



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

KEVIN MOTA AMARILO

EFEITOS DA VIOLAÇÃO ESPONTÂNEA DE LORENTZ NA PRODUÇÃO DE
ONDAS GRAVITACIONAIS

FORTALEZA

2019

KEVIN MOTA AMARILO

EFEITOS DA VIOLAÇÃO ESPONTÂNEA DE LORENTZ NA PRODUÇÃO DE ONDAS
GRAVITACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA
2019

KEVIN MOTA AMARILO

EFEITOS DA VIOLAÇÃO ESPONTÂNEA DE LORENTZ NA PRODUÇÃO DE ONDAS
GRAVITACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 13/02/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dr. Davi Monteiro Dantas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A521e Amarello, Kevin Mota .
 Efeitos da Violação Espontânea de Lorentz na Produção de Ondas Gravitacionais / Kevin Mota
 Amarello. – Fortaleza, 2019.
 72 f.:il. color.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2019.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

Coorientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

1. Violação de Lorentz. 2. Ondas Gravitacionais. 3. Gráviton. 4. Modelo Bumblebee. I. Título.

CDD 530

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por me darem todo o suporte, amor e força desde sempre. Meu pai e minha mãe são meus modelos, sem eles nunca conseguiria ir tão longe.

Ao Prof. Roberto V. Maluf, por me orientar no meu mestrado e me ajudar na produção dessa pesquisa.

Ao grande amigo, Mapse (Mapin), que conheci na graduação e segue sendo uma figura importante para mim, tanto como parceiro como colega de pesquisa.

Aos meus amigos, em especial aos meus colegas de sala Jefferson (Jeffy) e Adailton (Toroso), por dividirem comigo vários momentos memoráveis e importantes na minha existência.

À todos os membros do LASSCO, pelas conversas, discussões e suporte.

À CAPES, pelo suporte financeiro durante esses dois anos.

À todos os Professores que eu tive na vida por se empenharem a passar o que há de mais importante na vida, o conhecimento.

RESUMO

Nesse trabalho, será apresentado os efeitos da quebra espontânea da simetria de Lorentz sobre a produção de ondas gravitacionais. Inicialmente, uma revisão sobre a relatividade geral, violação de Lorentz e ondas gravitacionais será discutida. Em seguida a equação de movimento para o campo do gráviton modificada pela presença do campo bumblebee é determinada. Utilizando o método das funções de Green, nós determinamos a solução da equação modificada do gráviton na presença de fontes externas. Considerando que a fonte tem movimento lento, foi derivada uma nova fórmula de termo de quadrupolo. Por fim, o problema do sistema binário em órbita circular será utilizado para ilustrar as diferenças entre o modelo proposto e a teoria usual.

Palavras-chave: Violação de Lorentz. Ondas Gravitacionais. Gráviton. Modelo Bumblebee.

ABSTRACT

In this work, we will present the effects of the spontaneous Lorentz symmetry breaking on the production of gravitational waves. First, we review some topics such as general relativity, Lorentz violation and gravitational waves. Then the equation of motion for graviton's field is modified by the presence of the bumblebee field. Using the Green's function method, we develop the solutions of the modified equation in the presence of external sources. Considering that the source has slow motion we derive a new quadrupole formula. Finally, we use the binary system in circular orbit problem to analyze the differences between the proposed model and the usual theory.

Keywords: Lorentz Violation. Gravitational Waves. Graviton. Bumblebee Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Potencial chapéu de mexicano. Os pontos G1 e G2 representam os dois estados fundamentais.	17
Figura 2 – Exemplo de uma transformação de coordenadas por uma rotação (a) Transformação de partícula e (b) Transformação de observador.	21
Figura 3 – Ilustração do Princípio da Equivalência. Os dois referenciais são localmente indistinguíveis.	23
Figura 4 – Estados de polarização da onda gravitacional (a) Polarização <i>plus</i> e (b) Polarização <i>cross</i>	41
Figura 5 – Sistema binário efetuando órbitas circulares.	45
Figura 6 – Representação do plano complexo, polos e caminho de integração.	66

LISTA DE SÍMBOLOS

B^μ	Campo Bumblebee
\mathcal{L}	Densidade Lagrangiana
g	Determinante da métrica
R	Escalar de curvatura
γ	Fator de Lorentz
μ	Massa Reduzida
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$h_{\mu\nu}$	Pertubação do espaço de Minkowski
P_{ij}	Projeter transversal
$\mathcal{P}_{ij,kl}$	Projeter transversal sem traço
$\Gamma_{\nu\mu}^\rho$	Símbolo de Christoffel
t_r	Tempo retardado
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor de Energia-momento
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R^\rho_{\mu\lambda\nu}$	Tensor de Riemman
I_{ij}	Tensor momento de quadrupolo
s_{ij}	Tensor <i>strain</i>
e_μ^a	Tetrada ou <i>vierbein</i>

LISTA DE SIGLAS

LIGO	Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
LISA	Laser Interferometer Space Antenna
LV	<i>Lorentz Violation</i> /Violação de Lorentz
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
RG	Relatividade Geral
RR	Relatividade Restrita
TQC	Teoria Quântica de Campos
TT	<i>Transverse Traceless</i> /Transverso sem Traço
VEV	Valor Esperado no Vácuo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Ondas gravitacionais: Um breve histórico	13
1.2	Gravitação quântica	13
1.3	Notação	14
1.4	Organização do Trabalho	14
2	VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS CPT E LORENTZ	16
2.1	Violação de Simetria	16
2.2	Simetria CPT	17
2.3	Simetria de Lorentz	17
2.3.1	Postulados da Relatividade Especial	17
2.3.2	Intervalo Espaço-Temporal, o invariante da RR	18
2.3.3	As Transformações e o Grupo de Lorentz	19
2.3.4	Violação da Simetria de Lorentz	21
3	RELATIVIDADE GERAL E VIOLAÇÃO DE LORENTZ	23
3.1	O Princípio da Equivalência e os Espaços Curvos	23
3.2	A Ação de Einstein-Hilbert e a Equação de Einstein	24
3.3	Violação de Lorentz na Gravidade	27
3.3.1	Violação Explícita <i>versus</i> Espontânea	29
3.3.2	O Modelo Bumblebee	30
4	TEORIA PERTURBATIVA E RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	32
4.1	Teoria Perturbativa e Linearização da Equação de Einstein	32
4.2	Invariância de <i>Gauge</i>	33
4.3	Graus de Liberdade	34
4.4	Ondas Gravitacionais	37
4.5	Polarizações das Ondas Gravitacionais	40
4.6	Produção de Ondas Gravitacionais	42
4.7	Radiação Gravitacional Emitida por um Sistema Binário em Órbita Circular	45
5	EFEITOS DA VIOLAÇÃO DE LORENTZ NA PRODUÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS	49
5.1	Modificando a Relação de Dispersão do Gráviton	49
5.2	Produção de Ondas Gravitacionais na Presença do Campo Bumblebee	50
5.3	Modificações na Radiação emitida pelo Sistema Binário em Órbita Circular	54

6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	56
	APÊNDICE A – EQUAÇÕES E TENSORES IMPORTANTES NA RE-	
	LATIVIDADE GERAL	58
A.1	Conexão Afim e a Derivada Covariante	58
A.2	Curvatura	59
A.3	Identidade de Bianchi	60
	APÊNDICE B – A DINÂMICA DO CAMPO BUMBLEBEE E A LA-	
	GRANGIANA QUE GERA A VIOLAÇÃO DE LORENTZ	61
	APÊNDICE C – DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN UTILIZADAS	64
C.1	Função de Green Retardada	64
C.2	Funções de Green para as Equações Modificadas	67
C.2.1	Caso $b_\mu = (b_0, \mathbf{0})$	68
C.2.2	Caso $b^\mu = (0, \mathbf{b})$	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

1.1 Ondas gravitacionais: Um breve histórico

A Teoria da Relatividade Geral foi formulada por Albert Einstein em 1915 com o intuito de substituir a teoria clássica de gravitação formulada por Isaac Newton, o principal motivo por trás da mudança, foi a incompatibilidade da teoria de Newton com a Relatividade Restrita.

Devido a semelhança entre a teoria eletromagnética e a relatividade geral linearizada, Einstein considerou a existência de ondas gravitacionais em 1918 onde também demonstrou a sua natureza quadrupolar [1]. Posteriormente a provável existência foi explorada por outros cientistas, a exemplo de Eddington, que analisou a sua propagação, demonstrando que a radiação se propaga na velocidade da luz da mesma forma que uma radiação eletromagnética [2].

Somente depois de muitos anos, na década de 60, que a procura pela detecção das ondas foi iniciada [3]. O motivo da demora era o fato do aparato experimental não ter sensibilidade para tais medidas, a amplitude da radiação gravitacional é da ordem de 10^{-21} .

A primeira comprovação experimental das ondas foi dada pelo binário de Hulse-Taylor descoberto em 1975 [4]. Esse binário, formado por uma estrela de nêutrons e um pulsar, estava lentamente diminuindo a sua órbita, dessa forma deveria estar emitindo radiação gravitacional e perdendo energia [5].

A primeira detecção direta foi feita em 2015 pelo LIGO [6]. Foram utilizados grandes interferômetros parecidos com interferômetros de Michelson [7], que conseguiram medir a radiação resultante da fusão de dois buracos negros. Em 2017, uma identificação ondas gravitacionais provenientes da fusão de um binário de duas estrelas de nêutrons denominado de GW170817 foi feita pelo LIGO e pelo VIRGO [8], que em conjunto com o telescópio Fermi-GBM, evidenciaram que esse tipo de fusão emitem erupções de raios gama¹.

1.2 Gravitação quântica

A teoria da Relatividade geral é formulada como uma teoria clássica de campos, em contrapartida, as outras forças fundamentais da natureza são descritas no contexto da teoria quântica de campos. O problema na quantização da gravitação reside no fato das prescrições utilizadas para quantizar um campo clássico tornarem a teoria não normalizável, assim não é possível uma interpretação probabilística essencial em uma teoria quântica.

¹do inglês, *Gamma-Ray Burst (GRB)*

Dessa forma, existem várias teorias que tentam quantizar a gravidade, algumas, como a teoria das cordas, têm o objetivo de unificar as quatro forças fundamentais da natureza, outras apenas tentam quantizar a gravidade, a exemplo da gravitação Quântica em Laços.

Observações experimentais diretas da teoria gravitação quântica só podem ser feitas em níveis de energia na ordem da escala de Planck, esse fato se revela um problema enorme para o teste de tais teorias. Diversos físicos especulam formas de teste em baixas energias, dentre esses é possível citar a Violação de Lorentz e as deformações da relatividade especial, a Ref. [9] cita esses e outros exemplos.

1.3 Notação

A notação utilizada nesse trabalho, a menos que especificado o contrário, segue o seguinte padrão:

- Os índices latinos em minúsculo, como exemplo i, j e k , variam sobre as três coordenadas espaciais, geralmente 1, 2 e 3 ou x, y e z ;
- Os índices gregos em minúsculo, como exemplo μ, ν e λ , variam sobre as 4 coordenadas do espaço-tempo;
- A métrica para um sistema de coordenadas inercial é a métrica de Minkowski, cuja diagonal é $(-1, +1, +1, +1)$, a menos quando especificado o contrário;
- Será adotada a convenção de Einstein para soma, onde os índices repetidos indicam uma soma implícita;
- Serão adotadas unidades naturais em que a velocidade da luz e a constante de Planck e a constante de Boltzmann são iguais a unidade.

1.4 Organização do Trabalho

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo dois, serão discutidos as simetrias CPT e de Lorentz e sua relação, conceitos gerais de violação de simetria serão abordados, o caso da violação de Lorentz (LV) será abordado após a discussão sobre a simetria de Lorentz. As diferenças entre as transformações de partículas serão abordadas.

No capítulo três, o paralelo entre a violação de Lorentz e a Relatividade Geral (RG). A discussão será iniciada com uma breve discussão sobre o princípio da equivalência. A ação de Einstein-Hilbert será apresentada como uma forma para encontrar a equação de Einstein, por

fim, a violação de Lorentz será discutida com uma maior profundidade seguido da apresentação do modelo Bumblebee.

No capítulo quatro, a teoria de Einstein será linearizada, a equação de Einstein linearizada será deduzida. A discussão sobre a invariância de *gauge* para a teoria linearizada e a análise dos graus de liberdade culminarão na escolha de *gauges* que possam simplificar a equação linearizada. A finalização será dada com a discussão dos modos de polarização da radiação gravitacional e sua produção, que será ilustrada com o exemplo de um binário traçando uma órbita circular.

No capítulo cinco, será adicionado um termo que viola a simetria de Lorentz na ação de Einstein-Hilbert, levando a uma mudança na equação de movimento do gráviton. Soluções para a equação de onda modificada com fonte serão encontradas e suas características será discutidas, será aplicado o problema do binário para comparação com a teoria usual.

No capítulo seis serão apresentadas a conclusão do trabalho e as perspectivas.

2 VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS CPT E LORENTZ

Nesse capítulo serão discutidas as simetrias CPT e de Lorentz e os efeitos de suas violações. As transformações de observador e de partícula, bem como os conceitos de quebra espontânea e explícita serão explorados de forma a demonstrar suas características básicas.

2.1 Violação de Simetria

A violação ou quebra de simetria é um processo no qual uma simetria do sistema é violada, levando ao sistema assumir algum estado determinado por flutuações de um campo de fundo. Como um exemplo simples é possível imaginar uma bússola, que possui uma simetria na qual pode apontar para qualquer direção, o campo magnético da Terra age como um campo de fundo que “escolhe” a direção para onde a bússola aponta.

Esse fenômeno está intimamente ligado a processos randômicos como a formação de padrões [10]. De fato, para um observador ignorante às flutuações do campo de fundo, o estado assumido pelo sistema aparenta ser arbitrário.

Uma simetria pode ser quebrada de duas formas:

- **Violação explícita de simetria:** Nesse caso as equações de movimento não são invariantes com relação ao grupo de simetria considerado. A quebra de simetria se dá introduzindo à Lagrangiana da teoria termos que violam a simetria (por isso chamado de quebra explícita). A gravitação de Chern-Simons [11] e o caso da interação fraca, que viola a simetria de paridade [12]
- **Violação espontânea de simetria:** Ocorre quando as equações de movimento são invariantes ao grupo de simetria, porém o estado de vácuo não o é. Dessa forma, os termos da Lagrangiana que geram esse tipo de quebra não violam a simetria. Como exemplo temos o mecanismo de Higgs [13], que explica como os bósons adquirem massa.

Na TQC, o caso mais simples onde há uma quebra de simetria é considerando um campo escalar φ com uma Lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi \varphi^* - \frac{1}{4} \lambda (\varphi \varphi^*)^2. \quad (2.1)$$

Considerando que $m^2 < 0$, observa-se o potencial conhecido como chapéu de mexicano (Figura 1), o estado de vácuo que possui a simetria $\varphi \rightarrow -\varphi$ representa um ponto instável, além disso existem dois mínimos de potencial em $\pm \sqrt{-m/\lambda}$. Em qualquer um desses pontos, a simetria é quebrada.

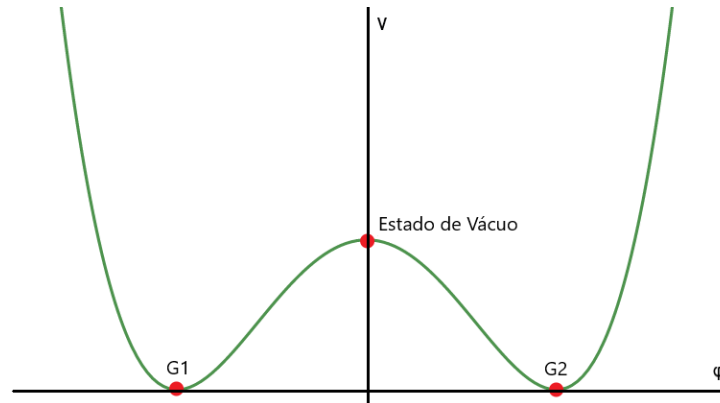


Figura 1: Potencial chapéu de mexicano. Os pontos G1 e G2 representam os dois estados fundamentais.

