



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ (UFC)
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WALDO HOSTERNES PEIXOTO BRANDÃO

**LOCALIZAÇÃO GRAVITACIONAL DE MODELOS EM
SEIS DIMENSÕES COM BRANA ESPESSA TIPO-CORDA**

FORTALEZA

Janeiro de 2019

WALDO HOSTERNES PEIXOTO BRANDÃO

**LOCALIZAÇÃO GRAVITACIONAL DE MODELOS
EM SEIS DIMENSÕES COM BRANA ESPESSA
TIPO-CORDA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- B819l Brandão, Waldo Hosternes Peixoto.
Localização gravitacional de modelos em seis dimensões com brana espessa tipo-corda / Waldo Hosternes Peixoto Brandão. – 2019.
115 f. : il.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2019.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.
Coorientação: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.
1. Mundo brana. 2. Dimensões extras. 3. Equação de Einstein. 4. Localização gravitacional. 5. Problema da Hierarquia. I. Título.

CDD 530

WALDO HOSTERNES PEIXOTO BRANDÃO

LOCALIZAÇÃO GRAVITACIONAL DE MODELOS EM SEIS DIMENSÕES COM BRANA ESPESSA TIPO-CORDA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva (Coorientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Franklin de Souza Veras
Centro Universitário Christus (Unichristus)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luis José Silveira de Sousa
Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico aos meus pais (Lourdes Brandão e Hosternes Brandão), que muito me apoiaram durante o doutorado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pelas oportunidades e esperanças oferecidas ao longo do tempo vivido deste curso de doutorado. À minha esposa Alice Santos pelo companheirismo e preocupação. Aos meus pais Lourdes Brandão e Hosternes Brandão que souberam valorizar a formação que escolhi para o doutorado. Às minhas irmãs Beatriz Brandão e Liana Brandão e aos demais parentes pelos momentos que permitiram aliviar um pouco as dificuldades do doutorado.

À todos os amigos que desejaram o meu sucesso nesta jornada, como meus ex-orientadores de mestrado e graduação no curso de engenharia. Um abraço às pessoas que conheci no curso de doutoramento, como muitos dos meus colegas do LASSCO (Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes) e aos outros colegas de turma ou professores, aos quais pude compartilhar como me sentia e/ou o que fazia.

Agradecimento especial ao professor Davi Monteiro Dantas, pelas orientações de informática largamente dadas, uma pessoa com quem eu pude sempre contar para me ajudar, e ao professor José Euclides Gomes da Silva, pelas orientações de pesquisa e de informática fornecidas que possibilitou-me estudar temas ou áreas correlatas a Física. Ao meu orientador de doutorado Carlos Alberto Santos de Almeida que me aceitou no grupo e que teve fé que eu concluísse o curso de forma satisfatória, a quem agradeço também pelas boas orientações que indicaram o caminho que deveria seguir e pelas aulas dadas.

Obrigado aos membros da banca examinadora de defesa de tese, que contribuíram para o texto ser melhorado por sugestões e considerações.

Por fim, também agradeço ao financiamento de bolsa dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a todos os funcionários do departamento de física que souberam me ajudar quando precisei e que sempre foram hospitaleiros comigo.

RESUMO

Uma das premissas da presente pesquisa consiste em suavizar o modelo Guergueta-Shaponishkov (GS) como um caso especial aproximado. Seguem algumas condições obedecidas em todas as soluções descritas neste resumo, tais como, as de regularidade para uma brana regular espessa tipo-corda e de energia fisicamente aceitas. Foram avaliadas soluções analíticas específicas da Equação de Einstein que suavizam o modelo GS, excetuando apenas um modelo de brana exótica. Ademais, duas soluções analíticas que suavizam o modelo GS da Equação de Einstein de cunho geral, consideram escalares-de-pressão iguais, podendo requerer do cálculo de uma integral bem definida por integração numérica, se necessário. Tais escalares podem ser de energia, como associado fisicamente se forem iguais. Nesse contexto, desenvolveu-se uma solução diferencial de cunho geral que pode suavizar o modelo GS, em caso especial, analisada coerentemente por uma das soluções analíticas gerais citadas relacionada a esta solução diferencial. Foi também desenvolvido um método de solução aproximativa para todo o domínio da solução que suaviza o modelo GS e para a Equação de Einstein, bem como para a localização gravitacional, que se espera ser de convergência exata pelas condições estabelecidas que permitem que os escalares de pressão iguais sejam escolhidos. Desse modo, é estudada a localização das perturbações gravitacionais descrevendo, compativelmente, o potencial análogo de Schrödinger e o Problema da Hierarquia. Assim, permitiu-se associar o potencial newtoniano para distâncias curtas com grávitons massivos seguindo o Potencial de Yukawa em 4D, com um mundo de brana espessa tipo-corda estático associado ao espaço de bulk em 2D com simetria cilíndrica.

