



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

FRANCISCO SERGIO DE FREITAS FILHO

O PROBLEMA DA K -FLORESTA COM MÁXIMO NÚMERO DE FOLHAS

FORTALEZA

2019

FRANCISCO SERGIO DE FREITAS FILHO

O PROBLEMA DA K -FLORESTA COM MÁXIMO NÚMERO DE FOLHAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F936p Freitas Filho, Francisco Sergio de.
O Problema da k-Floresta com Máximo Número de Folhas / Francisco Sergio de Freitas Filho. – 2019.
56 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade.

1. Otimização combinatória. 2. Árvore geradora com máximo número de folha. 3. k-Floresta com máximo número de folhas. 4. Desigualdades válidas. 5. Programação Inteira. I. Título.

CDD 005

FRANCISCO SERGIO DE FREITAS FILHO

O PROBLEMA DA K -FLORESTA COM MÁXIMO NÚMERO DE FOLHAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Otimização.

Aprovada em: 15/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por cada conquista alcançada até aqui.

Aos meus pais, Sergio e Valéria, pelo apoio em todos os momentos e pelos esforços em proporcionar-me uma boa educação. Além deles, meus avós paternos, Mauro e Terezinha, e minha avó materna, Nazaré, que participaram ativamente da minha vida, praticamente como pais.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade, por ter acreditado em meu trabalho e por todas as críticas construtivas, sugestões valiosas e disponibilidade durante esses dois anos. Além de orientador, um excelente professor e ótima pessoa.

Aos membros da banca avaliadora, pelas sugestões de melhorias neste trabalho.

Aos excelentes professores que lecionaram as disciplinas que cursei. Em especial ao Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto, pela qualidade de ensino, disponibilidade extra sala para debater os assuntos de aula e pelo acompanhamento do trabalho desde a proposta até a defesa.

Aos meus amigos do ParGO, que sempre buscaram contribuir de alguma forma positiva. Em especial, aos amigos desde a graduação, Jonas, Jhonata e Arthur, e aos da otimização, Mardson, Ernando, Rommel, Adriano e Jefferson, que sempre estiveram disponíveis para debatermos os diversos assuntos voltados a esta pesquisa. Agradeço também pelos bons momentos de descontração.

À minha namorada, Danielly, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis.

Aos meus tios, Altenor e Elíria, por me proporcionarem um ambiente familiar nessa estadia.

Também agradeço à CAPES, por permitir a realização deste trabalho através do fomento concedido.

Finalmente, à FUNCAP, pelo financiamento do projeto de pesquisa ao qual faço parte.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Dados um grafo simples conexo e um inteiro positivo k , o problema da k -floresta com máximo número de folhas consiste em encontrar uma floresta geradora com tantas folhas quanto possível e não mais que k componentes. Propomos os primeiros modelos matemáticos para o problema bem como desigualdades válidas. Para $k = 1$ temos o conhecido problema da árvore geradora com máximo número de folhas (MLSTP). Em particular, para esse problema, as novas desigualdades se mostraram muito eficientes. Dois dos modelos propostos neste documento generalizam formulações encontradas na literatura para o MLSTP e têm como base formulações que descrevem os poliedros de árvores e arborescências geradoras. Apresentamos também caracterizações para o problema, que facilitam expressá-lo de uma maneira alternativa, onde buscamos um conjunto de folhas que gere uma solução ótima e, uma vez que dispomos de tal conjunto, podemos obter uma solução completa para o problema em tempo polinomial. Como consequência, propomos um modelo denominado (MB) o qual resolvemos utilizando um método iterativo de decomposição de Benders para $k = 1$ e, para o caso geral, uma formulação denominada (MVE) e um modelo (MFA) utilizando fluxo em rede. Realizamos experimentos computacionais e analisamos os desempenhos dos modelos. Em particular, para $k = 1$, comparamos os resultados obtidos tendo como referência formulações da literatura para o MLSTP. Damos destaque ao modelo (MFA) por sua simplicidade de implementação e por não demandar técnicas sofisticadas de corte ou separação. Além disso, para $k = 1$, esse modelo foi o único a encontrar soluções ótimas para todo o conjunto de instâncias, mostrando-se superior aos modelos específicos para o MLSTP presentes na literatura. Também vale ressaltar que, ainda para $k = 1$, o modelo (MB) mostrou-se consideravelmente mais eficiente que os demais quando consideramos um subconjunto de instâncias que apresentam maiores densidades de arestas.

Palavras-chave: Otimização combinatória. Árvore geradora com máximo número de folhas. k -Floresta com máximo número de folhas. Desigualdades válidas. Programação Inteira.

ABSTRACT

Given a simple connected graph and a positive integer k , the maximum leaf k -forest problem consists in finding a spanning forest with as many leaves as possible and no more than k components. We propose the first mathematical models for the problem as well as valid inequalities. For $k = 1$, we have the known maximum leaf spanning tree problem (MLSTP). In particular, for this problem, the new inequalities have proved to be very efficient. Two of the models we propose in this work generalize formulations found in the literature for the MLSTP and are based on formulations that describe the polytope of spanning trees and arborescences. We also present new characterizations for the problem, which makes easy to express it in an alternative way, where we look for a set of leaves that generate an optimal solution and, once we have such set, we can obtain a solution to the problem in polynomial time. As a consequence, we propose a model called (MB) which we solve by using an iterative method based on Benders decomposition for $k = 1$ and, for the general case, a formulation called (MVE) and a model (MFA) exploring network flow. We perform computational experiments and analyze the performance of our models. In particular, for $k = 1$, we compare our results with the ones obtained by existing formulations for MLSTP. We emphasize model (MFA) for its simplicity to implement and for not demanding sophisticated cutting or separation techniques. In addition, for $k = 1$, this model was the unique to find optimal solutions for the whole set of instances, outperforming MLSTP models from the literature. It is also worth noting that, for $k = 1$, model (MB) was considerably more efficient than the other ones when considering instances with higher edge densities.

Keywords: Combinatorial optimization. Maximum leaf spanning tree. Maximum leaf k -forest. Valid inequalities. Integer programming.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relação entre soluções do MCDSP e MLSTP.	13
Figura 2 – Exemplo de soluções viáveis do MLkFP para $k = 2$	16
Figura 3 – Relação entre soluções ótimas do MLSTP e MLkFP.	17
Figura 4 – Exemplo dos procedimentos de expansão do algoritmo 3-aproximativo para o MLkFP.	18
Figura 5 – Exemplo de conversão e resolução de uma instância para $k = 2$	31
Figura 6 – Exemplo de solução inviável e viável para um mesmo conjunto de folhas e $k = 3$	32
Figura 7 – Exemplo de instância e seu grafo auxiliar.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados computacionais das formulações vértice-aresta (ML), (ML+) e (MF+) para $k = 1$	46
Tabela 2 – Resultados computacionais das formulações alternativas (FBM+), (MB), (MFA) e (MVE) para $k = 1$	47
Tabela 3 – Resultados computacionais para a formulação (MF ^k).	48
Tabela 4 – Resultados computacionais para a formulação (ML ^k).	49
Tabela 5 – Resultados computacionais para a formulação (MFA).	50
Tabela 6 – Resultados computacionais para a formulação (MVE).	51
Tabela 7 – Síntese dos experimentos para as instâncias de (LUCENA <i>et al.</i> , 2010).	54
Tabela 8 – Síntese dos experimentos desconsiderando as instâncias de densidade 5% do conjunto de instâncias apresentadas em (LUCENA <i>et al.</i> , 2010).	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	DEFINIÇÕES DOS PROBLEMAS E TRABALHOS RELACIONADOS	13
2.1	O problema da árvore com máximo número de folhas	13
2.2	O problema da k -floresta com máximo número de folhas	15
3	MODELOS MATEMÁTICOS DA LITERATURA PARA O MLSTP	19
3.1	Notação	19
3.2	Formulações matemáticas para o MLSTP	20
3.3	Desigualdades válidas para o MLSTP	23
4	NOVAS FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O MLKFP E MLSTP	25
4.1	Formulações vértice-aresta para o MLkFP	25
4.2	Formulações alternativas para o MLkFP e MLSTP	28
5	ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	38
5.1	Solução inicial	38
5.2	<i>Iterative probing</i> Benders para (MB)	39
5.3	Estratégias para (MF+) e (MF ^k)	40
5.4	Estratégias para (ML), (ML+) e (ML ^k)	41
5.5	Estratégias para (FBM+) e (MFA)	41
5.6	Estratégias para (MVE)	41
5.7	Determinando m_S	42
6	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	44
6.1	Detalhes de implementação e instâncias utilizadas	44
6.2	Tabelas detalhadas dos experimentos	44
6.3	Análise dos experimentos	45
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

O problema da k -floresta com máximo número de folhas, objeto de estudo deste trabalho, consiste em encontrar uma floresta geradora de um grafo, visando a máxima quantidade de folhas e respeitando um limitante superior no número de componentes. Uma definição formal para o problema é dada posteriormente, mas antes, para a melhor compreensão do leitor, faz-se necessário introduzirmos o problema o qual ele generaliza e cuja definição é dada logo a seguir. O problema da árvore geradora com o máximo número de folhas ou, do inglês, *maximum leaf spanning tree problem* (MLSTP), consiste em encontrar, dado um grafo simples, não direcionado e conexo, uma árvore geradora cujo número de folhas seja máximo. Esse problema é bastante conhecido na literatura e aplicado em diversas áreas, tais como em redes de sensores (MIN *et al.*, 2006) e no design de redes *ad hoc* sem fio, onde a topologia da rede pode mudar dinamicamente. Para mais detalhes sobre esse tipo de aplicação, consultar (BALASUNDARAM; BUTENKO, 2006).

O MLSTP pode ser resolvido trivialmente para grafos nos quais algum vértice seja **universal**, ou seja, adjacente a todos os demais. Porém, para o caso geral, o problema é *NP*-difícil (MICHAEL; DAVID, 1979). Posteriormente, com base nos relatos dos experimentos realizados, é possível observar que as instâncias com menores densidades de arestas apresentaram, como esperado, um maior grau de dificuldade para serem resolvidas. Em (GALBIATI *et al.*, 1994) foi demonstrado que o MLSTP é *MAX-SNP*-difícil e, portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que encontrar uma solução $(1 + \varepsilon)$ -aproximativa é *NP*-difícil.

Vários algoritmos exatos e aproximativos foram desenvolvidos para o MLSTP. Um algoritmo 3-aproximativo é apresentado em (LU; RAVI, 1998). Em (SOLIS-OBA, 1998) é definido um algoritmo 2-aproximativo inspirado em (LU; RAVI, 1998). Um estudo poliédrico de formulações matemáticas para esse problema pode ser encontrado em (FUJIE, 2004). Formas alternativas de resolver o MLSTP, transformando o grafo de entrada em um digrafo, são encontradas em (LUCENA *et al.*, 2010) e (REIS *et al.*, 2015).

Vale ressaltar que o MLSTP tem uma relação direta com o **problema do conjunto dominante mínimo conexo** ou *minimum connected dominating set problem* (MCDSP), que consiste em, dado um grafo simples não direcionado conexo $G = (V, E)$, encontrar o menor conjunto **dominante** $S \subseteq V$, ou seja, tal que todo vértice em $V \setminus S$ seja adjacente a pelo menos um vértice em S . Além disso, deseja-se que o subgrafo $\mathbf{G}[S] = (S, E(S))$ seja conexo, onde $\mathbf{E}(S) = \{\{i, j\} \in E : i, j \in S\}$ são todas as arestas de E induzidas por S . Podemos notar que,

dado um conjunto dominante mínimo conexo S , podemos obter eficientemente uma solução ótima para o MLSTP onde S são os vértices internos e $V \setminus S$ são as folhas. O sentido inverso ocorre de forma análoga. De fato, observe que, para uma solução viável S do MCDSP, $G[S]$ contém uma árvore que pode ser expandida para uma árvore geradora T de G , adicionando os vértices $V \setminus S$, cada um ligado por um vizinho em S . Portanto, T configura uma solução viável para o MLSTP. Agora note que a existência de uma árvore T^* com mais folhas que T implicaria que seus vértices internos seriam em número menor que $|S|$ e formaria uma solução estritamente melhor que S . Logo, percebe-se que, para uma solução ótima S do MCDSP, tem-se uma solução ótima T do MLSTP com exatamente $|V \setminus S|$ folhas. Pelo mesmo raciocínio, para uma solução ótima T do MLSTP, tem-se uma solução ótima S composta pelos nós internos de T (LUCENA *et al.*, 2010). Para mais detalhes sobre o MCDSP, consultar (GENDRON *et al.*, 2014).

Neste documento, abordamos uma generalização do MLSTP, o problema da k -floresta com máximo número de folhas ou *maximum leaf k -forest problem* (MLkFP). A entrada do MLkFP é um grafo simples conexo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k . Uma solução ótima para esse problema é uma floresta geradora de G com tantas folhas quanto possível e no máximo k componentes. A definição do MLkFP e resultados anteriormente apresentados na literatura, podem ser encontrados em (REIS *et al.*, 2017), onde é apresentado um algoritmo 3-aproximativo, baseado em (LU; RAVI, 1998), para o MLkFP.

Seguindo a definição dada em (REIS *et al.*, 2017), consideramos as árvores enraizadas, onde as raízes não são contabilizadas como folhas. Desse modo, se uma árvore consistir em um único vértice, ele será raiz. Por sua vez, uma árvore com apenas dois vértices consiste, obrigatoriamente, em uma raiz e uma folha e, quando o número de vértices for maior que três, consideramos que a raiz seja um nó interno qualquer.

Como contribuição, propomos um conjunto de desigualdades válidas, bem como os primeiros modelos matemáticos para o MLkFP e um novo modelo específico para o MLSTP. Em particular, quando $k = 1$, fortalecemos esse conjunto de desigualdades e testamos sua eficiência em formulações para o MLSTP presentes na literatura. Além disso, obtivemos resultados que permitem caracterizar, de forma genérica, o conjunto de soluções do MLkFP. Tais resultados são de fundamental importância para mostrar que é possível analisar o problema e modelá-lo de forma alternativa, em que se procura encontrar apenas um conjunto de folhas que gerem uma solução ótima. Ressaltamos que resultados preliminares, referentes a alguns dos modelos apresentados posteriormente, foram publicados em artigo apresentado na conferência CLAIO

2018 (FREITAS FILHO; ANDRADE, 2018).

O restante deste trabalho é dividido como segue. No Capítulo 2, introduzimos e exemplificamos os problemas MLSTP e MLkFP, assim como apresentamos uma revisão bibliográfica de trabalhos relacionados aos mesmos. O Capítulo 3 apresenta a notação utilizada no decorrer do texto bem como modelos matemáticos e desigualdades válidas encontrados na literatura para o MLSTP. O Capítulo 4 introduz os primeiros modelos matemáticos para o MLkFP, bem como uma nova formulação para o MLSTP. O Capítulo 5 trata das estratégias utilizadas na resolução dos modelos definidos. Resultados computacionais e conclusões são abordados, respectivamente, nos Capítulos 6 e 7.

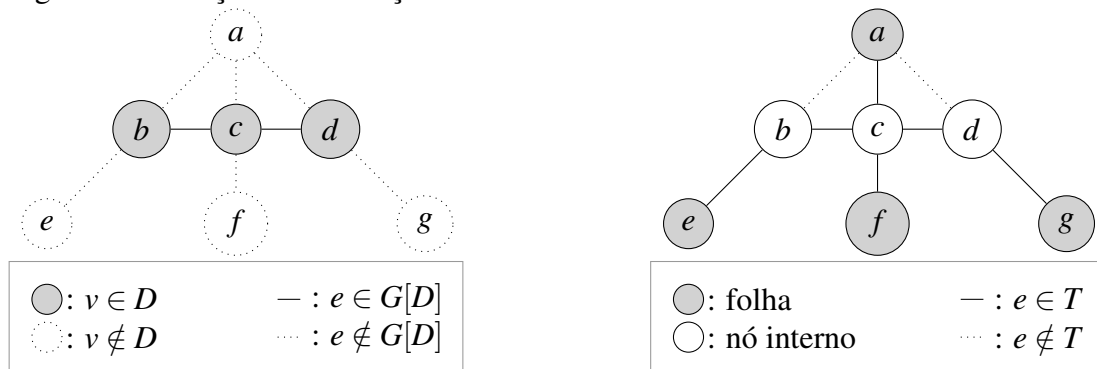
2 DEFINIÇÕES DOS PROBLEMAS E TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e trabalhos relacionados aos problemas em estudo, sendo de fundamental importância para o entendimento do leitor no restante deste trabalho. Na Seção 2.1 abordamos definições e alguns resultados obtidos para o MLSTP, amplamente estudado na literatura, que é um caso específico do MLkFP (são equivalentes para $k = 1$). Por último, a Seção 2.2 trata de apresentar o MLkFP, que é o foco principal deste trabalho e cujos modelos matemáticos são desenvolvidos a partir das técnicas usadas para resolver o MLSTP.

2.1 O problema da árvore com máximo número de folhas

Seja $T = (V_T, E_T)$ uma árvore geradora de um grafo qualquer. Dizemos que um vértice (ou nó) $v \in V_T$ é **interno** se v tem grau maior ou igual a dois. Caso contrário, diz-se que v é **folha**. Dado como entrada um grafo simples não direcionado conexo $G = (V, E)$, o **problema da árvore geradora com o máximo número de folhas** consiste em encontrar uma árvore geradora T de G , cujo número de folhas seja máximo (LU; RAVI, 1992). Esse problema é equivalente, do ponto de vista de otimização, ao problema do conjunto dominante mínimo conexo, dado que uma solução do MCDSP fornece os nós internos (e as folhas, conseqüentemente) de uma solução para o MLSTP e vice-versa (LUCENA *et al.*, 2010) (mais detalhes sobre o MCDSP podem ser consultados em (GENDRON *et al.*, 2014)). Na Figura 1 exemplificamos a relação das soluções desses problemas para um mesmo grafo de entrada.

Figura 1 – Relação entre soluções do MCDSP e MLSTP.



(a) Solução ótima D para o MCDSP.

(b) Solução ótima T para o MLSTP.

Fonte: produzida pelo autor.

Em (LU; RAVI, 1992) foi apresentado o primeiro algoritmo aproximativo para o

MLSTP em grafos arbitrários. Esse algoritmo executa em tempo polinomial e encontra soluções ótimas locais cujos valores são próximos, por um fator ou razão de aproximação, do valor de uma solução ótima global. Dada uma solução inicial T , o algoritmo realiza trocas simultâneas de p arestas de T por p arestas que não estão em T , gerando uma solução estritamente melhor a cada iteração. Quando não for mais possível realizar melhorias na solução corrente dessa forma, tem-se uma solução ótima local denominada p -LOT (do inglês, *p-locally optimal tree*). Conforme mencionado em (LU; RAVI, 1992), uma i -LOT também é uma j -LOT para $j \leq i$. Desse modo, dado que uma árvore tem $(n - 1)$ arestas, uma solução ótima é uma $(n - 1)$ -LOT. Intuitivamente, utilizar p trocas tem um custo computacional maior que utilizar $(p - 1)$, mas tende a gerar soluções melhores. Observe que decidir se uma árvore é uma p -LOT, para p constante, pode ser feito em tempo polinomial, uma vez que o número de p trocas para um grafo qualquer não pode ser maior que $\binom{n}{p} - n + 1 \times \binom{n-1}{p}$. Além disso, o número máximo de iterações é $n - 3$, uma vez que qualquer solução inicial possui pelo menos duas folhas e no máximo $n - 1$, e o número de folhas aumenta a cada iteração. Portanto, o tempo de execução para obter uma p -LOT é $O(n^{3p+1})$, que é polinomial para uma constante p . Em particular, as razões de aproximação são 5 e 3 para $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente (LU; RAVI, 1992).

Em (LU; RAVI, 1998) foi apresentado um algoritmo 3-aproximativo para o MLSTP, tratando-se de uma estratégia gulosa com tempo de execução quase linear no tamanho do grafo. Uma subárvore T de G é denominada **frondosa** se existe pelo menos um vértice de grau 3 e todos os nós de grau 2 são adjacentes a exatamente dois vértices de grau 3. Uma floresta F de G é **frondosa** se F é composta de subárvores frondosas disjuntas de G . Uma floresta F é **frondosa maximal** se F não é subgrafo de nenhuma outra floresta frondosa de G . Dadas tais definições e um conjunto de propriedades sobre florestas e árvores frondosas em (LU; RAVI, 1998), o algoritmo proposto constrói uma floresta frondosa F de G e adiciona, se necessário, arestas a F para torná-la uma árvore geradora de G .