2.2 Simetria CPT

A simetria CPT é resultado do teorema homônimo, que enuncia que existe uma simetria discreta que conjuga a carga (C), espelha o espaço (P), e reverte o tempo (T) conjuntamente. Apareceu inicialmente no trabalho de Julian Schwinger [14] onde mostrou que a invariância sob reversão temporal explicava a conexão entre o spin e a estatística das partículas.

O teorema CPT um resultado muito conhecido na literatura e é baseado na suposição de que a teoria é invariante de Lorentz. Para um maior esclarecimento, é recomendado a referência [15] e [16] para uma prova mais rigorosa.

A princípio, imaginava-se que as três simetrias eram satisfeitas isoladamente, porém foi demonstrado experimentalmente que o decaimento beta viola a simetria de paridade [17], foi proposto que o conjunto CP pudesse ser invariante. Mais uma vez, foi descoberto que partículas chamadas *kaons*, violavam a simetria CP [18].

Nesse contexto, embora ainda não existam evidências experimentais, é possível imaginar que a simetria CPT também pode ser violada. Já foi demonstrado que tal quebra possa acontecer no contexto da teoria das cordas [19]. Como, de acordo com o teorema CPT, a invariância de Lorentz leva à invariância CPT, observa-se que uma quebra da simetria CPT implica em uma quebra de simetria de Lorentz [20].

2.3 Simetria de Lorentz

2.3.1 Postulados da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial ou Restrita (RR) foi proposta por Albert Einstein [21]. Antes de sua formulação, foi descoberto que as leis do Eletromagnetismo não respeitava as transformações de Galileu

Considerando dois referenciais S e S', e considerando que S' se move em relação a

S com velocidade v , as transformações de Galileu são definidas como

$$x' = x + vt \quad t' = t. \quad (2.2)$$

De fato, a equação de onda não é invariante com relação a esse tipo de transformação. Uma transformação que tornava a equação de onda invariante para os referenciais foi proposta por Lorentz, que receberam o nome de seu criador. Nessa época, era proposto a teoria do éter, no qual haveria um fluido chamado éter luminífero que permeava o espaço serviria de meio no qual a radiação eletromagnética se propagaria.

A partir de dois postulados simples, Einstein foi capaz de derivar as transformações de Lorentz, os chamados de postulados da RR:

1. As leis físicas são invariantes em todos os referenciais inerciais;
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento da fonte de luz.

Vários experimentos comprovaram as ideias propostas pela RR, o mais conhecido é o experimento de Michelson–Morley [22], que comprovou que a velocidade da luz era invariante, descartando a possibilidade do éter luminífero.

Foi uma teoria revolucionária, que mudou a forma como o espaço e o tempo eram tratados, passando a ser indissociáveis como uma única entidade, o espaço-tempo. Foi descoberto que havia uma velocidade limite para objetos físicos, a velocidade da luz, e a relação entre a massa e energia explicitada na famosa equação $E = mc^2$ foram algumas das novidades providas por essa teoria.

O nome especial ou restrita é dado pelo fato da teoria apenas dar conta de referenciais inerciais, ou seja, que não estão sob ação de um campo gravitacional, a Relatividade Geral foi desenvolvida posteriormente, para dar conta desses tipos de experimentos.

2.3.2 Intervalo Espaço-Temporal, o invariante da RR

Com a adoção do espaço-tempo, temos uma nova forma de descrever os eventos, na qual trata o tempo em pé de igualdade com o espaço, deixando de ser uma quantidade absoluta e podendo se transformar em mudanças de coordenadas em referenciais inerciais. A única quantidade absoluta na descrição da RR é a velocidade da luz.

É muito importante encontrar uma quantidade que é invariante sob transformações de coordenadas. No espaço euclidiano tridimensional, a distância entre dois pontos é o invariante

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3)$$

Em contraste com (2.3), no espaço tempo há o intervalo espaço-temporal, que mede a “distância” entre dois eventos no espaço-tempo

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

É possível escrever o intervalo de maneira mais compacta:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

em que a quantidade

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

é chamada de métrica de Minkowski, também usada na definição do vetor dual $X_\nu = \eta_{\mu\nu} X^\mu$, podendo escrever o produto escalar $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$, dentre outras aplicações.

2.3.3 As Transformações e o Grupo de Lorentz

Agora, é possível considerar transformações de coordenada que deixam o intervalo (2.4) invariante. As transformações lineares podem ser agrupadas em uma matriz de forma que a mudança de uma coordenada para outra é

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu. \quad (2.6)$$

Para manter a Eq. (2.4) invariante, deve-se ter $ds^{2'} = ds^2$ assim

$$\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\sigma} dx^\sigma \Lambda^{\nu'}_{\rho} dx^\rho = \eta_{\sigma\rho} dx^\sigma dx^\rho$$

, por fim obtém-se

$$\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\sigma} \Lambda^{\nu'}_{\rho} = \eta_{\sigma\rho}, \quad (2.7)$$

ou, em notação matricial

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (2.8)$$

As transformações que satisfazem (2.7) são chamadas de transformações de Lorentz, e o conjunto das transformações de Lorentz formam um grupo conhecido como grupo de Lorentz. Geralmente, não há interesse nas transformações de reversão temporal e de paridade, dessa forma demanda-se que o $|\Lambda| = 1$, definindo o grupo próprio de Lorentz $SO(3, 1)$. Porém, observa-se que o conjunto de uma reversão temporal e uma transformação de paridade também satisfaz a restrição imposta no determinante. Novamente impõe-se outra restrição: $\Lambda^0_0 \geq 1$,

que define o grupo de Lorentz restrito $SO(3,1)^\uparrow$.

Como exemplo de transformações de Lorentz simples, há as rotações no plano x-y

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E um *boost* na direção x:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um *boost* é uma transformação de coordenadas entre referenciais com velocidade constante em relação um ao outro, o parâmetro ϕ varia de $-\infty$ a ∞ , para obter a forma dependente da velocidade procede-se

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \phi - t \sinh \phi \\ t' &= t \cosh \phi - x \sinh \phi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

tomando $x' = 0$, têm-se

$$v = \frac{x}{t} = \tanh \phi \Rightarrow \phi = \tanh^{-1} v. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) em (2.9)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ é conhecido como fator de Lorentz.

Vale ressaltar que as translações, definidas como

$$x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_\nu (x^\nu + a^\nu), \tag{2.12}$$

em que a^ν é uma constante, também mantém o intervalo invariante. O grupo de simetria que incorpora o conjunto das translações e as transformações de Lorentz é chamado de grupo de Poincaré.

2.3.4 Violação da Simetria de Lorentz

Atualmente, há uma investigação extensa em uma teoria que descreva os efeitos gravitacionais e as partículas elementares, a chamada teoria da gravitação quântica. É suposto que os efeitos de tal teoria só são apreciáveis em escalas de energia na ordem da escala de Planck (10^{19} GeV), de forma que ainda não há aparato experimental disponível, dificultando as formas de testar a teoria.

A procura de efeitos que possam ser observáveis em baixas energias é uma forma de testar as teorias propostas. Um desses efeitos é a violação da simetria de Lorentz, que inicialmente foi proposta no contexto da teoria das cordas [23] e é suportada por diversos modelos, como na teoria de campos não-comutativos [24], Gravitação Quântica em Laços [25] e modelos com dimensões extra [26].

Foi desenvolvido um aparato teórico para investigações dos efeitos da Violação de Lorentz conhecido como Modelo Padrão Estendido (MPE) [27, 28, 29]. No MPE campos de fundo fixos se acoplam com os campos gravitacionais e de matéria gerando a quebra de simetria.

Além da motivação teórica, algumas observações experimentais podem levar a violação da simetria de Lorentz, como é o caso da observação de raios cósmicos além do limite GZK¹ que pode ser explicado por uma quebra espontânea de simetria de Lorentz [31].

Quando trata-se de uma teoria com campos fixos (que quebra a simetria de Lorentz) é necessário fazer uma distinção entre dois tipos de transformações de coordenadas (Figura 2):

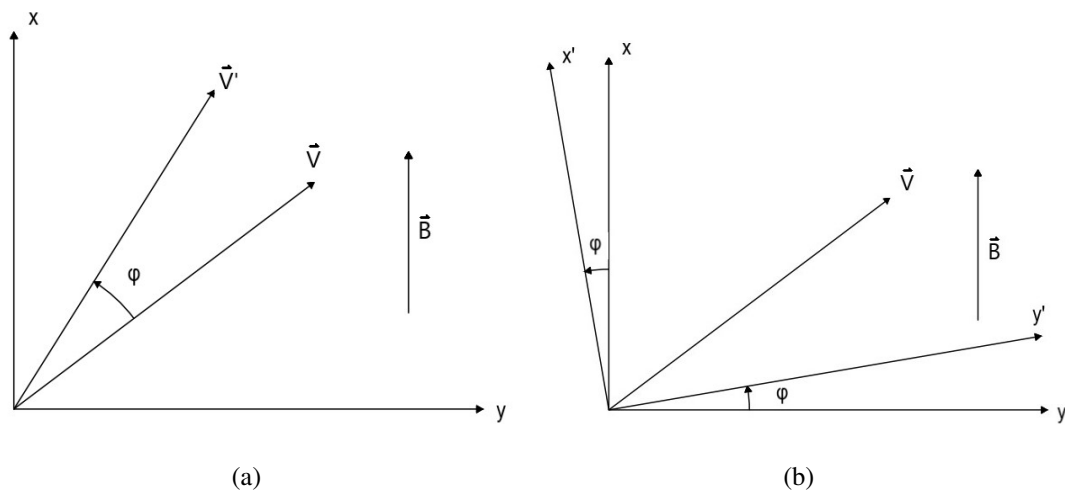


Figura 2: Exemplo de uma transformação de coordenadas por uma rotação (a) Transformação de partícula e (b) Transformação de observador.

- **Transformações de Partícula:** Os campos dinâmicos variam e tanto os campos de fundo como o sistema de coordenada se mantém invariante, de forma é possível fazer uma

¹O limite GZK (Greisen-Zatsepin-Kuzmin) impõe um limite na detecção de um raio cósmico intergaláctico [30]

analogia a uma rotação ativa.

- **Transformações de Observador:** Todos os campos(dinâmicos e de fundo) se mantêm intactos, enquanto o sistema de coordenada é mudado, é análogo a uma rotação passiva.

Quando a simetria é quebrada, temos que essas transformações não são equivalentes, e a ação deixa de ser invariante sob transformações de partícula. Mais aspectos da violação de Lorentz serão apresentados no Capítulo 3, no contexto da Relatividade Geral.

3 RELATIVIDADE GERAL E VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Nesse capítulo serão discutidos a ação de Einstein-Hilbert e a Equação de Einstein. A violação de Lorentz será explorada no contexto dos espaços curvos, onde serão dados detalhes da escolha do tipo de quebra de simetria (explícita ou espontânea) e do modelo bumblebee.

3.1 O Princípio da Equivalência e os Espaços Curvos

O Princípio da Equivalência foi ideia crucial que deu origem a Relatividade Geral (RG), pois a partir dele é expressado a universalidade da interação gravitacional. O mesmo vêm em duas formas. A primeira, chamada de Princípio da Equivalência fraco, expressa a equivalência entre a massa inercial e a massa gravitacional¹, que a primeira vista, não possuem necessariamente uma conexão. A segunda forma incorpora o principio fraco com o conhecido como Princípio da Equivalência de Einstein, formando o Princípio da Equivalência forte.

O Princípio da Equivalência de Einstein enuncia que é impossível detectar a existência de um campo gravitacional, por experimentos locais. Para ilustrar o princípio Einstein propôs um *gedanken*² onde, um observador colocado em uma caixa sem poder ver há fora da mesma, caso sentisse uma atração para uma direção, seria incapaz de inferir se era uma atração gravitacional, ou se a caixa estaria acelerando (Figura 3).

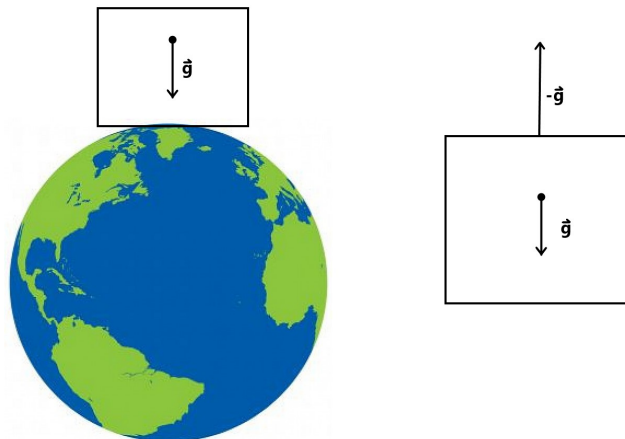


Figura 3: Ilustração do Princípio da Equivalência. Os dois referenciais são localmente indistinguíveis.

A partir dessas ideias, tem-se que a gravitação é inescapável, no sentido que não há ente físico que seja neutro a essa interação, de forma que descreverão a mesma curva no

¹Foi primeiramente observado por em seus experimentos em planos inclinados.

²Vem da palavra alemã *gedankenexperiment* ou experimento mental

espaço-tempo, não importando sua massa (ou ausência). Além disso, o espaço-tempo deixa de ser um espaço *flat* o qual coordenadas globalmente inerciais podem ser criadas, e se torna uma variedade diferenciável com uma curvatura associada e é definido um sistema de coordenadas localmente inercial.

3.2 A Ação de Einstein-Hilbert e a Equação de Einstein

A Equação de Einstein equação de campo usada para encontrar a métrica espaço-tempo a partir do tensor de energia-momento ($T_{\mu\nu}$), que resume todos os aspectos ligados à energia de um sistema. É possível encontrá-la variando a ação

$$S = S_{EH} + S_M, \quad (3.1)$$

em que S_M é a ação do campo de matéria e S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert definida como

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^n x \sqrt{-g} R, \quad (3.2)$$

em que g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci, $\kappa^2 = 32\pi G$.

Para resolver encontrar as equações de movimento, utiliza o princípio da mínima ação ($\delta S = 0$). Variando a ação (3.2), obtem-se

$$\delta S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \left[\underbrace{\int d^n x \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_{\delta S_1} + \underbrace{\int d^n x \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}}_{\delta S_2} + \underbrace{\int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}}_{\delta S_3} \right]. \quad (3.3)$$

Com o objetivo de deixar a ação variada em função de $\delta g^{\mu\nu}$, deve-se resolver cada um dos $\delta S'_s$. Procedendo com inicialmente com δS_1

$$\delta S_1 = \int d^n x \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

deve-se encontrar o valor de $\delta\sqrt{-g}$, para tal

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g. \quad (3.5)$$

Usando a identidade $\ln[\det(M)] = \text{Tr}[\ln M]$ e fazendo a variação dos dois lados

$$\frac{\delta(\ln \det(M))}{\det M} = \text{Tr}(M^{-1} \delta M). \quad (3.6)$$

Substituindo $M = g_{\mu\nu}$ em (3.6),

$$\begin{aligned}\frac{\delta g}{g} &= g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \\ \delta g &= g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

É necessário encontrar uma relação entre a variação $\delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta g^{\mu\nu}$. Utilizando a relação $g^{\mu\nu} g_{\nu\beta} = \delta_{\beta}^{\mu}$,

$$\begin{aligned}\delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\beta}) &= 0 \\ \delta(g^{\mu\nu}) g_{\nu\beta} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\beta} &= 0 \\ g_{\mu\alpha} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\beta} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta(g^{\mu\nu}) \\ \delta g_{\alpha\beta} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) e (3.7) em (3.5)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{(-g)g_{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} \delta g_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\quad (3.9)$$

Finalmente substituindo (3.9) em (3.4)

$$\delta S_1 = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}.\quad (3.10)$$

O termo δS_2 já está numa forma conveniente, portanto seguindo com δS_3 é necessário encontrar $\delta R_{\mu\nu}$, para tal, partindo do tensor de Riemann

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda} \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}.$$

Faz-se sua variação

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda} (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} + \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \partial_{\nu} (\delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \delta \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}.\quad (3.11)$$

Agora, subtraindo e somando $\delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}$ e reorganizando os termos de forma conveniente

$$\begin{aligned}\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} &= [\partial_{\lambda} (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}] - \\ &\quad - [\partial_{\nu} (\delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}) + \delta \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \delta \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}].\end{aligned}\quad (3.12)$$

Como $\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$ é uma subtração de duas conexões, é um tensor (assim como o tensor de torção) e, portanto, é possível definir sua derivada covariante

$$\nabla_{\lambda} (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) = \partial_{\lambda} (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) + \delta \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}.\quad (3.13)$$

Enfim, substituindo (3.13) em (3.12), obtém-se

$$\delta R^\rho_{\mu\lambda\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu}). \quad (3.14)$$

Dessa forma, a variação do tensor de Ricci é

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}). \quad (3.15)$$

Utilizando a expressão de δS_3 e substituindo (3.15)

$$\begin{aligned} \delta S_3 &= \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu})] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma J^\sigma \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por fim, aplicando o teorema de Stokes, (3.16) se torna

$$\delta S_3 = \int_\Sigma d^n x \sqrt{-g} \nabla_\sigma J^\sigma = \int_{\partial\Sigma} d^{n-1} x \sqrt{|\gamma|} \eta_\sigma J^\sigma. \quad (3.17)$$

No caso, para calcular esse termo, leva-se em consideração as condições de contorno no infinito, os quais podem ser consideradas iguais a zero. Portanto $\delta S_3 = 0$ e não contribui na variação da ação de Einstein-Hilbert.

