



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LUIZ DANIEL ALVES RIOS

**ÍNDICE DE ATIVIDADE MAGNÉTICA BASEADO NA MECÂNICA ESTATÍSTICA
NÃO-EXTENSIVA DE TSALLIS PARA ESTRELAS DO TIPO M**

FORTALEZA

2019

LUIZ DANIEL ALVES RIOS

ÍNDICE DE ATIVIDADE MAGNÉTICA BASEADO NA MECÂNICA ESTATÍSTICA
NÃO-EXTENSIVA DE TSALLIS PARA ESTRELAS DO TIPO M

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

FORTALEZA
2019

LUIZ DANIEL ALVES RIOS

ÍNDICE DE ATIVIDADE MAGNÉTICA BASEADO NA MECÂNICA ESTATÍSTICA
NÃO-EXTENSIVA DE TSALLIS PARA ESTRELAS DO TIPO M

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 01/ 02/ 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Afrânio de Araújo Coelho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

R453Í Rios,Luiz Daniel Alves.
ÍNDICE DE ATIVIDADE MAGNÉTICA BASEADO NA MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-
EXTENSIVA DE TSALLIS PARA ESTRELAS DO TIPO M / Luiz Daniel Alves Rios. – Fortaleza,
2019.
65.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2019.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

1. Rotação estelar. 2. Atividade magnética. 3. Mecânica estatística. 4. Não-extensividade. I. Título.

CDD:530.0

*A minha mãe,
minha mentora e heroína...*

AGRADECIMENTOS

Utilizo-me deste espaço para registrar meus sinceros agradecimentos e reconhecer os esforços empenhados por aqueles que desejam o meu crescimento, não somente profissional, mas também pessoal. Sem essas pessoas, talvez, não fosse possível chegar até aqui; pois foi através dos mesmos que tive a força, o apoio, o conforto e o estímulo necessários para a elaboração deste trabalho.

- À minha mãe, Dona Socorro, que sempre me apoiou em tudo na vida, por ser além de uma mãe maravilhosa, minha amiga, por ter me ensinado a sempre amar e respeitar o próximo, por me amar incondicionalmente, ter sido extremamente presente na minha vida e sempre estar torcendo pelo meu crescimento.
- Aos meus familiares e amigos, por se mostrarem interessados em meu trabalho.
- A minha esposa, Luana Rios, que com amor e inteligência me amparou, protegeu, carregou e participou ativamente para a construção deste projeto.
- Ao meu Orientador, Professor Dr. Daniel Brito de Freitas, e a todos os Professores do curso de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará (UFC), pelas críticas apresentadas, revisões feitas, sugestões e paciência durante toda a execução.
- Aos meus colegas de curso pelo apoio e as conversas, muitas vezes descontraídas, ao longo do mestrado.
- Aos meus colegas do grupo Stellar Team.
- O apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"A mente que se abre para uma nova ideia,
jamais volta para seu tamanho original..."*
(Albert Einstein)

RESUMO

A atividade estelar está fortemente relacionada com campos magnéticos que evoluem de acordo com sua taxa de rotação. O período do ciclo magnético e o período de rotação são correlacionados de tal maneira que os rotadores lentos têm ciclos magnéticos maiores. Além disso, o nível global da atividade magnética muda ao longo do tempo após os ciclos, e os níveis locais mudam de acordo com as flutuações, variando desde escalas de tempo de alguns segundos a várias horas, dias ou semanas. Como mencionado por Mathur e colaboradores (MATHUR et al., 2014), as estrelas com rotação mais rápida mostram os ciclos de atividade mais curtos, enquanto as estrelas de rotação mais lenta geralmente apresentam períodos de ciclo semelhantes ao Sol ou mais longos. Como a atividade magnética que emerge da superfície das estrelas é um mecanismo físico produzido pelo dínamo estelar, as variações de longo prazo, devido ao período rotacional, desempenham um papel importante na compreensão do nível de atividade na superfície da estrela. A atividade magnética é mensurada pelo comportamento do fluxo de fótons obtido pela série temporal. Para esse trabalho, nós usamos as séries temporais de estrelas observadas pela missão Kepler, em um total de 34 estrelas do tipo espectral M . Acreditamos que as flutuações desse fluxo em diferentes escalas não obedecem a distribuição canônica de Boltzmann-Gibbs e, portanto, o surgimento de caudas pesadas nas distribuições pode nos dar uma ideia sobre a fonte física que opera a atividade magnética estelar em diferentes escalas de tempo. Para esse fim, investigaremos o comportamento dessas distribuições à luz da mecânica estatística não-extensiva de C. Tsallis. Mais especificamente, nós usamos o índice entrópico q de Tsallis como uma medida da extensão da cauda da distribuição que, por sua vez, está correlacionado ao nível da atividade magnética estelar. Também definimos um novo índice magnético $\langle S_q \rangle$ relacionado com o desvio padrão generalizado σ_q e baseado na mecânica estatística não-extensiva. Assim conseguimos encontrar um índice similar ao obtido por Mathur mas com uma explicação física mais apropriada, ou seja, levando em consideração os efeitos de cauda longa presentes na distribuição. Finalmente, nosso trabalho pode abrir um novo campo de pesquisa em astrofísica de séries temporais dentro do contexto da não-extensividade.

Palavras-chave: Rotação estelar. Atividade magnética. Mecânica estatística. Não-extensividade.

ABSTRACT

Stellar activity is strongly related to magnetic fields that evolve according to their rate of rotation. The period of the magnetic cycle and the period of rotation are correlated in such a way that the slow rotators have larger magnetic cycles. In addition, the overall level of magnetic activity changes over time after cycles, and local levels change according to fluctuations, ranging from time scales from a few seconds to several hours, days, or weeks. As mentioned by Mathur et al. (MATHUR et al., 2014), faster rotating stars show shorter activity cycles, while slower rotating stars generally have similar or longer Sun cycle times. As the magnetic activity that emerges from the surface of the stars is a physical mechanism produced by the stellar dynamo, the long-term variations due to the rotational period play an important role in understanding the level of activity on the star surface. The magnetic activity is measured by the behavior of the photon flux obtained by the time series. For this work, we use the time series of stars observed by the Kepler mission, in a total of 34 stars of the spectral type M . We believe that the fluctuations of this flux at different scales do not obey the Boltzmann-Gibbs canonical distribution and therefore the appearance of heavy tails in the distributions can give us an idea about the physical source that operates the stellar magnetic activity at different time scales. To this end, we will investigate the behavior of these distributions in light of the non-extensive statistical mechanics of C. Tsallis. More specifically, we use the entropic index q of Tsallis as a measure of the tail extension of the distribution which, in turn, is correlated to the level of stellar magnetic activity. We also defined a new magnetic index $\langle S_q \rangle$ related to generalized standard deviation σ_q and based on non-extensive statistical mechanics. Thus we can find an index similar to that obtained by Mathur but with a more appropriate physical explanation, that is, taking into account the effects of long tail distribution. Finally, our work may open a new field of research in time series astrophysics within the context of non-extensiveness.

Keywords: Stellar rotation. Magnetic activity. statistical mechanics. nonextensivity.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Lista de estrelas anãs M e o sol, analisadas por Mathur(2014) com seus respectivos índices magnéticos e seus períodos de rotação.	28
Tabela 2 – Parâmetros estelares.	47
Tabela 3 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.	50
Tabela 4 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.	52
Tabela 5 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.	54
Tabela 6 – Tabela de coeficientes de correlação de Pearson mostrando a relação linear simples entre o índice q , em função de múltiplas escalas, com todos os parâmetros extraídos de nossa amostra.	65
Tabela 7 – Tabela de coeficientes de correlação de Pearson mostrando a relação linear simples entre o novo índice magnético $\langle S_q \rangle$, em função de múltiplas escalas, com todos os parâmetros extraídos de nossa amostra.	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Galileo realizou observações de uma série de manchas solares e elaborou um conjunto de desenhos nos quais mostra as posições das manchas no disco solar.	15
Figura 2 – Ilustração do transporte de momento angular por mistura turbulenta. O sentido de rotação é mostrado no topo. Na <i>esquerda</i> : movimento radial original (setas tracejadas) é perturbado pela força de Coriolis para que o produto $u_r u_\phi$ (componente radial e azimutal da velocidade dos tubos convectivos) seja negativo e o momento angular seja transportado para baixo. Na <i>Direito</i> : $u_r u_\phi > 0$ para mistura horizontal produzindo o transporte ascendente do momento angular. A mistura anisotrópica com diferentes intensidades de movimentos radiais e horizontais é necessária para o fluxo líquido do momento angular emergir.	17
Figura 3 – O perfil de rotação solar em $2D$ derivou de inversões heliosísmicas (LARSON; SCHOU, 2015). O perfil é simétrico em torno do equador e não varia com o comprimento. As medidas são insensíveis às altas latitudes polares ($> 75^\circ$) e ao núcleo profundo (abaixo de $r \approx 0.2R_\odot$). Portanto, os valores mostrados aqui não devem ser considerados representativos das taxas reais de rotação nessas regiões. A linha tracejada indica a base da zona de convecção.	20
Figura 4 – Ilustração esquemática dos processos do dínamo solar e o efeito α - ω	25
Figura 5 – A função Gaussiana generalizada para valores típicos de q . Com $q = 1$ temos a Gaussiana usual, para $q > 1$ tem-se cauda longa e largura grande, em comparação com a Gaussiana padrão, e $q < 1$ observa-se cauda curta e largura pequena.	39
Figura 6 – Distribuição de probabilidades para diferentes valores de q . Decaimento lento ($q = 2$), exponencial ($q = 0,99$), e “cut-off” ($q = -1, q = 0,5, q = 0,75, eq = 1,1$).	41
Figura 7 – Imagem artística da missão Kepler operando como a missão K2.	43
Figura 8 – Curva de luz de cadência curta de KIC006116048 durante a duração da missão nominal do Kepler.	44

Figura 9 – <i>Esquerda</i> : Mostra um comparativo entre o gráfico semi-log da distribuição observada (pontos), da q -Gaussiana (em vermelho) onde foi feito o ajuste do parâmetro q e da Gaussiana padrão (em preto) para a estrela KIC 002570846 com um fator de escala $n = 5$. <i>Direita</i> : Mostra um comparativo entre o gráfico semi-log da distribuição observada (pontos), da q -Gaussiana (em vermelho) onde foi feito o ajuste do parâmetro q e da Gaussiana padrão (em preto) para a estrela KIC 002574427 com um fator de escala $n = 9$. Fica evidente que a q -Gaussiana se ajusta bem melhor a distribuição.	48
Figura 10 –Mostra uma gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 0$ (em azul) e $n = 10$ (em laranja), para a estrela 1 (<i>KIC002157356</i>) de nossa amostra.	51
Figura 11 –Mostra uma gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 0$ (esquerda) e $n = 4$ (direita), para a estrela 2 (<i>KIC002302851</i>) de nossa amostra.	51
Figura 12 –Mostra uma gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 8$ (esquerda) e $n = 10$ (direita), para a estrela 2 (<i>KIC002302851</i>) de nossa amostra.	51
Figura 13 – <i>Esquerda</i> : Mostra como q varia em função do fator de escala n para a estrela KIC 002157356. <i>Direita</i> : Mostra como q varia em função do fator de escala n para todas as estrelas de nossa amostra.	53
Figura 14 –Gráfico de Δq em função do período de rotação P_{rot}	53
Figura 15 – <i>Esquerda</i> : Índice de atividade magnética $\langle S_{ph,k=5} \rangle$ em função do período de rotação. <i>Direita</i> : índice de atividade magnética $\langle S_q \rangle$ em função do período de rotação.	55
Figura 16 –Gráfico de espalhamento entre o índice magnético definido por Mathur $\langle S_{ph,k=5} \rangle$ e o novo índice magnético baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis $\langle S_q \rangle$	56
Figura 17 –Gráfico que mostra a correlação entre o novo índice magnético baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis $\langle S_q \rangle$ e o parâmetro q	56

LISTA DE SIGLAS

VIRGO	Variability of solar Irradiance and Gravity Oscillations
NASA	National Aeronautics and Space Administration
SOHO	Solar and Heliospheric Observatory
ESA	European Space Agency
KIC	Kepler Input Catalog
TLC	Teorema do Limite Central
SDO	Solar Dynamics Observatory
GONG	The Global Oscillation Network Group
BiSON	Birmingham Solar-Oscillations Network
PDF	Probability Distribution Function
OMW	Observatory Mt.nWilson

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivos deste Trabalho	12
1.1.1	Objetivo Geral	12
1.1.2	Objetivos Específicos	12
1.2	Plano de Trabalho	13
2	UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ROTAÇÃO ESTELAR	14
2.1	Rotação do Sol	17
2.1.1	Rotação superficial	18
2.1.2	Rotação diferencial na zona de convecção	18
2.1.3	Rotação no interior profundo	19
2.1.4	Rotação diferencial de condução	19
3	ATIVIDADE MAGNÉTICA ESTELAR	21
3.1	Indicadores de atividade estelar	22
3.1.1	Índices de atividade cromosférica S e R'_{HK}	23
3.1.2	A conversão do índice S em R'_{HK}	23
3.1.3	O número de Rossby	24
3.1.4	Índice de atividade cromosférica baseado no fluxo fotométrico	26
4	UMA BREVE DESCRIÇÃO DA MECÂNICA ESTATÍSTICA DE TSALLIS	29
4.1	Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs	30
4.2	Extensividade, Intensividade e Aditividade	32
4.3	Limitações da Mecânica Estatística e Termodinâmica Clássica	34
4.4	Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis	35
4.5	Função Exponencial Generalizada no Formalismo de Tsallis	36
5	DADOS OBSERVACIONAIS	43
5.1	A Missão Kepler	43
5.2	Descrição da Amostra Seleccionada	45
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	48
6.1	Determinação do Índice q em Função da Escala	48
6.2	Definição de um Novo Índice de Atividade Magnética	52
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	57
	REFERÊNCIAS	59

APÊNDICE A – TABELAS COM OS COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DE PEARSON MOSTRANDO A RELAÇÃO LINEAR SIMPLES ENTRE OS PARÂMETROS USADO EM NOSSO TRABALHO 65

1 INTRODUÇÃO

A atividade estelar está fortemente relacionada a fenômenos extremos e transitórios causados pela dissipação de energia magnética quando os campos magnéticos evoluem de topologias complexas para topologias mais simples, de acordo com a taxa de rotação estelar (FREITAS et al., 2013). De fato, como citado por Saar (SAAR; BRANDENBURG, 2002), o período do ciclo magnético e o período de rotação são correlacionados de tal maneira que os rotadores lentos têm ciclos magnéticos maiores, ou seja, atividade magnética menor. Além disso, o nível global de atividade magnética muda ao longo do tempo após os ciclos, e os níveis locais mudam em diferentes escalas de tempo associadas a flutuações altas e baixas intermitentes, que variam em escalas de tempo de alguns segundos a várias horas, dias e semanas (regiões ativas). No entanto, esse nível de atividade depende da rotação das estrelas. Como mencionado por Mathur e colaboradores (MATHUR et al., 2014), as estrelas de rotação mais rápida mostram os ciclos de atividade mais curtos (maior atividade magnética), enquanto as estrelas de rotação mais lenta geralmente apresentam períodos de ciclo semelhantes ao Sol ou mais longos. Dependendo da massa estelar, a variabilidade no comportamento estelar em escalas pequenas e grandes é um fator fundamental que pode ser usado para entender melhor os fenômenos do magnetismo estelar. Como a atividade magnética que emerge da superfície estelar é um mecanismo físico produzido pelo dínamo estelar, as variações de longo prazo devido ao período rotacional desempenham um papel importante na compreensão do nível de atividade na superfície da estrela. Especificamente, para estrelas de baixa massa, o magnetismo observado está associado ao envoltório convectivo externo, onde fortes movimentos de massa de plasma condutivo induzem um campo magnético através de um processo de dínamo cíclico (KITCHATINOV, 2015). Por outro lado, o magnetismo fóssil não é o resultado desses mesmos mecanismos. Esse tipo de magnetismo surge do aprisionamento do fluxo magnético após a formação estelar ou de uma fase do dínamo inicial e pode, portanto, ser o mecanismo para a estabilidade de longa duração sem o efeito dínamo (DUEZ; BRAITHWAITE; MATHIS, 2010).

Para as estrelas da sequência principal, o estudo da atividade magnética estelar concentra-se na análise de assinaturas de flutuações nas variações de vida curta e longa devido a diferentes processos físicos, que se manifestam em escalas de tempo características desde oscilação ($> 2000\mu\text{Hz}$) até rotação ($< 1\mu\text{Hz}$) (KAROFF et al., 2013). Esses processos são gerados por dinâmicas temporais complexas na fotosfera e atmosfera estelar. Em geral, os mecanismos responsáveis pela atividade magnética, como as interações entre rotação, convecção e campo magnético, que geram a rotação diferencial, não são completamente compreendidos

(CHAGAS et al., 2016).

Desde os resultados pioneiros de M. Wilson (WILSON O. C., 1956), como também o efeito WB, vários esforços têm sido feitos para medir o nível de atividade magnética em observações fotométricas e espectroscópicas. Recentemente, Mathur e colaboradores (MATHUR et al., 2014) sugeriram um novo índice magnético baseado no índice global S_{ph} , que R. García (GARCÍA et al., 2010) define como o desvio padrão de toda a série temporal. Considerando as flutuações da atividade magnética com o tempo, Mathur e colaboradores (MATHUR et al., 2014) propuseram o valor médio de $\langle S_{ph} \rangle$ como sendo um índice de atividade magnética global, que foi dividido em sub-séries independentes de comprimento $k \times P_{rot}$, onde k é um número inteiro definido como 5 e P_{rot} é o período rotacional da estrela. Este procedimento tem a grande vantagem de contabilizar os efeitos da rotação da estrela, permitindo a medição do índice magnético durante o regime mínimo (ou máximo) do ciclo magnético. O próximo passo dado pelos autores foi corrigir o valor do índice $\langle S_{ph} \rangle$ para ruído de fóton. Para tanto, fizeram uso da correção de magnitude de Jenkins (JENKINS et al., 2010) para estimar as correções a serem aplicadas às estrelas do Kepler. Assim, eles garantem que o $\langle S_{ph} \rangle$ é dominado pelo magnetismo de cada estrela, eliminando quaisquer efeitos devidos à granulação. Além disso, esses autores assumem esse novo índice como uma contrapartida do índice espectroscópico Mount Wilson S .

Recentemente, de Freitas e de Medeiros (FREITAS; MEDEIROS, 2012) mostraram que as distribuições de velocidade radial são melhores ajustadas pelas q -Gaussianas, que surgem dentro da estatística não extensiva de Tsallis. As distribuições obtidas não podem ser descritas pela Gaussiana padrão que surge dentro da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG). Os resultados apontam para a existência de uma estrutura hierárquica no espaço de fase, em contraste com o espaço de fase uniformemente ocupado da mecânica estatística BG, impulsionado pelo q -Teorema do Limite Central¹ (q -TLC), consistente com a mecânica estatística não extensiva. O comportamento da distribuição de diferentes parâmetros físicos estelares parecem ser melhor explicados com base em uma função de distribuição de entropia máxima de Tsallis do que por distribuições Gaussianas e Maxwell-Boltzmann padrão ou funções analíticas (SOARES et al., 2006). De fato, a generalização não extensiva da estatística de Boltzmann-Gibbs, apresentada por Tsallis (TSALLIS, 1988), aparece agora como uma poderosa parametrização da mecânica estatística de estados fora de equilíbrio em sistemas abertos, como é o caso das estrelas, planetas e sistemas estelares.

¹Em 2008, Umarov, Tsallis e Steinberg fizeram uma q -generalização do teorema do limite central, no qual se tem uma sequência de variáveis aleatórias que apresentam determinadas correlações fortes entre elas, e têm uma variância q -generalizada finita. Este teorema estabelece que o atrator neste caso é uma q -Gaussiana. Naturalmente, recupera-se o teorema clássico do limite central quando $q \rightarrow 1$, onde as variáveis aleatórias são independentes.

A grande novidade no presente estudo é verificar, a partir da série temporal de uma fração da amostra de estrelas da missão espacial Kepler (BORUCKI et al., 2010), como a distribuição do fluxo fotométrico, em diferentes escalas, está relacionado com o nível da atividade magnética estelar. Ou seja, como essa distribuição está relacionada com o índice entrópico q de Tsallis. Nossa investigação consiste na determinação desse índice entrópico para uma amostra de 34 estrelas anãs do tipo espectral M e o Sol em sua fase ativa. Para esse intento, utilizamos a estatística não-extensiva de Tsallis como ferramenta para determinar o grau de intensidade na qual nossa amostra está fora do equilíbrio. Como teste, medimos esse índice e o comparamos com um índice magnético global S_{ph} definido por Mathur (MATHUR et al., 2014) que leva em conta o desvio padrão de toda a série temporal. Especificamente, o desvio padrão é apenas uma medida útil para quantificar a quantidade de variação ou dispersão em um conjunto de dados estatísticos (FEIGELSON; BABU, 2012). Do ponto de vista físico, entendemos que a atividade magnética dessas estrelas não esteja só associada ao desvio padrão, mas ao efeito de cauda longa da distribuição, ou seja, a mecânica estatística não-extensiva, através do índice entrópico q . Assim conseguimos encontrar uma explicação física mais robusta e profunda, dentro desse formalismo, que consiga atingir os resultados da Mathur com uma teoria mais encorpada. Além disso, observamos também que existe uma tendência geral de anti-correlação não-linear, para determinadas escalas, entre q e o período de rotação estelar.

1.1 Objetivos deste Trabalho

1.1.1 Objetivo Geral

Nosso trabalho tem como objetivo principal definir um novo índice de atividade magnética $\langle S_q \rangle$ relacionado com o desvio padrão generalizado σ_q e baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis. Assim conseguiremos encontrar um índice similar ao obtido por Mathur e colaboradores (2014) mas com uma explicação física mais apropriada, ou seja, levando em consideração os efeitos de cauda longa presentes na distribuição. Buscamos também verificar, a partir da série temporal das estrelas, como a distribuição do fluxo fotométrico pode indicar uma dependência em diferentes escalas. Ou seja, como essa distribuição está relacionada com o índice entrópico q de Tsallis.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Definir um novo índice de atividade magnética $\langle S_q \rangle$ baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis;

- Determinar o índice entrópico q , em função da escala, da distribuição fotométrica das estrelas de nossa amostra;
- Correlacionar o índice entrópico q com os parâmetros estelares associados de nossa base observacional;
- Diagnosticar o nível de atividade magnética das estrelas em função do índice entrópico de Tsallis;
- Investigar a relação desse novo índice não-extensivo $\langle S_q \rangle$ com fenômenos característicos da atividade magnética e com o período de rotação estelar.