Em (SOLIS-OBA *et al.*, 2017) foi apresentado um resumo estendido de (SOLIS-OBA, 1998) que descreve um algoritmo 2-aproximativo para o MLSTP com tempo linear de execução. Esse algoritmo baseia-se em regras de expansão dos vértices e surge como um aperfeiçoamento do algoritmo definido em (LU; RAVI, 1998). Os autores, em ambos os trabalhos, constroem uma solução válida para o problema a partir de uma floresta frondosa. Entretanto, em (SOLIS-OBA *et al.*, 2017) os autores se atentam ao fato de que conectar p árvores de uma floresta pode custar até $2p - 2$ folhas e, portanto, pode ser vantajoso, além de priorizar maximizar

o número de folhas de cada componente, obter um valor pequeno para p . Para isso, são definidas regras de expansão e suas prioridades, de modo que as regras de prioridades altas são desejáveis e as de prioridades baixas são necessárias para manter o número pequeno de componentes. A ideia da demonstração da razão de aproximação leva em consideração a quantidade de vezes que as regras de baixas prioridades precisam ser utilizadas para a construção da floresta. Embora os autores utilizem a ideia de construção de uma floresta frondosa tanto em (LU; RAVI, 1998) quanto em (SOLIS-OBA *et al.*, 2017), o modo de definir as regras de expansão e suas prioridades foi essencial para os melhores resultados obtidos em (SOLIS-OBA *et al.*, 2017).

Uma heurística para o MCDSP foi utilizada em (LUCENA *et al.*, 2010) para obter uma solução viável do MLSTP. A ideia é construir $D \subseteq V$, uma solução para o MCDSP, conforme descrito a seguir. Inicialmente, para um vértice qualquer $v \in V$, considere $D = \{v\}$ e $F \subseteq V \setminus D$ o conjunto de vértices dominados por D (nesse caso, $F := \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$). O procedimento consiste em mover para D o vértice u em F que possuir mais vizinhos em $V \setminus (D \cup F)$, um por vez, mantendo a conectividade em D e atualizando $F := F \cup \{w \in V \setminus D : \{u, w\} \in E\}$, até que todos os vértices sejam dominados, ou seja, $D \cup F = V$. A melhor solução é escolhida dentre todas as possibilidades de um vértice inicial $v \in V$. Além disso, a heurística pode ser fortalecida com sucessivas tentativas de remover um vértice $u \in D$ tal que $D := D \setminus \{u\}$ continue dominante e conexo. Os dois últimos passos supracitados para melhorar a heurística foram propostos em (GENDRON *et al.*, 2014). Através de experimentos realizados e apresentados em (LUCENA *et al.*, 2010) foi possível constatar que essa heurística apresentou-se consistentemente melhor quando comparada ao algoritmo 3-aproximativo sugerido em (LU; RAVI, 1998), ao algoritmo 2-aproximativo mostrado em (SOLIS-OBA, 1998) e à busca em largura utilizada em (FUJIE, 2003).

Posteriormente, no próximo capítulo, também apresentamos formulações matemáticas, presentes na literatura, para o MLSTP.

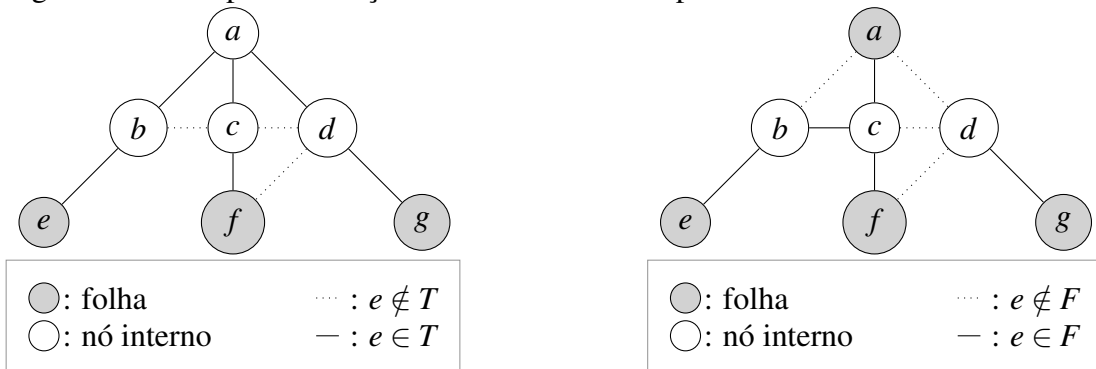
2.2 O problema da k -floresta com máximo número de folhas

O **problema da k -floresta com máximo número de folhas** ou *maximum leaf k -forest problem* (MLkFP) consiste em, dado um inteiro positivo k e um grafo não direcionado conexo $G = (V, E)$, encontrar uma floresta geradora de G com o máximo número de folhas e não mais que k componentes (REIS *et al.*, 2017). Cada árvore da solução tem um nó raiz, que não deve ser considerado como folha. Portanto, componentes com um único vértice não

são contabilizadas como folhas e componentes com dois vértices contêm apenas uma folha. Em árvores com mais de três vértices, considera-se a raiz como sendo um nó interno qualquer. O MLkFP é um problema ainda pouco trabalhado na literatura (REIS *et al.*, 2017), mas que generaliza um problema bastante estudado, que é o MLSTP (LU; RAVI, 1992) e, portanto, engloba tanto as aplicações quanto a complexidade de resolução do MLSTP. De fato, resolver o MLkFP, para $k = 1$, é encontrar uma solução para o MLSTP.

Considerando um grafo de entrada G e um inteiro positivo $j \geq 2$, existe uma relação entre os conjuntos de soluções do MLkFP para $k = j$ e para $k < j$, em particular uma relação com o conjunto de soluções do MLSTP. Sejam S_1 o conjunto de soluções viáveis do MLSTP e S_i o conjunto de soluções viáveis do MLkFP para $k = i$. Por definição do problema, tem-se que $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_{i-1} \subseteq S_i$. Logo, o valor ótimo do MLkFP para $k = i - 1$ é um limite inferior para $k = i$. Mostramos na Figura 2 um exemplo dessa propriedade para $k = 2$, onde uma das soluções viáveis para a instância utilizada também é solução do MLSTP e fica claro que a propriedade não é necessariamente recíproca. Também ilustramos, na Figura 3, as respectivas soluções ótimas da instância utilizada para $k = 1$ e $k = 2$, onde podemos perceber que o valor ótimo para $k = 1$ é um limite inferior para o valor ótimo considerando $k = 2$.

Figura 2 – Exemplo de soluções viáveis do MLkFP para $k = 2$.



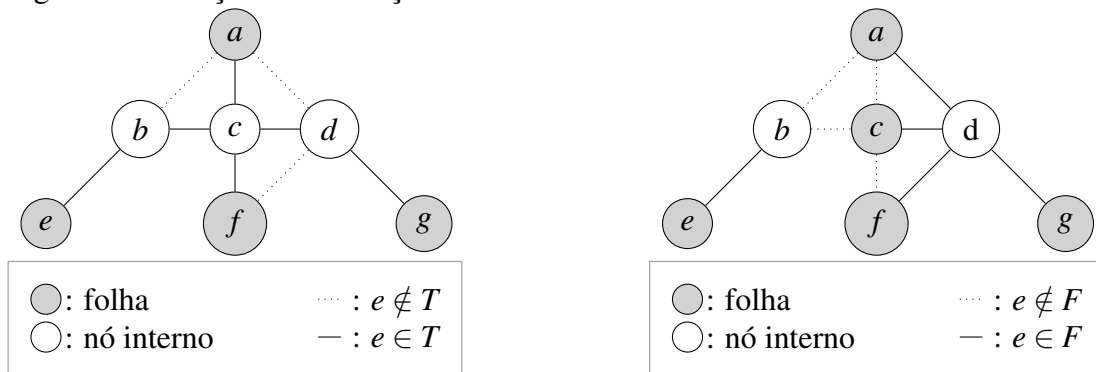
(a) Solução viável T com uma componente.

(b) Solução viável F com duas componentes.

Fonte: produzida pelo autor.

Um algoritmo 3-aproximativo para o MLkFP, baseado em (LU; RAVI, 1998), pode ser encontrado em (REIS *et al.*, 2017). Os autores utilizam o conceito de floresta frondosa, definido em (LU; RAVI, 1998) (relatado na seção anterior). Seja $T = (V_T, E_T)$ uma árvore inicialmente composta por um vértice de $G = (V, E)$ de grau pelo menos 3 e todos os seus vizinhos. Em (REIS *et al.*, 2017) são utilizadas duas regras de expansão para T . Considerando v uma folha de T e $S = V \setminus V_T$, a primeira regra, denominada expansão direta, consiste em

Figura 3 – Relação entre soluções ótimas do MLSTP e MLkFP.



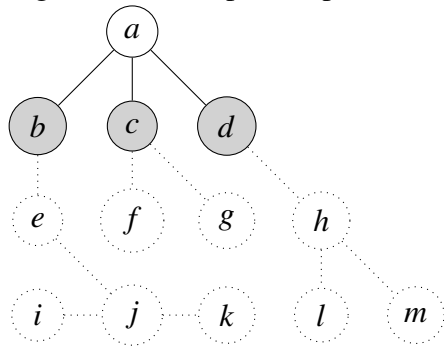
(a) Solução ótima T para o MLSTP.

(b) Solução ótima F para $k = 2$.

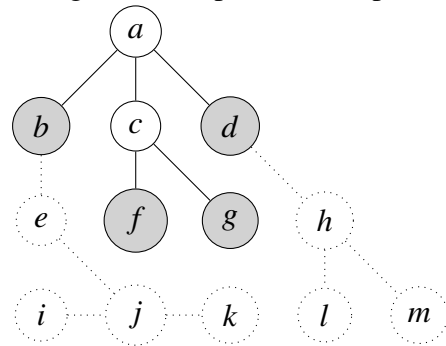
Fonte: produzida pelo autor.

expandir v se existir pelo menos dois vizinhos de v em S . A expansão consiste em transformar v em um nó interno e adicionar todos os seus vizinhos, em S , como folhas de T . A segunda regra, denominada expansão indireta, consiste em expandir v se ele for adjacente a um único nó u em S com grau maior ou igual a 2 em $G[V \setminus V_T]$. Nesse caso, a expansão transforma v em nó interno ao adicionar u , também como nó interno, e todos os vizinhos de u em S como folhas em T . A cada expansão, T e S são atualizados. Esse procedimento é repetido até que não seja mais possível expandir nenhuma folha de T , tornando T uma árvore frondosa. Adiciona-se T à $F = (V_F, E_F)$, inicialmente vazio ($V_F = E_F = \emptyset$), e esse processo tem continuidade até que todos os vértices que não estão em nenhuma árvore tenham grau menor ou igual a 2 em $G[V \setminus V_F]$. Esses procedimentos de expansão podem ser visualizados na Figura 4. Ao término dessa fase do algoritmo, toda componente de $G[V \setminus V_F]$ é um caminho. Além disso, apenas as folhas de F podem ter vizinhos em $G[V \setminus V_F]$. A segunda fase consiste em conectar as árvores da floresta F e acoplar as componentes fora de F , respeitando o número máximo de componentes. Conectar árvores em F gera, obrigatoriamente, um decremento no número de folhas. Por outro lado, acoplar os caminhos que não estão em F não ocasiona perdas.

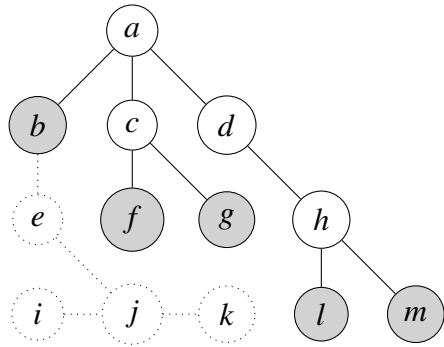
Figura 4 – Exemplo dos procedimentos de expansão do algoritmo 3-aproximativo para o MLkFP.



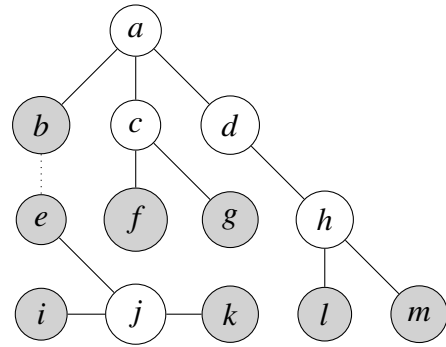
(a) Início do procedimento em a .



(b) Expansão direta em c .



(c) Expansão indireta em d .



(d) Início de nova árvore em j .

Fonte: produzida pelo autor.

3 MODELOS MATEMÁTICOS DA LITERATURA PARA O MLSTP

Neste capítulo tratamos de alguns resultados do MLSTP que serviram de inspiração para propormos nossos modelos matemáticos para o MLkFP. Na Seção 3.1 abordamos a notação utilizada. A Seção 3.2 apresenta alguns modelos da literatura para o MLSTP. Por sua vez, a Seção 3.3 trata de apresentar desigualdades válidas para esses modelos.

3.1 Notação

Por simplicidade, no decorrer do texto, o leitor pode deparar-se com a utilização dos termos n , V , E e G , sem mais detalhes, ficando subentendido, exceto quando explicitado, que se trata de uma entrada genérica para o problema, onde $G = (V, E)$ é um grafo simples não direcionado conexo e $n = |V| \geq 3$. Sempre supomos que Além disso, considere as seguintes definições: $\delta(i)$ e $n_i = |\delta(i)|$ representam, respectivamente, o conjunto de arestas incidentes em $i \in V$ e seu grau. Nos modelos matemáticos são usadas variáveis x_e para toda aresta $e \in E$ e variáveis z_i para todo vértice $i \in V$. A variável x_e indicará se a aresta e pertencerá à solução; nesse caso tem-se $x_e = 1$ e, caso contrário, $x_e = 0$. De forma análoga, a variável z_i indicará se o vértice i será folha ($z_i = 1$) ou não ($z_i = 0$). Em alguns momentos, utilizamos um digrafo $D = (V, A)$, onde A é um conjunto de arcos que representam as arestas E , para representar uma entrada G (o modo como A é definido varia e é explicitado quando utilizado). Associado a D , definimos $\delta^+(i) = \{(i, j) : (i, j) \in A\}$ e $\delta^-(i) = \{(j, i) : (j, i) \in A\}$, para todo $i \in V$. Também associamos variáveis y_a aos arcos $a \in A$, com significado análogo ao das variáveis x .

Utilizamos $N(i)$ para denotar os vértices adjacentes a $i \in V$ (note que $n_i = |\delta(i)| = |N(i)|$). De modo similar, $N^+(i) = \{j \in V : (i, j) \in A\}$ denota sua vizinhança de saída e $N^-(i) = \{j \in V : (j, i) \in A\}$ sua vizinhança de entrada, quando consideramos o grafo direcionado. Sua vizinhança fechada é denotada por $N[i] = N(i) \cup \{i\}$.

Seja $S \subseteq V$. Utilizamos $E(S) = \{(i, j) \in E : i, j \in S\}$ para denotar o conjunto de arestas induzidas por S . Analogamente, utilizamos $A(S) = \{(i, j) \in A : i, j \in S\}$ para denotar o conjunto de arcos induzidos por S . Por simplicidade de notação, entende-se por $G \setminus S$ ou $G - S$ o subgrafo induzido $G[V \setminus S]$. Algumas vezes estendemos essa notação para um vértice $i \in V$, onde $G \setminus i$ ou $G - i$ representa o subgrafo induzido $G[V \setminus \{i\}]$. Eventualmente usamos V_T para denotar o conjunto de vértices de um grafo T , da mesma maneira que utilizamos E_T para representar suas arestas.

Por último, denotamos por **fracamente conexo** um digrafo $D = (V, A)$ cujo **grafo subjacente** $G = (V, E)$, onde $E = \{\{i, j\} : (i, j) \in A\}$, seja conexo.

3.2 Formulações matemáticas para o MLSTP

Iniciamos apresentando o modelo descrito em (FUJIE, 2004) para o MLSTP, que segue de uma formulação proposta em (FERNANDES; GOUVEIA, 1998):

$$(MF) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \quad (3.1)$$

$$s.a. \quad \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \quad (3.2)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, \quad |S| \geq 2, \quad (3.3)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + (n_i - 1)z_i \leq n_i, \quad \forall i \in V, \quad (3.4)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E, \quad (3.5)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (3.6)$$

As restrições (3.2), (3.3) e (3.5) garantem que as soluções sejam árvores geradoras, onde a restrição (3.2) assegura o número de arestas da árvore geradora, (3.3) garantem a não existência de ciclos e (3.5) asseguram a integralidade das variáveis x . Já as restrições (3.4) garantem que, se o grau de um vértice em uma solução for maior que uma unidade, então esse vértice não pode ser folha. Note que, pela natureza da função objetivo, não é preciso forçar $z_i = 1$ para uma solução em que $i \in V$ tiver grau 1 (o mesmo vale para os demais modelos apresentados). As restrições restantes são os domínios das variáveis binárias z .

O segundo modelo desta seção, apresentado em (LUCENA *et al.*, 2010), é uma reformulação do anterior e semelhante ao proposto por (FERNANDES; GOUVEIA, 1998). A ideia é resolver o MLSTP buscando encontrar uma **arborescência geradora com o número máximo de folhas** ou, como denominado na literatura, *maximum leaf spanning arborescence problem* (MLSA). Para isso, o grafo de entrada é transformado em um digrafo, conforme descrito a seguir. Dado um grafo $G = (V, E)$, um vértice $r \in V$ é escolhido para ser raiz do digrafo $D = (V, A)$ construído a partir de G , onde $A = \{(i, j), (j, i) : e = \{i, j\} \in E, i, j \in V \setminus \{r\}\} \cup \{(r, j) : j \in N(r)\}$.

Conforme destacado em (LUCENA *et al.*, 2010), em uma arborescência geradora T de D , enraizada em r , um vértice $i \in V \setminus \{r\}$ será folha se, e somente se, não existir arco saindo de i em T . Por outro lado, r será folha de T se, e somente se, existir apenas um arco saindo de r em T .

Uma reformulação apresentada em (LUCENA *et al.*, 2010) para o MLSTP é dada por:

$$(ML) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \quad (3.7)$$

$$s.a. \quad \sum_{a \in \delta^-(i)} y_a = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{r\}, \quad (3.8)$$

$$\sum_{a \in A(S)} y_a \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, \quad |S| \geq 2, \quad (3.9)$$

$$\sum_{a \in \delta^+(i)} y_a + (n_i - 1)z_i \leq n_i - 1, \quad \forall i \in V \setminus \{r\}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{a \in \delta^+(r)} y_a + (n_r - 1)z_r \leq n_r, \quad (3.11)$$

$$y_a \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \quad (3.12)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (3.13)$$

As restrições (3.8), (3.9) e (3.12) garantem que as soluções sejam arborescências geradoras. As restrições (3.10) associam o grau de saída de um vértice $i \in V \setminus \{r\}$ com o valor da variável z_i , onde podemos observar que, devido à restrição (3.8), o lado direito da desigualdade é uma unidade menor que em (3.4). Por sua vez, a restrição (3.11) associa o grau da raiz r com z_r , e as demais restrições são de domínios para as variáveis binárias.

Caso seja de interesse do leitor, uma reformulação do MLSTP para o problema da árvore de Steiner também é apresentado em (LUCENA *et al.*, 2010).

A seguir, apresentamos a formulação proposta em (REIS *et al.*, 2015), na qual é utilizado fluxo em rede para resolver o MLSA. Seja $G = (V, E)$ e r um vértice de G . Para cada aresta $\{u, v\} \in E$ são adicionados a A , inicialmente vazio, arcos (u, v) e (v, u) , obtendo o digrafo $D = (V, A)$. Um sumidouro é um vértice com grau de saída zero na solução e pode representar uma folha. Observe que uma instância em que s seja o número máximo de sumidouros implica uma solução com pelo menos s folhas, mas pode existir uma solução também com s sumidouros em que a raiz tenha grau de saída um, implicando a existência de uma solução com $s + 1$ folhas, trocando r por um dos nós internos da solução. Para contornar esse problema, pode-se resolver o

modelo uma vez para cada vértice sendo considerado como raiz, conforme sugerido em (REIS *et al.*, 2015). A ideia apresentada em (REIS *et al.*, 2015) consiste em adicionar a D um novo vértice t (terminal) e um conjunto de arcos artificiais $\{(i,t) : i \in V \setminus \{r\}\}$ obtendo $D' = (V', A')$ com $V' = V \cup \{t\}$ e $A' = A \cup \{(i,t) : i \in V \setminus \{r\}\}$. A raiz envia uma quantidade de fluxo que é parcialmente consumido pelos demais vértices em $V \setminus \{r\}$, todos com demanda unitária. O fluxo restante é direcionado para o terminal. As variáveis de fluxo dos arcos originais podem assumir valores contínuos, enquanto as dos arcos artificiais devem ser binárias. Dessa forma, se $f_{it} = 1$, então o vértice i é um sumidouro na solução.

