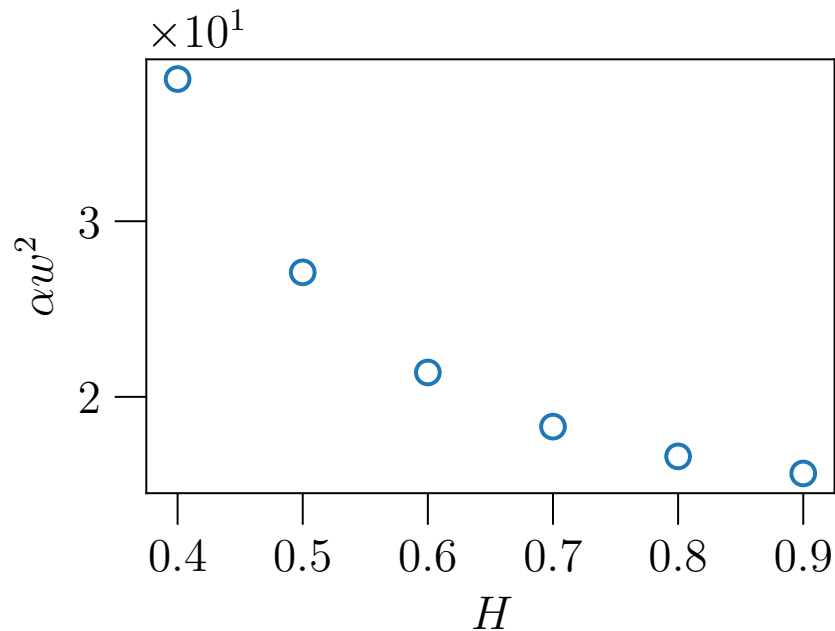


Figura 20: Variação do parâmetro  $\alpha w^2$  na Equação 2.104 com o expoente  $H$  caracterizando a rugosidade da geometria do canal.

### 4.1.3 Campo de Velocidade (2D)

Os perfis de velocidade no interior das superfícies rugosas auto-afins são apresentados nas Figuras 23 e 24. A magnitude da velocidade ao longo das superfícies variam bastante,

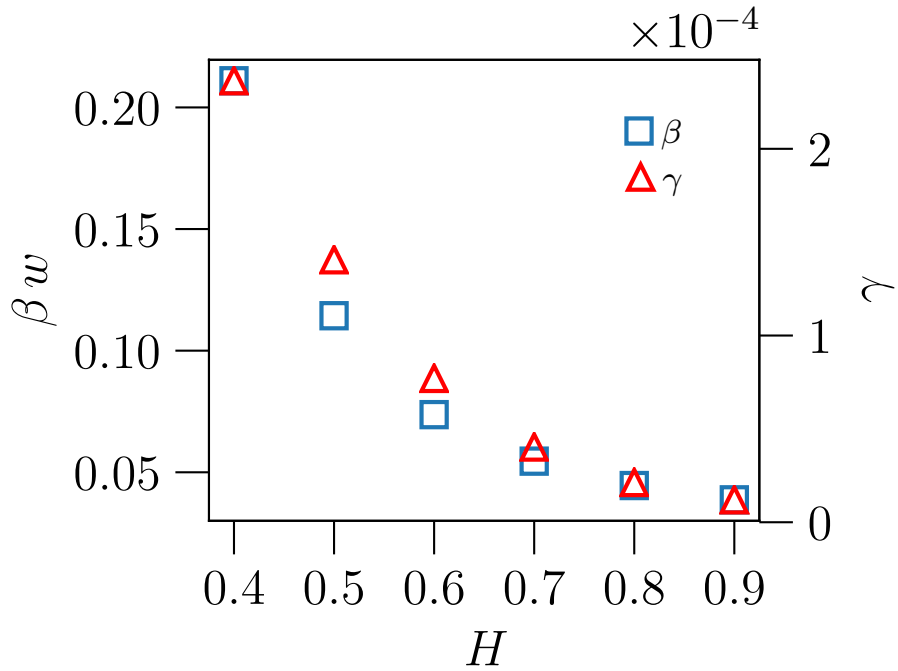


Figura 21: Variação dos parâmetros  $\beta w$  e  $\gamma$  na Equação 2.104 com o expoente  $H$  caracterizando a rugosidade da geometria do canal.

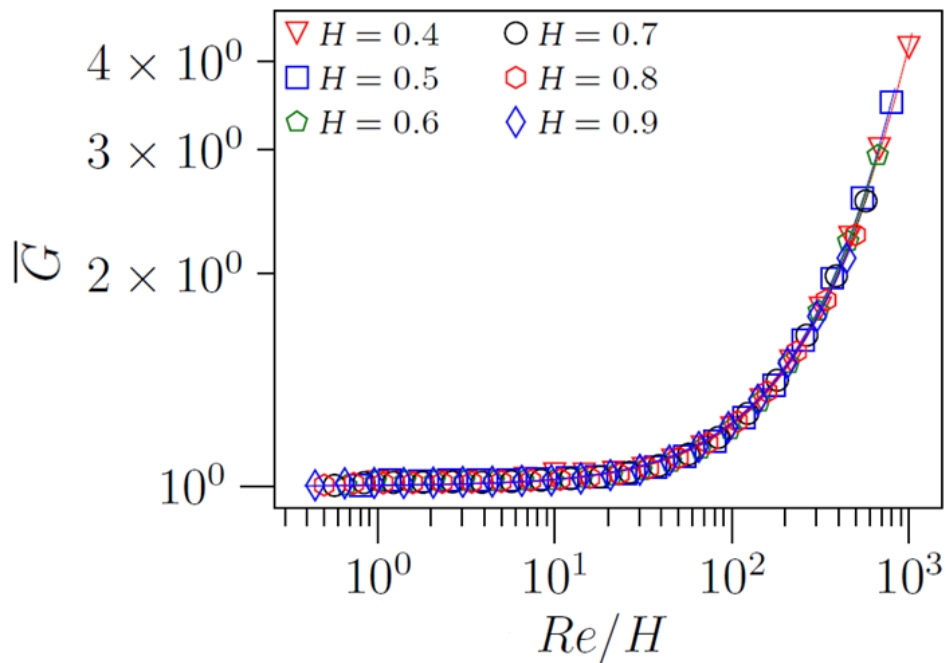


Figura 22: Resistência hidráulica normalizada  $\bar{G}$  como uma função de  $Re/H$ .

sendo máxima nas porções centrais dos canais. Na Figura 23, mostramos o gráfico de contorno da magnitude da velocidade em canais auto-afins típico sob condições de fluxo

viscoso, ou seja, com um baixo número de Reynolds ( $Re = 0.01$ ) e com expoente de Hurst  $H$  variando de 0.4 a 0.9. Os pontos de alta velocidade correspondem às regiões com altas inclinações no canal devido a suas áreas efetivas reduzidas para o fluxo, ou seja, as seções transversais ortogonais às paredes. O fluido é empurrado da esquerda para a direita. As cores que variam do azul ao vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, respectivamente.

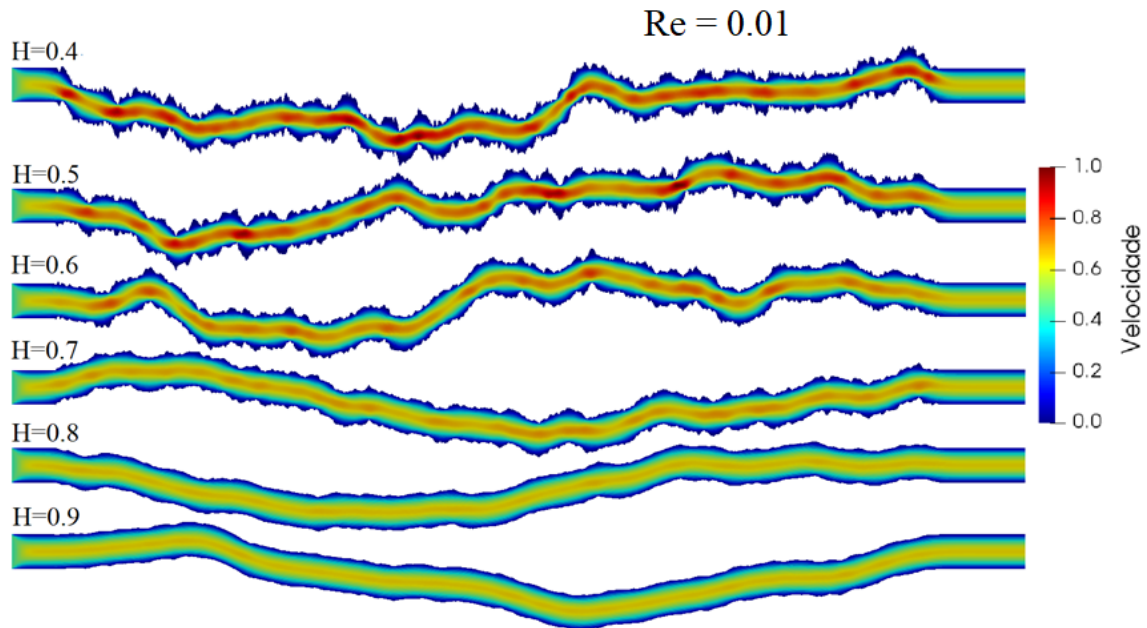


Figura 23: Contorno da magnitude da velocidade local ao longo de realizações típicas de canais rugosos auto-afins para vários expoentes de Hurst  $H$  submetido a um baixo valor de Reynolds ( $Re = 0.01$ ).

A Figura 24 apresenta as mesmas superfícies sujeitas agora a um alto valor de Reynolds ( $Re = 100$ ). É possível perceber que quanto menor o expoente de Hurst mais regiões de alta velocidade surgem ao longo do canal. O mesmo pode ser observado na Figura 23, mas com uma grande diferença na magnitude da velocidade.

Devido a condição de não-deslizamento na superfície da fratura, a velocidade de escoamento é zero nas paredes das Figuras 23 e 24, que está representado pela região em azul escuro. Na Figura 23, a magnitude da velocidade varia de zero (regiões em azul escuro) até  $5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ . Na Figura 24, a variação vai de zero até  $6 \times 10^1 \text{ m/s}$  com o mesmo esquema de cores.

