



DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

VANDERLEY AGUIAR DE LIMA JÚNIOR

**RELAÇÕES DE INCERTEZA ENTRÓPICAS DE SISTEMAS
HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO**

FORTALEZA

2018

VANDERLEY AGUIAR DE LIMA JÚNIOR

***RELAÇÕES DE INCERTEZA ENTRÓPICAS DE SISTEMAS
HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO***

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

FORTALEZA

2018

VANDERLEY AGUIAR DE LIMA JÚNIOR

***RELAÇÕES DE INCERTEZA ENTRÓPICAS DE SISTEMAS
HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO***

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Aprovada em 13/09/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva (Orientador)

Departamento de Física – UFC

Prof. Dr. Raimundo Nogueira Costa Filho

Departamento de Física – UFC

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis

Departamento de Física – UFC

Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho

Departamento de Física - UFPB

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L711r Lima Júnior, Vanderley Aguiar de.
RELAÇÕES DE INCERTEZA ENTRÓPICAS DE SISTEMAS HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO
TEMPO / Vanderley Aguiar de Lima Júnior. – 2018.
65 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em
Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

1. Método de Lewis e Riesenfeld. 2. Armadilha de Penning. 3. Informação de Fisher. 4. Entropia de
Shannon. I. Título.

CDD 530

Aos meus pais, à minha noiva,
aos meus irmãos e sobrinha.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais Vanderlei Aguiar de Lima e Cícera de Fátima de Sousa Lima, pelo apoio e amor incondicional, assim como aos meus irmãos, sobrinha e todos os outros familiares que me ajudaram durante toda minha caminhada até aqui. Agradeço também à minha estimadíssima noiva Rayanna Moreira Nunes, que foi um divisor de águas na minha vida. Agradeço ao professor Ilde Guedes da Silva, que foi de fundamental importância para a realização deste trabalho como orientador, sempre presente desde a minha graduação, nos idos de 2011. Agradeço aos amigos que fiz durante o curso, dentre eles: Augusto, Demócrito, João Pedro, Deric, Yuri Cruz, Yuri Freire, Paulo Victor, Diego, Fábio, Gabriel, João Paulo, Luan e todos os outros não citados aqui (que são muitos). Agradeço ao saudoso professor do Departamento de Física da UFC, Josué Mendes Filho. Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Física da UFC, em especial à Dona Creusa e à Rejane Ramos e ao CNPq pelo apoio financeiro. E acima de tudo, a Deus. Em especial, gostaria de agradecer à minha avó Maria do Carmo Rodrigues de Sousa (Vó Peta), que infelizmente já nos deixou, mas que sempre se fez presente na minha vida e contribuiu enormemente para que eu me tornasse quem eu sou hoje em dia.

“Scientific knowledge is a body of statements of varying degrees of certainty - some most unsure, some nearly sure, none absolutely certain.”

Richard P. Feynman.

Resumo

Neste trabalho, usando o método de invariantes de Lewis e Riesenfeld, obtemos as funções de onda exatas para dois sistemas dependentes do tempo: (i) uma partícula carregada sem spin na presença de um campo magnético dependente do tempo $B(t)$, e (ii) uma partícula carregada sem spin em uma armadilha de Penning dependente do tempo. Considerando as soluções quânticas nos estados de mais baixa energia, conseguimos obter expressões para as informações de Fisher (F_r e F_p), entropias de Shannon (S_r e S_p) e incertezas em termos de uma função ρ (e ρ_z no sistema (ii)), que deve ser uma solução real da equação de Milne-Pinney. No sistema (i) analisamos três configurações diferentes de campos magnéticos variáveis no tempo. Observamos que a desigualdade $F_r F_p \leq 16$ é válida para todos os sistemas considerados. Também observamos fenômenos de compressão nos espaços dos momentos e/ou posições com o aumento do tempo. No sistema (ii), obtemos as expressões analíticas para as incertezas em termos de duas funções que satisfazem equações tipo Milne-Pinney. Analisamos os casos estáticos e dependentes do tempo. Para o primeiro, com $\mathbf{B}(t) = B_0 \mathbf{k}$ e $V(t) = V_0$, observamos que as relações de incerteza de Heisenberg e Robertson-Schrödinger são satisfeitas e o comportamento das incertezas $\Delta x, y$ e $\Delta p_x, p_y$ quando B_0 muda indicam a ocorrência de fenômenos de compressão. Para o segundo, com $\mathbf{B}(t) = (B_0^2 + B' \cos^2(\nu t))^{1/2} \mathbf{k}$ e $V(t) = V_0 + V' \cos^2(\nu t)$, observamos que $\Delta x, y$ oscilam no tempo também indicando a existência de estados comprimidos. Relações entre as incertezas, entropias de Shannon e informações de Fisher foram obtidas. Observamos para ambos os casos que a entropia de Shannon para a posição, S_r e para o momento, S_p , satisfazem a relação $S_r + S_p \geq 3(1 + \ln \pi)$, enquanto que o produto dos comprimentos de Fisher $\delta r \delta p$ exibe um limite inferior ao produto de incertezas $\Delta r \Delta p$.

Palavras-chave: Método de Lewis e Riesenfeld; Armadilha de Penning; Informação de Fisher; Entropia de Shannon.

Abstract

In this work by using the Lewis and Riesenfeld invariant method we obtain the exact wave functions for two time-dependent systems: (i) a spinless charged particle in the presence of a time-dependent magnetic field $B(t)$, and (ii) a spinless charged particle in a time-dependent Penning trap. By considering the quantum solutions in the lowest-lying states, we were able to obtain the expressions of Fisher information (F_r and F_p), Shannon entropies (S_r and S_p) and uncertainties in terms of a c-number quantity, ρ (and ρ_z in the system (ii)), which must be a real solution of the Milne–Pinney equation. In the system (i) we analyze three different configurations of time-varying magnetic fields. We observe that the inequality $F_r F_p \leq 16$ holds for the systems considered. We also observed squeezing phenomenon in momentum or/and coordinate spaces with increasing time. In the system (ii) we obtain the analytical expressions for the uncertainties in terms of two c-number functions satisfying a Milne-Pinney-like equation. We analyze the static and the time-dependent cases. For the former, where $\mathbf{B}(t) = B_0 \mathbf{k}$ and $V(t) = V_0$, we observe that the Heisenberg and Robertson-Schrödinger uncertainty relations are fulfilled and the behavior of the uncertainties $\Delta x, y$ and $\Delta p_x, p_y$ when B_0 changes indicates the occurrence of a squeezing phenomenon. For the later, where $\mathbf{B}(t) = (B_0^2 + B' \cos^2(\nu t))^{1/2} \mathbf{k}$ and $V(t) = V_0 + V' \cos^2(\nu t)$, we observe that $\Delta x, y$ oscillate in time exhibiting a squeezing phenomenon. Relations among the uncertainties, Shannon entropies and Fisher lengths were established. We observe for both cases that the Shannon entropy in position, S_r , and in momentum, S_p , satisfy the relation $S_r + S_p \geq 3(1 + \ln \pi)$, while the product of Fisher lengths $\delta r \delta p$ exhibits a lower bound than the product of uncertainties $\Delta r \Delta p$.

Keywords: Lewis and Riesenfeld Method; Penning trap; Fisher information; Shannon entropy.

Sumário

1. Introdução	10
2. Carga elétrica na presença de um campo magnético dependente do tempo	15
2.1 Introdução	15
2.2 Soluções quânticas	16
2.3 Relações de incertezas e RIE	29
2.4 Resultados e discussões	31
3. Carga elétrica em uma armadilha de Penning dependente do tempo	40
3.1 Introdução	40
3.2 Soluções quânticas	41
3.3 Resultados e discussões	46
4. Conclusões	56
Referências	59

1. Introdução

Relações de incerteza desempenham um papel fundamental na Mecânica Quântica, sendo a relação de incerteza de Heisenberg [1], ou princípio de incerteza, a mais conhecida. Tal relação impõe um limite inferior para o produto dos desvios-padrões (incertezas) da posição e do momentum da partícula, o que não implica que o observador não tenha habilidade o suficiente para medir simultaneamente com precisão a posição e o momento de uma partícula, mas sim a impossibilidade natural de tal medição ser realizada.

Devido a essa consequência necessária para a formulação da Mecânica Quântica, diversos autores propuseram novas relações de incerteza além da celebrada relação em termos dos desvios-padrões. É neste cenário que a teoria da informação se mostra bastante útil e fornece novas relações de incerteza escritas em termos de medidas de informação (entropias). Estas novas relações são conhecidas na literatura como relações de incerteza entrópicas (RIE). A história das RIE teve início no final dos anos 1950 e início de 1960, quando Hirschman [2], Bourret [3] e Leipnik [4, 5] descobriram independentemente a existência da seguinte desigualdade

$$S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi, \quad (1.1)$$

onde S_x e S_p são as entropias de Shannon para a posição e momentum, respectivamente. Esta medida foi introduzida em 1948 por Claude E. Shannon [6] para resolver problemas relacionados a engenharia de telecomunicações, sendo hoje um dos principais conceitos da teoria de informação. A entropia de Shannon é uma medida da incerteza do valor obtido por uma variável aleatória associada com a quantidade de “informação” que obtemos com o conhecimento do valor de tal variável.

Em 1975, a primeira prova da desigualdade (1) foi dada, independentemente, por Bialynicki-Birula e Mycielski [7] e Beckner [8]. Desde então, a relação de incerteza entrópica escrita em termos das entropias de Shannon é conhecida na literatura como desigualdade de Bialynicki-Birula-Mycielski (BBM), sendo expressa para um sistema D-dimensional na forma

$$S_r + S_p \geq D(1 + \ln\pi). \quad (1.2)$$

Nas décadas seguintes ao famoso trabalho de Shannon [6], algumas generalizações de um ou mais parâmetros da entropia de Shannon foram propostas, como por exemplo as entropias de Rényi [9], Tsallis [10] e Sharma-Mittal [11] (para mais generalizações veja a Ref. [12]). Essas novas medidas também foram utilizadas para se escrever novas RIE generalizadas [13-14].

Além da entropia de Shannon e suas generalizações, uma outra medida de informação que também fornece novas relações de incerteza é a informação de Fisher. Introduzida por R. A. Fisher [15] em 1925 como uma medida de “precisão intrínseca” em teoria estatística, a informação de Fisher é uma forma de medir a quantidade de informação que um certo observável X carrega em relação a um determinado parâmetro θ para o qual a probabilidade de X varia, isto é, para uma dada densidade de probabilidade $p(X; \theta)$.

Diversas leis da física podem ser derivadas e interpretadas tendo como base a informação de Fisher. B. Roy Frieden, a partir do princípio da mínima informação de Fisher (MIF), derivou a equação de Schrödinger [16, 17], a equação de Klein-Gordon (para o caso particular de campos nulos), interpretou a segunda lei da Termodinâmica, derivou a equação de onda de Helmholtz e a lei de Maxwell-Boltzmann [16], as equações de Maxwell para a eletrodinâmica [17], entre outras. Para Frieden, o MIF tem potencial para ser um princípio unificador da física, tanto que nos últimos anos, vários autores estudaram as aplicações da informação de Fisher na Mecânica Quântica [18-22], em particular, a direta relação com o princípio da incerteza de Heisenberg [23-26].

Nos últimos trinta anos, diversos sistemas quânticos foram estudados sob o ponto de vista de medidas de informação e RIE, sendo maioria dos casos relativa a potenciais independentes do tempo. Por exemplo, em 1994, Yáñez, Van Assche e Dehesa [27] calcularam S_x e S_p para o oscilador harmônico isotrópico e para o átomo de Hidrogênio em D dimensões. Eles obtiveram as entropias para o estado fundamental e alguns estados excitados. Em 1996, Majerník e Opatrný [28] calcularam S_x e S_p para os estados estacionários do oscilador harmônico em termos de suas energias e determinaram a RIE correspondente. A evolução temporal de $S_{x,p}$ para estados não-estacionários também foi investigada por eles. Em 2011, Ghasemi, Hooshmandasl e Tavassoly [29] calcularam S_x e S_p para os estados quânticos associados com o hamiltoniano do oscilador harmônico com um potencial singular e observaram *squeezing* (compressão) em S_x .

Assim como a entropia de Shannon, a informação de Fisher pode ser usada para estimar limites quânticos e o grau de desordem do sistema. Existem diversos trabalhos sobre informação de Fisher de sistemas quânticos independentes do tempo. Por exemplo, a informação de Fisher para sistemas de uma partícula sujeitos a potenciais centrais foi calculada por E. Romera et al. [23]. Eles verificaram que a quantidade de informação pode ser expressa por meio de uma forma simples e fechada dos valores esperados radiais ($\langle \mathbf{r}^{-2} \rangle, \langle \mathbf{p}^2 \rangle$) no espaço das posições, e ($\langle \mathbf{r}^2 \rangle, \langle \mathbf{p}^{-2} \rangle$) no espaço dos momenta. Eles aplicaram este resultado em sistemas como o átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico isotrópico, e propuseram que uma nova relação de incerteza que envolve a informação de Fisher nos dois espaços complementares está no mesmo nível que a incerteza em função das variâncias, proposta por Heisenberg [1].

Em 2010, P. Sánchez-Moreno et al. [26] mostraram que para uma função de onda $\psi(\mathbf{x})$ definida em um espaço de configuração D-dimensional e sua respectiva função de onda no espaço dos momenta $\phi(\mathbf{p})$, o produto dos funcionais de Fisher satisfazem a relação de incerteza $F_{\mathbf{x}}F_{\mathbf{p}} \geq 4D^2$ quando $\psi(\mathbf{x})$ ou $\phi(\mathbf{p})$ são reais. Eles mostraram também que para funções de onda complexas e arbitrárias, o produto de incerteza $F_{\mathbf{x}}F_{\mathbf{p}}$ não admite um limite inferior trivial. Outros interessantes resultados podem ser encontrados nas Refs. [30-33].

Apesar de ser uma área de pesquisa bastante ativa, são pouquíssimos os trabalhos envolvendo entropia de Shannon, informação de Fisher e sistemas hamiltonianos explicitamente dependentes do tempo. Até onde sabemos, o primeiro trabalho sobre este assunto foi publicado em 2011, por Choi et al [34]. Eles utilizaram a teoria de invariantes de Lewis e Riesenfeld [35] para obter as funções de onda de um oscilador harmônico generalizado e, a partir dessas funções de onda, calcular as entropias de Shannon e as informações de Fisher dependentes do tempo. Eles usaram como exemplos dois diferentes osciladores: um com massa constante e frequência dependente do tempo e outro com uma massa fortemente pulsante.

O trabalho de Choi et al [34] foi importante por unir essas duas áreas de pesquisas que até então não haviam sido exploradas juntas: o oscilador harmônico dependente do tempo (vide Refs. [36-39]) e as RIE. Isso abriu um novo leque de possibilidades, sendo uma das mais interessantes o estudo do oscilador harmônico amortecido (OHA) sob o ponto de vista de medidas de informação. Tal conexão é possível

pois o OHA pode ser obtido partindo de uma hamiltoniana explicitamente dependente do tempo: a hamiltoniana de Caldirola-Kanai (CK) [40, 41]. O oscilador CK foi introduzido na literatura como um protótipo para descrever sistemas quânticos dissipativos, para este oscilador a massa é dada por $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e a frequência é constante $\omega(t) = \omega_0$, assim como o fator de amortecimento, γ .

Recentemente, Aguiar e Guedes [42] calcularam as informações de Fisher para o oscilador CK no estado fundamental. E mostraram que o produto das informações de Fisher dos espaços da posição e do momentum é constante no tempo, mas diminui com o aumento da dissipação, isto é, quanto mais dissipativo for o sistema, maior será a perda de informação associada a ele. Nesse mesmo trabalho eles também estudaram uma outra classe de OHA, chamada osciladores de Lane-Emden (LE) ($m(t) = m_0 t^\alpha$ e $\omega(t) = \omega_0$) [43-45], onde o fator de amortecimento é agora uma função do tempo na forma $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. Dois casos foram estudados, $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$, e para ambos, o produto das informações de Fisher cresce com o tempo pois o fator de amortecimento decresce com o aumento do tempo e no limite que $t \rightarrow \infty$ o oscilador LE torna-se um oscilador harmônico simples. A relação entre a entropia de Shannon e a informação de Fisher desses osciladores também foi obtida. Este trabalho foi de grande valor para a área pois forneceu um contraexemplo para a conjectura de Hall [46], enunciada em 2000 por M. J. W. Hall, que dizia que o produto das informações de Fisher para estados quânticos puros satisfazia a relação $F_x F_p \geq 4$. O trabalho de Aguiar e Guedes [42] mostrou que para os osciladores amortecidos $0 \leq F_x F_p \leq 4$, logo, não há um limite inferior não-trivial geral para sistemas quânticos.