Considerando D' , o modelo denominado (FBM) apresentado em (REIS *et al.*, 2015) é dado como segue:

$$(FBM) \quad \max \quad s = \sum_{v \in V' \setminus \{r,t\}} f_{vt} \quad (3.14)$$

$$s.a. \quad \sum_{v \in N^+(r)} f_{rv} = n - 1 + s, \quad (3.15)$$

$$\sum_{u \in N^-(v)} f_{uv} - \sum_{w \in N^+(v) \setminus \{r\}} f_{vw} = 1, \quad \forall v \in V' \setminus \{r,t\}, \quad (3.16)$$

$$\sum_{w \in N^+(v) \setminus \{r,t\}} f_{vw} + 2(n-2)f_{vt} \leq 2(n-2), \quad \forall v \in V' \setminus \{r,t\}, \quad (3.17)$$

$$0 \leq f_{uv} \leq 2n - 2, \quad \forall (u,v) \in A, \quad (3.18)$$

$$f_{vt} \in \{0, 1\}, \quad \forall (v,t) \in A'. \quad (3.19)$$

A restrição (3.15) assegura que a raiz envia $n - 1 + s$ unidades de fluxo, atendendo a demanda unitária dos $V \setminus \{r\}$ vértices e a demanda de s unidades de fluxo enviadas via sumidouros para o terminal t . As restrições (3.16) garantem que cada vértice em $V \setminus \{r\}$ consuma uma unidade de fluxo. Nas restrições (3.17) é garantido que se $v \in V \setminus \{r\}$ for um sumidouro, então ele só envia fluxo para t . Em (3.18) é garantido a não negatividade do fluxo e estabelecido a capacidade máxima de cada arco ($2(n - 1)$ é o limite superior para um grafo com um vértice universal). Desse modo, a partir de uma solução ótima para o (FBM), é possível construir uma solução ótima para o MLSA (REIS *et al.*, 2015).

Um outro modelo para o MLSTP, também apresentado em (FUJIE, 2004), difere-se dos já relatados por buscar apenas um conjunto de folhas de tamanho máximo, não explicitando a estrutura interna da árvore, e utilizar somente variáveis do tipo z . Essa formulação, denominada

(PV), é dada adiante.

$$(PV) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \quad (3.20)$$

$$s.a. \quad \sum_{i \in V} z_i \leq |V| - 1, \quad (3.21)$$

$$\sum_{i \in S} z_i \leq |S| - 1, \quad (\forall S \subset V \text{ tal que } G \setminus S \text{ seja desconexo}), \quad (3.22)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (3.23)$$

A restrição (3.21) assegura que pelo menos um vértice seja nó interno. O conjunto de restrições (3.22) garante que os nós internos de uma solução sejam conexos. A validade do modelo é dada pela seguinte propriedade:

Lema 1 (FUJIE, 2004). *Seja $S \subseteq V$. S é um subconjunto de folhas de alguma árvore geradora em um grafo G se, e somente se, para qualquer $T \subseteq S$, $G \setminus T$ for conexo.*

Com base na demonstração do Lema 1, em (FUJIE, 2004) também é apresentado outro resultado:

Corolário 1 (FUJIE, 2004). *Seja $S \subseteq V$. S é um subconjunto de folhas de alguma árvore geradora em um grafo G se, e somente se, para qualquer $T \subseteq S$ com $|T| \geq |S| - 1$, $G \setminus T$ for conexo.*

3.3 Desigualdades válidas para o MLSTP

Inicialmente relatamos algumas desigualdades válidas propostas em (FUJIE, 2004) para a formulação (MF), onde é apresentado um estudo poliédrico dos modelos (MF) e (PV). A priori, supõe-se que $|V| \geq 3$.

$$\sum_{e \in F} x_e + (|F| - 1)z_i \leq |F|, \quad \forall i \in V, \forall F \subseteq \delta(i) : |F| \geq 2, \quad (3.24)$$

$$x_e + z_i + z_j \leq 2, \quad \forall e = \{i, j\} \in E. \quad (3.25)$$

Sejam $i \in V$ e S um subconjunto qualquer de $N(i)$. As desigualdades (3.24) generalizam as restrições (3.4) e garantem que, se um vértice i for folha, ele só poderá ser adjacente a no máximo um dos seus vizinhos em S . Essas desigualdades não são tão simples de visualizar quanto as restrições (3.25). Note que, se uma aresta e seus dois extremos estivessem em uma solução (violando (3.25)), como supõe-se $|V| \geq 3$, teríamos um grafo desconexo. Em particular

as desigualdades (3.24), conforme mostrado em (FUJIE, 2004), definem facetas de (MF) se, e somente se, nenhuma das arestas em F for incidente a um vértice de corte de $G \setminus i$.

A seguir, apresentamos desigualdades válidas propostas em (LUCENA *et al.*, 2010) para a formulação (ML).

$$y_a + z_i \leq 1, \quad \forall a = (i, j) \in A, \forall i \in V \setminus \{r\}, \quad (3.26)$$

$$\sum_{a \in F} y_a + \sum_{a=(j,i) \in A: (i,j) \in F} y_a + (|F| - 1)z_i \leq |F|, \quad \forall i \in V, \forall F \subseteq \delta^+(i) \cup \{(r, i)\}, |F| \geq 2. \quad (3.27)$$

Conforme mencionado anteriormente na Seção 3.2, com exceção da raiz, as folhas de uma dada solução do MLSA têm grau de saída zero, dando sentido às restrições (3.26). Por sua vez, as desigualdades (3.27) nada mais são que uma adaptação das restrições (3.24) para o MLSA.

A seguir, relatamos um conjunto de desigualdades válidas para o MLSTP, explicitado em (REIS *et al.*, 2015) para o modelo (FBM), mas generalizadas (por serem casos particulares) pelo conjunto de restrições (3.22) proposto em (FUJIE, 2004).

$$\sum_{j \in N[i]} f_{jt} \leq |N(i)|, \quad \forall i \in V. \quad (3.28)$$

Considerando o modelo (FBM) proposto em (REIS *et al.*, 2015), seja d_u a distância (número de arestas em um caminho mínimo) de $u \in V$ para r em G . Qualquer fluxo que chega a v pelo arco (u, v) passa por pelo menos d_u vértices, onde cada um desses nós consome uma unidade de fluxo e não pode ser folha, pois tem grau pelo menos dois. Desse modo, é possível fortalecer os limites superiores de fluxo nos arcos, substituindo as desigualdades (3.18) por:

$$0 \leq f_{uv} \leq 2(n - d_u - 1), \quad \forall (u, v) \in A. \quad (3.29)$$

Além disso, considerando as desigualdades (3.17), é possível usar de *lift* com as restrições (3.29) e obter as seguintes desigualdades (REIS *et al.*, 2015):

$$\sum_{v \in N^+(u) \setminus \{r, t\}} f_{uv} + 2(n - d_u - 1)f_{ut} \leq 2(n - d_u - 1), \quad \forall u \in V' \setminus \{r, t\}. \quad (3.30)$$

4 NOVAS FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O MLKFP E MLSTP

Neste capítulo propomos modelos matemáticos inéditos para o MLkFP. Em alguns momentos abordamos o problema individualmente para $k = 1$ e recaímos no MLSTP. Inicialmente, denominamos por (MF) a formulação vértice-aresta apresentada em (FUJIE, 2004) para o MLSTP. Em (LUCENA *et al.*, 2010), foi dada uma reformulação do modelo (MF), transformando o grafo de entrada em um digrafo. Usamos (ML) para nos referirmos a essa reformulação. Chamamos de (FBM) o modelo baseado em fluxo para o MLSTP apresentado em (REIS *et al.*, 2015). Todos esses modelos podem ser consultados na Seção 3.2. Além disso, para toda instância $G = (V, E)$, supomos que $|N(i)| < |V| - 1$ para todo $i \in V$ e, conseqüentemente, $|V| \geq 3$. Observe que seria possível checar se o problema admite solução trivial, em tempo polinomial, caso essas condições não se verifiquem.

Uma observação importante que deve ser levada em consideração é que, a partir deste capítulo, o conceito de nó interno vai além de vértices com grau maior ou igual a 2, estendendo-se para nós raízes. Em outras palavras, um vértice de uma solução com grau 0 ou até mesmo grau 1, somente quando for um dos vértices de uma componente de ordem 2, também é chamado de nó interno.

Na Seção 4.1 são apresentados dois modelos para o MLkFP que se baseiam em formulações da literatura para o MLSTP. A Seção 4.2 apresenta caracterizações do problema e formas alternativas de modelá-lo.

4.1 Formulações vértice-aresta para o MLkFP

Nesta seção, propomos duas formulações para o MLkFP que generalizam modelos para o MLSTP apresentados na literatura. Essas modelagens são caracterizadas por utilizarem variáveis de decisões para vértices e arestas, seja diretamente ou através da transformação do grafo de entrada para um digrafo, onde, nesse caso, as arestas são identificadas pelos arcos da solução. Além disso, os modelos aqui definidos buscam encontrar soluções completas para o problema (posteriormente, vemos que a priori podemos focar em encontrar soluções parciais).

A primeira formulação que propomos para o MLkFP segue de (MF) e é dada por:

$$(MF^k) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \quad (4.1)$$

$$s.a. \quad |V| - k \leq \sum_{e \in E} x_e \leq |V| - 1, \quad (4.2)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, |S| \geq 2, \quad (4.3)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e + (n_i - 1)z_i \leq n_i, \quad \forall i \in V, \quad (4.4)$$

$$z_i + z_j + x_e \leq 2, \quad \forall e = \{i, j\} \in E, \quad (4.5)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq z_i, \quad \forall i \in V, \quad (4.6)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E, \quad (4.7)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (4.8)$$

Podemos mostrar que (MF^k) é um modelo válido para o problema. Observe que retirar uma aresta qualquer de uma árvore resulta em duas componentes. Logo, as restrições (4.2), (4.3) e (4.7) garantem uma floresta com até k componentes. As restrições (4.4) dizem que, se o grau de um vértice em uma solução for maior que 1, então esse vértice não pode ser folha. Note que, pela natureza da função objetivo, não é preciso forçar $z_i = 1$ para uma solução em que $i \in V$ tenha grau um (o mesmo vale para o próximo modelo). As restrições (4.5) e (4.6) garantem, respectivamente, que dois vértices em componentes de ordem dois e vértices isolados não sejam erroneamente contabilizados como folhas.

Adiante apresentamos uma reformulação de (ML) para o MLkFP. Para isso, o grafo de entrada é transformado em um digrafo, conforme descrito a seguir. Dado um grafo $G = (V, E)$, obtemos um digrafo $D = (V, A)$ construído a partir de G , onde $A = \{(i, j), (j, i) : \{i, j\} \in E\}$. Além das variáveis y e z representando os arcos e vértices, respectivamente, associamos variáveis r_i para todo $i \in V$, indicando se um vértice é raiz ($r_i = 1$) de uma arborescência ou não ($r_i = 0$).

$$(ML^k) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \quad (4.9)$$

$$s.a. \quad \sum_{a \in \delta^-(i)} y_a + r_i = 1, \quad \forall i \in V, \quad (4.10)$$

$$\sum_{a \in A(S)} y_a \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, \quad |S| \geq 2, \quad (4.11)$$

$$\sum_{a \in \delta^+(i)} y_a + (n_i - 1)z_i - r_i \leq n_i - 1, \quad \forall i \in V, \quad (4.12)$$

$$1 \leq \sum_{i \in V} r_i \leq k, \quad (4.13)$$

$$r_i + z_i \leq 1, \quad \forall i \in V, \quad (4.14)$$

$$y_a \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, \quad (4.15)$$

$$r_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V, \quad (4.16)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V. \quad (4.17)$$

Em (ML^k) , as restrições (4.10), (4.11) e (4.13), juntamente com o domínio das variáveis, garantem que o número de arborescências seja no máximo k . As restrições (4.12) associam o grau de saída de um vértice i com o valor da variável z_i . A introdução de variáveis r nas restrições (4.12) se dá pelo fato de que todos os arcos $\delta^+(i)$ podem fazer parte da solução para um dado nó raiz i , o que não ocorre quando i não for raiz, pois nesse caso deve existir um arco entrando em i . As restrições (4.14) não permitem que um vértice seja raiz e folha simultaneamente. O complemento da validade do modelo segue da Proposição 4.1.1.

Proposição 4.1.1 *Toda componente $\bar{G} = (V_{\bar{G}}, A_{\bar{G}})$ em uma solução do modelo (ML^k) tem exatamente uma raiz.*

Demonstração 1 *Por contradição, primeiro assumamos que exista componente \bar{G} sem raiz. Nesse caso, pela restrição (4.10), todo vértice dessa componente teria um arco incidindo nele, ocasionando $|A_{\bar{G}}| \geq |V_{\bar{G}}|$ (violando (4.11)) e, portanto, haveria pelo menos um ciclo nessa componente. Agora, suponhamos que exista componente \bar{G} com mais de uma raiz. De forma análoga, pela restrição (4.10), isso seria impossível, pois $|A_{\bar{G}}| < |V_{\bar{G}}| - 1$ e, conseqüentemente, os vértices dessa componente não seriam conexos. Logo, o resultado segue.*

4.2 Formulações alternativas para o MLkFP e MLSTP

Apresentamos adiante formas alternativas de modelar o problema, nas quais obtemos soluções parciais, que consistem apenas na identificação de quais vértices são folhas (e, conseqüentemente, quais são internos) e, a partir dessas soluções parciais, conseguimos obter, em tempo polinomial, uma solução completa para o MLkFP (ou especificamente para o MLSTP, se for o caso). Essa alternativa foi apresentada para o MLSTP em (FUJIE, 2004) e mostramos que é possível estendê-la para o MLkFP.

Inicialmente, observando a vizinhança $N(i)$ de cada nó i , ou sua vizinhança fechada $N[i] = N(i) \cup \{i\}$, obtemos alguns resultados para o MLkFP.

Proposição 4.2.1 *Em toda solução do MLkFP valem as desigualdades*

$$\sum_{j \in N[i]} z_j \leq |N(i)|, \quad \forall i \in V. \quad (4.18)$$

Demonstração 2 *Suponha, por contradição, a existência de uma solução qualquer em que $z_i = 1$ para um vértice $i \in V$ e $z_j = 1$ para todo $j \in N(i)$. Agora, considere apenas o grafo que representa essa solução. Como i é folha (pois $z_i = 1$), i não é vértice isolado e é adjacente a exatamente um único vértice em $N(i)$, digamos k . Como $k \in N(i)$, por hipótese, $z_k = 1$. Além do mais, não poderia existir na solução aresta $\{k, j\}$ tal que $j \in N(k) \setminus \{i\}$. Logo, teríamos uma componente com apenas dois vértices e ambos sendo contabilizados como folhas, ocasionando, pela definição do problema, uma contradição. Portanto, o resultado segue.*

Para $k = 1$, podemos fortalecer essas desigualdades, obtendo:

$$\sum_{j \in N(i)} z_j \leq |N(i)| - 1, \quad \forall i \in V. \quad (4.19)$$

Proposição 4.2.2 *(4.19) são válidas para o MLSTP se, e somente se, $|N(i)| < |V| - 1$ para todo $i \in V$. Além disso, ((4.19)) dominam ((4.18)).*

Demonstração 3 *Observe que (4.19) não seriam válidas se $|N(i)| = |V| - 1$ para algum $i \in V$, pois haveria uma solução com o conjunto de folhas $V \setminus \{i\}$. Agora suponha que $|N(i)| < |V| - 1$, para qualquer $i \in V$. Portanto, deve existir $j \in V \setminus \{i\}$ tal que $j \notin N(i)$. Note que todo caminho de i a j , obrigatoriamente, deve passar por algum vértice em $N(i)$. Como toda solução deve ser conexa, deve existir pelo menos um caminho de i a j . Portanto, para uma solução viável qualquer, deve existir $k \in N(i)$ com grau maior ou igual a dois e, por consequência, $z_k = 0$.*

Logo, $\sum_{j \in N(i)} z_j \leq |N(i)| - 1$. Além disso, para todo $i \in V$, podemos obter (4.18) somando (4.19) às restrições $z_i \leq 1$. Logo, (4.19) dominam (4.18).

As desigualdades (4.18) são usadas para o MLSTP em (REIS *et al.*, 2015), porém são mais fracas que (4.19).

Inicialmente, apresentamos uma outra maneira para resolver o MLSTP e que vamos estender para o MLkFP. Observe que encontrar uma árvore geradora, conhecidos os vértices internos e suas folhas, pode ser feito em tempo polinomial. Portanto, podemos reformular o problema a fim de se obter apenas um conjunto de folhas viável que gere uma solução ótima. Desse modo, com base no modelo (PV) apresentado em (FUJIE, 2004) e no conjunto de desigualdades (4.19), apresentamos uma nova formulação para o MLSTP:

$$(MB) \quad \max \sum_{i \in V} z_i \tag{4.20}$$

$$s.a. \quad (4.19) \text{ e}$$

$$\text{conexo}(G - \mathbf{z}), \tag{4.21}$$

$$\mathbf{z} \in \mathbb{B}^{|V|}. \tag{4.22}$$

A restrição (4.21) garante que o subgrafo induzido pelos nós internos $G[\{i \in V : z_i = 0\}]$, denotado por $G - \mathbf{z}$, seja conexo. A forma como a implementamos é discutida posteriormente.