Finalmente é possível substituir os termos encontrados em (3.3)

$$\delta S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^n x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Voltando para (3.1) sabe-se que a variação funcional da ação satisfaz

$$\delta S = \int d^n x \sum_i \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i \right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = 0, \quad (3.19)$$

em que Φ^i é o conjunto dos campos sendo variados, no caso da ação (3.1), apenas o campo $g^{\mu\nu}$ está sendo variado, dessa forma, a variação da ação (3.1) implica em

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (3.20)$$

Por fim, definindo o tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.21)$$

pode-se reescrever (3.20) na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

Que é conhecida como Equação de Einstein. O tensor definido pelo no lado direito da equação e denotado por $G_{\mu\nu}$ é chamado de tensor de Einstein

A equação de Einstein é um conjunto de 10 equações diferenciais de segunda ordem do campo tensorial $g_{\mu\nu}$ (visto que é simétrico). A identidade de Bianchi contraída $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ representa 4 restrições sobre $R_{\mu\nu}$, dessa forma, existem seis equações diferenciais independentes na Equação de Einstein. Assim se uma métrica $g_{\mu\nu}$ é solução de (3.22) então fazendo uma transformação de coordenadas, a nova métrica $g'_{\mu\nu}$ também será solução de (3.22). Dessa forma, é possível especificar univocamente a métrica com a equação de Einstein e especificando um sistema de coordenadas.

São equações diferenciais extremamente complicadas, principalmente pelo fato de serem não-lineares. Assim, não é possível encontrar novas soluções a partir de superposição, tornando difícil a busca por soluções analíticas com alguma generalidade. Geralmente, utiliza-se suposições que simplificam as equações, como impor algum tipo de simetria na métrica.

A não-linearidade das Equações de Einstein é um reflexo de sua auto-interação, e é a principal diferença da teoria Newtoniana, que é linear, as discrepâncias se tornam mais aparentes quanto mais forte é o campo gravitacional, e é o motivo por trás da precessão do periélio de Mercúrio, que é explicável pela RG.

Por fim, vale mencionar a conhecida dificuldade em conciliar a RG com a mecânica quântica. As tentativas usuais de quantizar a RG esbarram em dificuldades principalmente por se tornar uma teoria não-renormalizável, e assim, é uma sugestão de que a teoria só pode ser considerada até certa escala de energia.

3.3 Violação de Lorentz na Gravidade

Quando se trata de teorias gravitacionais e a violação de Lorentz, o formalismo de Cartan é utilizado, pois facilita o tratamento de férmions em espaços curvos. O objeto principal desse formalismo é o *vierbein* ou tetrada e_μ^a , que conecta um tensor covariante do espaço-tempo $T_{\mu\nu\lambda\dots}$ a um tensor covariante $T_{abc\dots}$ ³ no espaço inercial local

$$T_{\mu\nu\lambda\dots} = e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c T_{abc\dots}, \quad (3.23)$$

a existência dessa conexão implica também que a uma quebra de Lorentz leva a uma quebra de difeomorfismo [32]. Um difeomorfismo é uma transformação de partícula, nos quais os

³Nesse caso, os índices latinos estão sendo utilizados para representar as coordenadas do espaço inercial local

mapeamentos $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ levam às transformações nos campos dinâmicos

$$T_{\mu\nu\lambda\dots} \rightarrow T_{\mu\nu\lambda\dots} + \mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu\lambda\dots}. \quad (3.24)$$

A quebra de simetria de Lorentz é levada em conta na teoria com a adição de um termo na ação que pode quebrar espontaneamente ou explicitamente

$$S = S_{EH} + S_M + S_{LV}. \quad (3.25)$$

O terceiro termo da ação S_{LV} , que quebra a simetria de Lorentz por meio de um campo de fundo k_χ , onde χ denota os índices do espaço-tempo desse tensor, possui a forma

$$S_{LV} = \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{LV}(g_{\mu\nu}, f^\psi, k_\chi). \quad (3.26)$$

Além de depender de k_χ a ação também depende da métrica e dos campos de matéria denotados por f^ψ . Os outros termos da ação já foram tratados na Seção 3.2, porém vale salientar que S_M depende apenas de $g_{\mu\nu}$ e f^ψ e possui a forma

$$S_M = \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, f^\psi). \quad (3.27)$$

Quanto as transformações de observador, todos os termos da ação são invariantes. Todos os campos ($g_{\mu\nu}$, f^ψ e k^χ) se transformam segundo a (3.24). Porém quando é considerada uma transformação de partícula, o termo S_{LV} não é invariante, isso ocorre porque o campo k_χ se mantém fixo ($k_\chi \rightarrow k_\chi$), em contraste com os outros campos da teoria.

Se a quebra de simetria é espontânea, os termos da ação que geram a simetria são invariantes. k_χ possui equações de movimento dessa forma, a variação da ação obedece

$$\int d^n x \sqrt{-g} \frac{\delta S_{LV}}{\delta k_\chi} \delta k_\chi = 0, \quad (3.28)$$

quando os outros campos vão aos seus valores de vácuo.

Quando a quebra é explícita, a ação não é mais invariante sob o grupo de Lorentz, portanto o campo k_χ , não representa um campo dinâmico, ou seja, não possuem equações de movimento e portanto

$$\int d^n x \sqrt{-g} \frac{\delta S_{LV}}{\delta k_\chi} \delta k_\chi \neq 0. \quad (3.29)$$

3.3.1 Violação Explícita *versus* Espontânea

No contexto gravitacional, a LV pode ser tanto Explícita como Espontânea⁴ e existem teorias que fazem o uso dos dois tipos de quebra de simetria. Utilizando a ação (3.25), é possível demonstrar uma inconsistência entre a quebra explícita e a RG.

Partindo de (3.26), e fazendo uma variação funcional com respeito a $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\delta S_{LV} &= \int d^n x \sqrt{-g} \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} T_{LV}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (3.30)$$

definindo a quantidade $T_{LV}^{\mu\nu}$ em analogia ao tensor de energia-momento. A variação de (3.25) leva a Equação de Einstein modificada na forma

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G(T_M^{\mu\nu} + T_{LV}^{\mu\nu}).\quad (3.31)$$

É possível utilizar a identidade de Bianchi contraída, que leva à relação

$$\nabla_\mu (T_M^{\mu\nu} + T_{LV}^{\mu\nu}) = 0.\quad (3.32)$$

A outra equação de movimento é definida pela variação da ação com relação ao campo de matéria f^ψ :

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta S_M}{\delta f^\psi} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta f^\psi} \right) \delta f^\psi = 0.\quad (3.33)$$

Considerando a variação da ação com relação às transformações de observador, nesse caso, as variações são dadas pela derivada de Lie ($\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$, $\delta f^\psi = \mathcal{L}_\xi f^\psi$ e $\delta k_\chi = \mathcal{L}_\xi k_\chi$), cada uma dos termos da ação são invariantes sob transformações de observador, dessa forma, aplicando o princípio variacional em S_M e S_{LV}

$$\delta S_M = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_M}{\delta f^\psi} \mathcal{L}_\xi f^\psi \right] = 0,\quad (3.34)$$

$$\delta S_{LV} = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta f^\psi} \mathcal{L}_\xi f^\psi + \frac{\delta S_{LV}}{\delta k_\chi} \mathcal{L}_\xi k_\chi \right] = 0.\quad (3.35)$$

Somando as Equações (3.34) e (3.35), e utilizando a (3.33)

$$\int d^n x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta k_\chi} \mathcal{L}_\xi k_\chi \right] = 0\quad (3.36)$$

Da definição de derivada de Lie, $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$, é possível integrar por

⁴Outra forma de levar em conta a LV seria adicionar os termos de quebra de simetria na própria métrica do espaço-tempo como é observado na geometria de Finsler, que é uma generalização da geometria Riemanniana. Esse tipo de quebra está intimamente ligada à violação explícita [33].

partes o primeiro termo de (3.36)

$$\begin{aligned} \int d^n x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \nabla_\mu \xi_\nu &= \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\mu \left[\left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\nu \right] - \\ &- \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\mu \left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\nu \\ &= - \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\mu \left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{LV}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\nu. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O primeiro termo representa uma integral no contorno do volume e é levado a zero.

Retornando à (3.36) e substituindo (3.30)

$$\int d^n x \sqrt{-g} \left[\nabla_\mu (T_M^{\mu\nu} + T_{LV}^{\mu\nu}) \xi_\nu + \frac{\delta S_{LV}}{\delta k_\chi} \mathcal{L}_\xi k_\chi \right]. \quad (3.38)$$

Agora aplicando a condição (3.29), característica de uma quebra explícita, observa-se que $\nabla_\mu (T_M^{\mu\nu} + T_{LV}^{\mu\nu}) \neq 0$, ou seja, a identidade de Bianchi é inválida. Essa inconsistência com a RG, muito embora não torne as teorias com quebra explícita inválidas, leva a autores [29, 32, 34, 35] considerar o setor gravitacional do MPE como um caso de quebra espontânea de Lorentz (observe que aplicando a condição (3.28), a identidade de Bianchi se mantém válida).

3.3.2 O Modelo Bumblebee

Dentre os modelos utilizados para gerar a violação de Lorentz espontaneamente em uma teoria, o modelo bumblebee é um modelo relativamente simples. A quebra de simetria vem da dinâmica de um campo vetorial de B^μ que possui um valor esperado no vácuo (VEV) igual a b^μ .

A dinâmica de B^μ pode ser descrito pela ação⁵

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_{gB} + \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_J. \quad (3.39)$$

No caso, \mathcal{L}_{gB} descreve o acoplamento entre o campo gravitacional e o campo bumblebee, \mathcal{L}_K contém os termos cinéticos para B^μ , \mathcal{L}_V possui o potencial que provoca a violação espontânea de Lorentz e \mathcal{L}_J possui o acoplamento de B^μ com os campos de matéria e outros setores do modelo.

O termo \mathcal{L}_{gB} pode ser descrito de maneira geral com campos dinâmicos u , $s^{\mu\nu}$ e $t^{\alpha\beta\mu\nu}$, acoplados com o escalar de curvatura e os tensores de Ricci e Riemann respectivamente, cujos termos dominantes tem a forma

$$\mathcal{L}_{gB} = \sqrt{-g} \frac{2}{\kappa^2} (uR + s^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + t^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}). \quad (3.40)$$

⁵A dinâmica deve ser ditada também pela Lagrangiana de Einstein-Hilbert, porém, a ação considerada em (3.25) já possui a ação de Einstein-Hilbert, ela foi ocultada.

Para o campo bumblebee, considera-se

$$\mathcal{L}_{gB} = \sqrt{-g} \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

que é encontrado fazendo os campos dinâmicos

$$u = \frac{1}{4} \xi B^\alpha B_\alpha, \quad s^{\mu\nu} = \xi B^\mu B^\nu - \frac{1}{4} \xi g^{\mu\nu} B^\alpha B_\alpha, \quad t^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad (3.42)$$

e fazendo $\sigma = 2\xi/\kappa^2$. Os outros termos da ação serão considerados

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= -\sqrt{-g} \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_V &= -\sqrt{-g} V(B^\mu B_\mu \mp b^2), \\ \mathcal{L}_J &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

em que $B_{\mu\nu} = \nabla_\mu B_\nu - \nabla_\nu B_\mu$ e $b^2 = b^\mu b_\mu$. Observe que $B_{\mu\nu}$ é análogo ao tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Já foi demonstrado que o campo bumblebee pode ser utilizado para descrever uma teoria de gauge U(1) para o fóton [36].

Por fim é possível escrever a ação do campo de bumblebee

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \mp b^2) \right]. \quad (3.44)$$

Mais detalhes sobre a dinâmica do bumblebee são discutidos no Apêndice (B).

4 TEORIA PERTURBATIVA E RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Nesse capítulo será discutida a Teoria da Perturbação aplicada na RG. A Equação de Einstein linearizada para a perturbação da métrica será encontrada e será discutido a invariância de *gauge* e seus graus de liberdade. Fixando um *gauge*, a equação de onda gravitacional e suas soluções de vácuo e com termo de fonte serão encontradas e discutidas.

4.1 Teoria Perturbativa e Linearização da Equação de Einstein

Uma das soluções de grande importância da equação de Einstein consiste a analisar sua solução no limite de campos fracos, onde é possível imaginar que a métrica $g_{\mu\nu}$ é muito próxima da métrica de Minkowski. Utiliza-se um método perturbativo, onde a métrica é descrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

em que $h_{\mu\nu}$ é chamada perturbação. Observe que para campos fracos, a perturbação é um termo muito pequeno ($|h| \ll 1$), essa suposição implica no descarte de termos que envolvam segunda ordem ou mais de h . Além disso, é possível utilizar a métrica de Minkowski para abaixar e subir índices de um tensor, visto que é aproximadamente igual a métrica linearizada.

Utilizando a identidade $g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda$, é possível encontrar (descartando termos de segunda ordem de h) que a inversa da métrica é

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

em que $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}h_{\sigma\rho}$.

Para encontrar a equação de Einstein linearizada, é necessário usar (4.1) e (4.2) na equação de Einstein, para isso é necessário linearizar $R_{\mu\nu}$ e R , dessa forma inicialmente procede-se com os símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

O tensor de Riemann dependerá apenas dos termos de derivada de Γ , assim obtém-

se

$$\begin{aligned}
R_{\sigma\mu\lambda\nu} &= \eta_{\sigma\rho}(\partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \partial\Gamma_{\mu\lambda}^\rho) \\
&= \frac{1}{2}\eta_{\sigma\rho}\eta^{\rho\alpha}(\partial_\lambda\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\lambda\partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\lambda\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\sigma}). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

O tensor de Ricci é obtido contraindo os índices σ e λ

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \eta^{\sigma\lambda}R_{\sigma\mu\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\lambda\partial_\nu h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Contraindo novamente para encontrar o escalar de curvatura, tem-se

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h^{\mu\lambda} + \partial_\lambda\partial_\nu h^{\nu\lambda} - \square h^\mu_\nu - \partial_\mu\partial^\mu h) \\
&= \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo (4.5) e (4.6) para encontrar o tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\lambda\partial_\nu h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu}\square h). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Que gera a equação de Einstein linearizada

$$\partial_\lambda\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\lambda\partial_\nu h_\mu^\lambda - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} + \eta_{\mu\nu}\square h = 16\pi GT_{\mu\nu}, \tag{4.8}$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento calculado na ordem zero de $h_{\mu\nu}$, as ordens mais altas não são consideradas, porque a quantidade de energia e momento já são baixas para que o limite de campo fraco seja aplicável.

4.2 Invariância de Gauge

A escolha da métrica em (4.1) gera o problema da invariância de *gauge*, por não especificar um sistema de coordenadas. Dessa forma, essa decomposição da métrica na métrica de Minkowski e uma perturbação não é única, podendo gerar perturbações diferentes para sistemas de coordenadas diferentes, é um problema equivalente ao encontrado no Eletromagnetismo, quando é necessário determinar o quadripotencial A_μ a partir das equações de Maxwell.