Palavras-chave: Mundo brana espessa tipo-corda; Dimensões extras; Modelo GS; Equação de Einstein; Localização gravitacional; Potencial análogo de Schrödinger; Problema da Hierarquia.

ABSTRACT

One of the premises of the present research is to smooth the Guergueta-Shaponishkov (GS) model as an approximate special case. The following are some conditions physically accepted obeyed in all the solutions described in this abstract, such as: those of regularity for a thick string-like braneworld as well as that of energy. Specific analytical solutions of the Einstein Equation that smooth the GS model were analyzed, except for an exotic brane model. In addition, two analytical solutions, that smooth the GS model of the Einstein equation of general nature are considered to have the same pressure scalars, which may require the calculation of a well defined integral by numerical integration, if needed. Such scalars can be of energy, as associated physically if they are equal. It was also developed in such context, a differential solution of the general kind, which can smooth the GS model by the determined conditions as followed in special case. Then, in the special case from this differential solution, coherently was developed one of the related general analytical solutions. It was also developed an approximative solution method for the whole domain of the solution that smoothes the GS model and for the Einstein Equation, as well as the gravity localization, that is expected to be of exact convergence due to the established conditions which allow that the equal pressure scalars be chosen. It is so studied the localization of gravitational perturbations, describing, in a consistent manner, the analogous potential of Schrödinger and the Hierarchy Problem. Thus, it was possible to associate the Newtonian potential for short distances following the 4D Yukawa Potential, through a static thick string-like braneworld associated to 2D bulk space with cylindrical symmetry.

Key-words: Thick string-like braneworld; Extra dimensions; GS model; Einstein Equation; Gravity localization; Analogue Schroendiger Potential; Hierarchy Problem.

LISTA DE FIGURAS

1	Escalar t_θ com a relação crítica de $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$	89
2	Fator de warp σ com $c/\lambda = c_o/c$ e $r = \rho$	89
3	Fator de warp γ segundo a relação $m = c_o = 2c = 2\lambda$, do modelo B com $r = \rho$	90
4	Relação entre t_o e t_ρ do modelo B com $m = c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$	91
5	Escalar de Ricci do modelo B com $m = c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$	91
6	Fator de warp γ do modelo C por $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$, com $n_1 = 2n_2 = 2$	93
7	Relação entre t_o e t_ρ do modelo C por $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$, com $n_1 = 2n_2 = 2$	93
8	Escalar de Ricci do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$, com $n_1 = 2n_2 = 2$	93
9	Fator de warp γ do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 3c = 3\lambda$ e $r = \rho$	95
10	Relação entre os escalares t_o e t_ρ do modelo D com $c_o = m_1 = 3c = 3\lambda = 2m_2$ e $r = \rho$	95
11	Escalar de Ricci do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 3c = 3\lambda$ e $r = \rho$	95
12	Modo zero do modelo B com $m = c_o = 2c = 2\lambda$	98
13	Modo zero do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$, com $n_1 = 2n_2 = 2$	99
14	Modo zero do modelo D com $c_o = m_1 = 3c = 3\lambda = 2m_2$	99
15	Potencial análogo de Schrödinger do modelo B com $c = 1$ e $m = c_o = 2c = 2\lambda$	99
16	Potencial análogo de Schrödinger do modelo B com $c = 2$ e $m = c_o = 2c = 2\lambda$	100
17	Potencial análogo de Schrödinger com $c = 1 = n_2 = n_1/2$ e $c_o = 2c = 2\lambda$ do modelo C..	100
18	Potencial análogo de Schrödinger com $c = 2 = n_1 = 2n_2$ e $c_o = 2c = 2\lambda$ do modelo C...	100
19	Fator de warp σ em função de z de modelo D, para $c_o/\lambda = c_o/c = 6$	105
20	Fator de warp γ em função de z de modelo D, com $c_o/c = 6$, $\lambda = c$, $m_1 = 2m_2$ e $\lambda' = m_2$	105
21	Potencial análogo de Schroedinger para $c_o/c = 6$ e $m_2 = c = \lambda = m_1/2$ de modelo D.....	105

