ENSINO DE CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS: QUE RACIOCÍNIO AVALIAR?

Francisco Regis Vieira Alves
Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará
fregis@etfce.br
Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará
herminio@ufc.br
Rosélia Costa de Castro Machado
Universidade Federal do Ceará
roselia@ufc.br

Que Raciocínio o Livro de Cálculo Permite Avaliar?

Falar sobre avaliação no *Cálculo Diferencial e Integral* exige desenvolver algumas considerações sobre o livro didático. Exige que observemos minuciosamente sua abordagem, qual o enfoque do autor, a natureza das situações-problema apresentadas e, para um professor experiente, observar justamente quais os aspectos não contemplados pela obra didática. Certamente que respondendo alguma destas perguntas, construiremos uma argumentação razoável para a seguinte pergunta: Que *raciocínio dos alunos* o livro de Cálculo permite avaliar?

Parafraseando Fischbein (1987), convém lembrar que *não enxergamos ou não percebemos aquilo que não somos preparados para ver*. Desta forma, se temos um professor que atua num curso de graduação, como um curso de Licenciatura em Matemática, o qual vivenciou toda uma formação árida, formal, rigorosa, precisa, e exigente, como evidenciamos, por tradição, em Matemática Pura. Para o mesmo, uma abordagem didática fundamen-

ISBN: 978-85-89872-42-3

tada no *formalismo*,[1] situações-problema que privilegiam apenas os aspectos lógicos da teoria ou a *demonstração* de teoremas, pode ser considerada normal. Afinal, trata-se do modelo *standart* de exposição axiomática.

Quando analisamos um panorama sob uma influencia marcante do *formalismo*, achamos pertinentes os seguintes questionamentos: priorizamos o ensino ou a aprendizagem? Promoveremos que espécie de *raciocínio* aos estudantes? O processo avaliativo sob tal perspectiva pode tornar-se menos tortuoso ou cômodo? Avaliaremos prioriamente o processo ou o produto da atividade matemática do aluno?

Alguns destes questionamentos superam o poder de síntese deste trabalho. Todavia, buscaremos argumentar os que consideramos mais oportunos. Inicialmente, uma pergunta que sob uma inspeção inicial, para um desavisado, pode parecer natural, se relaciona à natureza do *raciocínio* que o mestre pretende promover nos seus alunos.

Afirmamos que a missão do professor de Matemática ficará comprometida se, na sua proposta de ensino e, conseqüentemente, na sua proposta de avaliação, esteja claro em que momento e local devemos ter a apresentação de determinado *teorema* e a sua *demonstração*, embora, não esteja claro, para este mesmo professor, o significado e a natureza do termo "raciocínio'.

Ora, como desenvolver de forma razoável uma atividade docente se não temos uma concepção aceitável e

[1] Hersh (1997, p. 41) lembra que no meio do século XX, a corrente filosófica formalista foi a mais defendida publicamente. Neste período, o estilo matemático dos jornais, textos e tratados insistia no detalhe das definições e provas. Diziam quase nada sobre o problema de interesse ou o motivo do emprego de determinado método.

ISBN: 978-85-89872-42-3

coerente do que significa o termo "*raciocínio*"? Aparentemente, desde Sócrates, esta pergunta incomodou vários estudiosos. E em relação ao professor, a incompreensão do referido termo afetaria sua proposta de avaliação?

Acreditamos que sim, afinal o *termo raciocínio, como a maior parte dos termos científicos usuais empregados na linguagem comum, é pleno de ambigüidades* (MILL, 1869, p. 3). Brousseau (2005, p. 15) adverte que a *palavra "raciocínio" (reasoning) é largamente utilizada por professores em todas as áreas, com uma variedade de significados*. Mais adiante, o didata francês exemplifica que na Matemática, o ensino do *raciocínio* é concebido como uma apresentação de modelos formais de provas, que devem ser fidedignamente reproduzido pelos estudantes. Todavia, *atualmente para professores e psicólogos raciocínio é uma atividade mental, e não apenas uma simples memorização de provas* (BROUSSEAU, G. e GIBEL, P., 2005, p. 14).

Alguns autores do passado caracterizam o *raciocínio* como um instrumento que pode conduzir ao desconhecido. Para Duhamel (1865, p. 17), *raciocinar ou deduzir significa encontrar um meio ou uma relação entre o conhecido e o desconhecido. Esta dedução se faz pelo sentimento de evidência, que não necessita nenhuma regra, mas pode ser suprido por alguma*.