Proposição 4.2.3 *Suponha $|N(i)| < |V| - 1$ para todo $i \in V$. (MB) é válido para o MLSTP.*

Demonstração 4 *Vamos demonstrar que toda solução do MLSTP satisfaz (MB) e que toda solução de (MB) é válida para o problema. Seja F um subconjunto de folhas que configuram uma possível solução do MLSTP. Pela Proposição 4.2.2, F satisfaz o conjunto de desigualdades (4.19). Além disso, pelo Lema 1, para qualquer $T \subseteq F$, $G \setminus T$ é conexo (em particular para $T = F$). Logo, (4.21) é satisfeita. Agora sejam $\mathbf{z} \in \mathbb{B}^{|V|}$ e $F = \{i : z_i = 1\}$ tais que $G \setminus F$ seja conexo e que \mathbf{z} satisfaça as desigualdades (4.19). Seja $i \in F$. Por (4.19), há $j \in N(i)$ tal que $z_j = 0$, ou seja, existe $j \in V \setminus F$ tal que $\{i, j\} \in E$. Logo, $G \setminus (F \setminus \{i\})$ é conexo e, pelo Corolário 1 (fazendo $S = F \subseteq V$), F é um subconjunto de folhas de uma árvore geradora de G .*

Observe que, quando não assumirmos a hipótese de que $|N(i)| < |V| - 1$ para todo $i \in V$, poderemos usar as desigualdades (4.18) em substituição a (4.19) e obtermos um modelo

válido. Além disso, podemos expressar a Proposição 4.2.3 como uma propriedade do MLSTP, tornando-a independente do modelo (MB), da seguinte maneira:

Teorema 4.2.4 *Suponha $|N(i)| < |V| - 1$ para todo $i \in V$. S é um subconjunto de folhas de uma árvore geradora de G se, e somente se, $G \setminus S$ for conexo e, para qualquer $i \in V$, existe $j \in N(i)$ tal que $j \notin S$.*

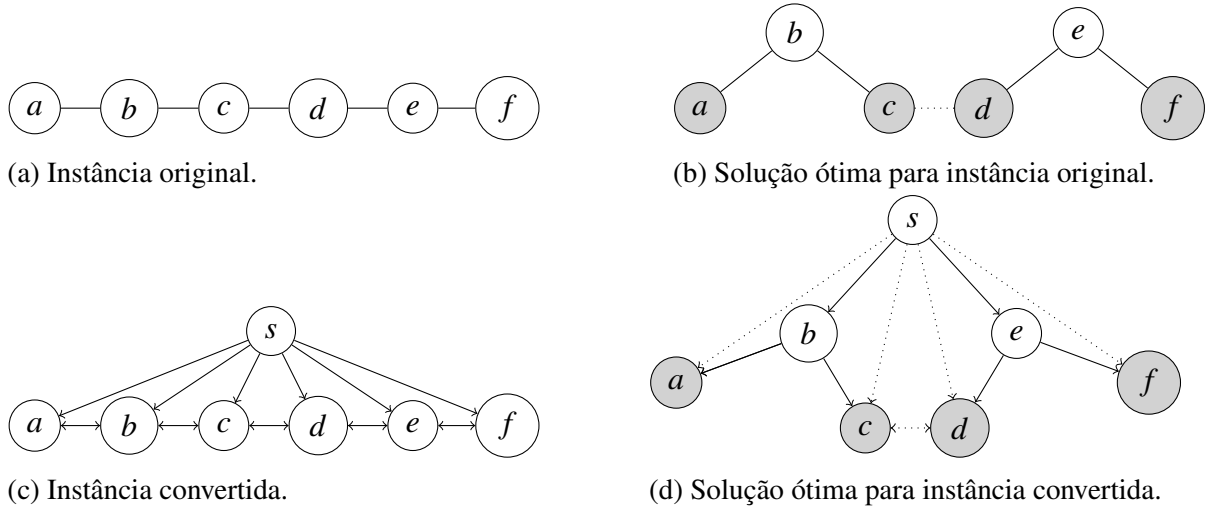
Além dos modelos (MF^k) e (ML^k), também podemos reformular (MB) para o MLkFP substituindo (4.19) por (4.18) e adaptando convenientemente a restrição (4.21). Entretanto, optamos por utilizar fluxo para complementar a ideia. Assim como no MLSTP, dado um conjunto de folhas de uma solução viável do MLkFP, encontrar uma floresta geradora com no máximo k componentes, e contendo esse conjunto de folhas, pode ser feito em tempo polinomial. Para isso, basta determinar as componentes através de uma busca em profundidade, considerando apenas os nós internos, e depois acoplar cada folha a uma componente. Portanto, também podemos formular o problema a fim de obter apenas um conjunto de folhas que gerem uma solução ótima.

Seja $G = (V, E)$ um grafo de entrada para o MLkFP. Um conjunto de folhas viável é qualquer conjunto de vértices $F \subset V$ tal que $\bigcup_{i \in V \setminus F} N[i] = V$ e $G[V \setminus F]$ tenha, no máximo, k componentes (demonstramos posteriormente no Teorema 4.2.6).

Observe que podemos transformar k componentes em uma única componente adicionando um vértice artificial s e arestas artificiais $\{\{s, v_1\}, \{s, v_2\}, \dots, \{s, v_k\}\}$, onde v_i e v_j são nós internos pertencentes a componentes distintas para todo $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Seguindo esse raciocínio, seja $D = (V \cup \{s\}, A)$, onde $A = \{(i, j), (j, i) : \{i, j\} \in E\} \cup \{(s, v) : v \in V\}$. Podemos resolver o MLkFP para G , utilizando D e encontrando um conjunto de folhas $S \subset V$ de cardinalidade máxima, tal que $D[V \setminus S]$ seja fracamente conexo utilizando no máximo k arcos de saída de s . Na Figura 5, exemplificamos o procedimento de conversão de uma instância e a equivalência, do ponto de vista de otimização, entre a solução ótima para o digrafo e para a instância original. Nas imagens, destacamos as folhas dos demais vértices.

Dadas tais informações, propomos um modelo de fluxo para resolver o MLkFP. A ideia consiste em enviar fluxo, a partir de s , passando apenas por nós internos, onde cada um desses nós consome uma unidade de fluxo. Na formulação proposta, utilizamos as variáveis z e definimos variáveis f_{ij} para todo $(i, j) \in A$, e r_v para todo $v \in V$ representando, respectivamente, os fluxos nos arcos e se v é um vértice de acesso a uma componente ($r_i = 1$) ou não ($r_i = 0$). Por exemplo, na Figura 5, os nós de acesso são b e e . A seguir, apresentamos a formulação:

Figura 5 – Exemplo de conversão e resolução de uma instância para $k = 2$.



Fonte: produzida pelo autor.

$$(MFA) \quad \max \quad p = \sum_{v \in V} z_v \quad (4.23)$$

$$s.a. \quad \sum_{u \in N^-[v]} z_u \leq |N(v)|, \quad \forall v \in V, \quad (4.24)$$

$$\sum_{v \in V} r_v \leq k, \quad (4.25)$$

$$\sum_{v \in V} f_{sv} = |V| - p \quad (4.26)$$

$$\sum_{u \in N^-(v)} f_{uv} - \sum_{w \in N^+(v)} f_{vw} = 1 - z_v, \quad \forall v \in V, \quad (4.27)$$

$$0 \leq f_{vw} \leq (n-1)(1-z_v), \quad \forall v \in V, \quad \forall w \in N^+(v), \quad (4.28)$$

$$0 \leq f_{sv} \leq nr_v, \quad \forall v \in V, \quad (4.29)$$

$$z_v, r_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (4.30)$$

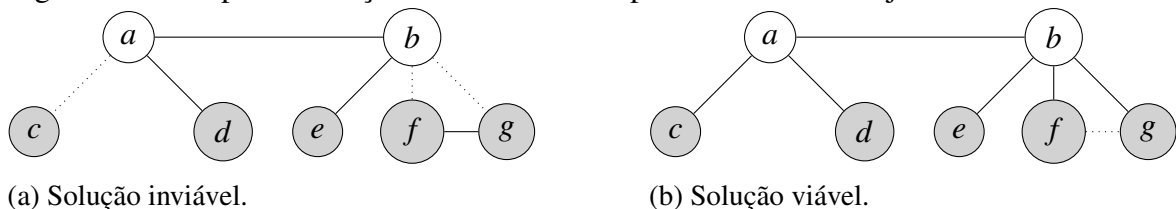
As restrições (4.24) asseguram que os vértices internos formem um conjunto dominante. As restrições (4.25) e (4.29) garantem que o número de componentes da floresta seja no máximo k . Na restrição (4.26) é assegurado que sejam enviadas, a partir de s , $|V| - p$ unidades de fluxo para que, pela restrição (4.27), cada nó interno consuma uma unidade. Desse modo, garantimos que os nós internos, juntamente com s , sejam conectados em D . As restrições (4.28) (em conjunto com (4.27)) asseguram que apenas os vértices internos sejam conectados pela rede de fluxo. Note que, para $v \in V$ tal que $z_v = 1$, temos demanda zero, $f_{vw} = 0$ para todo $w \in N^+(v)$ e, conseqüentemente, $f_{uv} = 0$ para todo $u \in N^-(v)$. Além disso, as restrições (4.24)

asseguram que nem todos os vértices sejam folhas simultaneamente, logo não precisamos forçar que haja pelo menos uma componente. Agora, note que o modelo não proíbe que uma mesma componente tenha mais de um nó de acesso na solução, mas isso não tem importância, uma vez que só precisamos garantir um limite superior para o número de árvores.

Perceba que, para $k = 1$ e pela Proposição 4.2.2, podemos escolher um vértice $v \in V$ qualquer e só precisamos definir variáveis r para os vértices em $N(v)$, visto que só é necessário um único nó de acesso e pelo menos um dos vizinhos de cada vértice precisa ser nó interno em qualquer solução.

A princípio, pode ser difícil visualizar a corretude do modelo em relação a vértices isolados ou componentes de ordem dois. Porém, note que, se existir uma floresta em que um vértice isolado seja contabilizado como folha, ou seja, $v \in V$ for um vértice isolado para uma dada solução do modelo tal que $z_v = 1$, por (4.24), haverá $u \in N(v)$ tal que $z_u = 0$ e, conseqüentemente, uma floresta de mesmo custo, com uma componente a menos, onde a aresta $\{u, v\}$ é adicionada. Seguindo o mesmo raciocínio, se existir uma floresta em que $u, v \in V$ constituem uma componente de ordem dois para uma dada solução do modelo tal que $z_u = z_v = 1$, também é possível encontrar uma solução de mesmo valor trocando a aresta $\{u, v\}$ pelas arestas $\{t, u\}$ e $\{v, w\}$ tal que $z_t = z_w = 0$. Um exemplo desses casos pode ser visualizado na Figura 6. Note que na Figura 6a temos um vértice isolado c e dois vértices (f e g) de uma componente de ordem dois sendo erroneamente contabilizados como folhas. A Figura 6b mostra que é possível obter uma solução viável adicionando as arestas $\{a, c\}$, $\{b, f\}$ e $\{b, g\}$, e removendo a aresta $\{f, g\}$. Lembre-se que a existência das arestas necessárias, caso seja preciso realizar tais procedimentos, é garantida pelas desigualdades (4.24).

Figura 6 – Exemplo de solução inviável e viável para um mesmo conjunto de folhas e $k = 3$.



Fonte: produzida pelo autor.

Note que, uma vez fixados valores para as variáveis z e r , temos um modelo de fluxo e, conseqüentemente, uma matriz totalmente unimodular (TU). Isso garante que, quando as demandas e capacidades forem valores inteiros, os fluxos nos arcos, em um vértice do poliedro, também serão. Além disso, as restrições (4.24) e (4.25) não envolvem as variáveis f , portanto só

é preciso definir as variáveis z e r como inteiras, não sendo necessário explicitar o mesmo para as variáveis f .

Sejam $v \in V$ e $w \in N^+(v)$. Observe que, se dispusermos de uma solução viável inicial de valor lb , podemos fortalecer as capacidades dos arcos (v, w) e (s, v) , obtendo $f_{vw} \leq (n - 2 - lb)$ e $f_{sv} \leq (n - 1 - lb)$. Isso ocorre porque qualquer solução melhor teria pelo menos um nó interno a menos, logo o fluxo teria o limite informado. Além disso, note que $(n - 2 - lb)$ é a quantidade máxima de fluxo que pode ser enviada a partir de v , independentemente de como esse fluxo é distribuído em seus arcos de saída. Portanto, podemos substituir as restrições (4.28) e (4.29), respectivamente, por:

$$0 \leq \sum_{w \in N^+(v)} f_{vw} \leq (n - 2 - lb)(1 - z_v), \quad \forall v \in V, \quad (4.31)$$

$$0 \leq f_{sv} \leq (n - 1 - lb)r_v, \quad \forall v \in V, \quad (4.32)$$

É importante ressaltar que essa alteração na matriz do modelo (MFA) poderia, a princípio, quebrar a propriedade discutida anteriormente, na qual mencionamos que poderíamos definir f como variáveis contínuas e, ainda assim, obter valores inteiros. Isso porque, para uma matriz TU, uma vez que as demandas e capacidades são valores inteiros, todos os vértices também são inteiros. Em outras palavras, a existência de uma solução f^* qualquer, mesmo com f^* assumindo valores fracionários, implicaria na existência de uma solução $\bar{f} \in \mathbb{Z}^{|A|}$ de mesmo valor. Como só desejamos que exista $f \in \mathbb{Z}^{|A|}$, uma vez que o nosso real interesse, na solução fornecida por (MFA), é voltado para o valor das variáveis z , não seria um problema f não ser inteiro. Observe, porém, que as soluções inteiras ainda são as mesmas tanto antes quanto depois do fortalecimento, uma vez que as desigualdades fortalecidas são válidas. Sendo assim, a existência de solução fracionária também implicaria na existência de $f \in \mathbb{Z}^{|A|}$.

Embora não fosse necessário para nosso propósito, destacamos que mesmo alterando a matriz de coeficientes, ao substituir (4.28) por (4.31), as linhas que denotam as restrições de fluxo também resultam em uma matriz de coeficientes TU (Proposição 4.2.5).

Proposição 4.2.5 *A matriz de coeficientes relativos às variáveis f no conjunto de restrições (4.26), (4.27), (4.31) e (4.32) é TU.*

Demonstração 5 *Sem perda de generalidade, podemos simplesmente ignorar as linhas da matriz de coeficientes de (4.32), visto que elas formam uma submatriz identidade. Feito isso, rotulamos todos os vértices em V de forma sequencial, iniciando de 1. Sendo assim, para simplificar, consideramos $V = \{1, \dots, n\}$. Em particular, atribuímos o rótulo 0 ao vértice s e consideramos $V \cup \{s\} = \{0, \dots, n\}$. Sejam $i \in V \cup \{s\}$ e A^1 a matriz de coeficientes das restrições (4.26) e (4.27). Agora, seja A^2 a matriz de coeficientes das restrições (4.31). Denotamos por A_i^1 e A_i^2 (nesse caso, para $i \neq 0$), respectivamente, a i -ésima linha das matrizes A^1 e A^2 , que correspondem às restrições referentes ao vértice i nas respectivas matrizes.*

Iremos demonstrar que $A \in \mathbb{Z}^{(2n+1) \times |A|}$, a matriz formada pelas linhas de A^1 , A^2 (nessa ordem), com linhas e colunas indexadas, respectivamente, por $M = \{0, \dots, 2n\}$ e $N = \{1, \dots, |A|\}$, é TU.

Seja a_{ij} o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de A . Utilizaremos a seguinte caracterização para matrizes TU: $\forall I \subseteq M, \exists$ partição I^1 e I^2 de I tal que $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} \in \{0, \pm 1\} \forall j \in N$ (GHOUILA-HOURI, 1962).

Seja $I \subseteq M$. Construimos I^1 e I^2 da seguinte maneira:

- $I^1 = \{i \in I : 0 \leq i \leq n\} \cup \{i \in I : (n+1) \leq i \leq 2n, (i-n) \notin I\}$;
- $I^2 = \{i \in I : (n+1) \leq i \leq 2n, (i-n) \in I^1\}$.

Sejam $j \in N$ e N_s as colunas referentes às variáveis f_{sv} , para todo $v \in V$. Queremos mostrar que j , uma coluna qualquer, satisfaz $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} \in \{0, \pm 1\}$. Note que, com exceção das colunas indexadas por N_s (que têm apenas dois elementos não nulos), em toda coluna de A existem três elementos não nulos. Suponha, sem perda de generalidade, que $j \in N \setminus N_s$ e existam pelo menos dois elementos não nulos na coluna j das linhas indexadas por I (senão é trivial). Agora, seja f_{uv} a variável associada a um arco com extremidade inicial u e final v , na coluna $j \in N \setminus N_s$. Nesse caso, temos $a_{uj} = 1$ e $a_{vj} = -1$. Como $u \in V$ e $j \notin N_s$, temos que $a_{0j} = 0$ e $1 \leq u \leq n$. Além disso, $A_{(n+u)}^2$ contém uma cópia dos elementos positivos de A_u^1 e, portanto, $a_{(n+u)j} = a_{uj} = 1$. Sendo assim, resta analisar quatro possíveis casos envolvendo dois ou três elementos não nulos:

1. $u, v, (n+u) \in I$: $u, v \in I^1$ e $(n+u) \in I^2$. Portanto, $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} = a_{uj} + a_{vj} - a_{(n+u)j} = 1 - 1 - 1 = -1$.
2. $u \notin I$: $v, (n+u) \in I^1$. Portanto, $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} = a_{vj} + a_{(n+u)j} = -1 + 1 = 0$.
3. $v \notin I$: $u \in I^1$ e $(n+u) \in I^2$. Portanto, $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} = a_{uj} - a_{(n+u)j} = 1 - 1 = 0$.
4. $(n+u) \notin I$: $u, v \in I^1$. Portanto, $\sum_{i \in I^1} a_{ij} - \sum_{i \in I^2} a_{ij} = a_{vj} + a_{uj} = -1 + 1 = 0$.

Portanto, pela caracterização descrita acima, temos que a matriz A é TU e, conseqüentemente, a matriz de coeficientes relativos às variáveis f no conjunto de restrições (4.26), (4.27), (4.31) e (4.32) também é TU.

Agora, para provar a corretude do modelo (MFA), utilizaremos o Teorema 4.2.6. Para isso, inicialmente denote por $comp(G)$ o número de componentes de um grafo G e por $G \setminus S$ o subgrafo induzido $G[V \setminus S]$.

Teorema 4.2.6 $S \subseteq V$ é um subconjunto de folhas de uma floresta $F = (V, E_F)$ geradora de $G = (V, E)$ com no máximo k componentes se, e somente se, $comp(G \setminus S) \leq k$ e, para qualquer $i \in S$, existe $j \in N(i)$ tal que $j \notin S$.

Demonstração 6 (\Rightarrow) Suponha S conjunto de folhas de uma floresta F geradora de G tal que $comp(F) \leq k$. Como todos os vértices em S têm grau unitário em F , temos que $comp(F \setminus S) = comp(F) \leq k$. Como $F \setminus S$ é subgrafo de $G \setminus S$, temos que $comp(G \setminus S) \leq comp(F \setminus S) \leq k$. Além disso, pela Proposição 4.2.1, para qualquer $i \in S$, existe $j \in N(i)$ tal que $j \notin S$.

(\Leftarrow) Agora suponha um conjunto $S \subseteq V$ de modo que $comp(G \setminus S) \leq k$ e, para qualquer $i \in S$, existe $j \in N(i)$ tal que $j \notin S$. Como $comp(G \setminus S) \leq k$, existe floresta geradora $F' = (V \setminus S, E')$ de $G \setminus S$ tal que $comp(F') = comp(G \setminus S) \leq k$. Além disso, seja $i \in S$. Por hipótese, existe $j \in V \setminus S$ tal que $\{i, j\} \in E$. Portanto, existe floresta geradora $F'_i = (V \setminus (S \setminus \{i\}), E' \cup \{i, j\})$ de $G \setminus (S \setminus \{i\})$ em que i seja folha. Note que i é adicionado a uma única componente e, conseqüentemente, $comp(F'_i) = comp(F') \leq k$. Aplicando esse procedimento a todos os vértices de S , podemos construir $F = (V, E_F)$ floresta geradora de G tal que $comp(F) \leq k$ e os vértices de S sejam folhas em F .

Seja S uma solução dada pelo modelo (MFA). Perceba que, como já discutido anteriormente, o fluxo gerado no modelo (MFA) garante que $comp(G \setminus S) \leq k$. Além disso, para todo $i \in S$, pelo conjunto de restrições (4.24), existe $j \in N(i)$ tal que $j \notin S$. Desse modo, toda solução do modelo (MFA) é, de fato, solução para o problema. O sentido inverso também pode ser facilmente verificado.

Por último, tendo em mente a caracterização apresentada no Teorema 4.2.6 para o conjunto de soluções do problema, propomos uma última formulação alternativa para o MLkFP. Denominamos o modelo por (MVE) e utilizamos variáveis z e x com os mesmos significados que já vêm sendo utilizados nos demais modelos. O modelo é uma adaptação que segue da ideia

de uma formulação proposta em (GENDRON *et al.*, 2014) para o MCDSP. A ideia do modelo é determinar um conjunto de vértices S (folhas) de cardinalidade máxima tal que $V \setminus S$ seja dominante em G e $G \setminus S$ tenha no máximo k componentes. Para isso, utilizamos o conjunto de desigualdades (4.18) e só permitimos na solução arestas entre nós internos, de modo semelhante ao modelo (MFA) cuja rede de fluxo só abrange os vértices que não sejam folhas. Observe que em (MVE) fica mais explícito que, assim como o MLSTP e o MCDSP são equivalentes do ponto de vista de otimização, resolver o MLkFP é equivalente a resolver o problema de determinar o menor conjunto dominante D tal que $G[D]$ tenha no máximo k componentes.

$$(MVE) \quad \max \sum_{v \in V} z_v \quad (4.33)$$

$$s.a. \quad \sum_{u \in N[v]} z_u \leq |N(v)|, \quad \forall v \in V, \quad (4.34)$$

$$|V| - k \leq \sum_{e \in E} x_e + \sum_{v \in V} z_v \leq |V| - 1, \quad (4.35)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, \quad |S| \geq 2, \quad (4.36)$$

$$x_e + \max\{z_u, z_v\} \leq 1, \quad \forall e = \{u, v\} \in E, \quad (4.37)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E \quad (4.38)$$

$$z_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V. \quad (4.39)$$

Em (MVE), as restrições (4.34) garantem que os nós internos formem um conjunto dominante de G . A restrição (4.35) assegura o intervalo permitido para o número de folhas mais o número de arestas escolhidas, que pelas restrições (4.37) só são permitidas entre nós internos. Como todas as folhas, caso o modelo as conectassem, teriam grau 1, as restrições (4.35), (4.36) e (4.37), juntamente com as restrições de integralidade das variáveis z e x , garantem uma floresta com até k componentes. Considerando uma aresta qualquer $e = \{u, v\} \in E$, implementamos a restrição (4.37) como duas desigualdades, uma para cada extremidade da aresta: $x_e + z_u \leq 1$ e $x_e + z_v \leq 1$. Note que, pelos mesmos motivos já discutidos anteriormente para o modelo (MFA), não precisamos nos preocupar com a corretude do modelo (MVE) em relação a vértices isolados ou componentes de ordem dois.