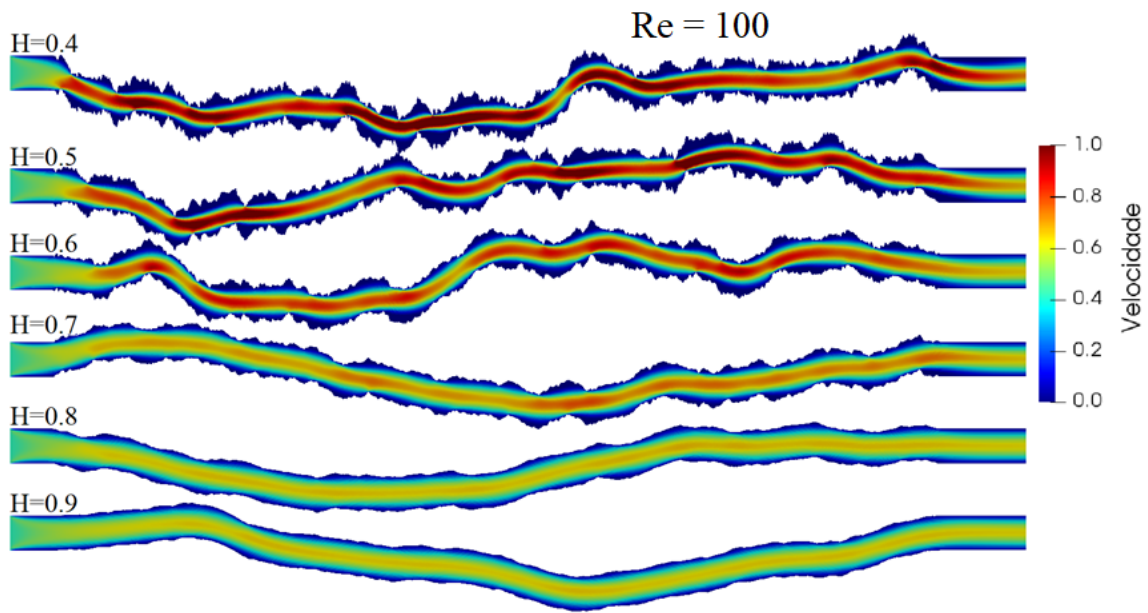


Figura 24: Contorno da magnitude da velocidade local ao longo de realizações típicas de canais rugosos auto-afins para vários expoentes de Hurst  $H$  submetido a um alto valor de Reynolds ( $Re = 100$ ).

#### 4.1.4 Flutuações da Velocidade (2D)

Em seguida, estudamos as flutuações na velocidade de uma partícula sem massa (ou seja, um traçador passivo) liberada bem no centro da entrada do canal. Essa partícula seguiu uma trajetória que coincide com a linha central do canal que divide o fluxo em duas regiões iguais. Na Figura 25, mostramos a variação de sua magnitude de velocidade normalizada  $u^* = u/u_0$ , onde  $u_0$  é a velocidade de entrada do fluido no canal, ao longo da direção do fluxo principal  $x$  em uma realização típica do canal áspero e para dois valores diferentes do número de Reynolds. Para baixos  $Re$  ( $Re = 0.01$ ), a localização e a intensidade dos picos de velocidade correspondem essencialmente à variação espacial da amplitude das encostas locais ao longo da fratura. Em altos  $Re$  ( $Re = 100$ ), a situação fica bem diferente. Devido à inércia, o efeito no campo de fluxo da geometria do canal local revela um comportamento persistente nas flutuações locais de velocidade, quando comparado com os resultados obtidos a baixos  $Re$ . Mais precisamente, sempre que um aumento repentino na velocidade é observado devido à presença de uma estreita constricção no canal, o sinal tende a decair mais lentamente em condições mais altas de  $Re$ , antes que a partícula sofra outra flutuação de amplitude substancial. É interessante notar que a mesma sequência de picos e vales apresentada para  $Re = 0.01$  também pode ser observada para  $Re = 100$ , mas com a diferença de que a velocidade em cada ponto da fratura é geralmente muito maior em valores altos de  $Re$  por causa dos efeitos inerciais, o

que faz com que a velocidade normalizada nesse caso tenha uma amplitude ligeiramente menor.

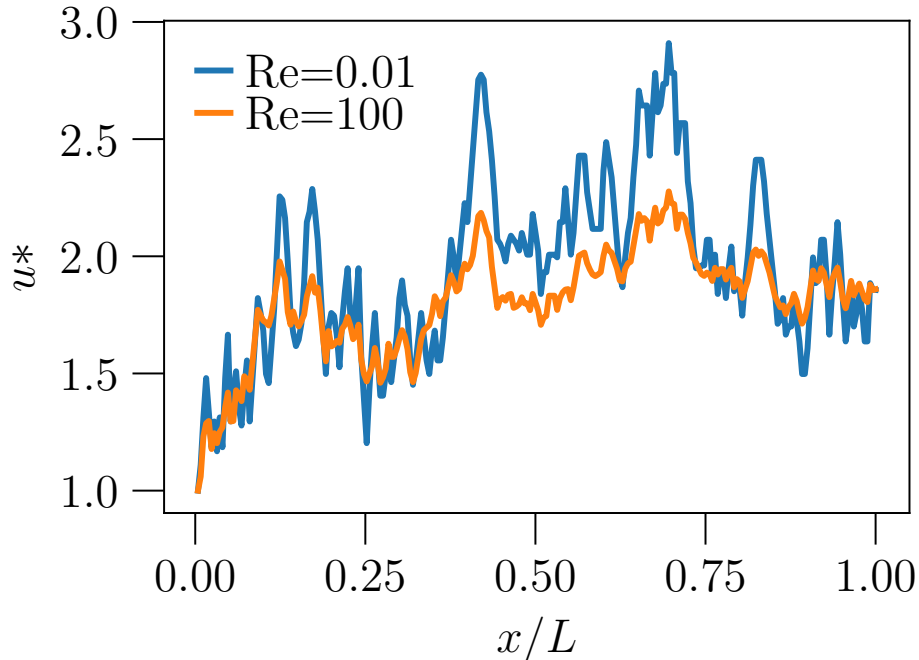


Figura 25: Perfil da magnitude da velocidade ao longo da linha de fluxo localizada no centro do canal rugoso para um campo de fluxo calculado em condições baixas de Reynolds ( $Re = 0.01$ ) e ( $Re = 100$ ).

Devido à interação entre o fluxo e a característica auto-afim das interfaces de fratura utilizadas aqui [116], deve-se esperar que os perfis de velocidade mostrados na Figura 25 contêm um certo grau de correlação. Mais precisamente, as correlações de leis de potência de longo alcance em magnitude de velocidade são identificadas e quantificadas aqui por meio da Análise de Flutuações sem Tendência (*Detrended Fluctuation Analysis* - DFA) [67].

A Figura 26(a) mostra o gráfico logarítmico da função de flutuação sem tendência  $F(\Delta x)$  calculada a partir de 5 realizações de perfis de magnitude de velocidade (ver Figura 25) para quatro valores diferentes de número de Reynolds. As duas linhas retas mostram a melhor lei de potência para os dados nas regiões de escala. Os resultados apresentados na Figura 26 mostram que, independentemente do número de Reynolds, a função  $F(\Delta x)$  exibe um regime de lei de potência altamente correlacionado ( $\zeta = 1.6 \pm 0.03$ ) em pequenas escalas de comprimento seguidas por uma escala tipicamente não correlacionada ( $\zeta = 0.5 \pm 0.01$ ) em valores maiores do que  $\Delta x$ . Ou seja, a diferença entre os coeficientes indica a passagem de um alta correlação ( $\zeta \approx 1.6$ ) para um não correlação entre as séries

( $\zeta \approx 0.5$ ).

A Figura 26(b) mostra que a função  $F(\Delta x)$  é invariante com  $Re$  para  $Re < 10$ . A diferença é que, acima de um valor suficientemente alto de  $Re$  (Figura 26(b)), o cruzamento de comportamento correlacionado para não correlacionado começa a aumentar com  $Re$ . Isso é compatível com uma análise qualitativa, baseada na inspeção dos perfis na Figura 25. O primeiro regime (altamente correlacionado) é uma consequência direta da auto-afinidade do canal, induzindo correlações de longo alcance na velocidade do traçador, onde um grande expoente denota o aspecto fracionário-browniano do sinal.

## 4.2 Escoamento em Fraturas Tridimensionais

### 4.2.1 Campo de Pressão (3D)

A Figura 27 mostra a pressão média integrada ao longo do canal para valores de expoente de Hurst (a)  $H = 0.2$  com número de Reynolds  $Re = 59$  e (b)  $H = 0.8$  e  $Re = 579$ . Em ambas as situações, é possível perceber que as pressões mais elevadas ocorrem na entrada do canal, e como pode ser visto na Figura 28, onde o campo de pressão é apresentado, o escoamento ocorre em direção às regiões de mais baixas pressões. As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta pressão, respectivamente. Este resultado concorda com as predições das Equações de Navier-Stokes que mostram que o escoamento é regido por um gradiente de pressão negativo.

### 4.2.2 Resistência Hidráulica (3D)

A Figura 29 mostra os resultados de nossas simulações de fluxo em termos da Resistência Hidráulica  $G$  e do número de Reynolds  $Re$  para diferentes valores do expoente de rugosidade  $H$ . Depois de calcular a média de  $G$  num total de 5 realizações para cada valor de  $H$  e uma ampla gama de números Reynolds, nós ajustamos os resultados com a Eq. (2.104) para estimar os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . De acordo com experimentos de fluxo real, observamos uma transição de  $G$  constante (Lei de Darcy) para o comportamento de fluxo não linear em um valor de  $Re$  que depende significativamente da rugosidade. Pode-se ver claramente que também nas superfícies tridimensionais a resistência hidráulica diminui com o expoente de Hurst para todos os  $Re$ . Isto significa que a permeabilidade aumenta com a rugosidade. Em todos os casos, o regime que corresponde à lei de Darcy é seguido por um regime não-linear que reflete o efeito de convecção do fluxo. As propri-

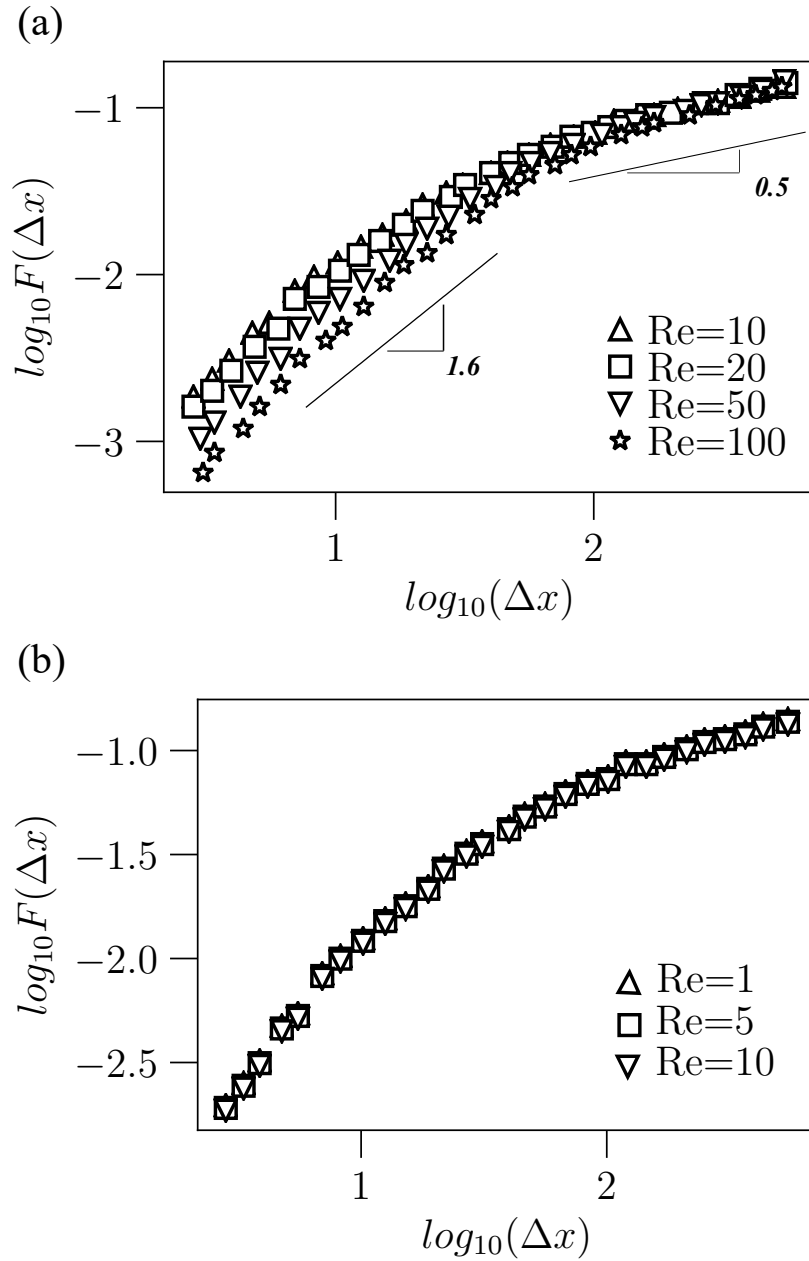


Figura 26: Gráfico logarítmico da função de flutuação sem tendência  $F(\Delta x)$  calculada a partir de 5 realizações de perfis de magnitude de velocidade para Reynolds (a)  $Re = 10$ ,  $Re = 20$ ,  $Re = 50$  e  $Re = 100$  e (b)  $Re = 1$ ,  $Re = 5$  e  $Re = 10$ .

idades de fluxo dentro da fratura são fortemente influenciadas pela geometria áspera e, conseqüentemente, a característica auto-afim se reflete na variedade de propriedades de fluidez. As barras de erro são menores que os símbolos e as linhas sólidas representam o melhor ajuste (*fitting*) aos dados da Equação (2.104).