A partir destas colocações, vemos que a questão colocada ao professor de Matemática acerca do que constitui um *raciocínio* não apresenta nada de trivial. Na história, encontramos matemáticos que deixaram tal advertência, com destaque para Henri Poincaré quando perguntava: *O que é compreender? Essa palavra possui o mesmo significado para todo mundo? Compreender a demonstração de um teorema consiste em examinar cada passo silogístico que compõem sua sucessão, e ficar convencido que está correto e de acordo com as regras do*

ISBN: 978-85-89872-42-3

jogo? Do mesmo modo, a definição de compreensão consiste simplesmente em reconhecer que o significado e todos os termos empregados são familiares e estamos convencidos que não temos uma contradição? (POINCARÉ, 1899, p. 72).

Num contexto atual, encontramos nas considerações de Brousseau e outros eminentes pesquisadores de reconhecimento internacional em Educação Matemática (FISCHBEIN, 1987; DUVAL, 1995, POLYA, 1945; SIERPINSKA, 1994), que sustentam posições semelhantes em relação ao princípio que diz o conhecimento de uma grande quantidade de *teoremas*, por parte do aluno, não garante que o mesmo se torne um exímio solucionador de problemas. Pelo contrário, *diante da valorização da memorização de teorema e definições, nem o professor promove esta habilidade solucionadora e, muito menos o livro possibilita o desenvolvimento do raciocínio heurístico* (POLYA, 1945, 1962).

De fato, encontramos que espécie abordagem nos livros de Cálculo? Referendando-se em nossa experiência, observamos o seguinte percurso:

$$\textit{definição formal} \rightarrow \underset{\text{aspecto heurístico}}{\overset{\textit{aspecto operacional}}{\textit{teorema}}} \rightarrow \overset{\textit{aspecto operacional}}{\textit{exercício}}$$

(*). Nele observamos que, ao finalizar o ritual de apresentação formal de um objeto, temos o enunciado e a *demonstração* do *teorema* e, em seguida, apenas os aspectos operacionais e algorítmicos são retomados para a resolução de exercícios.

Optamos pelo seguinte percurso metodológico de ensino do Cálculo:

$$\textit{definição formal} \rightarrow \underset{\text{aspecto heurístico}}{\overset{\textit{aspecto operacional}}{\textit{teorema}}} \rightarrow \underset{\textit{idéias heurísticas}}{\overset{\textit{aspecto operacional}}{\textit{exercício}}}$$

(**).

ISBN: 978-85-89872-42-3

Acreditamos que o processo de avaliação torna-se mais simplificado e até mesmo cômodo para o professor no caminho descrito em (*), quando o comparamos com o percurso descrito em (**).

De fato, no percurso (*), o próprio *método axiomático* é adotado como metodologia de ensino da Matemática, Por este viés, dá-se a entender que o *saber matemático*, desde sua origem, se constitui de forma "bonitinha" e organizada como o encontramos no livro didático. Neste sentido, convém lembrar que u*m matemático, assim como um pintor ou um poeta, é um produtor de modelos. Se os seus modelos são mais duradouros que os outros, é porque ele trabalha com idéias* (HARDY, 1940, p. 13). Mas são justamente estas idéias chaves presentes nos teoremas, que poderiam ser trabalhadas, re-utilizadas diante das situações-problema, e que, na prática, são desperdiçadas em função do *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991, p. 285) predominante no livro.

Otte (1991, p. 286) descreve o "*algoritmo da certeza*". Sua idéia é sublinhar que, *por meio deste algoritmo, podemos sair ou escapar de um labirinto. Neste caso, o algoritmo resolve o problema, mas não dá nenhum insight para a descrição desse labirinto* (OTTE, 1991, p. 286).

No nosso contexto específico do ensino do Cálculo, podemos propor uma enorme quantidade de exercícios sobre *derivada parcial*, com o emprego correto de todas as regras estabelecidas em sala de aula e, mesmo assim, o aluno não ficará mais esperto, ou seu conhecimento sobre o *objeto derivada*, necessariamente aumentará. Basta observar que, na maioria dos casos, verificamos que nem mesmo a interpretação geométrica deste objeto conceitual ele dispõe.

Desta forma, fica novamente nas mãos do professor avaliar. Mas avaliar o aluno a partir da verificação e

ISBN: 978-85-89872-42-3

utilização do *algoritmo da certeza*, descrito por Otte? A descrição que fizemos sobre a limitada compreensão intuitiva em relação à *derivada parcial*, ocorre também no caso de *limites* e da *integral*. Basta que, ao concluir as disciplinas *standart* de Cálculo I, II e III, perguntemos ao aluno: O que é um *limite*? O que é uma *derivada*? O que é uma *integral*? Qual a relação entre estes objetos?

