



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

MAPSE BARROSO FERREIRA FILHO

**EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA POLARIZAÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS**

FORTALEZA

2019

MAPSE BARROSO FERREIRA FILHO

EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA POLARIZAÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA
2019

MAPSE BARROSO FERREIRA FILHO

EFEITOS DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NA POLARIZAÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em

.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva (Coorientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

-
- F498e Mapse Barroso F. Filho.
 Efeitos da violação da simetria de Lorentz na polarização de ondas gravitacionais / Mapse Barroso
Ferreira Filho. – Fortaleza, 2019.
 92.:il color.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Física, Fortaleza, 2019.
 Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.
 Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
 Coorientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.
1. Ondas gravitacionais. 2. Violação de simetria de Lorentz. 3. campo de Bumblebee. 4. Tensor de
polarização da gravidade. I. Título.

CDD:530

A luz
e
tudo que permeia o espaço..

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus e aos mentores espirituais que sempre estão lutando ao meu lado e me ajudando a escolher os caminhos certos. À minha mãe, que sempre esteve presente em minha vida, criando-me com muito amor. Ela que sempre foi muito amorosa e que sempre me mostrou o caminho certo na vida. Obrigado por ser a melhor mãe do mundo. Ao meu avô Camundo, pois ele sempre acreditou nos meus estudos e, além disso, foi ele quem me deu o sustento para que eu pudesse estudar e passar no vestibular, muito obrigado, meu querido e abençoado vô. À minha querida avó Lucimar, por sempre me tratar com muito amor e por sempre acreditar em mim. À minha amada noiva Sinara. Por sua paciência e compreensão quando não pude estar com ela por ter que estar estudando. Você é a pessoa certa pra mim, não posso me imaginar com outra pessoa. À minha irmã Marcélia, pois ela me ajudou e me guiou nos inícios dos meus estudos, agradeço-te imensamente, querida irmã. Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, por seus conhecimentos e ensinamentos compartilhados, dedicação e esforço. Ao meu coorientador Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva, pelas dicas essenciais. Ao meu companheiro de pesquisa, Kevin (Kelvin) pelas horas e horas de contribuição e dicas valiosas. Ao grande professor Carlos Willian, pelos ensinamentos, conversas e pelo grande apoio dado. Aos membros do LASSCO, especialmente ao Jefferson (Jeffy) e ao Adailton (Stanley). Aos meus companheiros de caminhada: João Pedro (meninoso), Misael (místico), Ícaro (monge), Mateus Nilton, Rubens, Frost, Cléo e aos que eu possa ter esquecido. Aos professores que tive na UFC, sobretudo aqueles que mais se esforçaram e que mais se preocuparam com o crescimento intelectual dos alunos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo solucionar perturbativamente as equações de Einstein em um cenário com violação da simetria de Lorentz para o estudo das polarizações das ondas gravitacionais. Primeiramente, será feita uma breve revisão sobre o MPE e a quebra espontânea da simetria de Lorentz, bem como suas consequências. O modelo de bumblebee será utilizado para o estudo da violação da simetria de Lorentz no cenário gravitacional, no qual os termos de quebra são gerados dinamicamente devido a presença de um potencial similar ao encontrado na Lagrangeana do modelo de Higgs. As equações de Euler-Lagrange são utilizadas para a determinação do propagador perturbado do gráviton expandido até segunda ordem do campo de perturbação. Nesse cenário, é visto que a relação de dispersão do gráviton é modificada devido a presença de um vetor de fundo que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo. Além disso, foi verificado que o gráviton ainda possui dois graus de liberdade, apesar da existência do campo de bumblebee. A partir dos resultados apresentados a equação modificada foi solucionada e os estados de polarização modificados foram comparados com os do caso usual. Assim, mostra-se que para um campo de bumblebee do tipo-tempo ou na mesma direção de propagação do momento da onda não há mudanças no tensor de polarização. Mas para um campo de bumblebee em outra direção, tem-se modificações no tensor de polarização para o gráviton. Por fim, foram calculados limites para o parâmetro do campo de bumblebee comparando a velocidade de grupo calculada aqui com uma velocidade de grupo para o gráviton massivo.

Palavras-chave: Ondas gravitacionais. Violação de simetria de Lorentz. campo de Bumblebee. Tensor de polarização da gravidade.

ABSTRACT

This work aims to solve Einstein equation in a scenario with Lorentz symmetry violation for gravitational waves polarization. It will be commented about standard model extension, spontaneous and explicit violation of a symmetry as well as their consequences. The bumblebee model will be used for the study of Lorentz violation, where the terms that break off the symmetry are included in the lagrangian of the gravitational theory. The Euler-Lagrange equations are used to determine the modified graviton propagator, where we expand the lagrangian up to second order of the perturbed gravitational field. We see that, in this scenario, the dispersion relation of graviton is different of the usual one, where we have a term that selects a preferred direction in the spacetime. Besides that, the graviton still with two degrees of freedom, despite the existence of bumblebee field. Then, the modified wave equation for perturbation field is solved and we compare the polarization states of the gravitational wave solution modified with the usual case. We show that for a bumblebee field being timelike or in the same direction of wave momentum we have no changes in the polarization tensor. But for a bumblebee field being in another direction we have a modified polarization tensor for the graviton. Besides that, we compute some bounds for the parameter of the bumblebee field by comparing the group velocity here computed with a group velocity of a massive graviton.

Keywords: Gravitational waves. Lorentz symmetry violation. Bumblebee field. Polarization tensor of gravity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Rotação Passiva	20
Figura 2 – Rotação Ativa	21
Figura 3 – Quebra de simetria espacial	22
Figura 4 – Rotação passiva na presença de um campo de fundo	22
Figura 5 – Rotação ativa na presença de um campo de fundo	23
Figura 6 – Densidade de energia para os exemplos dados. No item (a) é visto que o vácuo é livre de campos, no item (b) o vácuo um escalar que é representado pela cor cinza e no item (c) o vácuo contém um vetor no qual o seu VEV seleciona uma direção preferencial.	31
Figura 7 – Diagrama de Feynman para o processo de espalhamento entre duas partículas bosônicas interagindo gravitacionalmente.	36
Figura 8 – Definição dos vetores e dos ângulos para o cálculo do potencial modificado.	38
Figura 9 – Difeomorfismo relacionando M_p e M_f	42
Figura 10 – Efeito da onda gravitacional em um conjunto de partículas - polarização +	50
Figura 11 – Efeito da onda gravitacional em um conjunto de partículas - polarização x	50
Figura 12 – Efeito das ondas gravitacionais com a polarização D	51
Figura 13 – Esquemático do interferômetro usado para detectar as OG	55
Figura 14 – Sensitividade do detector em função da frequência para os experimentos LIGO e LISA	57
Figura 15 – Operação de <i>pullback</i>	71

LISTA DE SÍMBOLOS

L_+^\uparrow	Grupo de Lorentz ortocrônico próprio
L_-^\uparrow	Grupo de Lorentz ortocrônico impróprio
L_-^\downarrow	Grupo de Lorentz não ortocrônico impróprio
L_+^\downarrow	Grupo de Lorentz não ortocrônico próprio
C^∞	Funções suaves em todas as suas derivadas
\mathcal{K}^{form}	Conjunto de todas as fórmulas diferenciais
γ	Fator de Lorentz
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowski
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
g	Determinante da métrica $g_{\mu\nu}$
$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$	Simbolos de Christoffel
$R_{\mu\lambda\nu}^\rho$	Tensor de Riemann
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Curvatura
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$\nabla_\mu V^\nu$	Derivada covariante do campo vetorial V^ν
δX	Variação funcional de X
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energia-momento
m_p	Massa de Planck
l_p	Comprimento de Planck
t_p	Tempo de Planck
E_p	Energia de Planck
$T_{\mu\nu\lambda}$	Campo Tensorial covariante de ordem 3
e_λ^a	<i>Vierbein</i> que conecta uma base de coordenadas a um referencial de Lorentz
Λ^a_b	Matriz de transformação de Lorentz
$h_{\mu\nu}$	Perturbação no espaço de Minkowski
$\langle T_{\mu\nu} \rangle$	Valor esperado de um tensor covariante de ordem 2
$\delta T_{\mu\nu}$	Variação de um tensor covariante de ordem 2 em relação ao seu valor esperado
B_μ	Campo de bumblebee
\tilde{B}_μ	perturbação no campo de bumblebee
$\phi * f$	<i>Pullback</i> de uma função f por um mapeamento ϕ

LISTA DE SIGLAS

OG	Ondas Gravitacionais
EE	Equação de Einstein
RG	Relatividade Geral
LIGO	Laser Interferometer for Gravitational Waves Observatory
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
CPT	Conjugação de carga, paridade e reversão temporal
NG	Nambu-Goldstone
VEV	Valor Esperado de Vácuo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Ondas Gravitacionais: histórico e estado atual	13
1.2	Modelo padrão, simetria de Lorentz e a quantização da gravidade	14
2	TRANSFORMAÇÕES E SIMETRIAS: LORENTZ E CPT	16
2.1	Simetria CPT	16
2.1.1	Teorema CPT	17
2.2	Simetria de Lorentz	18
2.2.1	<i>Rotações Passivas e Ativas</i>	20
2.3	Quebra espontânea da simetria de Lorentz	21
2.3.1	<i>Transformações de Observador e Partícula</i>	23
2.4	Quebra explícita da simetria de Lorentz	25
3	RELATIVIDADE GERAL E MODELOS DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ	26
3.1	Equação de Einstein	26
3.2	Modelo padrão Estendido - Setor gravitacional	27
3.2.1	<i>Modelo Padrão</i>	27
3.2.2	<i>Violação espontânea de Lorentz e difeomorfismo</i>	29
3.2.2.1	<i>Transformações de observador e partícula revisitadas</i>	32
3.2.2.2	<i>Modos de Nambu-Goldstone e análise perturbativa</i>	33
3.2.3	<i>Modelo bumblebee</i>	34
3.3	Modificação do potencial gravitacional newtoniano	36
4	ONDAS GRAVITACIONAIS	40
4.1	Equação de Einstein Linearizada	40
4.1.1	<i>Graus de Liberdade</i>	43
4.2	Soluções de Ondas Gravitacionais	46
4.3	Helicidade e Spin	52
4.4	Produção de ondas gravitacionais	53
4.5	Deteção das ondas gravitacionais	54
5	POLARIZAÇÕES DA ONDA GRAVITACIONAL MODIFICADAS PELA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	58
5.1	Solução da equação do gráviton modificada	58
5.2	Modificação nos estados de polarização	61
5.3	Propagação do gráviton e deteção do campo b^μ	64

6	CONCLUSÕES	66
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN	67
A.0.1	<i>Equação De Einstein com termo de massa</i>	70
	APÊNDICE B – MAPEAMENTO ENTRE VARIEDADES E DIFEOMOR- FISMO	71
	APÊNDICE C – MECANISMO DE HIGGS	74
	APÊNDICE D – TEOREMA DE <i>STOKES</i>	77
	APÊNDICE E – MODELO BUMBLEBEE	78
	APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO DESVIO GEODÉSICO	82
	APÊNDICE G – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PRODUÇÃO DE ON- DAS GRAVITACIONAIS	84
	REFERÊNCIAS	88

1 INTRODUÇÃO

A descoberta das ondas gravitacionais (OG) foi um dos eventos mais importantes para a física de altas energias do século XXI. Essa façanha alcançada trará diversos avanços teóricos, observacionais e experimentais. É válido lembrar que o "santo graal" da física é a quantização da gravidade e sabendo que as OG são estados coerentes dos grávitons, talvez as detecções, aliadas ao estudo das chamadas violações da simetria de Lorentz, possam trazer mais esclarecimentos para a determinação de uma teoria consistente de gravitação quântica.

1.1 Ondas Gravitacionais: histórico e estado atual

Em dezembro de 1916, o físico teórico Albert Einstein formulou a Teoria da relatividade geral (RG). Até então os fenômenos gravitacionais eram bem descritos pela mecânica Newtoniana. O desenvolvimento da RG culminou em uma brusca mudança nos conceitos elaborados por Newton, em que a interação gravitacional era interpretada como uma força de atração existente entre as partículas. Contudo, na RG a presença de massa deforma o espaço, curvando-o e influenciando o movimento de outros corpos, isto é, o conceito de força gravitacional é deixado de lado dando lugar para um aspecto geométrico. A relação entre geometria e energia-momento é dada pela célebre equação de Einstein (EE) que será deduzida no presente trabalho a partir do princípio variacional. Em posse disso, Einstein obteve uma solução aproximada para a EE ao supor a existência de campos fracos. Ademais, ele tentou calcular a radiação gravitacional emitida por um sistema mecânico isolado excitado para velocidades não relativísticas (BASSALO; CATTANI, 2016). Portanto, as OG surgem naturalmente como soluções das EE linearizadas.

Em 1917 o matemático alemão David Hilbert estudou as OG decorrentes da solução de Einstein (HILBERT, 1900). No ano de 1918 Einstein apresentou a conhecida equação do quadrupolo para a perda de energia mecânica na RG. Já em 1935 o renomado físico Paul Adrien Maurice Dirac estudou uma forma de quantizar as OG (DIRAC, 1936) em que a partícula teórica decorrente de tal quantização é denominada gráviton. Um dos resultados mais importantes obtidos por Einstein foi o estudo sobre o desvio da luz devido à ação de um campo gravitacional de uma estrela, efeito conhecido como lente gravitacional (EINSTEIN, 1936). Quando um corpo massivo localizado entre o observador e o objeto provoca distorção no espaço-tempo ocorre tal efeito. No ano de 1959, Bondi Felix, A. E. Pirani e I. Robinson encontraram as soluções exatas das ondas planas (BONDI; PIRANI; ROBINSON, 1959). Só na década de 60 que os físicos iniciaram a trabalhar em instrumentos para a detecção das OG (WEBER, 1969).

Apesar de todo o desenvolvimento teórico, os físicos do século XX não lograram sucesso na detecção das OG.

Uma grande contribuição na área que culminou em evidências a favor da existência das OG foi dada por R. Hulse e J. Taylor (WEISBERG; TAYLOR; FOWLER, 1981), resultando no vencimento do prêmio Nobel de 1993. Finalmente, em 11 de fevereiro de 2016, foi anunciada a descoberta das OG. Representantes dos laboratórios LIGO (*Laser Interferometer for Gravitational Waves Observatory*) e *Virgo* anunciaram que as primeiras ondas foram detectadas em 14 de setembro de 2015, evento esse denominado *GW150914*. A segunda detecção foi realizada em 26 de dezembro de 2015, evento esse denominado *GW151226*. As ondas detectadas em ambos os eventos são decorrentes da colisão de dois buracos negros localizados a distâncias de aproximadamente 410 Mpc e 440 Mpc respectivamente (BASSALO; CATTANI, 2016).

A grande dificuldade encontrada nas medições das OG reside no fato de que elas são apenas perturbações no espaço-tempo, tal que a amplitude da onda é em torno de $h \sim 10^{-21}$. Ora, a interação gravitacional por si só já é muito fraca e para que ondas de amplitudes relevantes sejam produzidas é necessário a existência de eventos nos quais existem grande quantidade de massa e energia, como na região próxima de um buraco negro (RAMOS; MALUF, 2018). Portanto, a detecção das OG dá grande suporte a existência de buracos negros. Ademais, todas as teorias de gravitação relativísticas (THORNE, 1980; THORNE, 1969; LANDAU; LIFSHITZ, 1965; CATTANI, 1998) requerem a existência das OG e que a amplitude de tais ondas é muito pequena, tal qual na RG.

1.2 Modelo padrão, simetria de Lorentz e a quantização da gravidade

O modelo padrão (MP) é um conjunto de teorias com alta consistência matemática que atualmente melhor descreve a natureza da matéria (MOREIRA, 2009). O MP descreve as interações fundamentais e as partículas que são intermediadoras dessas interações de forma bem consistente, exceto para a gravidade, que é um dos maiores obstáculos da física contemporânea, como já comentado anteriormente. Como será discutido com mais detalhe nesse trabalho, os efeitos da violação da simetria de Lorentz aparecem em teorias de gravidade quântica (BLUHM, 2013). Diante disso, vem sendo desenvolvido o modelo padrão estendido (MPE), em que são englobados o MP, a RG, a quebra da simetria de Lorentz e a quebra da simetria de conjugação de carga, paridade e reversão temporal (CPT). Portanto, a busca por efeitos que violem a simetria de Lorentz é peça chave no desenvolvimento de uma teoria quântica da gravitação. Diante desse contexto, a observação das OG tem sido utilizada para testar a simetria de Lorentz. São procurados efeitos dispersivos que são causados por correções de alta ordem para a relação de dispersão. Recentes trabalhos (SOTIRIOU, 2018) mostraram que quando essas correções estão presentes irá existir uma excitação escalar. Logo, a observação da violação da simetria de

Lorentz deve levar a uma detecção de ondas escalares com velocidade distinta das ondas com as duas polarizações convencionais. É tema central desse trabalho estudar o efeito que uma violação espontânea causa nas características das OG. O restante do trabalho é organizado da seguinte maneira.

No Capítulo dois serão abordadas um conjunto de simetrias conhecidas como simetria CPT. Irá ser comentado sucintamente sobre o Teorema CPT e a relação com a violação da simetria de Lorentz. Além disso, irá ser introduzida de forma simples a simetria de Lorentz e um exemplo básico em que sua violação ocorre. Também será pontuada a quebra explícita de simetria.

No Capítulo três irá ser deduzida a EE através do princípio variacional, em que o cálculo será realizado por meio de uma Lagrangeana apropriada. Irá ser mostrada a dedução da equação para o vácuo e a de dedução da equação com a presença do termo de fonte. O MP e o MPE irão ser abordados, em que serão comentadas suas características e como se dão suas aplicações. Também será discutida com mais aprofundamento a violação espontânea da simetria de Lorentz em que serão introduzindo os modos de Nambu-Goldstone (NG), bem como sua relação com a quebra de difeomorfismo. Tal relação é estabelecida através do formalismo de *vierbeins*. Por fim, irá ser apresentado um dos modelos mais simples e mais utilizados na academia para o estudo da violação da simetria de Lorentz, o modelo do campo de bumblebee, em que será mostrada a Lagrangeana modificada pela presença de termos que violam a simetria de Lorentz. Também serão deduzidas as equações de movimento, bem como o propagador para o gráviton que será primeiro utilizado para o cálculo do potencial Newtoniano modificado e depois para a obtenção da equação modificada para o gráviton.

No Capítulo quatro irão ser abordadas de fato as OG. A EE será linearizada mostrando que efetivamente em posse de um gauge adequado a solução levará as OG. Irá ser demonstrado que o movimento relativo de partículas devido a interação com uma OG passante levará a dois tipos de polarizações para a onda, as conhecidas polarização $+$ e polarização x . Também será mostrada a equação que rege a produção de OG para fontes isoladas e distantes da medição da onda.

Por fim, no Capítulo cinco irá ser analisada a relação de dispersão modificada, em que será estudada a causalidade e a unitariedade. Além disso, será solucionada a equação modificada do gráviton, em que serão estudadas as polarizações modificadas devido a existência do campo de bumblebee. Finalmente, alguns limites para a teoria serão obtidos.

2 TRANSFORMAÇÕES E SIMETRIAS: LORENTZ E CPT

Neste capítulo, será abordado de forma lacônica o estudo de um conjunto de simetrias conhecidas como simetria de conjugação de carga, simetria de paridade e simetria de reversão temporal. Irá ser comentado o significado de cada uma das simetrias, suas implicações físicas, bem como suas violações e será apresentado o teorema CPT. Além disso, serão introduzidas as violações da simetria de Lorentz, espontânea e explícita.

2.1 Simetria CPT

A teoria de campos faz utilização das simetrias existentes na natureza para expressar diversos resultados físicos. Até o século XX as simetrias não desempenhavam um papel importante em física teórica, ou seja, mesmo que as leis de conservação de momento e energia fossem consideradas de fundamental importância, elas eram vistas como consequência das leis naturais, não como das simetrias que sustentam essas leis. O primeiro a considerar o princípio da simetria como característica principal da natureza foi Einstein, com a teoria da relatividade restrita (1905). O Teorema de Noether estabelece que se existe uma simetria contínua global, então há uma lei de conservação associada (GROSS, 1996). O contrário também vale, se há uma lei de conservação, então há uma simetria contínua associada a esta lei. Por exemplo, a invariância das leis físicas em relação ao tempo confere a conservação de energia. Já a invariância das leis físicas sob transformações espaciais confere a conservação de momento linear. Existe também a simetria de gauge, que é utilizada na gravitação, na eletrodinâmica e nas interações fraca e forte.

Além disso, existem as simetrias de conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T), que juntas formam uma simetria fundamental estudada na teoria quântica de campos. Ao utilizar a simetria C uma partícula se torna sua antipartícula ou vice-versa. Ou seja, se um elétron for submetido a essa simetria ele se torna um pósitron. Utilizando a simetria P trocam-se os sinais das coordenadas espaciais, logo se uma partícula bosônica possui spin +1 ele se tornará -1 com a aplicação da paridade. Por fim, a simetria de reversão temporal T estabelece que as leis da física não fazem distinção entre processos que retrocedem ou avançam no tempo. Estudos realizados com Teoria de cordas (KOSTELECKÝ; POTTING, 1991) e com MP (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997) demonstraram que a aplicação das três simetrias CPT em uma partícula resulta em um processo natural, ou seja, em uma partícula que existe na natureza.

Observa-se que em alguns casos as simetrias descritas são violadas. A paridade é

violada na interação fraca (LEE; YANG, 1956), (ANTYPAS et al., 2018). Além disso, também foi constatado que a simetria de conjugação de carga também é violada na interação fraca. É sabido que em algumas situações a aplicação conjunta da simetria C e P é válida. No entanto, no estudo (CHRISTENSON et al., 1964) foi detectado um processo físico no qual a simetria CP é violada. Realizou-se um experimento no acelerador de partículas em que foi visto que para uma partícula denominada Kaon, a conversão de antipartícula (antikaon) em partícula era mais frequente, violando CP. Por fim, apesar de atualmente a simetria CPT ser mantida em todos os casos físicos conhecidos que podem ser experimentados, ela é quebrada por vários meios distintos no âmbito teórico da gravidade quântica (MAVROMATOS, 2005).

Ademais, já que o estudo da quebra da simetria de Lorentz aplicada as ondas gravitacionais é tema central desse trabalho e que a quebra da simetria CPT, necessariamente implica na violação da simetria de Lorentz, justifica-se a importância dessa seção. Assim, apresenta-se de uma forma resumida o teorema CPT.

2.1.1 Teorema CPT

Grosseiramente falando, o teorema CPT estabelece que toda teoria quântica de campos relativística tem uma simetria que reverte a carga, reverte a orientação de espaço e reverte a direção do tempo (GREAVES; THOMAS, 2014). Ou seja, a simetria CPT vale para todos os fenômenos físicos que são invariantes por Lorentz. Para entender a enunciação do teorema, precisa-se de algumas definições e conceitos.

Definição 2.1: Grupo de Lorentz

O grupo de Lorentz L é um grupo constituído de todas as isomerias em um subespaço M :

$$L = \{g \in GL(M) \mid \eta(gv, gw) = \eta(v, w) \quad \forall v, w \in M\}$$

L possui quatro componentes:

- 1) Grupo de Lorentz ortocrônico próprio L_+^\uparrow : preserva P e T;
- 2) Grupo de Lorentz ortocrônico impróprio L_-^\uparrow : reverte apenas P;
- 3) Grupo de Lorentz não ortocrônico impróprio L_-^\downarrow : reverte apenas T;
- 4) Grupo de Lorentz não ortocrônico próprio L_+^\downarrow : reverte P e T.

Desse modo, observa-se que as simetrias PT e CPT estão ambas incluídas no grupo 1. A diferença entre as duas reside no fato de que a CPT altera partículas e antipartículas, e a PT altera apenas partículas.