Em uma série de artigos, Aguiar, Guedes e colaboradores [47-49] calcularam medidas de informação de diferentes sistemas quânticos dependentes e independentes do tempo. Por exemplo, em 2015, eles calcularam as informações de Fisher e as entropias de Shannon de três diferentes osciladores com comportamento log-periódico [47], e calcularam as entropias de Shannon, Rényi e Tsallis para um circuito RLC mesoscópico com componentes dependentes do tempo [48]. Em 2017, Nascimento, Aguiar e Guedes [49] estudaram um sistema com espaço de fase não-comutativo, em duas e três dimensões, na presença de um campo elétrico dependente do tempo usando medidas de informação. Eles generalizaram o conceito de informação de Fisher introduzindo uma modificação via relações de Cramer-Rao [50]. Em 2018, Nascimento et al. [51], calcularam as

informações de Fisher e as entropias de Shannon de um oscilador na presença de um campo elétrico independente do tempo em um espaço deformado com métrica $g_{xx}^{-1/2} = 1 + \gamma x$. Para essa métrica, o oscilador harmônico simples mapeia um oscilador de Morse [52, 53]. Os níveis de energia em função do campo elétrico e do parâmetro γ , que está associado a deformação do espaço, também foram obtidos.

Devido a esse grande potencial de aplicação da teoria da informação, que se mostra extremamente útil na descrição de diversos sistemas quânticos distintos, resolvemos revisitar nesta tese dois problemas de grande interesse em física teórica e experimental: (i) a interação de cargas elétricas com campos eletromagnéticos e (ii) o movimento de partículas carregadas confinadas em uma armadilha de íons conhecida na literatura como armadilha de Penning [54]. Ambos os sistemas já foram extensivamente estudados desde os anos 1920 considerando campos dependentes e independentes do tempo, porém, mesmo com essa vasta literatura desenvolvida durante os últimos 90 anos, o estudo desses dois sistemas quânticos com campos dependentes do tempo sob o ponto de vista da teoria da informação ainda não havia sido desenvolvido. Ademais as soluções quânticas de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning com campos explicitamente dependentes do tempo não haviam sido obtidas até então.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, obtemos as funções de onda exatas de uma carga elétrica na presença de um campo magnético dependente do tempo usando a método de invariantes de Lewis e Riesenfeld (LR) [35] e calculamos suas respectivas entropias de Shannon e informações de Fisher. No Capítulo 3, o método de LR é novamente empregado para a obtenção das funções de onda de uma partícula carregada confinada em uma armadilha de Penning com campos dependentes do tempo, relações de incertezas e estados comprimidos são também obtidos. E no final deste trabalho, apresentamos as conclusões e considerações finais.

2. Carga elétrica na presença de um campo magnético dependente do tempo

Neste Capítulo apresentamos o método de invariantes de LR e o aplicamos ao problema de uma partícula carregada/íon na presença de um campo magnético explicitamente dependente do tempo. Obtemos as funções de onda e relações de incerteza para o caso geral de um campo magnético na forma $\mathbf{B}(t) = B(t)\hat{\mathbf{z}}$.

2.1 Introdução

A interação entre cargas elétricas e o campo eletromagnético é um dos mais interessantes e analiticamente solúveis problemas de Mecânica Quântica. Sua história remonta ao final dos anos de 1920 e início de 1930, quando Fock [55] e Landau [56] obtiveram as autofunções e autoenergias para um elétron na presença de um campo magnético uniforme e constante com e sem um potencial harmônico, respectivamente. Desde então, inúmeros trabalhos foram publicados nessa área [57-62]. Até o final dos anos de 1960, todos os trabalhos nesse assunto lidaram apenas com problemas em que a massa das partículas, as frequências de oscilação e os campos eram independentes do tempo.

Foi então que Lewis e Riesenfeld (LR) [35] em 1969 estudaram o problema de uma partícula carregada se movendo em um campo eletromagnético axialmente simétrico, consistindo de um campo magnético arbitrariamente dependente do tempo, um campo elétrico induzido associado e um outro campo elétrico devido a uma distribuição de cargas uniforme arbitrariamente dependente do tempo. Eles obtiveram uma classe de invariantes explicitamente dependentes do tempo para o sistema, possibilitando que os autoestados e autoenergias dos invariantes fossem calculados. A explícita relação entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger foi também obtida, e eles expressaram essas soluções em termos de uma função dependente do tempo, $\rho(t)$, que é solução da equação de Milne-Pinney [63, 64].

Após o trabalho de LR, diversos trabalhos explorando o mesmo assunto foram publicados. Por exemplo, em uma série de trabalhos, Malkin, Man'ko e Trifonov [65-67] construíram estados coerentes, calcularam probabilidades de transição entre estados e obtiveram as funções de Green para uma partícula carregada na presença de campos dependentes do tempo. Em 1970, Holz [68] estudou a evolução de estados coerentes de uma partícula carregada na presença de um campo magnético dependente do tempo e de

um potencial harmônico em D -dimensões. Em 1989, Dutra e Chang [69], utilizando a técnica dos propagadores de Feynman obtiveram as funções de onda de uma partícula carregada com massa dependente do tempo na presença de um campo eletromagnético também dependente do tempo. Em 2003, Schuch e Moshinsky [70] estudaram clássica e quanticamente o movimento de uma carga elétrica em um campo magnético uniforme e constante imersa em um meio dissipativo. A dissipação foi introduzida por eles por meio da hamiltoniana de Caldirola-Kanai [71, 72].

As funções de onda de partículas carregadas com massa dependente do tempo na presença de um potencial harmônico e um campo magnético constante e uniforme foram obtidas usando o método de LR por Maamache *et al* [73]. Pouco depois, Menouar, Maamache e Choi [74, 75] modelaram o problema de uma partícula na presença de campos dependentes do tempo usando uma hamiltoniana de osciladores harmônicos acoplados com massa, frequência e parâmetro de acoplamento dependentes do tempo. Em 2015, Menouar e Choi [76] usando um método híbrido consistindo de álgebra de Lie e o método de LR, obtiveram as soluções quânticas para o complicado problema de uma partícula carregada na presença de um campo magnético, um potencial harmônico e um potencial singular, todos explicitamente dependentes do tempo. Eles obtiveram um espectro discreto de estados quânticos, em contraste com o trabalho prévio de Yüce [77], que obteve um espectro contínuo usando um método diferente.

Como pôde ser visto nos parágrafos anteriores, a literature sobre a interação de cargas elétricas com campos eletromagnéticos é vasta. Neste Capítulo nós revisitamos o problema de uma partícula carregada sem spin e com massa constante na presença de um campo magnético dependente do tempo. As funções de onda do problema foram obtidas usando o método de LR. As relações de incertezas e medidas entrópicas foram calculadas a partir das soluções da equação de Schrödinger.

2.2 Soluções quânticas

Considere a seguinte equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(t)\psi(t). \quad (2.1)$$

na qual $H(t)$ é dada por

$$H(t) = \frac{[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}{2M}, \quad (2.2)$$

com $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, q e M são a carga e a massa da partícula, respectivamente, e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetor magnético.

Considerando o gauge de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, a Eq. (2.1) se torna

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \frac{iq\hbar}{M} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi + \frac{q^2}{2M} \mathbf{A}^2 \psi, \quad (2.3)$$

que pode ser simplificada usando o gauge simétrico

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(t), \quad (2.4)$$

com $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$. Substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.3) obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} - \frac{\omega_c(t)}{2} L_z + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) \right] \psi(x, y, t), \quad (2.5)$$

na qual $\omega_c(t) = \frac{qB(t)}{M}$ é a frequência de Larmor, $L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ é a componente z do momento angular e $\omega^2(t) = \frac{\omega_c^2(t)}{4}$ é uma frequência de modulação dependente do tempo.

Para resolver a Eq. (2.5), primeiro considere a transformação unitária

$$\psi(x, y, t) = U_1 \varphi(x, y, t) = \exp \left[\frac{i}{2\hbar} L_z \int \omega_c(t) dt \right] \varphi(x, y, t), \quad (2.6)$$

que mapeia a Eq. (2.5) em uma equação de Schrödinger de um oscilador harmônico isotrópico bidimensional com massa constante e frequência dependente do tempo na forma

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) \right] \varphi(x, y, t). \quad (2.7)$$

Para resolver a Eq. (2.7) usaremos o método de invariantes de LR.

Primeiro, note que

$$H'(t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) = H_x(x, p_x, t) + H_y(y, p_y, t). \quad (2.8)$$

Para este sistema a equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = H'(t)\varphi(t). \quad (2.9)$$

Considere que exista um operador hermitiano que seja explicitamente dependente do tempo e invariante, ou seja,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H'] = 0, \quad (2.10)$$

e

$$I = I_x + I_y = I^\dagger. \quad (2.11)$$

Por questão de simplicidade, iremos calcular $I(t)$ para um caso unidimensional, visto que $I_x \rightarrow I_y$ quando $(x, p_x) \rightarrow (y, p_y)$. Usaremos a notação usual de coordenadas generalizadas (q, p) para escrever $H_q(t)$ e $I_q(t)$. A teoria nos permite ainda extrapolar o problema para o caso no qual a massa da partícula é uma função do tempo, isto é, $M = m(t)$. Embora não esteja no escopo deste trabalho, faremos isso para generalizar o problema, já que é possível obter solução analítica para esse caso mais geral.

Aplicando a Eq. (2.10) no estado $\varphi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dI_q}{dt} \varphi(t) &= \frac{\partial I_q}{\partial t} \varphi(t) + \frac{1}{i\hbar} [I_q, H_q] \varphi(t) = 0 \\ &= \frac{\partial I_q}{\partial t} \varphi(t) + \frac{1}{i\hbar} I_q H_q \varphi(t) + \frac{1}{i\hbar} H_q I_q \varphi(t), \end{aligned}$$

usando a Eq. (2.9), podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial [I_q \varphi(t)]}{\partial t} = H_q(t) [I_q \varphi(t)]. \quad (2.12)$$

Podemos ver que $I_q \varphi(t)$ é também uma solução da equação de Schrödinger, resultado esse válido para qualquer que seja o invariante. Vamos supor agora que o invariante $I_q(t)$ não contém operadores com derivadas temporais, pois isto facilita a escolha das fases dos autoestados de $I_q(t)$, sendo então solução da equação de Schrödinger estes autoestados multiplicados por um fator de fase arbitrário e dependente do tempo.

Admitindo que o invariante $I_q(t)$ seja um operador de um conjunto completo de observáveis que comutam, existe um conjunto completo de autoestados ortonormais $|\lambda, k; t\rangle$ de $I_q(t)$, ou seja

$$I_q(t)|\lambda, k; t\rangle = \lambda|\lambda, k; t\rangle, \quad (2.13)$$

$$\langle\lambda', k'; t|\lambda, k; t\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k}, \quad (2.14)$$

onde λ são os autovalores do invariante e k representa os números quânticos necessários para especificar os autoestados $|\lambda, k; t\rangle$.

O fato de $I_q(t)$ ser hermitiano implica que seus autovalores λ são reais. Podemos também mostrar que eles são independentes do tempo. Para mostrar isso, derivamos a Eq. (2.13) em relação ao tempo, obtendo

$$\frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + I_q \frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \quad (2.15)$$

Aplicando a Eq. (2.10) sobre o autoestado $|\lambda, k; t\rangle$, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + I_q H_q |\lambda, k; t\rangle - H_q I_q |\lambda, k; t\rangle = 0,$$

e usando a Eq. (2.13), escrevemos

$$i\hbar \frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + I_q H_q |\lambda, k; t\rangle - \lambda H_q |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (2.16)$$

Calculando o produto escalar da Eq. (2.16) com $|\lambda', k'; t\rangle$, ficamos com

$$i\hbar \langle\lambda', k'; t|\frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \langle\lambda', k'; t|I_q H_q |\lambda, k; t\rangle - \lambda \langle\lambda', k'; t|H_q |\lambda, k; t\rangle = 0,$$

da Eq. (2.13)

$$i\hbar \langle\lambda', k'; t|\frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', k'; t|H_q |\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (2.17)$$

Para $\lambda = \lambda'$, a Eq. (2.17) torna-se

$$i\hbar \langle\lambda, k'; t|\frac{\partial I_q}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (2.18)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (2.15) com $|\lambda, k; t\rangle$, temos

$$\langle \lambda, k; t | \frac{\partial I_q}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle + \langle \lambda, k; t | I_q \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle + \lambda \langle \lambda, k; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle,$$

e, novamente utilizando a Eq. (2.13), obtemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial I_q}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \quad (2.19)$$

Podemos ver então, das Eqs. (2.18) e (2.19), que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (2.20)$$

Vamos agora investigar como os autoestados de $I_q(t)$ se relacionam com as soluções da equação de Schrödinger. Para isso, vamos rescrever a Eq. (2.15) utilizando o resultado encontrado na Eq. (2.20), de modo que

$$(\lambda - I_q) \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \frac{\partial I_q}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \quad (2.21)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (2.21) com $|\lambda', k'; t\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I_q}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle &= \lambda \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle - \langle \lambda', k'; t | I_q \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle, \\ &= (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Desse modo, usando a Eq. (2.17), a Eq. (2.22) torna-se

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | H_q | \lambda, k; t \rangle, \quad (2.23)$$

que para $\lambda \neq \lambda'$, se reduz a

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \langle \lambda', k'; t | H_q | \lambda, k; t \rangle. \quad (2.24)$$

A Eq. (2.23) não permanece válida para $\lambda = \lambda'$, se o fosse, poderíamos afirmar que o estado $|\lambda, k; t\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger. Porém, ainda não fixamos a fase do estado $|\lambda, k; t\rangle$, ou seja, ainda estamos livres para multiplicar o estado $|\lambda, k; t\rangle$ por um fator de fase dependente do tempo. Sendo assim, definimos um novo

conjunto de autoestados de $I_q(t)$, que evoluem no tempo de acordo com a equação de Schrödinger, os quais estão relacionados com os antigos estados $|\lambda, k; t\rangle$ através de uma transformação de calibre

$$\varphi_{\lambda k}(t) = e^{i\theta_{\lambda k}(t)}|\lambda, k; t\rangle, \quad (2.25)$$

onde $\theta_{\lambda k}(t)$ são funções reais dependentes do tempo.

Os estados $\varphi_{\lambda k}(t)$ serão autoestados ortonormais de $I_q(t)$ desde que, como supomos anteriormente, o invariante não possua operadores com derivadas temporais. Assim, em termos dos novos autoestados, a equação de autovalores para $I_q(t)$ é

$$I_q(t)\varphi_{\lambda k}(t) = \lambda\varphi_{\lambda k}(t). \quad (2.26)$$

A Eq. (2.23) com $\lambda \neq \lambda'$ continua válida para estes novos autoestados. Sendo assim, se escolhermos as fases de modo que a Eq. (2.23) também continue válida para $\lambda = \lambda'$, os novos autoestados também serão soluções da equação de Schrödinger. Então, usando os novos autoestados e a Eq. (2.21), obtemos como condição

$$\hbar\delta_{k'k}\frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k'; t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_q|\lambda, k; t\rangle. \quad (2.26)$$

Devemos escolher os estados $|\lambda, k; t\rangle$ de tal forma que o lado direito da Eq. (2.26) seja nulo para $k' \neq k$ para que a equação seja satisfeita. Como o operador $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_q$ é hermitiano, essa diagonalização é sempre possível. Assim, para que os autoestados $\varphi_{\lambda k}(t)$ satisfaçam a equação de Schrödinger, as fases devem satisfazer

$$\hbar\frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k; t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_q|\lambda, k; t\rangle. \quad (2.27)$$

Desse modo, como cada autoestado $\varphi_{\lambda k}(t)$ satisfaz a equação de Schrödinger, podemos escrever a solução geral como uma combinação linear das soluções, na forma

$$\varphi(t) = \sum_{\lambda, k} C_{\lambda k} e^{i\theta_{\lambda k}(t)}|\lambda, k; t\rangle, \quad (2.28)$$

onde os $C_{\lambda k}$ são coeficientes independentes do tempo.

Vamos agora aplicar esta teoria para o caso de um oscilador harmônico onde massa e frequência sejam dependentes do tempo. Para este caso, a hamiltoniana do sistema é dada por

$$H_q(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{m(t)\omega^2(t)q^2}{2}, \quad (2.29)$$

onde $m(t)$ e $\omega(t)$ são, respectivamente, a massa e a frequência do oscilador, e q e p são as variáveis canonicamente conjugadas que satisfazem

$$[q, p] = i\hbar. \quad (2.30)$$

Escrevendo as equações de Heisenberg para este sistema, encontramos que

$$\dot{q} = \frac{p}{m(t)}, \quad (2.31a)$$

$$\dot{p} = -m(t)\omega^2(t)q, \quad (2.31b)$$

resultando na seguinte equação do movimento

$$\ddot{q} + \gamma(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = 0, \quad (2.32)$$

com

$$\gamma(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \quad (2.33)$$

A equação do movimento clássica para a mesma hamiltoniana (2.29) é análoga à Eq. (2.32)

$$\ddot{q}_{cl} + \gamma(t)\dot{q}_{cl} + \omega^2(t)q_{cl} = 0, \quad (2.34)$$

onde o subscrito cl indica que a variável é clássica.