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Contexto histórico e físico das dimensões extras.....	12
1.2 Contexto da pesquisa.....	17
1.3 Objetivos relacionados.....	18
1.4 Estrutura da tese.....	20
2 MODELOS COM MUNDO BRANA EM 5D OU 6D	22
2.1 Modelos em cinco dimensões.....	23
2.1.1 Sobre teorias de Kaluza-Klein.....	23
2.1.2 Problema da Hierarquia.....	25
2.1.2 O modelo de Randall-Sundrum.....	26
2.1.3 O problema da hierarquia resolvido pelo modelo de Randall-Sundrum.....	29
2.2 Modelos em seis dimensões.....	30
2.2.1 Condições de regularidade na origem e condições de energia.....	32
2.2.2 Modelo GS.....	34
2.2.3 Modelo corda-charuto.....	36
2.2.4 Modelo suavizado em 6D.....	38
2.2.5 Modelo com vórtice abeliano em seis dimensões.....	39
2.3 Descrições físicas associadas em 5D e 6D.....	42
2.3.1 Aspectos universais gravitacionais em modelos com D dimensões.....	42
2.3.2. Sobre ressonâncias e localização gravitacional em mundos branas com 5D ou 6D.....	45
3 SOLUÇÕES PROPOSTAS DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN COM LOCALIZAÇÃO GRAVITACIONAL	46
3.1 Soluções obtidas com escalares de pressão iguais das dimensões extras.....	48
3.1.1 Solução das Equações de Einstein.....	48
3.1.2 Localização gravitacional.....	53
3.1.3 Problema da Hierarquia.....	56
3.2 Método geral de construção de solução seguindo escalares de pressão iguais.....	57

3.3 Solução geral e diferencial da Equação de Einstein com escalares de pressão iguais e podendo suavizar o modelo GS.....	59
3.4 Solução analítica alternativa da solução geral diferencial que suaviza o modelo GS.....	70
3.4.1 Solução da Equação de Einstein.....	70
3.4.2 Localização gravitacional.....	74
3.5 Solução da Equação de Einstein com componentes escalares de pressão e energia respectivos iguais.....	75
3.6 Soluções aproximativas de Equação de Einstein e localização gravitacional.....	77
3.6.1 Solução aproximativa da solução diferencial geral da Equação de Einstein...	77
3.6.2 Solução aproximativa geral diferente.....	84
3.6.3 Solução aproximativa geral de localização gravitacional.....	85
4 CLASSE DE SOLUÇÕES ANALÍTICA DE MUNDOS DE BRANAS REGULARES	87
4.1 Soluções da Equação de Einstein.....	87
4.2 Localização gravitacional.....	97
4.2.1 Aspectos de localização gravitacional.....	97
4.2.2 Fatores de warp do modelo D e localização gravitacional referente.....	103
5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	108
5.1 Conclusões.....	108
5.2 Perspectivas.....	111
REFERÊNCIAS	112

1 INTRODUÇÃO

Esta seção detalhará o contexto da presente pesquisa, especificando suas origens, de acordo com a importância do tema a ser descrito, que é associado à Física Teórica e à Física de Partículas. O trabalho desenvolve modelos com métricas de seis dimensões de espaço e tempo, mais especificamente seguindo um espaço de bulk de duas dimensões espaciais associadas ao mundo quadridimensional conhecido em forma de brana, permitindo o estudo de localização gravitacional respectivo para o quantum gravitacional denominado de gráviton.

O assunto abordado na tese está inserido numa das áreas estudadas pelo grupo de pesquisa de Teoria Quântica de Campos e Gravitação, ao qual pertenço. O grupo pesquisa em muitas áreas envolvendo Física de Altas Energias e é coordenado pelo Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