Seja $\kappa \equiv C^\infty(M, V)$ um conjunto de campos cinematicamente permitidos que consistem de todas as funções suaves do espaço-tempo M ao espaço vetorial real V . Diante disso,

define-se,

Definição 2.2: Fórmula diferencial

É uma combinação polinomial dos componentes derivados de um campo puramente simbólico ϕ . Uma fórmula diferencial F determina um operador diferencial D_f que atribui a cada campo clássico $\phi \in \kappa$ a mesma combinação polinomial de seus componentes derivados. Assim, κ^{form} é o conjunto de todas as fórmulas diferenciais. Diante disso, pode-se enunciar um caso específico do teorema CPT,

Teorema CPT quântico para tensores.

Cada ação geométrica de L_+^\uparrow se estende a uma ação geométrica de L_+ . Com respeito às correspondentes ações quânticas em κ^{form} :

- 1) Toda teoria de campos formal invariante por L_+^\uparrow é L_+ invariante. A assertiva é válida desde que a teoria de campos formal seja hermitiana e comutativa.
- 2) Se L_+^\uparrow preserva carga, então L_+^\downarrow conjuga carga.

Para uma versão mais detalhada e completa do Teorema, por favor veja a referência (GREAVES; THOMAS, 2014).

Com o intuito de finalizar essa seção, pode-se exemplificar a utilização da simetria CP para o caso de uma transformação de uma partícula W^- em sua antipartícula W^+ . Suponha que a partícula sofra um decaimento e com isso surja um elétron e^- e um antineutrino $\bar{\nu}$. Aplicando-se a simetria C no decaimento, o elétron se torna pósitron e o antineutrino se torna neutrino. Sabe-se que essa transformação não é encontrada naturalmente, assim, constata-se que a simetria C aplicada sozinha não é válida. Porém, aplicando a simetria P após a aplicação da simetria C, os spins das partículas são invertidos e a partícula W^+ decai em um pósitron e em um neutrino, com spin no sentido do seu movimento e contrário, respectivamente. Daí, constata-se que essa transformação é encontrada naturalmente, validando a CP nesse caso.

2.2 Simetria de Lorentz

No final do século XIX a não invariância das equações de Maxwell por uma transformada de Galileu inquietava os físicos, pois estas equações estavam bem estabelecidas, já que elas previam a existência de ondas eletromagnéticas e eram compatíveis com a equação de onda. Além disso, a velocidade de propagação dessa onda é relacionada com as duas constantes fundamentais do eletromagnetismo, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Ora, como a concordância experimental desse valor era excelente a hipótese de que a luz era de fato uma onda eletromagnética possuía consistência. Porém, para resolver o impasse de que as equações de Maxwell não eram invariantes sob uma

transformação de Galileu, os físicos da época levantaram três hipóteses (GAZZINELLI, 2005).

- 1) As equações de Maxwell estavam incorretas;
- 2) Existe um éter estacionário como sendo um sistema de referência preferencial, ou seja, em outros referenciais as equações de Maxwell precisavam ser modificadas;
- 3) A transformação de Galileu não está correta e as equações de Maxwell possuem a mesma forma em todos os sistemas de referência que se movem com velocidade constante em relação aos outros.

Com isso, foram realizados diversos testes e experimentos para tentar identificar a existência do éter. Dentre eles, cita-se a aberração da luz das estrelas, que é um desvio na posição aparente das estrelas. O fenômeno foi descoberto em 1728 pelo Astrônomo James Bradley, que concluiu que a disparidade era devido a velocidade finita da luz e da velocidade de translação da terra (GAZZINELLI, 2005). Porém, o experimento que foi determinante na escolha da hipótese correta foi o experimento de Michelson e Morley (1881-1887). O experimento realizado tentava medir a velocidade da terra em relação a um referencial absoluto. Ele foi realizado em diversas épocas do ano e no final foi constatado que não existe um sistema preferencial e que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.

Diante desse contexto, em 1892 E. Lorentz propôs um conjunto de equações que relacionavam dois referenciais inerciais S e S'

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\t' &= \gamma(t - vx/c^2), \\y' &= y, \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que as variáveis com a linha representam o referencial S' que se move com velocidade constante v em relação ao referencial S . Estas equações são conhecidas como transformadas de Lorentz. O fator γ é conhecido como fator de Lorentz, sendo dado por,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{2.2}$$

Ressalta-se que nesse caso se considerou os referenciais com velocidade apenas na direção x . As transformadas de Lorentz deixam as soluções das equações de Maxwell invariantes (BELICH et al., 2007), ou seja, mostrou-se que elas realmente não dependiam do referencial adotado, ao contrário do que se calculava com a transformada de Galileu. Já em 1898 Poincaré realizou estudos sobre sincronização e simultaneidade, bem como a invariância das leis da física.

Finalmente, em 1905, Einstein enunciou os dois postulados da Relatividade especial.

- 1) As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial;
- 2) A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial.

Em posse desses dois postulados Einstein não só derivou as transformações de Lorentz, como deu a interpretação física para elas. Observando que qualquer referencial observa a luz se propagando esfericamente com velocidade c , as equações que descrevem a situação nos referenciais S e S' são respectivamente,

$$\begin{aligned}c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0, \\c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Logo, fazendo

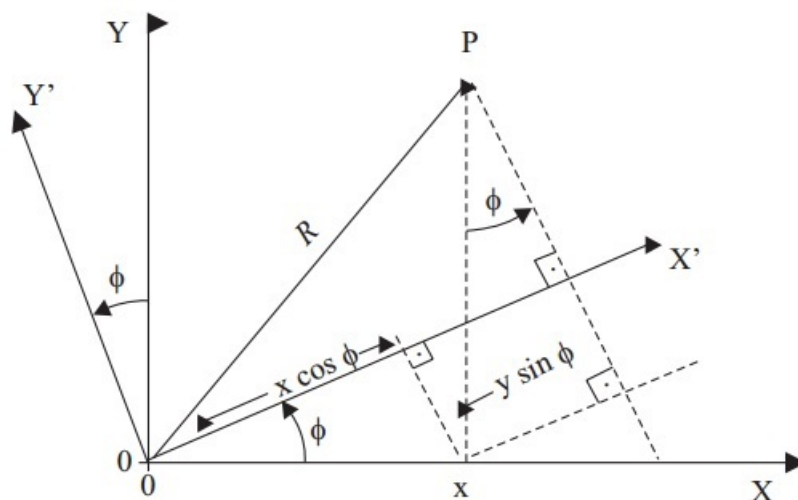
$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2,\tag{2.4}$$

nota-se que as soluções são as transformadas de Lorentz.

2.2.1 Rotações Passivas e Ativas

Existem dois tipos de rotações, as ativas e as passivas. Nas rotações passivas, o sistema de eixos é rotacionado, enquanto os pontos do espaço-tempo permanecem imóveis. A Fig. 1 demonstra a rotação passiva.

Figura 1 – Rotação Passiva



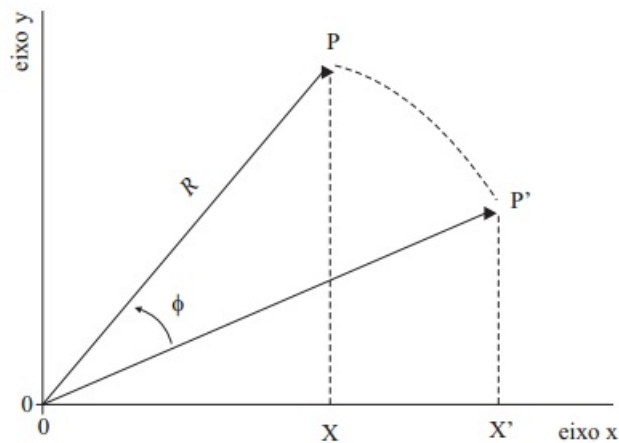
Fonte: (BELICH et al., 2007).

As equações da transformação passiva são dadas na forma matricial por,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen} \phi \\ -\text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Nas rotações ativas, o sistema de eixos permanece imóvel, enquanto os pontos do espaço-tempo são rotacionados. A Fig. 2 demonstra a rotação ativa.

Figura 2 – Rotação Ativa



Fonte: (BELICH et al., 2007).

As equações da transformação ativa são dadas na forma matricial por,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen} \phi \\ \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

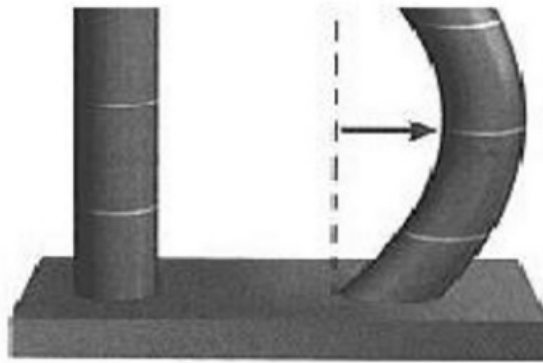
Diante do exposto, percebe-se que as duas transformações são equivalentes. Ou seja, o resultado é o mesmo ao se utilizar uma rotação passiva ou uma rotação ativa.

2.3 Quebra espontânea da simetria de Lorentz

Para compreender de forma clara a quebra de simetria é preciso entender da maneira mais simples o que é uma quebra de simetria espontânea. Um dos exemplos mais elucidativos é a quebra de simetria espacial de uma vareta rígida que ao ser comprimida contra o chão fica impossível dizer em que direção ela irá dobrar. Nesse caso, observa-se que há uma quebra espontânea de simetria de rotação. A Fig. 3 mostra a ideia.

Dessa forma, percebe-se que quando há uma simetria violada, tem-se uma direção preferencial no espaço-tempo. Outro exemplo que pode ser citado é a quebra de simetria espacial que ocorre em um modelo do ferromagnetismo em física estatística, conhecido como modelo Ising. Ao ocorrer uma transição de fase os spins que antes estavam desordenados são orientados em uma mesma direção. Dessa forma surge um campo magnético como campo de fundo,

Figura 3 – Quebra de simetria espacial

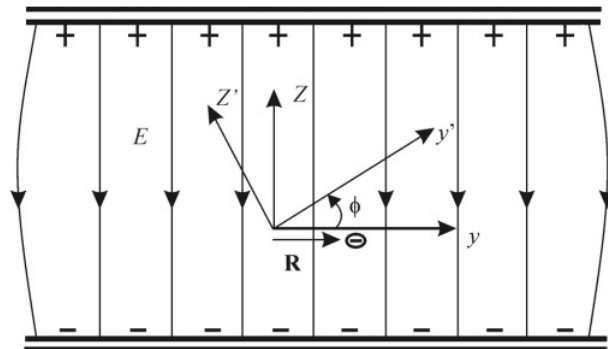


Fonte: H. Belich(2007)(BELICH et al., 2007).

que espontaneamente seleciona uma direção preferencial, quebrando a simetria (STOJKU, 2017). Ademais, um dos exemplos mais famosos da violação espontânea de uma simetria ocorre no mecanismo de Higgs. Além disso, a quebra de simetria de forma espontânea também ocorre no âmbito da teoria de cordas. O trabalho que lançou a ideia de que a invariância de Lorentz possa ser quebrada espontaneamente quando uma corda perturbativa no vácuo é instável foi proposto por Kostelecký e Samuel em 1989 (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989). No trabalho eles estudaram a teoria de cordas covariante para explorar a possibilidade da quebra espontânea da simetria de Lorentz. Diante disso, vários estudos foram desenvolvidos em torno dessa temática, dentre eles, cita-se a eletrodinâmica quântica, em que os termos de quebra da simetria de Lorentz podem ser tratados como perturbações na equação de Dirac (RÊGO et al., 2018).

Agora, pode-se demonstrar que a equivalência das rotações passivas e ativas é quebrada quando existe um campo de fundo. Considere um elétron imerso em um campo elétrico produzido por duas placas paralelas. O sistema pode ser representado por um elétron e um capacitor. Ao realizar uma transformação passiva o vetor posição do elétron $\vec{R} = (0, a, 0)$ não sofre alteração. O sistema descrito, bem como a orientação dos eixos são mostrados na Fig. 4.

Figura 4 – Rotação passiva na presença de um campo de fundo

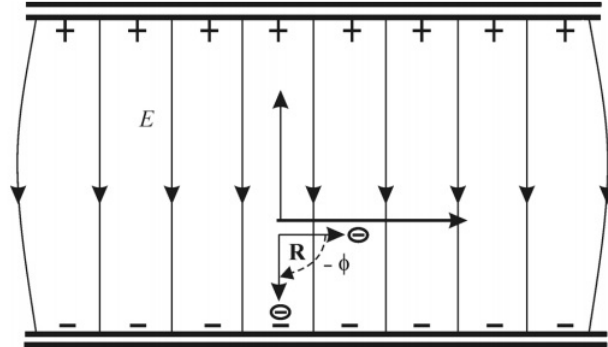


Fonte: (BELICH et al., 2007).

No entanto, caso seja realizada uma rotação ativa, isto é, os eixos ficam imóveis

enquanto o elétron sofre rotação, o vetor posição do elétron se torna $\vec{R} = (0, 0, -a)$. A Fig. 5 mostra o caso.

Figura 5 – Rotação ativa na presença de um campo de fundo



Fonte: (BELICH et al., 2007).

Ou seja, a simetria que antes existia foi quebrada, pois agora o vetor que localiza o elétron não está mais ortogonal em relação ao vetor que representa o campo de fundo; ele se encontra paralelo em relação ao campo. Diante dos exemplos e da problemática da não equivalência das transformações passivas e ativas, criou-se as transformações de Lorentz de partícula e de observador, discutidas na seção seguinte.

2.3.1 Transformações de Observador e Partícula

Em posse das equações das transformações passivas e ativas, pode-se generalizar a ideia para as transformadas de Lorentz. Assim, a transformação de observador é associada a transformação passiva e suas equações são

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ct' &= \gamma(ct - vx/c) \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}\tag{2.7}$$

fazendo-se a mudança de variável $\text{tgh}\alpha = v/c$, tem-se que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tgh}^2\alpha}}.\tag{2.8}$$

Mas,

$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1 \rightarrow 1 - \text{tgh}^2\alpha = \text{sech}^2\alpha.\tag{2.9}$$

Assim, a Eq. (2.8) se torna,

$$\gamma = \cosh \alpha. \quad (2.10)$$

Além disso,

$$\sinh \alpha = \gamma \frac{v}{c}. \quad (2.11)$$

Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} x' &= -\sinh \alpha ct + \cosh \alpha x, \\ ct' &= \cosh \alpha ct - \sinh \alpha x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dessa forma, percebe-se que se $ct' = y'$, $ct = y$, e $\alpha = i\phi$ as equações das rotações são recuperadas. Isto é, o conjunto de equações apresenta o mesmo formato, logo, pode-se caracterizar o comportamento de um campo de fundo quando ocorre uma rotação. Já a transformação de partícula é associada a transformação ativa. Portanto, suas equações são,

$$\begin{aligned} x' &= \sinh \alpha ct + \cosh \alpha x, \\ ct' &= \cosh \alpha ct + \sinh \alpha x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.13)$$

As referências (BELICH et al., 2007) e (RÊGO et al., 2018) mostram que quando se realiza uma transformação de partícula sob um elétron imerso em um campo elétrico produzido por um capacitor, ocorre a violação da simetria de Lorentz. Ou seja, fica evidente que a presença de um campo de fundo, em outras palavras, um campo que não se tem controle quebra espontaneamente a simetria de Lorentz em uma transformação de coordenadas ativa. Os estudos constataram que sob uma transformação de partícula o campo elétrico do capacitor fica inalterado e o alcance do elétron em movimento é reduzido.

Outro fato importante a se destacar é que quando ocorre uma transformação de observador na presença de um campo eletromagnético, um campo magnético transversal surge e o novo campo elétrico é maior. A causa disso é devido a covariância de Lorentz existente nas leis do eletromagnetismo, ou seja, os campos elétrico e magnético se transformam como tensores. Contudo, ao ocorrer uma transformação de partícula o campo elétrico de fundo se transforma como um escalar. Irá ser voltado a falar sobre quebra espontânea de Lorentz no

Capítulo 3.

2.4 Quebra explícita da simetria de Lorentz

A quebra da simetria de Lorentz é explícita quando um campo de fundo fixo que não seja dinâmico e nem sofra variações aparece diretamente na Lagrangeana da teoria (BLUHM, 2015). Teorias de gravitação em que esse tipo de violação ocorre são, por exemplo, as teorias de gravidade massiva e teorias de gravitação de Chern-Simons (JACKIW; PI, 2003). Em uma teoria gravitacional, é preciso que a covariância geral seja compatível com as identidades geométricas (as de Bianchi), com as equações de movimento e com a conservação do tensor de energia-momento. Esse requerimento é direto, já que a equação de campo da RG se desenvolve a partir desses princípios.

Para tanto, os trabalhos (KOSTELECKÝ, 2004) e (BLUHM, 2013) mostraram que a quebra de simetria explícita é incompatível com a geometria de Riemann-Cartan, que é uma geometria na qual o espaço, além da curvatura, possui torção. As identidades de Bianchi são amarradas às equações de movimento, implicando em certas condições nas fontes de matéria. Quando há quebra explícita de simetria com essas condições a lei de conservação de energia-momento é alterada (SCHRECK, 2017), chocando-se com as identidades de Bianchi. Note que na RG as identidades contraídas de Bianchi são $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, enquanto as equações de campo são $G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$ (observe que aqui $c = 1$). Aplicando ∇_μ nesta última equação, tem-se $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Logo, caso as identidades de Bianchi não sejam satisfeitas a conservação do tensor de energia-momento não valeria mais. Além disso, destaca-se que a quebra espontânea de simetria é compatível com a geometria adotada. Contudo, existe uma terceira via de violação de simetria, em que a métrica do espaço-tempo já contém termos que violam localmente a simetria de Lorentz. Tal fato é encontrado com a utilização da geometria de Finsler (SILVA; ALMEIDA, 2013).

Nesse capítulo, abordou-se de forma básica a simetria CPT e como ocorre a violação da simetria de Lorentz, seja explícita ou espontânea. No próximo capítulo irá ser discutido como de fato a quebra de simetria espontânea age na relatividade. Para tanto será apresentado o modelo matemático no qual é considerado a quebra de simetria de forma espontânea.

3 RELATIVIDADE GERAL E MODELOS DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Nesse capítulo será explorada a equação de campo da RG. Será feita sua dedução através do princípio variacional considerando a ação de Einstein-Hilbert e a ação de matéria e também serão comentadas algumas de suas características. Além disso, irá ser apresentado o formalismo de *vierbein* para que seja estudado o difeomorfismo e a quebra espontânea da simetria de Lorentz. Por fim, será apresentado o modelo bumblebee para a violação da simetria de Lorentz, em que será deduzido o propagador para o gráviton e calculado o potencial Newtoniano modificado.

3.1 Equação de Einstein

De uma forma sucinta a equação de campo de Einstein mostra a relação entre curvatura do espaço-tempo e energia-momento. Ou seja, dada a presença de um corpo massivo no espaço-tempo, pode-se prever de qual forma o espaço-tempo será deformado por conta da presença dessa massa. Uma forma elegante de deduzir a EE é utilizando o princípio da mínima ação,

$$\delta S = 0. \quad (3.1)$$

Essa é a abordagem mais utilizada para deduzir as equações de movimento nas teorias de campo. O primeiro passo para determinar a forma da EE é saber qual Lagrangeana utilizar. Em uma demonstração mais geral, em que a teoria na qual as variáveis dinâmicas são o conjunto de campos Φ^i pode-se considerar uma ação na seguinte forma,

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla_\mu \Phi^i) d^n x. \quad (3.2)$$

Nesse caso, como o elemento $d^n x$ é uma densidade escalar de peso -1, tem-se que a densidade Lagrangeana é uma densidade escalar de peso +1. Para ver a dedução completa, veja o Apêndice A. Portanto, a EE é dada por,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) fornece a relação entre geometria e energia. A princípio, como ambos os lados da equação apresentam tensores de segunda ordem simétricos, tem-se um conjunto de 10 equações diferenciais de segunda ordem independentes para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Contudo, nos casos em que as identidades contraídas de Bianchi valem, isto é $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, tem-se um conjunto de 6 equações independentes, visto que a identidade fornece quatro vínculos.

Ademais, (3.3) não é linear, isto é, se duas soluções distintas são conhecidas, a soma das duas não será uma solução, invalidando a superposição. Tal não linearidade pode ser

explicada pelo fato de que o campo se acopla com ele mesmo e isso é consequência direta do princípio da equivalência, pois caso o campo não acople com si próprio um átomo gravitacional composto por duas partículas deve possuir massa inercial diferente da massa gravitacional, já que existe a energia de ligação entre eles. Sabendo disso, é de conhecimento geral que não existem métodos analíticos gerais para solucionar equações não lineares, são poucos casos para os quais existem uma metodologia de fácil aplicação. Apesar de tal desvantagem, a não linearidade representa um desvio interessante da teoria da gravitacional de Newton. Tal desvio é detectável através do estudo da precessão da órbita de mercúrio, em que o efeito é acentuado por conta do acoplamento do campo com si próprio e quanto mais próximo do sol, maior o efeito. Como uma das últimas características, cita-se a propriedade atrativa da gravitação. Pode-se observar isso através da equação de Raychaudhuri, que relaciona a variação do volume em relação ao tempo próprio de uma bola composta por partículas e parâmetros do espaço-tempo. Como alguns pontos fogem do escopo desse trabalho, o leitor pode consultar (CARROLL, 2004). Em certas condições essa variação é dada por

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -4\pi G(\rho + p_x + p_y + p_z), \quad (3.4)$$

em que ρ é a energia de repouso e os p_i são as pressões referentes as coordenadas i . Assim, para todas essas quantidades positivas, observa-se que o volume da bola se reduz, indicando que o campo gravitacional criado pela energia e pela pressão fornece uma gravidade atrativa. É óbvio que se essas quantidades apresentassem valor negativo no somatório da Eq. (3.4) a gravidade seria repulsiva.

Uma das soluções para a EE foi proposta por Schwarzschild em 1916. Ele considerou uma distribuição esfericamente simétrica e estática de massa M e calculou a métrica no exterior dessa massa. Como resultado, pode-se estudar o movimento dos planetas, a deflexão da luz provocada por uma massa e a previsão do avanço do periélio na órbita de Mercúrio (GODOI, 2014).

3.2 Modelo padrão Estendido - Setor gravitacional

Nessa seção irá ser comentada sobre a violação espontânea da simetria de Lorentz nos modelos de gravitação. Irá ser discutido sobre o MPE, os modos sem massa de NG, *viebeins* e sobre um modelo simples para a violação de Lorentz conhecido como bumblebee.

3.2.1 Modelo Padrão

O MP de partículas descreve três das quatro forças fundamentais da natureza, além de descrever quanticamente todas as partículas conhecidas. Ele consiste em três tipos de cam-

pos: campos de gauge, campos de Higgs e férmions (CARROLL, 2004). Os campos de gauge descrevem as forças da natureza, eletromagnética, fraca e forte. No caso das forças nucleares a descrição feita leva em consideração a existência de um potencial, assim como é observado na eletrodinâmica. Contudo, no caso das interações fracas e fortes esse potencial é dado por uma matriz e na eletrodinâmica é dado por um escalar. Ademais, os grupos de simetria das transformações de gauge são não abelianos no caso das forças nucleares. Por sua vez, o campo de Higgs é um campo escalar, embora sejam dados por matrizes. Por sua vez, os férmions incluem os léptons e os quarks e são descritos por espiniores

Vale ressaltar que uma das dificuldades de conciliar a RG com a mecânica quântica é que a RG não é renormalizável, assim como o MP é. Contudo, uma teoria que não é renormalizável não é necessariamente incorreta, mas sugere-se que ela deve ser levada em conta até uma dada escala de energia. Desse modo, constata-se que os efeitos quânticos da gravidade são observáveis em escalas de energias em que os atuais aparatos experimentais não conseguem alcançar (LEHNERT, 2011). Essas limitações estão diretamente relacionadas com a constante de Planck. Nesse âmbito, tem-se a massa de Planck m_p , comprimento de Planck l_p , tempo de Planck t_p e a energia de Planck E_p . Logo, notando que todos os valores estão bem distantes dos valores apresentáveis por fenômenos observáveis a construção de uma teoria quântica da gravidade é mais uma questão de princípio do que prática.