Quando conversamos com um aluno, ele exclama: *O que é professor eu não sei, mas se me der um exercício, eu faço as contas!* Infelizmente a natureza deste tipo de questionamento não faz parte da avaliação e, nas abordagens dos livros didáticos, não observamos este tipo de preocupação. Contudo, os estudantes manifestam dificuldades para responder estas perguntas em virtude de não serem preparados para tal.

Se considerarmos, por exemplo, as formulações de Douady (1994), sobre à dialética *instrumento-objeto*, nós poderíamos interpretar esta dificuldade, compreendendo que eles conseguem perceber estes objetos do Cálculo apenas como *instrumento adaptado* (DOUADY, 1994, p. 12), ou seja, um instrumento conceitual adaptado para a resolução de um problema específico.

De outro modo, os objetos *limite*, *derivada* e *integral*, possuem um reconhecimento cultural no contexto científico e histórico da *Análise*. E quando olhamos para os próprios objetos que adotamos numa estratégia, eles são considerados, conforme Douady, como um *objeto matemático*.

Certamente a mudança descrita por Douady: $\text{instrumento} \underset{\text{avaliação}}{\Rightarrow} \text{objeto}$ não ocorre do dia para a noite. Mas temos a convicção que, dentro do processo de avaliação, esta mudança e outras preocupações deveriam influenciar as expectativas do mestre.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Inserido neste processo, o professor poderia avalia a adequabilidade das *representações mentais* dos alunos, observadas ao longo de sua utilização ou verbalização. Duval (1995, p, 28) explica que as *representações mentais* são identificadas geralmente com as *imagens mentais*, mas cobrem um domínio mais amplo do que apenas os das imagens.

Sua importância para a avaliação pode ser verificada quando um aluno possui uma *imagem mental* errônea de um conceito, em contradição flagrante com sua *definição formal*. Esta falta de sintonia poderá gerar *representações* inadequadas e, nem sempre num espaço curto de tempo, conseguimos, por meio do ensino, enfraquecer as velhas concepções em relação ao conceito e conseguir fortalecer uma sintonia coerente.

O sistema notacional, sua escrita gráfica e a linguagem particular, constituem para Duval (1995, p. 17) o sistema de *representações semióticas*. Quando nos debruçamos atentamente sobre a obra de Duval, extraímos algumas conseqüências relevantes no que se refere à avaliação em Matemática.

De fato, conforme Duval (1995, p. 21) *a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados na aprendizagem fundamental relacionados ao raciocínio, a compreensão dos textos, a aquisição do tratamento lógico e matemático confrontam-se com três fenômenos estreitamente relacionados: diversificação dos registros de representação semiótica; diferenciação entre representante e representado; coordenação entre diferentes registros.*

Em nosso contexto, a *diversificação dos registros de representação semiótica* pode ser evidenciada, por exemplo, nas possibilidades de representação do objeto denominado de *derivada direcional*. Neste caso temos:

ISBN: 978-85-89872-42-3

$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = Lim_{t\to 0}\frac{f(P_0 + t\cdot u) - f(P_0)}{t\|u\|}$ ou, no caso em que temos o caráter de *diferenciabilidade,* podemos também escrever $\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\frac{u}{\|\vec{u}\|}$. Calculada num ponto P_0 na direção do vetor $\vec{u}$. Variando-se a notação dependendo do livro.

A *coordenação entre diferentes registros* adquire importância, por exemplo, para o final da disciplina de Cálculo em várias variáveis, onde desenvolvemos o estudo de *integrais duplas e triplas*. É comum a apresentação de uma situação descrita em termos de *coordenadas retangulares* e requisitar-mos sua resolução empregando *coordenadas cilíndricas* ou *esféricas.*

Um registro pode permitir de efetuar-mos certos tratamentos de modo mais econômicos e mais poderosos do que com outros registros (DUVAL, 1995, p. 59). Neste caso, determinados procedimentos de integração são impraticáveis sem o recurso de *coordenadas cilíndricas* ou *esféricas*. Insistindo demasiadamente neste percurso, o professor estimulará a operacionalização de uma mudança de registros, sem a compreensão, por parte do aluno, da necessidade de sua utilização.