1.2 Plano de Trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No capítulo 1, apresentamos uma introdução ao tema de nosso trabalho, com a intenção de dá uma visão geral do conteúdo abordado, além de apresentarmos os objetivos geral e específicos de nossa pesquisa.
- No capítulo 2, apresentamos um panorama geral sobre o problema da rotação estelar, com ênfase na rotação solar. Enfatizamos a ordem cronológica do estudo, os avanços e a rotação diferencial.
- No capítulo 3, comentamos brevemente sobre a atividade magnética estelar relacionando com o índice magnético definido por Mathur. Exibimos, no final do capítulo, a relação dessa atividade com a termodinâmica não extensiva.
- No capítulo 4, realizamos uma breve abordagem sobre a mecânica estatística não extensiva de Tsallis, sempre fazendo um paralelo com a estatística de Boltzmann-Gibbs. Apresentamos, também, a importância dessa ferramenta teórica, no contexto deste trabalho, que consiste em estudar a relação entre a atividade magnética estelar com o grau de não-extensividade da distribuição fotométrica da estrela. Por conseguinte, podemos associar o índice entrópico, presente na teórica de Tsallis, com a variabilidade estelar.
- Em seguida, no capítulo 5, descrevemos as observações e a preparação dos dados que será objeto para testar a nossa teoria. Fizemos a descrição da amostra abordando 34 estrelas anãs do tipo espectral M e usamos o sol como parâmetro de teste.
- Por fim, nos capítulo 6 e 7, apresentamos nossos resultados, conclusões e perspectivas.

2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ROTAÇÃO ESTELAR

A rotação é um fenômeno que se manifesta em escala universal desde os átomos até as galáxias. “*Epur si muove*” disse Galileo Galilei ao afirmar que a Terra está girando. Devido à rotação, o raio equatorial da Terra é cerca de $21,4\text{km}$ mais longo que o seu raio polar. O mesmo também pode ser dito sobre as estrelas, onde os efeitos da rotação são em média muito maiores do que na Terra. Nas estrelas, o raio equatorial pode ser muito maior que o raio polar, até cerca de 1,5 vezes o raio polar. Isso mostra a importância dos possíveis efeitos rotacionais. A rotação é um fenômeno que acompanha toda a história evolutiva da estrela, desde a redistribuição do momento angular na formação da protoestrela até o estágio final da vida da estrela (FREITAS, 2006). Além disso, enquanto a Terra gira como um corpo sólido, as estrelas podem ter uma rotação diferencial interna, com, por exemplo, um núcleo girando mais rápido que o envelope externo. Além disso, a rotação estelar não apenas produz um achatamento da configuração de equilíbrio, mas também impulsiona movimentos de circulação interna e várias instabilidades que transportam tanto os elementos químicos quanto o momento angular.

As estrelas apresentam rotações que vão de valores menores que 10km/s (e.g., estrelas do tipo M) até centenas de quilômetros por segundo (e.g., estrelas do tipo Be). A rotação influencia uma grande variedade de fenômenos estelares, tais como os processos de nucleossíntese e mistura convectiva de elementos químicos, formação de campos magnéticos, perda de massa e zona de habitabilidade em sua vizinhança (NEPOMUCENO, 2013). Ela pode influenciar em sua evolução em dois aspectos importantes: Em primeiro lugar, se for suficientemente rápida, pode afetar a estrutura interna da estrela através de uma redução efetiva da atração gravitacional em direção ao centro (devido à força centrífuga). Como resultado, teremos gradientes de pressão e temperatura em toda a estrela. Em segundo lugar, esses gradientes levam a fluxos de massas adicionais, que podem transportar material entre regiões de estrelas que, de outra forma, não seriam conectadas. Em particular, o último efeito leva a modificações observáveis da composição superficial das estrelas (MAEDER, 2009). O que levou a um forte interesse na rotação estelar.

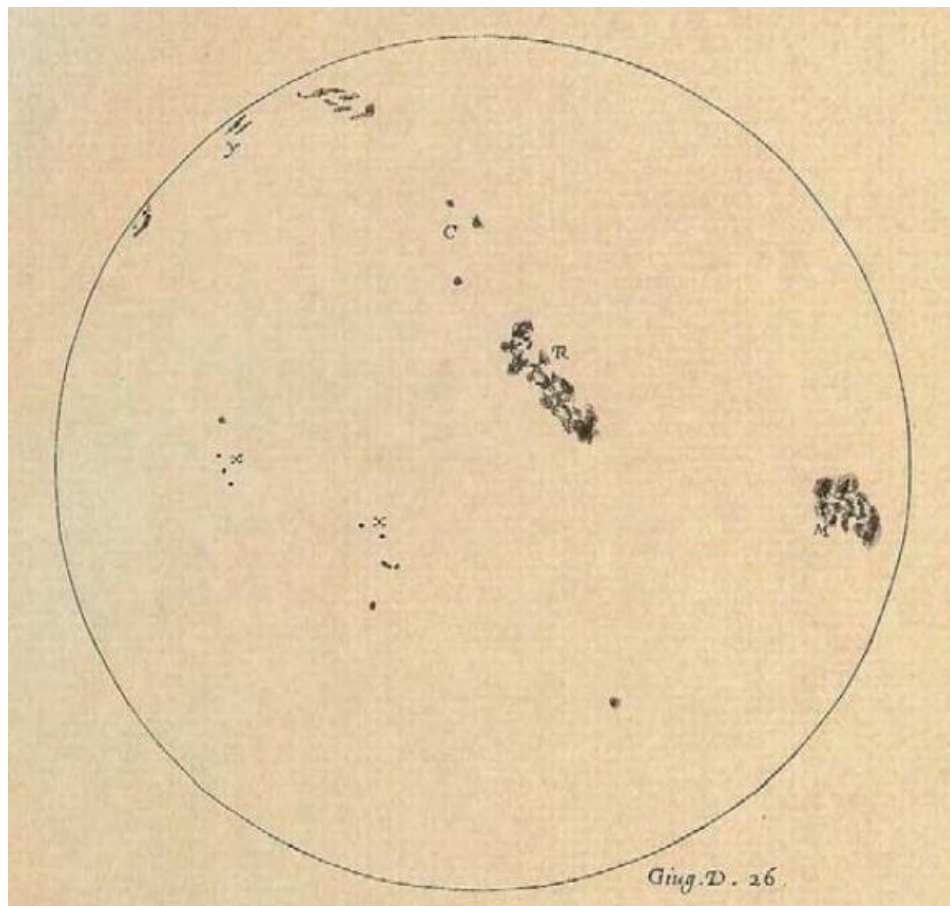
Existem várias maneiras de medir a taxa de rotação estelar, as duas principais técnicas empregadas são:

- A espectroscopia, que usa o alargamento Doppler das linhas espectrais da estrela e a partir disso, obtém a taxa de rotação equatorial projetada, e possivelmente a informação sobre rotação diferencial e escurecimento do limbo. Uma das maneiras mais poderosas de analisar linhas espectrais para extrair taxas de rotação é pela análise de Fourier. A modelagem direta de perfis também funciona. Existem também métodos menos fundamentais, como a

correlação cruzada de espectros, que são úteis para medir um grande número de estrelas após o método ter sido calibrado.

- Análise da série temporal fotométrica, que pode detectar a modulação rotacional causada por uma superfície estelar não uniforme, por exemplo, uma estrela com manchas. A partir disso, obtemos o período de rotação e, possivelmente, alguma informação sobre a rotação diferencial e se as manchas mudam sua latitude ao longo do tempo.

Figura 1: Galileo realizou observações de uma série de manchas solares e elaborou um conjunto de desenhos nos quais mostra as posições das manchas no disco solar.



Fonte: <http://www.portaldoastronomo.org/npod.php?id=135>.

A interação entre rotação estelar e convecção é a origem de vários fenômenos da atividade estelar. Para as estrelas da sequência principal, a taxa de rotação depende fortemente da idade estelar. Devido à frenagem rotacional, as estrelas perdem o momento angular ao longo do tempo e diminuem a velocidade. Skumanich (SKUMANICH, 1972) encontrou empiricamente a relação que a velocidade rotacional das estrelas é proporcional à raiz quadrada inversa de sua idade: $v_{rot} \sim t^{-1/2}$. Atualmente, um método chamado *girocronologia*¹ (BARNES, 2007) está

¹A girocronologia é um método para estimar a idade de uma estrela de baixa massa como o Sol do seu período de rotação.

sendo desenvolvido usando a relação de Skumanich acima, de forma oposta, para inferir as idades das estelares a partir da taxa de rotação. Além disso, a taxa de rotação está fortemente correlacionada com a emissão de *CaII* e pode ser usada como uma medida da atividade estelar. Uma relação entre essas propriedades é frequentemente chamada de relação idade-rotação-atividade (COVEY et al., 2017).

O perfil de rotação estelar não é uniforme, a *heliosismologia*² revela que a região convectiva externa apresenta uma grande disseminação das taxas de rotação em diferentes latitudes, enquanto o interior exhibe uma taxa de rotação quase constante. A força de Coriolis atua na turbulência da zona convectiva e redistribui o momento angular alterando o comportamento de rotação global, levando à rotação diferencial (de agora em diante RD) da superfície, como pode ser visto na figura 1. Uma descrição teórica detalhada pode ser encontrada em Kitchatinov (KITCHATINOV, 2015). A RD de interiores estelares é estudado por *asterosismologia*³, mas estamos interessados principalmente em RD de superfície. No Sol, a região equatorial gira mais rápido que os polos, ou seja, a velocidade angular Ω depende da latitude θ . Esta RD latitudinal é geralmente descrito pela equação

$$\Omega(\theta) = \Omega_{eq}(1 - \alpha_{\odot} \sin^2 \theta) \quad (2.1)$$

com Ω_{eq} sendo a velocidade angular no equador e $\alpha_{\odot} (= 0.2)$ o cisalhamento horizontal relativo do sol. Em geral $\alpha > 0$ é conhecido como RD do tipo solar, $\alpha < 0$ é chamado de RD do tipo anti-solar, e $\alpha = 0$ fornece rotação do corpo rígido. O cisalhamento absoluto $\Delta\Omega$ entre o equador e o polo está ligado a α pela relação

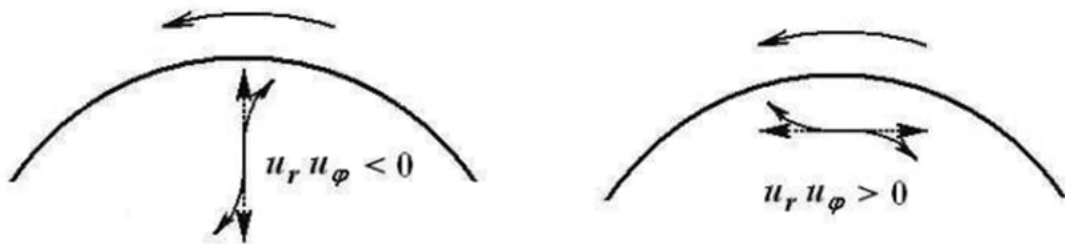
$$\Delta\Omega = \Omega_{eq} - \Omega_{polo} = \alpha\Omega_{eq} \quad (2.2)$$

Acredita-se que rotação diferencial(RD) é um dos principais ingredientes do mecanismo de geração e condução do campo magnético estelar. Dínamos turbulentos operando em estrelas podem produzir campos magnéticos intensos que são capazes de transformar campos poloidais em campos toroidais, e vice-versa. Este efeito se torna ainda mais importante quando as estrelas se tornam totalmente convectivas (MORIN et al., 2008). Além disso, a intensidade da RD varia com o tipo espectral da estrela. Barnes e colaboradores (BARNES et al., 2005) descobriram que $\Delta\Omega$ aumenta fortemente com a temperatura efetiva. Para temperaturas acima de 6000K, esta tendência foi confirmada por outros autores (REINERS; SCHMITT, 2002). Isto poderia ser uma sugestão para diferentes mecanismos de dínamo, mas o papel final do RD ainda não é compreendido.

²A heliosismologia é o estudo da propagação das ondas de pressão no Sol.

³A asterosismologia é o estudo dos modos ressonantes próprios de oscilação de uma estrela.

Figura 2: Ilustração do transporte de momento angular por mistura turbulenta. O sentido de rotação é mostrado no topo. Na *esquerda*: movimento radial original (setas tracejadas) é perturbado pela força de Coriolis para que o produto $u_r u_\phi$ (componente radial e azimutal da velocidade dos tubos convectivos) seja negativo e o momento angular seja transportado para baixo. Na *Direito*: $u_r u_\phi > 0$ para mistura horizontal produzindo o transporte ascendente do momento angular. A mistura anisotrópica com diferentes intensidades de movimentos radiais e horizontais é necessária para o fluxo líquido do momento angular emergir.



Fonte: (KITCHATINOV, 2015).

O RD é muito mais difícil de medir, já que só se conhece razoavelmente bem a superfícies do sol. No entanto, pontos estelares localizados em diferentes latitudes são marcadores úteis para RD. O imageamento Doppler rastreia regiões ativas e segue sua migração ao longo do tempo para tirar conclusões sobre a lei de rotação estelar. Uma técnica diferente para medir o RD é o método da transformada de Fourier (REINERS; SCHMITT, 2002), analisando as formas dos perfis de linha ampliados. Seguindo outra abordagem, Lanza e colaboradores (LANZA et al., 1993) simularam curvas de luz de estrelas pontilhadas e detectaram diferentes períodos tomando a transformada de Fourier. A asterosismologia fornece outra abordagem, explicando a divisão de frequência das oscilações globais em termos de diferentes taxas de rotação latitudinal (GIZON; SOLANKI, 2003).

2.1 Rotação do Sol

Nosso conhecimento do perfil de rotação solar é o quadro mais detalhado de rotação que temos para qualquer estrela. Algumas das primeiras observações da rotação solar, através das manchas solares, incluem as de Johannes Fabricius, Galileo Galilei e Christopher Scheiner no século *XVII*, como foi dito acima. Desde então, o estudo da rotação solar avançou consideravelmente, utilizando fotometria (modulação da curva da luz por rotação permite obter períodos de rotação), espectroscopia (o alargamento das linhas espectrais é parcialmente devido à rotação da superfície), asterosismologia (a divisão dos modos de oscilação devido à rotação permite a reconstrução do perfil de rotação de algumas estrelas além do Sol) e espectropolarimetria (modulação do sinal polarizado por rotação, permitindo derivar os períodos de rotação e rotação diferencial latitudinal de superfície). Os métodos usados para estudar a rotação do Sol podem ser amplamente divididos em três grupos, que também estão em algumas variações aplicáveis às

estrelas. São elas:

- medidas espectroscópicas de velocidade radial;
- traçar as características da superfície em todo o disco solar através da análise da série temporal fotométrica;
- heliosismologia.

Os dois primeiros métodos são predominantemente sensíveis à superfície, enquanto a heliosismologia sonda a rotação no interior solar profundo. Observatórios notáveis dedicados à heliosismologia incluem as missões espaciais SoHO (DOMINGO V.; POLAND, 1995), SDO (PESNELL; THOMPSON; CHAMBERLIN, 2011), e as redes de observação baseadas no solo GONG (HARVEY et al., 1988) e BiSON (CHAPLIN et al., 1996).

2.1.1 Rotação superficial

As primeiras observações da rotação diferencial de superfície no Sol foram realizadas medindo a rotação das manchas solares ao atravessar a superfície solar. A taxa de rotação de pontos perto do equador foi vista como sendo mais rápida do que aquelas em latitudes mais altas. Hoje, a variação da rotação solar com latitude é tipicamente representada por $\Omega(\theta)/2\pi = A + B\sin^2(\theta) + C\sin^4(\theta)$, (HOWARD; HARVEY, 1970), onde θ é a latitude solar, A é a taxa de rotação equatorial, B e C definem a taxa de diminuição com a latitude. Houve vários estudos de rotação (BECK, 1999) e para cada método distinto, retorna valores diferentes dos coeficientes de $\Omega(\theta)$, por exemplo, a taxa de rotação equatorial $A = 453,75nHz(25.51dias)$ medido por espectroscopia e $A = 473,01nHz(24,47dias)$ medido por marcadores de superfície (SNODGRASS, 1990). Isso pode refletir a sensibilidade à rotação de cada método, variando com a profundidade do sol. Os métodos espectroscópicos são principalmente sensíveis a profundidades, nas quais o plasma superficial se torna opticamente espesso em um dado comprimento de onda (a fotosfera), enquanto os traçadores de superfície podem ser enraizados mais profundamente dentro do Sol, e assim sentir a rotação nessa profundidade. As taxas de rotação do traçador de superfície parecem coincidir com aquelas observadas via helioseismologia em profundidades imediatamente abaixo da fotosfera, mas pode muito bem ser uma média ponderada de um intervalo mais amplo de profundidades.

2.1.2 Rotação diferencial na zona de convecção

A heliosismologia é a única ferramenta disponível para sondar a rotação do interior solar. Resumidamente, a heliosismologia estuda as oscilações acústicas de modos de pressão que se propagam através do interior solar. Essas ondas são perturbadas pela rotação e revelam as

taxas de rotação interna em vários raios e latitudes. Os princípios e conceitos deste método são em grande parte idênticos aos da asterosismologia.

A Figura 3 apresenta o perfil de rotação solar em $2D$ (SCHOU et al., 1998) que é o resultado da inversão heliosísmica das perturbações para as oscilações acústicas. A zona de convecção, localizada entre a superfície e a curva tracejada, mostra uma forte variação latitudinal similar àquela observada pelas medidas de superfície. Existe uma camada de cisalhamento relativamente fina perto da superfície, que abrange apenas alguns por cento do raio solar externo. Nesta camada, a taxa de rotação aumenta para latitudes abaixo de $\sim 70^\circ$ e, acima desta latitude, o cisalhamento inicialmente se torna muito fraco e depois muda de sinal em latitudes mais altas. Abaixo da camada de cisalhamento próxima da superfície, a taxa de rotação torna-se aproximadamente constante com o raio, tendo apenas um pequeno gradiente radial. O gradiente latitudinal é semelhante ao da superfície e mantido ao longo de uma grande parte da zona de convecção. Logo abaixo da zona de convecção encontra-se uma camada de cisalhamento mais forte. Acredita-se que esta camada, chamada tacoclina, seja um dos principais impulsionadores do dínamo magnético solar (BASU; ANTIA, 2003) e esteja localizada em um raio de $0,69R_\odot$ e com uma largura de $0,02R_\odot$, mas especula-se que ela pode se mover levemente para fora e se tornar um pouco mais estreita em latitudes mais altas. Abaixo de $\sim 35^\circ$ de latitude a rotação do envelope é marginalmente mais rápida que a do interior, enquanto para latitudes mais altas o gradiente de rotação na camada de cisalhamento muda de sinal, produzindo um polo giratório mais lento. No entanto, a taxa de rotação média no envelope convectivo é cerca de $50nHz$ mais lenta do que na radiação interna.

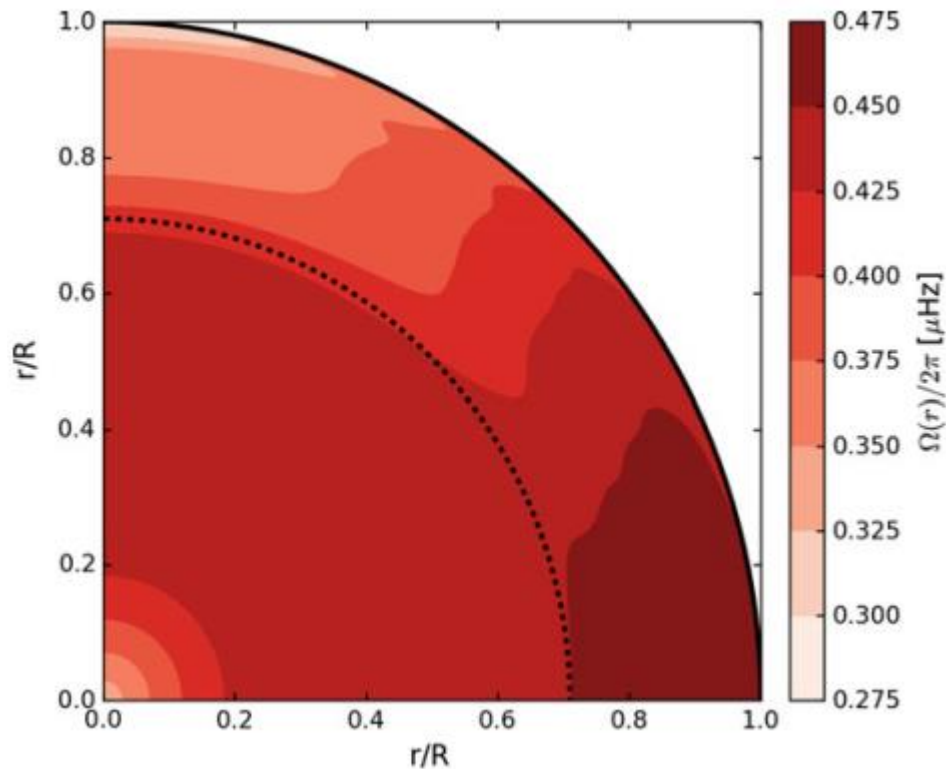
2.1.3 Rotação no interior profundo

Abaixo da tacoclina, o perfil de rotação passa do invólucro com rotação diferencial para o interior radiativo que gira solidamente. As medições heliosísmicas indicam que não há gradientes no perfil de rotação até $\sim 0,2R_\odot$, ponto em que as incertezas de medição aumentam dramaticamente. Neste ponto, as oscilações acústicas usadas para medir a rotação na zona de convecção perderam grande parte de sua sensibilidade, daí as grandes incertezas na taxa de rotação. No entanto, acredita-se que o perfil de rotação do corpo sólido continue até o núcleo solar (HOWE, 2009).

2.1.4 Rotação diferencial de condução

Atualmente, muito trabalho está sendo feito para entender os mecanismos exatos para estabelecer e manter o perfil de rotação diferencial visto no Sol [ver a revisão de Miesch (MIESCH, 2005)]. O momento angular é assumido como sendo redistribuído de quatro maneiras: circulação meridional que é um fluxo circulatório na direção radial e latitudinal, movimento

Figura 3: O perfil de rotação solar em $2D$ derivou de inversões heliosísmicas (LARSON; SCHOU, 2015). O perfil é simétrico em torno do equador e não varia com o comprimento. As medidas são insensíveis às altas latitudes polares ($> 75^\circ$) e ao núcleo profundo (abaixo de $r \approx 0.2R_\odot$). Portanto, os valores mostrados aqui não devem ser considerados representativos das taxas reais de rotação nessas regiões. A linha tracejada indica a base da zona de convecção.