Para encontrar as soluções quânticas exatas para sistemas com Hamiltonianas explicitamente dependentes do tempo, LR [35] deduziram um operador invariante para um sistema com massa constante e frequência $\omega = \omega(t)$. Seguindo o mesmo procedimento, Pedrosa [78] construiu um operador invariante para a Hamiltoniana dada pela Eq. (2.29). Na Ref. [39], Pedrosa, Serra e Guedes utilizando o operador invariante

obtido na Ref. [78] obtiveram função de onda exata do oscilador harmônico com massa e frequência dependentes do tempo com e sem uma perturbação singular.

O invariante construído por LR [35] tem a forma

$$I_q(t) = \frac{1}{2} [\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \zeta(t)\{q, p\}], \quad (2.35)$$

onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\zeta(t)$ são funções reais dependentes do tempo, e $\{q, p\}$ é a notação usual do anticomutador de q e p .

Derivando a Eq. (2.35) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dI_q}{dt} = \frac{1}{2} [\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\zeta}\{q, p\} + 2(q\dot{q}\alpha + p\dot{p}\beta) + \zeta(\dot{q}p + p\dot{q} + \dot{p}q + q\dot{p})], \quad (2.36)$$

e usando as Eqs. (2.10), (2.31a) e (2.31b), chegamos nas seguintes relações

$$\dot{\alpha} - 2m(t)\omega^2(t)\zeta = 0, \quad (2.37a)$$

$$\dot{\beta} + \frac{2\zeta}{m(t)} = 0, \quad (2.37b)$$

$$\frac{\alpha}{m(t)} - \beta m(t)\omega^2(t) + \dot{\zeta} = 0. \quad (2.37c)$$

Vamos organizar estas três últimas equações de modo a obter uma única equação diferencial, chamada de equação auxiliar do invariante do sistema. Para isto, primeiro fazemos a substituição

$$\beta(t) = \sigma^2(t), \quad (2.38)$$

com isso, a Eq. (2.37b) torna-se

$$\zeta = -m(t)\sigma\dot{\sigma}. \quad (2.39)$$

Agora, das Eqs. (2.38) e (2.39), podemos escrever a Eq. (2.37c) como

$$\alpha = m^2\omega^2\sigma^2 + \dot{m}m\sigma\dot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma}, \quad (2.40)$$

utilizando agora as Eqs. (2.37a), (2.39) e (2.40), obtemos

$$\frac{d}{dt} (m^2\omega^2\sigma^2 + \dot{m}m\sigma\dot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma}) + 2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma} = 0, \quad (2.41)$$

ou ainda

$$3m\dot{m}\dot{\sigma}^2 + 2\dot{\sigma}\ddot{m}m^2 + 3m\dot{m}\sigma\ddot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + 2m\dot{m}\sigma^2\omega^2 + 4m^2\sigma^2\omega\dot{\omega} + 2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma} + \dot{m}^2\sigma\dot{\sigma} + m\dot{m}\sigma\dot{\sigma} = 0. \quad (2.42)$$

Dividindo a Eq. (2.42) por m^2 e colocando σ em evidência, encontramos

$$\sigma \left(3 \frac{\dot{m}}{m} \ddot{\sigma} + 4\dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2 \frac{\dot{m}}{m} \sigma\omega^2 + 2\sigma\omega\dot{\omega} + \frac{\dot{m}^2}{m^2} \dot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} \right) + 3 \left(\frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}\ddot{\sigma} \right) = 0. \quad (2.43)$$

Vamos reescrever a Eq. (2.43) na forma

$$\sigma \left(\frac{\dot{m}}{m} \ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2\sigma\omega\dot{\omega} - \frac{\dot{m}^2}{m^2} \dot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} \right) + \left(3\dot{\sigma} + 2 \frac{\dot{m}}{m} \sigma \right) \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) = 0. \quad (2.44)$$

Agora, note que

$$\frac{\dot{m}}{m} \ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2\sigma\omega\dot{\omega} - \frac{\dot{m}^2}{m^2} \dot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right), \quad (2.45)$$

então, multiplicando a Eq. (2.44) por $m^2\sigma^2$ e usando a Eq. (2.45), obtemos

$$m^2\sigma^3 \frac{d}{dt} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) + (3\dot{\sigma}\sigma^2 m^2 + 2m\dot{m}\sigma^3) \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) = 0, \quad (2.46)$$

sabendo que

$$\frac{d}{dt} (m^2\sigma^3) = 3\dot{\sigma}\sigma^2 m^2 + 2m\dot{m}\sigma^3, \quad (2.47)$$

da Eq. (2.46) podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left[m^2\sigma^3 \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) \right] = 0. \quad (2.48)$$

Integrando a Eq. (2.48), obtemos

$$\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma = \frac{C^2}{m^2\sigma^3}, \quad (2.49)$$

sendo C^2 é uma constante de integração arbitrária.

Agora, das Eqs. (2.38), (2.39), (2.40) e (2.49), podemos expressar o invariante dado pela Eq. (2.35) na forma

$$I_q(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Cq}{\sigma} \right)^2 + (\sigma p - m\dot{\sigma}q)^2 \right], \quad (2.50)$$

na qual $\sigma(t)$ satisfaz a equação auxiliar (2.49). Fazendo a mudança de escalar $\sigma(t) = C^{\frac{1}{2}}\rho(t)$ e inserindo-a na Eq. (2.50) e fazendo $C = 1$, obtemos

$$I_q(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 \right], \quad (2.51)$$

e a nova equação auxiliar

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}, \quad (2.52)$$

que é a conhecida equação de Milne-Pinney [63, 64] generalizada.

Desse modo, qualquer solução particular da Eq. (2.52) pode ser usada para construir um operador invariante dado pela Eq. (2.51).

Observamos aqui, que as Eqs. (2.32) e (2.52) e o invariante (2.51), constituem um sistema de Ermakov [79, 80] para a hamiltoniana dada pela Eq. (2.29). O invariante dado pela Eq. (2.51) foi deduzido por Ermakov [81] e Lewis [36, 37], é conhecido na literatura como o invariante de Ermakov-Lewis.

Construído o operador invariante $I_q(t)$, precisamos determinar os seus autoestados e autovalores. Para isto, vamos definir dois operadores dependentes do tempo, $a(t)$ e $a^\dagger(t)$, dados pelas relações

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) + i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right], \quad (2.53a)$$

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) - i(\rho p - m\dot{\rho}q) \right], \quad (2.53b)$$

as quais satisfazem a relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.54)$$

Vamos escrever q e p em função de a e a^\dagger , utilizando as Eqs. (2.53). Assim, obtemos que

$$q = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \rho(a + a^\dagger), \quad (2.55a)$$

$$p = i\left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - im\rho\right) a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\rho\right) a \right]. \quad (2.55b)$$

Inserindo as Eqs. (2.55) na Eq. (2.51), obtemos

$$I_q(t) = \hbar \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.56)$$

Vamos introduzir um novo operador, na forma

$$N = N^\dagger = a^\dagger a, \quad (2.57)$$

assim, a Eq. (2.56) pode ser escrita como

$$I_q(t) = \hbar \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (2.58)$$

Notemos que, por causa da simples relação entre os operadores $I_q(t)$ e $N(t)$, os autoestados normalizados de $I_q(t)$ também são autoestados de $N(t)$, ou seja, os $|n, t\rangle$ são autoestados simultâneos de $I_q(t)$ e $N(t)$, isto é

$$N|n, t\rangle = n|n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.59)$$

e

$$I_q|n, t\rangle = \lambda_n|n, t\rangle. \quad (2.60)$$

Inserindo a Eq. (2.61) na Eq. (2.60), obtemos

$$\hbar \left(N|n, t\rangle + \frac{1}{2}|n, t\rangle \right) = \lambda_n|n, t\rangle,$$

usando a Eq. (2.59), obtemos que o espectro de autovalores de $I_q(t)$ é dado por

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.61)$$

Além disso, temos que

$$a|n, t\rangle = n^{1/2}|n-1, t\rangle, \quad (2.62a)$$

$$a^\dagger|n, t\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1, t\rangle, \quad (2.62b)$$

$$\langle n', t|n, t\rangle = \delta_{n'n}. \quad (2.62c)$$

Note que os operadores a , a^\dagger e N obedecem a mesma álgebra dos operadores de abaixamento, levantamento e número que são utilizados para diagonalizar o operador hamiltoniano do oscilador harmônico quântico independente do tempo.

Desse modo, a partir da Eq. (2.51), o operador invariante (2.11) é dado por

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 + (\rho p_x - m \dot{\rho} x)^2 + (\rho p_y - m \dot{\rho} y)^2 \right], \quad (2.63)$$

e sua equação de autovalor [veja as Eqs. (2.13) e (2.60)] é

$$I(t)\phi_{n,m}(x, y, t) = \lambda_{n,m}\phi_{n,m}(x, y, t), \quad (2.64)$$

na qual $\lambda_{n,m}$ são independentes do tempo e $\phi_{n,m}$ formam um conjunto ortonormal completo. A relação entre $\phi_{n,m}$ e $\varphi_{n,m}$ é expressa na forma

$$\varphi_{n,m}(x, y, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)] \phi_{n,m}(x, y, t), \quad (2.65)$$

com as fases $\alpha_{n,m}(t)$ satisfazendo a equação

$$\hbar \frac{d\alpha_{n,m}(t)}{dt} = \left\langle \phi_{n,m}(x, y, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H'(t) \right| \phi_{n,m}(x, y, t) \right\rangle. \quad (2.66)$$

e $H'(t)$ sendo dada pela Eq. (2.8). A partir desse momento voltaremos ao caso de uma partícula com massa constante $m(t) = M$.

A seguir, considere a transformação unitária

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = U_2 \phi_{n,m}(x, y, t), \quad (2.67)$$

com

$$U_2 = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.68)$$

Sob essa transformação e definindo $x = \rho r \cos \theta$ e $y = \rho r \sin \theta$, Eq. (2.64) agora se escreve

$$I'(t)\sigma(r, \theta) = \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{r^2}{2} \right] \sigma(r, \theta) = \lambda_{n,m} \sigma(r, \theta), \quad (2.69)$$

com $I'(t) = U_2 I(t) U_2^\dagger$, $r^2 = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ e

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \sigma(r, \theta). \quad (2.70)$$

Podemos decompor $\sigma(r, \theta)$ na forma $\sigma(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, sendo $\Theta(\theta) = e^{im\theta}$, com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Definindo uma nova variável $u = \frac{r^2}{\hbar}$ e escrevendo $\sigma(u, \theta)$ como

$$\sigma(u, \theta) = (\hbar u)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{u}{2}} v(u) \Theta(\theta), \quad (2.71)$$

a Eq. (2.72) se torna

$$u \frac{\partial^2 v(u)}{\partial u^2} + (|m| + 1 - u) \frac{\partial v(u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{n,m}}{\hbar} - |m| - 1 \right) v(u) = 0. \quad (2.72)$$

As soluções da Eq. (2.72) são escritas em termos dos polinômios associados de Laguerre, na forma

$$v(u) = L_n^{|m|}(u), \quad (2.73)$$

com

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{n,m}}{\hbar} - |m| - 1 \right). \quad (2.74)$$

Desse modo, as autofunções normalizadas do operador invariante $I(t)$ são

$$\begin{aligned} \phi_{n,m}(x, y, t) = & \left[\frac{\Gamma(n + |m|)}{\Gamma(n + |m| + 1)} \frac{1}{\pi} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar \rho^2} \right)^{\frac{|m|+1}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{|m|}{2}} \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right] e^{im\theta} L_n^{|m|} \left(\frac{x^2 + y^2}{\hbar\rho^2} \right), \end{aligned} \quad (2.75)$$

enquanto, da Eq. (2.74), os seus autovalores independentes do tempo são dados por

$$\lambda_{n,m} = \hbar(2n + |m| + 1), \quad (2.76)$$

e da Eq. (2.66), a fase, $\alpha_{n,m}(t)$, pode ser exatamente obtida na forma

$$\alpha_{n,m}(t) = -(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} dt'. \quad (2.77)$$

Finalmente, das Eqs. (2.6), (2.65), (2.67), (2.68), (2.75) and (2.77), as funções de onda exatas da Eq. (2.5) são escritas como

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(x, y, t) = & \left[\frac{\Gamma(n + |m|)}{\Gamma(n + |m| + 1)} \frac{1}{\pi} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{\frac{|m|+1}{2}} \exp \left[i \frac{m}{2} \int \omega_c(t) dt \right] \exp \left[-i(2n \right. \\ & + |m| + 1) \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} dt' \left. \right] (x^2 + y^2)^{\frac{|m|}{2}} \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right] e^{im\theta} L_n^{|m|} \left(\frac{x^2 + y^2}{\hbar\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.3 Relações de incertezas e RIE

Consideremos o caso em que $n = m = 0$. Assim, $\psi_{00}(x, y, t)$ e sua transformada de Fourier são dadas, respectivamente, por

$$\psi_{00}(x, y, t) = \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha_{00}(t)} \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right], \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(p_x, p_y, t) = & \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^2 \frac{(1 + iM\rho\dot{\rho})}{(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)} e^{-i\alpha_{00}(t)} \exp \left[-(p_x^2 \right. \\ & \left. + p_y^2) \rho^2 \frac{(1 + iM\rho\dot{\rho})}{2(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Da Eq. (2.79) obtemos as seguintes relações de incerteza (with $\hbar = 1$)

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = 0, \quad (2.81)$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{\rho^2}{2}, \quad (2.82)$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_y^2 \rangle = \frac{1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2}{2\rho^2}, \quad (2.83)$$

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{(1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2}}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad (2.84)$$

$$\Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{p} = (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2} \geq 1. \quad (2.85)$$

As entropias de Shannon para os espaços da posição (S_r) e momento (S_p) com densidades de probabilidades D -dimensionais contínuas, $\varrho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ e $\gamma(\mathbf{p}, t) = |\Phi(\mathbf{p}, t)|^2$ são, respectivamente, dadas por [82]

$$S_r(t) = - \int \varrho(\mathbf{r}, t) \ln[\varrho(\mathbf{r}, t)] d^D \mathbf{r}, \quad (2.86)$$

$$S_p(t) = - \int \gamma(\mathbf{p}, t) \ln[\gamma(\mathbf{p}, t)] d^D \mathbf{p}. \quad (2.87)$$

Por outro lado, as informações de Fisher para a posição (F_r) e momento (F_p) são dadas por [83]

$$F_r = \int \frac{[\nabla_r \varrho(\mathbf{r}, t)]^2}{\varrho(\mathbf{r}, t)} d^D \mathbf{r}, \quad (2.88)$$

$$F_p = \int \frac{[\nabla_p \gamma(\mathbf{p}, t)]^2}{\gamma(\mathbf{p}, t)} d^D \mathbf{p}. \quad (2.89)$$

No estado $n = m = 0$, encontramos as seguintes relações

$$S_r(t) = 1 + \ln \pi + \ln(\rho^2), \quad (2.90)$$

$$S_p(t) = 1 + \ln \pi + \ln \left(\frac{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2}{\rho^2} \right), \quad (2.91)$$

$$F_r(t) = \frac{4}{\rho^2}, \quad (2.92)$$

$$F_p(t) = \frac{4\rho^2}{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2}. \quad (2.93)$$

Note que as Eqs. (2.90) e (2.91) satisfazem a relação de incerteza entrópica de Bialynicki-Birula-Mycielski (BBM) [7]

$$S_r(t) + S_p(t) = 2(1 + \ln \pi) + \ln(1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2) \geq 2(1 + \ln \pi), \quad (2.94)$$

e o produto das informações de Fisher é

$$F_r(t)F_p(t) = \frac{16}{1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2} \leq 16. \quad (2.95)$$

Para uma dada frequência $\omega(t)$, obtemos as incertezas, $S_r(t)$, $S_p(t)$, $F_r(t)$ and $F_p(t)$ resolvendo a Eq. (2.52), neste caso específico, com $m(t) = M$, isto é,

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}. \quad (2.96)$$

De acordo com a teoria de LR [35] apenas soluções reais de $\rho(t)$ são aceitáveis.

2.4 Resultados e discussões

Considere três diferentes casos: (i) $\omega^2(t) = B_0e^{-\gamma t}$, (ii) $\omega^2(t) = B_0 + \cos^2(\gamma t)$ e (iii) $\omega^2(t) = B_0 - kt$.

Para o caso (i), a Eq. (2.96) e sua solução são dadas, respectivamente, por

$$\ddot{\rho} + B_0e^{-\gamma t}\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (2.97)$$

$$\rho = \left(\frac{\pi}{M\gamma}\right)^{1/2} \left\{ J_0^2 \left[\frac{2\sqrt{B_0}e^{-\gamma t/2}}{\gamma} \right] + Y_0^2 \left[\frac{2\sqrt{B_0}e^{-\gamma t/2}}{\gamma} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.98)$$

sendo J_ν e Y_ν as ν -ésimas funções de Bessel e de Neumann, respectivamente.