Para pequenos  $Re$ , a permeabilidade aumenta com  $H$ , aproximando-se do valor limite para placas paralelas  $k_0 = 1/\alpha_0$ . De fato, a Figura 30 mostra que o coeficiente  $\alpha$  decai exponencialmente, seguindo muito de perto a relação  $(\alpha - \alpha_1)/\alpha_0 = b \exp(-H/\eta)$ , com

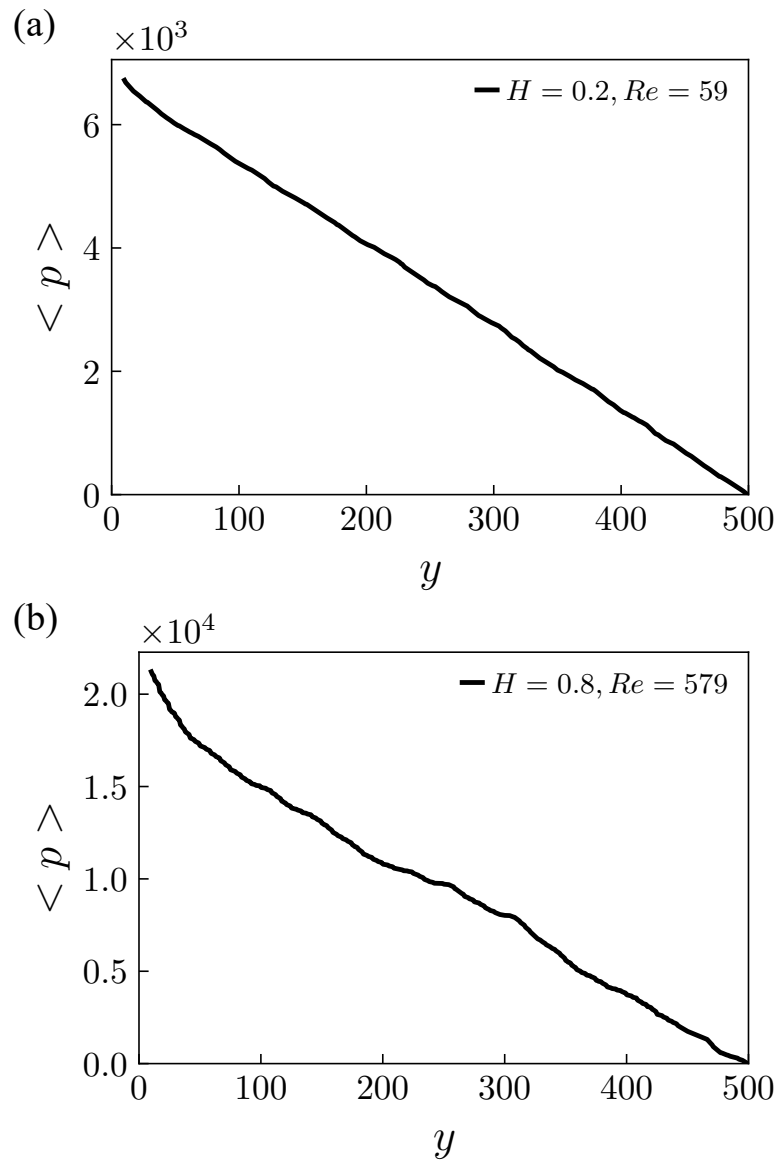


Figura 27: Queda de pressão média ao longo da direção do fluxo para (a)  $H = 0.2$  e  $Re = 59$  (b)  $H = 0.8$  e  $Re = 579$ .

$\alpha_1/\alpha_0 = 1.22 \pm 0.01$ ,  $b = 24.8 \pm 1.0$ , e  $\eta = 0.16 \pm 0.01$ , representada pela linha sólida na Figura 30.

O coeficiente  $\alpha$  diminui monotonicamente com o expoente de Hurst  $H$ . Também é possível argumentar, de acordo com a Figura 31 que os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  não são todos independentes, obedecendo às seguintes relações  $\beta w \propto \alpha w^2/H$  e  $\gamma \propto \alpha w^2/H^2$ .

A Figura 29 também indica que as contribuições não lineares para a resistência hidráulica se tornam importantes em números de Reynolds menores, à medida que o expoente de Hurst  $H$  diminui. Para medir esse comportamento, geramos a Figura 32 com a resistência hidráulica normalizada pela permeabilidade inversa,  $\bar{G} \equiv G/\alpha w^2$  como uma



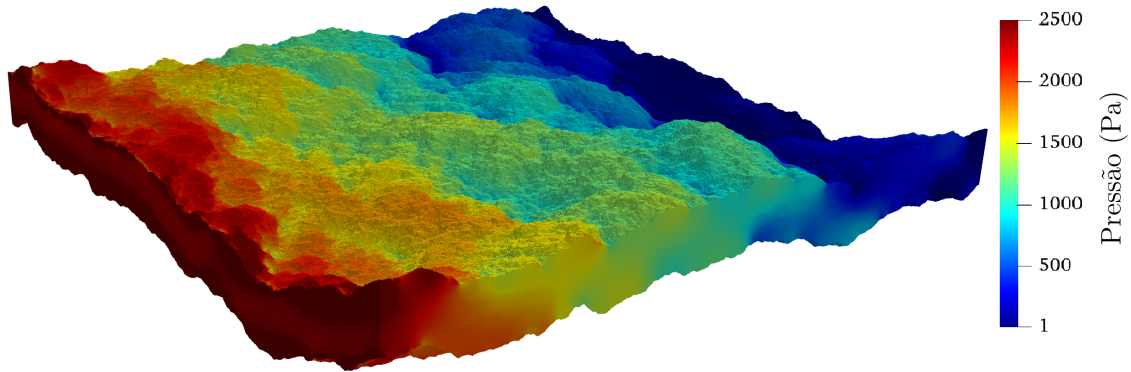


Figura 28: Campos de pressão no interior de superfícies rugosas auto-afins. A magnitude da pressão varia desde  $2.5 \times 10^2 Pa$  (regiões em vermelho) até 1 (regiões em azul escuro).

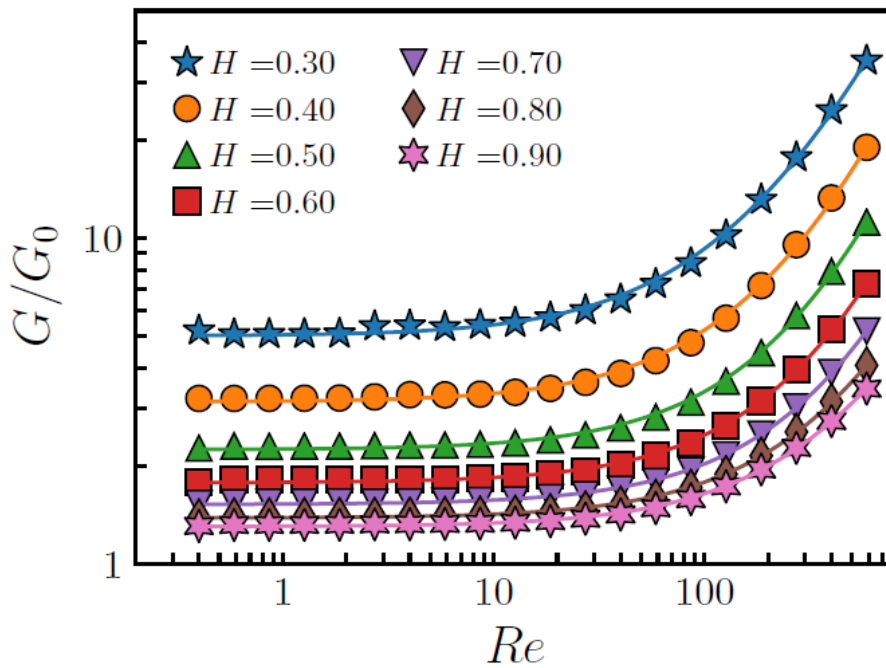


Figura 29: Dependência da resistência hidráulica  $G$  no número de Reynolds para diferentes valores do expoente da rugosidade  $H$ .

função do número de Reynolds dividido pelo expoente de Hurst,  $Re/H$ . É possível ver que com essa escala simples todas as curvas da Figura 29 caem em uma única curva. Esse colapso é uma indicação de que o início das contribuições não-lineares para a resistência hidráulica aumenta aproximadamente linearmente com o expoente da rugosidade  $H$ , sugerindo um efetivo número de Reynolds que leva em conta a rugosidade superficial dada simplesmente por  $Re' = Re/H$ . De fato, uma escala perfeita também significaria que os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  não são todos independentes, obedecendo às relações  $\beta w H \propto \alpha w^2$  e  $\gamma H^2 \propto \alpha w^2$ .