Adaptando ideias propostas em (GENDRON *et al.*, 2014) para o MCDSP, vamos fortalecer o modelo (MVE) através da combinação das variáveis nas restrições. Seja $S \subset V$ tal

que $|S| \geq 2$. Note que as restrições (4.37) asseguram que, se $e = \{u, v\} \in E(S)$ e $x_e = 1$, então $z_u = 0$ e $z_v = 0$. Da mesma maneira, se $z_v = 1$, para $v \in S$, então $\sum_{a \in E(S) \cap \delta(v)} x_a = 0$. Sendo assim, para qualquer $w \in S$, a desigualdade $\sum_{e \in E(S)} x_e + \sum_{u \in S \setminus \{w\}} z_u \leq |S| - 1$ é válida e, portanto, podemos fortalecer o modelo substituindo (4.36) pelo conjunto de desigualdades a seguir:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e + \sum_{u \in S \setminus \{v\}} z_u \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, \quad |S| \geq 2, \forall v \in S \quad (4.40)$$

Além disso, seja $v \in V$. Observe que para $S = N[v]$, pelo conjunto de restrições (4.36), temos $\sum_{e \in E(N[v])} x_e \leq |N(v)|$. Agora note que, pelas restrições (4.34) e ainda pelas desigualdades (4.37), podemos fortalecer (4.34) obtendo as seguintes desigualdades:

$$\sum_{u \in N[v]} z_u + \sum_{e \in E(N[v])} x_e \leq |N(v)|, \quad \forall v \in V. \quad (4.41)$$

Podemos enxergar as restrições (4.41) como um caso particular das desigualdades (4.40) no qual há garantias que $\sum_{v \in S} z_v \leq |S| - 1$.

5 ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos desigualdades válidas e estratégias utilizadas na resolução dos modelos descritos até então. Nas formulações que contêm variáveis binárias representando arestas (ou arcos), utilizamos *depth-first search* (DFS) para conduzir a expansão da árvore durante o algoritmo de *Branch and Bound* (B&B). Além do mais, na escolha de qual variável ramificar nas soluções linearmente relaxadas, damos prioridades às variáveis que representam vértices e, adicionalmente, àquelas cujos valores sejam mais próximos a 0.5.

5.1 Solução inicial

Para todos os modelos, visando a obtenção de uma solução viável de partida, utilizamos a heurística apresentada na Seção 2.1 para o MCDSP que se mostrou eficiente quando aplicada ao MLSTP em (LUCENA *et al.*, 2010). A heurística fornece uma solução $D \subseteq V$ para o MCDSP, ou seja, os nós internos de uma solução para o MLSTP. Além disso, a heurística pode ser fortalecida com sucessivas tentativas de remover um vértice $u \in D$ tal que $D := D \setminus \{u\}$ continue dominante e, generalizando para o MLkFP, com no máximo k componentes. Conseqüentemente, a heurística e esse fortalecimento nos fornecem, respectivamente, os seguintes cortes:

$$\sum_{v \in V} z_v \geq |V \setminus D| + 1, \quad (5.1)$$

$$\sum_{v \in D} z_v \geq 2. \quad (5.2)$$

Ao adicionar a restrição (5.1), buscamos apenas soluções estritamente melhores que a solução inicial. Observe que, se o problema ficar inviável ao adicionar essa restrição, então a solução fornecida pela heurística é ótima. Para explicar (5.2), considere z^h uma solução inicial tal que $z_i^h = 1$ para todo $i \in V \setminus D$ e $z_i^h = 0$ para todo $i \in D$. Note que o processo de fortalecimento da heurística garante que não existe vértice $i \in D$ tal que $V \setminus (D \setminus \{i\})$ seja um conjunto válido de folhas. Sendo assim, em qualquer solução z^* melhor que z^h , caso exista, há pelo menos um vértice $j \in V \setminus D$ tal que $z_j^h = 1$ e $z_j^* = 0$. Portanto, faz-se necessário que pelo menos dois nós internos em z^h tornem-se folhas, pois z^* é estritamente melhor que z^h , dando sentido ao corte (5.2).

Vale ressaltar que também implementamos, juntamente com o processo de fortalecimento supracitado, a heurística apresentada em (REIS *et al.*, 2017) para o MLkFP. Entretanto, para o conjunto de instâncias que utilizamos, as soluções fornecidas por essa heurística foram in-

feriores ou de mesmos valores em aproximadamente 95% dos experimentos, quando comparadas com as soluções viáveis obtidas pela heurística apresentada em (LUCENA *et al.*, 2010).

5.2 *Iterative probing* Benders para (MB)

Para resolver o modelo (MB) referente ao MLSTP, utilizamos a abordagem denominada *iterative probing* do algoritmo de decomposição de Benders proposto em (GENDRON *et al.*, 2014) para o MCDSP. A decomposição consiste em resolver alternadamente (MB) com a restrição (4.21) relaxada e um subproblema polinomial de fluxo que determina o seguinte corte de viabilidade a ser incluído no modelo, caso (4.21) seja violada:

$$\sum_{v \in S} z_v \leq |S| - m_S, \quad (S \subset V \text{ tal que } G \setminus S \text{ é desconexo}). \quad (5.3)$$

Em (5.3), m_S é a quantidade mínima necessária de vértices em S para tornar $G \setminus S$ conexo e é obtida através da resolução de um problema de fluxo que definimos detalhadamente na Seção 5.7. Essas desigualdades são adaptações das definidas para o MCDSP em (GENDRON *et al.*, 2014) e também utilizadas em (ARAUJO; ANDRADE, 2016).

Além disso, nessa abordagem, a restrição (5.1) é modificada para uma igualdade. Desse modo, uma solução ótima com essa alteração pode não representar uma solução ótima para o MLSTP, uma vez fixado o número de folhas. Sendo assim, para uma solução candidata z^* encontrada, verifica-se se $G \setminus \{i \in V : z_i^* = 1\}$ é conexo. Caso seja, é feita uma tentativa de melhorar essa solução conforme o fortalecimento da heurística (Seção 5.1), atualizam-se a restrição (5.2) (o novo corte domina o antigo (GENDRON *et al.*, 2014)) e o lado direito da igualdade oriunda de (5.1) somando uma unidade no valor do melhor limite inferior encontrado. Caso contrário, adiciona-se o corte de viabilidade (5.3) associado a $S = \{i \in V : z_i^* = 1\}$ para que tal solução seja descartada. Esse procedimento é repetido iterativamente até o modelo tornar-se inviável e, conseqüentemente, a última solução encontrada será ótima.

Para provar que tal estratégia fornece uma solução ótima, considere as propriedades a seguir:

Lema 2 (GENDRON *et al.*, 2014). *Se não existir um conjunto dominante conexo com cardinalidade $d + 1 > 1$, então não existe um conjunto dominante conexo com cardinalidade d .*

Corolário 2 *Se não existir um conjunto de folhas com cardinalidade $(|V| - d - 1) < (|V| - 1)$, então não existe um conjunto de folhas com cardinalidade $|V| - d$.*

5.3 Estratégias para (MF+) e (MF^k)

Com base no modelo (MF), propomos uma variante (MF+) que se mostrou mais eficiente em nossos experimentos. Em (MF+), as restrições (3.3) são relaxadas e adicionadas (através da identificação dos vértices de um ciclo na solução candidata) quando violadas. Adicionamos o conjunto de restrições (4.19) e reforçamos com desigualdades (3.24), que, conforme mostrado em (FUJIE, 2004), podem definir facetas de (MF). Inicialmente, as restrições (3.24) também são relaxadas e, uma vez violadas, são adicionadas durante o processamento da raiz no (B&B). O procedimento de separação para (3.24), descrito em (LUCENA *et al.*, 2010), consiste em, dado um ponto fracionário (\bar{x}, \bar{z}) viável para a relaxação linear de (MF), para todo $i \in V$, ordenar os elementos em $\{\bar{x}_e : e \in \delta(i)\}$ em ordem decrescente como $\{\bar{x}_{e_1}, \dots, \bar{x}_{e_{n_i}}\}$, onde $n_i = |\delta(i)|$. Então, para (\bar{x}, \bar{z}) , $i \in V$ e $l \in \{2, \dots, n_i\}$, computa-se $(\sum_{j=1}^l \bar{x}_{e_j} + (l-1)\bar{z}_i)$. Fazendo isso, encontra-se um conjunto F , para i , de cardinalidade l com o maior valor possível para o lado esquerdo da desigualdade (3.24). Se o valor excede $|F|$, é identificado o subconjunto que mais viola a desigualdade. Caso contrário, (3.24) não é violada. Portanto, para qualquer $i \in V$, tal procedimento pode ser feito em tempo $O(n_i \log n_i)$.

Para o modelo (MF^k), utilizamos as restrições (4.18), reforçamos o modelo utilizando as desigualdades (3.24) e, com o intuito de eliminar algumas soluções irrelevantes, substituímos (4.6) pelas seguintes desigualdades válidas:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq 1, \quad i \in V. \quad (5.4)$$

Note que as desigualdades (5.4) excluem apenas soluções com vértices isolados e, apesar de mais restritivas, não ocasionam inviabilidade do problema, pois existem soluções de mesmo custo onde esses vértices são acoplados a outros nós.

Observe que também poderíamos ter substituído as restrições (4.6) pelas seguintes desigualdades:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq 2 - z_i, \quad i \in V. \quad (5.5)$$

Seja $i \in V$. As desigualdades (5.5) expressam que cada folha tem grau pelo menos 1 (para $z_i = 1$, o lado direito de (5.5) é igual a 1) e cada nó interno tem grau pelo menos 2 (pois $z_i = 0$). Além do mais, as desigualdades (5.5) dominam (5.4), pois podemos obter (5.4) somando (5.5) com $z_i \leq 1, \forall i \in V$. No entanto, foi observado que apesar de mais restritivas, os resultados obtidos não foram consensualmente melhores. Isso pode ter ocorrido em função do CPLEX realizar

menos cortes no processamento da raiz em comparação quando utilizadas as desigualdades (4.6) e (5.4).

5.4 Estratégias para (ML), (ML+) e (ML^k)

Para resolver o modelo (ML), as restrições (3.9) são relaxadas e adicionadas sempre que violadas, adicionamos as desigualdades válidas (3.26) e (3.27) propostas em (LUCENA *et al.*, 2010), escolhemos o vértice de maior grau para ser a raiz e, com o intuito de eliminar simetrias, perturbamos os custos das arestas com um fator de $0.00001j$, onde j é o valor do rótulo da cabeça do arco. As restrições (3.26) são integradas inicialmente ao modelo, e as desigualdades (3.27) são selecionadas pelo processo de separação descrito na Seção 5.3. Desse modo, (ML) torna-se a formulação utilizada em (LUCENA *et al.*, 2010) e é usada como referencial nos experimentos. Além disso, sugerimos uma variação (ML+), que consiste em adicionar o conjunto de restrições (4.19) à (ML). Para resolver (ML^k) fizemos uso de (4.18) e das seguintes desigualdades (LUCENA *et al.*, 2010):

$$y_a + z_i \leq 1, \quad \forall a = (i, j) \in A, \forall i \in V, \quad (5.6)$$

$$\sum_{j \in F} (y_{ij} + y_{ji}) + (|F| - 1)z_i \leq |F|, \quad \forall i \in V, \forall F \subseteq N(i) : |F| \geq 2. \quad (5.7)$$

5.5 Estratégias para (FBM+) e (MFA)

Os modelos (FBM+) e (MFA) são formulações simples de implementar e não demandam técnicas sofisticadas de corte ou separação. O modelo (FBM+) foi fortalecido com as desigualdades (3.28) (com base na Proposição 4.2.2) e substituímos as restrições (3.17) e (3.18) por (3.29) e (3.30), conforme feito em (REIS *et al.*, 2015). Já para o modelo (MFA), substituímos as restrições (4.28) e (4.29), respectivamente, por (4.31) e (4.32).

5.6 Estratégias para (MVE)

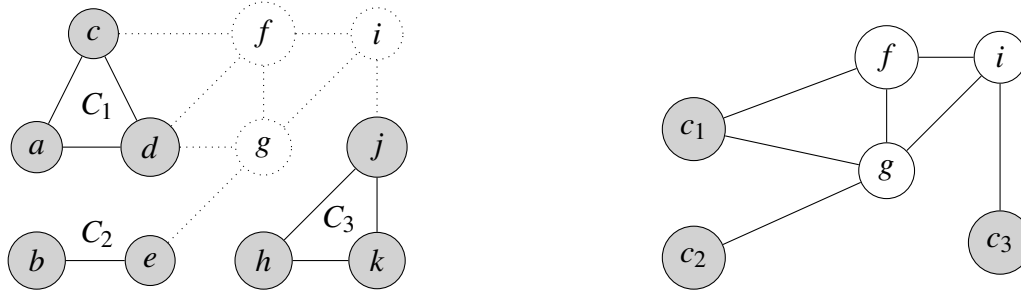
Para resolver o modelo (MVE), substituímos as restrições (4.36) pelas desigualdades válidas (4.40) que, assim como em (MF^k), são relaxadas e adicionadas quando violadas. Além disso, também substituímos as restrições (4.34) pelas desigualdades válidas (4.41), que são mais fortes uma vez que as dominam. Esses fortalecimentos no modelo foram propostos adaptando algumas desigualdades apresentadas em (GENDRON *et al.*, 2014) para formulações para o

MCDSP.

5.7 Determinando m_S

Seja $S \subset V$ tal que $G \setminus S$ não seja conexo. Considere $C = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ como o conjunto de componentes de $G \setminus S$. Criamos um grafo auxiliar $G' = (V', E')$ no qual definimos um vértice c_i para cada componente C_i e adicionamos os vértices de S , completando o conjunto de vértices V' . Definimos arestas $\{c_i, w\}$, $w \in S$, caso algum vértice de C_i seja adjacente a w no grafo G e, completando o conjunto de arestas E' , adicionamos as arestas $E(S)$. Sejam $A \subseteq V$ e $N(A) = \bigcup_{v \in A} \{w \in V \setminus A : \{v, w\} \in E\}$. De modo formal, definimos $G' = (V', E')$, onde $V' = \{c_1, c_2, \dots, c_p\} \cup S$ e $E' = \bigcup_{i \in \{1, \dots, p\}} \{\{c_i, w\} : w \in N(V_{C_i})\} \cup E(S)$. Mostramos na Figura 7 um exemplo do grafo auxiliar para uma determinada instância e conjunto S . Na imagem, destacamos os vértices e as arestas de $G \setminus S$.

Figura 7 – Exemplo de instância e seu grafo auxiliar.



(a) Componentes de $G \setminus S$.

(b) Grafo auxiliar G' .

Fonte: produzida pelo autor.

Agora, considere o digrafo $D' = (V', A')$, onde $A' = \{(i, j), (j, i) : \{i, j\} \in E'\}$. Determinamos m_S , a quantidade mínima necessária de vértices em S para conectar as componentes de $G \setminus S$, resolvendo um problema de fluxo em D' . Primeiramente, escolhemos um vértice qualquer do tipo c_i , digamos, sem perda de generalidade, c_1 . Então, enviamos $|C| - 1$ unidades de fluxo a partir de c_1 , para que cada vértice c_i , $i \in \{2, \dots, p\}$, consuma uma unidade de fluxo. Observe que queremos fazer isso utilizando a menor quantidade possível de vértices em S . Agora note que podemos obter o mesmo resultado se minimizarmos o número de arcos nos quais passam fluxo (ou arestas utilizadas, se esquecermos a orientação do digrafo resultante), pois o número mínimo de arcos em um digrafo fracamente conexo é dado em função do número de vértices (por exemplo, uma arborescência).

A seguir, apresentamos o modelo (MM_S) , onde são definidas variáveis binárias w_e

para toda aresta $e \in E'$ e variáveis contínuas f_{ij} para todo arco $(i, j) \in A'$ indicando, respectivamente, a pertinência da aresta e na solução, nesse caso $w_e = 1$, e o valor de fluxo que passa pelo arco (i, j) . Uma vez resolvido, extraímos o valor m_S contando quantos dos vértices em S foram utilizados para satisfazer o modelo.

$$(MM_S) \quad \min \sum_{e \in E'} w_e \quad (5.8)$$

$$s.a. \quad \sum_{w \in \delta^+(c_1)} f_{c_1 w} = |C| - 1, \quad (5.9)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(c_i)} f_{c_i w} - \sum_{u \in \delta^-(c_i)} f_{u c_i} = -1, \quad \forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad (5.10)$$

$$\sum_{w \in \delta^+(v)} f_{v w} - \sum_{u \in \delta^-(v)} f_{u v} = 0, \quad \forall v \in V' \setminus \{c_1, \dots, c_p\}, \quad (5.11)$$

$$0 \leq f_{ij}, f_{ji} \leq (|C| - 1)w_e, \quad \forall e = \{i, j\} \in E', \quad (5.12)$$

$$w_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E'. \quad (5.13)$$

Em (MM_S) , a função objetivo contabiliza o número mínimo de arestas utilizadas na solução. A restrição (5.9) garante que, a partir do vértice c_1 , são enviadas $|C| - 1$ unidades de fluxo para que, pelas restrições (5.10), cada um dos demais vértices que representam componentes consuma uma unidade fluxo. As restrições (5.11) asseguram que os vértices em S têm demanda zero. As restrições (5.12) garantem que são utilizados apenas arcos cujas arestas equivalentes (quando desconideramos a orientação) estão sendo contabilizadas na função objetivo. Por último, as restrições (5.13) asseguram a integralidade das variáveis w .

Essa forma de calcular m_S , que nada mais é que resolver um problema de encontrar uma árvore de Steiner (com custos unitários), é proposto em (GENDRON *et al.*, 2014).

6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentamos os resultados computacionais obtidos para os modelos discutidos neste trabalho. Na Seção 6.1 falamos sobre detalhes de implementação e apresentamos as instâncias utilizadas. A Seção 6.2 apresenta a descrição das tabelas que reportam dados detalhados dos experimentos realizados. Com base em dados extraídos a partir das tabelas descritas na Seção 6.2, exibimos uma análise dos experimentos na Seção 6.3. Destacamos que resultados preliminares referentes aos modelos (MB), (ML^k) e (MF^k) foram apresentados como artigo na conferência CLAIO 2018 (FREITAS FILHO; ANDRADE, 2018).

6.1 Detalhes de implementação e instâncias utilizadas

Para implementação dos modelos foi utilizada a linguagem de programação C++ juntamente com a biblioteca CPLEX em sua versão 12.7.1. As máquinas utilizadas para os experimentos possuem sistema operacional Ubuntu 14.04 LTS 64 bits, processador Intel Core i7-3770 com 8 núcleos de 3.40 GHz e memória RAM de 16 GB. Utilizamos um tempo limite de execução de 7200 segundos.

Em nossos experimentos, utilizamos instâncias com 30, 50, 70, 100, 120, 150 e 200 vértices e densidades 5%, 10%, 20%, 30%, 50% e 70% de arestas, totalizando 41 instâncias apresentadas em (LUCENA *et al.*, 2010). Para essas instâncias, variamos o parâmetro k entre os valores 1, 2, 4 e 8. Essas entradas foram geradas aleatoriamente por um procedimento que envolve dois passos. No primeiro passo, um caminho hamiltoniano para o grafo de entrada $G = (V, E)$ em construção é obtido após uma permutação aleatória que determina a ordem de visita dos vértices. Fazendo isso, as primeiras $(|V| - 1)$ arestas são obtidas e garantem a conectividade de G . Na etapa seguinte, arestas adicionais são obtidas por uma distribuição uniforme até que a densidade predefinida para G seja alcançada (LUCENA *et al.*, 2010).