1.1 Contexto histórico e físico das dimensões extras

Estudos de dimensões extras espaciais numa métrica que descreva uma variedade de espaço-tempo englobando o espaço denominado bulk, referentes a dimensões que não fazem parte da métrica quadridimensional usual (do mundo conhecido) como descrita pela Relatividade Geral de 1915, são muito estudadas de forma a localizar a gravidade na métrica quadridimensional e respeitar outras condições, como o limite newtoniano da força gravitacional. O modelo de Randall-Sundrum [1,2], por exemplo, resolve coerentemente o Problema da Hierarquia, referindo-se à incompatibilidade entre a escala de energia de Planck e a escala de energia das interações eletrofracas. Nesse sentido, os modelos de Randall-Sundrum (RS) tipos 1 e 2 [1,2] não só resolvem o Problema da Hierarquia, de forma a permitir que a escala de energia da força gravitacional seja equivalente ao das demais forças conhecidas (eletromagnética, fraca e forte), como também fornecem a correção ao Potencial Newtoniano [1,2]. Assim, muita atenção foi dada pelos pesquisadores para as influências físicas que possam aparecer em relação à métrica em quatro dimensões, que fenomenologicamente é bem aceita pela Física de Partículas relacionada ao Modelo Padrão.

O modelo de Randall-Sundrum (RS) inclui uma dimensão extra infinita, que, quando relacionada ao modelo teórico de uma ação oriunda da Teoria Quântica de Campos, pode reparametrizar o valor de energia de vácuo existente em um mundo quadridimensional, localizado numa região estática do espaço de bulk, tornando-a equivalente a energia associada às interações eletrofracas e resolvendo o Problema da Hierarquia. Este problema pode ser interpretado como uma discrepância não natural entre a força gravitacional em relação às outras três forças (fraca, forte e eletromagnética). Assim, o mundo quadridimensional usual, que é muito associado fenomenologicamente, é descrito como uma brana (que corresponde a um plano, porém com quatro dimensões), enquanto a quinta dimensão (que pode ser estendida até o infinito) é perpendicular a esta brana, pelo mesmo modelo.

O modelo de Randall-Sundrum data de 1999, mas a ideia de usar dimensões extras é bastante antiga, sendo considerada inicialmente na década de 1920, pelo modelo de Kaluza-Klein em Ref. [3]. O modelo teórico de Kaluza-Klein, que consiste na introdução de uma dimensão extra periódica em relação à métrica em quatro dimensões usual, foi considerado para se tentar unificar o Eletromagnetismo com a gravidade, sem sucesso. No entanto, este modelo serve para delimitar outros modelos teóricos com n dimensões extras (que podem ter extensão infinita) segundo uma localização gravitacional, pelos conhecidos modos de Kaluza-Klein (KK).

Houve o questionamento, por Guergueta e Shaponishkov (2000), de porque há inclusão somente de uma só dimensão extra em relação ao espaço quadridimensional usual, que resultou no modelo GS [4] que possui como caso especial a métrica de Randall-Sundrum em 5D. Como consequência, houve o aparecimento de outros estudos também em seis dimensões [5,6,7,12], por uma extensão do modelo GS como caso aproximado especial. Nesse contexto, salienta-se que a Teoria das Cordas, como exemplo diferente, considera que nosso mundo é constituído de mais de quatro dimensões, sendo as dimensões extras compactificadas (ao redor e próximas do espaço quadridimensional de espaço-tempo conhecido segundo a Relatividade Geral de Einstein), diferentemente como abordado pelos modelos GS e RS. A Teoria das Cordas (ou sua evolução dada pela Teoria das Supercordas), que foi desenvolvida inicialmente na década de 1960, foi e é considerada para se unificar a Teoria Quântica com a Gravidade, apesar de até hoje não haver tido alguma comprovação experimental a favor dela.

Uma das previsões experimentais da Teoria das Supercordas é a verificação de existência de partículas supersimétricas, que ainda não foram detectadas. Espera-se ser

observadas evidências de tais partículas em experimentos com aceleradores de partículas a altas energias, como o LHC. No contexto das dimensões extras considerada pela tese, diferentemente da Teoria das Cordas que segue dimensões compactificadas no nosso mundo, tem-se em mente observar influencias na brana com uma certa probabilidade, delimitando o potencial newtoniano pelo Potencial de Yukawa (que possui curto alcance) como analisado.

Comparando os modelos de branas em 6D em relação aos referentes de 5D envolvendo a partícula de spin-2 do quantum gravitacional (gráviton), constata-se, como vantagem dos modelos em 6D de brana fina (sem espessura) (que podem ser estendidos para modelos de brana espessa em 6D) como será detalhado no desenvolvimento teórico, que:

1) os grávitons massivos resultam numa menor correção da Lei de Newton associada ao Potencial de Yukawa [4];

2) não há necessidade de criação de um campo extra, como o Dilaton, para explicar a localização de outros campos na brana em 4D; e

3) o confinamento do modo zero no espaço de bulk (oriundo da localização gravitacional da Equação tipo-Schrödinger) ocorre de forma espontânea, com apenas a interação com a gravidade sendo necessária para um campo vetorial de calibre associado [18,34].