Porém, para contornar esses problemas, a comunidade acadêmica definiu três critérios-chaves nos quais se deve submeter as leis físicas (LEHNERT, 2011).

- 1) Deve-se focar nas leis que sustentam as teorias físicas fundamentais. Isto é, caso algum desvio dessas leis seja detectado é indicativa de existência de uma nova física;
- 2) Caso se tenham leis testes que possuam previsão de serem violadas em uma física fundamental, estas leis são as que possuem a maior probabilidade de apresentarem tais desvios;
- 3) Essas leis devem ser detectadas em experimentos de altíssima precisão.

Uma lei física que cumpre esses três requisitos é a simetria CPT. Sabe-se que do teorema CPT, caso a simetria CPT seja violada a simetria de Lorentz também é. Assim, uma elegante possibilidade é que a simetria de Lorentz quebre espontaneamente em uma última teoria fundamental. Como dito, o efeito da gravidade quântica, por mais que seja pequeno, deve ser detectado em experimentos com alta sensibilidade. Assim, é sustentado que dentro destes efeitos estão as violações da relatividade, surgindo a partir de uma quebra de simetria de Lorentz. A simetria de Lorentz é um dos pilares tanto da RG quanto do MP, porém é sugerido que ela não é uma simetria fundamental da natureza e pode ser quebrada em algum nível.

Algumas motivações para isso são encontradas na teoria de cordas (KOSTELECKÝ;

SAMUEL, 1989), gravidade quântica em *loop* (GAMBINI; PULLIN, 1999), geometria não comutativa (HAYAKAWA, 2000), multiversos (BERNARDEAU, 2006) e branas (BURGESS et al., 2002). Além das motivações teóricas, existem também motivações experimentais. Algumas observações do espectro de estrelas sugerem mudanças no valor da constante de estrutura fina ($\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$) (BARROW, 2005). Como uma das constantes presente em seu cálculo é a velocidade da luz, uma das suspeitas da mudança desse valor é devido a uma violação da simetria de Lorentz. Alguns limites que relacionam a violação da simetria de Lorentz com a variação da constante de estrutura fina são encontrados em (LEEFER, 2013). Outro exemplo é a observação de raios cósmicos de alta energia com uma energia acima do limite GZK ($E_{GZK} = 4.10^{19} eV$). Uma explicação para esse fato é que estes raios cósmicos estariam chegando na terra com uma velocidade acima da velocidade da luz e um possível explicação é a violação espontânea da simetria de Lorentz (MOFFAT, 2003).

Apesar do sucesso da RG e do MP admite-se que elas não são a última descrição da natureza, mas apenas uma aproximação de baixas energias de uma teoria mais geral, pois além do que já foi comentado, existem observações que exigem a introdução de matéria escura e energia escura que desviam de ambas as teorias, visto que elas não são explicadas por essas abordagens (DEBONO; SMOOT, 2016).

O MPE é a teoria de campo efetiva que vem sendo desenvolvida a fim de considerar todas as violações da invariância de Lorentz e CPT. Ela é uma extensão do MP e da RG juntamente com as tais violações (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997). Nesse trabalho, o interesse é no setor gravitacional do MPE, em que uma nova estrutura é proposta para o tratamento da RG. Essa estrutura traz novos termos na ação da teoria que violam a simetria de Lorentz. O princípio é simples: basta estender a ação de Einstein-Hilbert adicionando termos que são formados pela contração de novos campos com alguns operadores construídos a partir dos tensores de curvatura e suas respectivas derivadas covariantes (BAILEY, 2017). O detalhamento de um dos tipos dessa ação, bem como sua variação será abordado na subseção de modelo de bumblebee.

3.2.2 *Violação espontânea de Lorentz e difeomorfismo*

Quando uma simetria é analisada é percebido que em um nível dinâmico ela se mantém intacta com consistência assegurada. Contudo, a solução com a menor energia é quem está associada com a perda de simetria. A fim de tornar mais claro a compreensão do fenômeno da quebra de simetria em campos, três exemplos serão mostrados.

1) Eletrodinâmica Clássica

Considerando unidades naturais, a densidade de energia para um campo eletro-

magnético é dada por

$$V(\vec{E}, \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (3.5)$$

em que densidade de energia só é nula quando os dois campos são nulos. Assim, o vácuo é identificado como estado de menor energia. Portanto, a configuração com menor energia é a de campo livre.

2) Campo de Higgs

Tal campo está incluído no MP de partículas e como dito anteriormente é um campo escalar no qual a densidade de energia é

$$V(\phi) = g(\phi^2 - \lambda^2)^2, \quad (3.6)$$

em que todos os parâmetros da equação são constantes. Observa-se que a menor configuração de energia é para $\phi = \pm\lambda$. Como resultado o valor esperado no vácuo (VEV) do campo não é zero. Pontua-se que os efeitos decorrentes desse VEV no MP é gerar massa para várias partículas elementares. Ressalta-se que $\langle\phi\rangle$ é um escalar e, portanto, não seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo, preservando a simetria.

3) Campo vetorial-3 \vec{R}

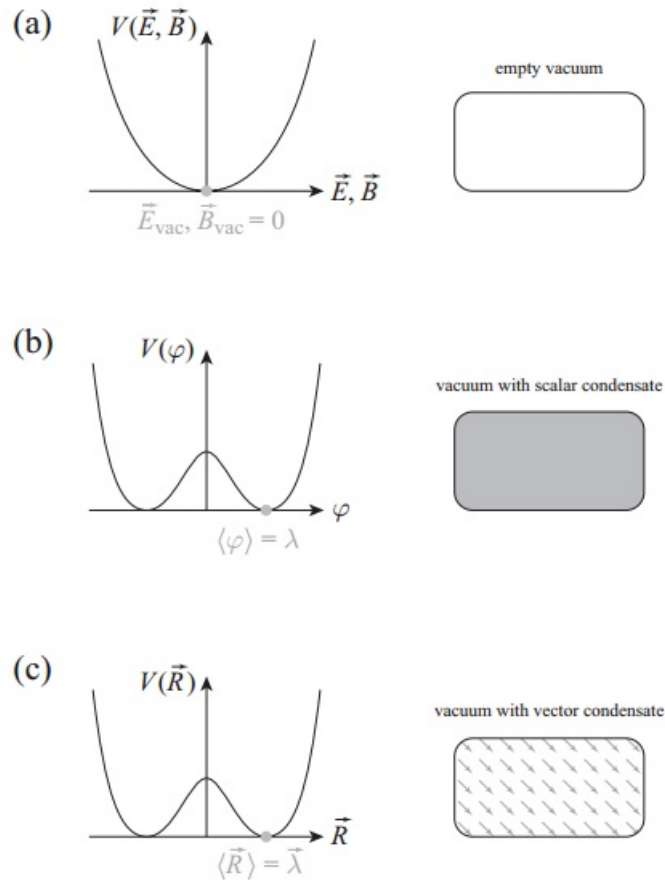
Esse é um campo teórico que não está contido no MP e não há evidência observacional até o momento. Sua densidade de energia é prevista ser semelhante a do campo de Higgs,

$$V(\vec{R}) = (\vec{R}^2 + \vec{\lambda}^2)^2. \quad (3.7)$$

Aqui, têm-se as mesmas considerações encontradas no exemplo 2. Contudo, como se tem um vetor o seu VEV $\langle\vec{R}\rangle = \pm\vec{\lambda}$ seleciona uma direção preferencial no espaço, violando a simetria de rotação e consequentemente violando a simetria de Lorentz. Interações que geram densidades de energias como essa estão ausentes nas teorias de gauge convencionais (LEHNERT, 2011), mas podem ser encontradas nas teorias em que a violações de Lorentz são encontradas. A Fig. 6 exemplifica os três exemplos citados.

Assim, as interações entre campos tensoriais são quem desencadeiam a formação de valores esperados no vácuo que são diferentes de zero para os tensores de Lorentz, implicando em uma violação espontânea (BLUHM; KOSTELECKÝ, 2005). Quando uma simetria global é espontaneamente quebrada modos sem massa conhecidos como modos de NG aparecem (GOLDSTONE, 1961). Porém, se ao invés disso uma simetria local de uma teoria de gauge for espontaneamente quebrada, então os bósons de gauge da simetria quebrada se tornam modos massivos através do mecanismo de Higgs (ENGLERT; BROUT, 1964). Para ver sobre

Figura 6 – Densidade de energia para os exemplos dados. No item (a) é visto que o vácuo é livre de campos, no item (b) o vácuo um escalar que é representado pela cor cinza e no item (c) o vácuo contém um vetor no qual o seu VEV seleciona uma direção preferencial.



Fonte: R. Lehnert(2011).

o mecanismo de Higgs, consulte o Apêndice C. A existência de VEV para campos tensoriais afeta o comportamento das partículas que se acoplam a ele, direta ou indiretamente. Os efeitos são introduzidos via introdução de coeficientes para violação de Lorentz carregando índices do espaço-tempo (MAVROMATOS, 2005).

Para o setor gravitacional do SME ser tratado é preciso introduzir o formalismo *vierbein* (UTIYAMA, 1956). O formalismo faz a distinção entre referenciais locais de Lorentz e referenciais de coordenadas em uma variedade, sendo adequado para investigações de quebra de simetria CPT e Lorentz (HIGGS, 1964). O *vierbein* é um objeto que conecta um campo tensorial $T_{\lambda\mu\nu\dots}$ em uma base de coordenadas e um campo tensorial $T_{abc\dots}$ em um referencial local de Lorentz. A relação é dada por,

$$T_{\lambda\mu\nu\dots} = e_{\lambda}^a e_{\mu}^b e_{\nu}^c \dots T_{abc\dots} \quad (3.8)$$

Tem-se que na base de coordenadas, as componentes da métrica do espaço-tempo são $g_{\mu\nu}$, enquanto no referencial local de Lorentz as componentes da métrica são $\eta_{\mu\nu}$. Visto

isso é possível ver que esse formalismo é capaz de tratar os dois tipos básicos de transformações no espaço-tempo, as transformações locais de Lorentz e de difeomorfismo. O Apêndice B traz uma abordagem acerca de mapeamento entre variedades e difeomorfismo. A importância do difeomorfismo será visualizada na determinação dos gauges para as OG. Para transformações infinitesimais, tem-se que para no caso das transformações de Lorentz a matriz de transformação é

$$\Lambda^a{}_b \approx \delta^a{}_b + \varepsilon^a{}_b, \quad (3.9)$$

em que $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ são os parâmetros infinitesimais antissimétricos com seis graus de liberdade e que geram o grupo de Lorentz. Por outro lado, um difeomorfismo infinitesimal toma a forma,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}. \quad (3.10)$$

Nesse caso, ξ^{μ} é quem comporta os graus de liberdade para o difeomorfismo. Por sua vez, o valor esperado de vácuo do *vierbein* é uma constante ou uma função fixa, sendo ela a solução das equações gravitacionais ou especificada como um campo de fundo. No caso do espaço de Minkowski o seu valor é o próprio delta de Kronecker (BLUHM; KOSTELECKÝ, 2005).

Como comentado anteriormente e mostrado através de três gráficos, a violação espontânea da simetria de Lorentz ocorre quando aparecem VEV. Nesse caso, a Eq. (3.8) diz uma coisa importante: caso um VEV na forma $\langle T_{abc} \rangle = t_{abc}$ viole a simetria de Lorentz, então necessariamente existirá um valor esperado na base de coordenadas $\langle T_{\lambda\mu\nu} \rangle = t_{\lambda\mu\nu}$. Ou seja, caso ocorra uma violação de Lorentz, então necessariamente ocorrerá uma violação da invariância do difeomorfismo, o mesmo valendo para a relação inversa.

3.2.2.1 Transformações de observador e partícula revisitadas

No Capítulo 2 foram abordadas de uma forma mais intuitiva as transformações de partícula e de observador. Nessa seção, as definições serão ampliadas para a linguagem que está sendo desenvolvida. Aqui, deixa-se claro que a presença de valores esperados de vácuo distintos podem trazer mais do que dois casos de transformações (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997).

Na transformação de observador qualquer teoria válida é covariante havendo violação ou não da simetria de Lorentz (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997). Como visto, a transformação é simplesmente uma rotação (pode ser um *boost* também) em que os vetores são expressos em uma nova base, deixando a ação invariante. Logo se a ação não sofre alteração não é possível extrair uma informação física que não seja a esperada, isto é, de que o observador é independente do fenômeno físico.

Na transformação de partícula a rotação é na partícula e deixa-se claro que o VEV se mantém inalterado. Nesse caso, a invariância do sistema sobre uma transformação de partícula

tem consequência física. É válido dizer que também existe o difeomorfismo de partícula. A invariância local de Lorentz tem relação com os componentes antissimétricos do tensor energia-momento e a invariância de difeomorfismo implica na lei de conservação dele. A quebra espontânea dessas simetrias deixa as leis de conservação inalteradas, ao contrário da quebra explícita, como já foi mencionado no Capítulo 2 desse trabalho.

3.2.2.2 Modos de Nambu-Goldstone e análise perturbativa

Realizando no vácuo uma transformação de partícula para um gerador de quebra de simetria pode-se obter cada modo de NG da teoria. No regime linear, tem-se,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Como $g_{\mu\lambda} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\nu}$, tem-se em primeira ordem,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

O *vierbein* pode ser escrito como

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

em que as dez excitações simétricas $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ (isso será visto com detalhes no Capítulo 4) estão associadas com a métrica e as seis excitações antissimétricas $\chi_{\mu\nu} = -\chi_{\nu\mu}$ são os graus de liberdade locais de Lorentz. Por sua vez, o valor esperado de um tensor $T_{\mu\nu\dots}$ é $t_{\mu\nu\dots}$ tal que a variação em relação a esse valor é,

$$\delta T_{\mu\nu\dots} = (T_{\mu\nu\dots} - t_{\mu\nu\dots}). \quad (3.14)$$

A teoria possui um potencial na forma

$$V = V(T^{\lambda\mu\nu\dots} g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} g_{\nu\gamma} T^{\alpha\beta\gamma\dots} - t^2), \quad (3.15)$$

que pode desencadear um valor de vácuo $t_{\lambda\mu\nu\dots}$ ao se extremizado. Para tanto, precisa-se da condição

$$T^{\lambda\mu\nu\dots} g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} g_{\nu\gamma} T^{\alpha\beta\gamma\dots} = t^2, \quad (3.16)$$

em que $t^2 = t^{\lambda\mu\nu\dots} g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} g_{\nu\gamma} t^{\alpha\beta\gamma\dots}$.

Perceba que o potencial da Eq. (3.15) é da forma dos potenciais descritos pela Fig. (6). Assim, para que a condição da Eq. (3.16) seja satisfeita, basta utilizar os *vierbeins*, tal que,

$$T_{\lambda\mu\nu\dots} = e_{\lambda}^{\alpha} e_{\mu}^{\beta} e_{\nu}^{\gamma} \dots t_{\alpha\beta\gamma\dots}. \quad (3.17)$$

Elevando o índice do *vierbein* na Eq. (3.13), substituindo-os na Eq. (3.17) e considerando apenas os termos de primeira ordem, obtêm-se,

$$\delta T_{\lambda\mu\nu\dots} \approx \left(\frac{h_{\lambda\alpha}}{2} + \chi_{\lambda\alpha}\right)t_{\mu\nu\dots}^{\alpha} + \left(\frac{h_{\mu\alpha}}{2} + \chi_{\mu\alpha}\right)t_{\lambda\nu\dots}^{\alpha} + \dots \quad (3.18)$$

Finalmente, pode-se determinar a forma final da excitação $\delta T_{\lambda\mu\nu\dots}$ para transformações infinitesimais de Lorentz e de difeomorfismo. Ao realizar uma transformação infinitesimal de Lorentz, a excitação se torna

$$\delta T_{\lambda\mu\nu\dots} \approx -\varepsilon_{\lambda\alpha} t_{\mu\nu\dots}^{\alpha} - \varepsilon_{\mu\alpha} t_{\lambda\nu\dots}^{\alpha}, \quad (3.19)$$

em que os seis parâmetros $\varepsilon_{\mu\nu}$ determinam os geradores de Lorentz que aparecem na expressão. Nesse caso, dependendo da característica do valor de vácuo $t_{\mu\nu}$ podem surgir até seis excitações independentes. Já para uma transformação infinitesimal de difeomorfismo, tem-se,

$$\delta T_{\lambda\mu\nu\dots} \approx -(\partial_{\lambda}\xi^{\alpha})t_{\mu\nu\dots}^{\alpha} - (\partial_{\mu}\xi^{\alpha})t_{\lambda\nu\dots}^{\alpha} - \xi^{\alpha}\partial_{\alpha}t_{\lambda\mu\nu\dots} \quad (3.20)$$

Nesse caso, pode-se ter até quatro excitações independentes associadas a quebra do difeomorfismo. Conclui-se essa seção ressaltando que dependendo da dinâmica da teoria os modos de NG podem ser todos campos físicos sem massa, ou apenas alguns. Para analisar a teoria, basta expandir os campos ao redor dos seus valores de vácuo e manter os termos de ordem quadrática ou menor em sua Lagrangeana, o que será feito na próxima seção.

3.2.3 Modelo *bumblebee*

Foi visto que quando uma simetria é quebrada espontaneamente o vetor considerado atinge um valor esperado de vácuo. Nesse caso o modelo mais simples empregado é o *bumblebee*, na qual adiciona-se um vetor no espaço-tempo que possui uma direção preferencial. O trabalho que primeiro considerou foi o do Kostelecký sobre teoria de cordas. Já foi mostrado que o modelo *bumblebee*, além de possuir modos massivos se propagando, também possui modos sem massa de NG (BLUHM, 2007). Deve-se ressaltar que ao considerar grávitons com massa a RG deve ser modificada, implicando em situações que entram em desacordo com os experimentos (BLUHM; KOSTELECKÝ, 2005). Portanto, deve-se considerar o modelo *bumblebee* nas situações em que os modos sem massa aparecem. Assim, o modelo mais simples para gravidade na qual aparecem os termos de violação de Lorentz é dado pela ação (MALUF et al., 2013),

$$S = S_{EH} + S_{LV} + S_M. \quad (3.21)$$

Já foram apresentadas as formas das ações S_{EH} e S_M . A ação S_{LV} é quem vai representar a violação da simetria de Lorentz na teoria. Ela faz parte do setor mínimo do MPE

(BLUHM, 2007). Sua forma explícita é

$$S_{LV} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2}{\kappa^2} (uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}), \quad (3.22)$$

em que u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu\alpha\beta}$ são os campos tensoriais dinâmicos com dimensão de massa zero. Observe que pelo fato de estarem acoplados com R , $R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ respectivamente, eles são supostos a possuir as mesmas simetrias desses últimos tensores. É válido ressaltar que a ação S_{LV} é suposta ser invariante sob mudança geral de coordenadas. Agora, para simplificar as contas subsequentes, faz-se $t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Restando o escalar u e o tensor $s^{\mu\nu}$ em que ambos possuem 10 graus de liberdade, já que o traço de $s^{\mu\nu}$ pode ser incluído no coeficiente escalar u .

Agora, pode-se considerar uma teoria de campos efetiva envolvendo um único vetor B_μ , cuja dinâmica é governada pela a ação

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) \right], \quad (3.23)$$

em que o sinal \mp no funcional do potencial determina se b^2 é do tipo-tempo ou do tipo-espaço; $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$; σ é uma constante de acoplamento sem dimensão e b^2 é quem define o VEV do campo B_μ . Assim como no exemplo 3 da seção 3.2.2 o potencial V desencadeia a violação espontânea (tanto para Lorentz, quanto para difeomorfismo) quando ocorre o seu valor mínimo. Nesse caso, isso acontece quando o vetor da teoria adquire o seu valor esperado de vácuo, tal que $g^{\mu\nu} B_\mu B_\nu \mp b^2 = 0$.

Observando a referência (BAILEY; KOSTELECKÝ, 2006), tem-se que a relação entre a ação (3.22) e a ação (3.23) é dada considerando as seguintes igualdades,

$$u = \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha, \quad s^{\mu\nu} = \xi B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha, \quad t^{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (3.24)$$

Ademais, para manter as dimensões $[B^\mu] = 1$, $[\xi] = -2$ se define $\sigma = (2\xi/\kappa^2)$.

Diante dessas considerações, pode-se investigar os efeitos do modelo bumblebee no estudo da gravidade. Assim, para estudar a dinâmica do gráviton e determinar o seu propagador nesse cenário irá ser considerado o regime linear para o qual

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad B_\mu = b_\mu + \tilde{B}_\mu, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

em que $h_{\mu\nu}$ e \tilde{B}_μ são perturbações no espaço-tempo de Minkowski e b_μ é o coeficiente da quebra da simetria de Lorentz associado ao campo de bumblebee. Para simplificar as coisas, considere $\kappa = 1$. A dedução da equação de movimento e do propagador para o campo de bumblebee é detalhada no Apêndice E.

3.3 Modificação do potencial gravitacional newtoniano

Nessa seção, irá ser apresentada uma aplicação do modelo de bumblebee dentro da RG, será mostrada de qual forma o potencial newtoniano se altera devida a existência de um campo com valor esperado de vácuo diferente de zero (MALUF et al., 2013). Pode-se utilizar o exemplo de duas partículas massivas com massas m_1 e m_2 interagindo gravitacionalmente no limite não relativístico. Para tanto, a amplitude de espalhamento de duas partículas bosônicas de spin zero que interagem através da troca do gráviton será calculada. A ideia é calcular tal matriz na ordem principal e tomar o limite não relativístico, compará-lo com aproximação de Born e determinar a modificação do potencial pela presença do VEV b_μ . A ação de matéria mais simples para um campo escalar é dada, por

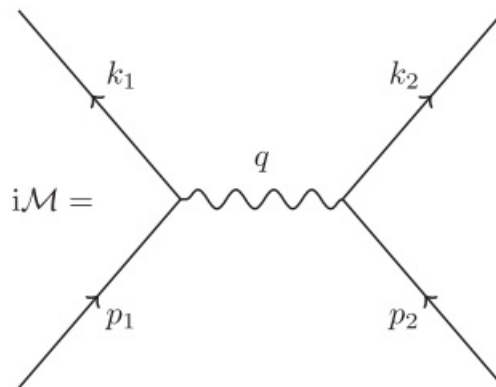
$$S_{mat} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (3.26)$$

Agora, pode-se expandir a ação até primeira ordem da perturbação $h_{\mu\nu}$. Para tanto, serão utilizadas as equações (3.25) e (E.14), de modo que,

$$\begin{aligned} S_{mat} &\approx \int d^4x \left(1 + \frac{1}{2} h^\mu{}_\mu \right) \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \kappa h_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \kappa h^{\mu\nu} [\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - m^2 \phi^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Assim, em menor ordem, o único diagrama de Feynman que para o processo de espalhamento descrito é apresentado na Fig. (7)

Figura 7 – Diagrama de Feynman para o processo de espalhamento entre duas partículas bosônicas interagindo gravitacionalmente.



Fonte: (MALUF et al., 2013).