Na Figura 33 plotamos o  $\beta w h$  como uma função de  $\alpha w^2$ , e a linha sólida representa

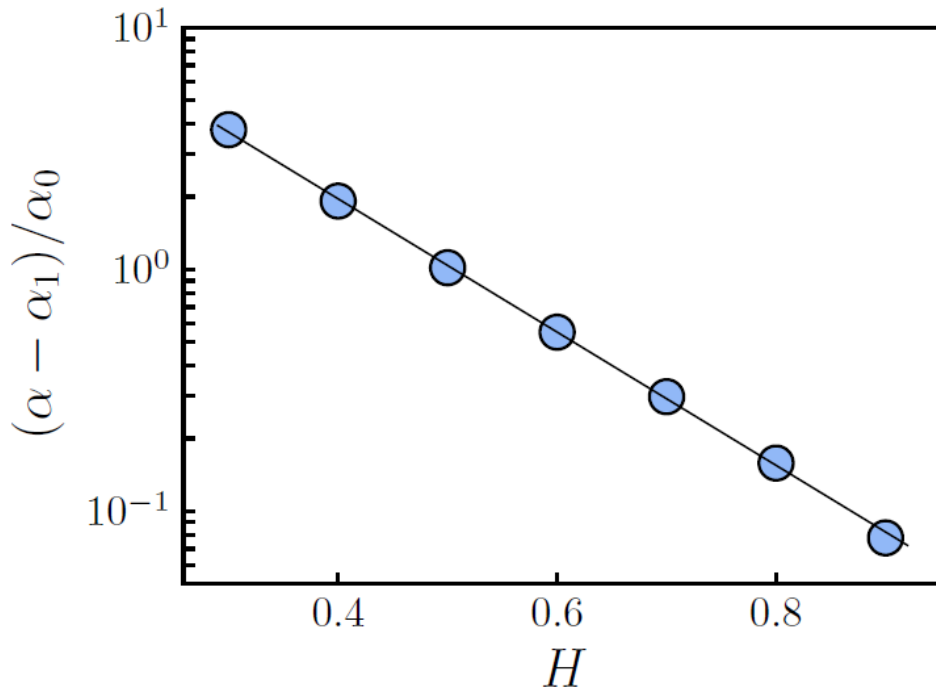


Figura 30: Variação do parâmetro  $\alpha$  como na Eq. (2.104) com o expoente  $H$ . As barras de erro são menores que os tamanhos simples. A linha tracejada corresponde a um ajuste  $\alpha/\alpha_0 - a = be^{-ch}$ , com  $a = 1.22 \pm 0.01$ ,  $b = 24.8 \pm 1.0$  e  $c = 6.3 \pm 0.1$ , as barras de erro são menores que os símbolos.

que  $\beta H/\alpha_0 w = c \alpha w^2$ , com  $c = 0.0023 \pm 0.0001$  para uma aproximação muito boa. A inserção da Figura 33 indica que a relação entre  $\gamma H^2$  e  $\alpha w^2$  desvia do comportamento linear esperado, especialmente para os menores expoentes de Hurst.

O efeito da rugosidade da superfície na resistência hidráulica pode ser melhor compreendido se voltarmos nossa atenção para as distorções no campo de velocidade local quando as forças inerciais se tornam importantes em comparação com as forças viscosas. Esta condição é satisfeita com números menores de Reynolds para expoentes de Hurst menores.

### 4.2.3 Campo de Velocidade (3D)

Na Figura 34(a), mostramos o gráfico de contorno da magnitude da velocidade em um canal auto-afim típico sob condições de fluxo viscoso, ou seja, com baixo número de Reynolds ( $Re = 60$ ) para  $H = 0.2$ . Duas seções transversais diferentes ao longo da direção do fluxo são apresentadas. O fluido esco da esquerda para a direita. Podemos ver que, mesmo em canais tridimensionais, as regiões de alta velocidade correspondem àquelas com gradiente médio elevado na geometria do canal na direção do fluxo, um com-

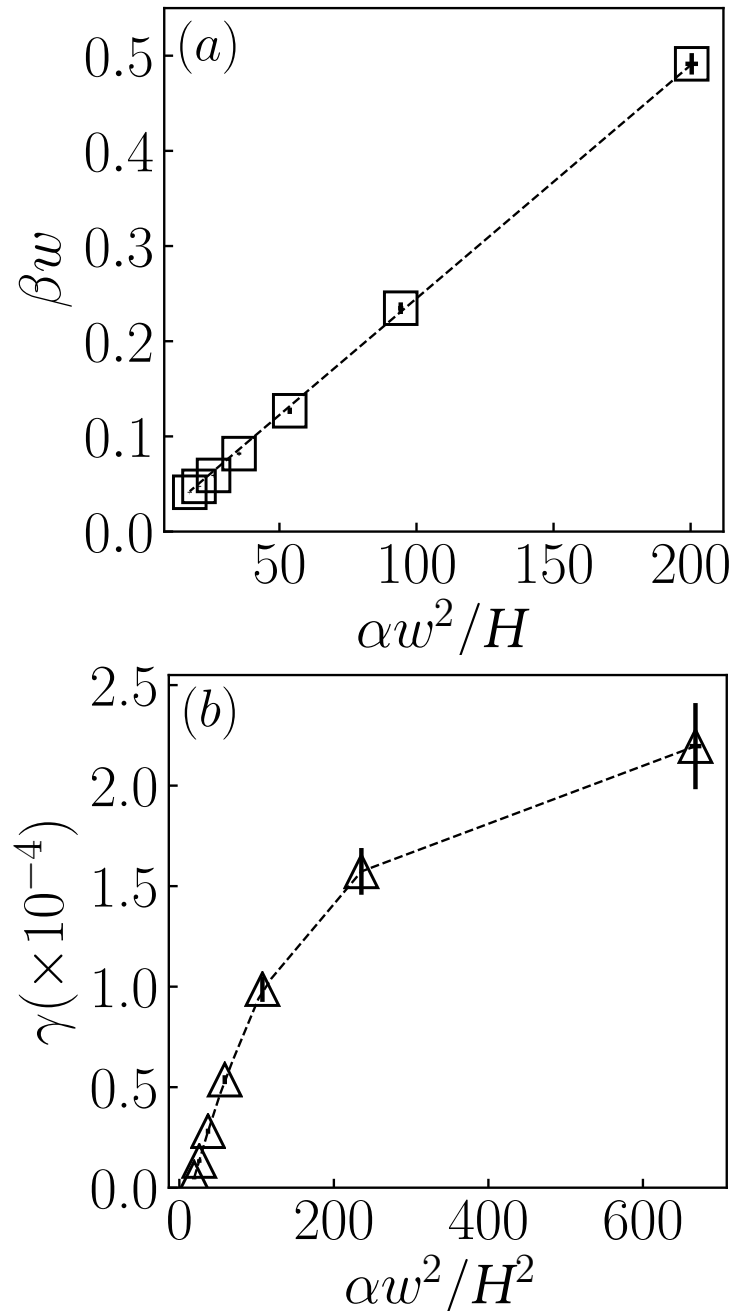


Figura 31: (a) Variação do parâmetro  $\beta w$  em função de  $\alpha w^2/H$  e (b)  $\gamma$  em função de  $\alpha w^2/H^2$ .

portamento que é similar a áreas efetivas reduzidas para o fluxo nessas regiões. Este efeito é menos pronunciado para expoentes de Hurst maiores, como mostrado na Figura 34(b), que mostram os mesmos gráficos de contorno para  $H = 0.8$ . As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, respectivamente, normalizadas de 0 a 1 em cada condição.

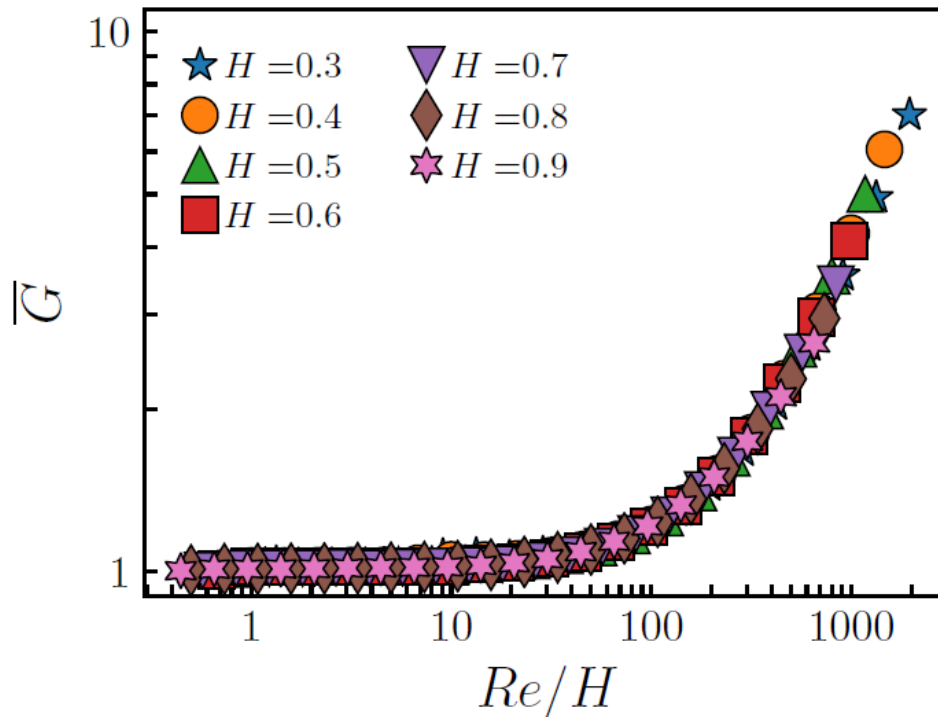


Figura 32: Resistência hidráulica normalizada  $\bar{G} \equiv G/\alpha w^2$  como uma função de  $Re/H$ . O colapso dos dados da simulação em uma única curva é uma indicação de que o início das contribuições não-lineares à resistência hidráulica aumenta aproximadamente linearmente com o expoente de Hurst.

#### 4.2.4 Canais Preferenciais (3D)

A Figura 35 mostra o gráfico de contorno da amplitude da velocidade na superfície no centro do canal para  $H = 0.2$ , tanto para  $Re = 20$  em (a), quanto para  $Re = 420$  em (b). Para ambos os valores de  $Re$  é possível observar evidências da formação de canais complexos de fluxo de fluidos, bem como a presença de regiões estagnadas no campo de fluxo, sendo o efeito mais forte para maiores  $Re$ . Este tipo de canalização foi observado em amostras de laboratório [117] e simulações computacionais para fluidos newtonianos viscosos [47, 54] para canais com distribuições heterogêneas de abertura devido ao deslocamento de cisalhamento entre as superfícies superior e inferior da fratura. Para estes resultados apresentados na Figura 35, não há deslocamentos de cisalhamento, e argumentamos que a canalização de fluxo surge apenas devido a efeitos inerciais. O mesmo comportamento pode ser visualizado na Figura 36 para  $H = 0.4$  com valor de Reynolds (a)  $Re = 20$  e (b)  $Re = 580$ .

É importante salientar que temos um canal onde a superfície de cima é paralela a superfície de baixo com uma abertura  $w$  constante e esses canais que surgem durante o escoamento se devem aos efeitos inerciais.