Fonte: Livro - Differential Rotation in Sun-like Stars from Surface Variability and Asteroseismology do Autor - Martin Bo Nielsen.

convectivo na direção radial, forças magnéticas e difusão viscosa (THOMPSON et al., 2003). A localização e o papel de cada um desses termos, no entanto, ainda é incerto. Embora os termos de difusão magnética e viscosa sejam provavelmente pequenos na zona de convecção, as condições dentro ou perto da tacoclina onde o termo magnético pode se tornar mais importante são ainda desconhecidas.

3 ATIVIDADE MAGNÉTICA ESTELAR

Diversas técnicas de observação têm nos mostrado que o magnetismo é um fenômeno presente em todo o cosmo, a origem do magnetismo e seu mecanismo regenerador são temas de grande interesse no campo da astrofísica estelar, uma vez que diante dessas observações é possível teorizar sobre o papel desempenhado pelos campos magnéticos na evolução do universo. O magnetismo estelar teve sua existência comprovada pela primeira vez com (HALE, 1908), quando observou o alargamento das linhas (*efeito Zeeman*⁴) no espectro das manchas solares. Com esta importante descoberta, teve início uma corrida para se estabelecer uma teoria que descrevesse o magnetismo em corpos de escalas astronômicas como o sol e a terra.

Um questionamento importante que serviu como norte para construção das teorias modernas que explicam o magnetismo estelar, era se tais campos magnéticos estavam em evolução com o universo, no sentido de que já deveriam ter se extinguido ou caminhado para extinção ou ainda se podiam se regenerar. Um primeiro esforço para entender a origem do campo magnético da Terra e do Sol foi realizado por (LARMOR, 1919). Ele propôs que corpos numa escala astronômica, como o Sol, podem ter campos magnéticos causados por um processo de dínamo auto excitado (NELSON; De Medeiros, 2012). Depois de muitos esforços, hoje se conhece três processos que são possíveis geradores de campo magnético estelar: o dínamo, a rotação diferencial e a *pilha de Biermann*⁵, uma descrição mais detalhada dos processos responsáveis pelo magnetismo estelar pode ser encontrada na tese de “de Freitas” (FREITAS, 2009).

A atividade magnética estelar compreende uma gama de fenômenos que ocasionam a variação de fluxo luminoso na estrela. As manchas estelares presentes em regiões ativas de intenso campo magnético, fáculas que são manchas mais luminosas e flares, explosões que ocorrem na superfície da estrela liberando uma enorme quantidade de energia, são exemplos de fenômenos que acarretam variação no brilho da estrela. Alguns indicadores como a emissão *CaII*, ou a emissão de linhas de *H α* e *K* ou ainda a emissão de raios-X, associados aos fenômenos mencionado logo acima são usados para medir atividade magnética e muito úteis porque estão fortemente correlacionados com a rotação para estrelas do tipo tardia, estrelas de alta rotação estão sempre ativas por causa do forte campo magnético gerado. Burasi (BURASI, 1997) mostrou que tubos de fluxos do material estelar subindo através da envoltória convectiva são deslocados para regiões polares em estrelas que giram rapidamente no início da sequência principal, isso

⁴O efeito Zeeman é o desdobramento das raias espectrais de um espectro em resposta à aplicação de um campo magnético externo.

⁵A pilha de Biermann propõe que a pressão parcial do gás de elétrons em uma estrela em rotação atua com uma bateria, conduzindo a corrente elétrica que mantém um campo magnético em torno de um eixo de rotação.

acontece devido a *força de Coriolis*⁶ e se intensifica para estrelas do tipo *M* e *K* devido a maior profundidade da envoltória convectiva, implicando que estrelas de baixa massa que giram de modo rápido possuem frações menores da superfície estelar disponível para exibir atividade magnética. Além disso a presença de *H α* na ampla gama de frequências e energia que abrange os flares é o parâmetro que faz a distinção entre estrelas ativas e inativas, como considerado por (HAWLEY et al., 2014).

3.1 Indicadores de atividade estelar

Alguns fenômenos espectroscópicos e fotométricos conhecidos por estarem associados com a atividade solar (por exemplo, raios X, emissão de rádio, variabilidade fotosensível) foram observados em espectros estelares e interpretados, por analogia, com fenômenos solares (por exemplo, campos magnéticos, estrelas e erupções), a detecção só é possível quando o grau da atividade inferida é substancialmente maior nas estrelas observadas do que no sol. Parece que o Sol é uma estrela muito comum e que qualquer fenômeno de atividade solar pode estar presente mais cedo em algumas outras estrelas.

Felizmente, alguns indicadores de atividade são suficientemente sensíveis para nos permitir explorar níveis de atividades estelares comparáveis aos encontrados no Sol. Algumas linhas de emissão, como as linhas *CaII H* e *K* e, mais recentemente, de *MgII*, são os indicadores comuns mais amplamente usados de atividade solar e estelar. Fortes correlações entre as forças dessas linhas em uma dada amostra de estrelas sugerem a presença de um fator subjacente comum, como o campo magnético. A correlação entre a emissão de *CaII* e os campos magnéticos solares foi, de fato, bem estabelecida.

O desenvolvimento do "fotômetro *H-K*" por Arthur H. Vaughan⁷, como parte do Projeto *H-K*, permitiu a amostragem rápida da emissão cromosférica de uma estrela (geralmente menos de 10 minutos por estrela), medida pelo índice de fluxo *H-K*. Este índice é dado pela razão entre o número de fótons passando por fendas alinhadas com as linhas de emissão *H-K* para os fluxos correspondentes através de fendas mais largas afastadas dos núcleos de linha. Este instrumento pode obter medições de fluxo de *H-K* com uma precisão reproduzível de 1 a 2%, apesar dos efeitos da atmosfera da Terra e dos pequenos movimentos da imagem da estrela.

⁶A força inercial de Coriolis ou pseudo-força de Coriolis é uma pseudo-força ou força inercial percebida apenas por observadores solidários a referenciais não-inerciais animados de movimento de rotação em relação a um referencial inercial.

⁷Arthur H. Vaughan estudou engenharia física na Universidade de Cornell e recebeu seu Ph.D. em física, matemática e astronomia da Universidade de Rochester, em 1964. Ele serviu por 17 anos como um astrônomo pessoal do Observatório Mt. Wilson (OMW). No final da década de 1970, ele forneceu o design óptico para a primeira geração de câmeras de campo amplo e planetária da JPL-Caltech para o telescópio espacial Hubble.

3.1.1 Índices de atividade cromosférica S e R'_{HK}

A previsão e a compreensão dos ciclos da atividade estelar continuam sendo uma área de intenso esforço teórico e observacional na astrofísica atual e um dos principais objetivos desta área é entender a física que controla esse mecanismo. Em particular, a atividade cromosférica determina a quantidade de energia global emitida pela cromosfera estelar. A cromosfera é uma região caracterizada principalmente por uma inversão do gradiente de temperatura e situada entre a fotosfera e a corona. A atividade magnética (cromosférica) das estrelas da sequência principal varia com o tempo e as emissões de núcleo de linha $CaII H$ e K é o critério de atividade mais sensível no espectro visível. Wilson (1968) engajou-se em um programa no observatório Mt. Wilson (OMW) e usou um telescópio com um fotômetro de dois canais, centralizando com um canal na linha $CaII H$ e K e com o outro canal contando em duas janelas 25\AA (R e V), separadas por 250\AA , em ambos os lados da região $CaII H$ e K . O índice $CaII H + K$ é definido pela relação S das contagens nas janelas H e K sobre aquelas nos canais R e V.

Para quantificar a atividade cromosférica o observatório de Mt. Wilson (OMW) utilizou o fluxo de $CaII$ das linhas $H-K$, através do índice S . O programa desenvolvido pelo OMW surgiu com o intuito de descobrir se existiam outras estrelas análogas solares que apresentassem o mesmo ciclo de atividade que o Sol. Paralelamente criava-se uma base teórica para compreender os mecanismos responsáveis pelos ciclos magnéticos de estrelas do tipo solar.

O índice de fluxo S é definido da forma:

$$S = \alpha \frac{H + K}{R + V} \quad (3.1)$$

onde H , K , R e V representam o fluxo total em cada faixa. Isto significa medir o número de contagem de fótons que passa em cada uma das respectivas janelas. O α é uma constante de calibração que geralmente possui valor de 2.3 ou 2.4 conforme Duncan e colaboradores (DUNCAN et al., 1991).

3.1.2 A conversão do índice S em R'_{HK}

O índice S fornece um fluxo que contém contribuições das componentes cromosférica e fotosférica. Dessa forma é preciso restringir e separar a medida fotosférica do fluxo total. Para realizar esse procedimento utilizaremos o método introduzido por Noyes (NOYES; WEISS; VAUGHAN, 1984), definido da seguinte maneira:

$$R_{HK} = R'_{HK} + R_{phot}(B - V) \quad (3.2)$$

onde R_{HK} representa o fluxo total e R'_{HK} representa a componente cromosférica. Para remover o termo de cor do índice S , Middelkoop (Middelkoop, 1982) desenvolveu um método para

corrigi-lo como função do $(B - V)$, onde $(B - V)$ é o índice de cor da estrela e representa a diferença entre a magnitude da estrela quando medida na região azul do espectro e aquela quando medida na região visual (amarela). Logo, temos:

$$R'_{HK} = C_{cf}(B - V)S - R_{phot}(B - V) \quad (3.3)$$

onde $C_{cf}(B - V)$ é um fator de conversão que transforma o fluxo dos canais R e V para o contínuo, e R_{phot} é a contribuição fotosférica. Essas medidas são determinadas da seguinte forma:

$$\log C_{cf} = 0.25(B - V)^3 - 1.33(B - V)^2 + 0.43(B - V) + 0.24 \quad (3.4)$$

$$\log R_{phot} = -4.898 + 1.918(B - V)^2 - 2.893(B - V)^3 \quad (3.5)$$

Feita a conversão, como mostra a equação acima, o único parâmetro envolvido na determinação do fluxo cromosférico é o índice de cor $(B - V)$ da estrela.

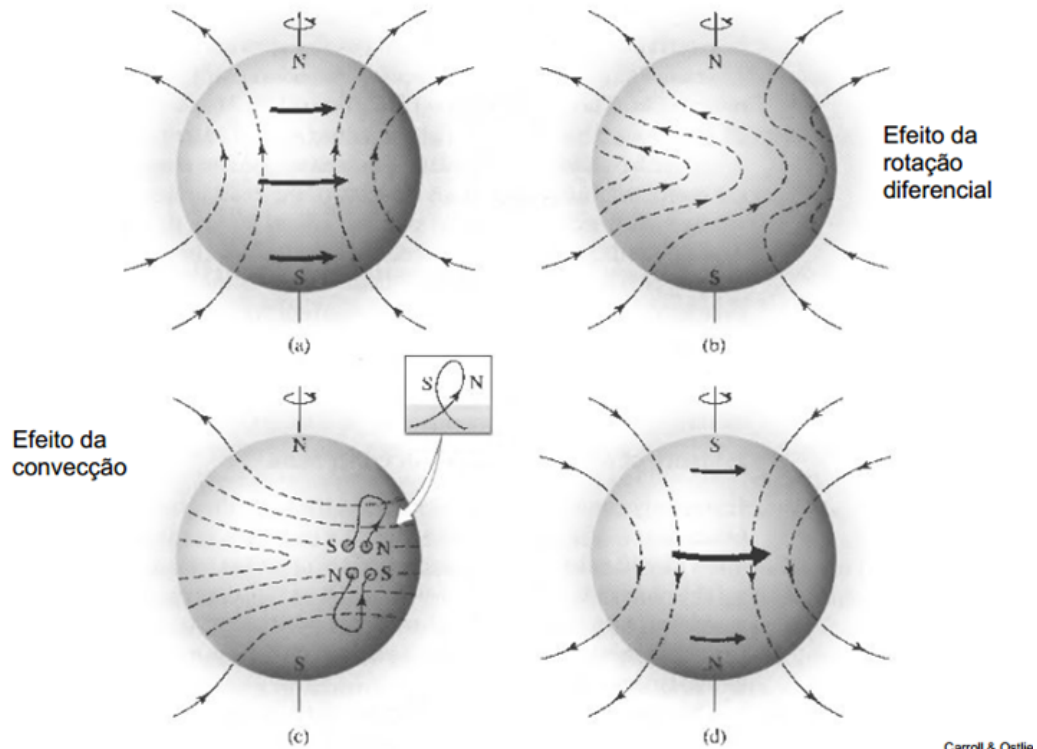
3.1.3 O número de Rossby

Como a atividade estelar é claramente influenciada tanto pela velocidade de rotação quanto pela convecção, os teóricos procuraram uma combinação particular das duas, o que poderia fornecer uma relação mais precisa entre elas. Para estrelas do tipo solar, Noyes e colaboradores (NOYES; WEISS; VAUGHAN, 1984) descobriram que a razão entre o período de rotação e o tempo de giro dos maiores redemoinhos convectivos, conhecido como o número de Rossby fornece essa relação. Este parâmetro é uma grandeza física adimensional introduzida pelo meteorologista sueco Carl Gustaf Arvid Rossby (1898-1957) para explicar o movimento do fluido de ar na atmosfera. Embora tenha havido algumas críticas a essa abordagem, não se pode negar que ela funciona muito bem com a emissão da $CaII$ e com todos os outros diagnósticos cromosféricos. Quando introduzimos esse conceito ao estudo da dinâmica estelar ele torna-se um parâmetro fundamental para se determinar o quanto a rotação interfere no processo de convecção, em outras palavras, podemos avaliar quantitativamente a eficiência do dínamo na tentativa de explicar como é produzido e amplificado o campo magnético nas estrelas.

O campo magnético estelar possui duas componentes distintas: o campo magnético poloidal (na direção dos polos) e o campo toroidal (paralelo às linhas de latitude). A interação entre esses dois campos é o principal fator para que o mecanismo do dínamo estelar seja autossuficiente, como foi visto no capítulo 2. A rotação estelar, assim como a convecção, é o principal agente dessa interação. Na Figura 4 temos a representação esquemática do mecanismo de dínamo estelar, denominado efeito $\alpha - \omega$. O chamado efeito- ω , é quando um campo poloidal inicial é convertido em um campo magnético toroidal em consequência da rotação diferencial.

A turbulência do plasma agregada à força de Coriolis que causam o surgimento de campos magnéticos poloidais secundários e que, em média, geram um campo poloidal em larga escala, processo conhecido como efeito- α .

Figura 4: Ilustração esquemática dos processos do dínamo solar e o efeito α - ω .



Fonte: Sanchez e colaboradores (Sanchez et al., 2013)

Uma das maneiras de representar o número de Rossby é através da razão entre dois tempos característicos, o período de rotação e o tempo de convecção (τ_c). Desta forma, podemos calculá-lo da seguinte forma:

$$R_o = \frac{P_{rot}}{\tau_c} \quad (3.6)$$

Utilizando-se a relação descrita por Durney e Latour (1978), podemos explicitar a relação existente entre rotação e convecção pela seguinte equação:

$$R_o = \frac{v_c}{\left(\frac{l}{R}\right)v_r} \quad (3.7)$$

onde v_c é a velocidade de convecção, v_r é a velocidade de rotação, l é a profundidade da zona convectiva e R é o raio estelar. Por essa equação 3.7 vemos que, quanto maior a velocidade de rotação, menor será o número de Rossby e isto nos dá uma ideia quantitativa da eficiência do dínamo estelar.

Para calcular o tempo característico de convecção, τ_c , utilizaremos uma relação empírica obtida por Noyes (NOYES; WEISS; VAUGHAN, 1984), relacionando o índice de cor

$(B - V)$ para estrelas e o $\log \tau_c$, dado pelas seguintes expressões:

$$\log \tau_c = \begin{cases} 1.362 - 0.166x + 0.025x^2 - 5.323x^3 & \text{se } x > 0 \\ 1.362 - 0.14x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde $x = 1 - (B - V)$.

Sabendo que $\log \tau_c$ é o tempo de giro da zona convectiva local, podemos parametrizá-lo com o número de dínamo (N_D) para determinar a eficiência do dínamo. Esse parâmetro representa a relação entre a geração do campo magnético e os termos de difusão na zona convectiva. De acordo com Noyes (NOYES; WEISS; VAUGHAN, 1984), o número do dínamo pode ser expresso como:

$$N_D = \frac{\alpha \Omega' d^4}{\eta^2} \quad (3.8)$$

no qual $\alpha = \langle \mathbf{v}(\nabla \times \mathbf{v}) \rangle \cdot \tau_c$ (chamado de efeito- α), Ω' representa a magnitude de rotação diferencial, d é a escala de altura da zona convectiva e η é a difusividade magnética. Assumindo que α tem ordem de grandeza Ωd e $\eta \sim \frac{d^2}{\tau_c}$, e considerando $\Omega' \sim \frac{\Omega}{d}$, temos uma estimativa do número do dínamo

$$N_D \approx (\Omega \tau_c) = R_o^{-2} \quad (3.9)$$

Dessa forma, podemos supor que a atividade magnética diminui com o aumento do número de Rossby.

3.1.4 Índice de atividade cromosférica baseado no fluxo fotométrico

Com o advento das missões espaciais, os dados fotométricos de CoRoT e Kepler de um vasto número de estrelas foram coletados, continuamente, simultaneamente e com uma precisão sem precedentes. Isso nos permite estudar a variabilidade estelar de um grande número de estrelas com variações de apenas milimagnitudes. Devido à grande quantidade de dados, é necessária uma classificação automatizada para os diferentes tipos de variabilidade estelar. Foram feitas tentativas para agrupar toda a amostra de Kepler em classes conhecidas de variabilidade como classes de pulsação definidas (por exemplo, RR Lyrae, δ Scuti, etc.), variabilidade induzida por rotação, binariedade e outros grupos. Em muitos casos, no entanto, uma classificação única não foi possível.

Em Mathur (MATHUR et al., 2014) foram definidos dois índices magnéticos que são medidos em observações fotométricas. O primeiro, S_{ph} , é calculado como o desvio padrão das séries temporais completas. Ele fornece um nível médio de atividade durante o período de observação. O segundo, $\langle S_{ph,k} \rangle$, é um índice magnético baseado no conhecimento do período de rotação da superfície estelar, P_{rot} , suavizando as séries temporais sobre $k \times P_{rot}$. Foi calculado

$\langle S_{ph,k} \rangle$, para diferentes valores de k e testado em dados solares coletados durante ~ 6000 dias pelo instrumento VIRGO / SPM a bordo do SoHo. Em seguida, foi aplicado à amostra de M anos observada pela missão Kepler. Foi mostrado que $k = 5$ é uma boa escolha para manter as informações sobre a atividade magnética global, tendo subséries suficientemente curtas para rastrear quaisquer variações do tipo de ciclo no nível médio de atividade. Para valores maiores de k , o índice atinge a saturação. Esta análise feita por (MATHUR et al., 2014) mostra, em particular, que as M são mais ativas do que o Sol, confirmando as observações do observatório McDonald (ROBERTSON et al., 2013).

Os valores de $\langle S_{ph,k} \rangle$ extraídos de Mathur(2014), e quem medem a atividade magnética, são relatados na tabela 1. Este procedimento divide uma série temporal em escalas macroscópicas de ordem ou superiores ao período rotacional. Segundo os autores, o desvio padrão é um bom indicador da atividade magnética global baseada na modulação fotométrica e, conseqüentemente, um classificador do ciclo de atividade estelar. Especificamente, o desvio padrão em função do fator k é apenas uma medida útil para quantificar a quantidade de variação ou dispersão em um conjunto de dados estatísticos (FEIGELSON; BABU, 2012). No entanto, os dados de cadência longa usados aqui são filtrados, e nenhuma assinatura de oscilações ou granulação é observada acima do ruído de fótons. Os dados também são corrigidos para o ruído de fótons para remover essa dependência, levando em conta a magnitude da estrela, conforme descrito por (MATHUR et al., 2014). Como enfatizado por esses autores, o índice S_{ph} , conforme calculado, é dominado pelas escalas de tempo relacionadas à rotação e ao magnetismo.

Do ponto de vista físico, entendemos que a atividade magnética dessas estrelas não esteja só associado ao desvio padrão, pois a variabilidade estelar é um sistema complexo que tem vários tipos de parâmetros não lineares associados a dinâmica que ocorre no disco estelar. Como citado por (FREITAS et al., 2017) o índice magnético definido por Mathur está correlacionado com eventos estelares de longo prazo que se encaixam perfeitamente na modulação rotacional, ou seja, com o período de rotação (P_{rot}). Nesse mesmo artigo os autores mostram que para eventos de curto prazo, ou seja, correlação entre vizinhos próximos menores que o período de rotação o índice magnético definido por Mathur têm baixa correlação. Uma teoria muito apropriada e que trás um elemento muito importante é a mecânica estatística não extensiva, através do índice entrópico q que determina o efeito de cauda longa presente na distribuição. Assim acreditamos conseguir encontrar uma explicação física mais robusta e apropriada que consiga atingir os resultados da Mathur(2014).

Tabela 1 – Lista de estrelas anãs M e o sol, analisadas por Mathur(2014) com seus respectivos índices magnéticos e seus períodos de rotação.

KIC	S_{ph} (ppm)	$\langle S_{ph,k=5} \rangle$	P_{rot} (dias)
2157356	4445,10	4109,10	12,9
2302851	4148,90	3934,10	12,2
2570846	12481,50	11871,90	10,9
2574427	1245,50	1196,90	13,4
2692704	9183,60	8858,50	14,8
2832398	4761,50	4688,70	15,0
2834612	6591,10	6391,30	13,3
2835393	3705,40	3597,70	15,0
3102763	9960,10	9310,40	14,4
3232393	427,00	404,90	14,5
3634308	3895,90	3708,00	12,9
3935499	19318,50	17429,40	5,2
4833367	1171,60	1135,20	14,2
5041192	5549,30	5483,90	10,8
5096204	1315,20	1272,10	14,8
5210507	12899,80	12345,30	8,8
5611092	738,70	711,40	14,4
5900600	2307,90	2194,30	14,0
5950024	2587,00	2454,50	14,1
5954552	7314,20	7121,10	14,9
5956957	4027,00	3825,40	14,9
6307686	4029,10	3807,70	13,3
6464396	4694,70	4146,50	13,2
6545415	10233,50	9018,60	5,5
6600771	6845,90	6494,60	13,1
7091787	1523,70	1331,60	14,1
7106306	3260,40	3194,60	14,2
7174385	2229,10	2190,20	14,5
7190459	2631,10	2435,60	6,8
7282705	1891,70	1842,50	14,5
7285617	1746,50	1698,30	13,7
7534455	2198,00	2087,30	12,1
7620399	1202,10	1170,50	13,7
7673428	7703,90	7213,60	15,0
Sol	200,00	166,1	27,0

4 UMA BREVE DESCRIÇÃO DA MECÂNICA ESTATÍSTICA DE TSALLIS

Durante muito tempo imaginou-se que a mecânica Newtoniana tivesse validade ilimitada, podendo ser aplicada a todos os sistemas físicos em quaisquer situações. Entretanto, com a chegada da Teoria da Relatividade, que lida com fenômenos nos quais as velocidades envolvidas são grandes (quando comparadas à velocidade da luz), e da Mecânica Quântica, que adquiri grande relevância quando as massas são muito pequenas, o panorama da física mostrou-se bem mais complexo e sutil, colocando a Mecânica Clássica dentro de limites de aplicabilidade bem estabelecidos (FILHO, 2003).