Tal diagrama *tree-level* fornece a interação das duas partículas descritas, em que a partícula de massa m_1 possui momento p_1 antes da interação e momento k_1 após a interação e a partícula de massa m_2 possui momento p_2 antes da interação e momento k_2 após a interação,

em que

$$q = p_2 - k_2 = -(p_1 - k_1), \quad (3.28)$$

é a transferência de momento. Por sua vez, a expressão advinda do diagrama de interação é dada por

$$i\mathcal{M} = (-i\kappa)^2 V^{\mu\nu}(p_1, -k_1, m_1) D_{\mu\nu, \alpha\beta} V^{\alpha\beta}(p_2, -k_2, m_2), \quad (3.29)$$

em que o vértice é dado por,

$$V^{\mu\nu}(p_1, -k_1, m_1) = -\frac{1}{2}[p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - \eta^{\mu\nu}(p \cdot k + m^2)]. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) e a propagador na (3.29), chega-se a uma amplitude escrita na seguinte forma

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_I + i\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{V}}, \quad (3.31)$$

em que o primeiro termo é a amplitude convencional, dada por,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_I = & -\frac{i\kappa^2}{8q^2} \{4[k_1 \cdot p_1(m_2^2 - k_2 \cdot p_2) + (k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) + (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2)] \\ & - 2m_1^2[4(m_2^2 - k_2 \cdot p_2) + 2(k_2 \cdot p_2)]\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por sua vez, o segundo termo é calculado através dos termos modificados do propagador. Ele é uma expressão com todas as contrações possíveis do campo b^μ com o quadri-momento dos campos escalares de entrada e saída e também com o momento virtual do gráviton. A fim de realizar os cálculos no limite não relativístico, também conhecido como limite estático, serão feitas as seguintes considerações

$$p_i = (m_i, 0), \quad k_i = (m_i, 0), \quad q = (0, \vec{q}), \quad (3.33)$$

em que $i = \{1, 2\}$. Portanto, tem-se $b \cdot p_i = b \cdot k_i = b_0 m_i$ e $b \cdot q = -(\vec{b} \cdot \vec{q})$. Diante dessas considerações, pode-se substituí-las na (3.31) e obter,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = & \frac{i\kappa^2 m_1^2 m_2^2}{2\vec{q}^2} - \frac{i\xi \vec{b}^2 \kappa^2 m_1^2 m_2^2}{\vec{q}^2} + \frac{i\xi (\vec{b} \cdot \vec{q})^2 \kappa^2 m_1^2 m_2^2}{2\vec{q}^4} + \frac{8i\xi^2 b_0^2 m_1^2 m_2^2}{\vec{q}^2} \\ & - \frac{i\xi^2 m_1^2 m_2^2}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ao aplicar a transformada de Fourier a expressão (3.34), observa-se que o primeiro termo resulta no potencial newtoniano convencional. Os termos restantes aparecem devido a violação da simetria de Lorentz, em que é observado a presença dos componentes do quadri-vetor b^μ . O segundo e o quarto termo são apenas escalonamentos que podem ser absorvidos na constante de acoplamento. Porém, o terceiro e o quarto termo apresentam diferenças físicas no comportamento do potencial. Portanto, de acordo com (BJERRUM-BOHR; DONOGHUE;

HOLSTEIN, 2003) a transformada de Fourier para o potencial no limite não relativístico é,

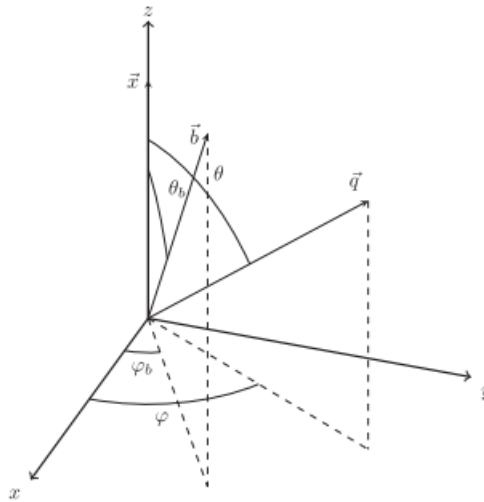
$$\begin{aligned} \langle f | iT | i \rangle &\equiv (2\pi)^4 \delta^4(p - k) i \mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow k_1, k_2) \\ &\approx -(2\pi) \delta(E_p - E_k) i \tilde{V}(q), \end{aligned} \quad (3.35)$$

de modo que o potencial no espaço de coordenadas é

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2m_1} \frac{1}{2m_2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{V}(\vec{q}). \quad (3.36)$$

Uma das integrais que aparecem no cálculo do potencial no espaço de configuração a partir da matriz (3.34) requer atenção especial. Para tanto, define-se algumas considerações, de acordo com a Fig. (8).

Figura 8 – Definição dos vetores e dos ângulos para o cálculo do potencial modificado.



Fonte: (MALUF et al., 2013).

Nesse caso, o vetor $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ é o vetor de separação das duas partículas que estão interagindo gravitacionalmente. Tem-se também, $\vec{q}\cdot\vec{x} = qr \cos \theta$, $\vec{b}\cdot\vec{x} = br \cos \Psi$, $\cos \Psi = \sin \theta \sin \theta_b \cos(\phi - \phi_b) + \cos \theta \cos \theta_b$ e $q = |\vec{q}|$, $r = |\vec{x}|$, $b = |\vec{b}|$. A partir disso, observa-se que o vetor \vec{b} fixa uma direção preferencial no espaço-tempo, em que os ângulos ϕ_b e θ_b são ângulos fixos que indicam a dependência do potencial $V(\vec{x})$ com a direção do vetor de fundo. A partir dessas considerações, pode-se calcular a seguinte integral,

$$\int_0^\infty dq \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{iqr \cos \theta} \cos^2 \Psi = \frac{\pi^2 \sin^2 \theta_b}{r}. \quad (3.37)$$

Resultando no potencial,

$$V(\vec{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left[1 - \frac{3}{2} \xi \vec{b}^2 - \frac{1}{2} \xi (\vec{b} \cdot \hat{x})^2 \right] - G_N m_1 m_2 \left[\frac{\xi^2 b_0^2}{2\pi G_N} \frac{1}{r} - \frac{\xi^2}{8\lambda G_N} \delta^3(\vec{x}) \right], \quad (3.38)$$

em que $\hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}|$. Observa-se que em primeira ordem de ξ o potencial newtoniano é inversa-

mente dependente a distância de separação das duas massas. Além disso, a dependência em relação ao ângulo θ_b é evidente no segundo termo em que há o produto escalar de \vec{b} com \hat{x} . Outro fato a se notar é que, em primeira ordem, o potencial continua sendo atrativo para $\xi < 0$ e repulsivo para $\xi > 0$. Ademais, caso seja definido $\bar{u} = \xi b^\alpha b_\alpha = 0$ e substituindo ξ por $-\xi$, o potencial toma a seguinte forma

$$V(\vec{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} \left[1 + \frac{3}{2} s^{00} + \frac{1}{2} s^{ij} \hat{x}^i \hat{x}^j \right] + \dots, \quad (3.39)$$

que possui a mesma forma da equação (35) de (BAILEY; KOSTELECKÝ, 2006). Por sua vez, o último termo da (3.38) fornece uma contribuição não trivial envolvendo a delta de Dirac. tal correção é semelhante ao termo gravitacional de Darwin que é induzido por derivadas de alta ordem de ∂^4 que aparecem na Lagrangeana da teoria em $O(\xi^2)$.

Outra aplicação interessante e fenomenológica do modelo de bumblebee no setor gravitacional é abordada em (CASANA et al., 2018). Tal estudo determina a correção da métrica de Schwarzschild devido a existência do campo de bumblebee e com isso três testes clássicos são realizados com essa nova métrica: avanço do periélio, desvio da luz e atraso de tempo de Shapiro. Além disso, são determinados valores limites para o parâmetro da teoria para cada um dos testes.

4 ONDAS GRAVITACIONAIS

Nesse capítulo a linearização da EE será explorada. Irá ser obtida a equação no regime linear em que será considerada a métrica de Minkowski com uma perturbação no espaço-tempo. Serão utilizadas as transformações de gauge para determinar a forma final da equação e serão discutidos os graus de liberdade e o spin do gráviton. Além disso, serão mostradas as possíveis polarizações, a equação de produção e o esquema experimental de detecção das OG.

4.1 Equação de Einstein Linearizada

Para solucionar a equação de campo serão realizadas as seguintes considerações: o campo gravitacional é considerado no limite fraco, varia com o tempo e não há restrição no movimento das partículas. Logo, a métrica da teoria é a mesma que foi utilizada no Capítulo 3

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

ressaltando que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, ou seja, serão ignorados os termos de segunda ordem. Ademais, como o espaço-tempo é assintoticamente plano,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Assim, a teoria linearizada da RG pode ser vista como a descrição do campo tensorial simétrico $h_{\mu\nu}$ se propagando no espaço-tempo plano. A teoria também é invariante de Lorentz. Aliás, sob a transformação $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ é invariante, enquanto a perturbação se transforma do seguinte modo,

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} h_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Dessa forma, lembrando que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, pode-se realizar a linearização calculando os termos presentes na EE. A linearização dos símbolos de Christoffel resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que foram usadas $\partial_{\mu} \eta_{\nu\lambda} = 0$ e $h^{\mu\nu} h_{\nu\lambda} = 0$.

A definição do tensor de Riemann é dada por,

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (4.5)$$

Observando que os termos $\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}$ são de segunda ordem, e alterando alguns índices,

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\nu}. \quad (4.6)$$

Baixando o primeiro índice,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}). \quad (4.7)$$

Por sua vez, o tensor de Ricci é,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \eta^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} \\ &= \frac{\eta^{\rho\sigma}}{2}(\partial_\mu \partial_\sigma h_{\rho\nu} + \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\sigma\rho} - \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabendo que, $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ e $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu$,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}). \quad (4.9)$$

Para o escalar de curvatura de Ricci, basta fazer,

$$\begin{aligned} R &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente, o tensor de Einstein é,

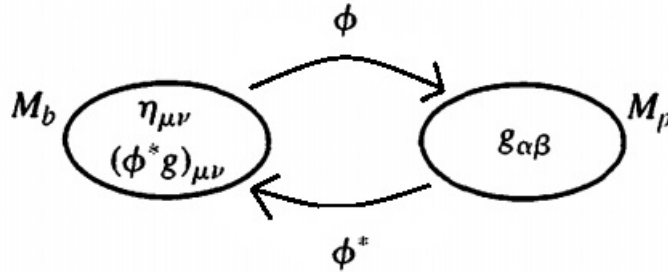
$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Com a obtenção equação de campo linearizada, percebe-se que a decomposição realizada na métrica $g_{\mu\nu}$ não é única, ou seja, a decomposição realizada não especifica completamente as coordenadas no espaço-tempo, logo, devem existir vários outros sistemas de coordenadas em que a métrica é escrita dessa forma. Para resolver essa questão, deve-se recorrer ao difeomorfismo. Ademais, é necessário um estudo sobre mapeamento entre variedades, como já enfatizado.

Dessa maneira, seja o espaço-tempo de fundo M_b com coordenadas x^μ e o espaço-tempo físico M_p com coordenadas y^α . Considere o difeomorfismo $\phi : M_b \rightarrow M_p$. Como é um

difeomorfismo, tem-se $M_b = M_p$, em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de M_b e $g_{\alpha\beta}$ de M_p . Ambas obedecem a EE. A Fig. (9) esquematiza a situação.

Figura 9 – Difeomorfismo relacionando M_p e M_f



Fonte: Adaptado de (CARROLL, 2004)

Realizando-se a operação de *pullback* na métrica $g_{\mu\nu}$, constata-se que

$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (4.12)$$

não possui nenhum motivo para ser perturbativa.

Não obstante, se os campos na variedade M_p são fracos, então, de fato, existirão alguns difeomorfismos ϕ tais que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Então, se $g_{\alpha\beta}$ obedece a EE no espaço-tempo físico, $h_{\mu\nu}$ irá obedecer às equações linearizadas no espaço-tempo de fundo. Diante disso, seja o campo vetorial $\xi^\mu(x)$ no espaço-tempo de fundo. Esse campo gera uma família de difeomorfismos $\psi_\varepsilon : M_b \rightarrow M_b$. Assim, é gerada uma família de perturbações parametrizada por ε ,

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = [(\phi \circ \psi_\varepsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = [\psi_\varepsilon^* (\phi^* g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

De (4.12), $(\phi^* g)_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}$ tal que,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &= \psi_\varepsilon^* (h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ &= \psi^*_{\varepsilon} (h_{\mu\nu}) + \psi^*_{\varepsilon} (\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \\ &= \psi^*_{\varepsilon} (h_{\mu\nu}) + \varepsilon \left[\frac{\psi^*_{\varepsilon} (\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\varepsilon} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que ψ^*_{ε} diz qual tipo de perturbação denota espaços-tempos fisicamente equivalentes. Observa-se que o último termo da última linha da Eq. (4.14) para ε muito pequeno representa a derivada de Lie ao longo do campo vetorial ξ^μ . Além disso, a derivada de Lie da métrica $g_{\mu\nu}$ é dada por

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}, \quad (4.15)$$

de modo que,

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\varepsilon\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}. \quad (4.16)$$

A Eq. (4.16) é conhecida como transformação de gauge da teoria linearizada, em que é mostrada como a perturbação se altera quando é realizado um difeomorfismo infinitesimal. Assim, observa-se que a teoria aqui descrita é invariante sob tal transformação. O fato é diretamente verificado pois é constatado que o tensor de Riemann é invariante sob tal transformação. Logo, como esse tensor é quem contém a física da teoria (curvatura), verifica-se que a invariância da teoria vale para a transformação derivada. Ressalta-se que no restante do trabalho a transformação dada por (4.16) será representada como $h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h'_{\mu\nu}$.

4.1.1 Graus de Liberdade

Determinada a equação de campo linearizada é interessante procurar uma forma mais simples para expressá-la, visto que a Eq. (4.11) possui uma forma complexa. Nessa seção irão ser examinados os graus de liberdade do tensor $h_{\mu\nu}$.

Para tanto, será escolhido um sistema de coordenadas fixo no espaço-tempo de Minkowski e a perturbação $h_{\mu\nu}$ será decomposta em suas componentes de acordo com suas propriedades sob rotações espaciais. Embora seja escolhido um referencial fixo, ressalta-se que o processo realizado aqui é semelhante ao processo realizado no eletromagnetismo, em que o tensor $F_{\mu\nu}$ é decomposto nos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} . Nesse caso, o campo tensorial $h_{\mu\nu}$ é simétrico do tipo $(0, 2)$. Sob rotações as componentes da perturbação são dadas por,

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\phi \\ h_{0i} &= w_i \\ h_{ij} &= 2s_{ij} - 2\psi\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nesse caso $h_{0i} = w_i$ são três vetores, em que $h_{0i} = h_{i0}$; $h_{00} = -2\phi$ é um escalar e h_{ij} é um tensor espacial simétrico que é decomposto em uma parte com traço ψ e em outra sem traço s_{ij} ,

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{6}\delta_{ij}h_{ij} \\ s_{ij} &= \frac{1}{2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Desde de já é ressaltado que a componente s_{ij} conhecida como deformação é a componente da perturbação que irá conter os graus de liberdade da onda gravitacional. Dessa forma, lembrando que a métrica do espaço plano é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ e que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} +$

$h_{\mu\nu}$, tem-se que o elemento de linha é,

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt + w_i(dx^i dt + dt dx^i) + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j. \quad (4.19)$$

Com isso, pode-se calcular a conexão para essa métrica. Por conveniência a conexão será separada por componentes, o que facilitará nas conclusões finais dessa seção. Portanto, a partir de (4.4), tem-se,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_0 \phi \\ \Gamma_{00}^i &= \partial_i \phi + \partial_0 w_i \\ \Gamma_{j0}^0 &= \partial_j \phi \\ \Gamma_{j0}^i &= \partial_{[j} w_{i]} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} \\ \Gamma_{jk}^0 &= -\partial_{(j} w_{k)} + \frac{1}{2} \partial_0 h_{jk} \\ \Gamma_{jk}^i &= \partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nesse mesmo raciocínio e utilizando a Eq. (4.5) tem-se que o tensor de Riemann é,

$$\begin{aligned} R_{0j0l} &= \partial_j \partial_l \phi + \partial_0 \partial_{(j} w_{l)} - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{jl} \\ R_{0jkl} &= \partial_j \partial_{[k} w_{l]} - \partial_0 \partial_{[k} h_{l]j} \\ R_{ijkl} &= \partial_j \partial_{[k} h_{l]i} - \partial_i \partial_{[k} h_{l]j}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lembrando que $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \eta^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\lambda\nu}$, pode-se utilizar a Eq. (4.21) para determinar as componentes do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \eta^{00} R_{0000} + \eta^{jl} R_{j0l0} \\ &= \eta^{jl} R_{j0l0} \\ &= \nabla^2 \phi + \partial_0 \partial_k w^k + 3\partial_0^2 \psi, \end{aligned} \quad (4.22)$$

em que foi utilizada a Eq. (4.18) e o fato de que $R_{j0l0} = R_{0j0l}$. De forma análoga,

$$\begin{aligned} R_{0j} &= \eta^{lk} R_{k0lj} \\ &= -\eta^{lk} R_{0klj} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + 2\partial_0 \partial_j \psi + \partial_0 \partial_k s_j^k, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \eta^{00} R_{0j0i} + \eta^{lk} R_{kilj} \\ &= -\partial_i \partial_j (\phi - \psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + \square (\psi \delta_{ij} - s_{ij}) + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O escalar de curvatura é,

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{00}R_{00} + \eta^{ij}R_{ij} \\
&= -R_{00} + \eta^{ij}R_{ij} \\
&= -2\nabla^2\phi - 2\partial_0\partial_k w^k - 6\partial_0^2\psi + 4\nabla^2\psi + 2\partial_k\partial_i s^{ik}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, pode-se calcular as componentes do tensor de Einstein,

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2\psi + \partial_k\partial_l s^{kl}, \\
G_{0j} &= R_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\psi + \partial_0\partial_k s_j^k, \\
G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\phi - \psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\psi - \square s_{ij} + 2\partial_k \\
&\quad \partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Em posse das três componentes dadas pela Eq. (4.26), utiliza-se $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ para determinar as equações dos campos ψ , w^k e ϕ . Tomando a componente G_{00} ,

$$\nabla^2\psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_l s^{kl}. \tag{4.27}$$

Percebe-se que se conhecidos T_{00} e s_{ij} e as condições de contorno se pode determinar ψ . Além disso, a equação diferencial que governa ψ não possui derivadas temporais, portanto ele não é um grau de liberdade de propagação, mas determinado a partir do tensor de deformação e do tensor de energia-momento. Analogamente, para w^k e ϕ ,

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\psi + 2\partial_0\partial_k s_j^k, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\phi &= 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0^2)\psi - \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k \\
&\quad + \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Mais uma vez, é constatado que não existem derivadas temporais nas equações diferenciais que governam os campos w^k e ϕ . De fato, conhecendo as condições de contorno e os campos T_{00} e s_{ij} para qualquer intervalo de tempo, pode-se determinar o comportamento destes tensores. Portanto, o único tensor que possui os graus de liberdade de propagação é o tensor s_{ij} . Assim, será mostrado que ele será utilizado para descrever as ondas gravitacionais.

Foi mostrado que a transformação de gauge para $h_{\mu\nu}$ é dada pela Eq. (4.16). Agora, irá ser apresentado o gauge que permitirá a obtenção das soluções das ondas gravitacionais. Antes de definir tal gauge, considere a transformação das componentes do tensor $h_{\mu\nu}$ obtidas a

partir da transformação dada pela (4.16),

$$\begin{aligned}
\phi' &= \phi + \partial_0 \xi^0, \\
w'_i &= w_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0, \\
\psi' &= \psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i, \\
s'_{ij} &= s_{ij} + \partial_{(i} \xi_{j)} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pode-se agora estudar o gauge transversal. Nesse caso, diz-se que o tensor s_{ij} é espacialmente transversal, isto é,

$$\partial_i s_{ij} = 0. \tag{4.31}$$

Dessa forma, obtêm-se uma equação para o campo vetorial ξ^i da seguinte forma,

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij}. \tag{4.32}$$

Já para a componente ξ^0 utiliza-se

$$\partial_i w_i = 0, \tag{4.33}$$

de modo que,

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w_i + \partial_0 \partial_i \xi^i. \tag{4.34}$$

Mais uma vez ressalta-se que a completa definição de ξ^i só é obtida após dadas as condições de contorno do problema. Logo, as condições impostas em w^i e em s^{ij} definem o gauge transversal. As componentes da EE nesse gauge são,

$$\begin{aligned}
2\nabla^2 \psi &= 8\pi G T_{00} \\
-\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \psi &= 8\pi G T_{0j} \\
(\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j)(\phi - \psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \psi - \square s_{ij} &= 8\pi G T_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.2 Soluções de Ondas Gravitacionais

Tendo visto as formas da EE para o gauge transversal pode-se fazer a utilização dessa simplificação para abordar uma aplicação interessante. Será visto nessa seção qual a forma que partículas se comportam no espaço-tempo devido ao efeito de onda gravitacional passante. Considerando a não existência de fontes no local, tem-se que $T_{\mu\nu} = 0$. Diante disso, pode-se descrever as equações diferenciais para os campos descritos

$$\nabla^2 \psi = 0, \tag{4.36}$$

de modo que para condições de contorno bem comportadas e lembrando da nossa liberdade de

escolha, faz-se $\psi = 0$. Analogamente, a equação $0j$

$$\nabla^2 w_j = 0, \quad (4.37)$$

implica, $w_j = 0$. Por fim, tomando o traço da equação ij

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.38)$$

em que mais uma vez, $\phi = 0$. De forma que, como esperado, o tensor de deformação s_{ij} é quem será utilizado para descrever as ondas. A equação de onda pra tal tensor é,

$$\square s_{\mu\nu} = 0. \quad (4.39)$$

De forma geral, é mais interessante utilizar a equação de onda para o tensor de perturbação $h_{\mu\nu}$ onde é ressaltado que ele é puramente espacial, simétrico, possui traço nulo e é transversal. Representa-se esse tensor por $h_{\mu\nu}^{TT}$ em que TT remete a traço transversal. Assim,

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.40)$$

Sabe-se que um conjunto de soluções particulares para solucionar (4.40) é

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (4.41)$$

em que o tensor constante $C_{\mu\nu}$ também é de traço nulo e puramente espacial. Ele é denominado tensor de polarização. O quadrivetor constante k_σ é o vetor de onda. Deixa-se claro que existem infinitas soluções para a Eq. (4.40). De fato, visto que se está trabalhando no regime linear, qualquer combinação de soluções independentes também é uma solução. Substituindo (4.41) em (4.40),

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu}^{TT} &= \partial^\sigma \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho \partial_\sigma (C_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\ &= \eta^{\sigma\rho} \partial_\rho (ik_\sigma e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\ &= -k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Contudo, para $h_{\mu\nu}^{TT}$ não trivial, o vetor de onda precisa ser do tipo luz, em outras palavras,

$$k_\sigma k^\sigma = 0. \quad (4.43)$$

Este argumento é utilizado para dizer que as ondas gravitacionais se propagam na velocidade da luz (CARROLL, 2004). Portanto, escrevendo o vetor de onda na forma $k^\mu =$

$(\omega, \vec{k}) = (\omega, k^1, k^2, k^3)$, a condição para ele ser vetor do tipo tempo é

$$\omega = \delta_{ij} k^i k^j, \quad (4.44)$$

nesse caso $\omega = -k_\mu U^\mu$ é a frequência da onda vista por um observador se movendo com velocidade $U^\mu(x)$. Por outro lado, utilizando o caráter transversal de $h_{\mu\nu}^{TT}$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} &= \partial_\mu C^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Essa condição implica no seguinte resultado

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0, \quad (4.46)$$

isto é, $k_\mu C^{\mu\nu}$ são ortogonais. A partir de agora, a fim de facilitar os cálculos futuros, supõe-se que a onda se propaga numa dada direção, digamos x^3 . Pelo fato de k^μ ser do tipo-tempo, sua forma se torna $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$. Assim, a partir da Eq. (4.46), infere-se que,

$$C_{0\nu} = C_{3\nu} = 0. \quad (4.47)$$

De modo que as únicas componentes de $C_{\mu\nu}$ que são diferentes de zero são C_{11} , C_{12} , C_{21} e C_{22} . Mas, lembrando que ele é simétrico e de traço nulo,

$$C_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Visto isso, fica evidente que conhecendo C_{11} e C_{12} , pode-se caracterizar completamente a solução procurada. Ademais, é visto que existem dois graus de liberdade. Para se ter uma interpretação física mais conclusiva das soluções, irá ser estudado o movimento relativo de partículas devido ao efeito da onda gravitacional. Esse estudo irá ser feito de duas maneiras. Na primeira maneira, irá ser analisado qual o efeito que ocorre na equação do desvio geodésico. Caso o leitor esteja interessado na dedução da equação, por gentileza, ver Apêndice F.