Considere uma transformação de coordenadas infinitesimal $x^\mu \rightarrow x^\mu - \xi^\mu$. Partindo

da lei de transformação de tensores para a métrica¹,

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} g^{\sigma\rho}. \quad (4.9)$$

Usando (4.2) é possível escrever a transformação anterior como

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} &= \frac{\partial(x^{\mu} - \xi^{\mu})}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial(x^{\nu} - \xi^{\nu})}{\partial x^{\rho}} (\eta^{\sigma\rho} - h^{\sigma\rho}) \\ \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} &= (\delta_{\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma}\xi^{\mu})(\delta_{\rho}^{\nu} - \partial_{\rho}\xi^{\nu})(\eta^{\sigma\rho} - h^{\sigma\rho}) \\ \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}\xi^{\nu} - \eta^{\sigma\nu}\partial_{\sigma}\xi^{\mu} - h^{\mu\nu} \\ h'^{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\xi^{\nu} + \partial^{\nu}\xi^{\mu}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde todos os termos de ordem superior a um de h e ξ foram desprezados. a Eq. (4.10) é chamada de transformação de *gauge* para a teoria linearizada e pode ser escrita de maneira equivalente como

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu}. \quad (4.11)$$

Observe que, sob essa transformação, o tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R'_{\sigma\mu\lambda\nu} &= R_{\sigma\mu\lambda\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi_{\sigma} + \partial_{\nu}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}\xi_{\lambda} - \partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\xi_{\sigma} + \\ &\quad + \partial_{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\sigma}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\partial_{\sigma}\partial_{\lambda}\xi_{\mu} - \partial_{\lambda}\partial_{\sigma}\partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\sigma}\xi_{\lambda}) \\ R'_{\sigma\mu\lambda\nu} &= R_{\sigma\mu\lambda\nu}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

se mantém invariante, dessa forma toda teoria linearizada também é invariante. Assim fixando um *gauge*, ou seja, escolhendo os ξ^{μ} , a unicidade de $h_{\mu\nu}$ é assegurada. Essa escolha pode ser feita de maneira a Eq. (4.8) se tornar mais simples.

4.3 Graus de Liberdade

As componentes perturbação é um tensor simétrico de tipo (0,2), ela pode ser decomposta de forma a analisar seus graus de liberdade. A componente 00 define um escalar (spin 0), as componentes 0i definem um trivetor (spin 1), e as componentes ij definem um tensor espacial simétrico (spin 2), que pode ser dividido entre um tensor sem traço e um tensor

¹Essa forma de mostrar a transformação de *gauge* esbarra no problema de equacionar tensores de dois sistemas de coordenadas diferentes, outra abordagem, que usa a noção de difeomorfismo, pode ser vista na Ref. [37].

com traço². Assim, é possível as componentes de $h_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Phi \\ h_{0i} &= h_{i0} = w_i \\ h_{ij} &= 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde Ψ e s_{ij} são definidos como

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij} \\ s_{ij} &\equiv \frac{1}{2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim é possível escrever o intervalo como

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dx^i dt + dt dx^i) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j \quad (4.15)$$

Agora é preciso encontrar os tensores de Ricci e o escalar de curvatura para substituí-los na equação de Einstein. Primeiramente, encontra-se as componentes dos símbolos de Christoffel usando a Eq. (4.3)

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_0\Phi \\ \Gamma_{00}^i &= \partial_0 w_i + \partial_i\Phi \\ \Gamma_{j0}^0 &= \partial_j\Phi \\ \Gamma_{j0}^i &= \partial_{[j}w_{i]} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij} \\ \Gamma_{jk}^0 &= \frac{1}{2}\partial_0 h_{jk} - \partial_{(j}h_{k)0} \\ \Gamma_{jk}^i &= \partial_{(j}h_{k)i} - \frac{1}{2}\partial_i h_{jk}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde os índices que estão entre parênteses (colchetes) representam a simetria (anti-simetria) desses índices. A decomposição de h_{ij} ainda não foi feita por conveniência.

²Essa decomposição é característica da teoria de grupos, onde um tensor é dividido em partes que são invariantes no grupo de simetria, chamado de formas irredutíveis.

As componentes do tensor de Riemann são encontradas a partir da Eq. (4.4)

$$\begin{aligned}
R_{0000} &= 0; \\
R_{000l} &= 0; \\
R_{0j0l} &= \partial_0 \partial_{(j} w_{l)} + \partial_j \partial_l \Phi - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{jl}; \\
R_{0jkl} &= \partial_j \partial_{[k} w_{l]} - \partial_0 \partial_{[k} h_{l]j}; \\
R_{ijkl} &= \partial_j \partial_{[k} h_{l]i} - \partial_i \partial_{[k} h_{l]j}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

As outras componentes de $R_{\sigma\mu\lambda\nu}$ são encontrados pelas suas relações de simetria. As componentes do tensor de Ricci são encontrados contraindo o tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \eta^{00} R_{0000} + \delta^{jl} R_{j0l0} \\
&= \nabla^2 \Phi + \partial_0 \partial_k w^k - 3 \partial_0 \partial_0 \Psi; \\
R_{0l} &= \eta^{00} R_{000l} + \delta^{jk} R_{j0kl} \\
&= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_l + \frac{1}{2} \partial_l \partial_j w^j + \partial_0 \partial_k s_l^k + 2 \partial_0 \partial_l \Psi; \\
R_{jl} &= \eta^{00} R_{0j0l} + \delta^{ik} R_{ijkl} \\
&= -\partial_j \partial_l (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(j} w_{l)} + \square \Psi \delta_{jl} - \square s_{jl} + 2 \partial_k \partial_{(j} s_{l)}^k.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

O escalar de curvatura é escrito como

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{00} R_{00} + \delta^{ij} R_{ij} \\
&= -2 \nabla^2 \Phi - 2 \partial_0 \partial_k w^k - 6 \partial_0 \partial_0 + 4 \nabla^2 \Psi + 2 \partial_i \partial_k s^{ik}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Por fim, é possível escrever as componentes do tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 2 \nabla^2 \Psi + \partial_i \partial_j s^{ij}; \\
G_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + \partial_0 \partial_k s_j^k + 2 \partial_0 \partial_j \Psi; \\
G_{ij} &= (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) + \delta_{ij} \partial_0 \partial_k w^k - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2 \delta_{ij} \partial_0 \partial_0 - \square s_{ij} + \partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij} \partial_k \partial_l s^{kl}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Iniciando a análise dos graus de liberdade, utilizando a componente 00, obtêm-se

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G T_{00} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j s^{ij}. \tag{4.21}$$

Observe que Ψ não possui derivadas temporais, dessa forma, a partir de T_{00} e s_{ij} em qualquer tempo específico e suas condições de contorno, é possível determiná-lo. Consequentemente, Ψ não é um grau de liberdade de propagação. Agora a equação 0j se converte em

$$(\delta_{jk}\nabla^2 - \partial_j\partial_k)w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\Psi + 2\partial_0\partial_k s_j^k. \quad (4.22)$$

Assim como para Ψ , a equação para w_i não possui derivadas temporais, portanto, também não configura um grau de liberdade de propagação. Finalmente a equação ij resulta em

$$\begin{aligned} (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\Phi &= 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0\partial_0)\Psi - \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k + \\ &+ \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da mesma forma que os outros campos, Φ não configura um grau de liberdade. O único que restou foi s_{ij} que é chamado de *strain* e configura os únicos graus de liberdade físicos da perturbação, por conseguinte, ele será utilizado para descrever as ondas gravitacionais. As outras componentes da perturbação, podem ser determinadas a partir do *strain* e dos campos de matéria.

Finalizando a discussão, sob a transformação de *gauge* cada uma das componentes de $h_{\mu\nu}$ se transformam como

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \partial_0\xi^0; \\ w_i &\rightarrow w_i + \partial_0\xi^i - \partial_i\xi^0; \\ \Psi &\rightarrow \Psi - \frac{1}{3}\partial_i\xi^i; \\ s_{ij} &\rightarrow s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k\xi^k\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Essas transformações serão importantes quando for necessário fixar o *gauge* para facilitar o tratamento da equação linearizada.

4.4 Ondas Gravitacionais

Dentre os *gauges* utilizados na teoria linearizada, um muito famoso por resultar na equação de onda no quando consideradas soluções de vácuo é o *gauge* transverso. Inicialmente, s^{ij} é escolhido para ser espacialmente transverso

$$\partial_i s^{ij} = 0, \quad (4.25)$$

que é equivalente a escolher ξ^i da forma da Eq. (4.26)

$$\nabla^2\xi^j + \frac{1}{3}\partial_i\partial_j\xi^i = -2\partial_i s^{ij}. \quad (4.26)$$

Ainda resta uma escolha para ξ^0 , que pode ser utilizado para definir que w^i também

seja espacialmente transverso.

$$\partial_i w^i = 0, \quad (4.27)$$

que é equivalente a fazer ξ^0 satisfazer

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i. \quad (4.28)$$

Essas equações diferenciais não especificam a escolha de ξ , porém implicam na existência de uma solução, dessa forma existe uma mudança de coordenada que façam as condições (4.25) e (4.27) verdadeiras.

Essas condições implicam que as Equações (4.21), (4.22) e (4.23) são escritas como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G T_{00}; \\ -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi &= 8\pi G T_{0j}; \\ (\delta_{ij} - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0 \partial_0 \Psi - \square s_{ij} &= 8\pi G T_{ij}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

As soluções de vácuo implicam que, para a equação 00

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (4.30)$$

que implica $\Psi = 0$ considerando que o mesmo zera no infinito.

Para a equação 0j, substituindo $\Psi = 0$

$$\nabla^2 w_i = 0. \quad (4.31)$$

Novamente, implica que $w_i = 0$. O traço da equação ij resulta em

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (4.32)$$

outra vez, obtêm-se que $\Phi = 0$. Por fim utilizando as condições anteriores, a equação ij computa a equação de onda para o *strain*

$$\square s_{ij} = 0. \quad (4.33)$$

Pelo fato do único grau de liberdade da perturbação ser o *strain*, é teorizado que a partícula que descreve a interação gravitacional em uma teoria quântica, chamada de gráviton, é um bóson de spin 2.

Geralmente, a equação de onda em termos da perturbação métrica como um todo, mas a perturbação ainda deve ter suas componentes, com exceção as que definem s_{ij} iguais a zero. Essa escolha para a métrica é conhecida como *gauge* transverso sem traço (*gauge* TT³)

³do inglês, transverse traceless

definindo assim

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0, \quad (4.34)$$

a equação de onda para a perturbação, que deve ser puramente espacial, sem traço e transversal, satisfazendo

$$\begin{aligned} h_{0\nu}^{TT} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} &= 0 \\ \partial^\mu h_{\mu\nu}^{TT} &= 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Cuja solução é dada por

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (4.36)$$

em que $C_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico constante. utilizando as condições (4.35), é possível encontrar que

$$\begin{aligned} C_{0\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} &= 0 \\ k_\mu C^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Além disso, substituindo (4.34) na função de onda em

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu}^{TT} &= 0; \\ \eta_{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}^{TT} &= 0; \\ -k^\sigma k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} &= 0 \Rightarrow k^\sigma k_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

ou seja, o vetor de onda é um vetor nulo, assim a componente temporal que determina na frequência da onda ($k^\sigma = (\omega, \mathbf{k})$) deve satisfazer

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2. \quad (4.39)$$

A solução completa da função de onda é composta de uma superposição de todas as ondas planas que satisfaçam as condições (4.37) e (4.39).

Para tornar a solução mais explícita, é possível escolher um sistemas de coordenadas no qual o vetor \mathbf{k} aponta na direção x^3 , dessa forma

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega). \quad (4.40)$$

Por esse motivo as componentes $C_{3\nu}$ serão nulas pela condição $k_\mu C^{\mu\nu} = 0$. O tensor

$C_{\mu\nu}$ é escrito como

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que com essa definição, $(C_{\mu\nu})$ satisfará todas as condições (4.37), as componentes C_{11} e C_{12} e a frequência caracterizam completamente a onda. Renomeando $C_{11} = h_+$ e h_\times

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

é possível escrever o intervalo como

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dx^2 + (1 - h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dy^2 + h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} (dx dy + dy dx) + dz^2. \quad (4.42)$$

4.5 Polarizações das Ondas Gravitacionais

Para a discussão da polarização das ondas gravitacionais, considere que existem quatro partículas no plano $z = 0$ e em um mesmo tempo, duas dessas partículas estão espaçadas de uma distância dx ao longo do eixo x , as outras duas estarão espaçadas a uma distância dy ao longo do eixo y .

Inicialmente o caso para $h_\times = 0$ será analisado, posteriormente o caso $h_+ = 0$ será analisado (lembrando que o resultado total é uma superposição dos dois). A pergunta que a ser feita é: Como o distância entre os pares de partículas será afetada?

- Caso $h_\times = 0$:

Nesse caso, o intervalo será dado por

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dx^2 + (1 - h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dy^2 + dz^2,$$

o primeiro par de partículas terá uma distância de

$$ds^2 = (1 + h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dx^2. \quad (4.43)$$

O segundo par terá uma distância de

$$ds^2 = (1 - h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) dy^2. \quad (4.44)$$

Assim, enquanto a distância entre as partículas de um par estiver contraindo, no outro estará dilatando.

- Caso $h_+ = 0$:

Nesse caso, o intervalo será dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + 2h_{\times} e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}} dx dy + dz^2.$$

Fazendo uma rotação no eixo z de 45° , as coordenadas se transformam como

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x'). \quad (4.45)$$

Assim, no novo sistema de coordenadas, o intervalo é descrito como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt'^2 + \frac{1}{2}(dx' + dy') + \frac{1}{2}(dy' - dx') + dz'^2 + h_{\times} e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}} (dx' + dy')(dy' - dx') \\ &= -dt'^2 + (1 + h_+ e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}) dx'^2 + (1 - h_+ e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}}) dy'^2 + dz'^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Que é equivalente ao caso anterior, porém rotacionado em 45° .

Esses modos de polarizações são conhecidas como “mais” (*plus*) e “cruz” (*cross*) respectivamente, e estão retratados na Figura 4.

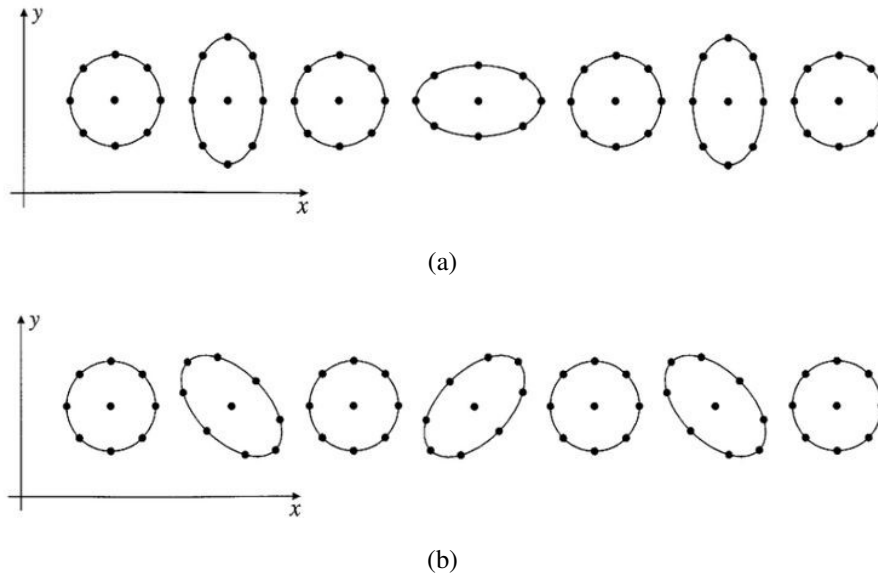


Figura 4: Estados de polarização da onda gravitacional (a) Polarização *plus* e (b) Polarização *cross*.

É possível associar a invariância sob rotações espaciais dos modos de polarização das ondas com o spin da mesma. De maneira geral, se a polarização for invariante sob rotação de θ , é possível associar o spin S da partícula em uma teoria quantizada com a fórmula $S = 360^{\circ} / \theta$.