Nas Figs. 1 (a)-(d) mostramos os comportamentos de $F_r(t)$, $F_p(t)$, $S_r(t)$ e $S_p(t)$. Observamos que $F_r(t)$ ($S_r(t)$) decresce (cresce) com o aumento do tempo, indicando que a precisão em prever a localização da partícula está diminuindo (aumentando) com o tempo. O comportamento de $F_p(t)$ ($S_p(t)$) é o contrário, como deveria ser, para que as relações (2.94) e (2.95) sejam satisfeitas. Note que uma frequência nessa forma indica que a partícula está na presença de um campo magnético com um decaimento exponencial, logo, à medida que o tempo passa, o campo fica cada vez menor e o aprisionamento da partícula tende a desaparecer, o que explica o comportamento das medidas de informação. Na Fig. 2, com o aumento do tempo, Δx e Δy ficam maiores que 0.707, enquanto Δp_x e Δp_y ficam menores que 0.707. Isto indica a existência de estados

comprimidos neste caso, com a compressão se dando nas coordenadas do espaço do momento.

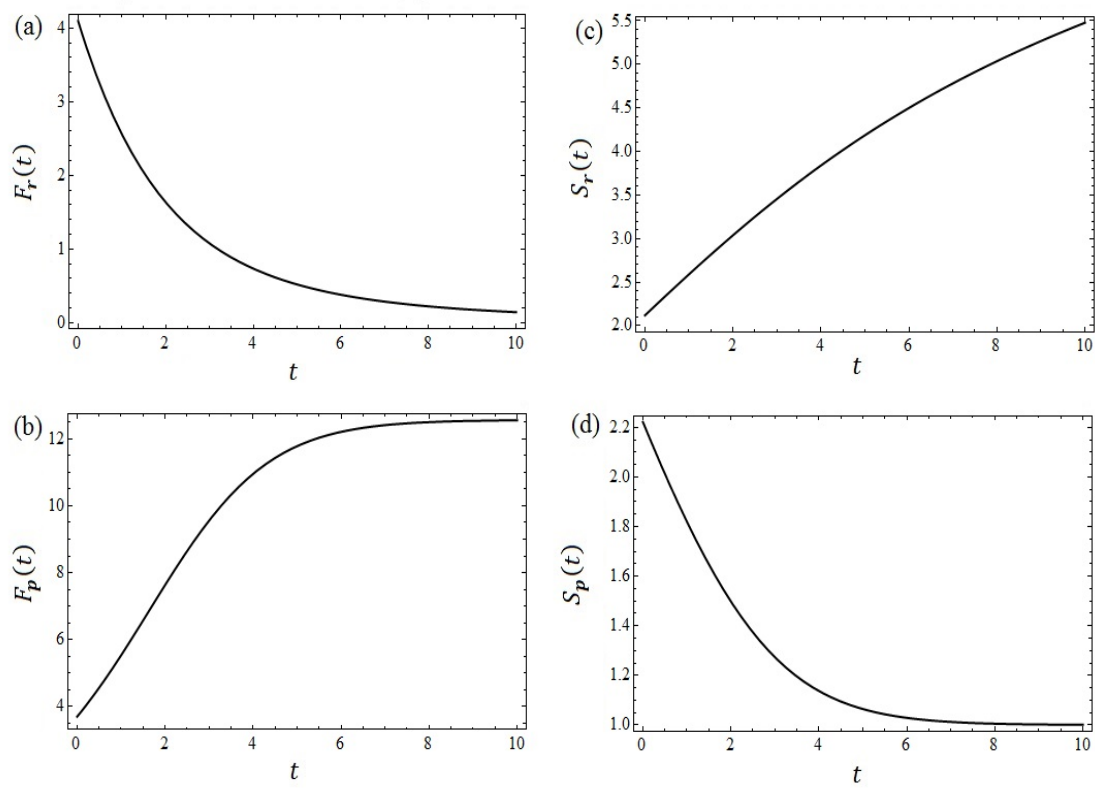


Figura 1. Comportamentos de (a) $F_r(t)$, (b) $F_p(t)$, (c) $S_r(t)$ e (d) $S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = B_0 = \gamma = 1$.

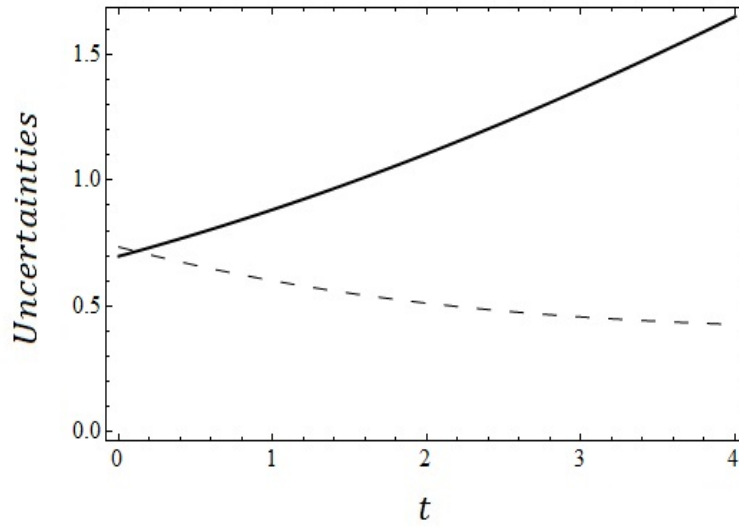


Figura 2. Comportamentos de Δx and Δy (linha s3lia), Δp_x e Δp_y (linha tracejada). Nesta figura usamos $M = B_0 = \gamma = 1$.

Nas Figs. 3 (a) e (b) mostramos o comportamento de $F_r(t)F_p(t)$ e $S_r(t) + S_p(t)$. Observamos que $F_r(t)F_p(t)$ ($S_r(t) + S_p(t)$) diminui (aumenta) com o aumento do tempo. O produto $F_r(t)F_p(t)$ 3 inicialmente < 16 e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

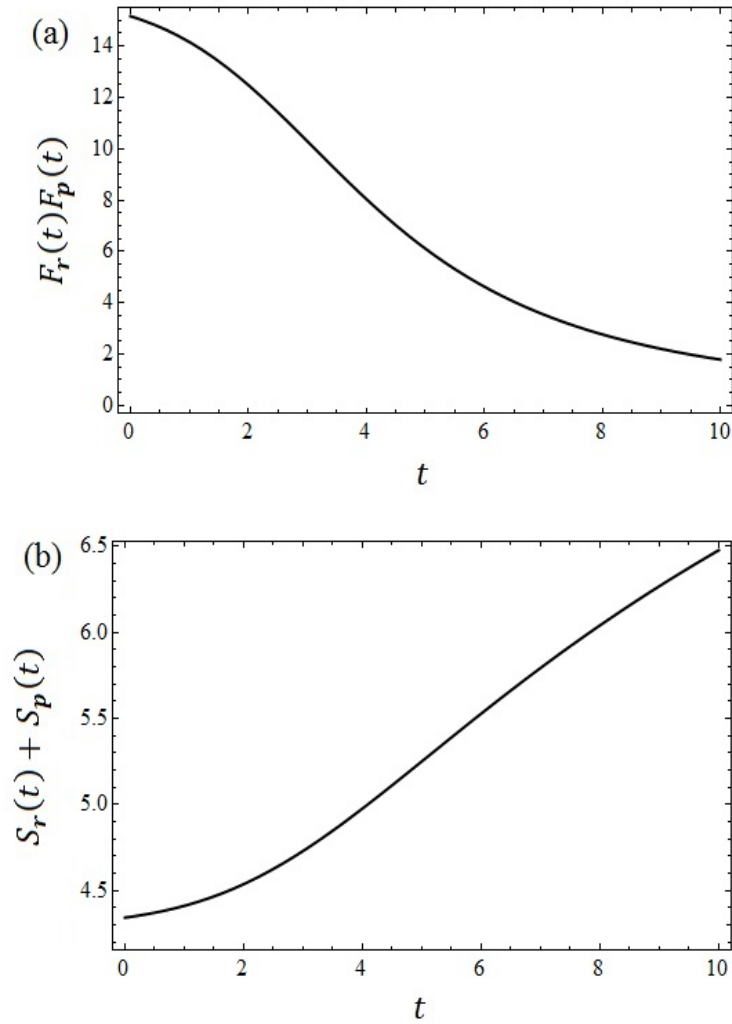


Figura 3. Comportamentos de (a) $F_r(t)F_p(t)$ e (b) $S_r(t) + S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = B_0 = \gamma = 1$.

Para o caso (ii), a Eq. (2.96) e sua solução são, respectivamente,

$$\ddot{\rho} + (B_0 + \cos^2(vt))\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (2.99)$$

$$\rho = \left(\frac{M^{-1}}{|W|}\right)^{1/2} \left\{ MC^2 \left[\frac{1+2B_0}{2v^2}, -\frac{1}{4v^2}, vt \right] + MS^2 \left[\frac{1+2B_0}{2v^2}, -\frac{1}{4v^2}, vt \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.100)$$

com MC and MS sendo as funções de Mathieu par e ímpar, respectivamente, e W o wronskiano de MC e MS .

O comportamento de $F_r(t)$, $F_p(t)$, $S_r(t)$ e $S_p(t)$ são mostrados nas Figs. 4 (a)-(d). Observamos que as informações de Fisher e as entropias de Shannon nos espaços

da posição e do momento oscilam com o tempo, alternando pontos de incerteza máximas e mínimas. Estados comprimidos surgem em ambos os espaços, como mostrado na Figura 5.

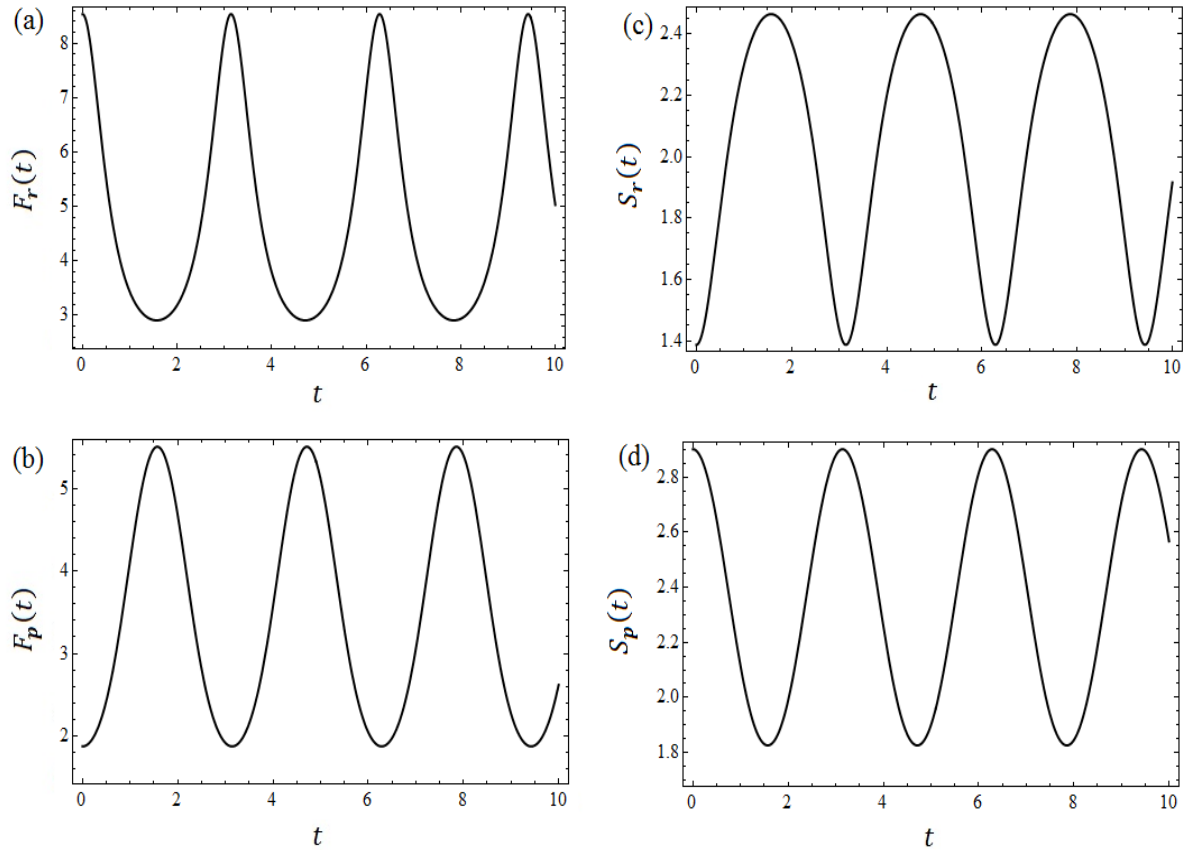


Figura 4. Comportamentos de (a) $F_r(t)$, (b) $F_p(t)$, (c) $S_r(t)$ e (d) $S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = B_0 = \nu = 1$.

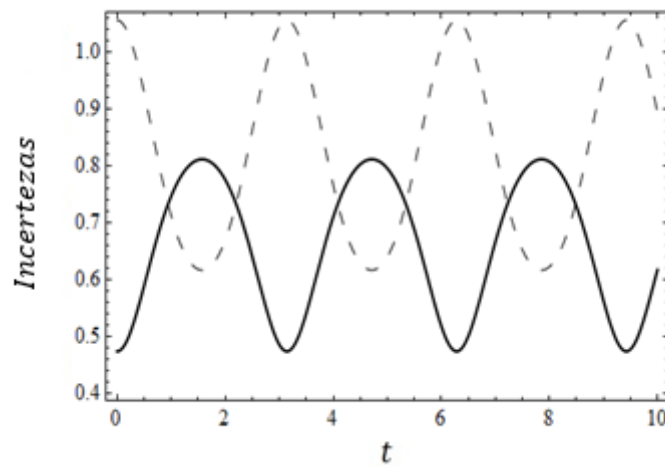


Figura 5. Comportamentos de Δx e Δy (linha contínua), Δp_x e Δp_y (linha tracejada). Nesta figura usamos $M = B_0 = \nu = 1$.

Nas Figs. 6 (a) e (b) mostramos os comportamentos de $F_r(t)F_p(t)$ e $S_r(t) + S_p(t)$, respectivamente. Observamos que $F_r(t)F_p(t)$ é inicialmente igual a 16 (mínima incerteza), tende a um valor mínimo (máxima incerteza), e então retorna ao valor 16. Isto ocorre indefinidamente.

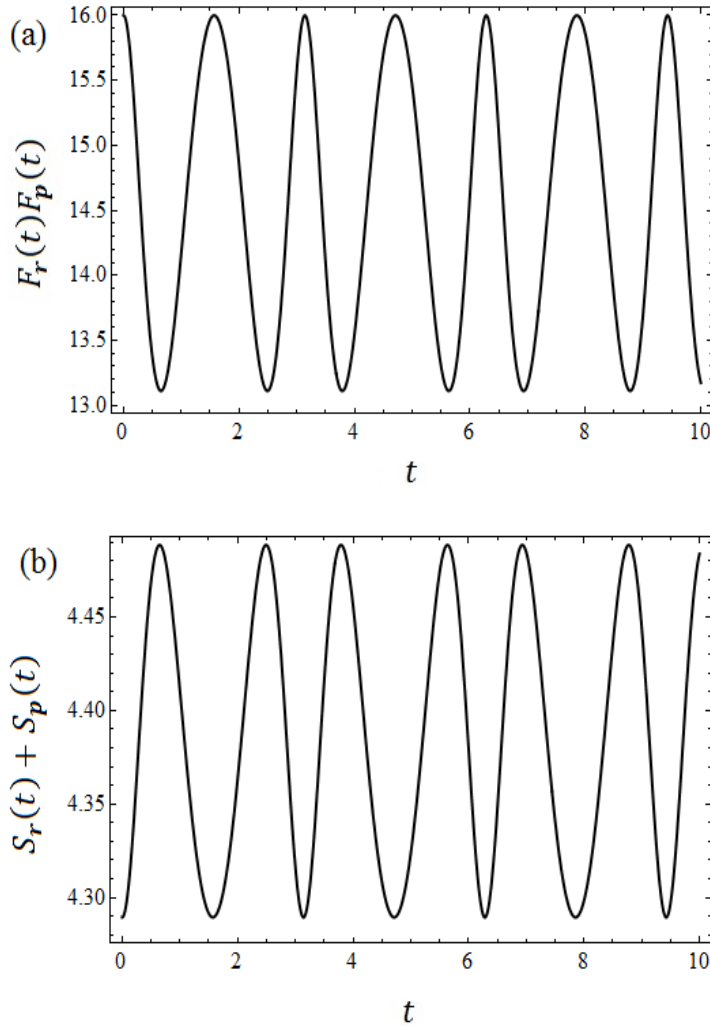


Figura 6. Comportamentos de (a) $F_r(t)F_p(t)$ e (b) $S_r(t) + S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = B_0 = \nu = 1$.

Para o caso (iii), a Eq. (2.96) e sua solução são, respectivamente

$$\ddot{\rho} + (B_0 - kt)\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (2.101)$$

$$\rho = \left(\frac{\pi}{Mk^{1/3}}\right)^{1/2} \left\{ Ai^2 \left[\frac{-B_0 + kt}{k^{2/3}} \right] + Bi^2 \left[\frac{-B_0 + kt}{k^{2/3}} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.102)$$

sendo Ai e Bi funções de Airy.