A inadequação metodológica no caso da utilização das integrais do tipo $\iint$ e $\iiint$ é clássico. Em geral o aluno faz as contas, mas não sabe sobre o que ou qual objeto está direcionando à sua atenção. Trata-se da utilização de *representações não-conscientes* (DUVAL, 1995, p. 24). Contudo, *a consciência da atividade mental é indispensável para uma posterior reflexão mais conceitual e tematizada sobre as próprias ações mentais e pensamen-*

ISBN: 978-85-89872-42-3

tos (SIERPINSKA, 1994, p. 71). Infelizmente, o alcance da consciência da própria atividade mental desenvolvida, sua sistematização-generalização é frágil e permanece limitada a poucos alunos habilidosos.

As Possibilidades de Avaliação com o Uso da Tecnologia

Nossa experiência diária no ensino do Cálculo em várias variáveis, com recursos tecnológicos, mostra que os alunos se recordam com mais facilidade da interpretação geométrica da *derivada parcial* do que a *demonstração* do *teorema de Fubinni*. Ou ainda que eles evidenciam com mais facilidade o caráter geométrico da *diferenciabilidade* de uma *superfície* no $\mathbb{R}^3$, do que a verificação formal do $Lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y\|} = 0$. Ademais, é mais natural observar geometricamente a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$, do que a *demonstração* do teorema de Schwarz.

Em nossa concepção de avaliação, o *raciocínio geométrico*, o discurso do sujeito e suas concepções acerca dos objetos do Cálculo, são essenciais. Contudo, devemos levar em consideração o aumento considerável de complexidade, no que se refere ao emprego das *representações semióticas* presentes nas obras didáticas (APOSTOL, 1969; BUCK, 1965; GUIDORIZZI, 1986). Percebemos isto observando a ilustração 1.

Cálculo I $\Rightarrow$ Cálculo III

$Lim_{x\to a} f(x) = L$	$Lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L$
$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$
$\int_a^b f(x)dx$	$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$

Ilustração 1:
Sistema representacional

ISBN: 978-85-89872-42-3

Em relação à transição que destacamos acima, Tall (1997, p. 9) lembra que *uma das principais mudanças no processo de raciocínio é quando as definições são fornecidas sistematicamente por axiomas para a construção de teorias. Tal mudança coincide na transição da escola para a Universidade*.

No ambiente universitário, quando recorremos à ilustração acima, vemos os principais *processos matemáticos*. Recorrendo às concepções de Condillac, concluímos que alguns deles são impraticáveis sem o recurso de uma simbologia notacional eficiente e, assim, somente com o recurso da língua materna nos defrontamos com várias impossibilidades operatórias. Estas barreiras obrigam o uso das simbologias destacada na ilustração 1 e é aí que avaliamos raciocínio impróprios ou inconsistentes nos estudantes.

Por outro lado, a língua materna pode ser utilizada quando proporcionamos aos estudantes certas experiências visuais proporcionadas pela tecnologia. Concordamos com Giaquinto (2007, p. 54) *quando afirma que o ato de visualização é o modo de delinear nosso senso de experiência como uma evidência e, tal experiência deve incluir satisfatoriamente a confirmação de uma proposição* B.

A colocação de Giaquinto merece uma maior explicação. De fato, é comum, numa disciplina de Cálculo III, o professor afirmar proposições do tipo: uma *superfície diferenciável* num ponto se confunde com um plano neste ponto; quando calculamos uma integral tripla podemos ter um volume; quando a função possui derivadas contínuas, então, suas derivadas mistas são idênticas.

Geometricamente, estas proposições que constituem afirmações sobre alguns objetos da Matemática, necessitam de validação ou verificação. Nem sempre a *evidência matemática* é suficiente, num âmbito formal e

ISBN: 978-85-89872-42-3

rigoroso, para o alcance da verdade matemática. Desta forma, desenvolvemos atividades que proporcionassem uma experimentação visual, impossível no ambiente lápis e papel, além de buscar a confirmação de todas as conjecturas produzidas pelos alunos.

Na figura abaixo, utilizamos o teste da Hessiana, para a localização visual dos *extremos* e os *pontos de sela* da função $f(x,y) = x^3y - xy^3$. Ao decorrer das discussões, procuramos avaliar os sentidos de todas as afirmações produzidas pelos alunos a respeito destes objetos abstratos do $\mathbb{R}^3$.