Situação semelhante vem ocorrendo com a Mecânica Estatística usual e a Termodinâmica Clássica. Basicamente, a Mecânica Estatística é o ramo da Física que trata das propriedades de sistemas macroscópicos constituídos por um grande número de elementos. Esta se propõe a investigar as relações entre os aspectos microscópicos da matéria e os vínculos macroscópicos dos sistemas, utilizando, para tanto, a estatística na análise de sistemas formados por muitos corpos juntamente com o seu comportamento termodinâmico (REICHL, 1998).

A termodinâmica, em seus primórdios, era uma ciência puramente fenomenológica. Vários cientistas, dentre eles, Galileu, Celsius, Fahrenheit entre muitos outros, tentaram fornecer definições precisas para conceitos que aparentemente são óbvios para um observador, como pressão e temperatura, e tentaram estudar as conexões existentes entre essas grandezas. Nessa época, a ideia de que esses conceitos deveriam estar ligados com os demais campos da física, como a mecânica clássica, não era sequer cogitada.

No final do século *XIX*, quando a teoria atômica se tornou popular, os cientistas passaram a conceber um gás como uma enorme quantidade de bolas em movimentos aleatórios dentro de uma caixa. Tendo isso em mente, houve um esforço em tentar deduzir toda a termodinâmica a partir da mecânica clássica. Ludwig Boltzmann (1844 – 1906), um dos campeões desta empreitada, em 1866 propôs uma conexão da entropia termodinâmica, definida apenas de forma fenomenológica, com o volume de uma certa região no espaço de fase, um objeto bem definido na mecânica clássica. Isso foi um grande passo adiante, pois se tornou possível calcular todas as propriedades termodinâmicas a partir do Hamiltoniano do sistema. Contudo o problema não está completamente resolvido. A termodinâmica estabelece, entre outras coisas, a irreversibilidade dos fenômenos físicos macroscópicos e a mecânica clássica é uma teoria completamente reversível no tempo. Para provar a conexão teórica entre a entropia assim definida e a entropia fenomenológica, fazendo emergir a irreversibilidade na mecânica clássica, Boltzmann inseriu os dois postulados que servem como pedra fundamental da mecânica estatística: A Hipótese Ergódica e o Postulado das probabilidades iguais a priori.

A mecânica estatística emerge como uma teoria para tratar sistemas clássicos contendo um número muito grande de partículas, de tal modo que se torna impossível resolver todas as equações de movimento ou mesmo que sejamos capazes de tal empreitada, não saberíamos como interpretar o resultado. Não obstante, uma dificuldade que surge antes da nossa habilidade em tratar um problema desse tipo, é bastante difícil preparar um sistema de muitas partículas em condições iniciais bem definidas. Deste modo, torna-se conveniente o uso de métodos estatísticos, como associar uma distribuição de probabilidades para as configurações microscópicas e tomar grandezas físicas mensuráveis como valores médios sobre essa distribuição, no intuito de estudar a termodinâmica destes sistemas.

Apesar de mais de 150 anos de estudo e de ser um dos mais bem sucedidos campos da física, os fundamentos da mecânica estatística ainda não são completamente claros. Seu objetivo primário é fazer uma conexão entre teorias microscópicas, clássicas ou quânticas, e a fenomenologia macroscópica da termodinâmica. Existem muitos tipos de sistemas que apresentam desvios em relação ao formalismo de Boltzmann. Exemplos típicos são sistemas com interações de longo alcance (por exemplo, gravitacionais), sistemas não-lineares no limiar do caos, turbulência, sistemas granulares, entre outros (TSALLIS/GELL-MAN, 2004).

Tipicamente, as características dinâmicas nestes tipos de sistemas estão frequentemente associadas a não-ergodicidade (TSALLIS, 1995). A ocupação do espaço de fases deixa de ser equiprovável e podem aparecer estruturas não-triviais que invalidem a aplicação das hipóteses de Boltzmann. Portanto, é necessária uma maneira alternativa de descrever a estatística desses sistemas.

4.1 Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs

Apresentamos os postulados da termodinâmica clássica axiomática na forma dada por Callen (CALLEN, 1985). Os postulados são:

1° *postulado*: Existência de estados de equilíbrio de sistemas simples completamente caracterizados macroscopicamente pela energia interna, volume e número de moles de espécies químicas constituintes, entendemos por sistemas simples aqueles macroscopicamente homogêneos, isotrópicos, quimicamente inertes, sem carga elétrica e não sujeitos a campos eletromagnéticos nem gravitacionais e suficientemente grandes para que se possa desprezar qualquer efeito de tamanho finito ou de superfície.

2° *postulado*: Existência da entropia S , função dos parâmetros extensivos de um sistema composto, definida para todos os estados de equilíbrio e que tem a seguinte propriedade: os valores que tomam os parâmetros extensivos na ausência de vínculos internos são aqueles que maximizam a entropia na variedade dos estados de equilíbrio restritos.

3° *postulado*: A entropia é uma função contínua, diferenciável e monotonamente

crecente da energia, e é aditiva sobre os subsistemas constituintes.

4° *postulado*: A entropia se anula na temperatura de zero absoluto.

Destes postulados, é possível definir formalmente outras propriedades como temperatura e pressão, que correspondem ao significado dado pela termodinâmica tradicional. A abordagem de Callen é elegante e concisa, mas não dá nenhuma ideia de como estes postulados podem ser derivados das leis da mecânica.

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs foi formulada a mais de um século e, desde então, tem tido um sucesso notável para uma enorme variedade de sistemas. A entropia é formulada termodinamicamente no século XIX por Clausius. Posteriormente, Boltzmann e Gibbs desenvolveram a teoria da mecânica estatística, com a entropia ocupando um papel central. Boltzmann define a entropia a partir do número de configurações microscópicas possíveis do sistema que levam ao mesmo estado macroscópico. Do ponto de vista microscópico, temos um grande número de distribuições possíveis das partículas no sistema físico. Se considerarmos as propriedades macroscópicas do sistema físico, tais como volume, pressão, temperatura, densidade, várias dessas configurações microscópicas produzem o mesmo valor para o estado macroscópico (as partículas, do ponto de vista macroscópico, são indistinguíveis - claro, estamos assumindo que todas as partículas, átomos ou moléculas, são idênticas). No entanto, para caracterizar o estado de cada partícula precisamos estabelecer suas posições e velocidades. Portanto, quando falamos do estado microscópico, estamos falando do conjunto de valores que definem a posição e a velocidade de cada partícula. Essa caracterização deve-se a Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), que estudava na época o equilíbrio térmico dos processos químicos, e introduz a denominação de espaço de fases do gás para esse conjunto de valores. Ele introduziu também o conceito de ensembles que utilizamos até hoje. Vamos designar por Ω o número de estados microscópicos - posições e velocidades - possíveis. Para chegar ao mesmo resultado macroscópico da termodinâmica clássica, Boltzmann deduz a entropia estatisticamente sob a forma

$$S = k_B \ln \Omega \quad (4.1)$$

Essa expressão está de acordo com a segunda lei da termodinâmica, ou seja, da máxima entropia. O sistema quando fora do equilíbrio (por exemplo, todas as partículas na metade esquerda de uma caixa) evolui para um estado - de equilíbrio - com todas as partículas distribuídas aleatoriamente, ou seja, para o sistema com maior quantidade de configurações microscópicas (maior entropia). O calor corresponde aos movimentos aleatórios e desordenados das moléculas do sistema (pressão isotrópica, associada ao estado de equilíbrio). Para realizar trabalho, isto é, uma força, é necessário estabelecer uma ordem no sistema (pressão anisotrópica,

associada a um desequilíbrio macroscópico). No entanto, a equação 4.1 é uma expressão particular de um caso mais geral, no qual a probabilidade termodinâmica do sistema não é igual para todos os microestados que formam aquele dado estado macroscópico. Assim, a expressão se transforma na chamada entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS),

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln p_i \quad (4.2)$$

onde, p_i é a probabilidade do sistema encontrar-se no seu i -ésimo estado, e o somatório é efetuado sobre todos os microestados possíveis Ω em que o sistema pode ser encontrado.

4.2 Extensividade, Intensividade e Aditividade

As propriedades que atribuímos às grandezas termodinâmicas de um sistema podem ser classificadas como extensivas ou intensivas. Uma grandeza é intensiva quando seu valor não depende da quantidade de matéria, do volume ou do número de moléculas do sistema. Por exemplo, considere o número N de moléculas de um gás, à temperatura T , confinadas num recipiente isolado de volume V . A pressão do gás pode ser obtida pela equação de estado do gás. Suponha que diminuamos a metade de seu volume, ou seja, passando para $V/2$. Se N for variado de forma a manter a mesma concentração anterior, ou seja, se retiramos metade das moléculas, a temperatura e a pressão do gás ficam inalteradas. Deste modo, a temperatura T e a pressão P são consideradas propriedades intensivas do sistema.

Na representação da energia essas propriedades, a temperatura e a pressão, são funções da entropia S , do volume V e do número de moléculas N do sistema. Então, temos as seguintes relações funcionais $T(S, V, N)$ e $P(S, V, N)$. Tais relações, que expressam os parâmetros intensivos em termos dos parâmetros extensivos independentes, são chamadas de equações de estado.

O conhecimento de uma única equação de estado não se constitui no conhecimento das propriedades termodinâmicas de um sistema. O conhecimento de todas as equações de estado é equivalente ao conhecimento da equação fundamental e conseqüentemente é completo sob o ponto de vista da termodinâmica (SALINAS, 2005).

Segue-se imediatamente que as equações de estado são funções homogêneas de grau zero. Isto é, multiplicando-se cada um dos parâmetros extensivos independentes por um escalar λ a função fica inalterada

$$T(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = T(S, V, N) \quad (4.3)$$

Segue-se, portanto, que a temperatura de um sistema composto formado por dois subsistemas idênticos é igual à temperatura de um deles. Obviamente, isto concorda com nosso

conceito intuitivo de temperatura.

Para cada grandeza termodinâmica intensiva há uma grandeza termodinâmica extensiva conjugada. A grandeza conjugada da pressão é o volume, da temperatura é a entropia, do potencial químico é o número de partículas, e assim por diante.

As grandezas extensivas são proporcionais à quantidade de matéria e o número de partículas do sistema. O volume de um corpo depende da quantidade de matéria contida nele, ou seja, o volume é uma propriedade extensiva. Nem toda grandeza pode ser classificada como intensiva ou extensiva, mas tanto a termodinâmica quanto a física estatística só considera grandezas com essas propriedades.

Os conceitos de aditividade e extensividade são diferentes. Se um sistema A tem uma dada quantidade associada $S(A)$ esta quantidade é aditiva em relação a uma lei de composição particular, então temos que

$$S(A + B) = S(A) + S(B) \quad (4.4)$$

onde o símbolo $+$ no argumento de S refere-se à lei de composição. Isto é verdadeiro para a maior parte dos sistemas físicos de interesse sob a hipótese de poder desprezar as interações entre elementos pertencentes a diferentes subsistemas. Em particular, não é verdadeiro para sistemas com interações de longo alcance onde as interações entre elementos que pertencem a subsistemas diferentes são comparáveis com as interações dentro de cada subsistema (TSALLIS, 2009).

No caso de m subsistemas diferentes, a relação 4.4 se generaliza imediatamente da forma

$$S\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m S(A_i) \quad (4.5)$$

para o caso particular em que $A_i = A$, ou seja, subsistemas iguais. Temos

$$S(mA) = mS(A) \quad (4.6)$$

Por outro lado, o conceito de extensividade se relaciona com a seguinte expressão (MOYANO, 2006)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|S(m)|}{m} < \infty \quad (4.7)$$

Um sistema que é extensivo tem comportamento assintótico com o número de subsistemas m , tal que existe um fator de proporcionalidade finito entre $|S(m)|$ e m . Esta é uma condição mais fraca que a de aditividade. Mais precisamente, aditividade em relação a uma dada

lei de composição implica extensividade $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|S(mA)|}{m} = S(A)$. Portanto, se pode considerar que um sistema extensivo é assintoticamente aditivo.

4.3 Limitações da Mecânica Estatística e Termodinâmica Clássica

A mecânica estatística, baseada na forma entrópica 4.1, tem encontrado sua correta aplicação em sistemas físicos que guardam as seguintes características:

- Sistemas absolutamente sem interação ou com interações espaciais de curto alcance entre seus elementos constituintes;
- Sistemas com memória temporal de curto alcance (sistemas ditos *markovianos*⁷);
- Sistemas cuja evolução no espaço de fase não é (multi)fractal.

Entretanto, pesquisas recentes (TSALLIS/GELL-MAN, 2004) têm sugerido que determinados sistemas físicos possam apresentar comportamento totalmente anômalo e discordante com o estabelecido por 4.1. Em especial, parece não haver nenhuma razão para que a entropia seja sempre uma propriedade extensiva. Assim, os próprios fundamentos da mecânica estatística e termodinâmica usuais, baseados na aludida forma entrópica logarítmica, estariam sob observação. Este fato tem sido, de longa data, reconhecido por diferentes autores. P. Landsberg (LANDSBERG, 2014), por exemplo, escreve:

“É dado um desenvolvimento sistemático da visão de que, no caso de sistemas com forças de longo alcance e que são, portanto, não extensivas (em algum sentido), alguns resultados termodinâmicos não são válidos. Entre eles está a relação $U - TS + pV = \mu N$ que é a equação de Gibbs-Duhem. Se uma busca por um estado de equilíbrio é feita pela maximização da entropia, pode-se obter resultados enganosos (...) A circunstância de que as principais variáveis da termodinâmica na ausência de forças de longo alcance sejam intensivas ou extensas não pode ser deduzida das chamadas "leis" da termodinâmica. Não obstante, é uma característica muito importante dos sistemas termodinâmicos "normais", e é por isso que foi reconhecido como tal há muito tempo, antes do advento dos buracos negros (...) Em qualquer caso, qualquer tratamento da termodinâmica "normal" deve excluir forças de longo alcance no início da discussão”.

Portanto, a razão pela qual a formulação clássica não funciona a contento parece residir na presença de efeitos não locais, despertados pelas interações de longo alcance desenvolvidas no interior do sistema em evolução.

Nesse contexto, as estatísticas generalizadas surgem com a proposta de lidar com sistemas anômalos por meio das mesmas ferramentas matemáticas usadas na Mecânica Estatística

⁷A cadeia de markov é um processo estocástico caracterizado por seu estado futuro depender apenas do seu estado atual, sendo que os estados passados não influenciam no estado futuro. O nome cadeia de markov foi dado em homenagem ao matemático russo Andrey Markov.

convencional. Isso pode ser realizado, através da forma de entropia adotada, com a introdução de logaritmos deformados (generalizados) apropriados.

4.4 Mecânica Estatística não-extensiva de Tsallis

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) e a termodinâmica usual constituem um arcabouço teórico poderoso e completo nas situações padrão, mais precisamente, sempre que a extensividade termodinâmica (aditividade) se mantenha (isto é, quando as interações microscópicas efetivas são de curto alcance ou inexistentes). Mas esses formalismos falham sempre que o sistema físico inclui forças de longo alcance ou efeitos de memória longa ou se evolui em um espaço-tempo não-euclidiano (por exemplo, um espaço (multi)fractal). Aqui, "falhar" é usado para sugerir as divergências das somas ou integrais padrão que aparecem nas expressões das quantidades termodinâmicas relevantes, tais como energia interna, função de partição, entropia, deslocamento quadrático médio, etc. Isto significa que não temos expressões bem comportadas para obtermos valores finitos para as funções de resposta que fornecem comparações com dados experimentais (calor específico, susceptibilidade, difusividade, etc...), que são sempre finitos.

Inspirado por sistemas que exibem invariância de escala, ou seja, sistemas multifractais, o físico greco-brasileiro Constantino Tsallis, em 1988 (TSALLIS, 1988) apresentou um trabalho propondo uma generalização para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (uma nova forma entrópica não logarítmica). Sua motivação inicial é o fato de que a mecânica estatística estabelecida, na época, falhava, em princípio, com alguns sistemas na natureza, como foi mencionado.

Essas dificuldades são muito conhecidas em sistemas gravitacionais (como os aglomerados estelares) e magnéticos, sistemas politrópicos auto gravitantes (PLASTINO; PLASTINO, 1993), velocidade radial estelar em aglomerados abertos (CARVALHO et al., 2007), difusão anômala de Lévy, alguns problemas de tensão superficial, entre outros (TSALLIS, 1995). De um modo geral, sistemas que, na sua descrição da evolução do espaço de fase, apresentam uma estrutura (multi)fractal ou não convencional, podem exibir séria falta de capacidade matemática dentro dos formalismos termoestatístico padrão (TSALLIS, 1995). Como um possível caminho teórico para discutir este tipo de anomalia (ou pelo menos algumas delas), um formalismo foi proposto que generaliza a termoestatística convencional, e baseia-se basicamente em dois postulados, cuja validade naturalmente deve ser confirmada ou rejeitada por suas consequências. O primeiro postulado consiste em assumir a seguinte entropia generalizada:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathcal{R}; \sum_i p_i = 1) \quad (4.8)$$

Esta entropia é não negativa, côncava (convexa) no $\{P_i\}$ para $q > 1$ ($q < 1$), reproduz a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon ($S_1 = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$) no limite em que $q \rightarrow 1$ e, entre outras propriedades (TSALLIS, 2009), satisfaz a *pseudo-aditividade*. Mais especificamente, se A e B são dois sistemas independentes (isto é, $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$), então

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{(1-q)}{k} S_q(A) S_q(B) \quad (4.9)$$

o que mostra que $(1-q)$ é uma medida da não extensividade do sistema e no limite $q \rightarrow 1$, a Equação 4.9 torna-se a Equação 4.1, recuperando assim a aditividade padrão das entropias de sistemas independentes, ou seja, para $q = 1$, $q < 1$ e $q > 1$ correspondem respectivamente aos casos extensivo, super-extensivo e sub-extensivo. É desta propriedade que a correspondente generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs(BG) é frequentemente referida como mecânica estatística não extensiva.

No formalismo não extensivo, o parâmetro q é interpretado como um parâmetro de interações de longa memória ou de longo alcance entre os componentes do sistema, e valores maiores para q enfatizam essas interações de longa memória ou de longo alcance. Além da rotação estelar, o formalismo não extensivo tem sido aplicado com sucesso para investigar uma ampla variedade de fenômenos naturais, como já foi mencionado. Esse valor do índice entrópico é uma característica do sistema. Acredita-se que o valor de q para um sistema específico deve ser determinado, a priori, da dinâmica microscópica (CARUSO; TSALLIS, 2008). Isto tem como fundo a discussão sobre a origem dinâmica da mecânica estatística, e que, mesmo no formalismo de Boltzmann-Gibbs(BG), ainda não é completamente compreendida.

4.5 Função Exponencial Generalizada no Formalismo de Tsallis

As funções exponenciais possibilitam, com sucesso, a descrição matemática de fenômenos que estão associados ao equilíbrio termodinâmico. Recorre-se às leis exponenciais para várias situações, não apenas na física, como em outras áreas de conhecimento. As funções exponenciais tem inúmeras aplicações, como por exemplo, decaimento radioativo, distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann, desenvolvimento de micro-organismos, crescimento populacional entre outras. Estas funções descrevem o comportamento evolutivo de sistemas que possuem caráter extensivo. O decaimento radioativo é talvez a aplicação mais comum deste tipo de relação, a desintegração de um núcleo não afeta o comportamento de outro e o comportamento do conjunto reflete o desconhecimento de cada núcleo em particular em relação ao processo com os outros (PEDRON, 1999), ou seja, estes sistemas não possuem memória, os estados passados do sistema não influenciam seus estados futuros, dado seu estado atual. Sistemas com esta natureza são chamados de *markovianos*. Outro tipo de distribuição que depende

exclusivamente de um decaimento exponencial, é a de Maxwell-Boltzmann . Podemos resumir dizendo que a distribuição de Maxwell-Boltzmann está associada às equações diferenciais cuja solução é uma exponencial, assim como, a lei de decaimento radioativo. A partir da entropia de Boltzmann-Gibbs podemos obter a equação de decaimento exponencial que descreve o comportamento de fenômenos que possuem comportamento extensivo. Por outro lado, sistemas que apresentam forças de longo alcance, efeito de memória de longa duração e fenômenos que apresentem estrutura fractal são descritos por leis de potência. Para de Freitas e de Medeiros (FREITAS; MEDEIROS, 2012) a distribuição de velocidade rotacional estelar obedece a uma função exponencial generalizada de Tsallis. Desta forma, a distribuição generalizada de Tsallis tem a vantagem de se ajustar muito bem a uma grande família de distribuições por meio do ajuste do índice entrópico q .

Do ponto de vista matemático, uma generalização da função exponencial, denominada de q -exponencial (TSALLIS, 2009),

$$e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} \quad (4.10)$$

desempenha um papel importante na q -estatística, pois está diretamente relacionada com a generalização da distribuição de probabilidade canônica. A função e_q^x possui os seguintes limites no parâmetro q :

- para $q = 1$ temos que, $e_{q=1}^x = e^x$;
- para $q < 1$, temos que $e_q^x = 0$ se $x \leq -1/(1-q)$, e cresce monotonicamente de *zero* para $+\infty$ quando x varia entre $-1/(1-q)$ e $+\infty$;
- para $q > 1$, $e_q^x \rightarrow -\infty$ se $x = 1/(q-1)$, e é definida para $x < 1/(q-1)$ e cresce monotonicamente entre *zero* e $+\infty$ quando x varia entre $-\infty$ e $1/(q-1)$;
- para $x \rightarrow 0$, temos que $e_q^x \approx 1 + x$.

A equação 4.10 também satisfaz a seguinte identidade:

$$\ln_q(e_q^x) = e_q^{(\ln_q x)} = x, \quad \forall (q, x). \quad (4.11)$$

a função inversa da q -exponencial é o chamado q -logaritmo, definido da seguinte forma:

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \text{para } \forall x \in \mathcal{R}^+ \quad (4.12)$$

Para $q = 1$ a função 4.12 se reduz a função logarítmica usual $\ln_1 x = \ln x$. Além disso, satisfaz à regra de *pseudo-aditividade*:

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q)(\ln_q x_A)(\ln_q x_B) \quad (4.13)$$

No caso em que as probabilidades são iguais ($P_i = 1/\Omega, \forall i$), a expressão 4.8 toma a forma

$$S_q = k_B \ln_q \Omega \quad (4.14)$$

onde a equação acima é a generalização da equação 4.1.