O comportamento de $F_r(t)$, $F_p(t)$, $S_r(t)$ e $S_p(t)$ são mostrados nas Figs. 7(a)-(d). Observamos que as informações de Fisher e as entropias de Shannon apresentam comportamentos idênticos aqueles exibidos no caso (i) para $t < 10$. Quando $t \rightarrow 10$ a incerteza no espaço da posição é máxima, indicando que a partícula se torna livre. Nesse caso também observamos o surgimento de estados comprimidos no espaço da posição (veja Fig. 8).

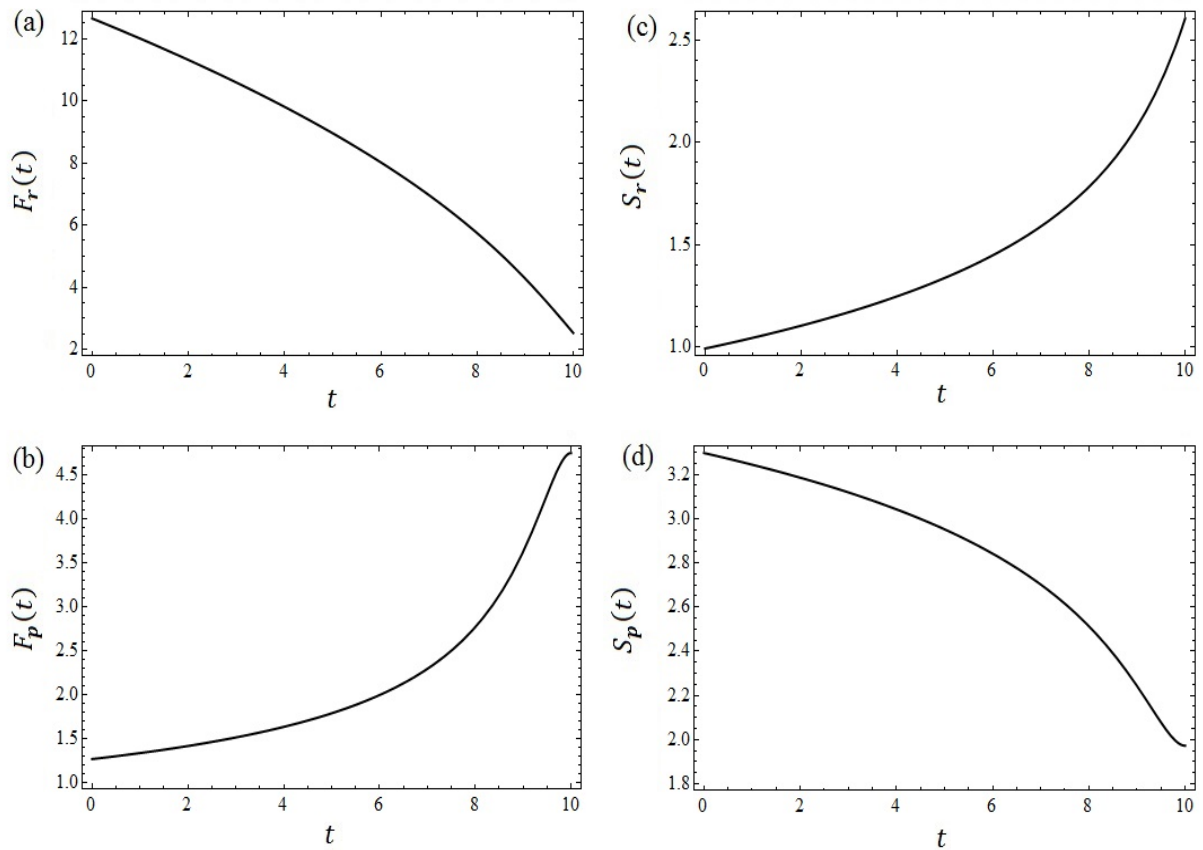


Figura 7. Comportamentos de (a) $F_r(t)$, (b) $F_p(t)$, (c) $S_r(t)$ e (d) $S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = k = 1$ and $B_0 = 10$.

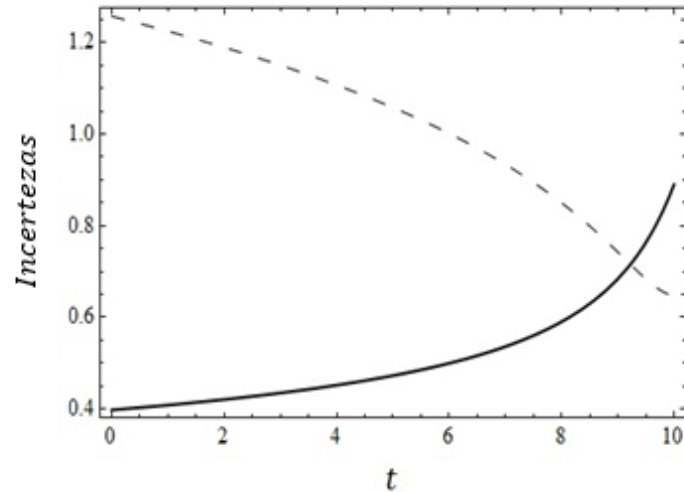


Figura 8. Comportamentos de Δx e Δy (linha contínua), Δp_x e Δp_y (linha tracejada). Nesta figura usamos $M = k = 1$ e $B_0 = 10$.

Nas Figs. 9 (a) e 9+(b) mostramos o comportamento do produto das informações de Fisher ($F_r(t)F_p(t)$) e da soma das entropias de Shannon ($S_r(t) + S_p(t)$). Observamos que $F_r(t)F_p(t)$ ($S_r(t) + S_p(t)$) diminui (aumenta) com o aumento do tempo. O produto $F_r(t)F_p(t)$ é inicialmente 16 e tende a um valor mínimo (máxima incerteza) quando $t \rightarrow 10$. Neste limite o campo magnético tende a zero e a partícula se torna livre.

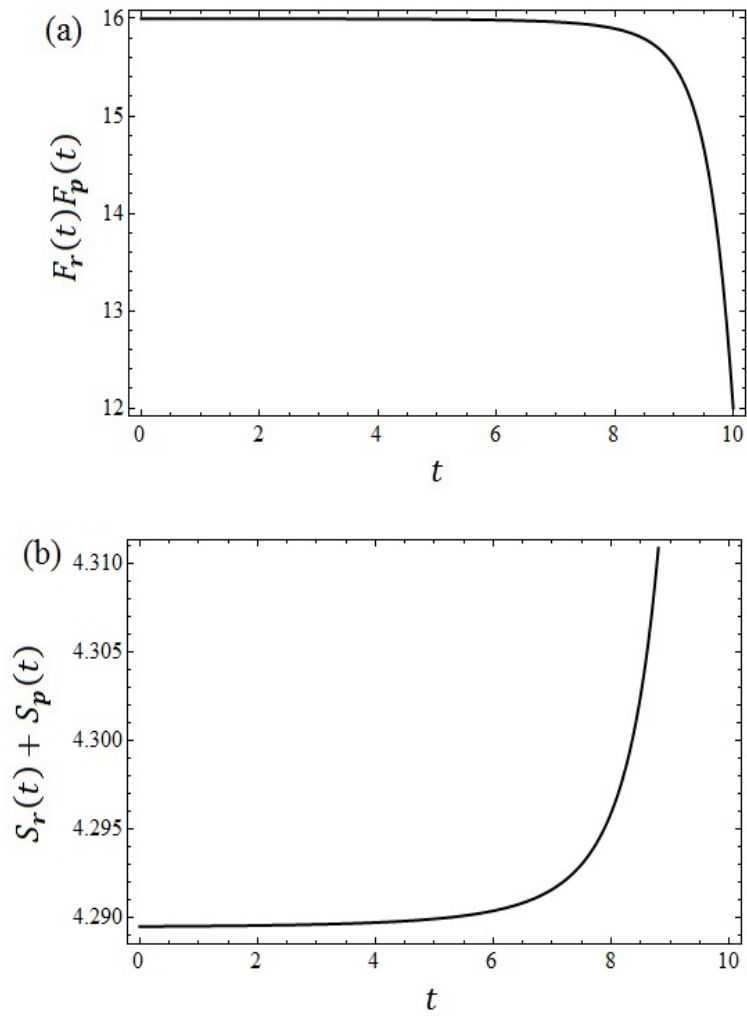


Figura 9. Comportamentos de (a) $F_r(t)F_p(t)$ e (b) $S_r(t) + S_p(t)$. Nesta figura usamos $M = k = 1$ e $B_0 = 10$.

3. Carga elétrica em uma armadilha de Penning dependente do tempo

Neste Capítulo aplicamos método de invariantes de LR ao problema de uma partícula carregada/íon aprisionada por uma armadilha de Penning com campos dependentes do tempo. Obtemos as funções de onda e relações de incerteza para o caso geral de um campo magnético na forma $\mathbf{B}(t) = B(t)\hat{\mathbf{z}}$ e de um potencial elétrico $V(t)$.

3.1 Introdução

O confinamento de partículas carregadas e/ou íons usando campos eletromagnéticos é um problema de grande interesse em física, tanto teórica quanto experimental. As soluções quânticas para o problema de partículas carregadas confinadas por armadilhas eletromagnéticas têm atraído bastante atenção na literatura e sua importância foi reconhecida com o prêmio Nobel em Física de 1989 [84]. As armadilhas mais populares são a armadilha de Penning [85] que confina as partículas por meio de uma combinação de um quadrupolo elétrico e de um campo magnético (ambos independentes do tempo na sua formulação original), e a armadilha de Paul [86], na qual um potencial elétrico dependente do tempo confina as partículas no espaço. Para a armadilha de Paul, funções de onda explicitamente dependentes do tempo das partículas confinadas foram obtidas por diferentes métodos [87-91]. Em especial, Pedrosa, Rosas e Guedes [91] usaram o método de LR [35] para obter as funções de onda exatas de uma partícula carregada confinada por campos oscilantes.

Por outro lado, a armadilha Penning [85, 88] foi projetada para confinar partículas carregadas e íons em um pequeno volume para fornecer uma maneira adequada de realizar medições de espectrometria de massa de alta resolução. Os comportamentos clássico e quântico de partículas carregadas em uma armadilha de Penning foram extensivamente estudados por vários autores [92-99]. Entretanto, apenas quatro deles discutem as relações de incerteza. Na Ref. [92], Steimle, Alber e Briggs estudaram por meio de variâncias a possibilidade de localizar uma partícula no seu estado fundamental em uma armadilha de Penning com um campo elétrico adicional dependente do tempo. Em 1996, Hacyan [93] obteve expressões analíticas para as variâncias da posição e do momento e mostrou que estados comprimidos de uma partícula carregada em uma armadilha independente do tempo são produzidos com uma frequência de compressão da ordem da frequência de magnetron. Na Ref. [94], Castaños *et al* resolveram a equação de Schrödinger dependente do tempo de um íon se movendo em uma armadilha de Penning

assimétrica independente do tempo para obter a evolução de estados comprimidos. Eles obtiveram expressões analíticas para o valor esperado da energia, dispersões e correlações dos operadores posição e momento. Em 2009, Fernández e Velázquez [95] usaram uma técnica matricial para obter as funções de onda e os valores médios de alguns operadores relevantes de uma partícula em uma armadilha independente do tempo. Eles observaram que os estados coerentes de uma armadilha de Penning minimizam a reção de incerteza de Heisenberg.

Neste Capítulo, usamos o método de LR para obter as soluções da equação de Schrödinger de uma partícula carregada sem spin em uma armadilha de Penning na qual os campos magnético e elétrico dependem do tempo. Para o estado $n = m = k = 0$, obtemos expressões analíticas para as incertezas na posição e momento da partícula, assim como algumas relações entrópicas de incerteza.

3.2 Soluções quânticas

A hamiltoniana de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning dependente do tempo tem a forma

$$H(t) = \frac{[\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}{2} + q\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

na qual $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, q é a carga da partícula, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetor magnético e $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é um potencial elétrico dependente do tempo.

Na região de confinamento, o potencial de quadrupolo elétrico dependente do tempo é dado por

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{V(t)}{2d^2} \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right), \quad (3.2)$$

sendo d uma constante.

Escolhendo o mesmo gauge simétrico (2.4) e um campo na forma $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$, Eq. (3.1) se torna

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - \frac{\omega_c(t)}{2} L_z + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) + \frac{M\omega_z^2(t)}{2} z^2, \quad (3.3)$$

com $\omega_z^2(t) = \frac{qV(t)}{Md^2}$, $\omega_c(t) = \frac{qB(t)}{M}$ é a frequência de Larmor, $L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ é a componente z do momento angular e $\omega(t)$ é uma frequência de modulação dependente do tempo na forma $\omega^2(t) = \frac{\omega_c^2(t) - 2\omega_z^2(t)}{4}$. Desse modo, a equação de Schrödinger que devemos resolver é

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2M} - \frac{\omega_c(t)}{2} L_z + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) + \frac{M\omega_z^2(t)}{2} z^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.4)$$

Podemos remover o tempo L_z (que comuta com $H(t)$) aplicando uma transformação unitária com a mesma forma da transformação (2.6), isto é,

$$\psi(x, y, t) = U_1 \varphi(x, y, t) = \exp \left[\frac{i}{2\hbar} L_z \int \omega_c(t) dt \right] \varphi(x, y, t),$$

mapeando assim nosso problema em um oscilador harmônico tridimensional anisotrópico com frequências dependentes do tempo

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + \frac{M\omega^2(t)}{2} (x^2 + y^2) + \frac{p_z^2}{2M} + \frac{M\omega_z^2(t)}{2} z^2 \right] \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (3.5)$$

Novamente, note que a hamiltoniana na equação de Schrödinger acima pode ser separada na forma

$$H'(t) = H_x(x, p_x, t) + H_y(y, p_y, t) + H_z(z, p_z, t). \quad (3.6)$$

Desse modo, o operador hermitiano invariante para essa hamiltoniana terá a forma

$$I = I_x + I_y + I_z = I^\dagger. \quad (3.7)$$

A construção do operador invariante (3.7) segue o mesmo procedimento do operador obtido no Capítulo 2, e seria redundante apresentar aqui tal procedimento. O operador invariante obtido para este problema tem a forma

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 + (\rho p_x - M \dot{\rho} x)^2 + (\rho p_y - M \dot{\rho} y)^2 + \left(\frac{z}{\rho_z} \right)^2 + (\rho_z p_z - M \dot{\rho}_z z)^2 \right], \quad (3.8)$$

na qual $\rho(t)$ e $\rho_z(t)$ satisfazem, respectivamente, as equações de Milne-Pinney [63, 64]

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{M^2\rho^3}, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\rho}_z + \omega_z^2(t)\rho_z = \frac{1}{M^2\rho_z^3}. \quad (3.10)$$

Apenas soluções reais de $\rho(t)$ e $\rho_z(t)$ são aceitáveis para garantir a hermiticidade de $I(t)$. A equação de autovalores que devemos resolver agora é

$$I(t)\phi_{nmk}(\mathbf{r}, t) = \lambda_{nmk}\phi_{nmk}(\mathbf{r}, t), \quad (3.11)$$

na qual λ_{nmk} são independentes do tempo e ϕ_{nmk} formam um conjunto ortonormal completo. A relação entre ϕ_{nmk} e φ_{nmk} é expressa na forma

$$\varphi_{nmk}(x, y, z, t) = e^{i\alpha_{nmk}(t)}\phi_{nmk}(x, y, z, t), \quad (3.12)$$

com as fases $\alpha_{nmk}(t)$ satisfazendo a equação

$$\hbar \frac{d\alpha_{nmk}(t)}{dt} = \left\langle \phi_{nmk}(x, y, z, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H'(t) \right| \phi_{nmk}(x, y, z, t) \right\rangle. \quad (3.13)$$

Considere então a seguinte transformação unitária

$$\phi'_{nmk}(\mathbf{r}, t) = U_2\phi_{nmk}(\mathbf{r}, t), \quad (3.14)$$

com

$$U_2 = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}(x^2 + y^2) - \frac{iM\dot{\rho}_z}{2\hbar\rho_z}z^2 \right]. \quad (3.15)$$

Sob essa transformação e definindo $x = \rho r \cos\theta$, $y = \rho r \sin\theta$ e $z = \rho_z z'$, Eq. (3.11) assume a forma

$$\begin{aligned}
I'(t)\sigma_{nmk}(r, \theta, z') &= \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{r^2}{2} + \left(\frac{p_{z'}^2}{2} + \frac{z'^2}{2} \right) \right] \sigma_{nmk}(r, \theta, z') \\
&= \lambda_{nmk} \sigma_{nmk}(r, \theta, z'),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo $I'(t) = U_2 I(t) U_2^\dagger$, $r^2 = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ e

$$\phi'_{nmk}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho \sqrt{\rho_z}} \sigma_{nmk}(r, \theta, z'). \tag{3.17}$$

Podemos escrever $\sigma(r, \theta, z')$ na forma $\sigma(r, \theta, z') = R(r)\Theta(\theta)Z(z')$, sendo $\Theta(\theta) = e^{im\theta}$, com $m \in \mathbb{Z}$. Definindo uma nova variável $u = \frac{r^2}{\hbar}$ e escrevendo $\sigma(u, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ como

$$\sigma(u, \theta) = (\hbar u)^{\frac{|m|}{2}} e^{-\frac{u}{2}} v(u) \Theta(\theta), \tag{3.18}$$

a Eq. (3.16) se torna idêntica à Eq. (2.72), cuja solução é escrita em termos dos polinômios associados de Laguerre (2.73) e os autovalores da Eq. (3.11) no plano xy são os mesmos da Eq. (2.74).