Os modos de polarização das ondas gravitacionais possuem invariância sob rotações de 180° , mais uma vez, isso leva à hipótese que o gráviton seja uma partícula de spin 2 [37].

4.6 Produção de Ondas Gravitacionais

Para a discussão da produção de ondas gravitacionais, é necessário trabalhar com a equação de Einstein com fonte, como $T_{\mu\nu}$ não desaparece, a perturbação vai possuir as componentes 00 , $0j$ e seu traço diferente de zero, assim ela não assume as restrições de Eq. (4.35). A rota a ser assumida será utilizar a perturbação de traço reverso⁴

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (4.47)$$

Observe que, no vácuo e longe de qualquer fonte, a perturbação de traço reverso assume a forma sem-traço e transversa de forma que é idêntico à perturbação original

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}.$$

Ainda é possível escolher um *gauge*, esse é feito de forma a fazer a divergência da perturbação de traço reverso nula

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.48)$$

essa condição é conhecida como *gauge* de Lorentz e é análogo ao *gauge* $\partial_\mu A^\mu$ utilizado no eletromagnetismo. Para satisfazer (4.48), basta escolher ξ de forma a satisfazer

$$\square \xi^\nu = -\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}.$$

Agora, substituindo a definição de $\bar{h}_{\mu\nu}$ na equação de Einstein linearizada, obtém-se

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.49)$$

Nessa equação fica claro um defeito da teoria linearizada, a mesma perde o efeito da auto-interação do campo gravitacional. Dessa forma os campos de matéria agem como geradores da radiação gravitacional, porém não há ação da radiação com a matéria, ou seja, a onda receberia energia e momento dos campos de matéria, mas a energia e o momento da matéria permaneceriam conservados [38].

Para solucionar a equação de onda, utiliza-se o método da função de Green. Uma função de Green para um operador diferencial $\hat{\mathcal{O}}$ é a solução de

$$\hat{\mathcal{O}}G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma). \quad (4.50)$$

⁴O nome vem do fato desse tensor possuir o traço igual a $-h$.

Considerando o operador d'Alembertiano, temos duas funções de Green, uma chamada avançada e outra retardada, a primeira representa ondas que se propagam retrocedendo no tempo, a segunda representa ondas que avançam no tempo. Nesse caso, a única que possui interesse físico é a retardada

$$G_R(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0), \quad (4.51)$$

em que Θ é a função degrau.

A solução para (4.49) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) &= -16\pi G \int d^4y G_R(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) \\ &= 4G \int dy^0 d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(y^\sigma) \delta[|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \Theta(x^0 - y^0) \\ &= 4G \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.52)$$

em que $t = x^0$. Essa equação possui uma interpretação física interessante, a perturbação do campo gravitacional no ponto (t, \mathbf{x}) é a soma da contribuição de todas as fontes de energia e momento dentro do cone de luz do passado.

Definindo o tempo retardado $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, e escrevendo a transformada de Fourier da perturbação é possível desenvolver

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{2\pi} \int dt d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{i\omega t} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y}) \\ &= \frac{4G}{2\pi} \int dt_r d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{i\omega t_r} e^{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y}) \\ &= 4G \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Agora, é suposto que a radiação é emitida por uma fonte isolada, muito distante e composta de matéria não-relativística. O motivo dessa suposição é considerar que o módulo da distância espacial do ponto de medida da radiação e da fonte $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, é praticamente constante, de forma que é possível tirá-lo da integral de (4.53). Assim, é possível escrever

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}). \quad (4.54)$$

Para simplificar mais ainda a Eq. (4.54), observe que a restrição (4.48) se torna, no

espaço de Fourier

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \\
-i\omega \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{h}^{0\nu} + \partial_j \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{h}^{j\nu} &= 0 \\
\tilde{h}^{0\nu} &= -\frac{i}{\omega} \partial_j \tilde{h}^{j\nu}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

A partir de (4.55), observa-se que, utilizando apenas as componentes espaciais da perturbação no espaço de Fourier, é possível encontrar as outras componentes. Outra simplificação é feita integrando por partes as componentes espaciais tensor de energia-momento também no espaço de Fourier

$$\begin{aligned}
\int d^3y \tilde{T}^{ij} &= \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i \partial_k (\tilde{T}^{kj}) \\
&= - \int d^3y y^i \partial_k (\tilde{T}^{kj}).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Utilizando a identidade de Bianchi, seguindo um procedimento equivalente para a dedução de (4.55) é possível demonstrar que $\partial_k \tilde{T}^{kv} = i\omega \tilde{T}^{0v}$. Continuando a simplificação

$$\begin{aligned}
\int d^3y \tilde{T}^{ij} &= - \int d^3y x^i \partial_k (\tilde{T}^{kj}) = -i\omega \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} \\
&= -\frac{i\omega}{2} \int d^3y (y^i \tilde{T}^{0j} + y^j \tilde{T}^{0i}) \\
&= -\frac{i\omega}{2} \int d^3y [\partial_k (y^i y^j \tilde{T}^{0k}) - y^i y^j \partial_k \tilde{T}^{0k}] \\
&= \frac{i\omega}{2} \int d^3y y^i y^j \partial_k \tilde{T}^{0k} \\
&= -\frac{\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Assim, é possível definir o tensor momento de quadrupolo $I^{ij}(t)$

$$I^{ij}(t) = \int d^3y y^i y^j T^{00}, \tag{4.58}$$

que simplifica a expressão para a parte espacial da transformada de Fourier da perturbação

$$\tilde{\bar{h}}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega r}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega). \tag{4.59}$$

Por fim, fazendo a transformada inversa de (4.59), obtém-se a fórmula de quadrupolo para a perturbação

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t_r). \tag{4.60}$$

A radiação gravitacional produzida por um objeto isolado não-relativístico tem natureza quadrupolar, em contraste com a radiação eletromagnética, em que a contribuição maior

vem de termos dipolares. Como geralmente o momento de quadrupolo de um sistema é muito menor que o momento de dipolo, além do fraco acoplamento gravitacional, a radiação gravitacional é tipicamente muito mais fraca que a eletromagnética.

A proibição de contribuição dipolar é esperada para a radiação gravitacional, para observar isso, considere um sistema isolado de massas, nós podemos definir o momento de dipolo gravitacional

$$\mathbf{d}_g = \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (4.61)$$

Mas pela conservação do momento total de um sistema isolado, temos

$$\frac{d}{dt} \mathbf{d}_g = 0 \quad (4.62)$$

que proíbe a existência de termos dipolares na solução.

4.7 Radiação Gravitacional Emitida por um Sistema Binário em Órbita Circular

Uma aplicação de particular interesse para a produção de ondas gravitacionais, é a de um sistema binário em órbita circular como discutido em [39]. Esse tipo de sistema consiste em uma configuração bem simples de dois objetos de massa m_1 e m_2 que traçam uma trajetória circular em torno de seu centro de massa conforme esquematizado na Figura 5.

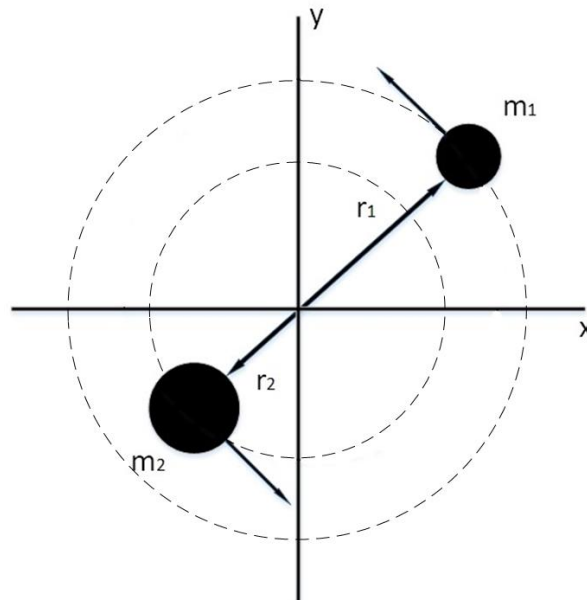


Figura 5: Sistema binário efetuando órbitas circulares.

O sistema é analisado a partir da mecânica newtoniana, válido à baixas ordens. Os parâmetros orbitais serão a massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ e a distância de separação

$l_0 = r_1 + r_2$. baseando-se pela Figura 5 é possível escrever as distâncias r_1 e r_2 como

$$r_1 = \frac{m_2 l_0}{M}, \quad r_2 = \frac{m_1 l_0}{M}, \quad (4.63)$$

em que $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema.

As equações de movimento serão encontradas a partir da velocidade angular Ω dos elementos do binário, igualando a força gravitacional com a força centrípeta para ambos objetos, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{Gm_1 m_2}{l_0^2} &= m_1 \Omega^2 \frac{m_2 l_0}{M}, \\ \frac{Gm_1 m_2}{l_0^2} &= m_2 \Omega^2 \frac{m_1 l_0}{M}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Que implica para a mesma velocidade angular para os dois objetos

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{l_0^3}}. \quad (4.65)$$

Assim, as equações de movimento serão

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2 l_0}{M} \cos \Omega t, & y_1 &= \frac{m_2 l_0}{M} \sin \Omega t, \\ x_2 &= -\frac{m_1 l_0}{M} \cos \Omega t, & y_2 &= -\frac{m_1 l_0}{M} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (4.66)$$

A partir de (4.66) e da definição de T_{00}

$$T_{00} = \delta(z) [m_1 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) + m_2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2)], \quad (4.67)$$

computa-se as componentes não nulas do momento de quadrupolo (4.58)

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{\mu}{2} l_0^2 (1 + \cos 2\Omega t); \\ I_{yy} &= \frac{\mu}{2} l_0^2 (1 - \cos 2\Omega t); \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \sin 2\Omega t. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Por fim, utilizando a Eq. (4.60), têm-se que a expressão para a perturbação de traço reverso é dada por

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{r} \mu l_0^2 \Omega^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Note que, devido ao aparecimento do fator 2Ω nos argumentos das funções seno e

coseno, a frequência de oscilação da onda gravitacional será duas vezes maior que a frequência rotacional do binário.

É interessante nesse exemplo, passar essa solução para o *gauge* TT, de forma a analisar a polarização dessa onda. Isso é atingido utilizando operadores de projeção, considere o operador de projeção que projeta um vetor no plano ortogonal à uma direção $\hat{\mathbf{n}}$

$$P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k. \quad (4.70)$$

A partir desse projetor simétrico e transversal, podemos construir um segundo

$$\mathcal{P}_{ij,kl} \equiv P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad (4.71)$$

que extrai a parte sem traço e transversa de um tensor de rank (0,2). Dessa forma, afirmamos que

$$h_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{ij,kl} h_{kl}. \quad (4.72)$$

Agora, utilizando o projetor TT, vamos extrair a parte da onda que se propaga na direção z ($\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$). o projetor P_{jk} é

$$P_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

A perturbação no *gauge* TT será

$$h_{\mu 0}^{TT} = 0, \quad h_{ij}^{TT}(t, z) = \frac{2G}{z} \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}^{TT}(t - z), \quad (4.74)$$

em que

$$I_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{ij,kl} I_{kl}. \quad (4.75)$$

As componentes não nulas são

$$\begin{aligned} I_{xx}^{TT} &= \left(P_{xk} P_{xl} - \frac{1}{2} P_{xx} P_{kl} \right) I_{kl} = \frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy}); \\ I_{yy}^{TT} &= \left(P_{yk} P_{yl} - \frac{1}{2} P_{yy} P_{kl} \right) I_{kl} = -\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy}); \\ I_{xy}^{TT} &= \left(P_{xk} P_{yl} - \frac{1}{2} P_{xy} P_{kl} \right) I_{kl} = I_{xy}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dessa forma, temos as duas polarizações, h_{xx}^{TT} e h_{xy}^{TT} . No problema do binário,

temos

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -\frac{4G}{r} \mu l_0^2 \Omega^2 \cos(2\Omega t_r) \\ h_{xy}^{TT} &= -\frac{4G}{r} \mu l_0^2 \Omega^2 \sin(2\Omega t_r), \end{aligned} \quad (4.77)$$

demonstrando que a onda é circularmente polarizada.

Por fim, podemos computar a amplitude da onda

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{4G}{r} \mu l_0^2 \Omega^2 \\ &= \frac{4\mu M G^2}{r l_0 c^4}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

em que simplesmente dividimos c^4 para voltar às unidades SI.

5 EFEITOS DA VIOLAÇÃO DE LORENTZ NA PRODUÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Nesse capítulo, será demonstrado como os efeitos da LV modificam a produção das ondas gravitacionais. Inicialmente a relação de dispersão modificada será demonstrada de acordo com a Ref. [40]. Posteriormente, a partir de um procedimento equivalente ao demonstrado na Seção 4.6, uma nova fórmula de quadrupolo é derivada, culminando na aplicação em um sistema binário.

5.1 Modificando a Relação de Dispersão do Gráviton

Na Seção 3.3 foi abordado como a violação de Lorentz pode ser levada em conta em uma teoria de gravitação. No caso, é possível adicionar um termo na ação que quebra espontaneamente a simetria de Lorentz.

$$S = S_{EH} + S_M + S_{LV} \quad (5.1)$$

O termo S_{LV} considera o acoplamento entre o campo bumblebee e o gráviton, cuja forma foi demonstrada na Eq. (3.41), a partir de um procedimento de linearização dos campos bumblebee e gravitacional descrito no Apêndice B, obtém-se a densidade lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LV} = & \xi \left[p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha + \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 (h^\alpha_\alpha)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha - (b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta + b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)}) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right] \\ & + \frac{4\xi^2}{\kappa^2} \left[\left(-2p^2 b_\mu b_\nu - 2b^2 p_\mu p_\nu + 4b \cdot p b_{(\mu} p_{\nu)} - \frac{p^2 p_\mu p_\nu}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha \right. \\ & + \left(2b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta - b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)} + \frac{b^2 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{2(b \cdot p) p_\mu p_\nu b_{(\alpha} p_{\beta)}}{p^2} + \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \\ & \left. + \left(b^2 p^2 - (b \cdot p)^2 + \frac{p^4}{4\lambda} \right) (h^\alpha_\alpha)^2 + \left(p^2 b_\mu b_\nu - 2(b \cdot p) b_{(\mu} p_{\nu)} + \frac{(b \cdot p)^2 p_\mu p_\nu}{p^2} \right) h^{\mu\lambda} h^\nu_\lambda \right] + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que $b \cdot p = b^\mu p_\mu$, com $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ e $b^\mu = (b^0, \mathbf{b})$. Como a quebra de simetria é espontânea, essa lagrangeana ainda é invariante por Lorentz. Além disso, a lagrangeana não é mais invariante à transformação de gauge ($h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + ip_\mu \xi_\nu + ip_\nu \xi_\mu$).

Os efeitos do bumblebee na RG estão na lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{kin} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{LV}, \quad (5.3)$$

onde a \mathcal{L}_{EH} é a lagrangeana de Einstein-Hilbert linearizada

$$\mathcal{L}_{EH} = p_\mu p_\alpha h^{\mu\nu} h_\nu^\alpha - p_\mu p_\nu h^{\mu\nu} h + \frac{1}{2} p^2 h_\mu^\mu h - \frac{1}{2} p^2 h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Para encontrar equação de movimento do gráviton precisamos inicialmente escrever a Eq. (5.3) na forma bilinear

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \hat{\mathcal{O}}_{\mu\nu, \alpha\beta} h^{\alpha\beta} \quad (5.5)$$

e determinar o operador $\hat{\mathcal{O}}$ de forma que o mesmo seja simétrico nos índices $(\mu\nu)$, $(\alpha\beta)$ e na troca dos pares $(\mu\nu)$ e $(\alpha\beta)$. A determinação de $\hat{\mathcal{O}}$, do propagador de Feynmann da teoria e de outros detalhes, podem ser encontrados na Ref. [40].