Para tanto, considere partículas com quadri velocidades $U^\mu(x)$ se movendo lentamente. Essa condição implica que a única componente não nula de $U^\mu(x)$ é $U^0(x)$, tal que,

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (4.49)$$

Portanto, utilizando a equação do desvio,

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma. \quad (4.50)$$

Observando que $U^\mu = U^0$, tem-se, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu 00\sigma}$. Portanto, utilizando a Eq. (4.7),

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial \partial h_{\mu\sigma}. \quad (4.51)$$

Porém, como as partículas se movem lentamente, o tempo próprio τ é a variável t , de modo que a equação do desvio se torna,

$$\frac{\partial^2 S^\mu}{\partial t^2} = \frac{1}{2} s^\sigma \frac{\partial^2 h^{TT\mu}{}_\sigma}{\partial t^2}. \quad (4.52)$$

Mais uma vez, lembrando do caráter transversal da perturbação, as únicas componentes de S^μ são S^1 e S^2 , visto que a onda se propaga na direção x^3 . Agora, pode-se obter duas soluções distintas para a (4.52). Para a primeira solução, considere $C_{12} = 0$. Nesse caso, tem-se as duas equações

$$\frac{\partial^2 S^1}{\partial t^2} = \frac{S^1}{2} \frac{\partial}{\partial t^2} (C_{11} e^{ik_\sigma x^\sigma}), \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial^2 S^2}{\partial t^2} = -\frac{S^2}{2} \frac{\partial}{\partial t^2} (C_{11} e^{ik_\sigma x^\sigma}). \quad (4.54)$$

Integrando,

$$S^1 = (1 + \frac{1}{2} C_{11} e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^1(0), \quad (4.55)$$

$$S^2 = (1 - \frac{1}{2} C_{11} e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^2(0). \quad (4.56)$$

Analogamente, fazendo $C_{11} = 0$,

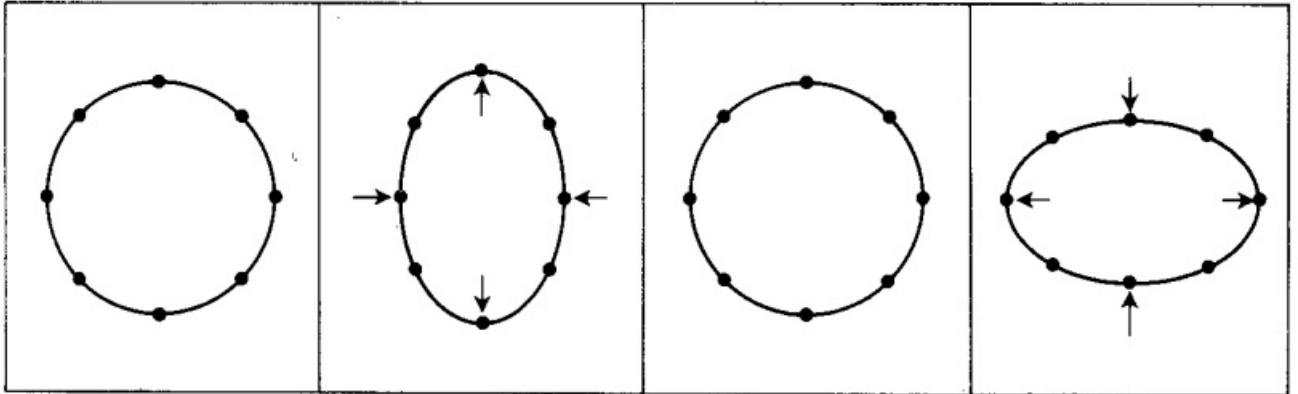
$$S^1 = (S^1(0) + \frac{1}{2} C_{12} e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^2(0), \quad (4.57)$$

$$S^2 = (S^2(0) + \frac{1}{2} C_{12} e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^1(0). \quad (4.58)$$

As eqs. (4.55) e (4.56) podem ser interpretadas da seguinte maneira: se para um dado tempo inicial $t = 0$ as partículas estão separadas por uma distância dx^1 , elas serão submetidas a um movimento oscilatório na mesma direção ao sentirem o efeito de uma onda gravitacional. O mesmo valendo para as partículas separadas por uma distância dx^2 . Por sua vez o conteúdo físico das eqs. (4.57) e (4.58) pode ser entendido da seguinte forma: se para um dado tempo inicial $t = 0$ as partículas estão separadas na direção x^1 , então elas oscilarão na direção x^2 e vice-versa. Assim, diante desse comportamento sugeriu-se chamar $C_{11} = h_+$ e $C_{12} = h_x$, em que o primeiro resultado é conhecido como polarização *plus* (+) e o segundo polarização

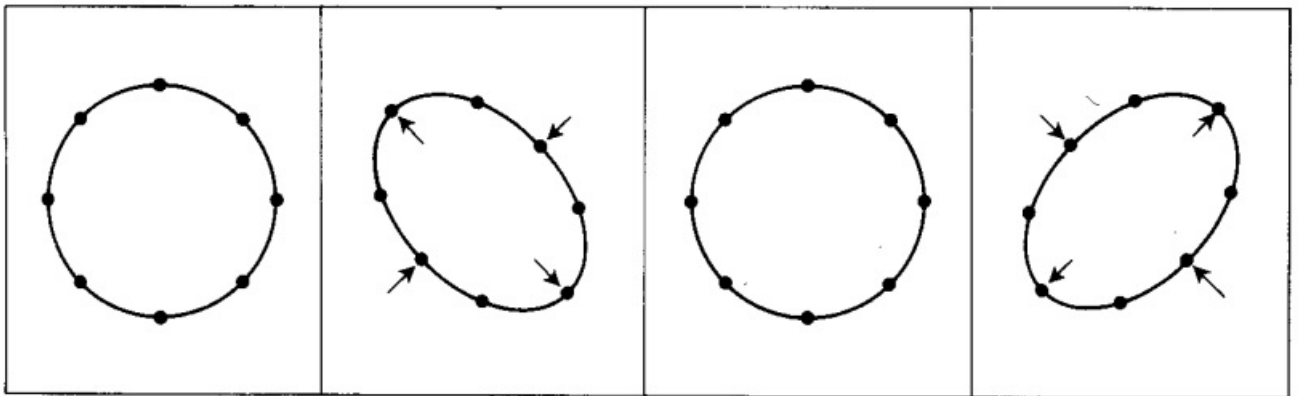
cross (x). A Fig. (10) exemplifica a polarização + e a Fig. (11) exemplifica a polarização x .

Figura 10 – Efeito da onda gravitacional em um conjunto de partículas - polarização +



Fonte: (D'INVERNO, 1992)

Figura 11 – Efeito da onda gravitacional em um conjunto de partículas - polarização x



Fonte: (D'INVERNO, 1992)

Ainda se pode definir os modos de polarizações circulares

$$\begin{aligned} h_D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ + ih_x), \\ h_E &= \frac{1}{\sqrt{2}}(h_+ - ih_x), \end{aligned} \quad (4.59)$$

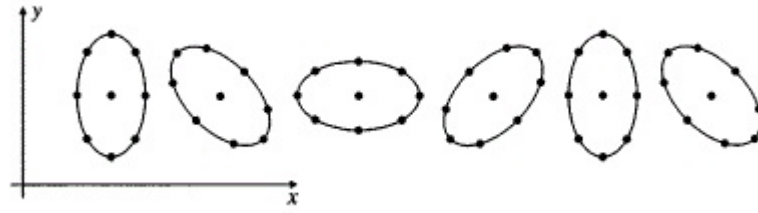
em que o efeito de h_D é distorcer o círculo de partículas em uma elipse que gira para a direita, enquanto o efeito de apenas h_E é o contrário. Por exemplo, a Fig. 12 demonstra o efeito de h_E .

Outra maneira de enxergar o conteúdo físico da solução determinada aqui é observar o comportamento da métrica $g_{\mu\nu}$ no espaço-tempo. Logo, o elemento de linha para a perturbação descrita com $C_{12} = 0$,

$$ds^2 = dt^2 - (1 - h_{11})dx^2 - (1 + h_{11})dy^2 - dz^2. \quad (4.60)$$

Da análise anterior, já se sabe que a perturbação é uma função oscilatória, portanto,

Figura 12 – Efeito das ondas gravitacionais com a polarização D



Fonte: (CARROLL, 2004)

ela assume valores positivos e negativos. Primeiro, considere o plano (x, y) com duas partículas P_1 e P_2 em (x, y) e em $(x, y + y_0)$ respectivamente. Utilizando o elemento de linha descrito a distância própria entre elas é

$$ds^2 = -(1 + h_{11})dy^2, \quad (4.61)$$

de modo que, quando h_{11} vai de 0 e cresce até um certo valor positivo, as partículas se afastam e quando h_{11} vai de 0 até um certo valor negativo, as partículas se aproximam. Contudo, considere agora duas partículas P_1 e P_2 em (x, y) e em $(x + x_0, y)$ respectivamente. Nesse caso, o elemento de linha se torna,

$$ds^2 = -(1 - h_{11})dx^2. \quad (4.62)$$

Nesse caso, a situação é a contrária: quando h_{11} vai de 0 e cresce até um certo valor positivo, as partículas se aproximam e quando h_{11} vai de 0 até um certo valor negativo, as partículas se afastam. Logo, tem-se a polarização+ para essa situação. Agora, considerando $C_{11} = 0$ o elemento de linha se torna,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2h_{12}dxdy. \quad (4.63)$$

De modo que fique simples analisar o comportamento do elemento de linha, será realizada uma rotação de 45° no plano (x, y) . Os novos valores de x e y são,

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Portanto, o elemento de linha em função das variáveis rotacionadas é,

$$ds^2 = dt^2 - (1 - h_{11})dx'^2 - (1 + h_{11})dy'^2 - dz^2. \quad (4.65)$$

Ora, a Eq. (4.65) possui o mesmo formato da Eq. (4.62) com x e y rotacionados em 45° . Assim, tem-se exatamente o mesmo comportamento analisado, excetuando-se a defasagem angular, resultando na polarização x .

Nesse momento, é válido chamar a atenção que, ao contrário do que ocorre no eletromagnetismo, em que os dois estados de polarização são defasados por 90° , aqui eles são defasados por 45° .

4.3 Helicidade e Spin

Visto quais as componentes do tensor de polarização que são graus de liberdade físicos e quais não são, existe uma maneira interessante de observar a distinção que há entre elas. A forma de ver tal distinção é estudar a maneira na qual o tensor $C_{\mu\nu}$ muda quando é realizada uma rotação em torno do eixo z . Pode-se examinar essa característica com a seguinte matriz de transformação,

$$R_{\mu}^{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

em que $R_{\mu}^{\nu} k_{\nu} = k_{\mu}$. Assim, como k_{μ} é invariante o tensor de polarização se transforma como,

$$C'_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} C_{\rho\sigma}. \quad (4.67)$$

Tomando a transformação para as componentes C_{11} e C_{12} ,

$$C'_{11} = \cos(2\theta)C_{11} + \sin(2\theta)C_{12}, \quad (4.68)$$

$$C'_{12} = -\sin(2\theta)C_{11} + \cos(2\theta)C_{12}. \quad (4.69)$$

Definindo $C'_{\pm} = C'_{11} \pm iC'_{12} = -C_{22} \mp iC_{12}$,

$$\begin{aligned} C'_{+} &= C_{11}[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)] + C_{12}[i\cos(2\theta) - \sin(2\theta)] \\ &= C_{11}e^{i2\theta} - iC_{12}e^{i2\theta} \\ &= C'_{+} = e^{i2\theta}C_{+}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Analogamente,

$$C'_{-} = e^{-i2\theta}C_{-}. \quad (4.71)$$

Para as outras componentes,

$$\begin{aligned} S'_{\pm} &= e^{\pm i\theta}S_{\pm} \\ C'_{33} &= C_{33}, \quad C'_{00} = C_{00}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

em que

$$S_{\pm} = C_{13} \mp iC_{23} = -C_{01} \pm iC_{02}. \quad (4.73)$$

Quando qualquer onda plana sofre uma rotação por um ângulo θ sobre a direção de propagação, em que essa rotação é do tipo $\Psi' = e^{ih\theta}\Psi$, diz-se que ela possui helicidade h . Dessa forma, tendo observado as transformações para cada componente do tensor de polarização, observa-se que ele pode ser dividido em partes com helicidade 0, ± 1 e ± 2 . Porém, como as partes que possuem helicidade 0 e ± 1 não são graus de liberdade físicos, isto é, elas podem desaparecer por uma escolha apropriada de coordenadas, a helicidade do gráviton é ± 2 . Desse modo, classicamente falando, a gravitação é carregada por ondas de spin 2.

4.4 Produção de ondas gravitacionais

Não seção anterior foi estudado o movimento de partículas quando ocorre a passagem de uma onda gravitacional sem se preocupar qual a fonte de tal onda. Nessa seção, irá ser mostrada a equação que rege a produção das ondas gravitacionais e será comentada uma aplicação clássica de tal fórmula. A solução será determinada com o auxílio do gauge de traço reverso, sua dedução está no apêndice G. Portanto, a solução é,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt_r^2}. \quad (4.74)$$

A Eq. (4.74) mostra que, ao contrário do eletromagnetismo em que a contribuição da radiação eletromagnética vem em sua maioria do momento de dipolo da densidade de carga, a contribuição maior da emissão de radiação gravitacional é de um momento de quadrupolo, que mede o formato do sistema. Em geral, o momento de quadrupolo é menor do que o momento de dipolo, explicando o motivo de a influência gravitacional ser menor do que a influência eletromagnética. Outro comentário importante é que na Eq. (G.25) aparece apenas T^{00} , em que os termos de massa de repouso são dominantes. Os termos de energia cinética e energia potencial não aparecem, já que tais termos que aparecem no tensor de energia-momento são conservados. Assim, em posse dessa solução, pode-se aplicar para os mais variados sistemas, tais quais estrela binárias e buracos negros.

Com exemplo, considere a radiação gravitacional emitida por uma estrela binária, em que cada estrela possui massa M . Para facilitar a análise, o movimento das estrelas será considerado no plano $x^1 - x^2$ e a órbita será considerada circular em torno do centro de massa, de modo que a distância entre elas e o centro de massa do sistema será R . Tratando o movimento

com a aproximação newtoniana, tem-se que a força da gravidade é igual a força centrípeta

$$\frac{GM^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R}, \quad (4.75)$$

em que

$$v = \left(\frac{GM}{4R} \right)^{1/2}. \quad (4.76)$$

Para $\Omega = 2\pi/T = v/R$, tem-se,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{v}, \\ \Omega &= \left(\frac{GM}{4R^3} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

As equações de movimento em cada coordenada para as estrelas são,

$$\begin{aligned} x_a^1 &= R \cos \Omega t, & x_a^2 &= R \sin \Omega t, \\ x_b^1 &= -R \cos \Omega t, & x_b^2 &= -R \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (4.78)$$

A densidade de energia para o sistema é,

$$\begin{aligned} T^{00}(t, \vec{x}) &= M \delta(x^3) [\delta(x^1 - R \cos \Omega t) \delta(x^2 - R \sin \Omega t) \\ &\quad \delta(x^1 + R \cos \Omega t) \delta(x^2 + R \sin \Omega t)]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Assim, calculando os termos do momento de quadrupolo a partir da densidade de energia, tem-se a seguinte perturbação na métrica,

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \begin{bmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\cos 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

A amplitude dessa solução será levada em conta para que possa ser estimado o valor da perturbação nos detectores de ondas gravitacionais.

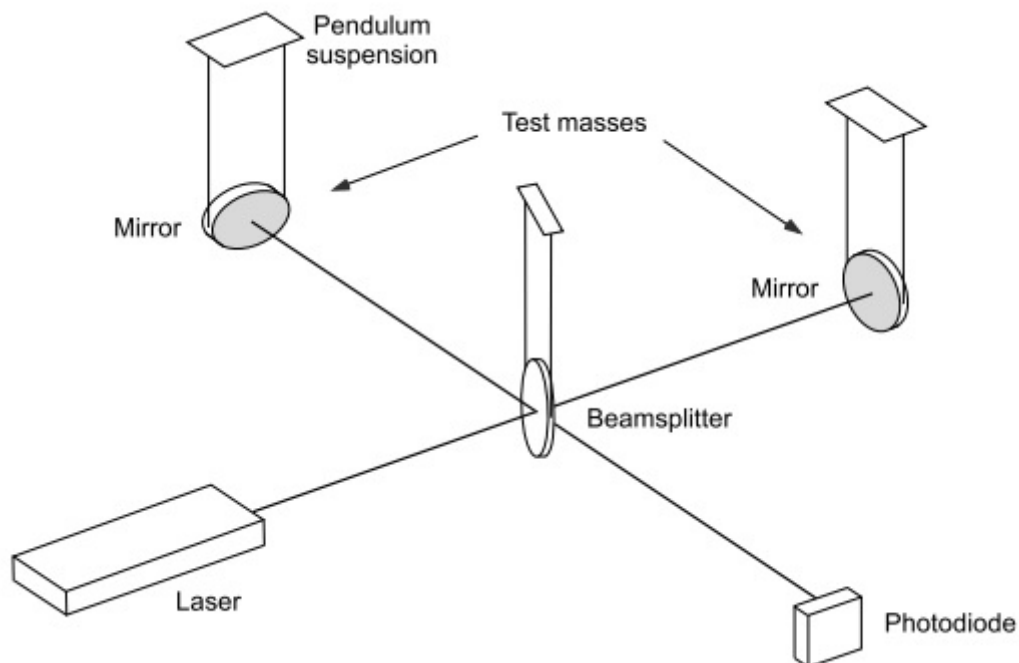
4.5 Detecção das ondas gravitacionais

A detecção de ondas gravitacionais pode ser de duas formas: a detecção indireta e a detecção direta. A detecção indireta é por observada por meio da perda de energia de um sistema binário, assim como o binário de Hulse e Taylor. Porém, a detecção direta é observada por meio da interação da OG com partículas de teste. O pioneiro nessa busca foi Weber (WEBER, 1960). A proposta desenvolvida por ele era a utilização de grandes cilindros de alumínio que quando atingidos por uma OG iriam oscilar, tais oscilações seriam convertidas por um transdutor em sinais elétricos. Essa técnica é conhecida como detectores ressonantes e versões modernas dessa

aplicação conseguem medir perturbações com amplitudes da ordem de 10^{-18} (RYDER, 2009). Apesar de ter falhado, Weber é responsável por grandes ideias que foram utilizadas nos futuros experimentos de detecção de OG.

Os detectores modernos utilizam a interferometria a laser que é baseada no experimento de Michelson-Morley. A luz de laser é utilizada para medir as variações na distâncias percorridas por partículas testes. O esquemático do experimento leva em consideração as polarizações que foram estudadas na seção 4.2, ou seja, as partículas testes, que são espelhos suspensos são postas em braços ortogonais que distam alguns quilômetros de distância de uma fonte de luz. No experimento que detectou as OG no final 2015 (LIGO), tal distância é de 4 km. O princípio de funcionamento é o seguinte: a fonte de luz emite um laser que é dividido em dois feixes iguais. Os feixes divididos são então direcionados até o espelho que são as partículas de teste que se esperam reagir a passagem da OG. Os lasers então voltam e realizam o percurso *beamsplitter-mirror* 100 vezes. Após isso, caso não há diferença de caminhos há interferência destrutiva e o fotodiodo não acusa nada. Porém, caso passe na OG, as partículas executaram o movimento estudado anteriormente e no fim haverá uma interferência construtiva. O esquemático é mostrado na Fig. (13)

Figura 13 – Esquemático do interferômetro usado para detectar as OG



Fonte: (STRAUMANN, 2012)

Para ver um exemplo de aplicação, pode-se considerar a aproximação newtoniana para realizar uma estimativa da ordem de grandeza da perturbação. Os cálculos realizados no fim da seção anterior serão necessários agora. Assim, considerando o mesmo binário, pode-se ajustar os parâmetros em função do raio de Schwarzschild $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, ressaltando-se que

os fatores de c serão restaurados a fim de que possa obter valores em unidades utilizadas nos experimentos. Como a frequência de radiação gravitacional é o dobro da frequência obtida, tem-se,

$$f \sim \frac{cR_s^{1/2}}{10R^{3/2}}. \quad (4.81)$$

A partir da Eq. (4.80), tem-se que a amplitude da perturbação é

$$h = \frac{R_s^2}{rR}. \quad (4.82)$$

Um típico exemplo de aplicação é a coalescência de dois buracos negros, tal qual o experimento do LIGO foi capaz de detectar. Para a massa dos buracos negros tem-se 10 massas solares, eles são considerados em distâncias astronômicas da ordem de $100 Mpc$ e são separados por uma distância de 10 raios de Schwarzschild. Portanto, os parâmetros são $R_s \sim 10^6$ cm, $r \sim 10^{26}$ cm e $R \sim 10^7$ cm. Com isso, tem-se para a frequência e para a amplitude valores de $100 Hz$ e 10^{-21} . Assim, a variação da distância em que as partículas testes são submetidas é

$$\frac{\delta L}{L} \sim h, \quad (4.83)$$

de modo que a diferença de fase é

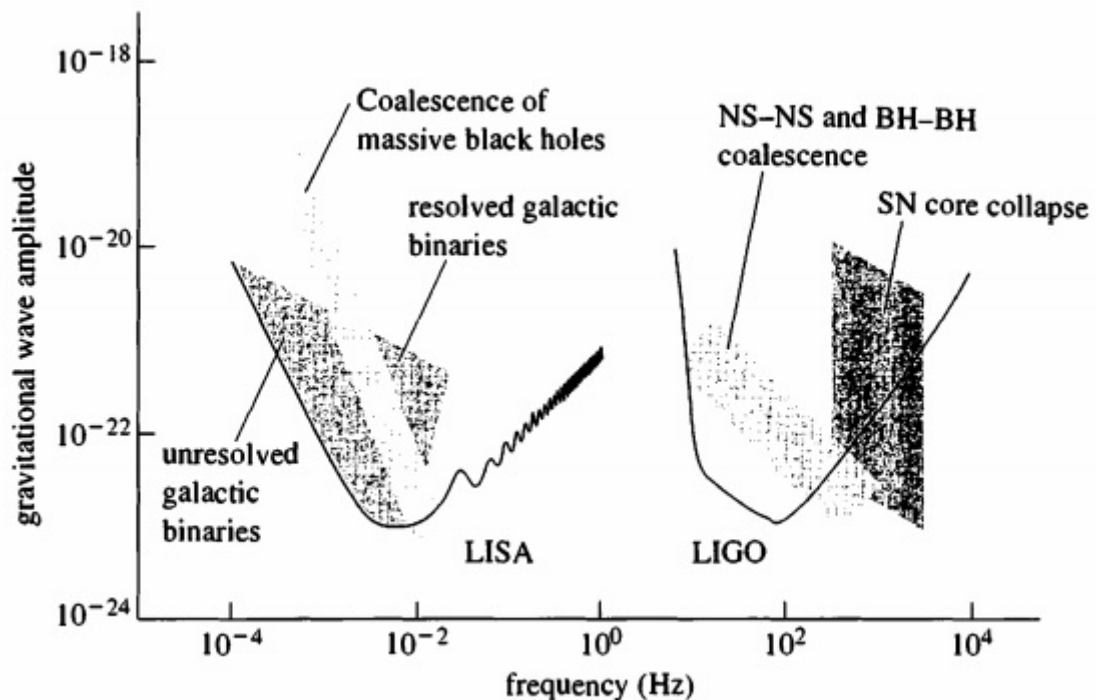
$$\delta\phi \sim 200 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \delta L \sim 10^{-9}, \quad (4.84)$$

em que o fator 200 ao invés de 100 leva em conta o deslocamento das duas partículas e λ é o comprimento de onda do laser. Tal valor pode ser medido se o número de fótons N é tal que $\sqrt{N} > \delta\phi$, para que se supere o ruído de Poisson.