6.2 Tabelas detalhadas dos experimentos

Experimentos para $k = 1$ são apresentados nas Tabelas 1 e 2. As primeiras quatro colunas referem-se, respectivamente, à quantidade de vértices da instância ($|V|$), sua densidade em arestas (d), o valor dado pela heurística (Heur) e o valor da solução ótima (Opt). Com exceção das colunas referentes aos experimentos utilizando o modelo (MB), as demais colunas referem-se à quantidade de nós explorados na árvore de B&B (Nós), o valor da solução linearmente

relaxada (UB_R), o valor do melhor *upper bound* encontrado durante a execução do B&B (UB), o tempo de processamento, em segundos, gasto em cada experimento ($t(s)$) e o *gap* relativo de otimalidade calculado em porcentagem entre o piso do melhor UB e o valor da melhor solução viável encontrada pelo CPLEX (incluindo o valor da heurística) ($GAP(\%)$), levando em conta, respectivamente, os modelos (ML), (ML+), (MF+) (na Tabela 1), (FBM+), (MFA) e (MVE) (na Tabela 2). Note que o piso do valor relaxado é também um *upper bound* na solução ótima do problema. As colunas referentes ao modelo (MB) denotam a quantidade de iterações (Iter) e o tempo de processamento dos experimentos. As Tabelas 3, 4, 5 e 6 apresentam, respectivamente, resultados obtidos utilizando os modelos (MF^k), (ML^k), (MFA) e (MVE). A legenda de suas colunas são semelhantes às da Tabela 1, com a informação adicional do parâmetro k . As últimas linhas das tabelas apresentam as médias de nós expandidos, dos valores das soluções linearmente relaxadas, dos valores de *upper bounds*, dos tempos de processamento dos experimentos, incluindo os que atingiram o tempo limite, e dos *gaps* obtidos. Com exceção da última linha de cada tabela, as linhas em negrito denotam as instâncias não solucionadas, para o modelo em questão, dentro do tempo limite de execução.

Observe que na Tabela 2 algumas células referentes à coluna UB_R para o modelo (MFA) contêm “-”. Isso ocorreu porque o modelo determinou que não existiam nem mesmo soluções fracionárias viáveis para essas instâncias. É importante levar em consideração que tal fato acarretou um aumento expressivo no valor médio apresentado na última célula dessa coluna. Se desconsiderarmos o valor UB_R para essas instâncias, também nos modelos (ML), (ML+), (MF+), (FBM+) e (MVE), obtemos, respectivamente, os valores médios 108,21, 107,93, 108,10, 108,24 e 108,11.

6.3 Análise dos experimentos

Com base nos dados das tabelas descritas na Seção 6.2, fizemos uma síntese dos experimentos e apresentamos na Tabela 7, onde as colunas denotam, respectivamente, o valor de k usado nos experimentos, o modelo em questão e, para cada formulação, a média de tempo (em segundos) demandada nos experimentos, a média dos valores das soluções linearmente relaxadas, a média dos melhores *upper bounds* encontrados pelo algoritmo de B&B, a média de nós explorados nos experimentos, a quantidade de instâncias não resolvidas, para quantas delas foram obtidas uma solução ótima no nó raiz da árvore de B&B e a média dos *gaps*.

Primeiramente, ressaltamos que a heurística utilizada (LUCENA *et al.*, 2010) para

Tabela 1 – Resultados computacionais das formulações vértice-aresta (ML), (ML+) e (MF+) para $k=1$.

V	d	Heur	Opt	(ML)				(ML+)				(MF+)							
				Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	
30	10	15	15	0	16,75	15,00	0,01	0,00	0,00	15,00	15,00	0,01	0,00	194	18,00	15,00	0,10	0,00	
30	20	23	23	5	24,75	23,00	0,10	0,00	0,00	23,00	23,00	0,02	0,00	0	24,13	23,00	0,01	0,00	
30	30	26	26	0	27,13	26,00	0,02	0,00	0,00	26,00	26,00	0,01	0,00	0	26,69	26,00	0,01	0,00	
30	50	27	27	0	28,15	27,00	0,04	0,00	0,00	27,00	27,00	0,01	0,00	0	27,99	27,00	0,01	0,00	
30	70	28	28	0	28,67	28,00	0,01	0,00	0,00	28,00	28,00	0,01	0,00	0	28,55	28,00	0,01	0,00	
50	5	19	19	3	20,83	19,00	0,04	0,00	0,00	19,00	19,00	0,05	0,00	71	22,83	19,00	0,06	0,00	
50	10	37	38	492	40,02	38,00	0,37	0,00	0,00	38,00	38,00	0,28	0,00	106	39,77	38,00	0,13	0,00	
50	20	43	43	85	45,30	43,00	0,35	0,00	0,00	43,00	43,00	0,21	0,00	34	44,79	43,00	0,09	0,00	
50	30	45	45	44	46,81	45,00	0,32	0,00	0,00	45,00	45,00	0,33	0,00	14	46,54	45,00	0,10	0,00	
50	50	47	47	5	48,18	47,00	0,27	0,00	0,00	47,00	47,00	0,03	0,00	0	47,95	47,00	0,01	0,00	
50	70	48	48	0	48,64	48,00	0,04	0,00	0,00	48,00	48,00	0,03	0,00	0	48,52	48,00	0,01	0,00	
70	5	41	43	1600	46,00	43,00	0,46	0,00	0,00	43,00	43,00	0,42	0,00	2729	46,97	43,00	0,84	0,00	
70	10	57	57	128	59,29	57,00	0,28	0,00	0,00	57,00	57,00	0,34	0,00	52	58,95	57,00	0,23	0,00	
70	20	63	63	60	65,05	63,00	0,40	0,00	0,00	63,00	63,00	0,50	0,00	19	64,71	63,00	0,15	0,00	
70	30	65	65	45	66,94	65,00	0,61	0,00	0,00	65,00	65,00	0,46	0,00	15	66,63	65,00	0,12	0,00	
70	50	67	67	7	68,15	67,00	0,48	0,00	0,00	67,00	67,00	0,07	0,00	0	67,92	67,00	0,01	0,00	
70	70	68	68	0	68,69	68,00	0,05	0,00	0,00	68,00	68,00	0,06	0,00	0	68,54	68,00	0,01	0,00	
100	5	75	76	21365	79,91	76,00	9,10	0,00	0,00	76,00	76,00	4,40	0,00	3669	79,57	76,00	3,14	0,00	
100	10	87	87	291	89,57	87,00	0,68	0,00	0,00	87,00	87,00	0,63	0,00	87	89,14	87,00	0,36	0,00	
100	20	92	92	1000	94,85	92,00	2,72	0,00	0,00	92,00	92,00	1,40	0,00	335	94,65	92,00	0,78	0,00	
100	30	94	94	1689	96,68	94,00	8,78	0,00	0,00	94,00	94,00	3,94	0,00	742	96,57	94,00	1,28	0,00	
100	50	96	96	464	98,04	96,00	6,68	0,00	0,00	96,00	96,00	3,45	0,00	158	97,88	96,00	0,75	0,00	
100	70	97	97	90	98,65	97,00	11,79	0,00	0,00	97,00	97,00	16,35	0,00	81	98,54	97,00	1,02	0,00	
120	5	93	95	27582	97,89	95,00	16,92	0,00	0,00	95,00	95,00	13,54	0,00	1033	97,65	95,00	2,42	0,00	
120	10	105	107	5857	110,01	107,00	9,72	0,00	0,00	107,00	107,00	29,86	0,00	609	109,49	107,00	1,15	0,00	
120	20	112	112	2864	114,94	112,00	14,80	0,00	0,00	112,00	112,00	4,52	0,00	924	114,72	112,00	1,91	0,00	
120	30	114	114	2109	116,70	114,00	18,48	0,00	0,00	114,00	114,00	7,73	0,00	776	116,57	114,00	2,09	0,00	
120	50	116	116	1650	118,13	116,00	20,02	0,00	0,00	116,00	116,00	9,10	0,00	352	117,98	116,00	1,74	0,00	
120	70	117	117	123	118,63	117,00	22,21	0,00	0,00	117,00	117,00	37,35	0,00	123	118,56	117,00	1,48	0,00	
150	5	123	124	1222398	128,86	124,00	1455,10	0,00	0,00	124,00	124,00	359,18	0,00	26669	128,52	124,00	74,91	0,00	
150	10	135	136	190883	139,67	136,00	629,55	0,00	0,00	136,00	136,00	140,22	0,00	29170	139,23	136,00	93,26	0,00	
150	20	141	141	156583	145,16	141,00	1641,10	0,00	0,00	141,00	141,00	207,39	0,00	32957	144,81	141,00	135,25	0,00	
150	30	144	144	4297	146,68	144,00	140,34	0,00	0,00	144,00	144,00	42,40	0,00	1187	146,52	144,00	7,68	0,00	
150	50	146	146	1869	148,12	146,00	73,10	0,00	0,00	146,00	146,00	37,54	0,00	407	148,01	146,00	7,15	0,00	
150	70	147	147	185	148,64	147,00	59,91	0,00	0,00	147,00	147,00	190,73	0,00	163	148,55	147,00	3,74	0,00	
200	5	171	173	2674117	177,92	177,15	7200,00	2,99	0,00	177,15	177,15	7200,00	3,15	1532320	177,61	177,18	7200,00	3,50	
200	10	184	184	661370	189,74	189,40	7200,00	2,71	0,00	189,40	189,40	7200,00	2,71	1283388	189,44	189,02	7200,00	2,71	
200	20	191	191	162776	195,15	194,99	7200,00	1,57	0,00	194,98	191,00	3495,50	0,00	134418	194,18	191,00	1028,20	0,00	
200	30	193	193	124933	196,79	196,70	7200,00	1,55	0,00	196,63	195,82	7200,00	1,03	159536	196,63	193,00	1264,20	0,00	
200	50	196	196	3038	198,09	196,00	463,70	0,00	0,00	197,98	196,00	184,97	0,00	662	197,98	196,00	30,14	0,00	
200	70	197	197	223	198,65	197,00	333,98	0,00	0,00	198,55	197,00	422,81	0,00	199	198,55	197,00	10,30	0,00	
Valores médios				128542,20	97,48	95,47	822,98	0,22	0,22	132105,15	97,22	95,35	654,04	0,17	78370,71	97,36	95,27	416,45	0,15

Fonte: produzida pelo autor.

Tabela 2 – Resultados computacionais das formulações alternativas (FBM+), (MB), (MFA) e (MVE) para $k = 1$.

IV	d	Heur	Opt	(FBM+)				(MB)				(MFA)				(MVE)			
				Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Iter	t(s)	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Nós	UB _R	UB	t(s)
30	10	15	15	211	18,00	15,00	0,06	0,00	605	61,22	18,00	15,00	0,25	0,00	553	18,00	15,00	0,07	0,00
30	20	23	23	0	24,13	23,00	0,02	0,00	2	0,05	24,13	23,00	0,02	0,00	0	24,06	23,00	0,01	0,00
30	30	26	26	0	26,69	26,00	0,01	0,00	1	0,01	-	26,00	0,01	0,00	0	26,52	26,00	0,01	0,00
30	50	27	27	0	27,99	27,00	0,01	0,00	1	0,01	-	27,00	0,01	0,00	0	27,66	27,00	0,01	0,00
30	70	28	28	0	28,55	28,00	0,01	0,00	1	0,00	-	28,00	0,01	0,00	0	28,12	28,00	0,01	0,00
50	5	19	19	4841	26,21	19,00	0,43	0,00	-	7200,00	29,00	19,00	7,03	0,00	7	27,75	19,00	0,07	0,00
50	10	37	38	0	39,77	38,00	0,08	0,00	53	4,09	39,77	38,00	0,11	0,00	38	39,76	38,00	0,10	0,00
50	20	43	43	0	44,79	43,00	0,10	0,00	1	0,02	44,79	43,00	0,10	0,00	27	44,77	43,00	0,17	0,00
50	30	45	45	0	46,54	45,00	0,12	0,00	1	0,04	46,54	45,00	0,09	0,00	15	46,40	45,00	0,23	0,00
50	50	47	47	0	47,95	47,00	0,02	0,00	1	0,01	-	47,00	0,01	0,00	0	47,5955	47,00	0,02	0,00
50	70	48	48	0	48,52	48,00	0,03	0,00	1	0,00	-	48,00	0,00	0,00	0	48,227	48,00	0,03	0,00
70	5	41	43	3344	48,20	43,00	2,05	0,00	-	7200,00	48,25	43,00	13,64	0,00	9568	47,80	43,00	2,51	0,00
70	10	57	57	0	58,95	57,00	0,12	0,00	1	0,04	58,95	57,00	0,12	0,00	43	58,95	57,00	0,19	0,00
70	20	63	63	0	64,71	63,00	0,11	0,00	1	0,07	64,71	63,00	0,12	0,00	16	64,68	63,00	0,33	0,00
70	30	65	65	0	66,63	65,00	0,13	0,00	1	0,08	66,63	65,00	0,12	0,00	11	66,48	65,00	0,45	0,00
70	50	67	67	0	67,92	67,00	0,03	0,00	1	0,01	-	67,00	0,02	0,00	0	67,6381	67,00	0,05	0,00
70	70	68	68	0	68,54	68,00	0,07	0,00	1	0,00	-	68,00	0,01	0,00	0	68,1379	68,00	0,07	0,00
100	5	75	76	2884	79,57	76,00	5,51	0,00	-	7200,00	79,57	76,00	11,86	0,00	2331	79,57	76,00	1,03	0,00
100	10	87	87	0	89,14	87,00	0,13	0,00	1	0,12	89,14	87,00	0,14	0,00	78	89,14	87,00	0,42	0,00
100	20	92	92	0	94,65	92,00	0,53	0,00	1	0,19	94,65	92,00	0,35	0,00	346	94,53	92,00	2,75	0,00
100	30	94	94	1015	96,57	94,00	5,61	0,00	1	0,37	96,57	94,00	1,38	0,00	543	96,31	94,00	6,34	0,00
100	50	96	96	0	97,88	96,00	1,25	0,00	1	0,15	97,88	96,00	0,45	0,00	72	97,57	96,00	4,55	0,00
100	70	97	97	0	98,54	97,00	1,50	0,00	1	0,31	98,54	97,00	0,56	0,00	5	98,11	97,00	1,79	0,00
120	5	93	95	657	97,65	95,00	2,50	0,00	-	7200,00	97,65	95,00	0,65	0,00	659	97,65	95,00	0,59	0,00
120	10	105	107	0	109,49	107,00	0,54	0,00	9	1,83	109,49	107,00	0,66	0,00	1553	109,49	107,00	2,29	0,00
120	20	112	112	1029	114,72	112,00	7,47	0,00	1	0,71	114,72	112,00	1,50	0,00	852	114,67	112,00	7,87	0,00
120	30	114	114	1121	116,57	114,00	5,91	0,00	1	0,84	116,57	114,00	2,10	0,00	620	116,31	114,00	15,62	0,00
120	50	116	116	0	117,98	116,00	2,83	0,00	1	0,44	117,98	116,00	1,83	0,00	151	117,57	116,00	17,72	0,00
120	70	117	117	103	118,56	117,00	6,58	0,00	1	0,44	118,56	117,00	1,12	0,00	9	118,11	117,00	4,53	0,00
150	5	123	124	19269	128,52	124,00	51,21	0,00	108	2209,10	128,52	124,00	38,97	0,00	35653	128,52	124,00	26,62	0,00
150	10	135	136	40590	139,23	136,00	56,19	0,00	4	3,68	139,23	136,00	18,27	0,00	11300	139,23	136,00	22,24	0,00
150	20	141	141	69022	144,81	141,00	121,58	0,00	3	46,46	144,81	141,00	59,32	0,00	31028	144,66	141,00	506,05	0,00
150	30	144	144	1525	146,52	144,00	25,88	0,00	1	3,37	1558	146,52	3,65	0,00	959	146,25	144,00	79,09	0,00
150	50	146	146	567	148,01	146,00	31,40	0,00	1	2,14	148,01	146,00	3,36	0,00	180	147,59	146,00	59,83	0,00
150	70	147	147	176	148,55	147,00	21,64	0,00	1	0,71	148,55	147,00	2,48	0,00	0	148,071	147,00	7,70	0,00
200	5	171	173	95564	177,61	173,00	392,60	0,00	104	3261,50	177,61	173,00	217,37	0,00	1306258	177,61	173,00	2373,60	0,00
200	10	184	184	2476025	189,44	185,76	7200,00	0,54	1	2806,20	189,44	184,00	4178,90	0,00	1075967	189,44	188,97	7200,00	2,17
200	20	191	191	322282	194,98	191,00	1190,60	0,00	1	324,23	339519	194,98	332,98	0,00	114976	194,80	191,00	6365,80	0,00
200	30	193	193	352321	196,63	193,00	2441,30	0,00	2	322,51	371629	196,63	467,43	0,00	59007	196,31	196,22	7200,00	1,55
200	50	196	196	1020	197,98	196,00	173,02	0,00	1	7,31	899	197,98	8,71	0,00	242	197,54	196,00	216,61	0,00
200	70	197	197	211	198,55	197,00	47,08	0,00	1	1,25	289	198,55	9,14	0,00	9	198,06	197,00	52,12	0,00
Valores médios:				82775,05	97,47	95,09	287,71	0,01	-	923,40	108,32	95,05	131,33	0,00	64709,17	97,31	95,25	589,74	0,09

Fonte: produzida pelo autor.

Tabela 3 – Resultados computacionais para a formulação (MF^k).