A função de distribuição Gaussiana pode ser também generalizada dentro do contexto da estatística não extensiva de Tsallis, chamando-a então de função de distribuição q -Gaussiana. Ela é definida como

$$\Phi_q(x) = A_q e_q^{-x^2/\sigma_q^2} = A_q \left[1 - (1 - q) \frac{x^2}{\sigma_q^2} \right]^{1/(1-q)} \quad (4.15)$$

onde σ_q é a largura característica e q é um parâmetro livre que indica o índice entrópico. O parâmetro q está relacionado ao tamanho da cauda na distribuição (FREITAS; MEDEIROS, 2012). As q -Gaussianas têm as seguintes propriedades:

- para $q = 1$ se recupera a Gaussiana usual $\phi(x) = A e^{-x^2/\sigma^2}$;
- para $q > 1$, emerge uma cauda que segue uma lei de potência;
- para $q < 1$, o suporte é finito e aparece um corte (*cut-off*) toda vez que o argumento da q -exponencial torna-se negativo.

Note-se que a normalização está definida só para $-1 < q < 3$. É importante notar que a curva da distribuição q -Gaussiana ganha um novo parâmetro de ajuste, o índice q . Mudanças nesse parâmetro são capazes de promover mudanças no formato da Gaussiana tradicional, adequando-se as condições particulares do problema no qual será aplicado (Ver figura 5). Quando $q \rightarrow -\infty$, a função q -Gaussiana unidimensional tende a função Delta de Dirac. Além disso, o formato da função q -Gaussiana tende a uma linha reta ($P(x) = 0$) quando q aproxima-se do valor 3.

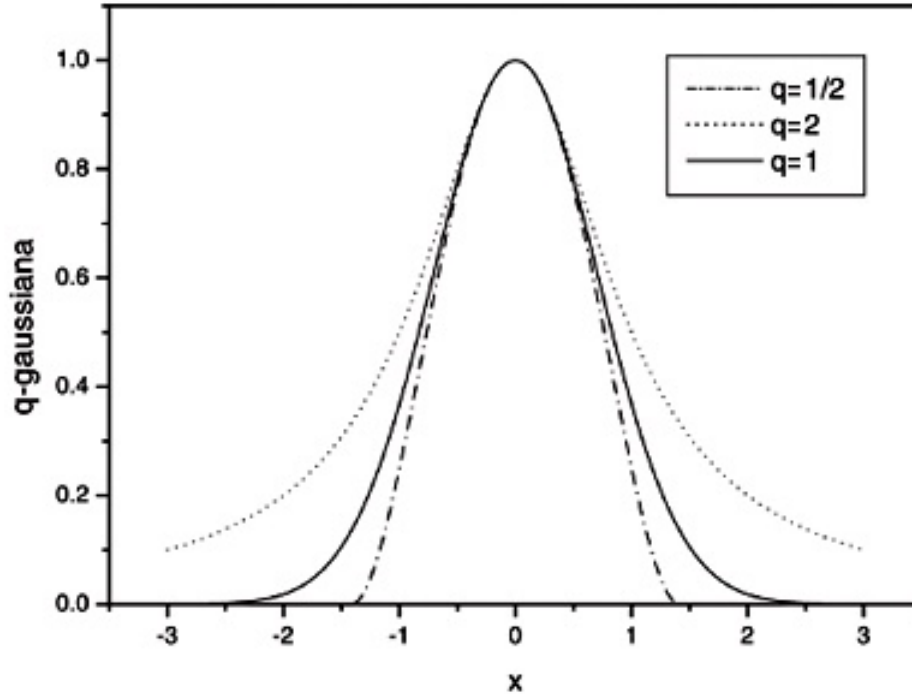
Além disso, Jackson (JACKSON, 1910) introduziu o seguinte operador diferencial generalizado (aplicado a uma função arbitrária $f(x)$).

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \quad (4.16)$$

que satisfaz $D_1 \equiv \lim_{q \rightarrow \infty} D_q = d/dx$.

Recentemente, Abe (ABE, 1997) mostrou que

Figura 5: A função Gaussiana generalizada para valores típicos de q . Com $q = 1$ temos a Gaussiana usual, para $q > 1$ tem-se cauda longa e largura grande, em comparação com a Gaussiana padrão, e $q < 1$ observa-se cauda curta e largura pequena.



Fonte: Autor.

$$-k \left[D_q \sum_i P_i^\alpha \right]_{\alpha=1} \equiv k \frac{1 - \sum_i P_i^q}{q-1} \equiv S_q \quad (4.17)$$

que auxilia na compreensão da natureza de S_q . O operador diferencial generalizado de Jackson 4.16 testa a função $f(x)$ sob *dilatação*, ao passo que o operador diferencial ordinário o faz sob *translação*.

No ensemble canônico de Tsallis, a energia pode flutuar em torno do valor esperado generalizado $\langle E \rangle_q$, definido por

$$U_q = \langle E \rangle_q = \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q E_i \quad (4.18)$$

Esta definição origina uma distribuição de probabilidades dada por

$$p_i^q = \frac{1}{Z_q} \left[1 - (1-q) \frac{E_i}{k_B T} \right]^{1/(1-q)} \equiv \frac{1}{Z_q} e_q^{-E_i/k_B T} \quad (4.19)$$

onde Z_q é a função de partição generalizada que garante a normalização das probabilidades definida da seguinte forma:

$$Z_q = \int \rho(\varepsilon) [1 - \beta(1 - q)\varepsilon]^{1/1-q} d\varepsilon \quad (4.20)$$

Aqui surge uma diferença fundamental no formalismo de Boltzmann-Gibbs, a distribuição de probabilidades é dada por uma lei exponencial, enquanto na mecânica estatística generalizada, a distribuição obedece a uma lei de potência (equação 4.19)). Se $q > 1$, a distribuição 4.19 tem um decaimento mais lento do que a função exponencial (de um argumento negativo, como é o caso da lei exponencial de BG). Isso faz com que os estados de energia mais elevados sejam visitados mais frequentemente na estatística de Tsallis do que na estatística de BG. Se $q < 1$, a situação se inverte e a equação 4.19 tem decaimento muito mais acentuado do que uma exponencial, ao ponto de apresentar valores negativos (ou imaginários) para a probabilidade, quando

$$\frac{E_i}{k_B T} > \frac{1}{1 - q} \quad (4.21)$$

o que é fisicamente inaceitável. Alguns valores particulares de $q < 1$ apresentam probabilidades crescentes com a energia, quando ocorre 4.21, o que também é fisicamente inaceitável.

Para corrigir este problema, Plastino (PLASTINO; PLASTINO, 1994) introduziram um corte (*cut-off*) na distribuição de probabilidades, que impõe que $p_i = 0$ quando ocorre a condição 4.21. Este corte é denominado corte de Tsallis. Neste caso ($q < 1$), a distribuição de probabilidades é de suporte compacto, essencialmente diferente da distribuição de Boltzmann-Gibbs. A Figura 6 ilustra as diferenças entre as distribuições.

Em particular, um dos pontos mais fortes a favor da mecânica estatística não extensiva é sem dúvida o fato de ter uma lei de potência (assintótica) como função densidade de probabilidade (MOYANO, 2006).

O segundo postulado consiste em assumir a seguinte energia interna generalizada:

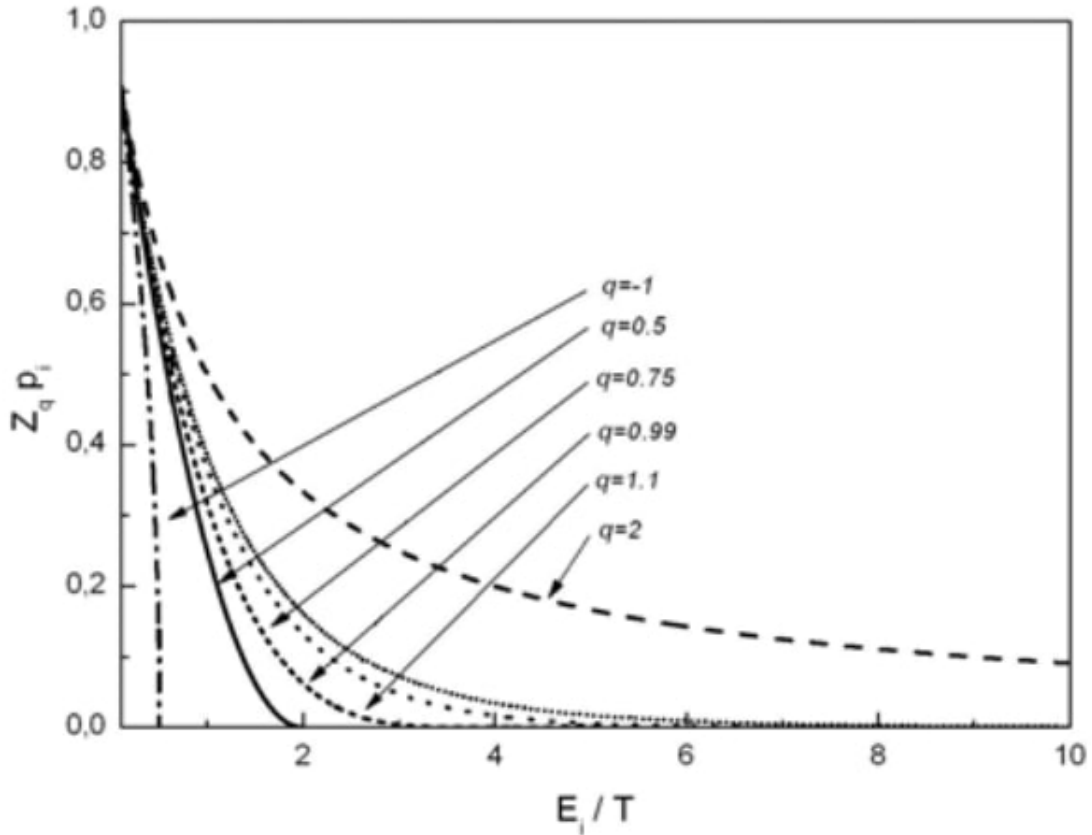
$$U_q = \sum_i p_i^q \varepsilon_i \quad (4.22)$$

que, em geral, pode ser escrito com

$$U_q \equiv Tr \hat{\rho}^q \hat{H} \equiv \langle \hat{H} \rangle_q \quad (4.23)$$

onde $\{\varepsilon_i\}$ é o espectro de energia (isto é, o conjunto de autovalores do Hamiltoniano). Este postulado merece um comentário. Apesar de seu aspecto desconhecido, de modo algum viola a teoria das probabilidades. No sentido de que é uma média de um operador que depende de $\hat{\rho}$, é muito semelhante à entropia padrão

Figura 6: Distribuição de probabilidades para diferentes valores de q . Decaimento lento ($q = 2$), exponencial ($q = 0,99$), e “cut-off” ($q = -1, q = 0,5, q = 0,75, q = 1,1$).



Fonte: Tese (BORGES, 2004).

$$S_1 = -k_b Tr \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = -k_b \langle \ln \hat{\rho} \rangle \quad (4.24)$$

Em particular, se escolhermos $\hat{O} = \hat{1}$, temos $\langle \hat{1} \rangle_q = Tr \hat{\rho}^q = \sum_i p_i^q$. Esta quantidade já foi considerada em vários contextos (HARDY; LITTLEWOOD; POLYA, 1952), e é genericamente igual à unidade, se e somente se, $q = 1$ ($\forall \hat{\rho}$) ou $\hat{\rho}$ é um número puro ($\forall q$) (TSALLIS, 1997).

A otimização de S_q com as restrições $Tr \hat{\rho} = 1$ e $Tr \hat{\rho}^q \hat{H} = U_q < \infty$ produz diretamente (PLASTINO; PLASTINO, 1994) a distribuição de equilíbrio do conjunto canônico

$$\hat{\rho} = \frac{\left[1 - (1 - q) \beta \hat{H} \right]^{1/(1-q)}}{Z_q} \quad (4.25)$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$ é o parâmetro de Lagrange associado à temperatura e a função de partição generalizada, que é dada por

$$Z_q = Tr \left[\hat{1} - (1 - q) \beta \hat{H} \right]^{1/(1-q)} \quad (4.26)$$

No limite em que $q \rightarrow 1$, recuperamos a distribuição Boltzmann-Gibbs $\hat{\rho} \propto e^{-\beta\hat{H}}$. Pode-se mostrar (PLASTINO; PLASTINO, 1994) que, para todos os q ,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \quad (4.27)$$

$$U_q = -\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \quad (4.28)$$

$$F_q \equiv U_q - TS_q = -\frac{1}{\beta} \frac{Z_q^{1-q} - 1}{1-q} \quad (4.29)$$

com

$$C_q \equiv T \frac{dS_q}{dT} = \frac{dU_q}{dT} = -T \frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2} \quad (4.30)$$

Toda a estrutura das transformadas de Legendre da termodinâmica é preservada apesar de o sistema ser não extensivo (TSALLIS, 2009). Além disso, a estabilidade termodinâmica pode ser comprovada para todos os q (RAMSHAW, 1995), com base no fato de que sempre $C_q/q \geq 0$. Além disso, pode-se mostrar (PLASTINO; PLASTINO, 1993) que o teorema de Ehrenfest é q -invariante, mais precisamente

$$\frac{\partial \langle \hat{O} \rangle_q}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle_q \quad (4.31)$$

consequentemente, $[\hat{H}, \hat{O}] = 0$ implica que $\langle \hat{O} \rangle_q$ (e genericamente não é $\langle \hat{O} \rangle_1$) é uma constante de movimento.

Outro ponto importante que merece esclarecimento é o significado físico do índice q , da forma como o compreendemos. Este índice destina-se a caracterizar as classes de universalidade com as mudanças apropriadas de quantidades termoestatística com o número N de elementos do sistema. Se o sistema for convencional, no sentido que descrevemos no início, então $q = 1$. Se esse não for o caso, então, o q pode diferir da unidade e, embora a resposta geral seja ainda desconhecida, espera-se que seja determinada exclusivamente pela dinâmica microscópica do sistema.

5 DADOS OBSERVACIONAIS

5.1 A Missão Kepler

A missão Kepler (BORUCKI et al., 2010) foi projetada para procurar exoplanetas semelhantes à Terra. Criada pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) já monitorou 196.468 estrelas, em uma região da Via Láctea denotada por Constelação de Cygnus e Lyra, desde seu lançamento em março de 2009. A missão já obteve sucesso ao detectar 2343 exoplanetas até abril de 2018 (<https://archive.stsci.edu/kepler/>) e milhares de candidatos a planeta que aguardam confirmação do acompanhamento em terra. O telescópio espacial do Kepler possui uma abertura efetiva de $0,95m$, um espelho primário com $1,4m$ de diâmetro e um campo de visão de 105° (HARTIG et al., 2014). Foi posicionado em uma órbita heliocêntrica com um período de 372,5 dias, esse tipo de órbita possui a vantagem de não ter seu campo de visão encoberto pela Terra, evitando assim dados não igualmente espaçados na fotometria, além de mantê-lo longe da poluição luminosa dos grandes centros urbanos. O observatório Kepler possui dois modos de observação, o modo de cadência curta (SC) gravando uma imagem a cada 0,98 minutos ou o modo de cadência longa (LC) gravando uma observação a cada 29,4 minutos. Os dados foram baixados em blocos trimestrais (quarters) divididos em seções mensais. Depois de cada um dos blocos trimestrais, o satélite foi girado para que o próximo trimestre fosse observado com uma parte diferente da matriz charge-coupled devices (CCD).

Figura 7: Imagem artística da missão Kepler operando como a missão K2.



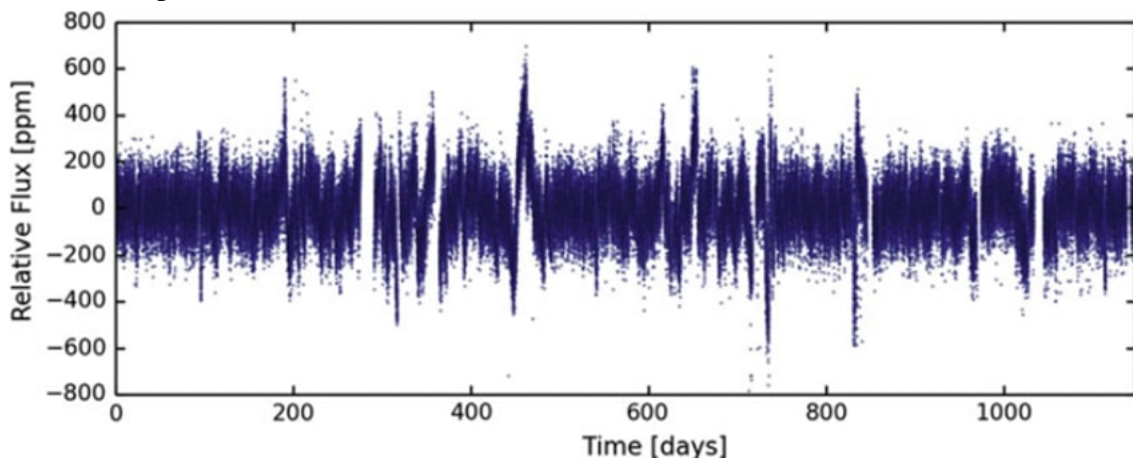
Fonte: NASA Ames/W. Stenzel.

As estrelas observadas pelo Kepler são rotuladas com KIC (Kepler Input Catalog), seguidos por uma sequência numérica de nove dígitos. Em princípio, este número se refere exclusivamente a uma única estrela, no entanto, em alguns casos, sistemas binários próximos ou

estrelas de fundo também podem ser capturados na abertura fotométrica (APPOURCHAUX et al., 2015).

O principal produto de dados da missão consiste em séries temporais de fotometria de abertura simples, onde as aberturas dentro das máscaras de pixel são computadas automaticamente para otimizar as chances de detectar os trânsitos de exoplanetas. Um exemplo de curva de luz do KIC006106415 é mostrado na Fig. 8. Os dados do Kepler estão disponíveis publicamente em dois formatos: a fotometria de abertura simples não corrigida e a fotometria PDC_MAP/msMAP corrigida automaticamente (STUMPE et al., 2012). No presente trabalho usamos a fotometria corrigida, já que muitos efeitos sistemáticos bem conhecidos são removidos.

Figura 8: Curva de luz de cadência curta de KIC006116048 durante a duração da missão nominal do Kepler.



Fonte: Livro Differential Rotation in Sun like Stars from Surface Variability and Asteroseismology de Martin Bo Nielsen

O Kepler ultrapassou sua duração nominal da missão de três anos e continuou operando por mais um ano como uma missão estendida. Entre as missões nominais e estendidas, Kepler descobriu milhares de planetas em trânsito e revelou que pequenos planetas são abundantes na Galáxia. O objetivo final da missão Kepler é medir a fração de estrelas com planetas do tamanho da Terra ($R < 2.5R_{Terra}$), bem como a fração de estrelas que abrigam planetas do tamanho da Terra na Zona Habitável, trabalho que ainda está em andamento pelo Escritório de Ciência do Kepler (MATHUR et al., 2014). A comunidade também é incentivada a explorar o arquivo de dados exclusivo da missão (<http://kepler.nasa.gov/>).

Devido a um defeito no sistema giroscópio da espaçonave Kepler, em maio de 2013, que pôs fim à missão científica de mais de quatro anos, a NASA estendeu a missão original Kepler criando sua segunda fase, chamada de K2, que permite observações científicas contínuas com o telescópio espacial Kepler. O K2 tornou-se totalmente operacional em junho de 2014 e deverá continuar operando até 2018 ou 2019.

A missão K2 envolve uma série de "campanhas" de observação sequenciais de campos

distribuídos ao redor do plano eclíptico e oferece uma precisão fotométrica que se aproxima da missão original do Kepler. A operação no plano da eclíptica minimiza o torque exercido na espaçonave pela pressão do vento solar, reduzindo o desvio de direção até o ponto em que a atitude da espaçonave pode ser efetivamente controlada por meio de uma combinação de propulsores e as duas rodas de reação restantes. Cada campanha é, portanto, limitada por restrições de ângulo solar a uma duração de aproximadamente 80 dias.

Todos esses dados podem ser encontrados no site oficial da NASA dedicado ao projeto Kepler (<http://kepler.nasa.gov/>). A Figura 7 apresenta uma ilustração artística do telescópio Kepler operando como a missão K2, que passará três anos observando uma faixa do céu (linha azul) enquanto orbita o sol. Aproximadamente a cada 80 dias, a espaçonave entrará em um novo campo de visão (selo azul) alinhado com o plano do sistema solar.

5.2 Descrição da Amostra Seleccionada

Nesta seção descrevemos os dados solar e uma amostra de 34 estrelas anãs do tipo espectral M observadas pelo Kepler e previamente analisadas por Mathur (MATHUR et al., 2014), que são utilizados neste trabalho. Essas estrelas anãs M são uma subamostra das estrelas apresentadas em (MCQUILLAN; AIGRAIN; MAZEH, 2013), são estrelas convectivas de baixa massa ($0,3$ a $0,55M_{\odot}$), com uma temperatura efetiva T_{eff} menor que $4000K$ e uma gravidade superficial $\log g \geq 4$ e apresentam altos níveis de atividade magnética.

Neste trabalho usamos dados coletados por duas missões espaciais. A primeira missão é de aproximadamente 3,5 anos (quarters 1 – 15) de observações contínuas da missão Kepler da NASA que nos permitiu medir a variabilidade a longo prazo de uma amostra de estrelas na constelação de Cygnus e Lyra. A maioria dessas estrelas com uma cadência de 29,42 minutos, como pode ser visto em (GILLILAND et al., 2010). Devido à configuração orbital, e para manter o painel solar devidamente orientado para o Sol, Kepler experimenta um lado a cada 90 dias (um quarto de ano). Os dados foram, conseqüentemente, subdivididos em quarters (com janela temporal de 90 dias) e as estrelas observadas foram colocadas em um charge-coupled devices (CCD) diferente no plano focal. Para fazer download desses dados, Kepler apontou para a Terra uma vez por mês, o que introduz lacunas na série temporal registrada, bem como algumas variações térmicas e outras instabilidades instrumentais (JENKINS et al., 2010). Neste trabalho, usamos as curvas de luz de fotometria de abertura simples (SAP) da NASA que foram corrigidas de saltos e desvios seguindo os métodos descritos em García (GARCÍA et al., 2011). Com base no Catálogo de Entradas de Kepler (BROWN et al., 2011), as anãs M selecionados para este trabalho possuem magnitudes entre 13 e 16, T_{eff} entre 3600 e 4000K e $\log g$ entre 4 e 4,6 dex.