Englobando modelos em 6D com brana espessa, há como vantagens, além dos analisados primeiramente, dos modelos em 6D em relação aos modelos referentes em 5D, que: 1) não há necessidade de ajuste fino na constante cosmológica em 6D, oriunda da tensão na brana, para cancelamento da constante cosmológica em 4D [4]; e 2) há a possibilidade de explicação da hierarquia de massa de neutrinos e da suposta partícula nova de 750 GeV descoberta no LHC, como descrita na tese do Davi Monteiro Dantas [35] relacionando algumas fontes. Quanto à comparação entre modelos de 5D com e sem espessura, basicamente o modelo de 5D com espessura delimita uma solução suave no mundo de brana, enquanto uma brana espessa em 5D descreve uma solução de forma não suave próxima à região da brana [35].

Modelos de fatores de warp (caracterizados como coeficientes que multiplicam os elementos diferenciais de uma métrica em estudo, relacionados à variação de espaço-tempo) com seis dimensões são mais ricas que com somente uma dimensão extra, pelo aumento de graus de liberdade fornecido com o acréscimo de uma dimensão extra, com geometria, curvatura e simetrias próprias como desenvolvidas. O maior número de graus

de liberdades, por exemplo, permite acrescentar contribuições de modos vetoriais e escalares, além do modo tensorial em quatro dimensões, embasado numa ação lagrangeana pelo modelo de Abelian-Higgs da Teoria Quântica de Campos [6,7].

Há outros estudos de dimensões extras que consideram, além do raio de bulk, outra variável para os fatores de warp. Um exemplo é o trabalho de Yi Zhong et al. (2014) [8] que consideram vários tipos de métricas com n dimensões associadas por uma brana localizada na condição de junção associada (podendo-se incluir o modelo de Randall-Sundrum, desse modo [13]), envolvendo a gravidade crítica como fundada por Lu e Pope (2011) [9] em quatro dimensões. No entanto, estudos com uma só dependência espacial dos fatores de warp descreve um espaço de bulk com escoamento estacionário (que não se modifica com o tempo, em toda uma região) da distribuição de energia associada.

No modelo GS, constituído por uma brana espessa tipo-corda (segundo o nosso mundo descrito por uma só dimensão espacial, em relação ao espaço de bulk) representando o mundo quadridimensional pela métrica de Minkowsky e tendo simetria axial cilíndrica para o espaço de bulk, há somente solução de vácuo, além de não respeitar algumas condições de regularidade na origem requeridas para os fatores de warp segundo a Relatividade Geral. Diferentemente do modelo de Randall-Sundrum, o problema da Hierarquia do modelo GS é solucionado por fatores de warp que podem ajustar a massa de Planck em quatro dimensões no universo quadridimensional, segundo uma massa de Tolman, por unidade de comprimento, como descrita [4] coerentemente com os fatores de warp relacionados pela Equação de Einstein (expressão que delimita a Relatividade Geral quanto ao estudo de uma métrica) correspondente.

Um exemplo de extensão do modelo GS é dada pelo modelo da corda-charuto, possibilitando respeitar as condições de regularidade na origem e as condições de energia com valores diferentes de vácuo. O modelo da corda-charuto é descrito como uma extensão do modelo GS por ter geometria descrita com comportamento aproximadamente igual, em seis dimensões, ao modelo GS, para quando a dimensão extra do raio de bulk tende ao infinito positivamente. Esta geometria, portanto, modifica a métrica do modelo GS coerentemente com as fontes associadas ao tensor de tensão-energia da Equação de Einstein correspondente. Outro modelo que tem características físicas obedecidas semelhantemente é descrito como modelo tipo-corda suave [12], que difere do modelo corda-charuto pela dependência angular do espaço de bulk associada à métrica em seis dimensões. Dessa forma, tendo-se o modelo GS como caso especial, estes modelos e os

propostos pelo texto suavizam o modelo GS similarmente pelas condições de energia e de regularidade na origem a seguir comentados.