A equação para a terceira parte de $\sigma(r, \theta, z')$, $Z(z')$, é a equação de Schrödinger de um oscilador harmônico unidimensional independente do tempo, cuja solução é a bem conhecida

$$Z(z') = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar k!} 2^k} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{z'^2}{2\hbar} \right) H_k \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} z' \right], \tag{3.19}$$

com H_k sendo os polinômios de Hermite e

$$\lambda_k = \hbar \left(k + \frac{1}{2} \right). \tag{3.20}$$

Assim, as autofunções normalizadas do invariante $I(t)$ são

$$\begin{aligned}
\phi_{nmk}(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar k!} 2^k \rho_z} \right)^{1/2} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|m|+1)} \frac{1}{\pi} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar \rho^2} \right)^{\frac{|m|+1}{2}} (x^2 \\
&+ y^2)^{\frac{|m|}{2}} \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right. \\
&\left. + z^2 \left(\frac{iM\dot{\rho}_z}{2\hbar\rho_z} - \frac{1}{2\hbar\rho_z^2} \right) \right] e^{im\theta} L_n^{|m|} \left(\frac{x^2 + y^2}{\hbar\rho^2} \right) H_k \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{z}{\rho_z} \right], \quad (3.21)
\end{aligned}$$

enquanto, a partir das Eqs. (2.74) e (3.20), os autovalores independentes do tempo são escritos como

$$\lambda_{nmk} = \hbar \left(2n + |m| + k + \frac{3}{2} \right). \quad (3.22)$$

As fases $\alpha_{nmk}(t)$ obtidas têm a forma

$$\alpha_{nmk}(t) = -(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho^2(t')} - \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{M\rho_z^2(t')}. \quad (3.23)$$

Finalmente, a solução exata da equação de Schrödinger (3.4) é escrita como

$$\begin{aligned}
\psi_{nmk}(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \hbar k!} 2^k \rho_z} \right)^{1/2} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+|m|+1)} \frac{1}{\pi} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{\hbar \rho^2} \right)^{\frac{|m|+1}{2}} (x^2 \\
&+ y^2)^{\frac{|m|}{2}} \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right] e^{im\theta} L_n^{|m|} \left(\frac{x^2 + y^2}{\hbar\rho^2} \right) \exp \left[z^2 \left(\frac{iM\dot{\rho}_z}{2\hbar\rho_z} \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{2\hbar\rho_z^2} \right) \right] H_k \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{z}{\rho_z} \right] \exp \left[i \frac{m}{2} \int \omega_c(t) dt \right] e^{i\alpha_{nmk}(t)}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

No estado $n = m = k = 0$, obtemos as seguintes relações (com $\hbar = 1$)

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = \langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = \langle p_z \rangle = 0, \quad (3.25)$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{\rho^2}{2}, \quad \langle z^2 \rangle = \frac{\rho_z^2}{2}, \quad (3.26)$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_y^2 \rangle = \frac{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2}{2\rho^2}, \quad \langle p_z^2 \rangle = \frac{1 + M^2 \rho_z^2 \dot{\rho}_z^2}{2\rho_z^2}, \quad (3.27)$$

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{(1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2}}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad (3.28)$$

$$\Delta z \Delta p_z = \frac{(1 + M^2 \rho_z^2 \dot{\rho}_z^2)^{1/2}}{2} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Dados $\mathbf{B}(t)$ e $V(t)$ basta resolver as Eqs. (3.9) e (3.10) para se obter os valores das incertezas de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning dependente do tempo.

Nesse ponto, vale ressaltar que um método alternativo ao de LR para a obtenção das funções de onda de uma partícula carregada em uma armadilha dependente do tempo foi desenvolvido por Schrade *et al* [100]. A conexão entre esses dois métodos foi obtida por nós na Ref. [101].

3.3 Resultados e discussões

Nesta seção calculamos as incertezas na posição e no momento de uma partícula carregada em diferentes configurações de armadilhas de Penning. Mostramos que dependendo dos valores de $V(t)$ e $B(t)$ estados comprimidos podem surgir. Investigações similares em armadilhas de Paul podem ser encontradas nas referências [100, 102, 103].

Primeiro considere o caso especial onde $\mathbf{B}(t) = B_0 \mathbf{k}$ e $V(t) = V_0$. Neste caso, a Eq. (3.1) se torna a hamiltoniana usual de uma armadilha de Penning independente do tempo, e as soluções das Eqs. (3.9) e (3.10) são, respectivamente,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{M\omega_0}}, \quad (3.30)$$

$$\rho_z = \frac{1}{\sqrt{M\omega_z}}, \quad (3.31)$$

com $\omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{qB_0}{M}\right)^2 - 2\omega_z^2}$ e $\omega_z = \sqrt{\frac{qV_0}{Md^2}}$. Desse modo, das Eqs. (3.25)-(3.29) obtemos

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{1}{2M\omega_0}, \quad \langle z^2 \rangle = \frac{1}{2M\omega_z}, \quad (3.32)$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_y^2 \rangle = \frac{M\omega_0}{2}, \quad \langle p_z^2 \rangle = \frac{M\omega_z}{2}, \quad (3.33)$$

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \Delta z \Delta p_z = \frac{1}{2}. \quad (3.34)$$

Esses resultados são esperados já que $\psi_{000}(\mathbf{r}, t)$ para $\mathbf{B}(t) = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ e $V(t) = V_0$, dada por

$$\psi_{000}(\mathbf{r}, t) = (\omega_z \omega_0^2)^{1/4} \left(\frac{M}{\pi \hbar} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{M\omega_0(x^2 + y^2)}{2\hbar} - \frac{z^2 M\omega_z}{2\hbar} \right] e^{-i(\omega_0 + \frac{\omega_z}{2})t}, \quad (3.35)$$

é exatamente o estado coerente na representação da posição de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning independente do tempo que foi obtido na Ref. [95] com $M = 1$.

A relação de incerteza de Robertson-Schrödinger [104, 105] é também satisfeita e tem a forma

$$(\Delta x_i)^2 (\Delta p_i)^2 - (\Delta x_i p_i)^2 = \frac{1}{4}, \quad (3.36)$$

sendo $\Delta x_i p_i = \frac{1}{2} \langle x_i p_i + p_i x_i \rangle - \langle x_i \rangle \langle p_i \rangle$, com $i = 1, 2$ e 3 , e $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Nosso resultado concorda com aquele previamente mostrado na Ref. [93] quando $D = 0$, no qual D é o parâmetro de assimetria do potencial. Observe que a Eq. (3.36) não depende de ρ ou ρ_z .

As Figs. 10(a)-(b) mostram os comportamentos de $\Delta x, y(B_0)$ e $\Delta x, y(V_0)$, respectivamente. Podemos observar que $\Delta x, y$ decresce com o aumento de B_0 para qualquer que seja o valor de V_0 . O fenômeno de compressão surge para $B_0 \geq 2$. Mantendo fixo o valor de B_0 e aumentando o valor de V_0 , observamos que $\Delta x, y$ aumenta e não há mais compressão. Na Ref. [93] foi mostrado que uma assimetria no potencial elétrico pode produzir estados comprimidos em uma armadilha de Penning independente do tempo. Nossos resultados mostram que estados comprimidos também podem aparecer mesmo com um potencial elétrico simétrico ao fazermos variar B_0 . Os pontos de máxima incerteza acontecem quando $\omega_0 \rightarrow 0$, mais especificamente, quando $B_0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}M}{q} \sqrt{\frac{qV_0}{Md^2}}$.

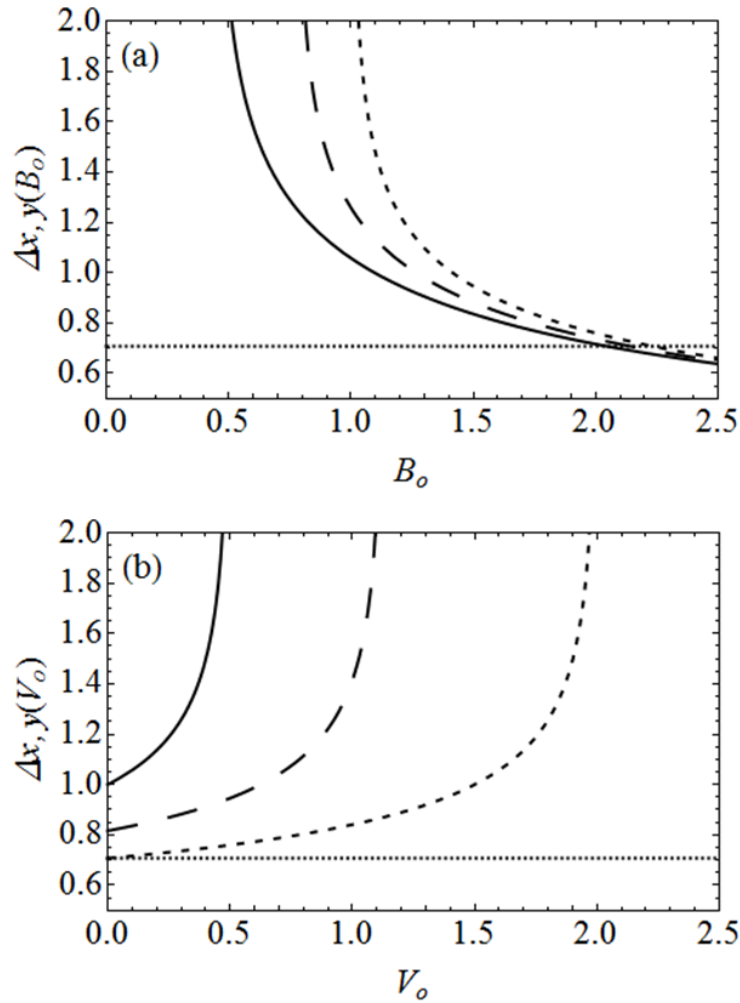


Figura 10. Comportamentos de (a) $\Delta x, y(B_0)$, para $V_0 = 0.1$ (linha contínua), $V_0 = 0.3$ (tracejado longo) and $V_0 = 0.5$ (tracejado curto), e (b) $\Delta x, y(V_0)$, para $B_0 = 1.0$ (linha contínua), $B_0 = 1.5$ (tracejado longo) e $B_0 = 2.0$ (tracejado curto). Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = 1$. A linha pontilhada corresponde a $1/\sqrt{2}$.

Nas Figs. 11(a)-(b) mostramos os comportamentos de $\Delta p_x, p_y(B_0)$ e $\Delta p_x, p_y(V_0)$, respectivamente. Observamos compressão em $\Delta p_{x,y}(B_0)$ acontecendo para $B_0 \leq 2$, enquanto que para $\Delta p_{x,y}(V_0)$ a partícula sempre se encontra em um estado comprimido para todos os valores de B_0 considerados. Nesse caso, os pontos de mínima incerteza no momento ocorrem no limite em que $B_0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}M}{q} \sqrt{\frac{qV_0}{Md^2}}$.

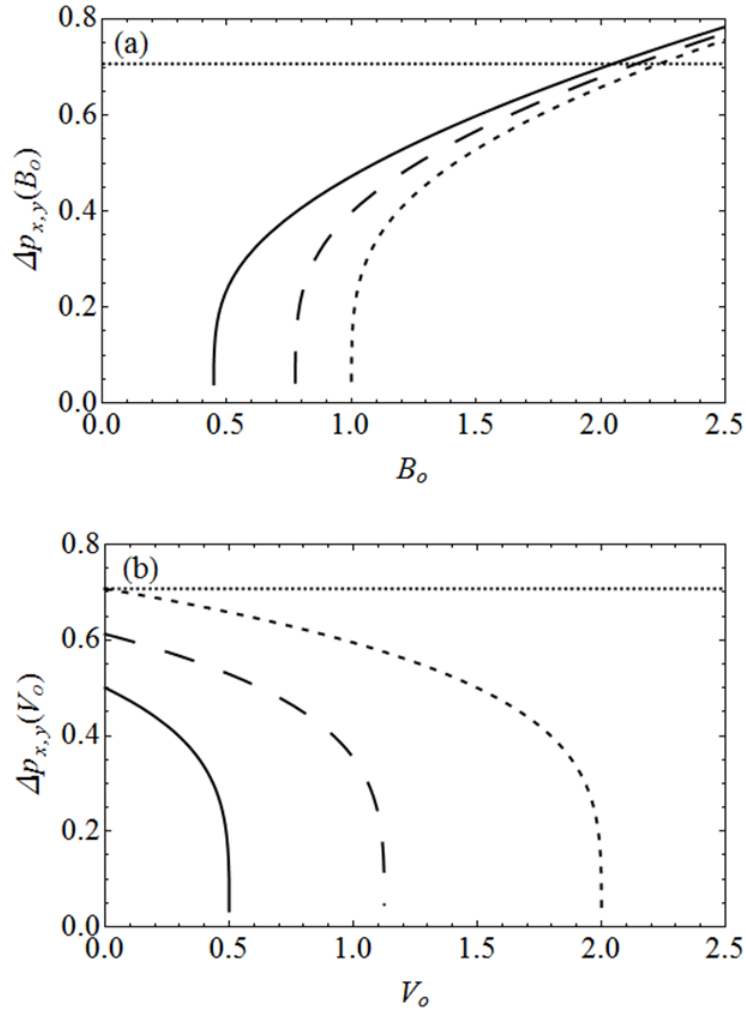


Figura 11. Comportamentos de (a) $\Delta p_{x,y}(B_0)$, para $V_0 = 0.1$ (linha contínua), $V_0 = 0.3$ (tracejado longo) and $V_0 = 0.5$ (tracejado curto), e (b) $\Delta p_{x,y}(V_0)$, para $B_0 = 1.0$ (linha contínua), $B_0 = 1.5$ (tracejado longo) e $B_0 = 2.0$ (tracejado curto). Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = 1$. A linha pontilhada corresponde a $1/\sqrt{2}$.

Para o movimento ao longo da coordenada z , o fenômeno de compressão em $\Delta z(\Delta p_z)$ ocorre com o aumento (decréscimo) de V_0 , como mostrado na Fig. 12. Devido à simetria da armadilha, os comportamentos de Δz e Δp_z não dependem de B_0 .

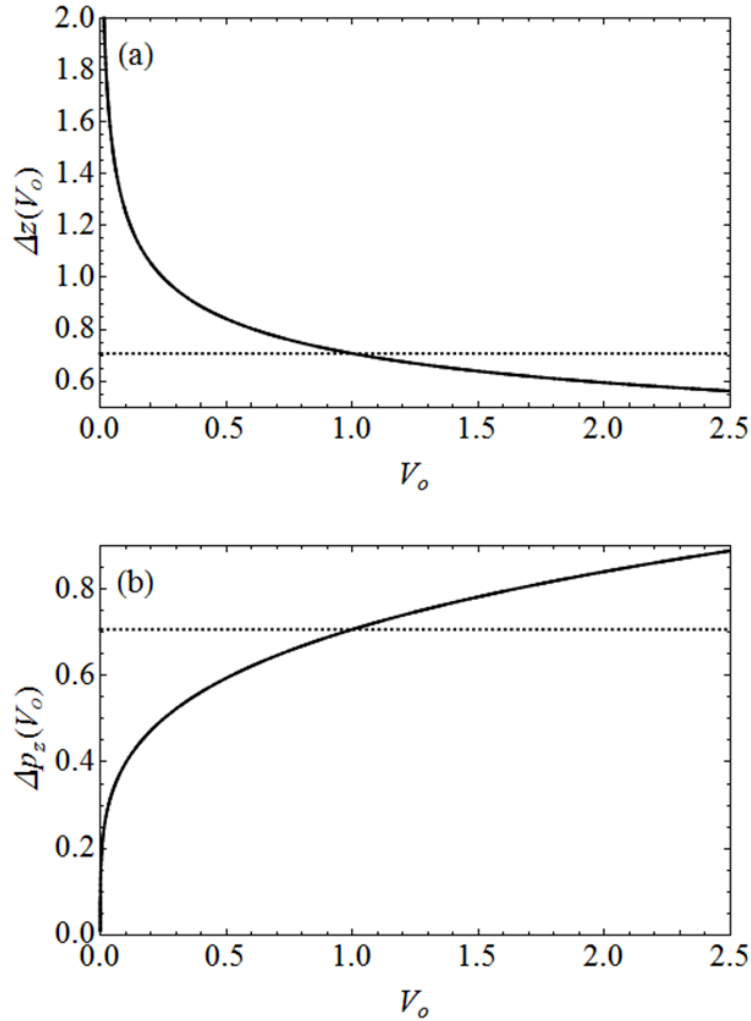


Figura 12. Comportamentos de (a) $\Delta z(V_0)$ e (b) $\Delta p_z(V_0)$. Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = 1$. A linha pontilhada corresponde a $1/\sqrt{2}$.