A segunda missão, usamos 16 anos de observações fotométricas contínuas do Sol registradas por VIRGO (Variability of solar Irradiance and Gravity Oscillations) (FRÖHLICH

C., 1995) a bordo do SoHO (Solar and Heliospheric Observatory) da ESA-NASA (DOMINGO V.; POLAND, 1995). VIRGO é composto por vários instrumentos, em particular, a soma dos canais verde e vermelho do SPM (Sun PhotoMeters) é uma boa aproximação fotométrica da largura de banda do Kepler (BASRI et al., 2011). Pode ser usado para estudar as propriedades da atividade magnética do Sol e como referência para outras estrelas observadas pelo Kepler. Os dados VIRGO / SPM padrão são filtros de alta passagem com uma frequência de corte de alguns dias. Para monitorar a variabilidade solar nas frequências da rotação, utilizamos dados VIRGO/SPM brutos processados com os procedimentos descritos em (GARCÍA et al., 2005) de forma semelhante ao que fazemos com o Kepler.

As estrelas anãs do tipo espectral M são conhecidos por serem estrelas muito ativas, apresentando um grande número de flares. Assim, eles fornecem uma referência muito boa para testar os índices magnéticos. Nossa amostra é composta por 34 estrelas anãs do tipo espectral M , obtidas do catálogo Kepler, e o sol em sua fase ativa como descrevem Mathur e colaboradores (MATHUR et al., 2014). Estas estrelas são magneticamente ativas e estão disponíveis aproximadamente 1300 dias ($Q1 - Q15$) de observações contínuas. Elas foram escolhidas para ter um período de rotação inferior a 15 dias, medido por (MCQUILLAN; AIGRAIN; MAZEH, 2013). Eles obtiveram os períodos de rotação aplicando a função de autocorrelação em 10 meses de dados. Como essas estrelas são bastante fracas, existe a possibilidade de que as curvas de luz possam ser poluídas por uma companheira próxima. Os valores do “*Crowding*” estão listados na Tabela 2 e estão acima de 0,8 para a maioria das estrelas, exceto três. A inspeção dos dados sugere que essas três estrelas estão provavelmente poluídas por uma estrela próxima.

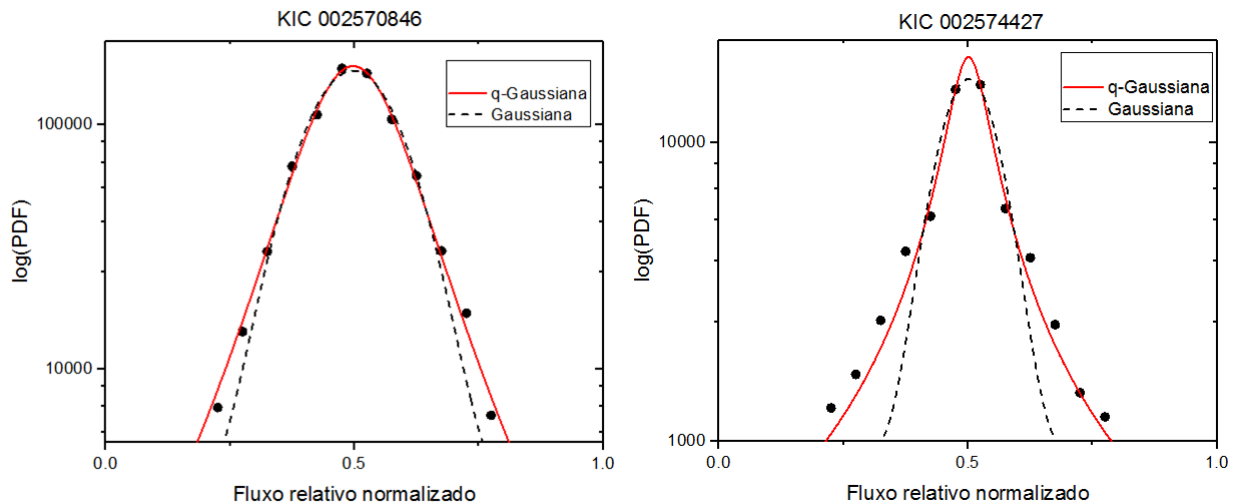
Tabela 2 – Parâmetros estelares.

Ref.	KIC	Massa (M_{\odot})	$\log g$ (cm/s)	$T_{eff}(K)$	P_{rot} (dias)	Crowding
1	2157356	0,4085	4,87	3650	12,9	0,85
2	2302851	0,5365	4,47	3984	12,2	0,96
3	2570846	0,4577	4,75	3781	10,9	0,88
4	2574427	0,5024	4,72	3897	13,4	0,79
5	2692704	0,3990	4,10	3624	14,8	0,85
6	2832398	0,4650	4,79	3800	15,0	0,82
7	2834612	0,4331	4,81	3716	13,3	0,89
8	2835393	0,4403	4,84	3735	15,0	0,85
9	3102763	0,3621	4,88	3522	14,4	0,89
10	3232393	0,5196	4,72	3941	14,5	0,90
11	3634308	0,4388	4,87	3731	12,9	0,88
12	3935499	0,4792	4,72	3837	05,2	0,94
13	4833367	0,4761	4,82	3829	14,2	0,90
14	5041192	0,3869	4,93	3591	10,8	0,90
15	5096204	0,5337	4,72	3977	14,8	0,92
16	5210507	0,4715	4,79	3817	08,8	0,87
17	5611092	0,5012	4,73	3894	14,4	0,94
18	5900600	0,4873	4,74	3858	14,0	0,92
19	5950024	0,4993	4,72	3889	14,1	0,96
20	5954552	0,4977	4,72	3885	14,9	0,95
21	5956957	0,4927	4,73	3872	14,9	0,94
22	6307686	0,5385	4,40	3989	13,3	0,94
23	6464396	0,4811	4,75	3842	13,2	0,90
24	6545415	0,4799	4,49	3839	05,5	0,57
25	6600771	0,4520	4,76	3766	13,1	0,92
26	7091787	0,4792	4,73	3837	14,1	0,92
27	7106306	0,5255	4,72	3956	14,2	0,95
28	7174385	0,4562	4,78	3777	14,5	0,94
39	7190459	0,3898	4,83	3599	06,8	0,95
30	7282705	0,4437	4,81	3744	14,5	0,83
31	7285617	0,5420	4,55	3998	13,7	0,69
32	7534455	0,4642	4,75	3798	12,1	0,94
33	7620399	0,5169	4,72	3934	13,7	0,92
34	7673428	0,3808	4,87	3574	15,0	0,91
35	Sol	1,0000	4,44	5778	27,0	1,00

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em primeiro lugar, nós determinamos o índice entrópico q , em diferentes escalas, para a distribuição fotométrica das estrelas de nossa amostra, descritas na tabela 2. Para isso, utilizamos a função de distribuição generalizada, dentro do contexto da mecânica estatística de Tsallis (q -Gaussiana), do fluxo fotométrico e determinamos, através da regressão não linear baseado no algoritmo de Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944) (MARQUARDT, 1963), o melhor valor do parâmetro q que se ajusta a essa distribuição. Para ilustrar, apresentamos na figura 9 um exemplo do ajuste obtido para a distribuição fotométrica, uma vez que consideramos a Gaussiana usual e a q -Gaussiana. Como podemos ver, a q -gaussiana é a distribuição mais adequada às funções obtidas, independentemente da região das distribuições, em contraste com a gaussiana padrão que se ajusta muito bem apenas às regiões centrais das distribuições observadas. Tal comportamento é o mesmo, independentemente do fator de escala aqui considerado.

Figura 9: *Esquerda*: Mostra um comparativo entre o gráfico semi-log da distribuição observada (pontos), da q -Gaussiana (em vermelho) onde foi feito o ajuste do parâmetro q e da Gaussiana padrão (em preto) para a estrela KIC 002570846 com um fator de escala $n = 5$. *Direita*: Mostra um comparativo entre o gráfico semi-log da distribuição observada (pontos), da q -Gaussiana (em vermelho) onde foi feito o ajuste do parâmetro q e da Gaussiana padrão (em preto) para a estrela KIC 002574427 com um fator de escala $n = 9$. Fica evidente que a q -Gaussiana se ajusta bem melhor a distribuição.



Fonte: Autor.

6.1 Determinação do Índice q em Função da Escala

Para pontos das séries temporais fotométricas de abertura simples $x(t)$, as flutuações de incrementos devido à sua variabilidade sobre a escala de tempo τ são dadas como $dx_n(t) =$

$x(t + \tau) - x(t)$, onde τ é um parâmetro definido como 2^n que determina a escala das flutuações representadas por $dx_n(t)$ e $n = 0, 1, 2, \dots$. Este método tem sido usado para descrever as flutuações do campo magnético devido ao vento solar em larga escala como descrito por (BURLAGA et al., 2006).

Os valores de q são derivados da Função de Distribuição de Probabilidades generalizada (PDF), definidas como

$$PDF [dx_n(t)] = A_q [1 + (q - 1)\beta_q(dx_n)^2]^{1/(1-q)} \quad (6.1)$$

onde os coeficientes A_q , β_q (que denotam as constantes de normalização) e q (índice entrópico) estão em função da escala τ . Este índice entrópico q está relacionado com o tamanho da cauda nas distribuições, como foi indicado na figura 5. Embora os valores centrais da distribuição possuam maior probabilidade de ocorrência, são as caudas das distribuições que fornecem informações relativas aos valores extremos. Assim, em qualquer modelagem de distribuição é fundamental a análise das caudas das distribuições, pois permite estimar parâmetros relevantes para o fenômeno estudado. Nosso estudo usa o método Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944) (MARQUARDT, 1963) para calcular os PDFs com distribuição simétrica de Tsallis da Equação 6.1.

Podemos observar os valores obtidos para o parâmetro q de todas as estrelas de nossa amostra em função de diferentes escalas na tabela 3 abaixo. Nossos resultados sugerem fortemente que a distribuição fotométrica para a presente amostra de estrelas está longe de estar de acordo com uma Gaussiana padrão, uma vez que os valores deste parâmetro são significativamente diferentes de 1, independente do fator de escala utilizado, reforçando que a função de Tsallis se ajusta à distribuição fotométrica estelar observada melhor do que a Gaussiana habitual faz. Outro ponto importante é o fato do índice q variar em função da escala para cada estrela, isso pode ser interpretado devido as variabilidades fotométricas provocadas por efeitos característicos na curva de luz que mudam em diferentes escalas de tempo e que são associadas a flutuações intermitentes que variam de alguns segundos a várias horas, dias ou semanas, tais como: oscilações, ruídos, fáculas, flares, granulação entre outros. A figura 10 abaixo mostra um gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 0$ (em azul) e $n = 10$ (em laranja), para a estrela 1 (*KIC002157356*) de nossa amostra. Fica evidente a modulação causada na curva de luz para fatores de escala próximo ao período de rotação da estrela. As figuras 11 e 12 mostram esse mesmo comparativo para a estrela 2 (*KIC002302851*) de nossa amostra com fatores de escalas $n = 0$, $n = 4$, $n = 8$ e $n = 10$.

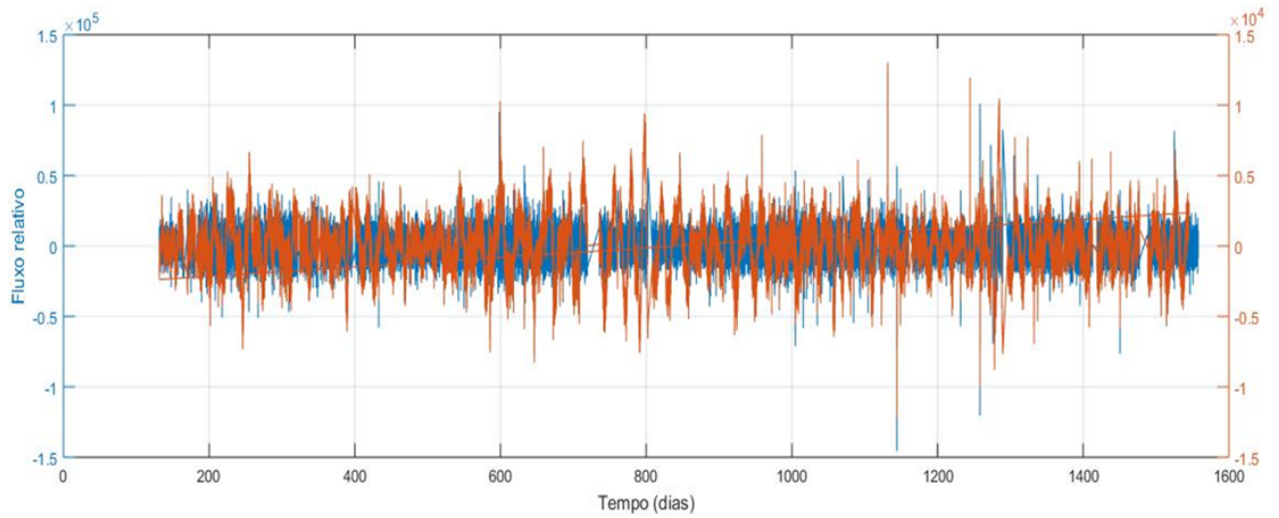
Além disso, determinamos como o índice entrópico q varia em função da escala, ou seja, calculamos seu valor médio ($\langle q \rangle$) em relação aos fatores de escala utilizados, o valor

Tabela 3 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.

$ref./q$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = P_{rot}$	$n = 5P_{rot}$
1	1,57	2,15	2,10	1,35	1,49	2,13	2,27	1,81	1,39	1,83	1,76	1,29
2	1,99	1,71	2,31	2,22	2,06	2,05	1,90	2,41	1,34	1,77	1,75	2,24
3	2,05	2,15	1,52	1,27	1,13	1,06	1,51	1,58	1,30	1,55	1,64	1,43
4	1,94	1,37	1,86	2,25	1,54	1,38	1,86	2,21	1,99	2,31	1,94	2,07
5	1,47	1,72	2,03	2,24	2,36	2,57	2,22	1,45	0,39	2,02	1,78	1,38
6	2,10	2,06	1,34	1,24	1,85	2,20	1,54	1,13	1,67	2,41	1,80	2,47
7	2,24	1,44	1,39	1,81	2,35	2,41	1,93	1,91	2,33	2,30	1,93	1,65
8	1,45	1,39	2,02	2,14	1,67	1,33	1,66	2,36	1,20	1,27	1,99	1,89
9	2,24	1,69	1,32	1,81	2,24	1,81	1,45	1,16	1,23	1,27	1,79	2,08
10	1,34	1,82	2,13	1,33	1,39	1,49	2,30	1,98	1,49	1,48	1,52	1,30
11	1,39	1,89	2,30	1,60	1,30	1,31	1,04	2,20	1,10	1,99	2,05	0,76
12	1,68	1,41	2,19	1,45	2,18	1,69	1,33	1,31	1,41	1,55	1,45	1,50
13	1,30	1,36	1,99	2,28	1,52	1,26	1,17	2,06	1,94	2,27	1,45	1,74
14	1,29	2,24	1,27	1,70	2,36	2,07	2,11	2,31	1,60	1,78	1,82	1,14
15	2,04	1,66	1,27	2,15	2,28	2,31	2,02	1,84	0,87	1,94	1,37	1,22
16	2,04	1,66	1,27	2,15	2,28	2,31	2,02	1,85	0,87	1,94	1,31	1,29
17	1,29	1,73	2,31	2,05	1,44	1,36	1,93	1,63	1,65	2,26	2,20	2,35
18	1,59	1,34	1,77	2,32	2,25	1,82	1,66	1,75	1,40	2,26	1,71	1,29
19	2,07	1,28	1,49	1,72	2,43	2,44	2,15	1,22	1,14	2,13	2,27	2,07
20	2,10	2,15	1,58	1,13	0,99	0,81	0,99	2,57	2,29	2,13	1,89	1,74
21	1,34	1,95	2,18	1,73	1,26	1,27	1,63	1,00	1,08	1,26	1,36	1,14
22	1,37	2,30	2,03	1,35	1,22	1,16	1,20	1,19	2,56	2,17	2,20	2,05
23	2,16	2,07	1,26	1,51	2,12	2,34	1,93	2,01	1,63	1,93	1,99	1,90
24	1,90	2,14	1,88	1,74	1,71	1,82	1,81	1,95	2,08	2,04	1,87	1,69
25	1,53	2,19	2,20	1,74	1,58	1,81	2,18	2,36	0,75	1,64	2,00	2,26
26	2,29	1,40	1,83	2,24	1,79	1,29	1,26	1,38	1,37	2,15	1,94	1,53
27	1,88	1,28	1,57	2,35	2,41	2,41	2,38	2,00	1,12	1,53	2,06	1,15
28	1,72	2,23	1,47	1,75	2,36	1,89	1,15	0,96	1,26	2,39	2,93	2,12
29	2,29	1,39	1,49	1,41	1,92	2,09	1,29	1,34	1,41	1,74	2,09	1,69
30	1,53	1,44	2,11	2,11	1,40	1,45	1,60	2,41	1,97	2,41	1,59	2,02
31	1,36	1,75	2,30	2,02	1,60	1,86	2,32	1,14	1,63	1,64	1,39	1,48
32	1,34	1,61	2,27	1,97	1,65	1,41	1,51	2,28	1,21	1,55	2,02	1,61
33	2,12	1,81	1,74	2,28	1,53	1,22	1,64	1,41	1,30	1,31	2,20	1,30
34	2,29	1,89	1,25	1,58	2,23	2,41	1,98	2,25	2,49	2,31	2,05	2,63
Sol	2,85	0,60	2,82	1,53	1,78	1,89	1,85	2,00	1,69	1,73	1,63	1,25

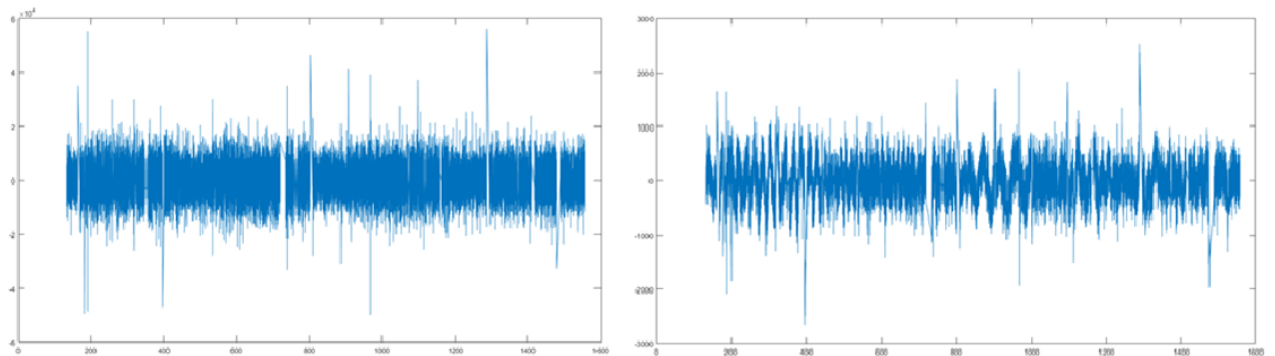
máximo (q_{max}), o valor mínimo (q_{min}) e a variação entre o valor máximo e mínimo (Δq) de nossa amostra. A tabela 4 mostra esses valores, além do período de rotação para cada estrela de nossa amostra, como podemos ver abaixo. Na figura 13 vemos um exemplo de como o índice q varia em função da escala, podemos notar que o parâmetro q oscila dentro de uma certa faixa de valores Δq que depende da atividade de cada estrela. Espera-se que para estrelas que estejam em sua fase mais ativa q varie menos em função da escala, pois estrelas com rotação mais rápida

Figura 10: Mostra um gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 0$ (em azul) e $n = 10$ (em laranja), para a estrela 1 (*KIC002157356*) de nossa amostra.



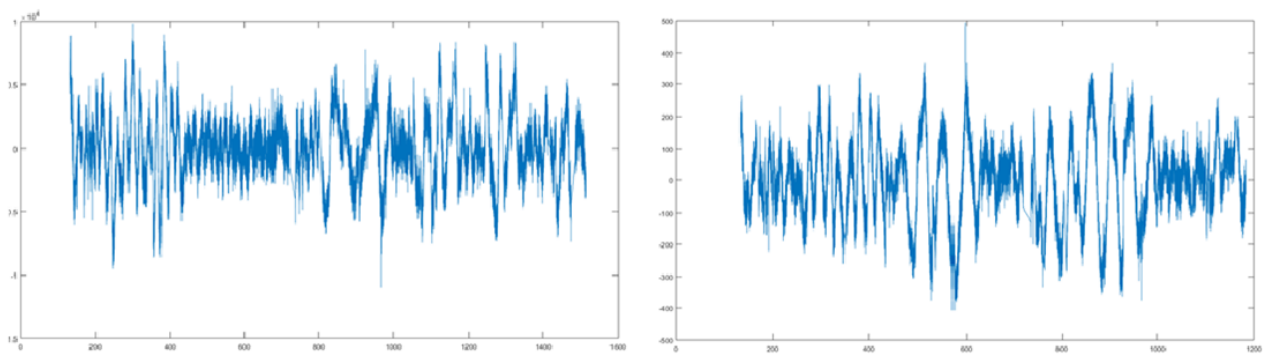
Fonte: Autor.

Figura 11: Mostra um gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 0$ (esquerda) e $n = 4$ (direita), para a estrela 2 (*KIC002302851*) de nossa amostra.



Fonte: Autor.

Figura 12: Mostra um gráfico comparativo entre as flutuações de incrementos $dx_n(t)$ do fluxo fotométrico, com um fator de escala $n = 8$ (esquerda) e $n = 10$ (direita), para a estrela 2 (*KIC002302851*) de nossa amostra.



Fonte: Autor.

mostram os ciclos de atividade mais curtos e, portanto menor variação. A figura 14 mostra como Δq se relaciona com P_{rot} de nossa amostra, podemos observar que essa relação é não-linear.