VI	d	k = 2						k = 4						k = 8								
		Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)
30	10	17	17	177	20,00	17,00	0,07	0,00	18	20	0	21,00	20,00	0,04	0,00	18	21	0	21,67	21,00	0,02	0,00
30	20	23	23	46	24,81	23,00	0,15	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,04	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,03	0,00
30	30	26	26	0	27,07	26,00	0,02	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,02	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,02	0,00
30	50	27	27	0	28,05	27,00	0,03	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,02	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,03	0,00
30	70	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,02	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,02	0,00
50	5	21	21	2	25,17	21,00	0,09	0,00	23	25	0	27,17	25,00	0,04	0,00	26	30	12	31,00	30,00	0,07	0,00
50	10	38	38	142	40,61	38,00	0,28	0,00	38	39	13	40,84	39,00	0,17	0,00	38	40	0	40,84	40,00	0,12	0,00
50	20	43	44	4	45,24	44,00	0,18	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,15	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,21	0,00
50	30	45	45	33	46,72	45,00	0,34	0,00	45	45	35	46,72	45,00	0,39	0,00	45	45	32	46,72	45,00	0,45	0,00
50	50	47	47	0	48,02	47,00	0,07	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,07	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,06	0,00
50	70	48	48	0	48,54	48,00	0,03	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,04	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,06	0,00
70	5	42	45	50688	48,92	45,00	5,24	0,00	43	47	11705	49,77	47,00	1,74	0,00	45	49	130	51,39	49,00	0,35	0,00
70	10	57	57	1492	60,11	57,00	1,82	0,00	57	58	402	60,17	58,00	0,55	0,00	57	59	32	60,18	59,00	0,27	0,00
70	20	63	63	65	65,08	63,00	0,62	0,00	63	63	63	65,08	63,00	0,64	0,00	63	63	54	65,08	63,00	0,60	0,00
70	30	65	65	23	66,73	65,00	0,80	0,00	65	65	23	66,73	65,00	0,77	0,00	65	65	22	66,73	65,00	0,78	0,00
70	50	67	67	0	67,95	67,00	0,07	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,07	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,09	0,00
70	70	68	68	0	68,57	68,00	0,12	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,23	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,10	0,00
100	5	75	77	132069	81,25	77,00	71,26	0,00	75	78	10908	81,65	78,00	9,28	0,00	75	79	2955	82,11	79,00	1,71	0,00
100	10	87	87	727	89,95	87,00	2,14	0,00	87	88	194	89,95	88,00	1,01	0,00	87	88	33	89,95	88,00	0,74	0,00
100	20	92	92	933	94,76	92,00	5,07	0,00	92	92	909	94,76	92,00	4,28	0,00	92	92	968	94,76	92,00	5,27	0,00
100	30	94	94	1145	96,63	94,00	8,93	0,00	94	95	856	96,63	95,00	7,96	0,00	94	95	94	96,63	95,00	5,27	0,00
100	50	96	96	280	97,90	96,00	6,24	0,00	96	96	261	97,90	96,00	9,63	0,00	96	96	265	97,90	96,00	5,98	0,00
100	70	97	97	115	98,55	97,00	24,96	0,00	97	97	95	98,55	97,00	20,94	0,00	97	97	105	98,55	97,00	27,88	0,00
120	5	93	96	1039483	100,37	96,00	1140,70	0,00	94	96	99910	100,58	96,00	209,95	0,00	94	97	11637	100,89	97,00	36,97	0,00
120	10	105	107	16072	110,21	107,00	70,88	0,00	105	107	1070	110,21	107,00	5,82	0,00	105	107	5201	110,21	107,00	20,17	0,00
120	20	112	112	1840	114,86	112,00	22,93	0,00	112	112	1822	114,86	112,00	22,51	0,00	112	112	2150	114,86	112,00	26,10	0,00
120	30	114	114	1297	116,60	114,00	24,84	0,00	114	114	1285	116,60	114,00	27,77	0,00	114	114	1431	116,60	114,00	28,48	0,00
120	50	116	116	604	118,01	116,00	27,97	0,00	116	116	601	118,01	116,00	25,30	0,00	116	116	574	118,01	116,00	26,17	0,00
120	70	117	117	141	118,56	117,00	79,72	0,00	117	117	133	118,56	117,00	51,49	0,00	117	117	143	118,56	117,00	57,64	0,00
150	5	123	125	1490072	130,27	129,56	7200,00	4,03	123	125	801916	130,35	125,00	6422,38	0,00	123	126	221010	130,40	126,00	1798,10	0,00
150	10	135	136	108976	139,73	136,00	1530,20	0,00	135	136	88605	139,73	136,00	1157,80	0,00	135	136	44736	139,73	136,00	669,55	0,00
150	20	141	142	63983	144,95	142,00	2506,50	0,00	141	142	20636	144,95	142,00	844,76	0,00	141	142	68452	144,95	142,00	3001,00	0,00
150	30	144	144	1707	146,58	144,00	99,60	0,00	144	144	1764	146,58	144,00	95,26	0,00	144	144	1782	146,58	144,00	97,73	0,00
150	50	146	146	804	148,02	146,00	71,61	0,00	146	146	730	148,02	146,00	76,74	0,00	146	146	854	148,02	146,00	74,07	0,00
150	70	147	147	173	148,56	147,00	207,88	0,00	147	147	183	148,56	147,00	193,89	0,00	147	147	193	148,56	147,00	140,27	0,00
200	5	171	-	1852533	179,53	179,00	7200,00	4,67	171	-	1886579	179,59	178,99	7200,00	4,09	171	174	1282598	178,65	178,93	7200,00	2,89
200	10	184	-	137838	189,84	189,51	7200,00	2,71	184	-	1328894	189,84	189,49	7200,00	2,71	184	-	150645	189,84	189,41	7200,00	2,71
200	20	191	191	52777	195,05	194,88	7200,00	1,57	191	191	46606	195,05	194,92	7200,00	1,57	191	191	59135	195,05	194,90	7200,00	1,57
200	30	193	194	34801	196,65	196,60	7200,00	1,55	193	194	35593	196,65	196,59	7200,00	1,55	194	194	37232	196,65	196,58	7200,00	1,55
200	50	196	196	1185	197,99	196,00	344,24	0,00	196	196	1253	197,99	196,50	499,70	0,00	196	196	1179	197,99	196,00	352,64	0,00
200	70	197	197	268	198,56	197,00	736,62	0,00	197	197	233	198,56	197,00	503,42	0,00	197	197	228	198,56	197,00	587,14	0,00
Médias:				121768,17	97,89	95,89	1048,56	0,35			76762,85	98,01	96,15	951,09	0,24			46192,24	98,18	96,46	872,28	0,21

Fonte: produzida pelo autor.

Tabela 4 – Resultados computacionais para a formulação (ML^k).

V	d	k = 2										k = 4										k = 8									
		Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)									
		30	10	17	17	309	19,70	17,00	0,10	0,00	18	20	0	21,00	20,00	0,14	0,00	18	21	0	21,67	21,00	0,01	0,00							
30	20	23	23	25	24,70	23,00	0,18	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,06	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,10	0,00									
30	30	26	26	0	27,06	26,00	0,04	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,02	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,03	0,00									
30	50	27	27	0	28,05	27,00	0,03	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,04	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,04	0,00									
30	70	28	28	0	28,60	28,00	0,02	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,02	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00									
50	5	21	21	128	34,00	21,00	0,09	0,00	23	25	107	27,50	25,00	0,15	0,00	26	30	37	31,50	30,00	0,17	0,00									
50	10	38	38	156	40,54	38,00	0,32	0,00	38	39	102	40,84	39,00	0,26	0,00	38	40	23	40,84	40,00	0,17	0,00									
50	20	43	44	58	45,19	44,00	0,33	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,18	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,17	0,00									
50	30	45	45	33	46,72	45,00	0,59	0,00	45	45	45	46,72	45,00	0,62	0,00	45	45	36	46,72	45,00	0,53	0,00									
50	50	47	47	0	48,02	47,00	0,10	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,10	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,10	0,00									
50	70	48	48	0	48,54	48,00	0,04	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,04	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,04	0,00									
70	5	42	45	8824	48,25	45,00	2,50	0,00	43	47	3996	49,54	47,00	1,30	0,00	45	49	3117	51,39	49,00	1,12	0,00									
70	10	57	57	530	59,75	57,00	0,68	0,00	57	58	565	60,10	58,00	0,68	0,00	57	59	135	60,18	59,00	0,45	0,00									
70	20	63	63	55	63,03	63,00	0,60	0,00	63	63	58	63,08	63,00	0,54	0,00	63	63	56	63,08	63,00	0,49	0,00									
70	30	65	65	19	66,73	65,00	0,60	0,00	65	65	23	66,73	65,00	0,73	0,00	65	65	23	66,73	65,00	0,59	0,00									
70	50	67	67	0	67,95	67,00	0,12	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,12	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,12	0,00									
70	70	68	68	0	68,57	68,00	0,13	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,13	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,13	0,00									
100	5	75	77	6351	80,54	77,00	5,07	0,00	75	78	5024	81,29	78,00	4,27	0,00	75	79	2248	82,05	79,00	2,58	0,00									
100	10	87	87	375	89,71	87,00	1,37	0,00	87	88	347	89,94	88,00	1,08	0,00	87	88	230	89,95	88,00	0,96	0,00									
100	20	92	92	804	94,76	92,00	2,59	0,00	92	92	922	94,76	92,00	2,66	0,00	92	92	847	94,76	92,00	2,20	0,00									
100	30	94	94	1145	96,63	94,00	6,61	0,00	94	95	580	96,63	95,00	3,71	0,00	94	95	227	96,63	95,00	2,78	0,00									
100	50	96	96	212	97,90	96,00	6,61	0,00	96	96	194	97,90	96,00	5,05	0,00	96	96	202	97,90	96,00	5,43	0,00									
100	70	97	97	99	98,55	97,00	9,87	0,00	97	97	99	98,55	97,00	8,65	0,00	97	97	95	98,55	97,00	9,14	0,00									
120	5	93	96	22384	99,08	96,00	22,44	0,00	94	96	16471	99,84	96,00	15,52	0,00	94	97	11237	100,65	97,00	10,62	0,00									
120	10	105	107	2298	109,98	107,00	5,13	0,00	105	107	5437	110,17	107,00	9,22	0,00	105	107	6995	110,21	107,00	8,02	0,00									
120	20	112	112	1888	114,86	112,00	11,42	0,00	112	112	1992	114,86	112,00	9,24	0,00	112	112	1943	114,86	112,00	7,85	0,00									
120	30	114	114	1305	116,60	114,00	11,20	0,00	114	114	1209	116,60	114,00	10,98	0,00	114	114	1208	116,60	114,00	11,04	0,00									
120	50	116	116	473	118,01	116,00	15,44	0,00	116	116	472	118,01	116,00	15,30	0,00	116	116	499	118,01	116,00	13,40	0,00									
120	70	117	117	123	118,56	117,00	24,31	0,00	117	117	110	118,56	117,00	18,27	0,00	117	117	119	118,56	117,00	23,28	0,00									
150	5	123	125	394268	129,29	125,00	496,68	0,00	123	125	113659	129,83	125,00	142,87	0,00	123	126	35847	130,27	126,00	52,82	0,00									
150	10	135	136	63538	139,63	136,00	159,72	0,00	135	136	16605	139,72	136,00	64,46	0,00	135	136	75176	139,73	136,00	131,28	0,00									
150	20	141	142	47159	144,95	142,00	334,97	0,00	141	142	46412	144,95	142,00	280,40	0,00	141	142	43487	144,95	142,00	241,72	0,00									
150	30	144	144	1692	146,58	144,00	53,63	0,00	144	144	1692	146,58	144,00	51,49	0,00	144	144	1691	146,58	144,00	51,23	0,00									
150	50	146	146	681	148,02	146,00	40,60	0,00	146	146	671	148,02	146,00	42,34	0,00	146	146	665	148,02	146,00	44,94	0,00									
150	70	147	147	167	148,56	147,00	51,67	0,00	147	147	163	148,56	147,00	50,97	0,00	147	147	159	148,56	147,00	45,14	0,00									
200	5	171	-	1746729	178,38	178,13	7200,00	4,09	171	-	1759145	178,81	178,18	7200,00	2,89	171	174	1678397	179,34	178,70	7200,00	2,29									
200	10	184	-	494224	189,74	189,36	7200,00	2,71	184	-	518964	189,83	189,48	7200,00	2,71	184	-	740587	189,84	189,48	7200,00	2,71									
200	20	191	191	182280	195,05	194,88	7200,00	1,57	191	191	222041	195,05	194,23	7200,00	1,57	191	191	230032	195,05	191,00	6641,77	0,00									
200	30	193	194	131054	196,65	196,58	7200,00	1,55	193	194	125536	196,65	194,00	6631,16	0,00	194	194	38488	196,65	194,00	1717,40	0,00									
200	50	196	196	1093	197,99	196,00	213,92	0,00	196	196	1004	197,99	196,00	187,53	0,00	196	196	1056	197,99	196,00	231,50	0,00									
200	70	197	197	208	198,56	197,00	245,59	0,00	197	197	204	198,56	197,00	211,90	0,00	197	197	204	198,56	197,00	206,77	0,00									
Médias:				75870,41	97,71	95,75	744,51	0,24			69362,17	97,95	96,05	716,39	0,17			70123,56	98,18	96,30	582,10	0,12									

Fonte: produzida pelo autor.

Tabela 5 – Resultados computacionais para a formulação (MFA).

IVl	d	k = 2						k = 4						k = 8						
		Heur	Opt	Nós	UB _R	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	t(s)	GAP(%)	
30	10	17	17	8919	21,67	17,00	0,79	0,00	18	20	122	21,67	20,00	0,07	0,00	18	21	21,67	21,00	0,03
30	20	23	23	24	24,93	23,00	0,05	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,04	0,00	23	24	24,93	24,00	0,02
30	30	26	26	0	27,08	26,00	0,02	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,01	0,00	26	26	27,08	26,00	0,02
30	50	27	27	0	28,05	27,00	0,02	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,02	0,00	27	27	28,05	27,00	0,02
30	70	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00	28	28	28,60	28,00	0,01
50	5	21	21	11718711	35,00	21,00	78,20	0,00	23	25	77295289	35,00	27,00	7200,00	8,00	26	30	35,00	30,00	11,22
50	10	38	38	627	40,84	38,00	0,39	0,00	38	39	0	40,84	39,00	0,09	0,00	38	40	40,84	40,00	0,05
50	20	43	44	0	45,24	44,00	0,09	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,08	0,00	43	44	45,24	44,00	0,07
50	30	45	45	0	46,72	45,00	0,14	0,00	45	45	0	46,72	45,00	0,13	0,00	45	45	46,72	45,00	0,11
50	50	47	47	0	48,02	47,00	0,04	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,04	0,00	47	47	48,02	47,00	0,03
50	70	48	48	0	48,54	48,00	0,01	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,01	0,00	48	48	48,54	48,00	0,01
70	5	42	45	130057	53,09	45,00	207,78	0,00	43	47	40816814	53,09	48,92	7200,00	2,12	45	49	53,09	49,00	38,93
70	10	57	57	2025	60,18	57,00	2,08	0,00	57	58	192	60,18	58,00	0,36	0,00	57	59	60,18	59,00	0,11
70	20	63	63	0	65,08	63,00	0,15	0,00	63	63	0	65,08	63,00	0,13	0,00	63	63	65,08	63,00	0,13
70	30	65	65	0	66,73	65,00	0,13	0,00	65	65	0	66,73	65,00	0,12	0,00	65	65	66,73	65,00	0,12
70	50	67	67	0	67,95	67,00	0,02	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,02	0,00	67	67	67,95	67,00	0,02
70	70	68	68	0	68,57	68,00	0,01	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,01	0,00	68	68	68,57	68,00	0,01
100	5	75	77	3075948	82,16	77,00	73,23	0,00	75	78	1729798	82,16	78,00	676,51	0,00	75	79	82,16	79,00	2,71
100	10	87	87	0	89,95	87,00	0,34	0,00	87	88	0	89,95	88,00	0,14	0,00	87	88	89,95	88,00	0,11
100	20	92	92	793	94,76	92,00	0,74	0,00	92	92	726	94,76	92,00	0,71	0,00	92	92	94,76	92,00	0,56
100	30	94	94	1335	96,63	94,00	1,79	0,00	94	95	0	96,63	95,00	0,29	0,00	94	95	96,63	95,00	0,24
100	50	96	96	0	97,90	96,00	0,60	0,00	96	96	0	97,90	96,00	0,57	0,00	96	96	97,90	96,00	0,55
100	70	97	97	131	98,55	97,00	0,90	0,00	97	97	135	98,55	97,00	0,97	0,00	97	97	98,55	97,00	0,76
120	5	93	96	12028245	101,00	96,00	6512,00	0,00	94	96	3903728	101,00	96,00	1504,20	0,00	94	97	101,00	97,00	37,49
120	10	105	107	0	110,21	107,00	1,54	0,00	105	107	1639	110,21	107,00	1,95	0,00	105	107	110,21	107,00	1,07
120	20	112	112	1796	114,86	112,00	2,41	0,00	112	112	1877	114,86	112,00	2,49	0,00	112	112	114,86	112,00	1,67
120	30	114	114	1440	116,60	114,00	2,24	0,00	114	114	1402	116,60	114,00	1,86	0,00	114	114	116,60	114,00	1,69
120	50	116	116	461	118,01	116,00	1,92	0,00	116	116	463	118,01	116,00	2,05	0,00	116	116	118,01	116,00	1,64
120	70	117	117	0	118,56	117,00	1,58	0,00	117	117	0	118,56	117,00	1,98	0,00	117	117	118,56	117,00	1,19
150	5	123	125	4708368	130,40	125,00	4366,00	0,00	123	125	1149304	130,40	125,00	411,65	0,00	123	126	130,40	126,00	45,63
150	10	135	136	253295	139,73	136,00	94,01	0,00	135	136	23270	139,73	136,00	29,53	0,00	135	136	139,73	136,00	17,93
150	20	141	142	119809	144,95	142,00	75,64	0,00	141	142	39139	144,95	142,00	28,75	0,00	141	142	144,95	142,00	36,02
150	30	144	144	1948	146,58	144,00	4,34	0,00	144	144	1891	146,58	144,00	3,00	0,00	144	144	146,58	144,00	3,32
150	50	146	146	555	148,02	146,00	3,55	0,00	146	146	650	148,02	146,00	3,10	0,00	146	146	148,02	146,00	3,14
150	70	147	147	0	148,56	147,00	3,62	0,00	147	147	203	148,56	147,00	4,22	0,00	147	147	148,56	147,00	2,64
200	5	171	-	4855187	179,65	175,64	7200,00	2,33	171	-	4747110	179,65	175,59	7200,00	2,33	171	174	179,65	174,00	4088,00
200	10	184	-	5136258	189,84	186,26	7200,00	1,08	184	-	5245214	189,84	186,26	7200,00	1,08	184	184	189,84	186,21	7200,00
200	20	191	191	526652	195,05	191,00	478,45	0,00	191	191	526633	195,05	191,00	490,28	0,00	191	191	195,05	191,00	5,31,61
200	30	193	194	383904	196,65	194,00	406,97	0,00	193	194	216324	196,65	194,00	214,48	0,00	193	194	196,65	194,00	5,19,48
200	50	196	196	999	197,99	196,00	6,79	0,00	196	196	966	197,99	196,00	7,00	0,00	196	196	197,99	196,00	6,49
200	70	197	197	257	198,56	197,00	8,06	0,00	197	197	227	198,56	197,00	9,06	0,00	197	197	198,56	197,00	6,59
Médias:				1047734,63	98,33	95,46	685,50	0,08			3309832,10	98,33	95,93	785,26	0,33			200545,29	98,33	306,37

Fonte: produzida pelo autor.

Tabela 6 – Resultados computacionais para a formulação (MVE).