Agora considere o caso em que os campos são oscilantes na forma $\mathbf{B}(t) = (B_0^2 + B' \cos^2(vt))^{1/2} \hat{\mathbf{z}}$ e $V(t) = V_0 + V' \cos^2(vt)$. Neste caso, as soluções das Eqs. (3.9) e (3.10) são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} \rho = & \left(\frac{1}{M|W|} \right)^{1/2} \left\{ MC^2 \left[\frac{\epsilon + 2\omega_0^2}{2v^2}, -\frac{\epsilon}{4v^2}, vt \right] \right. \\ & \left. + MS^2 \left[\frac{\epsilon + 2\omega_0^2}{2v^2}, -\frac{\epsilon}{4v^2}, vt \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \rho_z = & \left(\frac{1}{M|W_z|} \right)^{1/2} \left\{ MC^2 \left[\frac{\epsilon + 2\omega_{z0}^2}{2v^2}, -\frac{\epsilon}{4v^2}, vt \right] \right. \\ & \left. + MS^2 \left[\frac{\epsilon + 2\omega_{z0}^2}{2v^2}, -\frac{\epsilon}{4v^2}, vt \right] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

nas quais MC e MS são das funções de Mathieu par e ímpar, respectivamente, W e W_z são os respectivos wronskianos de cada par dessas funções, e

$$\omega_0^2 = \frac{q^2 B_0^2}{4M^2} - \frac{qV_0}{2Md^2}, \quad (3.39)$$

$$\omega_{z_0}^2 = \frac{qV_0}{Md^2}, \quad (3.40)$$

$$\varepsilon = \frac{q^2 B'^2}{4M^2} - \frac{qV'}{2Md^2}, \quad (3.41)$$

$$\epsilon = \frac{qV'}{Md^2}. \quad (3.42)$$

Nas Figs. 13(a)-(b) mostramos os comportamentos de $\Delta x, y(t)$ e $\Delta p_x, p_y(t)$, respectivamente. Observamos que $\Delta x, y(t)$ e $\Delta p_x, p_y(t)$ oscilam com o tempo, alternando pontos de máxima e mínima incerteza. Para $B_0 = \sqrt{6}$, nossos resultados indicam a existência de uma alternância entre estados comprimidos e estados não comprimidos, em ambos os espaços. Para $B_0 = \sqrt{10}$, o fenômeno de compressão sempre ocorre em $\Delta x, y(t)$, enquanto que para $\Delta p_{x,y}$ não há compressão. É importante salientar que quanto mais forte o campo, entre menos pontos oscila as incertezas nas posições. Campos mais fortes aprisionam melhor e com mais precisão as partículas, como mostram nossos resultados, traduzidos graficamente nas Figs. 13(a)-(b).

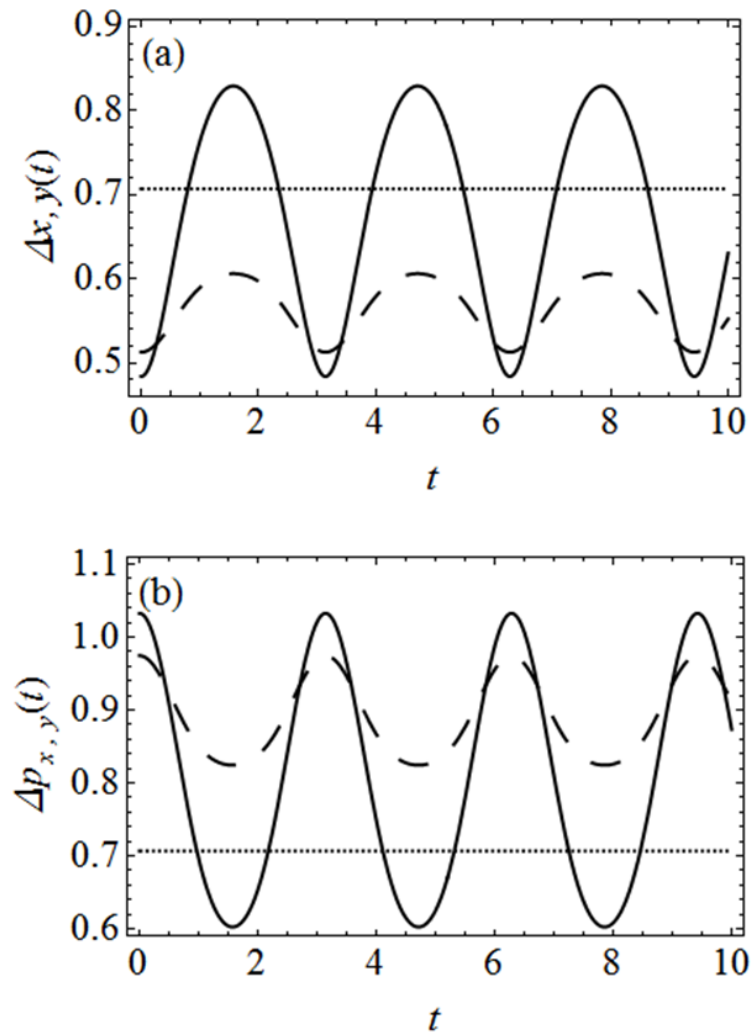


Figura 13. Comportamentos de (a) $\Delta x, y(t)$ e (b) $\Delta p_{x,y}(t)$ para $B_0 = \sqrt{6}$ (linha contínua) and $B_0 = \sqrt{10}$ (linha tracejada). Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = V_0 = \nu = V' = 1$ e $B' = 6$. A linha pontilhada corresponde a $1/\sqrt{2}$.

Nas Figs. 14(a)-(b) mostramos os comportamentos de $\Delta z(t)$ e $\Delta p_z(t)$, respectivamente. Nós observamos que ambas oscilam alternando pontos de máximas e mínimas incerteza. Aqui também podemos observar que estados comprimidos e estados não comprimidos também se alternam em ambos os espaços.

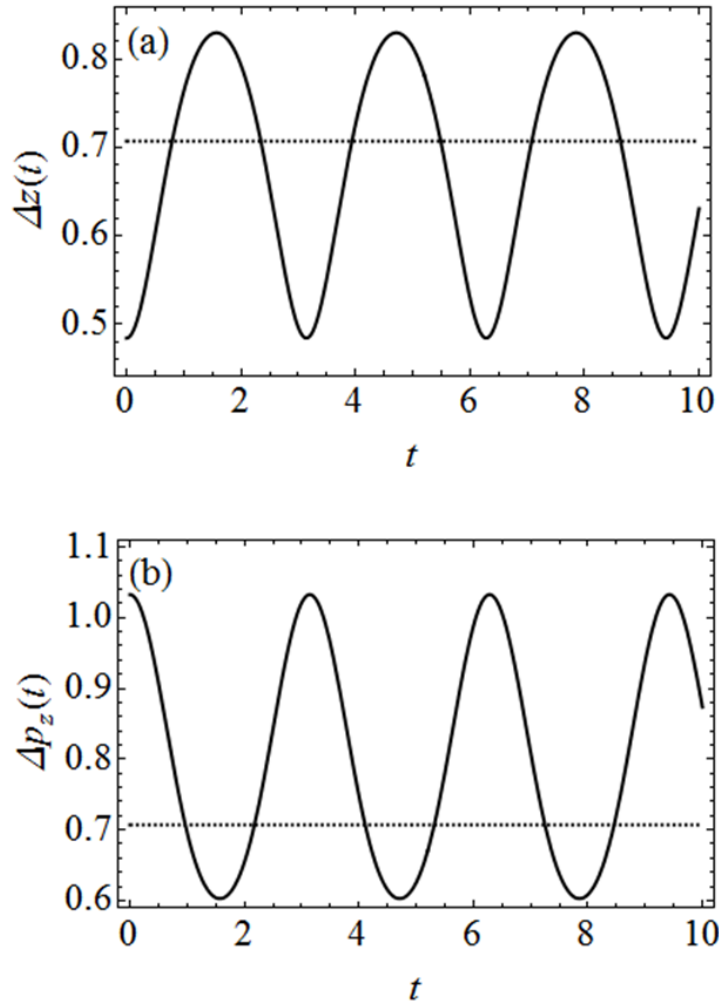


Figura 14. Comportamentos de (a) $\Delta z(t)$ e (b) $\Delta p_z(t)$. Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = V_0 = v = V' = 1$ e $B' = 6$. A linha pontilhada corresponde a $1/\sqrt{2}$.

Das definições de entropia de Shannon (2.89) e (2.90) e de informação de Fisher (2.91) e (2.92), obtemos para o estado $n = m = k = 0$

$$S_r(t) = \frac{3}{2}(1 + \ln\pi) + \ln(\rho^2 \rho_z), \quad (3.43)$$

$$S_p(t) = \frac{3}{2}(1 + \ln\pi) + \ln \left[\left(\frac{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{1 + M^2 \rho_z^2 \dot{\rho}_z^2}{\rho_z^2} \right)^{1/2} \right], \quad (3.44)$$

$$F_r(t) = \frac{4}{\rho^2} + \frac{2}{\rho_z^2}, \quad (3.45)$$

$$F_{\mathbf{p}}(t) = \frac{4\rho^2}{1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2} + \frac{2\rho_z^2}{1 + M^2\rho_z^2\dot{\rho}_z^2}. \quad (3.46)$$

Note que as Eqs. (3.43) e (3.44) satisfazem a relação de incerteza entrópica de BBM

$$S_{\mathbf{r}}(t) + S_{\mathbf{p}}(t) = 3(1 + \ln\pi) + \ln[(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)(1 + M^2\rho_z^2\dot{\rho}_z^2)^{1/2}]. \quad (3.47)$$

As incertezas nos espaços da posição e do momento são dadas, respectivamente, por

$$\Delta\mathbf{r} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho_z^2}{2}}, \quad (3.48)$$

$$\Delta\mathbf{p} = \sqrt{\frac{1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{1 + M^2\rho_z^2\dot{\rho}_z^2}{2\rho_z^2}}. \quad (3.49)$$

Das Eqs. (3.43), (3.44), (3.48) e (3.49), obtemos a relação

$$S_{\mathbf{r},\mathbf{p}} \leq \frac{3}{2} \ln \left[\frac{2\pi e}{3} (\Delta\mathbf{r}, \mathbf{p})^2 \right], \quad (3.50)$$

que é satisfeita para qualquer M , ρ e ρ_z , sendo que os dois últimos têm que, por construção da teoria, ser reais. A igualdade é obtida para o caso independente do tempo. A Eq. (3.50) indica que quanto maior a incerteza, seja na posição ou no momento, maior a entropia respectiva.

O produto das informações de Fisher é dado por

$$F_{\mathbf{r}}(t)F_{\mathbf{p}}(t) = \frac{\left[16 + 8\left(\frac{\rho}{\rho_z}\right)^2\right]}{1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2} + \frac{\left[4 + 8\left(\frac{\rho_z}{\rho}\right)^2\right]}{1 + M^2\rho_z^2\dot{\rho}_z^2}. \quad (3.51)$$

Dados $M(t)$, $\mathbf{B}(t)$ e $V(t)$, devemos simplesmente resolver as Eqs. (3.9) e (3.10) para obtermos os valores das incertezas, $S_{\mathbf{r}}(t)$, $S_{\mathbf{p}}(t)$, $F_{\mathbf{r}}(t)$ e $F_{\mathbf{p}}(t)$ para uma partícula carregada em uma armadilha de Penning dependente do tempo.

Outras medidas úteis escritas em termos das informações de Fisher são os conhecidos comprimentos de Fisher [46], definidos como

$$\delta \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{F_r}}, \quad (3.52)$$

$$\delta \mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{F_p}}, \quad (3.53)$$

e a partir das Eqs. (3.45), (3.46), (3.48), (3.49), (3.52) e (3.53), mostramos que o produto dos comprimentos de Fisher possui um limite inferior não trivial menor que o produto das incertezas de em termos dos desvios-padrão, isto é, $\delta \mathbf{r} \delta \mathbf{p} \leq \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{p}$. E este resultado é satisfeito para qualquer sistema físico descrito pela hamiltoniana (3.3).

Nas Figs. 15(a)-(d) mostramos os comportamentos das informações de Fisher e entropias de Shannon nos espaços da posição e momento. Observamos que quanto mais (menos) intenso o campo magnético (linha tracejada), maior (menor) precisão teremos na localização da partícula aprisionada no plano xy como mostrado nas Figs. 15(a) e 15(c) (Figs. (15(b) e 15(d)).

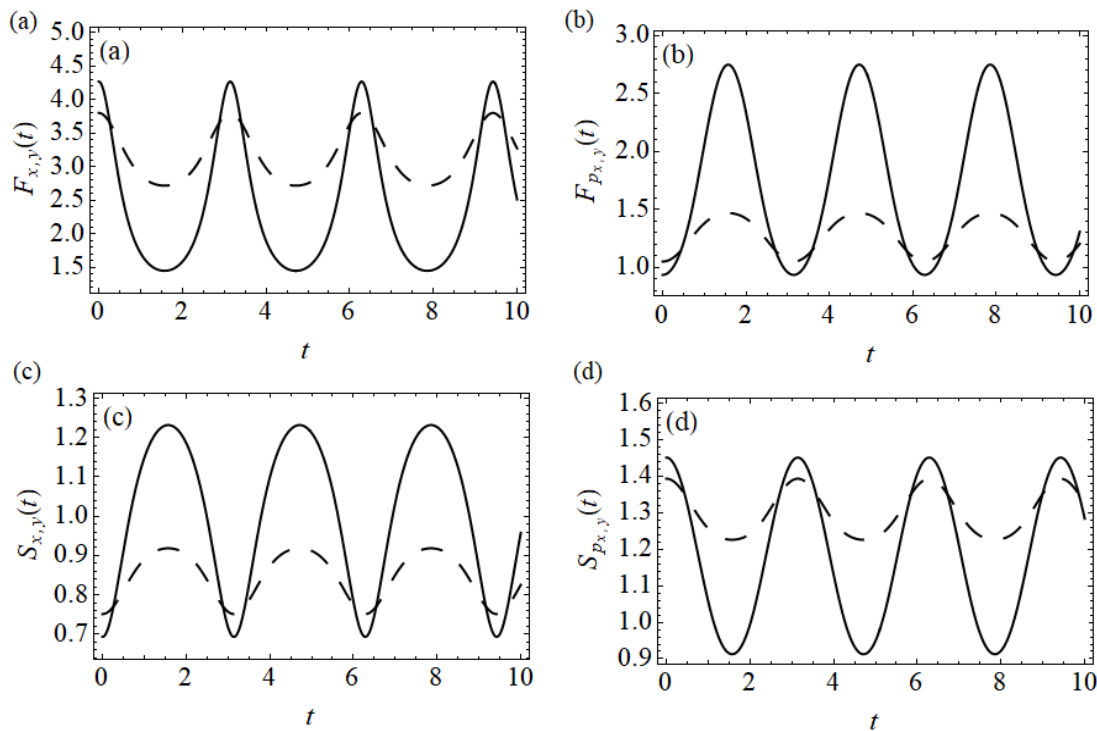


Figura 15. Comportamentos de (a) $F_{x,y}(t)$ e (b) $F_{p_{x,y}}(t)$, (c) $S_{x,y}(t)$ e (d) $S_{p_{x,y}}(t)$ para $B_0 = \sqrt{6}$ (linha contínua) e $B_0 = \sqrt{10}$ (linha tracejada). Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = V_0 = \nu = V' = 1$ e $B' =$

4. Conclusões

Neste trabalho revisitamos um dos mais antigos problemas de física: a interação de partículas carregadas sem spin com campos externos explicitamente dependentes do tempo. Inicialmente analisamos no Capítulo 2 o caso bidimensional em que há um campo magnético na forma $\mathbf{B} = B(t)\hat{\mathbf{z}}$ e não há potencial elétrico. Três diferentes campos magnéticos foram analisados, levando às frequências de oscilação: (i) $\omega^2(t) = B_0 e^{-\nu t}$, (ii) $\omega^2(t) = B_0 + \cos^2(\nu t)$ and (iii) $\omega^2(t) = B_0 - kt$.

Primeiramente, obtemos as funções de onda exatas usando o método de invariantes de LR [35]. Para o estado $n = m = 0$, calculamos as incertezas, as entropias de Shannon (S_r e S_p) e as informações de Fisher (F_r e F_p) dependentes do tempo nos espaços da posição e do momento, em termos de ρ , que é uma função real solução da equação de Milne-Pinney (2.96).

Para os sistemas (i) e (iii) observamos que F_r e S_p (F_p e S_r) diminuem (aumentam) com o tempo, enquanto para o sistema (ii) elas oscilam. Para os três sistemas analisados o produto das informações de Fisher obedece a relação $F_r F_p \leq 16 = 4D^2$ com $D = 2$, o que fornece mais uma contraprova à conjectura de Hall [46] apresentada na introdução deste trabalho. De fato, para um oscilador harmônico isotrópico com massa e frequência dependentes do tempo em D -dimensões é fácil mostrar que $F_r F_p \leq 4D^2$.