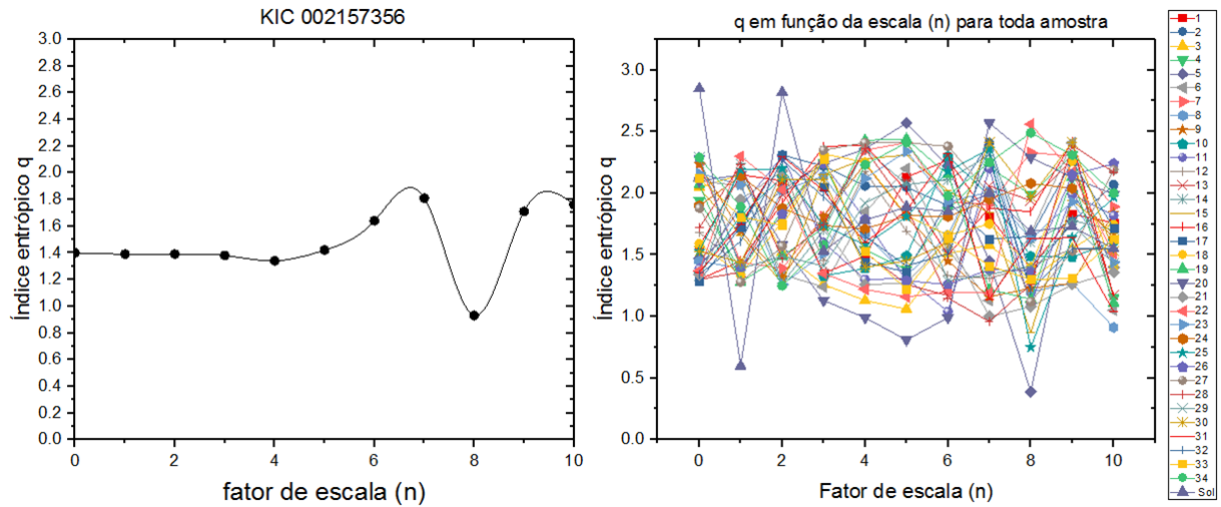
Tabela 4 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.

ref.	$\langle q \rangle$	q_{max}	q_{min}	Δq	$P_{rot}(\text{dias})$
1	1,76	2,27	1,29	0,98	12,90
2	1,99	2,41	1,34	1,07	12,20
3	1,53	2,15	1,06	1,09	10,90
4	1,84	2,31	1,15	1,16	13,40
5	1,77	2,57	0,39	2,18	14,80
6	1,76	2,47	1,05	1,42	15,00
7	1,97	2,41	1,39	1,02	13,30
8	1,64	2,36	0,91	1,45	15,00
9	1,69	2,24	1,16	1,08	14,40
10	1,63	2,30	1,30	1,00	14,50
11	1,60	2,30	0,76	1,54	12,90
12	1,59	2,19	1,31	0,88	5,20
13	1,65	2,28	1,17	1,11	14,20
14	1,80	2,36	1,14	1,22	10,80
15	1,74	2,31	0,87	1,44	14,80
16	1,76	2,42	1,16	1,26	8,80
17	1,84	2,35	1,29	1,06	14,40
18	1,74	2,32	1,29	1,03	14,00
19	1,81	2,44	1,11	1,33	14,10
20	1,72	2,57	0,81	1,76	14,90
21	1,43	2,18	1,00	1,18	14,90
22	1,72	2,56	1,16	1,40	13,30
23	1,87	2,34	1,26	1,08	13,20
24	1,87	2,14	1,63	0,51	5,50
25	1,86	2,36	0,75	1,61	13,10
26	1,75	2,29	1,26	1,03	14,10
27	1,87	2,41	1,12	1,29	14,20
28	1,80	2,39	0,96	1,43	14,50
29	1,66	2,29	1,29	1,00	6,80
30	1,81	2,41	1,40	1,01	14,50
31	1,66	2,32	1,04	1,28	13,70
32	1,69	2,28	1,21	1,07	12,10
33	1,65	2,28	1,22	1,06	13,70
34	2,10	2,63	1,25	1,38	15,00
Sol	1,75	2,85	0,65	2,25	27,00

6.2 Definição de um Novo Índice de Atividade Magnética

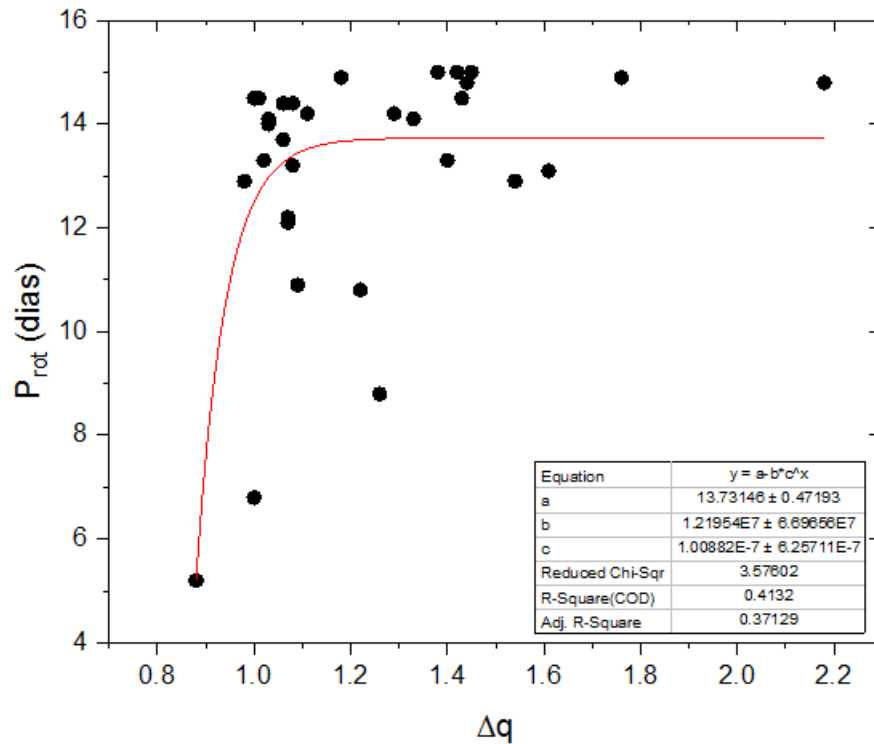
Baseando-se no índice de atividade magnético $\langle S_{ph,k} \rangle$ definido por Mathur e colaboradores (2014) e visando definir um indicador que mede adequadamente a variabilidade presente

Figura 13: *Esquerda*: Mostra como q varia em função do fator de escala n para a estrela KIC 002157356. *Direita*: Mostra como q varia em função do fator de escala n para todas as estrelas de nossa amostra.



Fonte: Autor.

Figura 14: Gráfico de Δq em função do período de rotação P_{rot} .



Fonte: Autor.

nas curvas de luz induzido pela atividade magnética e que leva em conta os efeitos de cauda longa presentes na distribuição, determinamos, para múltiplos fatores de escala, os valores de β_q para cada estrela de nossa amostra, os valores estão dispostos na tabela 5. Como esperado os valores de β_q variam em função da escala utilizada, pois ele depende da variabilidade fotométrica de cada estrela e que é provocada por efeitos característicos presentes na curva de luz que mudam

em diferentes escalas de tempo, tais como oscilações, ruídos, fáculas, flares, granulação entre outros. Daí a importância de se definir um fator de escala que seja proporcional ao período de rotação P_{rot} visando medir a variabilidade induzido pela atividade magnética.

Tabela 5 – Valores dos índices entrópicos calculados para nossa amostra em diferentes escalas.

$ref./\beta_q n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = P_{rot}$	$n = 5P_{rot}$	
1	75,7	45,4	60,3	104,8	83,5	50,2	44,1	70,1	90,1	70,6	84,96	89,68
2	71,7	99,1	50	88,4	48,1	86,9	102,5	130,8	98,2	53	86,69	51,88
3	48,7	56,3	99,2	110,5	110,4	115,9	100	130,8	128,6	75,3	80,83	108,02
4	71,1	100,7	58,8	43,4	103,6	92	63,7	44,5	79,2	100,5	59,59	60,86
5	90	72,5	55,5	50	44	28,1	41,8	106,7	115,1	84,3	71,1	98,5
6	46,3	64,8	106,2	99,4	63,2	45,7	79,4	120,4	98,7	143,8	80,72	27,04
7	48,4	107,6	91,4	67,5	42	39,5	70,1	57,4	36,7	61,1	74,27	93,39
8	99,5	87,3	51	57,9	91,7	104,6	92,6	38	123	134	70,74	92,57
9	44	87	98	61,9	41,4	59,9	105,5	155,2	100,8	81,8	84,58	49,44
10	104,7	63,4	47,5	102,2	88,4	98,1	38,1	70	98	94,6	82	104,79
11	100,9	58,1	41,9	96,6	102,6	92,4	113,8	64,2	128,4	62,4	55,6	103,24
12	71,7	99,2	50	88,4	48,1	86,9	102,5	130,8	98,2	92,6	99,51	91,36
13	103,7	88,4	52,3	45,9	101,4	108	110,2	67,2	82,4	101,2	88	69,28
14	104	42,3	100,2	66,3	35,4	67	78,7	34,5	76,3	73,9	68,38	100,57
15	51,8	89,5	95,1	43,3	46,9	45,3	48,4	59,9	118,5	119,2	105,31	97,13
16	101,9	82,7	54,8	32,3	31,8	31,7	77,7	57,6	61,9	113,8	94,35	106,15
17	103,3	65,5	38	64,4	103,1	107,3	75,2	70,4	96,5	72,3	57,5	36,27
18	92,6	89,6	63	40,2	49	60,8	92,7	67	93,4	95,2	73,21	106,49
19	64,5	119,6	82,4	72,1	34,2	32,6	45,7	111,4	126	109,2	48,09	65,84
20	45,9	55,5	100,1	115,8	114	122,1	129,3	63,1	23,7	43,9	75,3	70,97
21	104,2	53	56	87,5	106	112,2	100,5	109,4	106,4	88,7	96,96	108,82
22	87,9	39,1	68,2	109,1	111,1	109,2	107,1	108,2	26,2	83,2	50,4	50,72
23	43,1	63,4	110,1	81,1	49,5	40,2	62,7	55,7	95,2	93,5	65,59	70,4
24	60,8	53,2	72	78,3	78,4	71,4	72,3	61,3	55,7	82,3	72,51	82,4
25	77,3	43,1	51,5	86,2	96,2	82,5	40,1	58,5	128,5	76,7	65,27	61,69
26	41,4	101,6	60,5	49,3	82,8	106,1	100,1	109,2	94,2	44,7	75,83	85,32
27	77,4	109,2	77,2	37,9	40,1	40,9	40	53,5	96,7	41,7	62,87	107,64
28	68,9	50,8	98,2	64,8	39,9	83,5	127,5	112	98,6	47,6	59,41	48,85
29	41,8	91,5	98,3	99,6	55,5	65	108	100,7	92	98	59,25	72,03
30	95,8	83,7	46,4	60	104,9	86,2	80,1	34,6	53	74,7	95,6	53,66
31	103,2	64,3	38,4	68,2	95,3	78,7	34,2	114	72,8	106,8	102,6	82,51
32	101,5	73,1	40,7	70,3	91,3	103	103,4	65,9	133,5	95,8	64,22	99,15
33	58,7	80,1	64,6	44,2	99,8	105,9	74,8	86,7	102,8	76,4	45,53	95,47
34	38,6	75	111	71,9	43,7	34,3	64,5	41,9	18,8	49,7	64,26	20,2

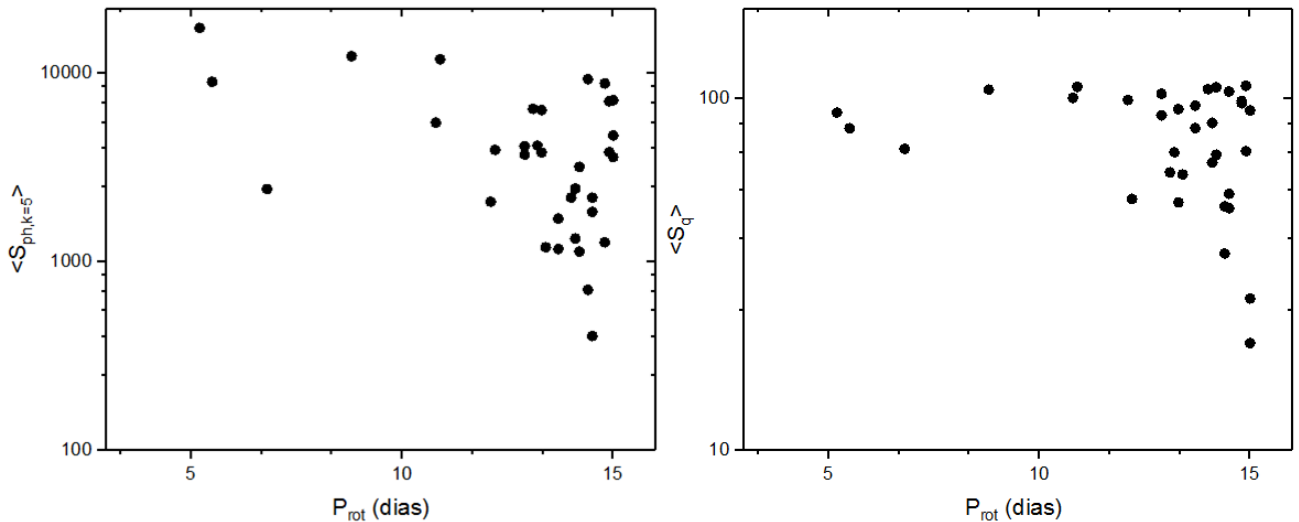
O parâmetro β_q está relacionado com σ_q , que é o desvio padrão generalizado, da seguinte forma

$$\beta_q = [(3 - q)\sigma_q^2]^{-1}. \quad (6.2)$$

Com isso definimos um novo índice de atividade magnética $\langle S_q \rangle = \beta_q$ (para manter a similaridade com o índice de Mathur usamos um fator de escala n correspondente a $5 \times P_{rot}$) baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis. A variabilidade estelar presente nas series temporais fotométricas são ocasionadas por fenômenos fora do equilíbrio termodinâmico e dirigidas por eventos não lineares, ou seja, a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs não pode descrever tais sistema em geral. Esse novo índice $\langle S_q \rangle$ respeita os resultados obtidos por Mathur e incorpora os efeito de cauda pesada presente nas distribuições.

O próximo passo foi correlacionar esse novo índice $\langle S_q \rangle$ com o período de rotação P_{rot} de nossa amostra e comparar com o obtido por Mathur (2014). De acordo com a figura 15 abaixo, podemos perceber claramente uma melhor tendência entre $\langle S_q \rangle$ e P_{rot} .

Figura 15: *Esquerda*: Índice de atividade magnética $\langle S_{ph,k=5} \rangle$ em função do período de rotação. *Direita*: índice de atividade magnética $\langle S_q \rangle$ em função do período de rotação.

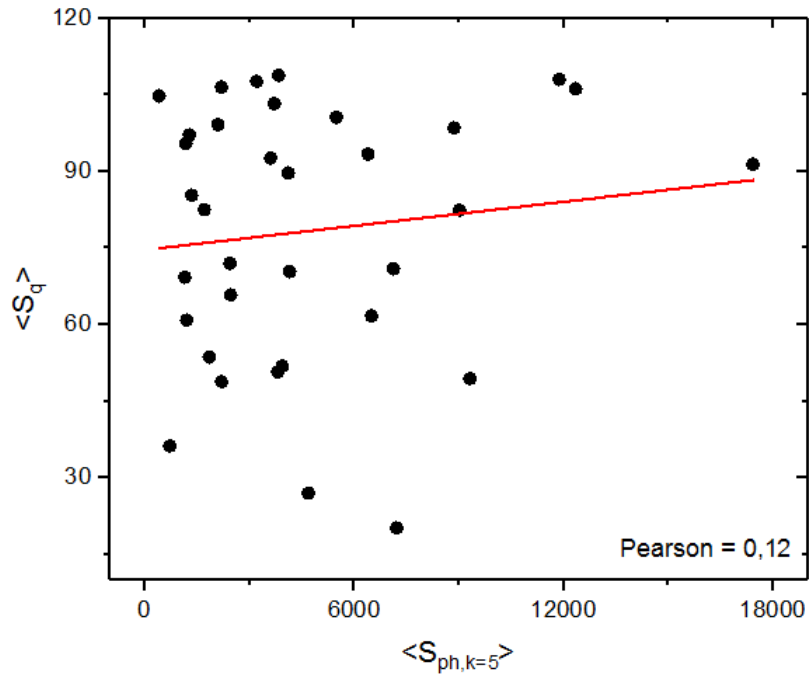


Fonte: Autor.

Em seguida correlacionamos esse novo índice com o obtido por Mathur com o intuito de verificar se a fonte física desses índices é a mesma, a figura 16 mostra essa relação. Como observado, a correlação entre eles evidenciou um espalhamento, ou seja, denota que as duas variáveis não estão relacionadas, o que indica fontes físicas distintas.

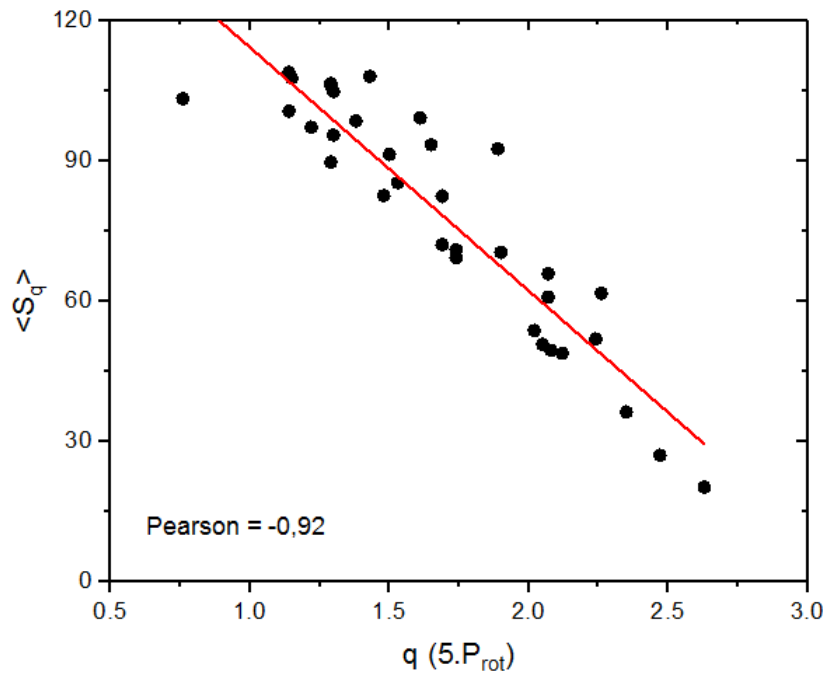
Por fim, relacionamos nosso novo índice $\langle S_q \rangle$ com o parâmetro q obtido para a distribuição fotométrica com um fator de escala $n = 5 \times P_{rot}$, a figura 17 mostra essa relação. Fica claro a alta correlação entre eles, ou seja, nosso novo índice não leva em conta apenas o desvio padrão usual obtido da mecânica estatística clássica, mas sim o efeito de cauda pesada (presente no parâmetro q) na distribuição ocasionados por fenômenos que acontecem fora do equilíbrio termodinâmico. É importante mencionar que $\langle S_q \rangle$ é obtido para toda a série temporal, isso nos permite minimizar os efeitos de qualquer falha instrumental nos dados. No entanto, $\langle S_q \rangle$ é sensível à presença ou à ausência de ciclos magnéticos durante as observações, o que

Figura 16: Gráfico de espalhamento entre o índice magnético definido por Mathur $\langle S_{ph,k=5} \rangle$ e o novo índice magnético baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis $\langle S_q \rangle$.



pode influenciar o índice magnético (como acontece com o índice $\langle S_{ph,k} \rangle$). No Apêndice A encontram-se as tabelas 6 e 7 com os coeficientes de correlação de Pearson mostrando a relação linear simples entre os parâmetros usado em nosso trabalho.

Figura 17: Gráfico que mostra a correlação entre o novo índice magnético baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis $\langle S_q \rangle$ e o parâmetro q .



7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho definimos um novo índice magnético $\langle S_q \rangle$ relacionado com o desvio padrão generalizado σ_q e baseado na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis, usando apenas os dados fotométricos, similar ao obtido por Mathur (MATHUR et al., 2014) mas com uma explicação física mais apropriada, ou seja, levando em consideração os efeitos de cauda longa presente na distribuição. Como a atividade magnética que emerge da superfície das estrelas é um mecanismo físico produzido pelo dínamo estelar, as variações de longo prazo, devido ao período rotacional, desempenham um papel importante na compreensão do nível de atividade na superfície estelar. A atividade magnética é mensurada pelo comportamento do fluxo de fótons obtido pela série temporal. Nós realizamos uma breve descrição do conceito de rotação estelar, enfatizamos a ordem cronológica do estudo atentando para sua relação com a termodinâmica não extensiva. Nós também falamos da atividade magnética estelar, onde destacamos fenômenos característicos (flares, fácula e manchas). Esses indicadores são usados como parâmetros para medir níveis de atividade magnética e, na presente dissertação, nós investigamos suas contribuições para estimar o nível de atividade. No capítulo sobre mecânica estatística realizamos uma breve abordagem sobre o formalismo não extensiva de Tsallis, sempre fazendo um paralelo com a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG). Apresentamos, também, a importância dessa ferramenta teórica, no contexto deste trabalho, que consiste em estudar a relação entre a atividade magnética estelar com o grau de não-extensividade presente na distribuição fotométrica.

Nossa análise não-extensiva mostra que a distribuição fotométrica para essas estrelas está longe de ser um modelo gaussiano padrão. A distribuição q -gaussiana descrita na estatística não-extensiva de Tsallis é claramente a melhor distribuição que se adequa às funções obtidas e fornece um conjunto estatístico mais robusto e profundo do que as abordagens tradicionais e mais conservadoras que dominam os métodos usuais na literatura astrofísica, que caracterizam a variabilidade fotométrica estelar de uma maneira notavelmente limitada.

Os valores observados para o parâmetro q em função da escala, indica um desvio significativo da distribuição fotométrica da amostra estelar de uma gaussiana padrão, resultado da dependência estatística entre as distribuições associadas a essas variáveis. Outro ponto importante é o fato do índice q variar em função da escala para cada estrela, isso pode ser interpretado devido as variabilidades fotométricas provocadas por efeitos característicos na curva de luz que mudam em diferentes escalas de tempo e que são associadas a flutuações intermitentes que variam de alguns segundos a várias horas, dias ou semanas. Por outro lado, esta dependência revela os efeitos de interações de longo alcance e a formação de cauda longa, consistentes com o q -TLC

(q -Teorema do Limite Central), onde o caráter não extensivo é observado. Esta q -generalização do teorema do limite central justificaria a aparição de tantas q -Gaussianas com $q \neq 1$ na natureza.

Estes resultados revelam que este sistema é consistente com um estado de não-equilíbrio termodinâmico, sugerindo fortemente que existam correlações de longo alcance entre as variáveis aleatórias envolvidas no processo físico que controla a atividade magnética estelar.

Não levamos em consideração os possíveis efeitos devido ao ângulo de inclinação do eixo de rotação i em relação à linha de visão. Conforme investigado por (VÁZQUEZ et al., 2011) e relatado por (MATHUR et al., 2014), o ângulo de inclinação da estrela, que pode ser estimado usando uma combinação do raio estelar (R), velocidade equatorial projetada ($\sin i$) e período de rotação, é um parâmetro relevante devido aos efeitos que pode ter nas observações de ciclos magnéticos. Podemos supor que $\langle S_q \rangle$ represente um limite inferior da atividade fotosférica (SALABERT et al., 2016). Neste sentido, medidas espectroscópicas são necessárias para estimar o efeito de i sobre a nossa amostra para chegar a um resultado conclusivo.