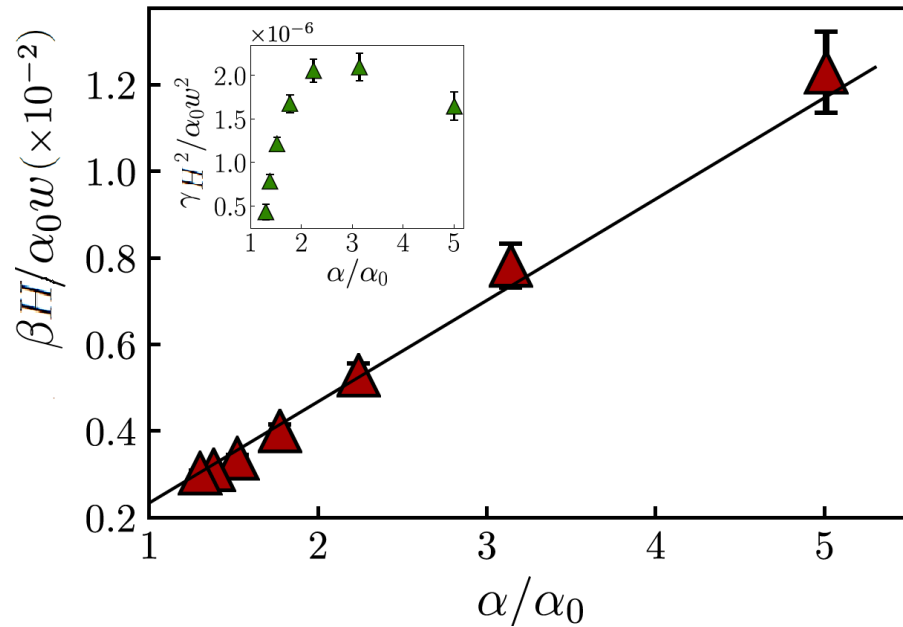


Figura 33: O parâmetro  $\beta H/\alpha_0 w$  como função de  $\alpha/\alpha_0$ . A linha sólida corresponde a um ajuste aos dados usando  $\beta H/\alpha_0 w = c\alpha/\alpha_0$  com  $c = 0.0023 \pm 0.0001$  e coeficiente de correlação de Pearson  $R = 0.9993$ . A inserção mostra a relação entre o parâmetro  $\gamma H^2$  e  $\alpha w^2$  que se desvia da linearidade esperada, especialmente para pequenos expoentes de Hurst.

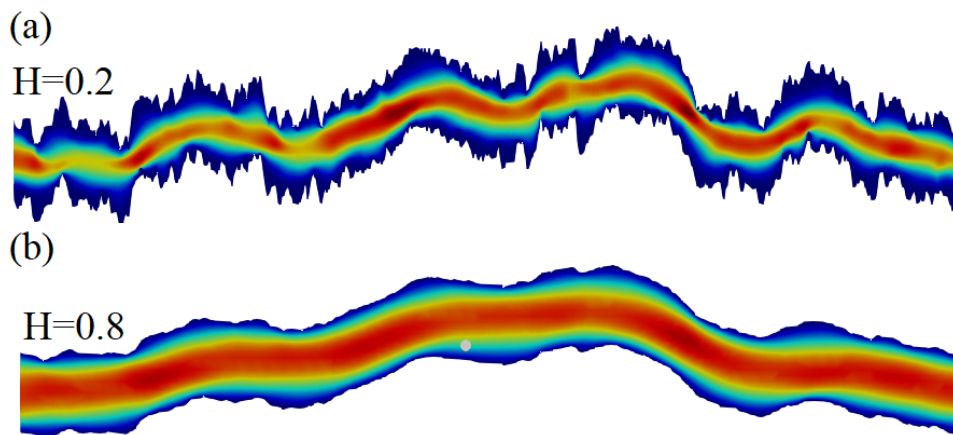


Figura 34: Gráficos de contorno típicos do campo de magnitude da velocidade para uma seção transversal do canal paralela à direção do fluxo para baixo um número de Reynolds  $Re = 60$  com (a)  $H = 0.2$  e (b)  $H = 0.8$ .

A Figura 37 mostra gráficos de contorno do campo de magnitude de velocidade para diferentes seções transversais perpendiculares à direção do fluxo principal, em diferentes posições  $y$  ao longo do canal, para (a)  $H = 0.8$  e (b)  $H = 0.4$ , com  $Re = 100$ . Linhas de fluxo do campo de velocidade também são mostradas. Para o maior expoente de Hurst, as flutuações no campo de velocidade local são um tanto suaves, com a velocidade máxima perto do centro do canal sendo aproximadamente  $(3/2)U$  como esperado para

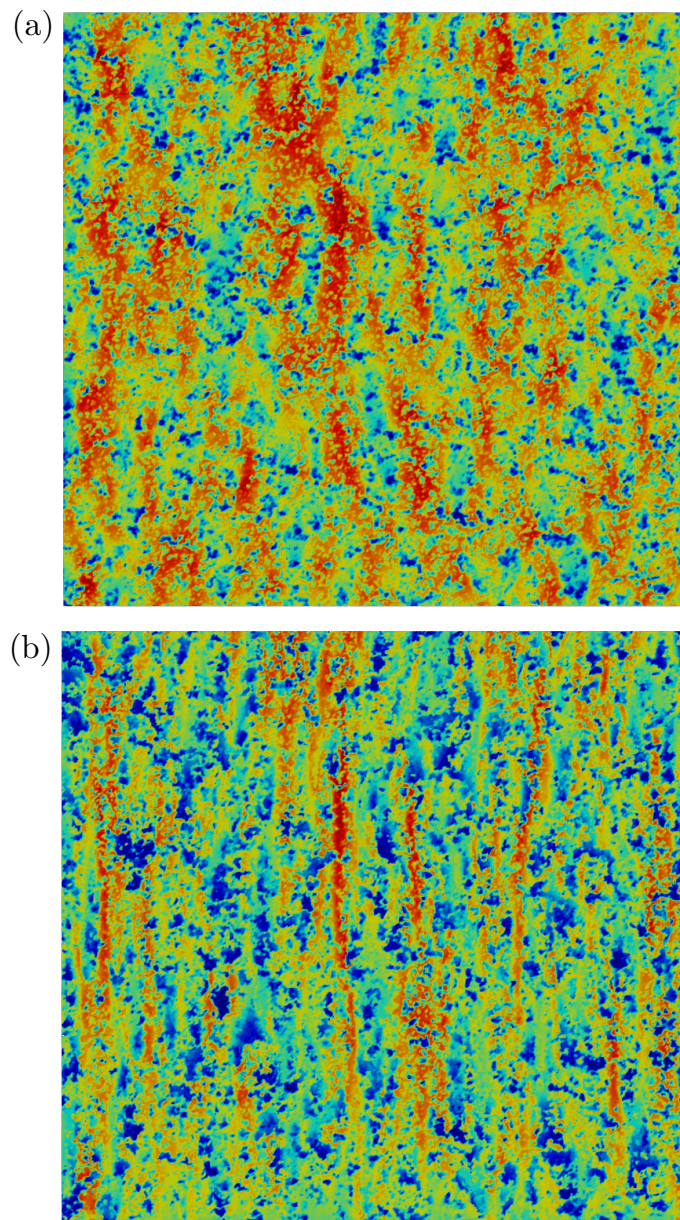


Figura 35: Contorno de amplitude de velocidade na superfície no centro do canal para  $H = 0.2$ . (a)  $Re = 20$  e (b)  $Re = 420$ . As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, respectivamente, normalizadas de 0 a 1 em cada condição.

placas paralelas. Para  $H = 0.4$ , no entanto, a situação é bastante diferente. O campo de velocidade é mais confinado, com regiões de fluxo estagnado. Como consequência, a magnitude máxima da velocidade se aproxima de  $(5/2)U$ , efetivamente aumentando o número de Reynolds, como sugerido pelo colapso na Figura 32. Um aumento na magnitude da velocidade devido à desordem local na morfologia da superfície pode então persistir e se propagar ainda mais na junção da fratura, formando “canais preferenciais” de fluxo de fluido.

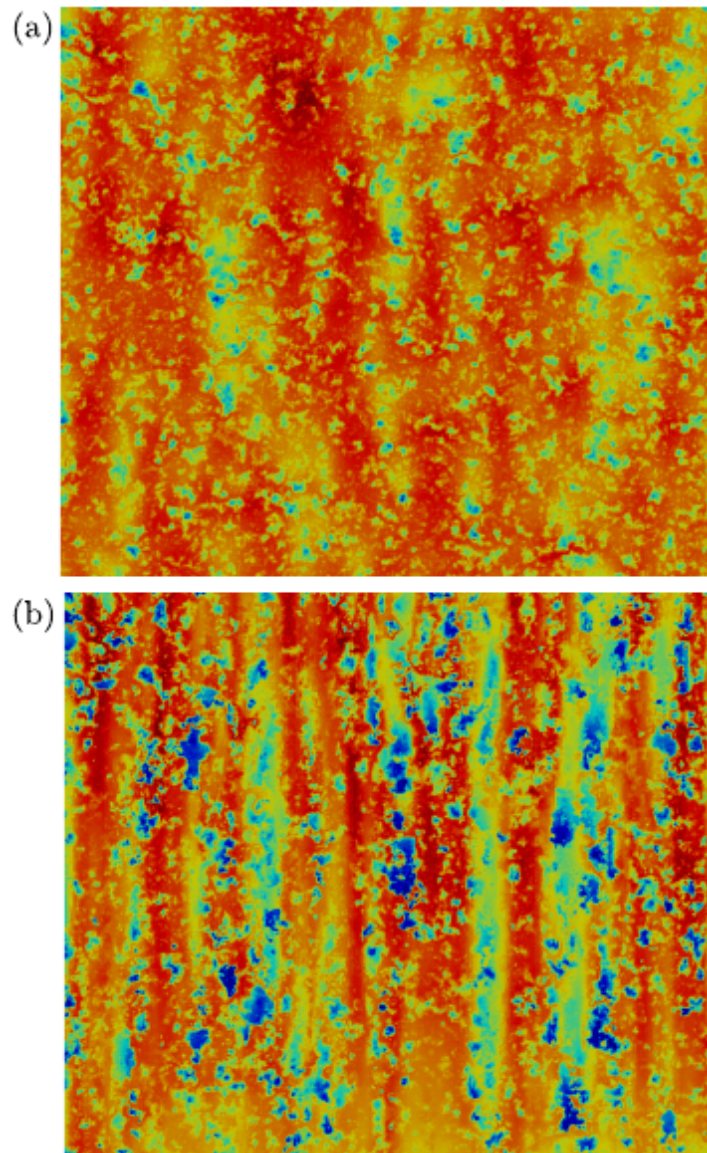


Figura 36: Contorno de amplitude de velocidade na superfície no centro do canal para  $H = 0.4$ . (a)  $Re = 20$  e (b)  $Re = 580$ . As cores que variam de azul para vermelho correspondem a magnitudes de baixa e alta velocidade, normalizadas de 0 a 1 em cada condição.