A equação de movimento é encontrada a partir de

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mu\nu, \alpha\beta} h^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.6)$$

A Eq. (5.6) é então saturada por $p^\mu p^\nu$, $b^\mu b^\nu$, $p^{(\mu} b^{\nu)}$ e a métrica de Minkowski [41], revelando as seguintes restrições

$$p_\mu p_\nu h^{\mu\nu} = 0; \quad b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} = 0; \quad p_{(\mu} b_{\nu)} h^{\mu\nu} = 0; \quad h = 0. \quad (5.7)$$

Mais restrições podem ser encontradas saturando (5.6) com p^μ e b^μ

$$p_\mu h_\nu^\mu = 0; \quad b_\mu h_\nu^\mu = 0. \quad (5.8)$$

Aplicando as Eqs. (5.7) e (5.8) na Eq. (5.6) obtemos a relação de dispersão para o gráviton modificado pela presença do campo bumblebee

$$[p^2 + \xi(b \cdot p)^2] h_{\mu\nu} = 0. \quad (5.9)$$

Observe que a presença do campo Bumblebee levou a modificação da relação de dispersão da teoria usual de Einstein-Hilbert ($p^2 = 0 \rightarrow p^2 + \xi(b \cdot p)^2 = 0$) de forma que o acoplamento não-mínimo $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$ não gerou modos massivos para o gráviton, além disso, o número de polarizações da teoria se mantiveram dois, o que está de acordo com as medidas do evento GW170814, o primeiro a analisar as polarizações da radiação [42].

5.2 Produção de Ondas Gravitacionais na Presença do Campo Bumblebee

Para a análise da produção das ondas gravitacionais, uma corrente $J_{\mu\nu}$ que é adicionada à equação homogênea (5.9) resultando em

$$[\square + \xi(b \cdot \partial)] h_{\mu\nu}(x) = J_{\mu\nu}(x). \quad (5.10)$$

Essa corrente vai agir como a fonte da radiação gravitacional, ela deve ser equivalente à fonte da Eq. (4.49), uma vez que apenas o acoplamento entre o campo bumblebee e o gráviton foi considerado, assim os campos de matéria mantêm-se inalterados. Dessa forma, é possível escrever $J_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu}$ ¹.

Assim como no Seção 4.6, o método da função de Green é utilizado para resolver esse problema. O problema será separado em dois casos: no primeiro será considerado que o VEV do bumblebee é do tipo tempo $b^\mu = (b^0, \mathbf{0})$ e no segundo será considerado do tipo espaço $b^\mu = (0, \mathbf{b})$.

Para o VEV do tipo tempo, como demonstrado no Apêndice C, a função de Green se reduz a

$$G_{b_0} = \frac{1}{4\pi r \sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \delta \left[r - \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \right) \right] \Theta(\tau). \quad (5.11)$$

em que $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e $\tau = x^0 - y^0$. Para encontrar a perturbação, devemos solucionar a equação

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= 16\pi G \int d^4y G_{b_0}(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma). \\ &= \frac{4G}{\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r} \delta \left[r - \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Utilizando a identidade da função delta

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (5.13)$$

a Eq. (5.12) se resume a

$$h_{\mu\nu}(x) = 4G \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(t'_r, \mathbf{y})}{r}, \quad (5.14)$$

em que $t'_r = x^0 - r\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}$ é o tempo retardado. agora modificado pelo vetor de fundo.

O restante do processo é equivalente ao feito na Seção 4.6², onde é considerado que a fonte é distante, isolada e não-relativística. Assim, podemos escrever uma solução bem parecida à encontrada para a teoria usual

$$h_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t'_r), \quad (5.15)$$

em que o momento de quadrupolo é definido da mesma maneira que na Eq. (4.58).

Esse resultado é bastante interessante, muito embora não tenha havido mudança na amplitude da onda gravitacional, a mudança no tempo retardado indica que a onda possui uma velocidade de propagação mais lenta ($v = c/\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}$), que pode ser uma forma interes-

¹A diferença de sinal se deve à mudança da métrica

²Essa equivalência só é possível porque a violação é espontânea e, como foi mostrado na Seção 3.3, continua satisfazendo a identidade de Bianchi

sante de comprovar a teoria. O evento GW150914 foi bastante interessante, pois a detecção da radiação gravitacional foi acompanhada pela observação de erupções de raios-gama pelo Fermi GBM após 0,4 segundos [43]. Isso indica que é possível que haja uma diferença entre velocidade de propagação dos fótons e grávitons, porém faltam dados observacionais para podermos afirmar tal fato.

No caso em que b^μ é do tipo espaço, a função de Green é

$$G_{\mathbf{b}}(x-y) = G_R(x-y) - G_2(x-y), \quad (5.16)$$

em que G_R é a função de Green Retardada e

$$G_2(x-y) = \frac{\xi}{8\pi r^3} \Theta(\tau) \left\{ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \left[\left(\frac{\tau}{r} - 1 \right) \delta(\tau - r) + \tau \delta'(\tau - r) \right] + \tau r b^2 \cos(2\theta_b) \delta(\tau - r) \right\}, \quad (5.17)$$

em que θ_b denota o ângulo polar de \mathbf{b} . Os detalhes na obtenção desta função de Green podem ser vistos no Apêndice C.

E agora procedemos para o cálculo da perturbação. O primeiro termo da função de Green é simplesmente a função de Green Retardada e seu resultado já foi calculado. O segundo termo deve entrar na integral de convolução

$$16\pi G \int d^4y G_2(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma). \quad (5.18)$$

Vamos solucionar esse problema por etapas. A primeira integração para ser resolvida é

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}^{(1)} &= \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \left(\frac{\tau}{r} - 1 \right) \delta(\tau - r) \\ &= \int d^3y dy^0 \frac{T_{\mu\nu}(y^0, \mathbf{y})}{r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \left(\frac{x^0 - y^0}{r} - 1 \right) \delta[y^0 - (x^0 - r)] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A segunda integral

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}^{(2)} &= \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \tau \delta'(\tau - r) \\ &= \int d^3y dy^0 \frac{T_{\mu\nu}(y^0, \mathbf{y})}{r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 (x^0 - y^0) \delta'[y^0 - (x^0 - r)] \\ &= - \int d^3y \frac{T'_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{r^2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

em que $t_r = t - r$ é o tempo retardado, $T'_{\mu\nu}$ denota a derivada de $T_{\mu\nu}$ com relação ao tempo retardado.

Agora, podemos fazer a transformada de Fourier de I_2

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{ij}^{(2)} &= - \int d^3y dt \frac{T'_{ij}(t_r, \mathbf{y})}{r^2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 e^{i\omega t} \\
&= - \int d^3y dt \frac{T'_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{r^2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 e^{i\omega t_r} e^{i\omega r} \\
&= i\omega \int d^3y \frac{e^{i\omega r} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega) \\
&= i\omega \frac{e^{i\omega r} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega) \\
&= -\frac{i\omega^3}{2} \frac{e^{i\omega r} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} \tilde{I}_{ij}(\omega) \\
Q_{ij}^{(2)} &= -\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^2} \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3}(t_r), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

lembrando que precisamos apenas das componentes espaciais.

Por fim, a terceira integral é

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}^{(3)} &= \int d^4y \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r^3} \tau r b^2 \cos(2\theta_b) \delta(\tau - r) \\
&= \int d^3y dy^0 \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r^3} (x^0 - y^0) r b^2 \cos(2\theta_b) \delta[y^0 - (x^0 - r)] \\
&= \int d^3y \frac{T_{\mu\nu}(y^\sigma)}{r} b^2 \cos(2\theta_b), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

e as componentes espaciais são simplesmente

$$Q_{ij}^{(3)} = \frac{b^2 \cos(2\theta_b)}{2r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r). \tag{5.23}$$

Em posse desses resultados, a perturbação se resume a

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) - 2\xi G (Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^{(3)})_{ij}. \tag{5.24}$$

Aplicando os resultados obtidos nas Eqs. (5.19), (5.21) e (5.23) em (5.24), finalmente obtemos a perturbação modificada

$$h_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{2G}{r} \left[\left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos 2\theta_b \right) \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) + \frac{\xi (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2}{2r} \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3}(t_r) \right]. \tag{5.25}$$

Essa solução possui três características interessantes a serem discutidas. A primeira, é a presença de derivada de terceira ordem na solução, que mantém a proibição de termos de dipolo na onda gravitacional. A segunda é a mudança na amplitude da onda, que pode ser detectada em experimento mais exatos, visto que atualmente dados experimentais atuais condizem muito bem com a RG. A terceira é a presença de anisotropia, evidenciada pelos termos $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$ e $\cos(2\theta_b)$. Essas características são muito difíceis de serem observadas, uma vez

que é esperado que o termo ξb^2 seja bem pequeno.

A anisotropia poderá ser observada futuramente com o experimento LISA, que analisará radiação vinda de binários com inicial na frequência na ordem de mHz [44], proporcionando uma maior riqueza de dados e maior quantidade de eventos. Além disso, como estará no espaço, os braços do interferômetro poderão se mover de forma a investigar a oscilação em diferentes direções. Na próxima seção, será mostrado que a anisotropia também pode ser encontrada nas polarizações da onda.

5.3 Modificações na Radiação emitida pelo Sistema Binário em Órbita Circular

Agora, voltando ao exemplo do binário em órbita circular, temos os mesmos valores para o momento de quadrupolo

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{\mu}{2} l_0^2 (1 + \cos 2\Omega t); \\ I_{yy} &= \frac{\mu}{2} l_0^2 (1 - \cos 2\Omega t); \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{\mu}{2} l_0^2 \sin 2\Omega t, \end{aligned} \quad (5.26)$$

com todas as outras componentes nulas.

No caso em que $b^\mu = (b^0, \mathbf{0})$, apenas o tempo retardado muda, dessa forma não existem mudanças relevantes na forma da perturbação. No caso $b^\mu = (0, \mathbf{b})$, existem diversas mudanças que vamos tratar agora. Aplicando as Eqs. (5.26) na (5.25), obtemos

$$h_{ij}(t, \mathbf{r}) = 4G\mu l_0^2 \left[\frac{\Omega^2}{r} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right) A_{ij} + \Omega^3 \xi (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 B_{ij} \right], \quad (5.27)$$

em que $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ e os tensores espaciais A_{ij} e B_{ij} são definidos como

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t_r & -\cos 2\Omega t_r & 0 \\ -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Pelo segundo termo da Eq. (5.27) podemos afirmar que os efeitos da LV para esse tipo de sistemas serão mais evidentes à frequências maiores. Além disso, a modificação fica sujeita à projeção de \mathbf{b} na direção $\hat{\mathbf{r}}$. A frequência de oscilação, por outro lado, se manteve a mesma.

Agora, vamos utilizar o projetor (4.71) para extrair a parte transversal e sem traço da perturbação. Considerando a direção $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ como foi feito na Seção 4.7. Observando

as Eqs. (4.76), encontramos as duas polarizações das ondas gravitacionais

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -4G\mu l_0^2 \left[\frac{\Omega^2}{r} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right) \cos(2\Omega t_r) - \Omega^3 \xi (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \sin(2\Omega t_r) \right], \\ h_{xy}^{TT} &= -4G\mu l_0^2 \left[\frac{\Omega^2}{r} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right) \sin(2\Omega t_r) + \Omega^3 \xi (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \cos(2\Omega t_r) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Observamos que a polarização deixou de ser circular, evidenciando a anisotropia da radiação.

Finalmente, para computar a amplitude da onda, devemos deixar as Eqs. (5.29) na forma $A \cos(\omega t + \phi)$, dessa forma temos para h_{xx}^{TT}

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= 4G\mu l_0^2 \Omega^2 [a \cos(2\Omega t_r) - \sin(2\Omega t_r)] \\ &= 4G\mu l_0^2 \Omega^2 \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(2\Omega t_r) - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(2\Omega t_r) \right], \end{aligned} \quad (5.30)$$

em que os termos a e b são definidos como

$$a = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right), \quad b = \Omega \xi b^2 \cos^2(\theta_b). \quad (5.31)$$

Agora temos que resolver o termo $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= \left[\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right)^2 + \Omega^2 (\xi b^2)^2 \cos^4(\theta_b) \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{r^2} (1 - \xi b^2 \cos(2\theta_b)) + \Omega^2 (\xi b^2)^2 \cos^4(\theta_b) \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{r} [1 - \xi b^2 \cos(2\theta_b)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\xi b^2}{2} \cos(2\theta_b) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim, a amplitude da onda gravitacional modificada é

$$h_0 = \frac{4\mu M G^2}{r l_0 c^4} \left(1 - \frac{\xi b^2}{2} \right), \quad (5.33)$$

considerando que o termo $\cos(2\theta_b)$ é unitário.

A partir dos dados de amplitude, é possível encontrar um *upper-bound* para o termo ξb^2 , porém, uma vez que os dados experimentais das ondas gravitacionais não possuem muita sensibilidade, o *bound* é muito alto. Tome por exemplo o evento GW151226, cuja amplitude máxima detectada foi $3,4_{-0,9}^{+0,7} \times 10^{-22}$. Nesse caso temos $\xi b^2 \leq 0,4$, que é um valor muito alto se levarmos em conta outros *bounds* estipulados [45].

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesse trabalho foi apresentado uma revisão dos assuntos que serão de suma importância para o desenvolvimento da dissertação. Como apresentado, a violação de Lorentz é um interessante efeito que advém de uma teoria da gravitação quântica. É esperado que seus efeitos possam ser observáveis em limites de baixas energias, dessa forma figura como uma maneira de testar teorias.

A violação é gerada por um campo de fundo, o qual faz com que haja a “escolha” de uma direção preferida. Há a distinção entre as transformações de partícula e de observador, pelo fato do campo de fundo que gera a quebra de simetria não se transformar nos segundos tipos de transformação. No contexto da gravitação, espera-se que a violação seja espontânea, uma vez que, caso seja explícita, a identidade de Bianchi não é mais satisfeita.

O campo bumblebee, é um campo de fundo de particular interesse, por ser um campo de relativamente simples e por gerar quebra espontânea de simetria, por seu VEV ser diferente de zero.

A radiação gravitacionais é um resultado interessante decorrente da linearização da RG, é considerado que a métrica do espaço desvia levemente da métrica de Minkowski. Na equação de Einstein linearizada o fator a ser determinado deixa de ser a métrica $g_{\mu\nu}$ e passa a ser a perturbação $h_{\mu\nu}$. Esse tensor não é univocamente determinado durante a linearização, e possui uma transformação de *gauge* assim como o potencial A^μ no eletromagnetismo.

Decompondo suas componentes, foi demonstrado que apenas no tensor espacial sem traço s_{ij} estão os graus de liberdade de propagação da onda, assim, todas as outras componentes constituem graus de liberdade não-físicos. Essa característica leva a associar spin 2 à partícula hipotética, o gráviton.

Na produção de ondas gravitacionais, foi demonstrado que a utilização da perturbação de traço reverso e do *gauge* de Lorentz leva a uma grande simplificação da equação de Einstein linearizada. Utilizando o método da função de Green, a solução para uma fonte isolada, não-relativística e distante foi deduzida e revelou ter natureza quadrupolar. Como exemplo, foi considerado a radiação emitida por um binário em órbita circular, que demonstrou ter frequência de oscilação duas vezes a frequência de rotação do binário.

A adição de LV no modelo é feita a partir da inserção de um termo na ação que gerará a quebra da simetria. acoplamento não-mínimo entre o gráviton e o bumblebee leva a mudança relação de dispersão da teoria de Einstein-Hilbert para ($p^2 = 0$ para $p^2 + \xi (b \cdot p)^2 = 0$), não gerando modos massivos.

Adicionando uma corrente que age como fonte, a produção de ondas gravitacionais

foi analisada. Assim como na teoria usual, novas funções de Green e soluções foram encontradas para dois formatos do VEV do bumblebee, $b^\mu = (b^0, \mathbf{0})$ e $b^\mu = (0, \mathbf{b})$. Na primeira configuração, apenas o tempo retardado foi alterado, evidenciando uma mudança na velocidade de propagação da radiação. No segundo caso, a solução apresentou mudança na amplitude, presença de derivada terceira do termo de quadrupolo, e de anisotropia da solução.