O desafio dos experimentos de detecção de OG é evitar os ruídos existentes. Em experimentos terrestres os ruídos em baixa frequência são os sísmicos, os ruídos em frequência alta são os ruídos de Poisson, já em frequências intermediárias são os ruídos térmicos que aparecem. Para tanto um novo experimento será lançado no espaço em 2034: LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*). O princípio por trás do LISA também é a interferometria, contudo, ele estará orbitando o sol e os seus braços distam 5 milhões de quilômetros um do outro, sendo assim, ele será capaz de detectar OG em frequências entre 0,1 Hz e 100 mHz. Vale a pena dizer que apesar disso, existem algumas dificuldades, tais quais erros de medições devido à grande distância e acelerações não gravitacionais da estação. A Fig. (14) mostra um gráfico que relaciona a amplitude com as frequências, em que LIGO e LISA são destacados.

As fontes mais promissoras para os experimentos terrestres podem ser binárias altamente massivas em coalescência (estrelas de nêutron ou buracos negros) ou colapso do núcleo de estrelas massivas, dando origem a supernovas. Porém, ressalta-se que a vantagem de o LISA

Figura 14 – Sensitividade do detector em função da frequência para os experimentos LIGO e LISA



Fonte: (CARROLL, 2004)

ser sensível a sistemas com frequências bem menores em relação ao LIGO é que não é preciso que o binário esteja em processo de colisão, em que a frequência de rotação em torno do centro de massa aumenta gradativamente. Nesse caso, binários com frequência bem menores serão capazes de serem detectados. Além disso, processos na evolução de buracos negros supermassivos (com massas da ordem de 1000 massas solares) achados no centro das galáxias fornecem fontes interessantes. Por fim, é interessante mencionar a possibilidade de detecção de ondas gravitacionais de fundo estocásticas, que são ondas geradas no universo jovem caracterizadas por uma variação do espectro de potência como função da frequência. Caso o leitor esteja interessado, pode consultar (BASSALO; CATTANI, 2016) para uma visão mais completa da detecção das OG.

5 POLARIZAÇÕES DA ONDA GRAVITACIONAL MODIFICADAS PELA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

A ideia a ser desenvolvida nesse capítulo será baseada na referência (MALUF et al., 2014). Nesse trabalho, foi utilizada a técnica de projeção de spin de Barnes e Rivers para realizar a inversão do operador simétrico de *rank* dois presente na Eq. (E.23). Essa técnica consiste em utilizar uma base ortonormal completa de operadores para modelos que são invariantes por Lorentz em quatro dimensões. No entanto, nesse trabalho está sendo considerada a violação da simetria de Lorentz, dessa forma, é preciso inserir termos nessa base que comportem os termos que contém o vetor b^μ . Para consultar sobre esse ferramental, por favor, veja as referências (BOLDO et al., 2010; MALUF et al., 2013; RIVERS, 1964).

5.1 Solução da equação do gráviton modificada

A equação de movimento do gráviton obtida a partir da Lagrangeana efetiva (E.16) é

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu,\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1)$$

com o operador $\tilde{\mathcal{O}}$ definido pela (E.20). Assim, saturando a Eq. (5.1) com $p^\mu p^\nu$, $b^\mu b^\nu$, $p^{(\mu} b^{\nu)}$ e a métrica de Minkowski, obtêm-se os seguintes vínculos

$$p_\mu p_\nu h^{\mu\nu} = 0, \quad b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} = 0, \quad p_{(\mu} b_{\nu)} h^{\mu\nu} = 0, \quad h = 0. \quad (5.2)$$

Saturando a equação com apenas p^μ e b^μ , obtêm-se os seguintes vínculos

$$p_\mu h^\mu_\nu = 0, \quad b_\mu h^\mu_\nu = 0. \quad (5.3)$$

O conjunto de Eqs. (5.2) e (5.3) consistem em 12 vínculos e como existem 10 graus de liberdade do tensor $h_{\mu\nu}$ e 4 graus de liberdade do vetor b^μ , restam apenas 2 graus de liberdade para a teoria, assim como na teoria linearizada usual da gravidade. Portanto, apesar da existência de um vetor com valor esperado diferente de zero o gráviton ainda possui dois graus de liberdade como usualmente. Finalmente, aplicando (5.2) e (5.3) na (5.1), obtêm-se

$$[p^2 + \xi(b \cdot p)^2] = 0, \quad (5.4)$$

que é a relação de dispersão modificada associada com o polo físico encontrado em (MALUF et al., 2014). Assim, a principal alteração encontrada na teoria devido a existência de um valor esperado de vácuo diferente de zero é a modificação da relação de dispersão do gráviton $p^2 = 0 \rightarrow p^2 + \xi(b \cdot p)^2 = 0$. Outro ponto a se destacar é que o acoplamento não mínimo $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$

não produz modos massivos para o gráviton.

Em teorias de campo é sempre necessário verificar a causalidade e a unitariedade dos polos do propagador. Em (MALUF et al., 2014) o leitor pode encontrar a explicação da unitariedade de (5.4). A análise da unitariedade é realizada por meio da saturação do propagador de Feynman por intermédio de correntes externas. Em (VELTMAN, 1976) tal método é implementado através do propagador saturado $(SP) = J^{*\mu} Res(\Delta_{\mu\nu}) J^\nu$, que é a contração de correntes externas com o resíduo do propagador calculado em cada polo. O mesmo método também é utilizado para analisar a unitariedade no setor de gauge do SME (CASANA et al., 2010). Agora, para mostrar em que condições o polo é causal, faz-se as seguintes considerações, $p^\mu = (p_0, \vec{p})$, $b^\mu = (b_0, \vec{b})$ e notando que, $b \cdot p = b^\mu p_\mu$, $\vec{b} \cdot \vec{p} = |\vec{b}||\vec{p}| \cos \Psi$ e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, tem-se

$$\begin{aligned} p^2 + \xi (b \cdot p)^2 &= p_0^2 - |\vec{p}|^2 + \xi [b^0 p_0 - |\vec{b}||\vec{p}| \cos \Psi]^2 \\ &= p_0^2 - |\vec{p}|^2 + \xi [(b^0)^2 (p_0)^2 - 2b^0 p_0 |\vec{b}||\vec{p}| \cos \Psi + |\vec{b}|^2 |\vec{p}|^2 \cos^2 \Psi], \end{aligned} \quad (5.5)$$

de modo que, a equação quadrática na variável p_0 é

$$[1 + \xi (b^0)^2] p_0^2 - 2b^0 |\vec{b}||\vec{p}| \cos \Psi p_0 + |\vec{p}| [\xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi - 1] = 0, \quad (5.6)$$

que conduz a solução,

$$p_0 = |\vec{p}| \left[\frac{\xi b^0 |\vec{b}| \cos \Psi \pm \sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi}}{1 + \xi (b^0)^2} \right]. \quad (5.7)$$

Portanto, há duas soluções para a relação de dispersão na forma $p_{0\pm} = a(\vec{p}) \pm b(\vec{p})$. No entanto, as duas soluções não são independentes, pois a expressão (5.4) é invariante sob a substituição $p_\mu \rightarrow -p_\mu$. Então, apenas uma das soluções será considerada, de modo que a solução utilizada daqui em diante será a $p_{0+} = p_0$ (HERNASKI, 2014). A velocidade de grupo é simplesmente $dp_0/d\vec{p}$

$$u_g = \left[\frac{\xi b^0 |\vec{b}| \cos \Psi \pm \sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi}}{1 + \xi (b^0)^2} \right]. \quad (5.8)$$

Para conseguir causalidade, precisa-se $u_g < 1$, de modo que

$$\xi b^0 |\vec{b}| \cos \Psi + \sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi} < 1 + \xi (b^0)^2. \quad (5.9)$$

Utilizando a aproximação $(1+x)^n \sim (1+nx)$ no termo com raiz e realizando os cálculos algébricos, obtêm-se a seguinte inequação quadrática para b^0

$$(b^0)^2 - 2|\vec{b}| \cos \Psi b^0 + |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi > 0, \quad (5.10)$$

em que a raiz é

$$b^0 = |\vec{b}| \cos \Psi. \quad (5.11)$$

Portanto, tem-se causalidade para $b^0 > |\vec{b}| \cos \Psi$. Sabendo disso, pode-se solucionar a Eq. (5.4) através da transformada de Fourier

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \tilde{h}_{\mu\nu}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (5.12)$$

em que $\tilde{h}_{\mu\nu}(p)$ é dado por,

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(p) = 2\pi \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) \delta[p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 a(p). \quad (5.13)$$

A soma existente leva em consideração as duas polarizações do tensor de polarização $\varepsilon_{\mu\nu}$, enquanto o fator $\delta[p^2 + \xi(b \cdot p)]^2$ é utilizado para garantir que $h_{\mu\nu}$ satisfaça a Eq. (5.4),

$$\begin{aligned} [p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 h_{\mu\nu} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) [p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 \delta[p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 a(p) e^{-ip \cdot x} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Assumindo que a perturbação é hermitiana, em outras palavras, assumindo que o campo é real, obtêm-se a seguinte condição,

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(-p) = \varepsilon_{\mu\nu}^{*(\lambda)}(p), \quad a(-p) = a^\dagger(p). \quad (5.15)$$

Agora, sabendo que a função degrau é dada por,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (5.16)$$

fica evidente que $\Theta(p^0) + \Theta(-p^0) = 1$. Inserindo essa identidade na Eq. (5.12) juntamente com $\tilde{h}_{\mu\nu}(p)$,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^4 p \delta[p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 [\Theta(p^0) \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) a^{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x} \\ &\quad + \Theta(-p^0) \varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) a^{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mudando o sinal do integrando no segundo termo, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^4 p \delta[p^2 + \xi(b \cdot p)]^2 \Theta(p^0) [\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p) a^{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x} \\ &\quad + \varepsilon_{\mu\nu}^{*(\lambda)}(p) a^{\dagger(\lambda)}(p) e^{ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Essa função envolve apenas os estados de energia positiva e ainda pode-se simplificar mais ainda a Eq. (5.18) com uma propriedade da delta de Dirac. Se uma função $f(x)$ possui raízes x_n , com $n = 1, 2, \dots$, então

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{|df/dx|_{x=x_i}}. \quad (5.19)$$

Nesse caso a função $f(x)$ é

$$f(p_0) = p_0^2 - |\vec{p}|^2 + \xi [b^0 p_0 - |\vec{b}||\vec{p}| \cos \Psi]. \quad (5.20)$$

Portanto,

$$\delta[p^2 + \xi (b \cdot p)^2] = \frac{\delta(p_0 - p_{0+}) + \delta(p_0 - p_{0-})}{\sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi}}. \quad (5.21)$$

Ao substituir a (5.21) na (5.18) é observado que a segunda integral se anula, pois a função delta faz com que $p_0 = p_{0-}$ e para tal valor a função degrau se anula, pois $p_{0-} < 0$. Pode-se verificar isso impondo diretamente na solução da equação de dispersão

$$\xi b^0 |\vec{b}| \cos \Psi - \sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi} < 0, \quad (5.22)$$

após simplificações algébricas, conclui-se que,

$$\xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi < 1. \quad (5.23)$$

De fato, todos os termos na Eq. (5.23) são menores do que 1, o que confirma $p_{0-} < 0$. Nesse caso, a solução geral fica no seguinte formato

$$h_{\mu\nu}(x) = d^3 \tilde{p} \sum_{\lambda=1}^2 \int [\varepsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)}(p_{0+}, \vec{p}) a^{(\lambda)}(p_{0+}, \vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \varepsilon_{\mu\nu}^{*(\lambda)}(p_{0+}, \vec{p}) a^{\dagger(\lambda)}(p_{0+}, \vec{p}) e^{ip \cdot x}], \quad (5.24)$$

em que,

$$d^3 \tilde{p} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 |2\vec{p}| \sqrt{1 + \xi (b^0)^2 - \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi}}. \quad (5.25)$$

Além disso, na teoria quântica de campos os operadores $a(p)$ e $a^\dagger(p)$ podem ser identificados como os operadores de destruição e criação do campo $h_{\mu\nu}$ que satisfazem as relações de comutações usuais de estados de partículas de spin 2.

5.2 Modificação nos estados de polarização

Para determinar a modificação existente no tensor de polarização devido ao valor esperado de vácuo b^μ , pode-se utilizar os vínculos das Eqs. (5.3). Além disso, irá ser tomada apenas uma frequência do pacote de ondas da Eq. (5.24) e o tensor de polarização será tomado real $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}^*$. Ademais, ressalta-se que o quadrivetor de momento é $p^\mu = (p_{0+}, 0, 0, p_3)$.

Portanto, os vínculos geram os seguintes sistemas,

$$\begin{aligned}
 -p_0 \varepsilon^0_0 + p_3 \varepsilon^3_0 &= 0 \\
 -p_0 \varepsilon^0_1 + p_3 \varepsilon^3_1 &= 0 \\
 -p_0 \varepsilon^0_2 + p_3 \varepsilon^3_2 &= 0 \\
 -p_0 \varepsilon^0_3 + p_3 \varepsilon^3_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
 b_0 \varepsilon^0_0 + b_1 \varepsilon^1_0 + b_2 \varepsilon^2_0 + b_3 \varepsilon^3_0 &= 0 \\
 b_0 \varepsilon^0_1 + b_1 \varepsilon^1_1 + b_2 \varepsilon^2_1 + b_3 \varepsilon^3_1 &= 0 \\
 b_0 \varepsilon^0_2 + b_1 \varepsilon^1_2 + b_2 \varepsilon^2_2 + b_3 \varepsilon^3_2 &= 0 \\
 b_0 \varepsilon^0_3 + b_1 \varepsilon^1_3 + b_2 \varepsilon^2_3 + b_3 \varepsilon^3_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Além disso, lembrando que $h_{\mu\nu}$ possui traço nulo, pode-se determinar o tensor de polarização em função das componentes do momento da onda e do vetor do campo de bumble-bee. A partir de agora, pode-se estudar o efeito da existência de um valor esperado de vácuo nas polarizações. Para tanto, alguns casos particulares serão tratados.

1) \vec{p} e \vec{b} são paralelos ou b^μ é do tipo-tempo.

Nesse caso, para vetores paralelos, a direção preferencial é a mesma direção na qual a onda está se propagando. Solucionando o sistema de equações para $b^\mu = (b_0, 0, 0, b_3)$, ou $b^\mu = (b_0, 0, 0, 0)$ recupera-se o mesmo tensor de polarização que foi encontrado para o caso usual,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Assim, observa-se que as polarizações (+) e (x) permanecem sem alterações. Contudo, a relação de dispersão para os dois casos é distinta, de modo que

$$p_0 = \frac{p_3}{\sqrt{1 + (b^0)^2 \xi}} \tag{5.29}$$

é a relação para o caso em que b^μ é do tipo-tempo e

$$p_0 = p_3 \sqrt{1 - \xi b_0^2} \tag{5.30}$$

é a relação para o caso em que \vec{b} e \vec{p} são paralelos. Dessa forma, conclui-se que para esse caso,

não há alteração do tensor de polarização, ou seja, como não há uma direção preferencial no espaço-tempo, não há alterações no movimento relativo entre as partículas que interagem com a onda gravitacional, como deveria ser. Porém, constata-se que apesar disso, a velocidade de grupo é alterada.

2) b^μ é do tipo-espaço e \vec{p} e \vec{b} são ortogonais.

Nesse caso, a direção preferencial do vetor faz um ângulo de 90° com a direção de propagação da onda. A solução do sistema equações para $b^\mu = (0, 0, b_2, 0)$ conduz a,

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{00} & \varepsilon^{10} & 0 & \varepsilon^{00} \\ \varepsilon^{10} & 0 & 0 & \varepsilon^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{00} & \varepsilon^{10} & 0 & \varepsilon^{00} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Por sua vez, a relação de dispersão fornece,

$$p_0 = p_3 \quad (5.32)$$

Assim, a existência de um valor esperado de vácuo diferente de zero do campo de bumblebee que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo leva a modificações no tensor de polarização da onda gravitacional. Porém, ao contrário do que foi observado no primeiro caso, não há modificação na relação de dispersão, de modo que a velocidade de grupo não sofre alterações.

Dessa forma, pode-se analisar o movimento relativo de partículas devido a influência de uma onda gravitacional passante. Portanto, o elemento de linha geral considerando tal tensor de polarização é

$$ds^2 = (1 + \varepsilon^{00})dt^2 - dx^2 - dy^2 - (1 - \varepsilon^{00})dz^2 + 2dtdx\varepsilon^{10} + 2dtdz\varepsilon^{00} + 2dxdz\varepsilon^{10}. \quad (5.33)$$

Logo, percebe-se que as polarizações que existiam no caso usual foram drasticamente alteradas. Observando com atenção, percebe-se que existe uma polarização (x) no plano perpendicular ao \vec{b} , já que é observado um elemento cruzado do tipo $dxdz$. No entanto, a outra polarização se localiza na direção de propagação da onda, ou seja, é uma polarização longitudinal e ela não apresenta nenhuma característica que possa ser comparada a alguma forma de polarização usual, seja a (+) ou a (x).

Portanto, observa-se que para esse caso a violação da simetria de Lorentz altera completamente os estados de polarização da onda gravitacional, apesar de não alterar a velocidade de grupo. Logo, comparando com o caso usual, em que o plano de polarização é perpendicular a direção de propagação da onda, ou seja, a onda é transversal, percebe-se que aqui esse

conceito é totalmente alterado, pois surge um modo longitudinal. Tais modificações também surgem para quadrivetores da seguinte forma $b^\mu = (b_0, 0, b_2, 0)$ em que os planos de polarização que surgem podem ser paralelos ou perpendiculares em relação a direção de propagação da onda.

5.3 Propagação do gráviton e detecção do campo b^μ

A fim de estabelecer limites superiores para o parâmetro da violação de Lorentz, pode-se comparar a velocidade de grupo (5.8) com a obtida para o gráviton massivo em (WILL, 1998), que é a mesma utilizada para a realização de cálculos no experimento do LIGO (ABBOTT et al., 2016). Portanto, utilizando a velocidade de grupo para o gráviton massivo

$$v_g \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_g}{k_g} \right)^2, \quad (5.34)$$

em que m_g é o limite superior para a suposta massa do gráviton e k_g é a energia do gráviton. As colaborações do LIGO e Virgo relataram que o pico do sinal da onda gravitacional detectada no evento GW150914 possui frequência $\nu = 150$ Hz (ABBOTT et al., 2016), de modo que a energia é $k_g = h\nu \sim 6,024 \times 10^{-13}$ eV (para $h = 4,136 \times 10^{-15}$ eV). Além disso, o limite superior para a massa do gráviton encontrado por eles é dado por $m_g < 1,20 \times 10^{-22}$ eV, de modo que

$$\Delta v_g = c - v_g < 2,0 \cdot 10^{-20}, \quad (5.35)$$

que é o valor que será utilizado para estimar os valores limites para os parâmetros da violação de Lorentz (PASSOS et al., 2017). Assim, pode-se realizar a mesma estimativa para a velocidade de grupo (5.8) aqui encontrada. Primeiro, considere o caso para b^μ do tipo-espaço

$$u_g \sim 1 - \frac{1}{2} \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi, \quad (5.36)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Delta u_g &= c - u_g \\ &= \frac{1}{2} \xi |\vec{b}|^2 \cos^2 \Psi. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para o caso em que \vec{b} e \vec{p} são ortogonais,

$$\xi |\vec{b}|^2 = 2\Delta u_g < 4 \cdot 10^{-20}. \quad (5.38)$$

Para o b^μ do tipo-tempo, tem-se

$$\begin{aligned}\xi(b_0)^2 &\sim \frac{2\Delta v_g}{1 - 2\Delta v_g} \\ &\sim 2\Delta v_g,\end{aligned}\tag{5.39}$$

que é o mesmo valor encontrado para o parâmetro do tipo-espaço.

Dentro do MPE, muitos físicos estão dedicados em desenvolver teorias e executar experimentos em que a premissa básica é que minúsculas violações de Lorentz e CPT devem ser observáveis na natureza. Dessa forma, Kostelecký e seus colaboradores fizeram uma compilação de possíveis resultados experimentais para que a comunidade científica pudesse se basear (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011). Alguns exemplos de experimentos para medir os coeficientes para as violações de Lorentz e CPT no MPE são: oscilações de neutrinos (AHARMIM et al., 2018; BARABASH et al., 2018; ADEY et al., 2018), oscilações de kaons (BABUSCI et al., 2014; DOMENICO; COLLABORATION et al., 2010), produção e decaimento do quark top (ABAZOV, 2012), setor eletrofraco (SYTEMA, 2016; MÜLLER, 2013), experimento de comparação de relógios (PRUTTIVARASIN et al., 2015; BOTERMANN et al., 2014; HOHENSEE et al., 2013), setor do fóton (KISLAT, 2018; PARKER et al., 2015), setor gravitacional (SHAO et al., 2018b; ABBOTT et al., 2017; SHAO et al., 2018a; CASANA et al., 2018; BOURGOIN et al., 2017), dentre outros.

Dessa forma, as modificações nos estados de polarização aqui determinadas podem ser encontradas pelos experimentos de detecção de ondas gravitacionais. Entre o LIGO e LISA o que possui uma maior perspectiva de encontrar tal modificação é LISA, pois ele estará orbitando o planeta terra, de modo que sua orientação em relação a um teórico vetor de fundo possuirá mais variações do que o LIGO. Essa mesma ideia é utilizada nos experimentos de comparação de relógios, em que melhores resultados são encontrados quando os relógios estão orbitando o planeta terra (satélites ou estação espacial internacional). Contudo, como o LISA só irá ser lançado em 2034 se pode pensar em alguma modificação nos experimentos já existentes aqui na terra, de modo que os pêndulos que formam as massas de testes possam ser ajustados de modo que a polarização modificada devido a um teórico vetor de fundo seja determinada.

6 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foram investigados os efeitos de uma violação da simetria de Lorentz devido a existência de um campo vetorial de fundo com o valor esperado de vácuo diferente de zero. Foi utilizado o modelo mais simples encontrado na literatura, o modelo de bumblebee. Aqui, a Lagrangeana da teoria foi expandida até segunda ordem de $h_{\mu\nu}$ para a determinação do propagador do gráviton modificado e com isso foi encontrada uma modificação no potencial newtoniano. A partir desse modelo, foi visto que a relação de dispersão do gráviton foi alterada de $p^2 = 0$ para $p^2 + \xi(b \cdot p)^2 = 0$ e mesmo assim o gráviton permaneceu com dois graus de liberdade. Além disso, apesar do acoplamento do campo de bumblebee com a curvatura, não foram gerados modos massivos para o gráviton. Portanto, a equação modificada foi solucionada e a partir dos vínculos $p_\mu h^{\mu\nu} = 0$ e $b_\mu h^{\mu\nu} = 0$ foram obtidas modificações nos estados de polarização. Para os casos que b^μ é do tipo-tempo ou \vec{b} na mesma direção de propagação da onda (direção de \vec{p}) nenhuma alteração foi evidenciada no tensor de polarização, mas alterações foram encontradas na velocidade de grupo. Contudo, para o caso que b^μ é do tipo-espaço e \vec{b} é ortogonal ao momento da onda foram encontradas modificações significativas, de modo que a polarização das não é mais em um plano perpendicular a direção de propagação, mas um dos modos de polarização está em um plano perpendicular em relação ao \vec{b} e o outro é longitudinal em relação ao momento da onda. Por fim, alguns valores limites foram obtidos para os parâmetros $\xi|\vec{b}|^2$ pela comparação da velocidade de grupo encontrada para a relação de dispersão modificada e a velocidade de grupo para o gráviton massivo.

APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A densidade Lagrangeana com peso +1 que é utilizada para a derivação da EE no vácuo é,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R \quad (\text{A.1})$$

em que g é o determinante da métrica e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci. Dessa forma, a ação que será variada para a determinação das equações de movimento é,

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g}R d^n x. \quad (\text{A.2})$$

A Equação (A.2) é conhecida como ação de Einstein-Hilbert. Para um entendimento mais detalhado de como chegar nessa ação, o leitor pode consultar (CARROLL, 2004). Assim, realizando a variação funcional de (A.2),

$$\delta S_{EH} = \int d^n x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g}). \quad (\text{A.3})$$

Lembrando que do princípio da mínima ação,

$$\delta S_{EH} = \int \left(\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) d^n x. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se dividir a ação da Eq. (A.3) em três partes

$$\delta S_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta S_2 = \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

$$\delta S_3 = \int d^n x R \delta \sqrt{-g}. \quad (\text{A.7})$$

Das ações, apenas a Eq. (A.6) está no formato da Eq. (A.4). Portanto, precisa-se adequar o formato das outras equações antes para determinar a equação de movimento. Lembrando que o tensor de Riemann é

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}, \quad (\text{A.8})$$

pode-se determinar o tensor de Ricci por contração, $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$. Agora, para determinar a

variação do tensor de Riemann, pode-se realizar a variação da conexão, substituir o resultado na Eq. (A.8) e contraí-la. É válido ressaltar que a toda variação está sendo realizada em relação à métrica $g_{\mu\nu}$. Como a variação da conexão continua sendo um tensor, pode-se tomar sua derivada covariante,

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \partial_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho. \quad (\text{A.9})$$

Tomando o tensor de Riemann e fazendo as considerações de primeira ordem, obtêm-se

$$\delta R_{\nu\mu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda). \quad (\text{A.10})$$

De modo que a primeira componente da ação de Einstein-Hilbert é,

$$\delta S_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)]. \quad (\text{A.11})$$

Trocando o índice do operador nabla de λ para σ , pode-se deixar a integral correspondente com respeito ao elemento de volume da divergência covariante de um vetor,

$$\delta S_1 = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - g^{\mu\sigma} (\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)]. \quad (\text{A.12})$$

Agora, pode-se substituir a expressão da variação da conexão por uma que contenha a métrica. Lembrando que $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$, tem-se,

$$\delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = -\delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando pela métrica inversa,

$$g^{\mu\lambda} \delta g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = -\delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma}. \quad (\text{A.14})$$

Por fim, fazendo as devidas substituições e realizando a troca de alguns índices,

$$\delta g^{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \quad (\text{A.15})$$

Além disso,

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu g^{\mu\sigma} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Variando a Eq. (A.16),

$$\delta \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta g^{\mu\nu} + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \delta g^{\sigma\nu} + \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu g^{\mu\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu \delta g^{\mu\sigma} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Olhando com atenção, constata-se que três termos da Equação (A.17) formam uma derivada

covariante da variação da métrica, de modo que,

$$\nabla_\lambda \delta g^{\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu g^{\sigma\nu} - \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\nu g^{\mu\sigma}. \quad (\text{A.18})$$

Trocando λ por ρ , tem-se a equação,

$$\nabla_\rho \delta g^{\mu\nu} = -\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu g^{\sigma\nu} - \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\nu g^{\mu\sigma}. \quad (\text{A.19})$$

Multiplicando (A.18) por $g_{\mu\sigma}$ e (A.19) por $g_{\mu\lambda}$, somando as duas, utilizando (A.15) e rearranjando alguns termos, tem-se finalmente,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2} \left[g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta}) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Dessa forma, a variação da ação S_1 em função da métrica e suas derivadas é,

$$\delta S_1 = \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda})]. \quad (\text{A.21})$$

Perceba que a integral da Eq. (A.21) está no formato procurado e com a utilização do teorema de Stokes, que é apresentado no Apêndice D, mostra-se que ela é igual a contribuição de contorno no infinito, que pode ser definida nula fazendo a variação se anular no infinito. Portanto, constata-se que esse primeiro termo não contribui para a ação total.

É importante ressaltar que o termo de fronteira também possuirá componentes da variação da primeira derivada da métrica, que de um modo rigoroso não se anulam no infinito. Porém, para a nossa finalidade essa consideração pode ser tomada. Para tratar do terceiro termo, considere a seguinte igualdade,

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M). \quad (\text{A.22})$$

Lembrando da propriedade cíclica do traço, que permite ignorar a não comutatividade de M^{-1} e δM a variação dessa identidade conduz a

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M), \quad (\text{A.23})$$

que para a métrica, torna-se

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}), \quad (\text{A.24})$$

em que foi utilizada a Eq. A.15. Por fim,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo (A.25) em (A.7), a variação da ação de Einstein-Hibert se torna,

$$\delta S_{EH} = \int d^n x \sqrt{-g} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.26})$$

Conseqüentemente, através do princípio da mínima ação, têm-se a equação de Einstein no vácuo,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.28})$$

A.0.1 Equação De Einstein com termo de massa

Para determinar a equação de campo com a presença do termo de massa considere a ação

$$S = \frac{2}{\kappa^2} S_H + S_M, \quad (\text{A.29})$$

em que, S_M é a ação para a matéria e $\kappa^2 = 32\pi G$ e G é a constante gravitacional. Procedendo da mesma maneira, o princípio variacional fornece

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2}{\kappa^2} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (\text{A.30})$$

em que o tensor de energia-momento é,

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.31})$$

De modo que a EE completa é,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.32})$$

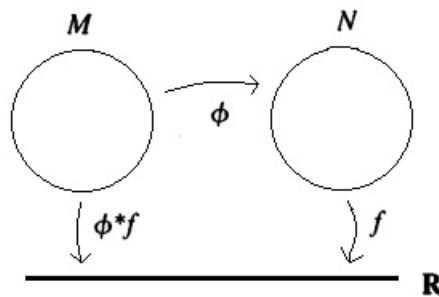
APÊNDICE B – MAPEAMENTO ENTRE VARIEDADES E DIFEOMORFISMO

Sejam as variedades M e N com coordenadas x^μ e y^α respectivamente em que as variedades podem ou não possuir a mesma dimensão. Considere o mapeamento $\phi : M \rightarrow N$ e uma função $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Define-se o *pullback* de f por ϕ como a composição $(f \circ \phi)$. O mapeamento $(f \circ \phi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ é simplesmente uma função em M . A operação pode ser vista como um "atalho" que se toma para conduzir resultados em \mathbb{R} . Outra forma de ver a operação é como se a função f fosse "puxada" a partir de N para M . A equação que da operação de *pullback* é definida da seguinte forma

$$\phi^* f = (f \circ \phi). \quad (\text{B.1})$$

Observe a Fig. 15 para entender de uma forma mais clara.

Figura 15 – Operação de *pullback*



Fonte: Próprio Autor

Além disso, percebe-se que não é possível realizar a mesma operação para uma função da variedade M para \mathbb{R} , já que não dá para compor tal função com o mapeamento ϕ . Contudo, define-se a operação de *pushforward* para um vetor V , já que vetores podem ser visto como operadores derivativos que mapeiam funções suaves para números reais. Diante disso, dado um vetor $V(p)$ em um ponto p da variedade M , define-se o vetor *pushforward*, isto é, o vetor "puxado" para N por,

$$(\phi_* V)f = V(\phi^* f). \quad (\text{B.2})$$

Ressalta-se que $\phi_* V$ está definido em um ponto $\phi(p)$ de N . Tomando $V = V^\mu \partial_\mu$ e aplicando o vetor *pushforward* em uma função f , pode-se obter o elemento de matriz do operador *push-*

forward, para relacionar os componentes em M e em N ,

$$\begin{aligned} (\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha f &= V^\mu \partial_\mu (\phi^* f) \\ &= V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) \\ &= V^\mu \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Portanto, o elemento de matriz é identificado como,

$$(\phi_*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (\text{B.4})$$

Percebe-se que se as variedades são as mesmas, a equação de *pushforward* do vetor é idêntica a lei de transformação vetorial sob mudança de coordenadas. Diante da análise aqui realizada, nota-se que em geral não se pode "puxar" vetores de M para N . Isto é, não se pode aplicar a operação de *pullback*. Não obstante, as formas únicas, que são duais dos vetores, podem ser "puxadas", isto é, se pode aplicar a operação de *pullback*, mas em geral não a de *pushforward*. Logo, define-se o *pullback* de uma forma única ω em N ,

$$(\phi^* \omega)(V) = \omega(\phi_* V). \quad (\text{B.5})$$

Nota-se que a operação é vista como uma ação em cima do vetor V em M . Analogamente, o elemento de matriz da operação é,

$$(\phi^*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (\text{B.6})$$

Existem argumentos matemáticos concisos que explicam a razão de o porquê as operações aqui abordadas nem sempre se aplicam em todos os objetos. Caso o leitor esteja interessado, verificar a referência (LEE, 2001). Assim, introduz-se a operação de *pullback* para um tensor covariante de ordem l ,

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y_1^\alpha}{\partial x_1^\mu} \dots \frac{\partial y_l^\alpha}{\partial x_l^\mu} T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}. \quad (\text{B.7})$$

Já para um tensor contravariante de ordem k ,

$$(\phi^* S)^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial y_1^\alpha}{\partial x_1^\mu} \dots \frac{\partial y_l^\alpha}{\partial x_l^\mu} S^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (\text{B.8})$$

Caso o mapeamento ϕ seja invertível, então define-se um difeomorfismo entre M e N . De forma que o mapeamento será invertível se $M = N$, isto é, o difeomorfismo acontece em uma mesma variedade. Daí, pode-se livremente mover tensores entre a variedade utilizando o mapeamento ϕ e sua inversa ϕ^{-1} . Para um tensor misto de grau (k, l) , define-se a operação de *pushforward* por

$$(\phi_* T)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi^* \omega^{(1)}, \dots, \phi^* \omega^{(k)}, [\phi^{-1}]_* V^{(1)}, \dots, [\phi^{-1}]_* V^{(l)}), \quad (\text{B.9})$$

em que as formas únicas $\omega^{(i)}$ são definidas na variedade N e os vetores $V^{(i)}$ são definidos na variedade M . Mais sucintamente, em componentes,

$$(\phi_* T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (\text{B.10})$$

Deixa-se claro que como a operação é invertível não há necessidade de definir a operação de *pullback*. Lembrando que existem as transformações de coordenadas ativas e passivas o difeomorfismo pode ser visto como uma mudança de coordenadas ativas. Em outras palavras, ao se realizar um difeomorfismo os pontos do espaço-tempo são alterados. Para realizar uma mudança de coordenadas, digamos de x^μ para y^μ em uma mesma variedade M , pode-se utilizar o difeomorfismo como se segue. Seja o mapeamento $\phi : M \rightarrow M$ e o *pullback* $(\phi^* x)^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para gerar a mudança de coordenadas, simplesmente se movem os pontos na variedade e então se calcula as coordenadas dos novos pontos. Dessa forma, pode-se livremente comparar tensores em diferentes pontos da variedade. Para tanto, basta tomar uma família de difeomorfismos dada pelo mapeamento ϕ_t . Tal família pode ser vista como um mapeamento suave $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, tal que para cada valor do parâmetro t se tem um difeomorfismo. Sabe-se que uma família de difeomorfismos pode ser construída através de qualquer campo vetorial $V^\mu(x)$. Esse campo é referido como o gerador do difeomorfismo. Para mais detalhes formais, conferir (CARROLL, 2004).

Assim, dado um campo vetorial $V^\mu(x)$, pode-se definir uma família de difeomorfismos parametrizada por t . Logo, pode-se calcular a diferença entre o *pullback* de um tensor para p e o seu valor original dado em p ,

$$\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p) = \phi_t^* [T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p). \quad (\text{B.11})$$

Logo, define-se a derivada de *Lie* do tensor ao longo do campo vetorial gerador do difeomorfismo,

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{t} \right). \quad (\text{B.12})$$

Deixa-se claro que a definição da derivada de *Lie* é linear. Logo, todas as regras de derivadas convencionais são válidas. Para finalizar esse apêndice, apresenta-se a derivada de *Lie* para a métrica do espaço curvo $g_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)}, \quad (\text{B.13})$$

em que ∇_μ é a derivada covariante.

APÊNDICE C – MECANISMO DE HIGGS

Quando ocorre uma quebra espontânea de simetria envolvendo um campo de gauge e uma invariância local da simetria $U(1)$ acontece um mecanismo que é conhecido na literatura por mecanismo de Higgs, desenvolvido por Peter Higgs em 1964. Nesse caso, os bósons sem massa de Goldstone não aparecem e o campo de gauge adquire massa. Sabe-se que partículas sem massa de spin *um* possuem dois estados de spins, enquanto que as massivas possuem três (SREDNICKI, 2007). É também sabido que na teoria eletrofraca o mecanismo de Higgs fornece a massa dos bósons vetoriais W^+ , W^- e Z^0 (MCMAHON, 2009).

Seja o campo ϕ . A invariância da simetria $U(1)$ implica que a Lagrangeana é invariante sob a transformação,

$$\phi'(x) = e^{-iq\theta} \phi(x). \quad (\text{C.1})$$

Como a simetria é local, tem-se $\theta = \theta(x)$, isto é, o parâmetro é uma função da coordenada do espaço-tempo. O parâmetro q é um número real.

Para que a invariância em uma transformação local de gauge seja alcançada, se faz necessário introduzir um campo de gauge sem massa. Aqui, tal parâmetro será tal qual o potencial vetor A_μ da eletrodinâmica. Além disso, ressalta-se que para se ter a invariância da Lagrangeana irá ser utilizada a derivada covariante. A transformação para A_μ é,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta. \quad (\text{C.2})$$

Para um campo complexo a Lagrangeana da teoria é dada por

$$L = \nabla_\mu \phi^\dagger \nabla^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{C.3})$$

em que a derivada covariante é definida de uma forma a manter a Lagrangeana invariante,

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu. \quad (\text{C.4})$$

A definição do tensor $F_{\mu\nu}$ é,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{C.5})$$

Sabendo que os termos de massa são identificados na Lagrangeana pela contração do campo de gauge, observa-se a Lagrangeana da Eq. (C.3) não possui termos desse tipo e consequentemente o campo de gauge não possui massa. Por sua vez, o potencial na Eq. (C.3) é

dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{m^2}{2v^2}(\phi^\dagger \phi - v^2)^2, \quad (\text{C.6})$$

em que v é o valor mínimo quando a simetria é preservada, isto é, é o valor que torna o potencial mínimo. Um detalhe importante é que a transformação de gauge

$$\phi'^\dagger \phi' = v, \quad (\text{C.7})$$

fornece o mesmo valor mínimo. Assim, para um campo complexo existem infinitos estados de vácuo e a teoria é preservada para tal transformação. Porém, a quebra de simetria para a Lagrangeana irá desencadear termos massivos. Para conseguir a quebra de simetria basta tomar um campo real e uma transformação de gauge que fornece o campo em torno dos valores de v . A transformação é dada por,

$$\phi' = v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.8})$$

Em que $h(x)$ é o campo de Higgs e $\phi = \phi'$. O potencial nesse caso se torna,

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2v^2}(\phi^2 - v^2)^2 \\ &= \frac{m^2}{2v^2}(\sqrt{2}vh + \frac{h^2}{2})^2 \\ &= m^2h^2 + \frac{m^2h^2}{2v^2}(\sqrt{2}vh + \frac{h^2}{4}). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Os termos de derivada covariante são,

$$\nabla^\mu \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu h + iqvA'^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}iqhA'^\mu. \quad (\text{C.10})$$

Como $\nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ tem-se,

$$\nabla_\mu \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h - iqvA'_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}iqhA'_\mu. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo todos esses termos na Lagrangeana da Eq. (C.3),

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + q^2v^2A'_\mu A'^\mu + \sqrt{2}q^2vhA'_\mu A'^\mu + \frac{q^2h}{2}A'_\mu A'^\mu \\ &\quad - m^2h^2 - \frac{m^2h^2}{2v^2}\left(\sqrt{2}vh + \frac{h^2}{4}\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Pode-se separar a Lagrangeana em partes para analisar algumas coisas importantes. Primeiro, observa-se que a Lagrangeana livre para o campo de Higgs $h(x)$ é,

$$L_{\text{livre}}^h = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2h^2. \quad (\text{C.13})$$

Comparando com a Lagrangeana de Klein-Gordon

$$L_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (\text{C.14})$$

percebe-se que a massa do campo de Higgs é $\sqrt{2}m$. Agora, a Lagrangeana livre para o campo de gauge é,

$$L_{livre}^A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + q^2 v^2 A'_\mu A'^\mu. \quad (\text{C.15})$$

Desse modo, percebe-se que a escolha de um campo real e de uma transformação dada pela Eq. (C.8) fornece massa para o campo de gauge. Tal termo é localizado facilmente na Lagrangeana modificada por $A'_\mu A'^\mu$. Diante disso, comparando com a Lagrangeana de Klein-Gordon adequada, a massa adquirida é, $\sqrt{2}qv$. Os termos restantes da Lagrangeana são termos de auto interação para o campo de Higgs e de interação entre o campo de gauge A_μ e o campo de Higgs $h(x)$

APÊNDICE D – TEOREMA DE STOKES

Um dos resultados mais importantes da teoria da integração nas variedades é o teorema de Stokes, que é uma generalização do teorema fundamental do cálculo. Seja M uma variedade orientada de dimensão n com contorno ∂M . Define-se o mapeamento de inclusão por $\phi : \partial M \rightarrow M$. Se ω é uma forma de dimensão $(n - 1)$ em M , define-se o teorema de Stokes.

Teorema de Stokes. Para qualquer ω suave suportado compactamente em uma variedade M orientada de n dimensões

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (\text{D.1})$$

em que ∂M possui a orientação da variedade, ω está restrito a ∂M no sentido da regra da mão direita. Para ver a prova matemática formal do teorema o leitor pode consultar as referências (LEE, 2001) e (BOTT; TU, 2013).

Esse é o caso mais geral do teorema de Stokes. No caso da RG, o formato do teorema que é mais interessante para ser utilizado é dado por,

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} y \sqrt{|\gamma|} \eta_\mu V^\mu. \quad (\text{D.2})$$

Isto é, o teorema de Stokes relaciona a divergência de um campo vetorial ao seu valor no contorno.

APÊNDICE E – MODELO BUMBLEBEE

As contas referentes ao modelo de bumblebee do Capítulo 3 serão realizadas nesse apêndice. Iniciando com a linearização, a versão contravariante de B_μ é,

$$\begin{aligned} B^\mu &= g^{\mu\nu} B_\nu \\ &= (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(b_\nu + \tilde{B}_\nu). \\ &= b^\mu + \tilde{B}^\mu - b_\nu h^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

É válido lembrar que na dedução da EE foi utilizado o princípio da mínima ação, aqui será utilizada a equação de Euler-Lagrange para a derivação da equação de movimento do campo de bumblebee,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu B_\mu)} \right) = 0. \quad (\text{E.2})$$

Substituindo os resultados encontrados na Lagrangeana da Eq. (3.23),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu B_\nu \partial^\mu B^\nu - \partial_\mu B_\nu \partial^\nu B^\mu) + \sigma B_\mu B_\nu R^{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \mp b^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Portanto, substituindo os termos derivados na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu B_\mu)} \right) = \sqrt{g} [2\sigma B_\nu R^{\mu\nu} - 2V' B^\mu - \partial_\nu (\partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu)]. \quad (\text{E.4})$$

Após algumas manipulações algébricas, a equação de movimento é

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu \sqrt{-g} B_{\mu\nu} - 2V' B_\nu + 2\sigma B^\mu R_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{E.5})$$

em que V' é a derivada em relação ao argumento. Assim, assumindo um potencial na forma (BLUHM; KOSTELECKÝ, 2005)

$$V = \frac{\lambda}{2} (B^\mu B_\mu \mp b^2)^2, \quad (\text{E.6})$$

pode-se utilizar o conjunto de eqs. 3.25 e E.1 para determinar a versão linearizada da Eq. (E.5). Para tanto, basta tomar os termos da equação em função dos termos perturbativos. Dessa forma, após sucessivos cálculos, tem-se

$$(\square \eta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - 4\lambda b_\mu b_\nu) \tilde{B}^\mu = -2\lambda \kappa b_\nu b_\alpha b_\beta h^{\alpha\beta} - 2\sigma b^\alpha R_{\alpha\nu}. \quad (\text{E.7})$$

Pode-se aplicar o método da função de Green para determinar a solução de E.7,

$$\hat{O}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{\nu\alpha}(x-y) = \delta_{\mu}^{\alpha}\delta^{(4)}(x-y). \quad (\text{E.8})$$

Pela integral de Fourier no espaço de momentos

$$\mathcal{G}^{\nu\alpha}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \mathcal{G}^{\nu\alpha}(p) \quad (\text{E.9})$$

e,

$$\delta^{(4)}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (\text{E.10})$$

Notando que,

$$(\square\eta_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu} - 4\lambda b_{\mu}b_{\nu}) = \hat{O}_{\mu\nu}. \quad (\text{E.11})$$

Obtêm-se a função de Green,

$$\mathcal{G}^{\nu\alpha}(p) = -\frac{\eta^{\nu\alpha}}{p^2} - \frac{(p^2 + 4\lambda b^2)}{4\lambda p^2 (b_{\mu}p^{\mu})^2} p^{\nu} p^{\alpha} + \frac{1}{p^2 (b_{\mu}p^{\mu})} (p^{\nu} b^{\alpha} + p^{\alpha} b^{\nu}). \quad (\text{E.12})$$

De modo que, a solução no espaço de momentos é dada por,

$$\tilde{B}^{\mu} = \frac{\kappa p^{\mu} b_{\alpha} b_{\beta} h^{\alpha\beta}}{2b_{\mu}p^{\mu}} + \frac{2\sigma b_{\alpha} R^{\alpha\mu}}{p^2} - \frac{2\sigma p^{\mu} b_{\alpha} b_{\beta} R^{\alpha\beta}}{p^2 b_{\mu}p^{\mu}} + \frac{\sigma p^{\mu} R}{4\lambda b_{\mu}p^{\mu}} - \frac{\sigma b^{\mu} R}{p^2} + \frac{\sigma p^{\mu} b^2 R}{p^2 b_{\mu}p^{\mu}}. \quad (\text{E.13})$$

Agora, com esse resultado, é possível ver como o termo cinético do gráviton se modifica pela presença do VEV b^{μ} . Para tanto, faz-se necessário linearizar o termo $\sqrt{-g}$. Para o auxílio desse cálculo, serão utilizadas as igualdades $\ln(\det) = \text{tr}(\log)$ e $\det(\eta + h) = \det(\eta)\det(1 + \eta^{-1}h)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})} \\ &= e^{\ln(\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})})} \\ &= e^{\frac{1}{2}\ln(-\det(\eta_{\mu\nu})\det(1 + \eta_{\nu\mu}^{-1}h_{\mu\nu}))} \\ &= \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})} e^{\frac{1}{2}\det(1 + \eta_{\nu\mu}^{-1}h_{\mu\nu})} \\ &= \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})} e^{\frac{1}{2}\text{tr}(\ln(1 + \eta_{\nu\mu}^{-1}h_{\mu\nu}))} \\ &= \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})} \left[1 + \frac{1}{2}h^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \frac{1}{8}(h^{\mu}_{\mu})^2 \right] + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Portanto, a expansão de \mathcal{L}_{LV} em segunda ordem da perturbação $h_{\mu\nu}$ é,

$$\mathcal{L}_{LV} = \sigma \left[b_{\mu}b_{\nu}R^{\mu\nu}(h^2) + 2b_{\mu}\tilde{B}_{\nu}R^{\mu\nu}(h) + \frac{1}{2}\kappa h^{\alpha}_{\alpha}b_{\mu}b_{\nu}R^{\mu\nu}(h) \right] + \mathcal{O}(h^3). \quad (\text{E.15})$$

Substituindo \tilde{B}_ν em (E.15),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LV} = & \xi \left[p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2} (b_\mu p^\mu)^2 (h^\alpha{}_\alpha)^2 - \frac{1}{2} (b_\mu p^\mu)^2 h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right. \\
& + p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\alpha} h^\nu{}_\alpha - (b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta + b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)} h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \left. \right] \\
& + \frac{4\xi^2}{\kappa^2} \left[\left(-2p^2 b_\mu b_\nu - 2b^2 p_\mu p_\nu + 4b_\mu p^\mu b_{(\alpha} p_{\beta)} - \frac{p^2 p_\mu p_\nu}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha \right. \\
& + \left(2b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta - b_{(\mu} p_{\nu)} b_{(\alpha} p_{\beta)} + \frac{b^2 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{2b_\mu p^\mu p_\mu p_\nu b_{(\alpha} p_{\beta)}}{p^2} \right. \\
& + \left. \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + \left(b^2 p^2 - (b_\mu p^\mu)^2 + \frac{p^4}{4\lambda} \right) (h^\alpha{}_\alpha)^2 \\
& + \left. \left(p^2 b_\mu b_\nu - 2b_\mu p^\mu b_{(\mu} p_{\nu)} + \frac{(b_\mu p^\mu)^2 p_\mu p_\nu}{p^2} \right) h^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda \right] + \mathcal{O}(h^3). \tag{E.16}
\end{aligned}$$

Os termos de primeira ordem que aparecem na constante de acoplamento ξ são de ordem quadrática de b_μ ao invés de segunda ordem em relação ao ξ . Assim, dada a ação de Einstein-Hilbert expandida no espaço de posição

$$\mathcal{L}_{EH} = \partial h^{\mu\nu} \partial_\alpha h^\alpha{}_\nu - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^3), \tag{E.17}$$

pode-se escrever a Lagrangeana da Eq.(E.16) no espaço de posição juntamente com a Eq. (E.17). Contudo, para determinar o propagador modificado do gráviton é conveniente fixar o gauge,

$$\mathcal{L}_{gf} = - \left(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu h \right)^2. \tag{E.18}$$

Diante disso, pode-se escrever o termo cinético da Lagrangeana na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu, \alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \tag{E.19}$$

em que,

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu, \alpha\beta} = \tilde{\mathcal{K}}_{\mu\nu, \alpha\beta} + \tilde{\mathcal{V}}_{\mu\nu, \alpha\beta}. \tag{E.20}$$

O termo $\tilde{\mathcal{K}}_{\mu\nu, \alpha\beta}$ é escrito na seguinte forma

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) (-\partial^2), \tag{E.21}$$

enquanto o termo $\tilde{\mathcal{V}}_{\mu\nu, \alpha\beta}$ engloba os fatores que contêm a Lagrangeana \mathcal{L}_{LV} . Em posse disso, tem-se que o propagador do gráviton é,

$$\langle 0 | T [h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(y)] | 0 \rangle = D_{\mu\nu, \alpha\beta}(x-y). \tag{E.22}$$

O operador $D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y)$ satisfaz a equação de Green, dada por

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} D^{\lambda\sigma,\alpha\beta}(x-y) = i\mathcal{F}^{\mu\nu,\alpha\beta} \delta^4(x-y), \quad (\text{E.23})$$

em que, $\mathcal{F}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})$.