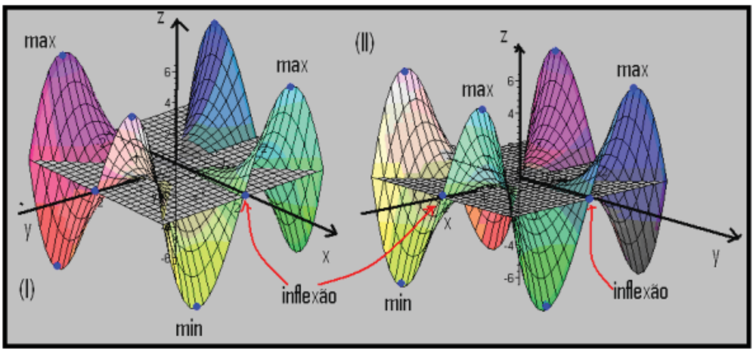


Ilustração 2: Identificação de Extremos

Somente com esta representação plotada pelo *Maple*, podemos proporcionar ao aluno a compreensão de determinadas propriedades intrínsecas deste tipo de *superfície*, como por exemplo, seu eixo de *simetria* e *orientação*. Neste caso, apoiamo-nos nas formulações de Giaquinto (2007, p. 15) quando explica que a *percepção de um objeto pode ser radicalmente afetada por intermédio de sua orientação*. Em situações desta natureza, conseguimos alimentar a imaginação dos alunos a respeito do

ISBN: 978-85-89872-42-3

objeto *superfície*, que é apresentado de forma altamente abstrata pelos livros didáticos.

Vejamos uma situação do cálculo de volume. Por exemplo, calcular o volume da região apresentada abaixo, delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 4$ (cilindro) e os planos $y + z = 4$ e $z=0$. A idéia é identificar geometricamente os limites de integração.

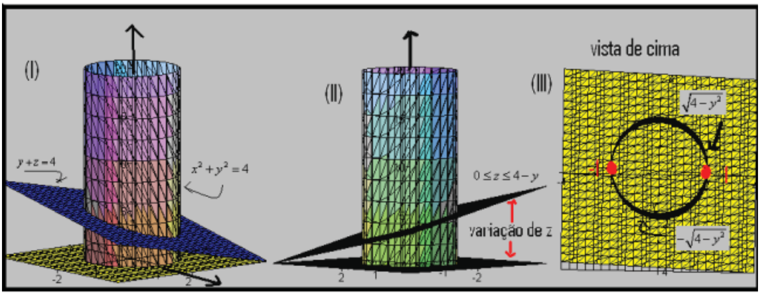


Ilustração 3: Calculo do volume usando integrais

Em outra situação, requisitamos o cálculo do volume limitado pelas *superfícies* $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$. Neste caso, proporcionamos aos alunos, por meio das figuras apresentadas na ilustração 4, o motivo do porque e da necessidade de se empregar *coordenadas esféricas* e a inviabilidade de se empregar *coordenadas cilíndricas*. Interessantes aplicações podem ser encontradas em Henriques (2006).

ISBN: 978-85-89872-42-3

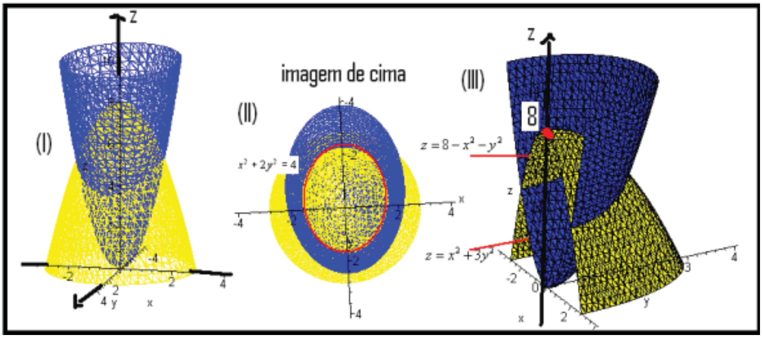


Ilustração 4: Identificação da região de integração

Outra situação que dificilmente pode ser explorada no ambiente lápis e papel se refere ao estudo dos *Campos Vetoriais* no $\mathbb{R}^3$. Para tal conclusão, basta verificar analisar algumas obras como MARSDEM e TROMBA (1996) e KAPLAN (1962). Repare que o percurso descrito em azul pode ser utilizado para a compreensão da natureza não conservativa do referido *campo vetorial*.