Este efeito de canalização pode ser medido estatisticamente em termos de índice de participação  $\pi$ , que está relacionado com a distribuição espacial da energia cinética no escoamento [57]. O índice de participação pode ser definido como

$$\pi = \frac{\langle e \rangle^2}{\langle e^2 \rangle} \quad (4.1)$$

Onde  $\langle e^n \rangle = (1/V) \iiint (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^n d^3\mathbf{r}$  é o  $n^{th}$  momento da energia cinética, com  $V$  o volume do sistema. Se houver igual partição de energia cinética  $\pi \rightarrow 1$ . Considerando que se o campo de fluxo é fortemente localizado  $\pi \rightarrow 1/V \approx 0$  para um sistema suficientemente

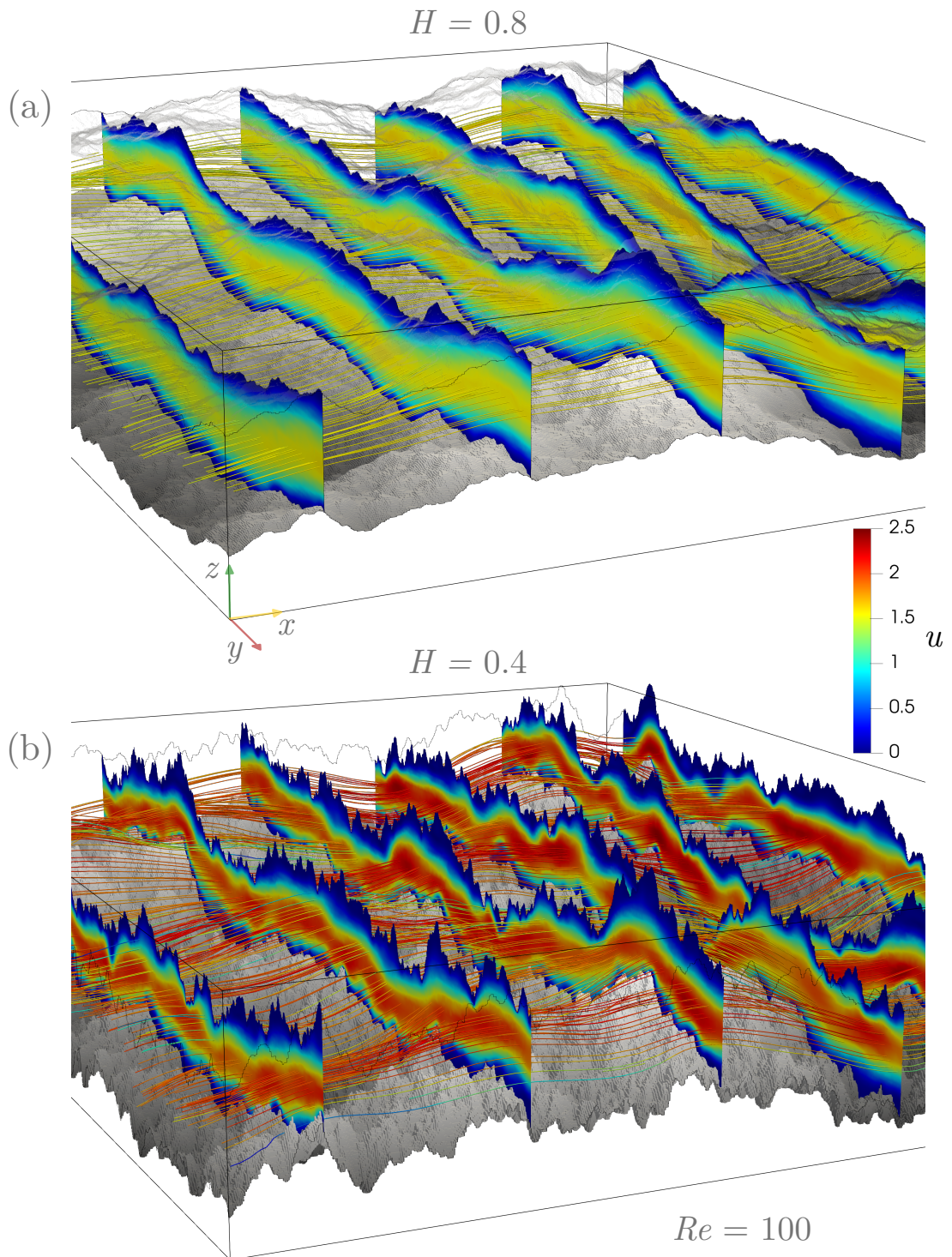


Figura 37: Gráficos de contorno do campo de magnitude da velocidade para diferentes seções transversais do canal perpendiculares à direção do fluxo principal para  $Re = 100$ . (a)  $H = 0.8$  e (b)  $H = 0.4$ .

grande. Para um fluido que flui entre duas placas paralelas, devido ao confinamento parabólico, é possível obter analiticamente o índice de participação, dado por  $\pi_0 = 0.7$ .



Nós calculamos o índice de participação  $\pi$  para nossas simulações, para um número fixo de Reynolds,  $Re = 100$ , para diferentes expoentes de Hurst, com uma média de cinco realizações para cada  $H$ . Os resultados são mostrados na Figura 38. Como o expoente de Hurst se aproxima de 1, o índice de participação tende a  $\pi_0$  (marcadores vermelhos na Figura 38), novamente corroborando que o sistema se comporta como uma fratura de placas paralelas. O índice de participação decai monotonicamente à medida que o expoente de Hurst diminui, indicando um confinamento mais forte. A Figura 38 também exibe o índice de participação calculado apenas para a superfície formada pela translação da superfície inferior do canal  $w/2$  na direção  $z$ , denominada como nível da superfície  $w/2$  na Figura (marcadores triangulares). Neste caso, para  $H \rightarrow 1$ , o índice de participação  $H \rightarrow 1$ , indicando que a energia cinética é homoganeamente distribuída nesta superfície. Novamente o  $\pi$  diminui com a diminuição de  $H$ , refletindo a formação de canais quase unidimensionais no sistema para pequenos expoentes de Hurst, como pode ser visto na inserção da Figura 38. Este confinamento adicional aumenta os efeitos não lineares. Este tipo de canalização foi observado em amostras de laboratório [117] e simulações computacionais para fluidos newtonianos viscosos [47, 54] para canais com distribuição de abertura heterogênea devido ao deslocamento de cisalhamento entre as superfícies superior e inferior da fratura.

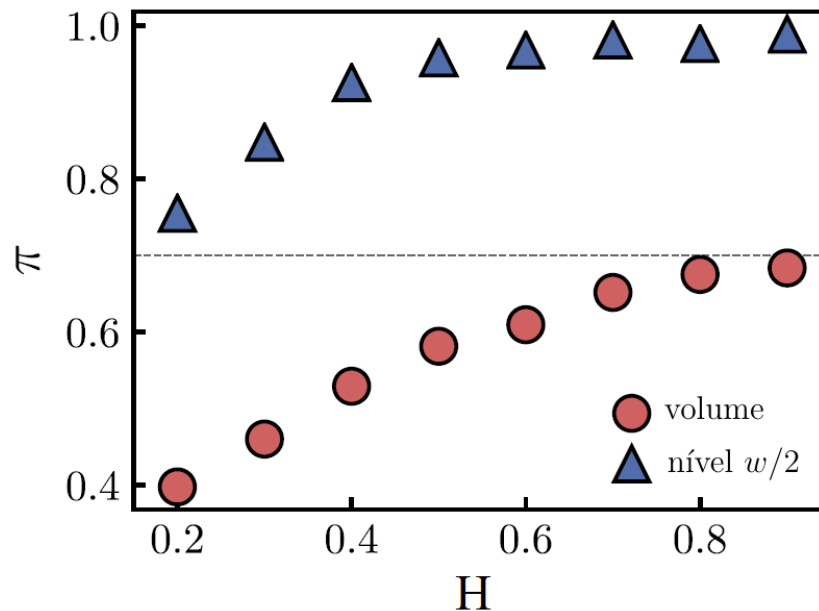


Figura 38: Índice de participação  $\pi/\pi_0$  como uma função do expoente de Hurst  $H$ . Os círculos vermelhos correspondem ao índice de participação no volume, normalizado pelo valor da participação para placas paralelas  $\pi_0 = 0.7$ . Os triângulos azuis denotam o índice de participação no nível da superfície  $w/2$ , obtido pela translação da superfície inferior do canal de  $w/2$  na direção  $z$ . A inserção mostra o gráfico de contorno da magnitude da velocidade no nível da superfície  $w/2$ .

## 5 Considerações e Perspectivas

Nesse trabalho, investigamos o processo de escoamento de fluido através de superfícies rugosas que apresentam geometria auto-afim. Em nível macroscópico, o processo de escoamento ocorre através de canais rugosos fraturados. Portanto, o primeiro passo dado no sentido de investigar as propriedades de transporte e simular o escoamento de fluidos no interior de dutos rugosos foi a descrição da topologia das fraturas. Em seguida, o aspecto geométrico do meio foi estudado, observando que tal geometria possui propriedades estatísticas invariantes sob transformações de escala anisotrópicas. O procedimento adotado no presente trabalho foi a obtenção de uma solução numérica aproximada, visto que não é possível obter solução analítica para este problema.

Conforme resultados obtidos a partir destas simulações computacionais, observamos que a característica auto-afim da superfície rugosa exerce importante influência sobre as propriedades do escoamento no interior da mesma. Estudamos o efeito provocado pela rugosidade destas superfícies, possibilitando o surgimento de regiões de estrangulamento na estrutura e acarretando mudanças significativas nos campos de velocidade.

Os resultados apresentados nesta tese indicam como parâmetros morfológicos da superfície poderiam ser potencialmente usados para estimar o comportamento hidráulico da fratura. Os resultados indicam que existe uma correlação entre a rugosidade e o comportamento do fluido.

Analisando as simulações bidimensionais, encontramos que as propriedades do campo de velocidade do escoamento no interior da fratura são fortemente influenciadas pela topologia da mesma. É possível caracterizar uma transição do comportamento linear para o não-linear em termos do expoente de Hurst. Os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , caracterizando a generalização cúbica da equação de Darcy (2.103) dependem quase que linearmente do expoente de Hurst  $H$  em dois regimes distintos que encontra-se em  $H \approx 0.5$ . Também foi mostrado que as flutuações de velocidade são caracterizadas por fortes correlações espaciais em pequenas escalas.

Já para as simulações tridimensionais encontramos que os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , caracterizando a generalização cúbica da equação de Darcy (2.103) decaem exponencialmente com o expoente de Hurst  $H$ . Esses coeficientes não são todos independentes, mas todos os vestígios do colapso da generalização da equação de Darcy, se o escalonamento apropriado for aplicado, mostram que o número crítico de Reynolds acima do qual os efeitos não-lineares se tornam importantes aumenta linearmente com o expoente da rugosidade  $H$ . Neste regime de Reynolds, o número efetivo de Reynolds, que leva em conta os efeitos da rugosidade superficial, é dado por  $Re' = Re/H$ . Nós também encontramos que surgem caminhos preferenciais do escoamento, ou canalização, no campo de fluxo devido a efeitos inerciais, mesmo em juntas de fratura onde não há deslocamento de cisalhamento entre as superfícies superior e inferior.

A análise aqui apresentada foi baseada no pressuposto de fluxo laminar e um fluido com  $\rho = 1kg/m^3$  e  $\mu = 10kg/m \cdot s$ . Para o propósito deste estudo esta suposição é apropriada, embora se possa estudar o efeito do fluxo turbulento (que é mais provável que seja o caso perto de um poço) e usar dois ou três fluidos na fase de análise. Esta é certamente uma outra linha interessante para continuação do trabalho. Uma outra linha que pode ser tomada é examinar o efeito da tensão com a resposta de fluxo de fluido.

Durante nosso estudo, admitimos que o processo de fraturar a rocha não produz deformações ou interstícios subsequentes no material e as partes fraturadas da amostra são simplesmente separadas de uma distância  $w$  normal ao plano médio, de modo que a abertura local assuma valor constante. Alternativamente, em investigações posteriores, pode-se introduzir uma translação lateral a uma destas superfícies, de modo a haver um deslocamento relativo  $d$  no plano médio da fratura.

Nossa descrição detalhada da mecânica de fluidos no interior das superfícies rugosas foi baseada nas suposições de que o escoamento é laminar e estacionário e o fluido é contínuo, newtoniano e incompressível. Portanto, o escoamento ocorre no regime de Stokes, caracterizado por baixos valores do número de Reynolds. Nesta situação, as forças viscosas sobrepõem-se às forças inerciais. Aspiramos modelar o transporte de fluidos em diferentes regimes de escoamento, onde o número de Reynolds assume valores moderados e elevados. Nesta circunstância, teremos um regime de escoamento turbulento e os efeitos inerciais serão bem característicos.