VI	d	$k = 2$										$k = 4$										$k = 8$									
		Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)	Heur	Opt	Nós	UB _R	UB	t(s)	GAP(%)									
30	10	17	17	37	19,33	17,00	0,05	0,00	18	20	0	20,50	20,00	0,02	0,00	18	21	0	21,67	21,00	0,01	0,00									
30	20	23	23	3	24,33	23,00	0,09	0,00	23	24	0	24,84	24,00	0,04	0,00	23	24	0	24,93	24,00	0,01	0,00									
30	30	26	26	0	26,82	26,00	0,01	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,01	0,00	26	26	0	27,08	26,00	0,01	0,00									
30	50	27	27	0	28,05	27,00	0,01	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,01	0,00	27	27	0	28,05	27,00	0,01	0,00									
30	70	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00	28	28	0	28,60	28,00	0,01	0,00									
50	5	21	21	0	23,17	21,00	0,03	0,00	23	25	0	25,30	25,00	0,02	0,00	26	30	0	30,00	30,00	0,01	0,00									
50	10	38	38	34	39,94	38,00	0,16	0,00	38	39	31	40,46	39,00	0,12	0,00	38	40	25	40,84	40,00	0,08	0,00									
50	20	43	44	14	45,00	44,00	0,19	0,00	43	44	0	45,23	44,00	0,10	0,00	43	44	0	45,24	44,00	0,02	0,00									
50	30	45	45	21	46,54	45,00	0,19	0,00	45	45	27	46,72	45,00	0,08	0,00	45	45	39	46,72	45,00	0,09	0,00									
50	50	47	47	0	48,02	47,00	0,03	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,03	0,00	47	47	0	48,02	47,00	0,03	0,00									
50	70	48	48	0	48,54	48,00	0,02	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,03	0,00	48	48	0	48,54	48,00	0,03	0,00									
70	5	42	45	1402	47,35	45,00	0,57	0,00	43	47	304	48,46	47,00	0,24	0,00	45	49	23	50,59	49,00	0,16	0,00									
70	10	57	57	209	59,49	57,00	0,31	0,00	57	58	29	59,83	58,00	0,19	0,00	57	59	15	60,18	59,00	0,23	0,00									
70	20	63	63	33	64,82	63,00	0,35	0,00	63	63	63	65,06	63,00	0,27	0,00	63	63	87	65,08	63,00	0,23	0,00									
70	30	65	65	19	66,59	65,00	0,46	0,00	65	65	27	66,73	65,00	0,22	0,00	65	65	31	66,73	65,00	0,22	0,00									
70	50	67	67	0	67,95	67,00	0,05	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,05	0,00	67	67	0	67,95	67,00	0,05	0,00									
70	70	68	68	0	68,57	68,00	0,07	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,06	0,00	68	68	0	68,57	68,00	0,06	0,00									
100	5	75	77	858	79,63	77,00	0,70	0,00	75	78	1623	80,26	78,00	1,03	0,00	75	79	478	81,33	79,00	0,46	0,00									
100	10	87	87	233	89,64	87,00	0,76	0,00	87	88	256	89,84	88,00	0,66	0,00	87	88	44	89,95	88,00	0,45	0,00									
100	20	92	92	584	94,61	92,00	3,38	0,00	92	92	848	94,75	92,00	1,82	0,00	92	92	862	94,76	92,00	0,70	0,00									
100	30	94	94	895	96,48	94,00	5,60	0,00	94	95	995	96,63	95,00	1,25	0,00	94	95	871	96,63	95,00	0,99	0,00									
100	50	96	96	235	97,88	96,00	2,30	0,00	96	96	309	97,90	96,00	0,75	0,00	96	96	277	97,90	96,00	0,72	0,00									
100	70	97	97	109	98,55	97,00	0,60	0,00	97	97	113	98,55	97,00	0,60	0,00	97	97	129	98,55	97,00	0,63	0,00									
120	5	93	96	27640	99,24	96,00	34,35	0,00	94	96	9799	99,66	96,00	6,97	0,00	94	97	2423	100,35	97,00	2,14	0,00									
120	10	105	107	7196	109,83	107,00	14,52	0,00	105	107	695	110,04	107,00	4,04	0,00	105	107	1088	110,21	107,00	1,76	0,00									
120	20	112	112	1289	114,77	112,00	10,57	0,00	112	112	1728	114,86	112,00	6,17	0,00	112	112	2033	114,86	112,00	3,36	0,00									
120	30	114	114	943	116,46	114,00	13,08	0,00	114	114	1279	116,60	114,00	4,82	0,00	114	114	1264	116,60	114,00	2,37	0,00									
120	50	116	116	477	118,01	116,00	6,67	0,00	116	116	428	118,01	116,00	1,78	0,00	116	116	424	118,01	116,00	2,01	0,00									
120	70	117	117	145	118,56	117,00	1,22	0,00	117	117	143	118,56	117,00	1,09	0,00	117	117	149	118,56	117,00	1,16	0,00									
150	5	123	125	146462	129,51	125,00	432,20	0,00	123	125	280245	129,77	125,00	447,05	0,00	123	126	54283	130,14	126,00	93,12	0,00									
150	10	135	136	77836	139,61	136,00	306,66	0,00	135	136	55495	139,68	136,00	213,32	0,00	135	136	55909	139,73	136,00	120,97	0,00									
150	20	141	142	23895	144,76	142,00	404,54	0,00	141	142	38872	144,93	142,00	303,24	0,00	141	142	2331	144,95	142,00	15,03	0,00									
150	30	144	144	1348	146,40	144,00	52,65	0,00	144	144	1730	146,58	144,00	16,74	0,00	144	144	1658	146,58	144,00	20,86	0,00									
150	50	146	146	753	148,02	146,00	274,85	0,00	146	146	526	148,02	146,00	6,15	0,00	146	146	526	148,02	146,00	5,71	0,00									
150	70	147	147	193	148,56	147,00	2,73	0,00	147	147	215	148,56	147,00	2,86	0,00	147	147	209	148,56	147,00	2,70	0,00									
200	5	171	-	1819664	178,62	178,26	7200,00	4,09	171	-	1856456	178,84	178,27	7200,00	3,58	171	174	171994	179,24	178,64	7200,00	2,29									
200	10	184	-	549023	189,71	189,25	7200,00	2,71	184	-	776198	189,79	189,41	7200,00	2,71	184	-	1620891	189,84	189,41	7200,00	2,71									
200	20	191	191	158383	194,87	194,06	7200,00	1,57	191	191	226984	195,03	191,00	4852,20	0,00	191	191	229008	195,05	191,00	830,08	0,00									
200	30	193	194	108832	196,45	196,36	7200,00	1,55	193	194	45986	196,65	194,00	767,95	0,00	193	194	74520	196,65	194,00	599,01	0,00									
200	50	196	196	936	197,99	196,00	74,29	0,00	196	196	1563	197,99	196,00	1882,20	0,00	196	196	1529	197,99	196,00	1654,50	0,00									
200	70	197	197	253	198,56	197,00	8,77	0,00	197	197	253	198,56	197,00	8,14	0,00	197	197	263	198,56	197,00	8,04	0,00									
Médias:				71462,29	97,56	95,73	742,76	0,24			80566,00	97,81	89,87	559,33	0,15			91789,83	98,09	96,29	433,37	0,12									

Fonte: produzida pelo autor.

obtenção de soluções viáveis iniciais em nossos experimentos quase sempre encontrou soluções ótimas para o conjunto de instâncias utilizadas, conforme pode ser observado nas tabelas detalhadas para cada modelo. Desse modo, os experimentos consistiram, na grande maioria das vezes, em provar a otimalidade de cada solução dada pela heurística. Ainda assim, pudemos constatar a dificuldade encontrada, em diversos casos, em provar que tais soluções eram ótimas.

Em particular, para $k = 1$, com exceção das formulações (MFA) e (MVE), foram utilizados modelos específicos para o MLSTP. Comparamos as variações (MF+), (ML+), (FBM+), (MB), (MFA) e (MVE), tomando como base os resultados obtidos pelo modelo (ML) (LUCENA *et al.*, 2010). Ainda para $k = 1$, obtivemos os seguintes resultados. Com base na análise do tempo médio dos experimentos, observamos que o modelo (MFA), proposto neste trabalho, apresentou melhor desempenho, reduzindo o tempo médio obtido por (ML) em aproximadamente 84.04%. Além disso, houve uma redução de aproximadamente 54.35% quando comparamos (MFA) com a variação (FBM+), que apresentou a segunda menor média de tempo e segue do modelo (FBM) proposto em (REIS *et al.*, 2015). Já a formulação (ML+) reduziu o tempo médio obtido por (ML) em aproximadamente 20.52%, onde pudemos comprovar experimentalmente a eficácia do conjunto de desigualdades (4.19) que propomos para o MLSTP. Também pudemos observar a eficácia do conjunto de desigualdades (4.19) quando comparamos a média dos *gaps* e das soluções linearmente relaxadas entre esses dois modelos. Vale ressaltar que apenas os modelos (MB) e (MFA) resolveram todas as instâncias com 200 vértices. Além do mais, quando consideramos apenas essas instâncias, (MB) apresentou uma média de tempo inferior ao da formulação (MFA). Entretanto, utilizando (MB), não conseguimos resolver muitas instâncias com densidade de 5%, incluindo as com 50 e 70 vértices.

Para $k \geq 2$, o modelo (MFA) teve, de modo geral, um tempo médio aproximadamente 13.01% menor que o do modelo (ML^k) e 38.12% menor quando comparado à formulação (MF^k), porém 2.34% maior quando comparado à formulação (MVE), que obteve a menor média de tempo. Também pudemos perceber que, para os modelos (ML^k), (MF^k) e (MVE), geralmente, o tempo diminuiu quando elevamos o valor de k , assim como a quantidade de instâncias não resolvidas. Em particular, para $k = 4$, ocorreu o único caso em que o modelo (MFA) teve sua média de tempo superada, mais precisamente pelas formulações (ML^k) e (MVE). Isso ocorreu porque, para esse valor de k , a formulação (MFA) estourou o tempo limite de execução mais vezes que nos outros dois casos ($k = 2$ e $k = 8$), principalmente para instâncias com densidade de 5%. Portanto, houve aí uma quebra, para (MFA), no comportamento supracitado

para os outros modelos.

Também pudemos perceber que, embora alguns experimentos tenham atingido o tempo limite de execução, os *gaps* são relativamente baixos, sendo o maior deles de 8% para o modelo (MFA) no experimento que envolve a instância de 50 vértices e de densidade 5%, mas que nos demais casos, considerando todos os modelos, foram inferiores ou iguais a 5%. Veja ainda que os *gaps* diminuem para maiores densidades de arestas, algo que já era esperado, dado que instâncias esparsas são, em geral, mais difíceis de resolver.

Outro fator de destaque foi a quantidade de instâncias resolvidas pelo modelo (MFA) ainda no nó raiz da árvore de B&B, mostrando-se superior nesse quesito para todos os valores de k . Também pudemos notar que essa formulação obteve, no geral, o menor índice de instâncias não resolvidas, totalizando apenas 7 dos 164 experimentos e com destaque para $k = 1$, onde essa formulação foi a única que solucionou todas as instâncias. Além disso, observamos que, embora o tempo de execução da formulação supracitada tenha sido geralmente inferior ao das demais, esse modelo explorou significativamente um número superior de nós quando comparado aos modelos restantes, o que caracteriza a rapidez de resolução dos subproblemas no momento do algoritmo de B&B. Essa rapidez de resolução dos subproblemas fez com que o modelo (MFA), mesmo apresentando uma média do valor da relaxação linear (UB_R) acima dos demais, alcançasse resultados expressivos.

Para o modelo (MFA), também realizamos experimentos utilizando decomposição de Benders padrão do CPLEX, mas os resultados obtidos não foram, de forma consensual, melhores que quando simplesmente aplicamos o B&B ao modelo. Além disso, para $k = 1$, com base nas desigualdades (4.19), também realizamos experimentos onde escolhemos o vértice v de menor vizinhança e definimos apenas $|N(v)|$ variáveis do tipo r . Entretanto, apesar de poder reduzir significativamente o número de variáveis inteiras no modelo, permanecer com todas ocasionou, de modo geral, melhores resultados.

Também fizemos uma análise onde consideramos apenas 35 das 41 instâncias, excluindo as com densidade de 5%. Os dados referentes a essa análise são apresentados na Tabela 8. Com base no tempo médio dos experimentos considerando $k = 1$, observamos que o modelo (MB) apresentou melhor desempenho, reduzindo o tempo médio obtido por (ML) em aproximadamente 85.67%. Além disso, houve uma redução de aproximadamente 29.56% quando comparamos (MB) com (MFA), que obteve a segunda menor média de tempo. Note que, nesse cenário, apenas os modelos (MB) e (MFA) resolveram todas as instâncias, evidenciando a

Tabela 7 – Síntese dos experimentos para as instâncias de (LUCENA *et al.*, 2010).

Valor k	Modelos	Média t(s)	Média UB _R	Média UB	Média Nós	Não resolvidas	Res. na raiz	Média GAP(%)
1	(ML)	822,98	97,48	95,47	128542,20	4	6	0,22
	(ML+)	654,04	97,22	95,35	132105,15	3	9	0,17
	(MF+)	416,45	97,36	95,27	78370,71	2	8	0,15
	(FBM+)	287,71	97,47	95,09	82775,05	1	20	0,01
	(MB)	923,40	-	-	-	4	-	-
	(MFA)	131,33	108,32	95,05	153315,49	0	21	0,00
	(MVE)	589,74	97,31	95,25	64709,17	2	9	0,09
2	(ML ^k)	744,51	97,71	95,75	75870,41	4	7	0,24
	(MF ^k)	1048,56	97,89	95,89	121768,17	5	7	0,35
	(MFA)	685,50	98,33	95,46	1047734,63	2	17	0,08
	(MVE)	742,76	97,56	95,73	71462,29	4	8	0,24
4	(ML ^k)	716,39	97,95	96,05	69362,17	3	10	0,17
	(MF ^k)	951,09	98,01	96,15	76762,85	4	11	0,24
	(MFA)	785,26	98,33	95,93	3309832,10	4	17	0,33
	(MVE)	559,33	97,81	89,87	80566,00	2	11	0,15
8	(ML ^k)	582,10	98,18	96,30	70123,56	2	10	0,12
	(MF ^k)	872,28	98,18	96,46	46192,24	4	11	0,21
	(MFA)	306,37	98,33	96,10	200545,29	1	22	0,03
	(MVE)	433,37	98,09	96,29	91789,83	2	11	0,12

“-”: não se aplica ao método de resolução utilizado para o modelo.

Fonte: produzida pelo autor.

fragilidade do modelo (MB) para instâncias de densidade 5%, mas ressaltando sua eficiência para densidades maiores. Já para $k \geq 2$, pudemos observar que o modelo (MFA) obteve a menor média de tempo em todos os casos. Percebemos ainda que apenas os modelos (ML^k) e (MVE) mantiveram uma redução no tempo médio à medida que se aumenta o valor de k .

Tabela 8 – Síntese dos experimentos desconsiderando as instâncias de densidade 5% do conjunto de instâncias apresentadas em (LUCENA *et al.*, 2010).

Valor k	Modelos	Média t(s)	Média UB _R	Média UB	Média Nós	Não resolvidas	Res. na raiz	Média GAP(%)
1	(ML)	716,03	98,44	96,57	37804,71	3	6	0,17
	(ML+)	549,66	98,18	96,42	45305,31	2	9	0,11
	(MF+)	279,81	98,24	96,34	47048,80	1	8	0,08
	(FBM+)	324,06	98,24	96,25	93349,08	1	20	0,02
	(MB)	102,54	-	-	-	0	-	-
	(MFA)	145,58	111,51	96,20	167960,42	0	21	0,00
	(MVE)	622,15	98,02	96,43	37102,85	2	9	0,11
2	(ML ^k)	651,39	98,47	96,68	26628,65	3	7	0,17
	(MF ^k)	782,12	98,52	96,69	12218,51	3	7	0,17
	(MFA)	237,13	98,58	96,41	184017,25	1	17	0,03
	(MVE)	651,01	98,35	96,65	26683,65	3	7	0,17
4	(ML ^k)	628,80	98,55	96,82	27012,77	2	10	0,12
	(MF ^k)	718,61	98,56	96,91	9607,40	3	10	0,17
	(MFA)	228,67	98,58	96,64	173173,51	1	17	0,03
	(MVE)	436,49	98,51	96,73	32993,68	1	10	0,08
8	(ML ^k)	474,25	98,58	96,81	32690,94	1	10	0,08
	(MF ^k)	763,62	98,58	97,00	10729,71	3	11	0,17
	(MFA)	238,21	98,58	96,72	179351,68	1	22	0,03
	(MVE)	299,20	98,58	96,81	56976,62	1	10	0,08

“-”: não se aplica ao método de resolução utilizado para o modelo.

Fonte: produzida pelo autor.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Propomos modelos matemáticos para o MLkFP e um novo modelo específico para o MLSTP. Além disso, propomos um conjunto de desigualdades válidas para o MLkFP que, para $k = 1$, foram fortalecidas e reduziram significativamente os tempos computacionais para instâncias *benchmark* do MLSTP, quando incorporadas a modelos presentes na literatura. Apresentamos caracterizações para o problema que facilitam expressá-lo de uma maneira alternativa, onde buscamos apenas um conjunto de folhas que gere uma solução ótima. Realizamos uma série de experimentos considerando quatro valores distintos para k .

Dentre os modelos apresentados, damos destaque ao modelo (MFA) por sua simplicidade, facilidade de implementação e, de um modo geral, desempenho satisfatório. Esse modelo, para $k = 1$, mostrou-se significativamente mais eficiente que os modelos da literatura específicos para o MLSTP. Por outro lado, o modelo (MB) que propomos para o MLSTP obteve, de um modo geral, resultados globalmente pouco competitivos considerando todo o conjunto de instâncias. Entretanto, esse modelo foi consideravelmente superior aos demais quando desconsideramos as instâncias com densidade de 5%.

Como trabalhos futuros, para $k = 1$, podemos tentar melhorar os resultados através de um pré-processamento das instâncias, aplicando regras de reduções presentes na literatura (LUCENA *et al.*, 2010). Além disso, podemos adaptar algumas dessas regras para o MLkFP bem como reduções propostas em (ALBER *et al.*, 2005) e (ALBER *et al.*, 2004) para problemas envolvendo conjuntos dominantes.

Podemos ainda desenvolver uma nova formulação na qual o grafo de entrada seja transformado em um digrafo, como ocorre em (ML^k) , porém permitindo arcos apenas entre nós internos, conforme feito nos modelos (MFA) e (MVE) (nesse último caso, arestas em vez de arcos). Através dos experimentos computacionais, pudemos notar que essa ideia melhorou significativamente os resultados obtidos pelo modelo (MVE) quando comparados aos da formulação (MF^k) . Também seria interessante remover simetrias do modelo (MFA).

Ademais, podemos tentar criar novas instâncias com maiores *gaps* entre os valores das soluções ótimas e os valores das soluções dadas pela heurística. Feito isso, podemos realizar novos experimentos e comparar os resultados.

REFERÊNCIAS

- ALBER, J.; FAN, H.; FELLOWS, M. R.; FERNAU, H.; NIEDERMEIER, R.; ROSAMOND, F.; STEGE, U. A refined search tree technique for dominating set on planar graphs. **Journal of Computer and System Sciences**, [S.l.]: Elsevier, v. 71, n. 4, p. 385–405, 2005.
- ALBER, J.; FELLOWS, M. R.; NIEDERMEIER, R. Polynomial-time data reduction for dominating set. **Journal of the ACM (JACM)**, [S.l.]: ACM, v. 51, n. 3, p. 363–384, 2004.
- ARAÚJO, P. H. M.; ANDRADE, R. C. Algoritmos de branch-and-cut com branch combinatório para o problema do conjunto dominante mínimo conexo. In: THE LATIN-IBEROAMERICAN CONFERENCE ON OPERATIONS RESEARCH. **Proceedings of the XVIII Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research**. Santiago, 2016. v. 18, p. 53–60.
- BALASUNDARAM, B.; BUTENKO, S. Graph domination, coloring and cliques in telecommunications. In: **Handbook of Optimization in Telecommunications**. [S.l.]: Springer, 2006. p. 865–890.
- FERNANDES, L. M.; GOUVEIA, L. Minimal spanning trees with a constraint on the number of leaves. **European Journal of Operational Research**, [S.l.]: Elsevier, v. 104, n. 1, p. 250–261, 1998.
- FREITAS FILHO, F. S.; ANDRADE, R. C. O problema da k-floresta com máximo número de folhas. In: THE LATIN-IBEROAMERICAN CONFERENCE ON OPERATIONS RESEARCH. **Proceedings of the XIX Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research**. Lima, 2018. v. 19, p. 1–7.
- FUJIE, T. An exact algorithm for the maximum leaf spanning tree problem. **Computers & Operations Research**, [S.l.]: Elsevier, v. 30, n. 13, p. 1931–1944, 2003.
- FUJIE, T. The maximum-leaf spanning tree problem: Formulations and facets. **Networks**, [S.l.]: Wiley Online Library, v. 43, n. 4, p. 212–223, 2004.
- GALBIATI, G.; MAFFIOLI, F.; MORZENTI, A. A short note on the approximability of the maximum leaves spanning tree problem. **Information Processing Letters**, [S.l.]: Elsevier, v. 52, n. 1, p. 45–49, 1994.
- GENDRON, B.; LUCENA, A.; CUNHA, A. S. da; SIMONETTI, L. Benders decomposition, branch-and-cut, and hybrid algorithms for the minimum connected dominating set problem. **Infoms Journal on Computing**, [S.l.]: Infoms, v. 26, n. 4, p. 645–657, 2014.
- GHOUILA-HOURI, A. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)**, [S.l.]: [s.n], v. 254, p. 1192–1194, 1962.
- LU, H.; RAVI, R. Approximating maximum leaf spanning trees in almost linear time. **Journal of algorithms**, [S.l.]: Elsevier, v. 29, n. 1, p. 132–141, 1998.
- LU, H.-I.; RAVI, R. The power of local optimization: Approximation algorithms for maximum-leaf spanning tree. In: UNIVERSITY OF ILLINOIS. **Proceedings of the Annual Allerton Conference on Communication Control and Computing**. [S.l.], 1992. v. 30, p. 533–533.

- LUCENA, A.; MACULAN, N.; SIMONETTI, L. Reformulations and solution algorithms for the maximum leaf spanning tree problem. **Computational Management Science**, [S.l.]: Springer, v. 7, n. 3, p. 289–311, 2010.
- MICHAEL, R. G.; DAVID, S. J. Computers and intractability: a guide to the theory of np-completeness. **WH Freeman**, New York: [s.n.], p. 90–91, 1979.
- MIN, M.; DU, H.; JIA, X.; HUANG, C. X.; HUANG, S. C.; WU, W. Improving construction for connected dominating set with steiner tree in wireless sensor networks. **Journal of Global Optimization**, [S.l.]: Springer, v. 35, n. 1, p. 111–119, 2006.
- REIS, M. F.; FELICE, M. C. S.; LEE, O.; USBERTI, F. L. A 3-approximation algorithm for the maximum leaf k-forest problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, [S.l.]: Elsevier, v. 62, p. 201–206, 2017.
- REIS, M. F.; LEE, O.; USBERTI, F. L. Flow-based formulation for the maximum leaf spanning tree problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, [S.l.]: Elsevier, v. 50, p. 205–210, 2015.
- SOLIS-OBA, R. 2-approximation algorithm for finding a spanning tree with maximum number of leaves. In: **European Symposium on Algorithms**. [S.l.]: Springer, 1998. p. 441–452.
- SOLIS-OBA, R.; BONSMMA, P.; LOWSKI, S. A 2-approximation algorithm for finding a spanning tree with maximum number of leaves. **Algorithmica**, [S.l.]: Springer, v. 77, n. 2, p. 374–388, 2017.