Observamos ainda o surgimento de estados comprimidos no espaço do momento para o sistema (i) e (iii), enquanto que para o sistema (ii) estados comprimidos surgem em ambos os espaços com o aumento do tempo.

No Capítulo 3, obtemos as soluções exatas da equação de Schrödinger, $\psi_{nmk}(r, t)$, para uma partícula carregada sem spin em uma armadilha de Penning usando o método de LR. Os movimentos no plano xy e na coordenada z são descritos por polinômios associados de Laguerre e por polinômios de Hermite, respectivamente. Para o estado $\psi_{000}(r, t)$ obtemos expressões analíticas para os valores médios, incertezas em termos dos desvios-padrão e relações entrópicas de incerteza em termos de $\rho(t)$ e $\rho_z(t)$, que são soluções reais de equações tipo Milne-Pinney (Eqs. (3.9) e (3.10)).

Para o caso estático, $\mathbf{B}(t) = B_0\hat{\mathbf{z}}$ e $V(t) = V_0$, as soluções de $\rho(t)$ e $\rho_z(t)$ são constantes e $\psi_{000}(r, t)$ corresponde à representação da posição de um estado

coerente. Nós observamos que $\Delta x, y$ diminui com a variação de B_0 , enquanto que aumenta ao variarmos V_0 . Para $B_0 \geq 2$ estados comprimidos surgem no espaço da posição. Para o movimento ao longo da coordenada z , estados comprimidos surgem como aumento de V_0 , e, devido à simetria da armadilha, o movimento da coordenada z não depende B_0 .

Para o caso dependente do tempo com $\mathbf{B}(t) = (B_0^2 + B' \cos^2(\nu t))^{1/2} \hat{\mathbf{z}}$ e $V(t) = V_0 + V' \cos^2(\nu t)$, as soluções de $\rho(t)$ e $\rho_z(t)$ são escritas em termos das funções de Mathieu. Observamos que $\Delta x, y(t)$ oscila com o tempo, alternando pontos de máxima e mínima incerteza. Para $B_0 = \sqrt{6}$, os resultados indicam que estados comprimidos nos espaços da posição e do momento se alternam. Para $B_0 = \sqrt{10}$, sempre há estados comprimidos no espaço da posição. O comportamento de $\Delta z(t)$ também é oscilante com o tempo, alternando pontos de máxima e mínima incerteza, porém o comportamento é independente de B_0 . E mostramos que a desigualdade de Robertson-Schrödinger [104, 105] não depende de ρ e nem de ρ_z . De fato, para todos os casos analisados neste trabalho, o limite inferior é sempre obtido.

Mostramos também que a desigualdade de BBM é satisfeita para qualquer $\mathbf{B}(t)$ e $V(t)$ que forneçam soluções reais para as Eqs. (3.9) e (3.10). Para o produto das informações de Fisher, se considerarmos o simples caso em que $\rho = \rho_z$, a Eq. (3.51) se torna

$$F_r(t)F_p(t) = \frac{36}{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2} \leq 36 = 4D^2, \quad (4.1)$$

com $D = 3$, que é o mesmo resultado para o produto das informações de Fisher de um oscilador tridimensional isotrópico dependente do tempo, como deveria ser. Porém, para um oscilador anisotrópico, este resultado não é obtido, como mostrado na Fig. 16 a seguir.

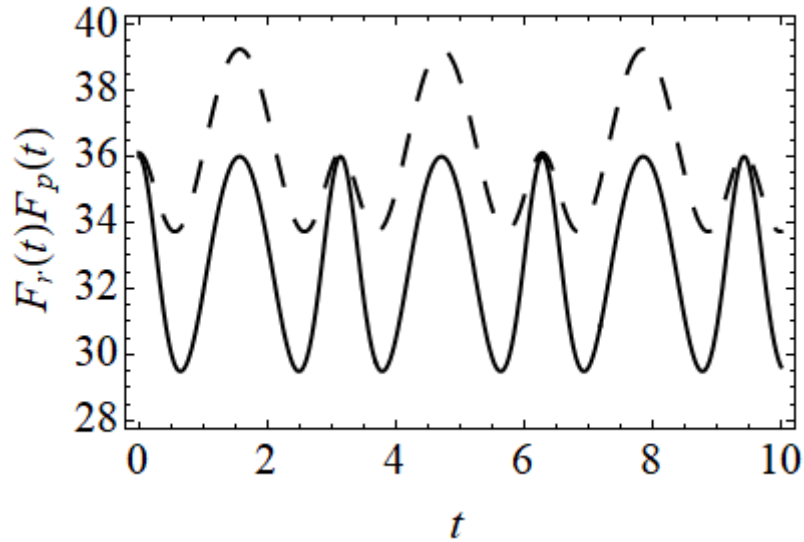


Figura 16. Produto das informações de Fisher de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning, for $B_0 = \sqrt{6}$ (linha contínua) e $B_0 = \sqrt{10}$ (linha tracejada). Nesta figura usamos $q = d = M = \hbar = V_0 = \nu = V' = 1$ e $B' = 6$.

A relação entre as incertezas e as entropias de Shannon foi obtida, assim como suas relações com os comprimentos de Fisher. Mostramos que para qualquer sistema descrito pela hamiltoniana (3.3), o produto dos comprimentos de Fisher possui um limite inferior menor do que o produto das incertezas em termos dos desvios-padrão.

Para finalizar, gostaríamos de ressaltar que a hamiltoniana (3.3), assim como as funções de onda (3.24) obtidas por nós, ainda não haviam sido exibidas na literatura.

Referências

- [1] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
- [2] I. I. Hirschman, *Am. J. Math.* **79**, 152 (1957).
- [3] R. Burrett, *Information and Control* **1**, 398 (1958).
- [4] R. Leipnik, *Information and Control* **2**, 64 (1959).
- [5] R. Leipnik, *Information and Control* **3**, 18 (1960).
- [6] C. Shannon, W. Weaver, *A Mathematical Theory of Communication*, Urbana, 1949.
- [7] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, *Comm. Math. Phys.* **44**, 129 (1975).
- [8] W. Beckner, *Ann. Math.* **102**, 159 (1975).
- [9] A. Rényi, in *Proceedings of the Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. Probability* (1961), reprinted in *Selected Papers of Alfréd Rényi*, edited by P. Durán (Akademia Kiado, Budapest, 1976) pp. 565–580.
- [10] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [11] B. D. Sharma and D. P. Mittal, *J. Math. Sci.* **10**, 28 (1975).
- [12] C. Beck, *Contemp. Phys.* **50**, 495 (2009).
- [13] I. Bialynicki-Birula, *Phys. Rev. A* **74**, 052101 (2006).
- [14] A. K. Rajagopal, *Phys. Lett. A* **205**, 32 (1995).
- [15] R. A. Fisher, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **22**, 700 (1925).
- [16] B.R. Frieden, *Phys. Rev. A* **41**, 4265 (1990).
- [17] B.R. Frieden, *Am. J. Phys.* **57**, 1004 (1989).
- [18] M. Casas, A. Plastino e A. Puente, *Phys. Lett. A* **248**, 161 (1998).

- [19] A. Puente, A. R. Plastino, M. Casas, F. Garcias e A. Plastino, *Phys. A* **277**, 146 (2000).
- [20] K. Berrada, S. Abdel-Khalek, e A.-S. F. Obada, *Phys. Lett. A* **376** (2012).
- [21] J. S. Dehesa, A. R. Plastino, P. Sánchez-Moreno e C. Vignat, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012).
- [22] I. Hornyák e Á. Nagy, *Chem. Phys. Lett.* **437** (2007).
- [23] E. Romera, P. Sánchez-Moreno J. S. e Dehesa, *Chem. Phys. Lett.* **414**, 468 (2005).
- [24] J. S. Dehesa, R. González-Férez e P. Sánchez-Moreno , *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1845 (2007).
- [25] E. Romera, P. Sánchez-Moreno e J. S. Dehesa, *J. Math. Phys.***47**, 103504 (2006).
- [26] P. Sánchez-Moreno, A. R. Plastino e J. S. Dehesa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065301 (2011).
- [27] R. J. Yáñez, W. Van Assche, and J. S. Dehesa, *Phys. Rev. A* **50**, 3065 (1994).
- [28] V. Majerník and T. Opatrný, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 2187 (1996).
- [29] A Ghasemi, M R Hooshmandasl and M K Tavassoly, *Phys. Scr.* **84**, 035007 (2011).
- [30] S. López-Rosa, J. Montero, P. Sánchez-Moreno, J. Venegas and J. S. Dehesa, *J. Math. Chem.* **49**, 971 (2011).
- [31] P. Sánchez-Moreno, A. R. Plastino and J. S. Dehesa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065301 (2011).
- [32] S. Abdel-Khalek, *Quant. Inf. Process.* **12**, 3761 (2013).
- [33] R. López-Ruiz and J. Sañudo, *Phys. Lett. A* **377**, 2556 (2013).
- [34] J. R. Choi, M. –S. Kim, D. Kim, M. Maamache, S. Menouar, I. H. Nahm, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1381 (2011).
- [35] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).

- [36] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **18**, 510 (1967).
- [37] H. R. Lewis, Jr., *J. Math. Phys.* **9**, 1976 (1968).
- [38] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev. A* **24**, 2873 (1981).
- [39] I. A. Pedrosa, G. P. Serra e I. Guedes, *Phys. Rev. A* **56**, 4300 (1997).
- [40] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- [41] E. Kanai, *Progr. Theoret. Phys.* **3**, 440 (1948).
- [42] V. Aguiar and I. Guedes, *Phys. Scr.* **90**, 045207 (2015).
- [43] S. F. Özeren, *J. Math. Phys.* **50**, 012902 (2009).
- [44] V. H. L. Bessa and I. Guedes, *J. Math. Phys.* **53**, 122104 (2012).
- [45] V. Aguiar and I. Guedes, *Phys. A* **401**, 159 (2014).
- [46] M. J. W. Hall, *Phys. Rev. A* **59**, 2602 (1999).
- [47] V. Aguiar and I. Guedes, *Phys. A* **423**, 72 (2015).
- [48] V. Aguiar, I. Guedes, and I. A. Pedrosa, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015**, 113A01 (2015).
- [49] J. P. G Nascimento, V. Aguiar e I. Guedes, *Phys. A* **477**, 65 (2017).
- [50] A. Dembo, T. M. Cover e J.A. Thomas, *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**, 1501 (1991).
- [51] J. P. G. Nascimento, F. A. P. Ferreira, V. Aguiar, I. Guedes e R. N. Costa Filho, *Phys. A*, **499**, 250 (2018).
- [52] R. N. Costa Filho, M.P. Almeida, G. A. Farias, J. S. Andrade Jr., *Phys. Rev. A* **84**, 050102 (2011).
- [53] R. N. Costa Filho, G. Alencar, B. -S. Skagerstam, J. S. Andrade Jr., *Eur. Phys. Lett.* **101**, 10009 (2013).
- [54] F. M. Penning, *Physica (Amsterdam)* **3**, 873 (1936).
- [55] V. Fock, *Z. Phys.* **47**, 446 (1928).

- [56] L. Landau, *Z. Phys.* **64**, 629 (1930).
- [57] C. G. Darwin, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **27**, 86 (1931).
- [58] E. H. Sondheimer and A. H. Wilson, *Proc. Roy. Soc. A* **210**, 173 (1951).
- [59] Feldman, A., and A. H. Kahn, *Phys. Rev. B* **1**, 4584 (1970).
- [60] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, *Theor. Math. Phys.* **6**, 51 (1971).
- [61] C. Farina and J. Gamboa, *Phys. Lett. A* **158**, 189 (1991).
- [62] P. E. de Brito and H. N. Nazareno, *Eur. J. Phys.* **28**, 9 (2007).
- [63] W. E. Milne, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **43**, 537 (1949).
- [64] E. Pinney, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, 681 (1950).
- [65] I. A. Malkin, V. I. Man'ko e D. A. Trifonov, *Phys. Lett. A* **30**, 414 (1969).
- [66] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, e D. A. Trifonov, *Phys. Rev. D* **2**, 1371 (1970).
- [67] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **58**, 721 (1970).
- [68] A. Holz, *Lett. N. Cim.* **4**, 1319 (1970).
- [69] A. S. Dutra e B. K. Chang, *Phys. Rev. A* **39**, 5897 (1989).
- [70] D. Schuch e M. Moshinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 6571 (2003).
- [71] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- [72] E. Kanai, *Progress on Theoretical Physics* **3**, 440 (1948).
- [73] M. Maamache, A. Bounames, e N. Ferkous, *Phys. Rev. A* **73**, 016101 (2006).
- [74] S. Menouar, M. Maamache, and J. R. Choi, *Phys. Scripta* **82**, 065004 (2010).
- [75] S. Menouar, M. Maamache, and J. R. Choi, *Ann. Phys.* **325**, 1708 (2010).
- [76] S. Menouar and J. R. Choi, *Ann. Phys.* **353**, 307 (2015).
- [77] C. Yüce, *Ann. Phys.* **308**, 599 (2003).
- [78] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55**, 3219 (1997).

- [79] I. A. Pedrosa, *J. Math. Phys.* **28**, 2662 (1987).
- [80] J. G. Hartley e J. R. Ray, *Phys. Rev. A* **24**, 2837 (1981).
- [81] V. P. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev* **20**, (9), 1 (1880).
- [82] Ł Rudnicki, P. Sánchez-Moreno, J.S. Dehesa, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 45, 225303 (2012).
- [83] E. Romera, *Mol. Phys.* 100, 3325 (2002).
- [84] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [85] F. M. Penning, *Physica (Amsterdam)* **3**, 873 (1936).
- [86] W. Paul and M. Raether, *Z. Phys.* **140**, 262 (1955).
- [87] R. J. Cook, D. G. Shankland and A. L. Wells, *Phys. Rev. A* **31**, 564 (1985).
- [88] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 527 (1991).
- [89] J.-Y. Ji, J. K. Kim, and S. P. Kim, *Phys. Rev. A* **51**, 4268 (1995).
- [90] M. Feng and K. L. Wang, *Phys. Lett. A* **197**, 135 (1995).
- [91] I. A. Pedrosa, A. Rosas and I. Guedes, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 7757 (2005).
- [92] T. Steimle, G. Alber, J. S. Briggs, *Z. Phys. D* **29**, 21 (1994).
- [93] S. Hacyan, *Phys. Rev. A* **53**, 4481 (1996).
- [94] O. Castaños et al, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 1227 (1998).
- [95] D. J. Fernandez and M. Velázquez, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 085304 (2009).
- [96] M. Kretzschmar, *Eur. J. Phys.* **12**, 240 (1991).
- [97] N. Russel, *J. Math. Phys.* **42**, 5315 (2001).
- [98] M. Kretzschmar, *Int. J. Mass Spectrom.* **275**, 21 (2008).
- [99] M. Breitenfeldt et al, *Int. J. Mass Spectrom.* **275**, 34 (2008).
- [100] G. Schrade, V. I. Manko, W. P. Schleich e R. J. Glauber, *Quantum Semiclassical Opt.* **7**, 307 (1995).

- [101] V. Aguiar, J. P. Nascimento e I. Guedes, *Int. J. Mass Spectrom.* **409**, 21 (2016).
- [102] F. G. Major, V. N. Gheorghe e G. Werth, *Charged Particle Traps: Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement*, Springer-Verlag, 2005.
- [103] M.M. Nieto e D.R. Truax, *N. J. Phys.* **2** (2000) 18.
- [104] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **35**, 667 (1930).
- [105] E. Schrödinger, *Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip*, Sitz. Preus. Acad. Wiss. (Phys.-Math. Klasse), **19**, 296 (1930) [Translated to Russian in Erwin Schrödinger. Selected papers on quantum mechanics, Moscow, 1976; translated to English – in Bulg. J. Phys. **26**, 193 (1999) (e-print quant-ph/9903100)].

Artigo publicados durante o período do doutorado

Diretamente relacionados à tese:

1. **V. Aguiar**, J. P. Nascimento e I. Guedes, *Int. J. Mass Spectrom.* **409**, 21 (2016).
2. **V. Aguiar** e I. Guedes, *J. Math. Phys.* **57**, 092103 (2016).

Indiretamente relacionados à tese:

1. **V. Aguiar** e I. Guedes, *Phys. A* **423**, 72 (2015).
2. **V. Aguiar**, I. Guedes, e I. A. Pedrosa, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015**, 113A01 (2015).
3. J. P. G Nascimento, **V. Aguiar** e I. Guedes, *Phys. A* **477**, 65 (2017).
4. J. P. G Nascimento, **V. Aguiar** e I. Guedes, *Phys. B*, **531**, 85 (2018).
5. J. P. G. Nascimento, F. A. P. Ferreira, **V. Aguiar**, I. Guedes e R. N. Costa Filho, *Phys. A*, **499**, 250 (2018).