## Referências

- [1] FEDER, J. *Fractals*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. ISSN 1489921249.
- [2] CREDIDIO, H. F. et al. Stochastic loewner evolution relates anomalous diffusion and anisotropic percolation. *PRE*, American Physical Society, v. 93, n. 4, p. 042124, abr. 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.042124>>.
- [3] RENNO, J. M. O petróleo no brasil e no mundo. *Problemas Nacionais*, v. 70041, p. 67, 2011.
- [4] JR, E. V.; BARRETO, A. B. C. Considerações sobre aspectos do fluxo em aquíferos fraturados relevantes à exploração de água. *Águas Subterrâneas*, 2003. ISSN 2179-9784.
- [5] M., E. O. M. *Estratégias de Produção em Reservatórios Naturalmente Fraturados*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, 2004.
- [6] RICCOMINI, C.; SANT, L. G.; TASSINARI, C. C. G. Pré-sal: geologia e exploração. *Revista USP*, 2012. Disponível em: <<http://www.revistas.usp.br/revusp/article/view/52236>>.
- [7] SAALFELD, R. Q. *Simulação de reservatórios naturalmente fraturados utilizando modelos equivalentes de porosidade simples*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2016.
- [8] FIROOZABADI, A. Recovery mechanisms in fractured reservoirs and field performance. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Petroleum Society of Canada, v. 39, n. 11, p. 5, nov. 2000. ISSN 0021-9487. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/00-11-DAS>>.
- [9] MACDONALD, R. C. Methods for numerical simulation of water and gas coning. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 10, n. 04, p. 425–436, dez. 1970. ISSN 0197-7520. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/2796-PA>>.
- [10] BRATTON, T. et al. The nature of naturally fractured reservoirs. *Oilfield Review*, v. 18, n. 2, p. 4–23, 2006.
- [11] PATIR, N.; CHENG, H. S. An average flow model for determining effects of three-dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Journal of Lubrication Technology*, ASME, v. 100, n. 1, p. 12–17, jan. 1978. ISSN 0742-4787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3453103>>.

- [12] NEUZIL, C. E.; TRACY, J. V. Flow through fractures. *Water Resour. Res.*, v. 17, n. 1, p. 191–199, fev. 1981. ISSN 1944-7973. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/WR017i001p00191>>.
- [13] TSANG, Y. W. The effect of tortuosity on fluid flow through a single fracture. *Water Resour. Res.*, v. 20, n. 9, p. 1209–1215, set. 1984. ISSN 1944-7973. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/WR020i009p01209>>.
- [14] BROWN, S. R. Fluid flow through rock joints: The effect of surface roughness. *J. Geophys. Res.*, v. 92, n. B2, p. 1337–1347, fev. 1987. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JB092iB02p01337>>.
- [15] BROWN, S. R. Transport of fluid and electric current through a single fracture. *J. Geophys. Res.*, v. 94, n. B7, p. 9429–9438, jul. 1989. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JB094iB07p09429>>.
- [16] BROWN, S. R.; STOCKMAN, H. W.; REEVES, S. J. Applicability of the reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, v. 22, n. 18, p. 2537–2540, set. 1995. ISSN 1944-8007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/95GL02666>>.
- [17] ZIMMERMAN, R. W.; BODVARSSON, G. S. Hydraulic conductivity of rock fractures. *Transport in Porous Media*, v. 23, n. 1, p. 1–30, abr. 1996. ISSN 1573-1634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00145263>>.
- [18] GE, S. A governing equation for fluid flow in rough fractures. *Water Resour. Res.*, v. 33, n. 1, p. 53–61, jan. 1997. ISSN 1944-7973. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/96WR02588>>.
- [19] LIU, E. Effects of fracture aperture and roughness on hydraulic and mechanical properties of rocks: implication of seismic characterization of fractured reservoirs. *Journal of Geophysics and Engineering*, v. 2, n. 1, p. 38, 2005. ISSN 1742-2140. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-2140/2/i=1/a=006>>.
- [20] ZIMMERMAN, R. W.; YEO, I.-W. Fluid flow in rock fractures: From the navier-stokes equations to the cubic law. In: \_\_\_\_\_. *Dynamics of Fluids in Fractured Rock*. American Geophysical Union, 2013. cap. Fluid Flow in Rock Fractures: From the Navier-Stokes Equations to the Cubic Law, p. 213–224. ISBN 9781118669662. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/GM122p0213>>.
- [21] VASCONCELOS, T. F. d. *Transporte de Partículas em Estruturas Irregulares: Aplicações em Fisiologia Pulmonar, Fraturas e Meios Porosos*. 2008.
- [22] DRAZER, G.; KOPLIK, J. Permeability of self-affine rough fractures. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 62, n. 6, p. 8076–8085, dez. 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.8076>>.
- [23] BRADY, B. H.; BROWN, E. *Rock Mechanics*. Springer, 2006. ISBN 978-1-4020-2064-3.

- [24] OLSSON, R.; BARTON, N. An improved model for hydromechanical coupling during shearing of rock joints. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 38, n. 3, p. 317–329, abr. 2001. ISSN 1365-1609. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160900000794>>.
- [25] HOSSEINIAN, A. *Numerical simulations of fluid flow through a single rough walled fracture*. 2011.
- [26] SAHIMI, M. Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 65, n. 4, p. 1393–1534, out. 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.65.1393>>.
- [27] SAHIMI, M. *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. ISSN 3527636706.
- [28] BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. ISSN 0486131807.
- [29] MANDELBROT, B. B.; PASSOJA, D. E.; PAULLAY, A. J. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, v. 308, n. 5961, p. 721–722, abr. 1984. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/308721a0>>.
- [30] BROWN, S. R.; SCHOLZ, C. H. Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces. *J. Geophys. Res.*, v. 90, n. B14, p. 12575–12582, dez. 1985. ISSN 2156-2202. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/JB090iB14p12575>>.
- [31] HANSEN, A.; HINRICHSSEN, E. L.; ROUX, S. Roughness of crack interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 66, n. 19, p. 2476–2479, maio 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2476>>.
- [32] BOUCHAUD, E.; LAPASSET, G.; PLANÈS, J. Fractal dimension of fractured surfaces: A universal value? *Europhys. Lett.*, v. 13, n. 1, p. 73, 1990. ISSN 0295-5075.
- [33] MÅLØY, K. J. et al. Experimental measurements of the roughness of brittle cracks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 68, n. 2, p. 213–215, jan. 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.213>>.
- [34] SCHMITTBUHL, J.; GENTIER, S.; ROUX, S. Field measurements of the roughness of fault surfaces. *Geophys. Res. Lett.*, v. 20, n. 8, p. 639–641, abr. 1993. ISSN 1944-8007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1029/93GL00170>>.
- [35] COX, B. L.; WANG, J. S. Y. Fractal surfaces: Measurement and applications in the earth sciences. *Fractals-complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, World Scientific Publ Co Pte Ltd, v. 1, n. 1, p. 87–115, mar. 1993.
- [36] SCHMITTBUHL, J.; SCHMITT, F.; SCHOLZ, C. Scaling invariance of crack surfaces. *Journal of Geophysical Research-solid Earth*, Amer Geophysical Union, v. 100, n. B4, p. 5953–5973, abr. 1995.

- [37] PONSON, L.; BONAMY, D.; BOUCHAUD, E. Two-dimensional scaling properties of experimental fracture surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, n. 3, p. 035506, jan. 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.035506>>.
- [38] AURADOU, H. et al. Permeability anisotropy induced by the shear displacement of rough fracture walls. *Water Resources Research*, Amer Geophysical Union, v. 41, n. 9, p. W09423, set. 2005.
- [39] GOUZE, P. et al. X-ray tomography characterization of fracture surfaces during dissolution. *Geophysical Research Letters*, Wiley Online Library, v. 30, n. 5, 2003. ISSN 1944-8007.
- [40] PONSON, L. et al. Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces. *Int. J. Fract.*, v. 140, n. 1, p. 27–37, jul. 2006. ISSN 1573-2673.
- [41] ANSARI-RAD, M.; ALLAEI, S. M. V.; SAHIMI, M. Nonuniversality of roughness exponent of quasi-static brittle fracture. *Phys. Rev. E*, v. 85, p. 021121, 2011.
- [42] ROUX, S. et al. Some physical properties of self-affine rough surfaces. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 23, n. 4, p. 277, 1993. ISSN 0295-5075. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/23/i=4/a=007>>.
- [43] GUTFRAIND, R.; IPPOLITO, I.; HANSEN, A. Study of tracer dispersion in self-affine fractures using lattice-gas automata. *Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 7, n. 8, p. 1938–1948, ago. 1995. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.868508>>.
- [44] GUTFRAIND, R.; HANSEN, A. Study of fracture permeability using lattice gas automata. *Transport in Porous Media*, v. 18, n. 2, p. 131–149, fev. 1995. ISSN 1573-1634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01064675>>.
- [45] TALON, L.; AURADOU, H.; HANSEN, A. Permeability estimates of self-affine fracture faults based on generalization of the bottleneck concept. *Water Resour. Res.*, v. 46, n. 7, p. W07601, 2010.
- [46] TALON, L.; AURADOU, H.; HANSEN, A. Permeability of self-affine aperture fields. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 82, n. 4, p. 046108, out. 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.046108>>.
- [47] LO, T. S.; KOPLIK, J. Channeling and stress during fluid and suspension flow in self-affine fractures. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 89, n. 2, p. 023010, fev. 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.023010>>.
- [48] SKJETNE, E.; HANSEN, A.; GUDMUNDSSON, J. S. High-velocity flow in a rough fracture. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 383, p. 1–28, 1999. ISSN 0022-1120. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/article/highvelocity-flow-in-a-rough-fracture/9E2AA0CA12C12EC6566B715618091313>>.
- [49] SARKAR, S.; TOKSOZ, M. N.; BURNS, D. R. *Fluid flow simulation in fractured reservoirs*. [S.l.]: Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory, 2002.