A atividade magnética estelar é um fator importante na formação e evolução dos exoplanetas e não é levada em conta na zona de habitabilidade. Fenômenos magnéticos como erupções estelares, ejeções de massa coronal e emissão de alta energia afetam a atmosfera exoplanetária e sua perda de massa ao longo do tempo. De fato, a atividade magnética das estrelas hospedeiras poderia eliminar completamente a atmosfera do planeta. O estudo do índice $\langle S_q \rangle$ não-extensivo dessas estrelas irá nos permitir uma melhor compreensão dessa relação.

O próximo passo em nosso estudo será fazer uma análise não-extensiva e determinar $\langle S_q \rangle$ para um grande número de estrelas - com estruturas e dinâmicas diferentes - para uma melhor compreensão dos mecanismos do dínamo. Além disso, o novo índice magnético sugerido em nosso trabalho pode ajudar a melhorar a interpretação das idades estelares medidas por métodos como a girocronologia e a asterosismologia.

REFERÊNCIAS

- ABE, S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 224, n. 6, p. 326–330, 1997. ISSN 03759601.
- APPOURCHAUX, T. et al. Astrophysics A seismic and gravitationally bound double star observed by Kepler Implication for the presence of a convective core. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 25, p. 1–19, out. 2015. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015A%26A...582A..25A>>.
- BARNES, J. R. et al. The dependence of differential rotation on temperature and rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 357, n. 1, p. 1–5, 2005. ISSN 17453933.
- BARNES, S. A. Ages for Illustrative Field Stars Using Gyrochronology: Viability, Limitations, and Errors. *The Astrophysical Journal*, v. 669, n. 2, p. 1167–1189, 2007. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/669/i=2/a=1167>>.
- BASRI, G. et al. Photometric variability in Kepler target stars. II. An overview of amplitude, periodicity, and rotation in first quarter data. *Astronomical Journal*, v. 141, n. 1, 2011. ISSN 00046256.
- BASU, S.; ANTIA, H. M. Changes in solar dynamics from 1995 to 2002. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 585, n. 1, p. 553–565, mar 2003.
- BECK, J. A comparison of differential rotation measurements. *Modern Physics Letters B*, v. 27, p. 1350234–304, dez. 1999. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2013MPLB...2750234M>>.
- BORGES, E. P. Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não extensivos. *Chemical Physics Letters*, Elsevier BV, v. 472, n. 4-6, p. 272, abr. 2004. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2009CPL...472..194B>>.
- BORUCKI, W. J. et al. 38th COSPAR Scientific Assembly 2010. *Science*, n. Mli, p. 13–15, 2010.
- BROWN, T. M. et al. Kepler input catalog: Photometric calibration and stellar classification. *Astronomical Journal*, v. 142, n. 4, 2011. ISSN 00046256.
- BURASI, D. L. Reply of the manuscript of authors (elsayed and abdul-ghani) in title (comment on the paper of our paper [superlattices and microstructures, 113 (2018) 346-358]) (in press). *AAS*, v. 123, n. 191, p. 460–464, nov. 1997. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018SuMi..123..460S>>.
- BURLAGA, L. F. et al. Tsallis statistics of the magnetic field in the heliosheath. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 644, n. 1, p. L83–L86, may 2006.
- CARUSO, F.; TSALLIS, C. Nonadditive entropy reconciles the area law in quantum systems with classical thermodynamics. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 78, n. 2, p. 1–6, 2008. ISSN 15393755.

- CARVALHO, J. C. et al. Radial velocities of open stellar clusters : A new solid constraint favouring Tsallis maximum entropy theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier BV, v. 384, n. 2, p. 507–515, oct 2007.
- CHAGAS, M. L. D. et al. New Suns in the Cosmos II: Differential rotation in Kepler Sun-like stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 1631, n. 2, p. 1624–1631, aug 2016. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1608.01549>> <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw2>>.
- CHAPLIN, W. J. et al. Bison performance. *Journal of Nuclear Materials*, v. 496, p. 129–139, dez. 1996. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017JNuM..496..129L>>.
- COVEY, K. et al. The Factory and the Beehive. III. PTFEB132.707+19.810, A Low-mass Eclipsing Binary in Praesepe Observed by PTF and K2. *Astrophysical Journal*, v. 845, n. 1, p. 1–37, 2017. ISSN 15384357.
- DOMINGO V., B. F.; POLAND, A. THE SOHO MISSION : AN OVERVIEW. *Solar Physics*, v. 162, n. 1, p. 1–37, abr. 1995. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2016EGUGA..18.7750H>>.
- DUEZ, V.; BRAITHWAITE, J.; MATHIS, S. On the stability of non-force-free magnetic equilibria in stars. *Astrophysical Journal Letters*, v. 724, n. 1 PART 2, p. 34–38, 2010. ISSN 20418213.
- DUNCAN, D. K. et al. CAII H and K measurements made at Mount Wilson Observatory, 1966-1983. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 76, p. 383, may 1991.
- FEIGELSON, E. D.; BABU, G. J. *Modern Statistical Methods for Astronomy*. [s.n.], 2012. ISBN 9780521767279. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2012msma.book.....F>>.
- FREITAS, D. B. de. A EVOLUÇÃO DA ROTAÇÃO ESTELAR NA VIZINHAÇA SOLAR. *ArXiv e-prints*, Springer International Publishing, v. 145, p. 439, jul. 2006. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2014SPPHy.145..439N>>.
- FREITAS, D. B. de. *Formação de Caudas Maxwellianas no Contexto da Rotação Estelar*. 171 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte(UFRN), 2009.
- FREITAS, D. B. de et al. New suns in the cosmos? *Astrophysical Journal Letters*, v. 773, n. 2, p. 1–20, 2013. ISSN 20418205.
- FREITAS, D. B. de; MEDEIROS, J. R. de. Nonextensivity in the solar neighborhood. *Epl*, v. 97, n. 1, p. 1–5, 2012. ISSN 02955075.
- FREITAS, D. B. de et al. New Suns in the Cosmos IV: the multifractal nature of stellar magnetic activity in Kepler cool stars. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 843, n. 2, p. 103, jul 2017. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1706.02935>> <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aa7>>.
- FRÖHLICH C., J. R. H. R. C. W. B. A. VIRGO: experiment for helioseismology and solar irradiance monitoring. *Solar Physics*, v. 162, n. 1995, p. 101–128, 1995.

- GARCÍA, R. A. et al. Preparation of Kepler light curves for asteroseismic analyses. , v. 414, 2011. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011MNRAS.414L...6G>>.
- GARCÍA, R. A. et al. CoRoT reveals a magnetic activity cycle in a sun-like star. *Science*, v. 329, n. 5995, p. 1032, 2010. ISSN 00368075.
- GARCÍA, R. A. et al. Global solar Doppler velocity determination with the GOLF/SoHO instrument. *Astronomy & Astrophysics*, v. 442, n. 1, p. 385–395, 2005. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361:20052779>>.
- GILLILAND, R. L. et al. Initial characteristics of Kepler short cadence data. *Astrophys. J. Lett.*, IOP Publishing, v. 713, n. 2, p. 160, abr. 2010. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...713L.160G>>.
- GIZON, L.; SOLANKI, S. K. Determining the Inclination of the Rotation Axis of a Sun-like Star. *The Astrophysical Journal*, v. 589, n. 2, p. 1009–1019, 2003. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/589/i=2/a=1009>>.
- HALE, G. No Title. *Astrophys. J*, n. 28, 1908.
- HARDY, G.; LITTLEWOOD, J.; POLYA, G. *Inequalities*. 1952. entry needs review p. Disponível em: <http://books.google.com/books?hl=en{&}lr={&}id=j7JYneuaCxQC{&}oi=fnd{&}pg=PA1{&}dq=Inequalities{&}ots=gYWSN{_}82Yi{&}sig=NkCtkfMzcmNcQb1o-DP9-MucQKg{\%}5Cnhttp://books.google.com/books?hl=en{&}lr={&}id=j7JYneuaCxQC{&}oi=fnd{&}pg=PA1{&}dq=Ineq>.
- HARTIG, E. et al. KEPLER AND THE LONG-PERIOD VARIABLES. *The Astronomical Journal*, 2014. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-6256/148/6/123/pdf>>.
- HARVEY, J. et al. The global oscillation network group (GONG). *Advances in Space Research*, Elsevier BV, v. 8, n. 11, p. 117–120, jan 1988.
- HAWLEY, S. L. et al. Flares. i. active and inactive m dwarfs. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 121, n. 1, p. 121, dec 2014.
- HOWARD, R.; HARVEY, J. Spectroscopic determinations of solar rotation. *Solar Physics*, Springer Nature, v. 12, n. 1, p. 23–51, apr 1970.
- HOWE, R. Solar interior rotation and its variation. *Living Reviews in Solar Physics*, Springer Nature, v. 6, 2009.
- JACKSON, F. On q-definite integrals. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 41, p. 193–203, 1910.
- JENKINS, J. M. et al. Overview of the kepler science processing pipeline. *Astrophysical Journal Letters*, v. 713, n. 2 PART 2, 2010. ISSN 20418213.
- KAROFF, C. et al. Sounding stellar cycles with Kepler - II. ground-based observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 433, n. 4, p. 3227–3238, 2013. ISSN 00358711.
- KITCHATINOV, L. L. The differential rotation of stars. *Astronomy Reports*, Pleiades Publishing Ltd, v. 54, n. January 2010, p. 1–5, jan 2015.

LANDSBERG, P. *Problems in Thermodynamics and Statistical Physics*. Dover Publications, 2014. (Dover Books on Physics). ISBN 9780486780757. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dfqJAwAAQBAJ>>.

LANZA, A. F. et al. Fourier analysis of spotted star light curves as a tool to detect stellar differential rotation. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, v. 269, p. 351–354, 1993. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/full/1993A&A...269..351L>>

LARMOR, J. No Title. fev. 1919. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011sph.book....C>>.

LARSON, T. P.; SCHOU, J. Improved helioseismic analysis of medium- ℓ data from the michelson doppler imager. *Solar Physics*, Springer Nature, v. 290, n. 11, p. 3221–3256, nov 2015.

LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, American Mathematical Society (AMS), v. 2, n. 2, p. 164–168, jul 1944.

MAEDER, A. *Physics, formation and evolution of rotating stars*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISSN 0941-7834. ISBN 9783642012891.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 11, n. 2, p. 431–441, jun 1963.

MATHUR, S. et al. Photometric magnetic-activity metrics tested with the Sun: Application to Kepler M dwarfs. *Journal of Space Weather and Space Climate*, EDP Sciences, v. 4, p. A15, 2014. ISSN 2115-7251. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1404.3076>>.

MCQUILLAN, A.; AIGRAIN, S.; MAZEH, T. Measuring the rotation period distribution of field M dwarfs with kepler. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 432, n. 2, p. 1203–1216, 2013. ISSN 00358711.

Middelkoop, F. Magnetic structure in cool stars. IV - Rotation and CA II H and K emission of main-sequence stars. , v. 107, p. 31–35, mar. 1982.

MIESCH, M. S. Large-scale dynamics of the convection zone and tachocline. *Living Reviews in Solar Physics*, Springer Nature, v. 2, 2005.

MORIN, J. et al. The stable magnetic field of the fully convective star V374 Peg. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 384, n. 1, p. 77–86, 2008. ISSN 00358711.

MOYANO, L. G. *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. 2006.

NELSON, O. R.; De Medeiros, J. R. Assim na Terra como no céu: a teoria do dínamo como uma ponte entre o geomagnetismo e o magnetismo estelar. *Rbef*, v. 34, n. 4, p. 4601, 2012. ISSN 1806-1117.

NEPOMUCENO, M. M. F. *Sobre a orientação dos eixos de rotação das estrelas em aglomerados abertos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, 2013.

- NOYES, R. W.; WEISS, N. O.; VAUGHAN, A. H. The relation between stellar rotation rate and activity cycle periods. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 287, p. 769, dec 1984.
- PEDRON, I. T. *Integrais, Equações Diferenciais e Entropia de Tsallis*. 78 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá - Santa Catarina, 1999.
- PESNELL, W. D.; THOMPSON, B. J.; CHAMBERLIN, P. C. The Solar Dynamics Observatory (SDO). *Solar Physics*, Springer Nature, v. 275, n. 1-2, p. 3–15, oct 2011.
- PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. Stellar polytropes and Tsallis' entropy. *Physics Letters A*, v. 174, n. 5-6, p. 384–386, 1993. ISSN 03759601.
- PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. From Gibbs microcanonical ensemble to Tsallis generalized canonical distribution. *Physics Letters A*, v. 193, n. 2, p. 140–143, 1994. ISSN 03759601.
- RAMSHAW, J. D. Thermodynamic stability conditions for the Tsallis and Rényi entropies. *Physics Letters A*, v. 9601, n. 2, p. 6–8, fev. 1995. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1995PhLA..198..119R>>.
- REINERS, A.; SCHMITT, J. H. M. M. On the feasibility of the detection of differential rotation in stellar absorption profiles. *Astronomy & Astrophysics*, v. 384, n. 1, p. 155–162, mar 2002. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361:20011801>>.
- ROBERTSON, P. et al. H α activity of old M dwarfs: Stellar cycles and mean activity levels for 93 low-mass stars in the solar neighborhood. *Astrophysical Journal*, v. 764, n. 1, 2013. ISSN 15384357.
- SAAR, S. H.; BRANDENBURG, A. A new look at dynamo cycle amplitudes. *Astronomische Nachrichten*, Wiley, v. 323, n. 3-4, p. 357–360, aug 2002.
- SALABERT, D. et al. Magnetic variability in the young solar analog KIC 16710644253. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 589, p. 118, apr 2016.
- SALINAS, S. R. a. *Introdução a Física Estatística*. Springer Nature, 2005. v. 80. 466 p. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018BVol...80...18R>>.
- Sanchez, S. et al. A mean-field Babcock-Leighton solar dynamo model with long-term variability. *arXiv e-prints*, jul. 2013.
- SCHOU, J. et al. Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the michelson doppler imager. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 505, n. 1, p. 390–417, sep 1998.
- SKUMANICH, A. TIME SCALES FOR CaII EMISSION DECAY, ROTATIONAL BRAKING, AND LITHIUM DEPLETION. *NASA STI/Recon Technical Report N*, v. 85, n. Frazier 1970, p. 565–567, mar. 1972. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1985STIN...8530991L>>.
- SNODGRASS, R. U. H. Rotation of doppler features in the solar photosphere. *Journal for the History of Astronomy*, v. 31, p. 261, ago. 1990. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2000JHA....31..261T>>.
- SOARES, B. B. et al. Tsallis maximum entropy distribution function for stellar rotational velocities in the Pleiades. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 364, p. 413–422, 2006. ISSN 03784371.

- STUMPE, M. C. et al. Kepler Presearch Data Conditioning I—Architecture and Algorithms for Error Correction in Kepler Light Curves. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, v. 124, n. 919, p. 985–999, 2012. ISSN 00046280. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1086/667698>>.
- THOMPSON, M. J. et al. The internal rotation of the sun. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 41, n. 1, p. 599–643, sep 2003.
- TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, n. 1-2, p. 479–487, 1988. ISSN 00224715.
- TSALLIS, C. Non-extensive thermostatistics: brief review and comments. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 221, n. 1-3, p. 277–290, 1995. ISSN 03784371.
- TSALLIS, C. Lévy distributions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, n. 7, p. 033502–033502, mar. 1997. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2010JMP...51c3502U>>.
- TSALLIS, C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics: Approaching a complex world*. [S.l.]: Springer New York, 2009. 1–382 p. ISSN 1098-6596. ISBN 9780387853581.
- TSALLIS/GELL-MAN. *Nonextensive-entropy-Interdisciplinary-applications-Murray-Gell-Mann_-Tsallis.pdf*. [S.l.: s.n.], 2004.
- VÁZQUEZ, H. R. et al. Effect of line-of-sight inclinations on the observation of solar activity cycle: Lessons for CoRoT & Kepler. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 271, p. 012056, jan 2011.
- WILSON O. C., & V. B. H AND K EMISSION IN LATE-TYPE STARS: DEPENDENCE OF LINE WIDTH ON LUMINOSITY AND RELATED TOPICS. , v. 125, p. 661, maio 1956. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1957ApJ...125..661W>>.

**APÊNDICE A – TABELAS COM OS COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DE
PEARSON MOSTRANDO A RELAÇÃO LINEAR SIMPLES ENTRE
OS PARÂMETROS USADO EM NOSSO TRABALHO**

Tabela 6 – Tabela de coeficientes de correlação de Pearson mostrando a relação linear simples entre o índice q , em função de múltiplas escalas, com todos os parâmetros extraídos de nossa amostra.

	P_{rot}	S_{ph}	$\langle S_{ph,k=5} \rangle$	$Log(\langle S_{ph,k=5} \rangle)$	$Log(P_{rot})$	T_{eff}	Massa	$Log(S_{ph})$
$n = 0$	0,27	0,02	0,01	0,11	-0,02	0,39	0,22	-0,10
$n = 1$	-0,34	0,22	0,22	0,26	-0,20	-0,51	-0,49	0,45
$n = 2$	0,23	-0,15	-0,16	-0,20	-0,09	0,50	0,51	-0,37
$n = 3$	0,04	-0,25	-0,25	-0,31	0,19	-0,05	-0,02	-0,20
$n = 4$	-0,10	0,20	0,20	0,24	-0,12	-0,11	-0,13	0,22
$n = 5$	-0,01	0,10	0,10	0,24	-0,05	-0,05	-0,08	0,18
$n = 6$	0,16	-0,15	-0,15	-0,13	0,17	0,08	0,09	-0,14
$n = 7$	0,07	-0,07	-0,07	0,01	0,06	0,05	0,04	-0,04
$n = 8$	-0,03	0,03	-0,07	0,04	-0,11	0,08	0,09	0,01
$n = 9$	0,02	-0,09	-0,08	-0,06	0,10	-0,08	-0,08	-0,01
$n = P_{rot}$	0,00	-0,23	-0,23	-0,09	0,13	-0,16	-0,17	-0,02
$n = 5.P_{rot}$	0,03	-0,01	-0,01	0,02	0,16	-0,19	-0,19	0,10
$\langle q \rangle$	0,07	-0,05	-0,05	0,08	0,10	-0,04	-0,05	0,07
q_{max}	0,66	-0,18	-0,17	0,10	0,44	0,54	0,50	-0,23
q_{min}	-0,38	0,06	0,04	-0,14	-0,30	-0,31	-0,29	0,03
Δq	0,55	-0,11	-0,09	0,15	0,40	0,45	0,41	-0,11
P_{rot}	1,00	-0,55	-0,54	-0,44	0,99	0,66	0,64	-0,62
$\langle S_{ph,k=5} \rangle$	-0,54	1,00	1,00	0,90	-0,58	-0,30	-0,32	0,86
S_{ph}	-0,55	1,00	1,00	0,89	-0,60	-0,29	-0,32	0,86
$Log(\langle S_{ph,k=5} \rangle)$	-0,62	0,85	0,86	1,00	-0,44	0,01	-0,63	1,00
$Log(S_{ph})$	-0,62	0,86	0,86	1,00	-0,45	-0,61	-0,62	1,00
$Log(P_{rot})$	0,95	-0,62	-0,60	-0,44	1,00	-0,60	0,43	-0,57
Massa	0,64	-0,32	-0,32	-0,44	0,11	0,44	1,00	-0,62
T_{eff}	0,66	-0,29	-0,30	-0,44	0,11	1,00	0,99	-0,60

Tabela 7 – Tabela de coeficientes de correlação de Pearson mostrando a relação linear simples entre o novo índice magnético $\langle S_q \rangle$, em função de múltiplas escalas, com todos os parâmetros extraídos de nossa amostra.

	T_{eff}	Massa	$Log(S_{ph})$	S_{ph}	$Log(\langle S_{ph,k=5} \rangle)$	$\langle S_{ph,k=5} \rangle$	$Log(P_{rot})$	P_{rot}
$n = 0$	0,19	0,18	-0,29	-0,13	-0,28	-0,21	0,10	0,08
$n = 1$	0,12	0,12	-0,15	-0,03	-0,15	-0,07	-0,02	0,00
$n = 2$	-0,34	-0,33	0,33	0,31	0,33	0,18	0,02	0,02
$n = 3$	-0,06	-0,06	0,25	-0,45	0,25	0,20	-0,18	-0,18
$n = 4$	0,30	0,29	-0,32	0,11	-0,32	-0,28	0,18	0,18
$n = 5$	0,33	0,32	-0,31	0,03	-0,31	-0,20	0,04	0,04
$n = 6$	-0,13	-0,13	0,17	0,66	0,17	0,13	-0,16	-0,16
$n = 7$	0,06	0,07	0,20	0,73	0,20	0,26	-0,12	-0,10
$n = 8$	0,02	0,02	-0,16	0,25	-0,16	-0,12	0,07	0,05
$n = 9$	0,00	0,00	0,07	-0,06	0,07	0,11	-0,08	-0,07
$n = P_{rot}$	0,08	0,08	0,15	0,19	0,15	0,28	-0,11	-0,09
$n = 5P_{rot}$	0,12	0,12	0,05	-0,04	0,05	0,12	-0,20	-0,23
$\langle S_{q,med} \rangle$	0,07	0,07	-0,05	0,12	-0,05	0,03	-0,16	-0,16
$\langle S_{q,max} \rangle$	-0,17	-0,17	0,30	0,27	0,31	0,27	0,21	0,21
$\langle S_{q,min} \rangle$	0,16	0,16	-0,06	0,62	-0,08	0,02	-0,40	-0,40
$\Delta \langle S_q \rangle$	-0,22	-0,21	0,28	-0,11	0,29	0,22	0,36	0,36
P_{rot}	0,12	0,12	-0,45	0,15	-0,44	-0,57	0,99	1,00
$\langle S_{ph,k=5} \rangle$	-0,33	-0,33	0,90	1,00	0,90	1,00	-0,58	-0,57
S_{ph}	-0,44	-0,45	0,96	1,00	0,96	1,00	0,14	0,15
$Log(\langle S_{ph,k=5} \rangle)$	-0,44	-0,44	1,00	0,96	1,00	0,90	-0,44	-0,44
$Log(S_{ph})$	-0,44	-0,44	1,00	0,96	1,00	0,90	-0,45	-0,45
Massa	1,00	1,00	-0,44	-0,45	-0,44	-0,33	0,11	0,12
T_{eff}	1,00	1,00	-0,44	-0,44	-0,44	-0,33	0,11	0,12
$Log(P_{rot})$	0,11	0,11	-0,45	0,14	-0,44	-0,58	1,00	0,99