Por fim, a solução foi aplicada no exemplo do binário em órbita circular para comparação com o caso usual. Foi demonstrado a LV não altera a frequência de oscilação da onda. O seu efeito depende da projeção de \mathbf{b} na direção do vetor separação entre a fonte e o ponto de medição. Além disso, nesse tipo de sistema a modificação é mais evidente em frequências de rotação maiores. Uma análise das polarizações revela que ela deixou de ser circular, como consequência da anisotropia do modelo. A partir da amplitude corrigida, foi possível levantar um *upper-bound* de $\xi b^2 \leq 0,5$, mas esse valor foi elevado uma vez que os experimentos não possuem muita sensibilidade.

Até o presente momento, poucos eventos de ondas gravitacionais foram detectados diretamente, todos eles estão de pleno acordo com a RG. Porém com o início de experimentos mais sensíveis, como é o caso do LISA, é esperado encontrar desvios na teoria usual de forma a podermos analisar a validade desse modelo.

Como perspectivas futuras desse trabalho, podemos citar:

- Uso de expansão de multipolos para encontrar uma solução de onda modificada fora do regime de baixas velocidades;
- Análise de modificações na emissão de energia e no efeito de memória das ondas gravitacionais;
- Encontrar valores limites para ξb^2 usando a emissão de energia e *chirp mass*.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES E TENSORES IMPORTANTES NA RELATIVIDADE GERAL

Esse Apêndice tem como objetivo apresentar objetos matemáticos importantes para uma teoria da gravidade em espaços curvos, sem se deter nos detalhes de suas derivações.

A.1 Conexão Afim e a Derivada Covariante

Em um espaço curvo, uma derivada parcial não é uma operação tensorial. Para averiguar isso, observe o que acontece com a derivada parcial de um vetor quando fazemos uma transformação de coordenadas

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}. \quad (\text{A.1})$$

Para resolver esse problema, definimos um conjunto de 4^1 matrizes $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma$ e definimos a operação

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (\text{A.2})$$

chamada de derivada covariante. O conjunto das matrizes Γ são chamadas de conexão afim ou símbolos de Christoffel e se transformam seguindo a seguinte lei

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_{\mu'} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}, \quad (\text{A.3})$$

ou seja, não são tensores, por isso são chamados de símbolos.

Para um tensor de *rank* (k,l), a derivada covariante é definida como

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_n} T^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \dots \nu_l} - \dots - \Gamma_{\sigma\nu_l}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Outro objeto interessante é o tensor de torção

$$T^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \quad (\text{A.5})$$

que de fato é um tensor.

¹Considerando que a dimensão da variedade é quatro

Considerando espaços em que o tensor de torção é nulo e impondo que $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, podemos encontrar uma fórmula para a conexão afim, considere as três permutações de índices

$$\begin{aligned}\nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0; \\ \nabla_\mu g_{\nu\rho} &= \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0; \\ \nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Subtraindo a segunda e terceira equações da primeira e usando o fato que a conexão é simétrica nos dois índices covariantes nos obtemos

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0,$$

que leva a

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu}),\tag{A.7}$$

que é a conexão afim na qual a RG é baseada.

A.2 Curvatura

Um dos conceitos importantes dos espaços curvos é a curvatura. O transporte paralelo em um caminho fechado dentro do espaço curvo leva a transformação desse vetor. a transformação resultante depende da curvatura total dentro do caminho fechado, assim, é interessante ter uma descrição da curvatura em cada ponto do espaço. O tensor de Riemann se encarrega dessa descrição

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda.\tag{A.8}$$

Como o tensor de Riemann é formado de derivadas parciais da métrica, caso ele se anule é possível encontrar um sistema de coordenadas em que todas as componentes da métrica são constantes e vice-versa. Baixando o índice ρ do tensor de Riemann podemos demonstrar as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}R_{\rho\sigma\mu\nu} &= -R_{\rho\sigma\nu\mu}; \\ R_{\rho\sigma\mu\nu} &= -R_{\sigma\rho\mu\nu}; \\ R_{\rho\sigma\mu\nu} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}; \\ R_{\rho[\sigma\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\tag{A.9}$$

isso faz com que o tensor de Riemann tenha 20 componentes independentes em um espaço quadridimensional.

Outros objetos, construídos do tensor de Riemann, que são importantes na RG são

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (\text{A.10})$$

chamado tensor de Ricci e

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R \quad (\text{A.11})$$

chamado de escalar de curvatura.

A.3 Identidade de Bianchi

A identidade de Bianchi é uma identidade diferencial obedecida pelo tensor de Riemann muito importante na RG

$$\nabla_{\rho}R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_{\mu}R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho} = 0. \quad (\text{A.12})$$

A partir dessa identidade, podemos contrair os índices λ com μ e obter

$$\nabla_{\rho}R_{\sigma\nu} - \nabla_{\nu}R_{\sigma\rho} - \nabla_{\mu}R^{\mu}_{\sigma\nu\rho}, \quad (\text{A.13})$$

e contrair σ com ρ obtendo a identidade de Bianchi contraída

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R. \quad (\text{A.14})$$

Operacionalizando mais um pouco com a identidade de Bianchi contraída, podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla^{\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}R &= 0 \\ \nabla^{\mu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

de onde podemos retirar o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.16})$$

Observe que o tensor de Einstein obedece naturalmente a uma equação de continuidade $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu}$ assim como o tensor de energia-momento.

APÊNDICE B – A DINÂMICA DO CAMPO BUMBLEBEE E A LAGRANGIANA QUE GERA A VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Para modificar a equação de onda gravitacional, temos que adicionar um termo na ação que viola a simetria de Lorentz, considerando que B^μ e o acoplamento $B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}$, demonstraremos o processo para encontrar $mathcal{L}_{LV}$. Para tal, devemos inicialmente determinar as equações de movimento do campo bumblebee. Seguiremos o procedimento descrito pela Ref. [46], partimos da ação demonstrada na Equação (3.44)

$$S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \mp b^2) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Observe que, pela ausência de uma fonte representada pelo termo \mathcal{L}_J da lagrangiana, serão derivadas as equações de vácuo. Para derivar as equações de movimento, o procedimento padrão é fazer a variação da ação com relação ao campo B^ν conforme é descrito para a ação de Einstein-Hilbert na Seção 3.2. Dessa forma, devemos fazer

$$\delta S_B = \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left[\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sigma B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \mp b^2) \right] = 0. \quad (\text{B.2})$$

Para tal, precisamos determinar a variação de cada um dos termos da ação. Para cada um temos

$$\begin{aligned} \delta(B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) &= 2B_{\mu\nu} \delta B^{\mu\nu} = 2B_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta B^\nu - \partial^\nu \delta B^\mu) \\ &= 2(-\partial^\mu (B_{\mu\nu}) \delta B^\nu + \partial^\nu (B_{\mu\nu}) \delta B^\mu) \\ &= -4\partial^\mu (B_{\mu\nu}) \delta B^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta(B^\mu B^\nu) = 2B^\mu \delta B^\nu, \quad (\text{B.4})$$

$$\delta[V(B^\mu B_\mu \mp b^2)] = V' \delta(B^\mu B_\mu \mp b^2) = V' B_\nu \delta B^\nu. \quad (\text{B.5})$$

Em que, V' é a derivada do potencial em relação ao seu argumento. Agora podemos escrever a equação de movimento como

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} + 2\sigma B^\mu R_{\mu\nu} - 2V' B_\nu = 0. \quad (\text{B.6})$$

Para a investigação do acoplamento gráviton-bumblebee, podemos seguir a Ref.

[35] e dividir os campos dinâmicos em VEVs e flutuações quânticas

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad B_\mu = b_\mu + \tilde{B}_\mu. \quad (\text{B.7})$$

Assumindo um potencial quadrático para V

$$V(X) = \frac{\lambda}{2} (B^\mu B_\mu \mp b^2)^2,$$

a equação (B.6), é escrita em sua versão linearizada

$$(\eta_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu - 4\lambda b_\mu b_\nu)\tilde{B}^\mu = -2\lambda\kappa b_\nu b_\alpha b_\beta h^{\alpha\beta} - 2\sigma b^\alpha R_{\alpha\nu} \quad (\text{B.8})$$

Para solucioná-la, utiliza-se o método da função de Green. A função de Green é definida como

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}G^{\nu\alpha}(x-y) = \delta_\mu^\alpha \delta^{(4)}(x-y), \quad (\text{B.9})$$

onde $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ é o operador diferencial que atua em \tilde{B}^μ na Eq. (B.8). Para determinar a função de Green, fazemos uma transformada de Fourier e a determinarmos no espaço dos momentos.

Dessa forma, temos que

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{G}^{\nu\alpha}(p) \quad \text{e} \quad \delta^{(4)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (\text{B.10})$$

Aplicando as Eq. (B.10) em (B.9) obtemos

$$(-p^2\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu - 4\lambda b_\mu b_\nu)\tilde{G}^{\nu\alpha}(p) = \delta_\mu^\alpha. \quad (\text{B.11})$$

Enfim, para definir a função de Green completamente, utilizamos o *ansatz*¹

$$\tilde{G}^{\nu\alpha}(p) = \tilde{a}\eta^{\nu\alpha} + \tilde{b}p^\nu p^\alpha + \tilde{c}b^\nu b^\alpha + \tilde{d}(p^\nu b^\alpha + p^\alpha b^\nu), \quad (\text{B.12})$$

em que \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} e \tilde{d} são coeficientes a serem determinados pela Eq. (B.11).

Aplicando (B.12) em (B.11), obtemos

$$\tilde{G}^{\nu\alpha} = -\frac{\eta^{\nu\alpha}}{p^2} - \frac{(p^2 + 4\lambda b^2)}{4\lambda p^2 (b\cdot p)^2} p^\nu p^\alpha + \frac{1}{p^2 (b\cdot p)} (p^\nu b^\alpha + p^\alpha b^\nu). \quad (\text{B.13})$$

E, finalmente, podemos escrever \tilde{B}^μ no espaço dos momentos

$$\tilde{B}^\mu(p) = \frac{\kappa p^\mu b_\alpha b_\beta h^{\alpha\beta}}{2b\cdot p} + \frac{2\sigma b_\alpha R^{\alpha\mu}}{p^2} - \frac{2\sigma p^\mu b_\alpha b_\beta R^{\alpha\beta}}{p^2 (b\cdot p)} + \frac{\sigma p^\mu R}{4\lambda (b\cdot p)} - \frac{\sigma b^\mu R}{p^2} + \frac{\sigma p^\mu b^2 R}{p^2 (b\cdot p)}. \quad (\text{B.14})$$

¹Esse *ansatz* tem o objetivo de construir a função de Green que seja simétrica nos índices α e ν e seja função da métrica de Minkowski, dos momentos e do valor esperado de vácuo do bumblebee.

Agora podemos determinar \mathcal{L}_{LV} , inicialmente temos que linearizar o termo $\sqrt{-g}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} &= \sqrt{-\det(\eta + h)} = \sqrt{-\det(\eta(1 + \eta^{-1}h))} \\
&= \exp \left[\ln \left(\sqrt{-\det(\eta)\det(1 + \eta^{-1}h)} \right) \right] \\
&= -\det(\eta) \exp \left[\frac{1}{2} \ln(\det(1 + \eta^{-1}h)) \right] \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}[\ln(1 + \eta^{-1}h)] \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2} h^\mu{}_\mu - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{1}{8} (h^\mu{}_\mu)^2 + \mathcal{O}(h^3). \tag{B.15}
\end{aligned}$$

A lagrangiana que expressa a interação entre o gráviton e o bumblebee se torna então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LV} &= \sigma \sqrt{-g} B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} \\
&= \sigma \left[b_\mu b_\nu R^{\mu\nu}(h^2) + 2b_\mu \tilde{B}_\nu R^{\mu\nu}(h) + \frac{1}{2} \kappa h^\alpha{}_\alpha b_\mu b_\nu R^{\mu\nu}(h) + \mathcal{O}(h^3) \right]. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo as Eq. (B.14) na (B.16)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{LV} &= \xi \left[p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 (h^\alpha{}_\alpha)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (b \cdot p)^2 h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + p^2 b_\mu b_\nu h^{\mu\alpha} h^\nu{}_\alpha - (b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta + b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)}) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right] \\
&\quad + \frac{4\xi^2}{\kappa^2} \left[\left(-2p^2 b_\mu b_\nu - 2b^2 p_\mu p_\nu + 4b \cdot p b_{(\mu} p_{\nu)} - \frac{p^2 p_\mu p_\nu}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha \right. \\
&\quad \left. + \left(2b_\mu b_\nu p_\alpha p_\beta - b_{(\mu} p_{\nu)}) b_{(\alpha} p_{\beta)} + \frac{b^2 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{2(b \cdot p) p_\mu p_\nu b_{(\alpha} p_{\beta)}}{p^2} + \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{4\lambda} \right) h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \left(b^2 p^2 - (b \cdot p)^2 + \frac{p^4}{4\lambda} \right) (h^\alpha{}_\alpha)^2 + \left(p^2 b_\mu b_\nu - 2(b \cdot p) b_{(\mu} p_{\nu)} + \frac{(b \cdot p)^2 p_\mu p_\nu}{p^2} \right) h^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda \right] + \mathcal{O}(h^3), \tag{B.17}
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN UTILIZADAS

No texto da dissertação foram utilizadas funções de Green para resolver as equações diferenciais para o gráviton, suas derivações são apresentadas nesse Apêndice.

C.1 Função de Green Retardada

A função de Green Retardada é bem conhecida da Eletrodinâmica, por descrever o comportamento das ondas eletromagnéticas. Ela é a função de Green associada ao Operador d'Alembertiano. Como demonstrado na Seção 4.6, a perturbação satisfaz a equação diferencial

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{C.1})$$

Dessa forma, a função de Green associada à esse operador deve satisfazer

$$\square G_R(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \quad (\text{C.2})$$

Antes de mais nada, essa função de Green deve satisfazer a causalidade, ou seja

$$G_R = \begin{cases} 0, & \text{para } y^0 > x^0 \\ G, & \text{para } y^0 < x^0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Essa condição é facilmente satisfeita, considerando que

$$G_R(x-y) = G(x-y)\Theta(x^0 - y^0), \quad (\text{C.4})$$

em que a função $\Theta(x)$ é a função degrau

Passando (C.2) para o espaço dos momentos, temos

$$\square \left[\int d^4x e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(x-y) \right] = \int d^4x e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (\text{C.5})$$

donde podemos escrever

$$\tilde{G}(p) = -\frac{1}{p^2}. \quad (\text{C.6})$$

Agora, precisamos aplicar a transformada inversa para determinar a função de Green

no espaço de configuração

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3p e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

De início, podemos computar a integral em p_0 , ela pode ser avaliada no plano complexo, que torna o processo mais simples pelo teorema do resíduo. Para isso consideremos que p_0 é uma variável complexa (muito embora o momento deva ser real) e escolhamos um caminho conveniente para computar a integração. Observe a Figura 6. Para tal, temos que determinar por qual caminho a integração é feita (C ou C'). Cada um dos caminhos tem duas partes, uma que passa sobre o eixo x e outra curva, dessa forma a integração complexa pode ser dividida em duas componentes

$$\oint_I dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} = \int_{-L}^L dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} + \int_{II} dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2}. \quad (\text{C.8})$$

em que, os símbolos I e II podem denotar os caminhos C e C' e suas partes curvas respectivamente. Para compatibilizar o primeiro termo da integração complexa à integral da Equação (C.7), temos inicialmente que fazer L tender ao infinito. Além disso, devemos fazer que o segundo termo seja zero, ou seja

$$\int_{II} dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} = 0, \quad (\text{C.9})$$

esse será o critério utilizado para estabelecer o caminho.

Analisando o integrando de (C.9), vemos que

$$\frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} = \frac{e^{-Im(p_0)(x^0-y^0)} e^{iRe(p_0)(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2}, \quad (\text{C.10})$$

ou seja, podemos fazer com que o integrando seja nulo com a condição

$$-Im(p_0)(x^0 - y^0) \rightarrow -\infty. \quad (\text{C.11})$$

No caminho C, o imaginário de p_0 tende a $+\infty$ enquanto no caminho C' tende a $-\infty$, além disso, devido a causalidade, $x^0 - y^0 > 0$. Munidos dessas informações, fica claro que o caminho a ser escolhido é o caminho C.