- [50] GIACOMINI, A. et al. Numerical study of flow anisotropy within a single natural rock joint. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 45, n. 1, p. 47–58, jan. 2008. ISSN 1365-1609. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160907000536>>.
- [51] WANG, M. et al. Influence of surface roughness on nonlinear flow behaviors in 3d self-affine rough fractures: Lattice boltzmann simulations. *Advances in Water Resources*, v. 96, n. Supplement C, p. 373–388, out. 2016. ISSN 0309-1708. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170816303347>>.
- [52] DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 369 p. ISSN 978-0-89871-274-2. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>>.
- [53] BRIGGS, S.; KARNEY, B. W.; SLEEP, B. E. Numerical modeling of the effects of roughness on flow and eddy formation in fractures. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, v. 9, n. 1, p. 105–115, fev. 2017. ISSN 1674-7755. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674775516302293>>.
- [54] HUANG, N. et al. A predictive model of permeability for fractal-based rough rock fractures during shear. *Fractals*, World Scientific Publishing Co., v. 25, n. 05, p. 1750051, out. 2017. ISSN 0218-348X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218348X17500517>>.
- [55] DULLIEN, F. A. L. *Porous media: fluid transport and pore structure*. [S.l.]: Academic press, 2012. ISSN 0323139337.
- [56] KOCH, D. L.; LADD, A. J. C. Moderate reynolds number flows through periodic and random arrays of aligned cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 349, p. 31–66, 1997. ISSN 1469-7645.
- [57] ANDRADE, J. S. et al. Inertial effects on fluid flow through disordered porous media. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, n. 26, p. 5249–5252, jun. 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.5249>>.
- [58] STANLEY, H. E. et al. Fluid flow through disordered porous media. *Fractals*, WORLD SCIENTIFIC, v. 11, n. supp01, p. 301–312, maio 2003. ISSN 0218-348X.
- [59] ELGER BARBARA C. WILLIAMS, C. T. C. J. A. R. D. F. *Engineering Fluid Mechanics*. 10. ed. Wiley, 2012. ISBN 1118164296,978-1-118-16429-7. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=88de3caf9c19be4aed9dc476581b6d6c>>.
- [60] YOUNG BRUCE R. MUNSON, T. H. O. W. W. H. D. F. *A Brief Introduction to Fluid Mechanics, Fifth Edition*. 5th. ed. Wiley, 2010. ISBN 0470596791,9780470596791. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=49CB20539A8E6036EB84CEC3663A6363>>.
- [61] MASSEY, J. W.-S. B. *Mechanics of Fluids*. 8th. ed. Taylor & Francis, 2006. ISBN 0415362059,9780415362054. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=DBFCC000F5A00F3715F16AC82EE83056>>.



- [62] FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. ISSN 8521618301.
- [63] BIRD WARREN E. STEWART, E. N. L. R. B. *Transport phenomena*. 2nd, wiley international ed. ed. J. Wiley, 2002. ISBN 9780471410775,0471410772. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=69808D0594FD9E0D205B9E85154587B5>>.
- [64] CRILLY, A. J.; EARNSHAW, R.; JONES, H. *Fractals and chaos*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. ISSN 1461230349.
- [65] SUTCLIFFE, J. V. Obituary. *Hydrological Sciences Bulletin*, Taylor & Francis, v. 24, n. 4, p. 539–541, 1979. ISSN 0303-6936.
- [66] PENG, C. et al. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos*, American Institute of Physics, v. 5, n. 1, p. 82–87, mar. 1995. ISSN 1054-1500. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.166141>>.
- [67] PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 49, n. 2, p. 1685–1689, fev. 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.49.1685>>.
- [68] MOURA, E. P. de et al. Applications of detrended-fluctuation analysis to gearbox fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 3, p. 682–689, abr. 2009. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327008001428>>.
- [69] HARDSTONE, R. et al. Detrended fluctuation analysis: A scale-free view on neuronal oscillations. *Frontiers in Physiology*, v. 3, p. 450, 2012. ISSN 1664-042X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphys.2012.00450>>.
- [70] BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, set. 1828. ISSN 1941-5850. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786442808674769>>.
- [71] OLIVEIRA, E. A. de. *Linhas divisoras de águas e fraturas de caminhos ótimos em meios desordenados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2012.
- [72] EINSTEIN, A. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der physik*, v. 17, p. 549–560, 1905. ISSN 0003-3804.
- [73] MANDELBROT, B. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, v. 156, n. 3775, p. 636, maio 1967. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/156/3775/636.abstract>>.
- [74] TURCOTTE, D. L. *Fractals and chaos in geology and geophysics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. ISSN 0521567335.
- [75] PEITGEN, H.-O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D. *Chaos and fractals: new frontiers of science*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. ISSN 0387218238.

- [76] EKE, A. et al. Physiological time series: distinguishing fractal noises from motions. *Pflügers Archiv*, v. 439, n. 4, p. 403–415, fev. 2000. ISSN 1432-2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s004249900135>>.
- [77] EKE, A. et al. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals. *Physiological Measurement*, v. 23, n. 1, p. R1, 2002. ISSN 0967-3334. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0967-3334/23/i=1/a=201>>.
- [78] MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1983. ISBN 0716711869.
- [79] BERAN, J. *Statistics for long-memory processes*. [S.l.]: Routledge, 2017. ISSN 1351414119.
- [80] MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. van. Fractional brownian motions fractional noises and applications. *Siam Review*, Siam Publications, v. 10, n. 4, p. 422–+, 1968.
- [81] PEITGEN, H.-O.; SAUPE, D. (Ed.). *The Science of Fractal Images*. [S.l.]: Springer, 2011. ISBN 1461283493.
- [82] GONZALEZ, R. C. *Digital image processing*. [S.l.]: Prentice hall, 2016.
- [83] KLEINSTREUER, C. *Engineering Fluid Dynamics: An Interdisciplinary Systems Approach*. Cambridge University Press, 1997. ISSN 9780521496704. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=sZDmSiU94-8C>>.
- [84] CONSTANTINESCU, V. N. *Laminar Viscous Flow*. Springer New York, 2012. (Mechanical Engineering Series). ISSN 9781461242444. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pm3gBwAAQBAJ>>.
- [85] DRAZER, G.; KOPLIK, J. Transport in rough self-affine fractures. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 66, n. 2, p. 026303, ago. 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.66.026303>>.
- [86] DARCY, H. Libraire des corps imperiaux des ponts et chaussees et des mines, paris. *Les Fontaines Publiques de la Ville Dijon*, p. 28–38, 1856.
- [87] AMAO, A. M. *Mathematical model for Darcy Forchheimer flow with applications to well performance analysis*. 2007.
- [88] CORNELL, D.; KATZ, D. L. Flow of gases through consolidated porous media. *Ind. Eng. Chem.*, American Chemical Society, v. 45, n. 10, p. 2145–2152, out. 1953. ISSN 0019-7866. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/ie50526a021>>.
- [89] FORCHHEIMER, P. Wasserbewegung durch boden. *Wasserbewegung Durch Boden*, p. 1782–1788, 1901.
- [90] JR, L. G.; DUWEZ, P. Fluid flow through porous metals. *J. Applied Mech.*, v. 18, 1951.
- [91] ERGUN, S. Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Prog.*, v. 48, p. 89–94, 1952.

- [92] DULLIEN, F. A. L.; AZZAM, M. I. S. Flow rate-pressure gradient measurements in periodically nonuniform capillary tubes. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 222–229, 1973. ISSN 1547-5905.
- [93] WHITAKER, S. The forchheimer equation: A theoretical development. *Transport in Porous Media*, v. 25, n. 1, p. 27–61, out. 1996. ISSN 1573-1634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00141261>>.
- [94] CHEN, Z.; LYONS, S. L.; QIN, G. Derivation of the forchheimer law via homogenization. *Transport in Porous Media*, v. 44, n. 2, p. 325–335, ago. 2001. ISSN 1573-1634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1010749114251>>.
- [95] HASSANIZADEH, S. M.; GRAY, W. G. High velocity flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 2, n. 6, p. 521–531, dez. 1987. ISSN 1573-1634. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00192152>>.
- [96] COULAUD, O.; MOREL, P.; CALTAGIRONE, J. P. Numerical modelling of nonlinear effects in laminar flow through a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 190, p. 393–407, 1988. ISSN 0022-1120. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/article/numerical-modelling-of-nonlinear-effects-in-laminar-flow-through-a-porous-medium/8F0692FD217D2E5711355C617B3A807D>>.
- [97] FOURAR, M. et al. On the non-linear behavior of a laminar single-phase flow through two and three-dimensional porous media. *Advances in Water Resources*, v. 27, n. 6, p. 669–677, jun. 2004. ISSN 0309-1708. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030917080400048X>>.
- [98] NETO Álvaro B. *Simulação de fluxo de fluidos em meios porosos desordenados uma análise de efeito de escala na estimativa da permeabilidade e do coeficiente de arrasto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.
- [99] MEI, C. C.; AURIAULT, J.-L. The effect of weak inertia on flow through a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 222, p. 647–663, 1991. ISSN 0022-1120. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/article/effect-of-weak-inertia-on-flow-through-a-porous-medium/02BBE471CF9EC32C08CB62229205D1F4>>.
- [100] JACONO, D. L.; PLOURABOUÉ, F.; BERGEON, A. Weak-inertial flow between two rough surfaces. *Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 17, n. 6, p. 063602, jun. 2005. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1923347>>.
- [101] LASSEUX, D.; ARANI, A. A. A.; AHMADI, A. On the stationary macroscopic inertial effects for one phase flow in ordered and disordered porous media. *Physics of fluids*, AIP, v. 23, n. 7, p. 073103, 2011. ISSN 1070-6631.
- [102] GHADDAR, C. K. On the permeability of unidirectional fibrous media: A parallel computational approach. *Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 7, n. 11, p. 2563–2586, nov. 1995. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.868706>>.

- [103] SAHIMI, M. *Applications of Percolation Theory*. CRC PR INC, 2000. ISBN 9780748400768.
- [104] SAHIMI, M. Long-range correlated percolation and flow and transport in heterogeneous porous media. *J. Phys. I France*, v. 4, n. 9, p. 1263–1268, set. 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jp1:1994107>>.
- [105] EDWARDS, D. A. et al. The influence of reynolds number upon the apparent permeability of spatially periodic arrays of cylinders. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, American Institute of Physics, v. 2, n. 1, p. 45–55, out. 1990. ISSN 0899-8213. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857691>>.
- [106] HILL, R. J.; KOCH, D. L.; LADD., A. J. C. The first effects of fluid inertia on flows in ordered and random arrays of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 448, p. 213–241, 2001. ISSN 0022-1120. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/article/first-effects-of-fluid-inertia-on-flows-in-ordered-and-random-arrays-of-spheres/3529018764D4F5BDD4D2C562B84DC867>>.
- [107] VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. [S.l.]: Pearson Education, 2007. ISSN 0131274988.
- [108] FLUENT, I. N. C. Fluent 6.3 user's guide. *Fluent documentation*, 2006.
- [109] HJERTAGER, B. H. Lecture notes in openfoam. *Stavanger: University of Stavanger*, p. 3–12, 2009.
- [110] HJERTAGER, B. H. Computational analysis of fluid flow processes. *Lecture Notes, Aalborg University Esbjerg, Denmark*, 2007.
- [111] BORTOLI, I. L. D. *Introdução à dinâmica de fluidos computational*. [S.l.]: Ed. Universidade/UFRGS, 2000. ISSN 8570255454.
- [112] MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The finite volume method in computational fluid dynamics*. Springer, 2016.
- [113] EARNSHAW, R. A. *Fundamental algorithms for computer graphics*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, Inc., 1986. ISSN 0387139206.
- [114] HANSEN, A.; SCHMITTBUHL, J.; BATROUNI, G. G. Distinguishing fractional and white noise in one and two dimensions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 63, n. 6, p. 062102, maio 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.062102>>.
- [115] WELLER, H. G. et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, American Institute of Physics, v. 12, n. 6, p. 620–631, nov. 1998. ISSN 0894-1866. Disponível em: <<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.168744>>.
- [116] BUNDE, A.; HAVLIN, S. *Fractals and disordered systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. ISSN 3642848680.

- [117] ISHIBASHI, T. et al. Beyond-laboratory-scale prediction for channeling flows through subsurface rock fractures with heterogeneous aperture distributions revealed by laboratory evaluation. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, v. 120, n. 1, p. 106–124, jan. 2015. ISSN 2169-9356. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/2014JB011555>>.