Agora, é válido ressaltar que o modelo empregado contém modos de NG, que são modos sem massa, como já comentado anteriormente, além de também possuir os modos massivos. Assim, como o método apresentado aqui é perturbativo irá ser determinado apenas o propagador convencional do gráviton através do gauge dado por (E.18). Assim, para determinar a equação do propagador do gráviton é preciso inverter a Eq. (E.20). Utilizando a seguinte identidade matricial

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A+B}, \quad (\text{E.24})$$

pode-se inverter o operador $\tilde{\mathcal{K}}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e obter o propagador do gráviton no espaço dos momentos,

$$D_0^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) = \frac{i}{2} \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{q^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{E.25})$$

Finalmente, a forma explícita de $D^{\mu\nu,\alpha\beta} = D_0^{\mu\nu,\alpha\beta} + D_{LV}^{\mu\nu,\alpha\beta}$ é,

$$\begin{aligned} (D_{LV}^{\mu\nu,\alpha\beta}) = & i\xi \left[b^2 \left(\frac{g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu}}{q^4} \right) + \frac{(b_\mu q^\mu)^2 (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}}{2q^4} \right. \\ & + \frac{b_\mu q^\mu (b^\beta q^\alpha g^{\mu\nu} + b^\alpha q^\beta g^{\mu\nu} + b^\nu q^\mu g^{\alpha\beta}) + b^\mu q^\nu g^{\alpha\beta}}{2q^4} \\ & + \left(\frac{b^\alpha b^\mu g^{\beta\nu} + b^\beta b^\mu g^{\alpha\nu} + b^\alpha b^\nu g^{\beta\mu} + b^\beta b^\nu g^{\alpha\mu} - 2b^\alpha b^\beta g^{\mu\nu} - 4b^\mu b^\nu g^{\alpha\beta}}{2q^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{4b^\mu b^\nu q^\alpha q^\beta + b^\beta b^\nu q^\alpha q^\mu + b^\alpha b^\nu q^\beta q^\mu + b^\beta b^\mu q^\alpha q^\nu + b^\alpha b^\mu q^\beta q^\nu}{2q^4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

APÊNDICE F – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO DESVIO GEODÉSICO

Em espaços não euclidianos a noção de paralelismo não é vista naturalmente como em espaços planos, já geodésicas que estão inicialmente paralelas podem eventualmente se cruzar. Isso dá a noção de desvio geodésico. Considere curvas inicialmente paralelas. Seja $\gamma_s(t)$ uma família de geodésicas em que para cada $s \in \mathbb{R}$ existe uma geodésica parametrizada pelo parâmetro afim t . Tal coleção de curvas define uma superfície $x^\mu(s, t)$ suave de duas dimensões definida em uma variedade M . Em que s e t são os parâmetros que descrevem a superfície. O vetor tangente a curva geodésica é dado por,

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}. \quad (\text{F.1})$$

Além disso, pode-se definir o vetor que mede o afastamento entre duas geodésicas próximas, isto é, um vetor que aponta de uma geodésica para a outra,

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}. \quad (\text{F.2})$$

Em posse disso, define-se a velocidade relativa entre as geodésicas

$$\begin{aligned} V^\mu &= (\nabla_T S)^\mu \\ &= T^\rho \nabla_\rho S^\mu, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

e de maneira análoga a aceleração relativa entre as geodésicas,

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\nabla_T V)^\mu \\ &= T^\rho \nabla_\rho V^\mu. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Como S e T são vetores de base do sistema de coordenada, o comutador entre eles é nulo, logo,

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu. \quad (\text{F.5})$$

Com isso, utilizando-se as definições dos vetores V^μ , S^μ , a regra do produto de Leibniz e cálculos algébricos, tem-se a aceleração,

$$A^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma. \quad (\text{F.6})$$

Em posse disso e sabendo que $A^\mu = \frac{D^2}{dt^2}S^\mu$, tem-se a equação do desvio geodésico,

$$\frac{D^2}{dt^2}S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}T^\nu T^\rho S^\sigma. \quad (\text{F.7})$$

A Eq. (F.7) estabelece que a aceleração relativa entre duas geodésicas vizinhas é diretamente proporcional a curvatura.

APÊNDICE G – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PRODUÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

O presente apêndice tem a finalidade de determinar a equação geral de uma onda produzida por uma fonte qualquer. Nesse caso, o tensor de energia-momento não será mais nulo. Isso implicará em uma perturbação que possuirá escalares e vetores diferentes de zero, assim como o tensor de deformação s_{ij} . Portanto, a solução não será transversal e nem de traço nulo. Aqui, impõe-se o gauge de traço reverso

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{G.1})$$

em que nome traço reverso é adequado, já que $\bar{h} = -h$. No vácuo, distante da fonte, tem-se,

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (\text{G.2})$$

A transformação de gauge (4.16) para $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT}$ é,

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h'\eta_{\mu\nu} \\ &= h_{\mu\nu} + 2\partial_{(u}\xi_{\nu)} - \frac{1}{2}h - \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu} \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} + 2\partial_{(u}\xi_{\nu)} - \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

De modo que, escolhendo o parâmetro ξ_μ para satisfazer,

$$\square \xi_\mu = -\partial_\lambda \bar{h}_\mu^\lambda. \quad (\text{G.4})$$

Pode-se definir o gauge de Lorentz, que é o análogo de $\partial_\mu A^\mu = 0$ do eletromagnetismo,

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{G.5})$$

de (G.1),

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\nu h. \quad (\text{G.6})$$

Substituindo (G.6) e $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$ no tensor de Einstein linearizado,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h) \\ &= -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Logo, a equação a ser solucionada é,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{G.8})$$

Dessa forma, utilizando o método da função de Green, a solução da Eq. (G.8) é

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int \mathcal{G}(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y, \quad (\text{G.9})$$

em que,

$$\square_x \mathcal{G}(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) \quad (\text{G.10})$$

e o símbolo \square_x diz que o operado D' Lambertiano está sendo aplicado nas coordenadas x^σ . Logo, para ondas avançando positivamente no cone de luz, ou seja, avançando no tempo, tem-se

$$\mathcal{G}(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \delta[|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0), \quad (\text{G.11})$$

em que a função degrau é,

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^0 > y^0 \\ 0 & \text{Outro lado.} \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

Substituindo (G.11) em (G.9),

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta[|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y. \quad (\text{G.13})$$

A parte temporal de (G.13) é facilmente calculada utilizando a propriedade da delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[|\vec{x} - \vec{y}| - (x^0 - y^0)] T_{\mu\nu}(y^0, \vec{y}) dy^0 = T_{\mu\nu}(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}), \quad (\text{G.14})$$

com $x^0 = t$. Portanto,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = 4G \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) d^3y. \quad (\text{G.15})$$

Definindo o tempo retardado $t_r = t - |\vec{x} - \vec{y}|$, percebe-se que a Eq. (G.15) é o somatório da influências das fontes de energia e momento no ponto (t_r, \vec{y}) no cone de luz do passado. É ressaltado novamente que está sendo considerado o caso em que a radiação gravitacional é emitida por uma fonte distante do ponto de cálculo. A solução geral de uma equação desse tipo pode ser obtida através das transformadas de Fourier. Aqui, irá ser computada a solução no domínio da frequência e no final será realizada a transformada inversa para obter a

solução no domínio do tempo. A transformada inversa para a perturbação é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{t, \vec{x}} \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},\end{aligned}\quad (\text{G.16})$$

mas,

$$\int dt_r e^{i\omega t_r} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}). \quad (\text{G.17})$$

Para dar prosseguimento é importante considerar as seguintes aproximações: a fonte é isolada, distante e se move em velocidades não relativísticas. Portanto, tem-se $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{r}|$, isto é, a fonte está localizada a uma distância radial r do observador; além de que a fonte é muito menor do que a distância $|\vec{r}|$ e a radiação emitida possui frequências ω suficientemente pequenas. Dessa forma,

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{y}). \quad (\text{G.18})$$

A utilização do gauge de Lorentz na transformada inversa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \partial_\mu (e^{-i\omega t} \tilde{h}) = 0, \quad (\text{G.19})$$

conduz a seguinte condição

$$\frac{\tilde{h}^{0\nu}}{\omega} = -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{h}^{i\nu}. \quad (\text{G.20})$$

Ou seja, pode-se trabalhar o restante da solução apenas focando nas componentes do tipo espaço o restante é recuperado facilmente da Eq. (G.20). Para tratar as componentes do tipo espaço da solução, integra-se por partes

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = \int \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) d^3y - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{ki}) d^3y, \quad (\text{G.21})$$

em que o primeiro de fronteira é nulo, visto que a fonte é isolada. Ademais, como há a conservação do tensor energia momento $\partial - \mu T^{\mu\nu} = 0$, tem-se a partir da transformada de Fourier no espaço,

$$-\partial_k \tilde{T}^{k\nu} = i\omega \tilde{T}^{0\nu} \quad (\text{G.22})$$

Lembrando do caráter simétrico, pode-se realizar os seguintes cálculos,

$$\begin{aligned}\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) &= - \int y^i (\partial_k \tilde{T}^{ki}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) d^3y \\ &= \frac{i\omega}{2} \int [\partial_l (y^i y^j \tilde{T}^{0l}) - y^i y^j (\partial_l \tilde{T}^{0l})] d^3y.\end{aligned}\quad (\text{G.23})$$

Utilizando a condição da Eq. (G.22), finalmente,

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \vec{y}) = -\frac{\omega^2}{2} \int y^i y^j T^{\tilde{0}0} d^3y. \quad (\text{G.24})$$

Em posse disso, define-se o tensor de momento de quadrupolo,

$$I_{ij}(t) = \int y^i y^j T^{\tilde{0}0}(t, \vec{y}) d^3y. \quad (\text{G.25})$$

Essa é uma quantidade constante em cada superfície de tempo constante e ela mede a forma do sistema. O seu cálculo é realizado no ponto em que o cone de luz do passado do observador intercepta a fonte. Desta maneira, a solução final no domínio da frequência assume a forma,

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^i}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega). \quad (\text{G.26})$$

A solução no domínio do tempo é recuperada por meio da transformada inversa

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) &= -\frac{2G}{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-r)} \omega^2 \tilde{I}_{ij}(\omega) \\ &= \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt_r^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t_r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \right], \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

em que, $t_r = t - r$. Finalmente, a solução geral é,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}(t_r)}{dt_r^2}. \quad (\text{G.28})$$

REFERÊNCIAS

- ABAZOV, V. Vm abazov et al.(d0 collaboration), phys. rev. lett. 108, 151804 (2012). *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, p. 151804, 2012.
- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- ADEY, D. et al. Search for a time-varying electron antineutrino signal at daya bay. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 9, p. 092013, 2018.
- AHARMIM, B. et al. Tests of lorentz invariance at the sudbury neutrino observatory. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 11, p. 112013, 2018.
- ANTYPAS, D. et al. Isotopic variation of parity violation in atomic ytterbium. *arXiv preprint arXiv:1804.05747*, 2018.
- BABUSCI, D. et al. Test of cpt and lorentz symmetry in entangled neutral kaons with the kloe experiment. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 730, p. 89–94, 2014.
- BAILEY, Q. G. Gravity sector of the sme. In: WORLD SCIENTIFIC. *Proceedings of the Seventh Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*. [S.l.], 2017. p. 49–52.
- BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 4, p. 045001, 2006.
- BARABASH, A. et al. Final results of the aurora experiment to study 2β decay of cd 116 with enriched cd 116 wo 4 crystal scintillators. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 9, p. 092007, 2018.
- BARROW, J. D. *Les constantes de la nature*. [S.l.]: Odile Jacob, 2005.
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. Detecção de ondas gravitacionais. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 33, n. 3, p. 879–895, 2016.
- BELICH, H. et al. Lorentz symmetry violation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, n. 1, p. 57–64, 2007.
- BERNARDEAU, F. Cosmology, an overview of the standard model. *Current Issues in Cosmology*, p. 87, 2006.
- BJERRUM-BOHR, N. E. J.; DONOGHUE, J. F.; HOLSTEIN, B. R. Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 8, p. 084033, 2003.
- BLUHM, R. Nambu–goldstone modes in gravitational theories with spontaneous lorentz breaking. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 16, n. 12b, p. 2357–2363, 2007.

- BLUHM, R. Lorentz violation and gravity. In: WORLD SCIENTIFIC. *Proceedings of the Sixth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*. [S.l.], 2013. p. 153–155.
- BLUHM, R. Spacetime symmetry breaking and einstein-maxwell theory. *Physical Review D*, APS, v. 92, n. 8, p. 085015, 2015.
- BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz violation, nambu-goldstone modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 065008, 2005.
- BOLDO, J. et al. Graviton excitations and lorentz-violating gravity with cosmological constant. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 689, n. 2-3, p. 112–115, 2010.
- BONDI, H.; PIRANI, F. A.; ROBINSON, I. Gravitational waves in general relativity iii. exact plane waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 251, n. 1267, p. 519–533, 1959.
- BOTERMANN, B. et al. Test of time dilation using stored Li^+ ions as clocks at relativistic speed. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 12, p. 120405, 2014.
- BOTT, R.; TU, L. W. *Differential forms in algebraic topology*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 82.
- BOURGOIN, A. et al. Lorentz symmetry violations from matter-gravity couplings with lunar laser ranging. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 20, p. 201102, 2017.
- BURGESS, C. P. et al. Brane-antibrane inflation in orbifold and orientifold models. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2002, n. 03, p. 052, 2002.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. [S.l.: s.n.], 2004.
- CASANA, R. et al. Exact schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- CASANA, R. et al. Feynman propagator for the nonbirefringent c p t-even electrodynamics of the standard model extension. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 12, p. 125006, 2010.
- CATTANI, M. Dedução das equações da teoria de gravitação de einstein em um curso de graduação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 1, 1998.
- CHRISTENSON, J. H. et al. Evidence for the 2π decay of the K^0 meson. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 4, p. 138, 1964.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- DEBONO, I.; SMOOT, G. F. General relativity and cosmology: Unsolved questions and future directions. *Universe*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 2, n. 4, p. 23, 2016.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1992.
- DIRAC, P. A. Wave equations in conformal space. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 429–442, 1936.

- DOMENICO, A. D.; COLLABORATION, K. et al. Cpt symmetry and quantum mechanics tests in the neutral kaon system at kloe. *Foundations of Physics*, Springer, v. 40, n. 7, p. 852–866, 2010.
- EINSTEIN, A. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. *Science*, v. 84, n. 2188, p. 506–507, 1936.
- ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 9, p. 321, 1964.
- GAMBINI, R.; PULLIN, J. Nonstandard optics from quantum space-time. *Physical Review D*, APS, v. 59, n. 12, p. 124021, 1999.
- GAZZINELLI, R. *Teoria da relatividade especial*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2005.
- GODOI, V. M. dos S. A solução exata de schwarzschild. 2014.
- GOLDSTONE, J. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 19, n. 1, p. 154–164, 1961.
- GREAVES, H.; THOMAS, T. On the cpt theorem. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 45, p. 46–65, 2014.
- GROSS, D. J. The role of symmetry in fundamental physics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 93, n. 25, p. 14256–14259, 1996.
- HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative qed on r4. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 478, n. 1-3, p. 394–400, 2000.
- HERNASKI, C. Quantization and stability of bumblebee electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 12, p. 124036, 2014.
- HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964.
- HILBERT, D. Nachrichten von der königlichen gesellschaft der wissenschaften zu göttingen. 1900.
- HOHENSEE, M. et al. Limits on violations of lorentz symmetry and the einstein equivalence principle using radio-frequency spectroscopy of atomic dysprosium. *Physical review letters*, APS, v. 111, n. 5, p. 050401, 2013.
- JACKIW, R.; PI, S.-Y. Chern-simons modification of general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 68, n. 10, p. 104012, 2003.
- KISLAT, F. Constraints on lorentz invariance violation from optical polarimetry of astrophysical objects. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 11, p. 596, 2018.
- KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004.

- KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Cpt and strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 359, n. 2-3, p. 545–570, 1991.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for lorentz and c p t violation. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 83, n. 1, p. 11, 2011.
- KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Théorie du champ*. Paix, 1965.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth manifolds*. [S.l.]: Springer, 2001.
- LEE, T.-D.; YANG, C.-N. Question of parity conservation in weak interactions. *Physical Review*, APS, v. 104, n. 1, p. 254, 1956.
- LEEFER, N. A. *Search for variation of the fine-structure constant and violation of Lorentz symmetry using atomic dysprosium*. Tese (Doutorado) — UC Berkeley, 2013.
- LEHNERT, R. Violations of einstein’s relativity: Motivations, theory, and phenomenology. In: *AIP. AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2011. v. 1361, n. 1, p. 30–43.
- MALUF, R. et al. Einstein-hilbert graviton modes modified by the lorentz-violating bumblebee field. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 2, p. 025007, 2014.
- MALUF, R. et al. Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous lorentz violation. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 2, p. 025005, 2013.
- MAVROMATOS, N. E. Cpt violation: Theory and phenomenology. *arXiv preprint hep-ph/0504143*, 2005.
- MCMAHON, D. *Quantum field theory demystified: A self-teaching guide*. 2009.
- MOFFAT, J. Spontaneous violation of lorentz invariance and ultra-high energy cosmic rays. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 12, n. 07, p. 1279–1287, 2003.
- MOREIRA, M. A. O modelo padrão da física de partículas. *Revista brasileira de ensino de física*. São Paulo. Vol. 31, n. 1 (mar. 2009), 1306, 11 p., SciELO Brasil, 2009.
- MÜLLER, S. Se müller et al., phys. rev. d 88, 071901 (r)(2013). *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 071901, 2013.
- PARKER, S. R. et al. Bounds on higher-order lorentz-violating photon sector coefficients from an asymmetric optical ring resonator experiment. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 379, n. 42, p. 2681–2684, 2015.
- PASSOS, E. et al. Lorentz invariance violation and simultaneous emission of electromagnetic and gravitational waves. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 772, p. 870–876, 2017.
- PRUTTIVARASIN, T. et al. Michelson–morley analogue for electrons using trapped ions to test lorentz symmetry. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 517, n. 7536, p. 592, 2015.
- RAMOS, M. P.; MALUF, R. V. Sobre a teoria de einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 40, n. 2, 2018.

- RÊGO, R. S. et al. Investigações sobre a ação de euler-heisenberg com violação de simetria cpt. Universidade Federal de Alagoas, 2018.
- RIVERS, R. Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, Springer, v. 34, n. 2, p. 386–403, 1964.
- RYDER, L. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- SCHRECK, M. Fermionic lorentz violation and its implications for interferometric gravitational-wave detection. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 34, n. 13, p. 135009, 2017.
- SHAO, C.-G. et al. Limits on lorentz violation in gravity from worldwide superconducting gravimeters. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 2, p. 024019, 2018.
- SHAO, C.-G. et al. Combined search for a lorentz-violating force in short-range gravity varying as the inverse sixth power of distance. *arXiv preprint arXiv:1812.11123*, 2018.
- SILVA, J. E. G.; ALMEIDA, C. Bipartite finsler spaces and the bumblebee model. In: WORLD SCIENTIFIC. *Proceedings of the Sixth Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*. [S.l.], 2013. p. 258–260.
- SOTIRIOU, T. P. Detecting lorentz violations with gravitational waves from black hole binaries. *Physical Review Letters*, APS, v. 120, n. 4, p. 041104, 2018.
- SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- STOJKU, S. *Testing Lorentz invariance emergence in Ising Model using lattice Monte Carlo simulations*. [S.l.], 2017.
- STRAUMANN, N. *General relativity and relativistic astrophysics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- SYTEMA, A. A. sytema et al., phys. rev. c 94, 025503 (2016). *Phys. Rev. C*, v. 94, p. 025503, 2016.
- THORNE, K. Rev. mod. *Phys*, v. 52, p. 299, 1980.
- THORNE, K. S. Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models. iv. the weakfield limit. *The astrophysical journal*, v. 158, p. 997, 1969.
- UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, APS, v. 101, n. 5, p. 1597, 1956.
- VELTMAN, M. J. Quantum theory of gravitation. *Méthodes en théorie des champs*, North-Holland, p. 266–328, 1976.
- WEBER, J. Detection and generation of gravitational waves. *Physical Review*, APS, v. 117, n. 1, p. 306, 1960.
- WEBER, J. Evidence for discovery of gravitational radiation. *Physical Review Letters*, APS, v. 22, n. 24, p. 1320, 1969.
- WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A. Gravitational waves from an orbiting pulsar. *Scientific American*, JSTOR, v. 245, n. 4, p. 74–83, 1981.

WILL, C. M. Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries. *Physical Review D*, APS, v. 57, n. 4, p. 2061, 1998.