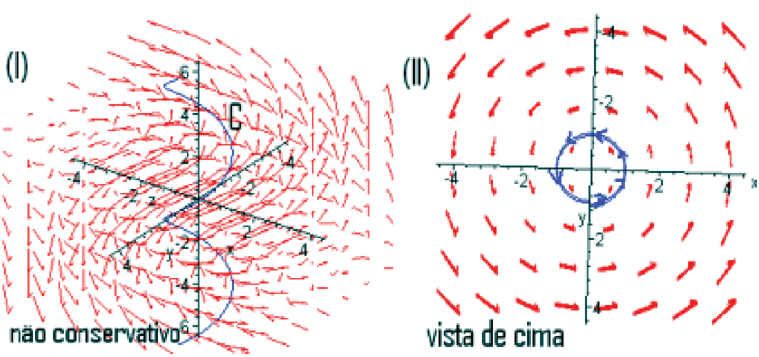


Ilustração 5: Visualização do Campo Vetorial

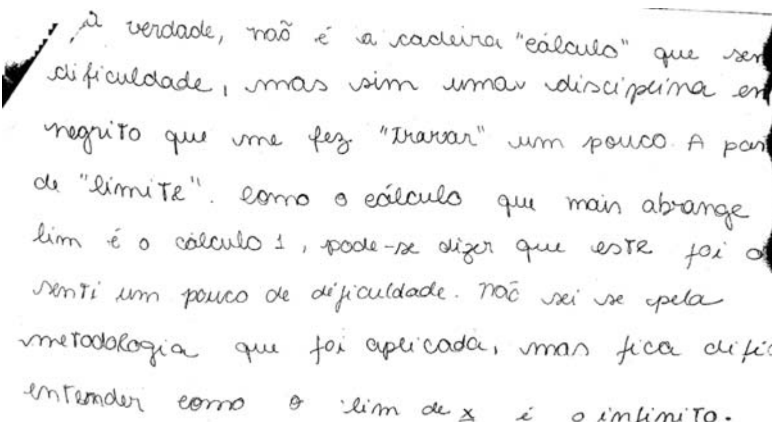
ISBN: 978-85-89872-42-3

Metodologia e Entrevistas

A experiência foi realizada no decorrer da disciplina de Cálculo III (4º semestre), no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE. A investigação contou com a participação de 12 alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

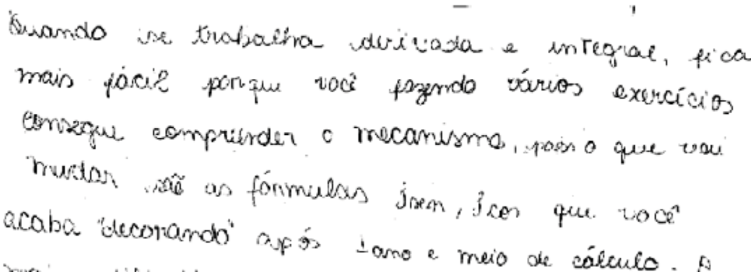
As atividades baseavam-se na *analise a priori* e *a posteriori* das abordagens didáticas dos conteúdos do Cálculo, seguindo-se as *entrevistas semi-estruturadas* e a análise em grupo das abordagens de determinados assuntos específicos. A escolha destes assuntos levou em consideração às limitações impostas pelo ambiente lápis e papel. Passamos a descrição de alguns dos elementos principais identificados nos protocolos produzidos pelos.

> **Aluno 1:** A noção da limite sempre apresenta como um barreira considerável para os alunos. Tanto no Cálculo em uma como o Calculo em várias variáveis. Em relação a isto, o aluno 1 faz um menção direta aos entraves proporcionados pelo simbologia.

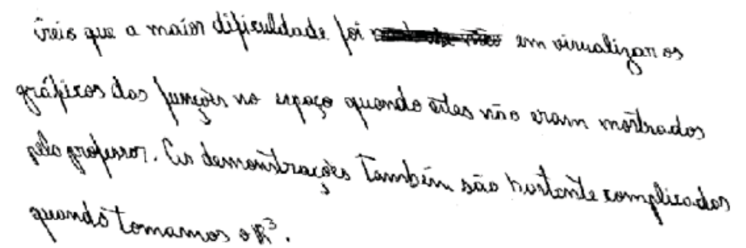

À verdade, não é a cadeira "cálculo" que sen
dificuldade, mas sim uma disciplina em
negrito que me fez "travar" um pouco. A par
de "limite". Como o cálculo que mais abrange
lim é o cálculo 1, pode-se dizer que este foi o
senti um pouco de dificuldade. Não sei se pela
metodologia que foi aplicada, mas fica dific
entender como o lim de x é o infinito.