Com o caminho escolhido, podemos finalmente efetuar a integração no plano complexo. Temos outro problema caso desejemos utilizar o teorema dos Resíduos para efetuar a integração. Os polos do integrando estão localizados sobre o eixo Real ($p_0 = \pm|\mathbf{p}|$), e para o

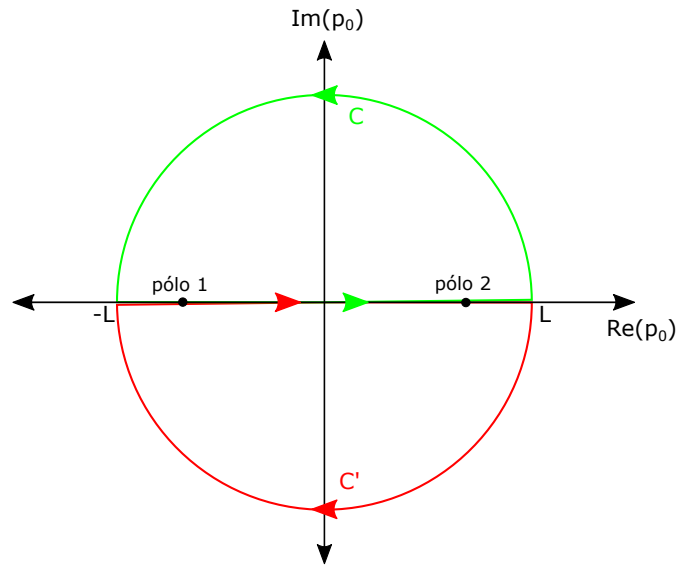


Figura 6: Representação do plano complexo, polos e caminho de integração.

uso do teorema dos resíduos, deveriam estar dentro do caminho fechado. Um truque pode ser utilizado para contornar esse problema, deslocamos os polos para cima com por uma quantidade ε , para tal, devemos fazer uma transformação de $p_0 \rightarrow p_0 - i\varepsilon$. Dito isso, podemos dizer que

$$\oint_C dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_C dp_0 \frac{e^{i(p_0 - i\varepsilon)(x^0-y^0)}}{(p_0 - i\varepsilon)^2 - |\mathbf{p}|^2}, \quad (\text{C.12})$$

vemos que os polos agora são $\pm|\mathbf{p}| + i\varepsilon$, dessa forma, podemos utilizar o teorema dos resíduos.

Os resíduos do integrando são

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(|\mathbf{p}| + i\varepsilon)] &= \frac{e^{i|\mathbf{p}|(x^0-y^0)}}{2|\mathbf{p}|}, \\ \text{Res}[f(|\mathbf{p}| - i\varepsilon)] &= -\frac{e^{-i|\mathbf{p}|(x^0-y^0)}}{2|\mathbf{p}|}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Portanto, pelo teorema dos Resíduos, a integral (C.12) se resume a

$$\oint_C dp_0 \frac{e^{ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2} = 2\pi i \left[\frac{e^{i|\mathbf{p}|(x^0-y^0)}}{2|\mathbf{p}|} - \frac{e^{-i|\mathbf{p}|(x^0-y^0)}}{2|\mathbf{p}|} \right] = -2\pi \frac{\sin[|\mathbf{p}|(x^0-y^0)]}{|\mathbf{p}|}. \quad (\text{C.14})$$

Substituindo o (C.14) em (C.7) e abrindo a integral em coordenadas esféricas

$$G(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p \sin(p\tau) \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ipr\cos\theta} \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (\text{C.15})$$

em que, adotamos $\tau = x^0 - y^0$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e $p = |\mathbf{p}|$ para simplificar a notação.

Vamos proceder em partes para resolver essa integral. A integral em ϕ é simples e resulta em 2π . A integral em θ é solucionada por uma substituição simples ($\cos \theta = x$), seu resultado é

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ipr \cos \theta} = \frac{2 \sin(pr)}{pr}. \quad (\text{C.16})$$

Substituindo (C.16) em (C.15), obtemos

$$\begin{aligned} G(x-y) &= -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dp \sin(p\tau) \sin(pr) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \sin(p\tau) \sin(pr) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp [e^{ip(r+\tau)} + e^{-ip(r+\tau)} - e^{-ip(r-\tau)} - e^{ip(r-\tau)}], \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

a primeira passagem foi feita observando que o integrando é par.

Agora, fazendo a mudança de variável $p \rightarrow -p$ no primeiro e quarto termo, obtemos

$$G(x-y) = \frac{1}{8\pi^2 r} \left[\int_{-\infty}^\infty dp e^{-ip(r+\tau)} - \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ip(r-\tau)} \right], \quad (\text{C.18})$$

as integrais são transformadas de Fourier de funções delta de Dirac

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(r+\tau) - \delta(r-\tau)]. \quad (\text{C.19})$$

A primeira das deltas leva à função de Green avançada que possui problemas com a causalidade, porém, quando multiplicada pela função degrau de (C.4) se torna identicamente nula. Portanto nos resta

$$G_R(x-y) = -\frac{1}{4\pi r} \delta(r-\tau) \Theta(x^0 - y^0), \quad (\text{C.20})$$

que é a função de Green Retardada, utilizada na Seção 4.6.

C.2 Funções de Green para as Equações Modificadas

Vimos no Capítulo 5 que a relação de equação diferencial da produção de ondas gravitacionais é modificada para

$$[p^2 + \xi(b \cdot p)^2] h_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} \quad (\text{C.21})$$

Assim, temos que definir uma nova função de Green para encontrar a solução para o gráviton.

Lembrando que agora usaremos a métrica (+,-,-,-), o que vai ser interessante para a análise do que muda no processo de encontrar a função de Green.

Aqui a função de Green no espaço dos momentos é

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + \xi(b \cdot p)^2}, \quad (\text{C.22})$$

e a transformada inversa de Fourier se torna

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 + \xi(b \cdot p)^2} \quad (\text{C.23})$$

Vamos separar nos casos que $b^\mu = (b^0, \mathbf{0})$ e $b^\mu = (0, \mathbf{b})$

C.2.1 Caso $b_\mu = (b_0, \mathbf{0})$

Nesse caso, a Eq. (C.23) se resume a

$$\begin{aligned} G_{b_0}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - p^2 + \xi(b^0 p_0)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 p e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0(x^0-y^0)}}{C^2 p_0^2 - p^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

em que $C^2 = 1 + \xi(b^0)^2$ por conveniência.

Esse caso é bem parecido com o da função de Green Retardada. Também devemos garantir a causalidade, dessa forma, a partir de uma condição equivalente à (C.3), essa função de Green pode ser escrita como $G_{b_0}(x-y) = G(x-y)\Theta(x^0 - y^0)$.

Agora, fazendo a integração no plano complexo para resolver a integral em p_0 , vemos uma diferença para o caso anterior. Como a métrica é diferente, devemos fazer a integração no pela curva C' , além disso, quando usarmos uma prescrição para deslocar os polos, os mesmos devem ser deslocados para baixo. Tomando esses cuidados, podemos calcular os resíduos

$$\text{Res}f(p/C - i\varepsilon) = \frac{e^{-i(p/C - i\varepsilon)(x^0 - y^0)}}{2C^2[p/C]}, \quad \text{Res}f(p/C - i\varepsilon) = \frac{e^{-i(-p/C - i\varepsilon)(x^0 - y^0)}}{2C^2[-p/C]}. \quad (\text{C.25})$$

Com isso, a Eq. (C.24) se resume a

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{pC} \sin \left[\frac{p}{C}(x^0 - y^0) \right]. \quad (\text{C.26})$$

O restante do procedimento é bem parecido com o da função de Green Retardada e não será repetido. O resultado final é

$$G_{b_0} = \frac{1}{4\pi r \sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \delta \left[r - \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \xi(b^0)^2}} \right) \right] \Theta(\tau). \quad (\text{C.27})$$

Essa solução é bastante interessante, vemos que a amplitude e que o termo τ são

divididos pelo fator $\sqrt{1 + \xi (b^0)^2}$, Na Seção 5.2, vemos que esses termos levam a uma mudança na velocidade de propagação das ondas gravitacionais.

C.2.2 Caso $b^\mu = (0, \mathbf{b})$

Essa solução é um pouco mais complexa, a Eq. (C.23) se reduz a

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{b}}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - p^2 + \xi (bp \cos \Psi)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0(x^0-y^0)}}{p_0^2 - K^2 p^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

em que $K^2 = 1 - \xi (\mathbf{b} \cos \Psi)^2$. Ψ é o ângulo entre os vetores \mathbf{b} e \mathbf{p} .

Como as demais, devemos escrevê-la como $G_{\mathbf{b}}(x-y) = G(x-y)\Theta(x^0 - y^0)$ para assegurar a causalidade. Agora, resolvemos a integral em p_0 , que demonstra ser equivalente às anteriores. Com isso obtemos

$$G_{\mathbf{b}}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp p \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ipr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin[Kp\tau]}{K}. \quad (\text{C.29})$$

Agora, integral em φ não é simples como as anteriores, uma vez que $\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta_b + \sin \theta \sin \theta_b \cos(\varphi_b - \varphi)$ e não há solução analítica. Para contornar esse problema, usamos a suposição que b é muito pequeno, dessa forma, podemos fazer uma expansão perturbativa. Fazendo a expansão a partir de $\tilde{G}(p)$

$$\tilde{G}_{\mathbf{b}}(p) = \frac{1}{p_0^2 - p^2} - \xi b^2 \frac{p^2 \cos^2 \Psi}{(p_0^2 - p^2)^2} + \mathcal{O}(b^3) \quad (\text{C.30})$$

O primeiro termo da expansão leva à função de Green Retardada, assim, temos apenas que tratar o segundo termo. Escrevemos a segunda ordem da expansão perturbativa da função de Green

$$G_2(x-y) = \frac{\xi b^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dp p^4 \int d\Omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \cos^2 \Psi \int_{-\infty}^\infty dp_0 \frac{e^{-ip_0\tau}}{(p_0^2 - p^2)^2}. \quad (\text{C.31})$$

A integral em p_0 resulta em

$$\int_{-\infty}^\infty dp_0 \frac{e^{-ip_0\tau}}{(p_0^2 - p^2)^2} = \frac{\pi(\sin(p\tau) - p\tau \cos(p\tau))}{p^3}, \quad (\text{C.32})$$

e a integral no ângulo sólido

$$\int d\Omega e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \cos^2 \Psi = \frac{2\pi\{\sin(pr)[\cos(2\theta_b)(p^2 r^2 - 3) + p^2 r^2 - 1] + pr[3 \cos(2\theta_b) + 1] \cos(pr)\}}{p^3 r^3}. \quad (\text{C.33})$$

Por fim, precisamos substituir as Eqs. (C.32) e (C.33) em (C.31) e executando a

integração em p . O resultado final para G_2 é

$$G_2(x-y) = \frac{\xi}{8\pi r^3} \Theta(\tau) \left\{ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})^2 \left[\left(\frac{\tau}{r} - 1 \right) \delta(\tau - r) + \tau \delta'(\tau - r) \right] + \tau r b^2 \cos(2\theta_b) \delta(\tau - r) \right\}, \quad (\text{C.34})$$

em que, $\delta'(\tau - r)$ denota a derivada da função delta com relação ao seu argumento. Com isso, definimos a função de Green para o caso $b^\mu = (0, \mathbf{b})$

$$G_{\mathbf{b}}(x-y) = G_R(x-y) - G_2(x-y). \quad (\text{C.35})$$

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Über gravitationswellen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 154-167., 1918.
- 2 EDDINGTON, A. S. The propagation of gravitational waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 102, n. 716, p. 268–282, 1922.
- 3 WEBER, J. Evidence for discovery of gravitational radiation. *Physical Review Letters*, APS, v. 22, n. 24, p. 1320, 1969.
- 4 HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, v. 195, p. L51–L53, 1975.
- 5 WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A. Gravitational waves from an orbiting pulsar. *Scientific American*, JSTOR, v. 245, n. 4, p. 74–83, 1981.
- 6 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 7 CATTANI, M.; BASSALO, J. M. F. Gravitational waves observation: brief comments. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 38, n. 4, 2016.
- 8 ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- 9 HOSSENFELDER, S. *Experimental search for quantum gravity*. [S.l.]: Springer, 2017.
- 10 SELINGER, J. V. et al. Chiral symmetry breaking in langmuir monolayers and smectic films. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 8, p. 1139, 1993.
- 11 JACKIW, R.; PI, S.-Y. Chern-simons modification of general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 68, n. 10, p. 104012, 2003.
- 12 LEE, T.-D.; YANG, C.-N. Question of parity conservation in weak interactions. *Physical Review*, APS, v. 104, n. 1, p. 254, 1956.
- 13 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964.
- 14 SCHWINGER, J. The theory of quantized fields. i. *Physical Review*, APS, v. 82, n. 6, p. 914, 1951.
- 15 STREATER, R. F.; WIGHTMAN, A. S. *PCT, spin and statistics, and all that*. [S.l.]: Princeton University Press, 2016.
- 16 GREAVES, H.; THOMAS, T. On the cpt theorem. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 45, p. 46–65, 2014.
- 17 WU, C.-S. et al. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Physical review*, APS, v. 105, n. 4, p. 1413, 1957.

- 18 CHRISTENSON, J. H. et al. Evidence for the 2π decay of the k_2^0 meson. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 13, p. 138–140, Jul 1964. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.138>.
- 19 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Cpt and strings. *Nuclear Physics B*, v. 359, p. 545–570, 1991.
- 20 GREENBERG, O. C p t violation implies violation of lorentz invariance. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 23, p. 231602, 2002.
- 21 EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, Wiley Online Library, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905.
- 22 MICHELSON ALBERT A.; MORLEY, E. W. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether. *Sidereal Messenger*, ADS, v. 6, p. 306–310, 1887.
- 23 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- 24 CARROLL, S. M. et al. Noncommutative field theory and lorentz violation. *Physical Review Letters*, APS, v. 87, n. 14, p. 141601, 2001.
- 25 ALFARO, J.; MORALES-TECOTL, H. A.; URRUTIA, L. F. Loop quantum gravity and light propagation. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 10, p. 103509, 2002.
- 26 RIZZO, T. G. Lorentz violation in warped extra dimensions. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2010, n. 11, p. 156, 2010.
- 27 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- 28 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- 29 KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 69, n. 10, p. 105009, 2004.
- 30 GREISEN, K. End to the cosmic-ray spectrum? *Physical Review Letters*, APS, v. 16, n. 17, p. 748, 1966.
- 31 MOFFAT, J. Spontaneous violation of lorentz invariance and ultra-high energy cosmic rays. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 12, n. 07, p. 1279–1287, 2003.
- 32 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz violation, nambu-goldstone modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 065008, 2005.
- 33 KOSTELECKÝ, V. A. Riemann–finsler geometry and lorentz-violating kinematics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 701, n. 1, p. 137–143, 2011.
- 34 BLUHM, R. Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 6, p. 065034, 2015.

- 35 BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 4, p. 045001, 2006.
- 36 ESCOBAR, C.; MARTÍN-RUIZ, A. Equivalence between bumblebee models and electrodynamics in a nonlinear gauge. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 9, p. 095006, 2017.
- 37 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. [S.l.: s.n.], 2004.
- 38 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Théorie du champ*. Paix, 1965.
- 39 RAMOS, M. P.; MALUF, R. V. Sobre a teoria de einstein para ondas gravitacionais e sua aplicação no estudo da radiação emitida por um pulsar binário. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 40, n. 2, 2018.
- 40 MALUF, R. et al. Einstein-hilbert graviton modes modified by the lorentz-violating bumblebee field. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 2, p. 025007, 2014.
- 41 HINTERBICHLER, K. Theoretical aspects of massive gravity. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 84, n. 2, p. 671, 2012.
- 42 ABBOTT, B. P. et al. Gw170814: a three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 14, p. 141101, 2017.
- 43 CONNAUGHTON, V.; BURNS, e. a. Fermi gbm observations of ligo gravitational-wave event gw150914. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 826, n. 1, p. L6, 2016.
- 44 SEOANE, P. A. et al. The gravitational universe. *arXiv preprint arXiv:1305.5720*, 2013.
- 45 CASANA, R. et al. Exact schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- 46 MALUF, R. et al. Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous lorentz violation. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 2, p. 025005, 2013.