ISBN: 978-85-89872-42-3

O mesmo aluno descreve sua transição do Cálculo em uma para o Calculo em várias variáveis. Em um ano e meio de estudo, segundo o mesmo, a compreensão da origem dos instrumentos utilizados é mais difícil do que aplicação dos resultados. Vemos ainda que o aluno salienta o caráter de memorização para determinados procedimentos.


Quando se trabalha derivada e integral, fica mais fácil porque você fazendo vários exercícios consegue compreender o mecanismo, pois o que vai mudar são as fórmulas ∫sen, ∫cos que você acaba 'decorando' após 1 ano e meio de cálculo. O

Aluno 2: Neste trecho, o aluno destaca suas dificuldades em relação à compreensão das demonstrações. Outro aspecto aponta se refere aos pré-requisitos do Cálculo III.


Creio que a maior dificuldade foi em visualizar os gráficos das funções no espaço quando estes não eram mostrados pelo professor. As demonstrações também são bastante complicadas quando tomamos o R^3.

Aluno 3: O aluno sublinha sua dificuldade na interpretação gráfica o que para nós era esperado, dado que, em geral, esta forma de raciocínio é pouco explorada no Cálculo I.

ISBN: 978-85-89872-42-3

ndizagem nos conteudos que voce estudou? Qual o Calculo mais complicado, 1, 2

? FALTA DE DOMÍNIO DO CÁLCULO 1, QUE CONSTANTEMENTE (OU SEMPRE) É UTILIZADO EM CÁLCULO 3 E DIFICULDADE EM INTERPRETAR GRÁFICOS

O CÁLCULO 3 NA MINHA OPINIÃO É O MAIS COMPLICADO, POIS É PRECISO TER UMA BOA NOÇÃO DO CÁLCULO 1 E CÁLCULO 2.

Considerações Finais

Temos a convicção que um aspecto imprescindível de ser considerado desde o início da concepção do processo avaliativo no Cálculo é a transição entre o Cálculo de uma para o Cálculo em várias variáveis. Em nossa experiência diária, sentimos as inseguranças enfrentadas pelos alunos nesta transição. A literatura sobre a transição do ensino universitário para o ambiente acadêmico é vasta, por outro lado, evidenciamos a escassez de estudos direcionados na transição do Cálculo em uma para o Cálculo em várias variáveis. Além disso, certas obras didáticas (KAPLAN, 1962; WIDER, 1947) não permitem uma transição natural, no sentido de que os alunos compreendam certos conceitos do Cálculo em várias variáveis com o auxílio do Cálculo em uma variável,

A concepção que encontramos na prática dos professores formadores, diz respeito ao grau de importância atribuído numa avaliação. Um dos riscos em se tomar este instrumento como decisivo no acompanhamento da aprendizagem de um estudante é apontado por Cury (1994, p. 69), quando adverte que *quando os professores constroem um gabarito, já estão estabelecendo uma verdade única, isolada da realidade dos alunos. Outro agravante pode ser citado: ao avaliar a prova separadamente das outras atividades desenvolvidas durante o período de aprendizagem, ou seja, do próprio trabalho de sala de*

ISBN: 978-85-89872-42-3

aula, do estudo individual ou dos trabalhos em casa, o professor isola o processo de aprendizagem de seu produto.

Cury adverte o perigo de se tomar a prova como o único instrumento de avaliação. Este tipo de atitude caracteriza uma concepção acerca do conhecimento matemático, certamente que outras concepções podem ser evidenciadas (ORTIZ, 2006).

Ao longo de nossa experiência de ensino, valorizamos ao extremo a fala, o discurso e as concepções sobre os objetos apresentados pelo computador. O sentido e a significação extra fornecida pela representação geométrica de tais objetos conceituais, mostrada pela máquina, evitou uma ulterior apreensão mecanizada das simbologias necessárias para a operacionalização e, conseqüentemente, a memorização excessiva.

Tal operacionalização nem sempre ocorre de forma ideal, em relação ao risco que corremos Giaquinto (2007, p. 193) sublinha que *uma vantagem destas regras formais é que elas podem ser aplicadas assemanticamente, isto é, sem nenhum pensamento a respeito da composição das simbologias ou o que elas denotam*. Contudo, alguma memorização é necessária em virtude do *sistema de representações semióticas* do Cálculo em várias variáveis.

Finalmente, a partir das observações e discussões com os alunos, sentimos sérias dificuldades para avaliar os raciocínios aritméticos, algébricos e geométricos. Tais dificuldades eram esperadas, afinal, *raciocinar é um dos mais complicados de todos os fenômenos mentais. É digno de observar que efetuar sua análise mais aperfeiçoada é mais complicado, ainda num recente período da história intelectual humana, do que qualquer outro caso complexo da consciência humana* (MILL, 1869, p. 424).

Vale lembrar a colocações de Schoenfeld (2007, p. 277) quando se refere a um dos garotos participantes de

ISBN: 978-85-89872-42-3

sua pesquisa, destacando que *parece claro a impossibilidade de revelar a complexidade do raciocínio de Brandon sobre frações usando um teste típico de caneta e papel*. Em nosso caso, nos deparamos com dificuldades semelhantes, com agravantes devido à natureza dos objetos do Cálculo.

Bibliografia

APOSTOL, T. M. **Calculus: Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equation and Probability**, Second Edition, New York: John Wiley & Sons, 1969.

BORBA, M. & VILLAREAL, M. **Human with-media and the reoganization of Mathematical Thinking: Modeling, Visualization and Experimentation**, New York: Springer, 2005.

BROSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactiques de mathematiques 1970 – 1990**, London: Klumer Academic Publishers, 2005.

BROUSSEAU, G. e GIBEL, P. **Didactical Handling of Students´ Reasoning processes in Problem Solving Situation**, In: **Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom**, New York: Springer, 2005, 13-58.

BUCK, R. C. **Advanced Calculus**, Second Edition, New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

CORNU, B. **Limits**, In: TALL, D. (Ed) **Advanced Mathematical Thinking**, Londres: Klumer Academic Press, 1991, 153-165.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos** (tese de doutorado), UFRGS, 1994.

ISBN: 978-85-89872-42-3

DOUADY, R. **Jeux de Cadres et dialetique outil-objet dans l´eneignement des Mathématiques** (thèse de doctorat), Paris VII, 1984.

DUHAMEL, J. M. **Des méthodes dans les Sciences de Raisonement**, Paris: Gauthier-Villars, 1865.

DUVAL, R. **Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**, Editeur: Peter Lang, 1995.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: an educational approach**, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library, 1987.

GIAQUINTO, M. **The Visual Thinking in Mathematics: an epistemological study**, Oxford: University Press, 2007.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de Cálculo**, vol.2, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1986.

HARDY, G. H. **A mathematician´s Apology**, Cambridge: Cambridge Univesity Press, 1940.

HENRIQUES, A. **L´enseignement et l´apprentissage des integrales multiples: analyse didactique integrant l´usage du logiciel maple** (Thèse de Doctorat), Grenoble, Université Joseph Fourier, IMAG, 2006.

HERSH, R. **What is Mathematics Really?** New York: Oxford University Press, 1997.

KAPLAN. W. **Advanced Calculus**, fifth edition. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing, 1962,

MARSDEM, J. & TROMBA, A. **Vector Calculus**, New York, W.H. Freeman and Company, 1996.

MILL. J. **Analysis of the Phenomena of the Human Mind**, Vol I, London: Longmans Green Reader, 1869.

MILL J. S. **Système de Logique Deductive et Inductive**, Paris: Félix Alcan, 1889.

ISBN: 978-85-89872-42-3

ORTIZ, A. R. **Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en La educación obligatoria: perspectivas de professores e alumnos** (tesis), Universitat de Barcelona, 2006.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**, São Paulo: UNESP Editora, 1991.

POINCARÉ, H. **La valeur de La Science**, Paris: Flamarion, 1970.

POINCARÉ, H. **La logique et l´intuition dans la science mathématique**, L´enseignement Mathématique, Vol. 1, 1899, 158-162

POLYA, G. **How To Solve It: a new aspect of mathematical method**, Princeton: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving**, New York: John Wiley and Sons, 1962.

SCHOENFELD, A. **Reflections on an Assessment Interview: What a Close Look at Student Understanding Can Revel**, In: SCHOENFELD, A. (editor) **Assessing Mathematical Proficiency**, New York: Cambridge University Press, 2007, 269-277.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics**, London: The Palmer Press, 1994.

TALL, D. **From School to University: the effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking**. In Thomas, M. O. J. (Ed.) Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference, University of Auckland, 1997, 9-26.

WIDER, D. **Advanced Calculus**, New York: Prentice Hall, 1947.

ISBN: 978-85-89872-42-3