As condições de energia fraca e forte associadas conjuntamente são coerentes com haver energias positivas, oriundas da Relatividade Geral, em forma de escalar de energia ou pressão relacionada a cada dimensão num contexto de mundo brana associado ao espaço de bulk. A origem desta interpretação pode residir na Teoria Quântica de Campos, em que só há partículas com energia positiva por termos quadráticos. Já a condição de energia dominante respeita o princípio da causalidade, em que a energia no mundo quadridimensional deva ser maior ou igual ao de um escalar referente a uma dimensão extra, devido à dependência temporal de energia da métrica quadridimensional sendo tipo-luz, no caso de partículas com velocidade da luz, ou tipo-tempo para partículas com velocidades menores que a da luz.

De forma mais fundamental, as condições de regularidade na origem delimitam a geometria, próxima a brana espessa tipo-corda de modelos em 6D, de forma regular, descrevendo no presente trabalho uma brana em 4D, em forma de espaço-tempo de Minkowsky como se conhece, de acordo com as dimensões extras e a distribuição de escalares de pressão (ou energia) no espaço de bulk. É nesse sentido, portanto, que as condições de regularidade devem ser válidos.

Como exemplo de outro modelo que suaviza o modelo GS, o modelo teórico de Abelian-Higgs foi determinado por duas equações diferenciais associadas à Equação de Einstein [6,7], solucionando numericamente os fatores de warp (obedecendo as condições regulares na origem) e os campos considerados. Este modelo teórico seguiu as equações de movimento oriundas da Teoria Quântica de Campos e da Integral de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral, mediante o modelo de Abelian-Higgs por um vórtice abeliano caracterizado pela lagrangeana correspondente. Em tais equações são associados os escalares de energia e pressão representados por três coordenadas: a quadridimensional em forma de brana espessa, a do raio de bulk e a do ângulo de raio de bulk. De maneira análoga, podendo incluir a Teoria Quântica de Campos, os escalares de energia e pressão dos modelos em seis dimensões descritos pela literatura e propostos são relacionados desta forma.

Nas próximas seções será articulado como o referencial teórico descrito se relaciona com a tese.

1.2 Contexto da pesquisa

O estudo desta pesquisa está inserido no contexto de duas dimensões extras em relação ao espaço quadridimensional usual, embasado na Relatividade Geral, com a dimensão extra radial podendo ser infinita e a dimensão extra angular compacta. Essas dimensões extras serão consideradas por uma simetria cilíndrica, com a altura deste sendo representado pelo espaço quadridimensional em seu eixo, de modo estático, como um mundo brana tipo-corda espessa (com espessura). Com isso, tal estudo considerará condições físicas aceitas, advindas da Teoria Quântica de Campos e da Relatividade Geral, tendo uma métrica em seis dimensões de forma mais geral.

Neste sentido, o estudo envolve dimensões extras associadas ao mundo brana quadridimensional de Minkowsky fenomenologicamente aceito, considerando as Equações de Einstein oriundas da Relatividade Geral. A Teoria Quântica de Campos, nessa perspectiva, pode fornecer uma formulação em seis dimensões, descrevendo algumas condições físicas como, por exemplo, a descrição de alguma lagrangeana associada à Integral de Einstein-Hilbert com constante cosmológica em seis dimensões (com tal integral resultando na Equação de Campo de Einstein com constante cosmológica em seis dimensões), podendo delimitar as fontes associadas da Equação de Einstein.

A relevância do estudo é o de detalhar as condições físicas coerentemente, que permitem possíveis grávitons (partículas de spin-2 e quantum gravitacional) num mundo de brana espessa tipo-corda (de acordo com a localização gravitacional determinado ao longo do espaço de bulk) descrito de forma regular, associadas às Equações de Einstein como relacionadas pela métrica em seis dimensões, podendo permitir uma suavização do modelo GS (que está relacionado às seis dimensões discriminadas com escalares de energia e pressão de vácuo) como condição física pelos escalares referentes [10,11]. Assim, esta suavização será analisada com energias e pressões diferentes de vácuo, assimilando um máximo de condições físicas, em que o caso especial é representado aproximadamente pelo modelo GS, segundo a Equação de Einstein com escalares aproximadamente iguais a zero, mediante os fatores de warp (que, assim, possuem comportamento decrescente com o aumento da dimensão extra radial do espaço de bulk, indo até aproximadamente zero) relacionados à métrica correspondente. Detalha-se que os fatores de warp com apenas dependência radial do espaço de bulk caracterizam

distribuição de pressões ou energias de modo estacionário (sem tal distribuição mudar ao longo do tempo em cada posição do espaço de bulk). Assim, alguns modelos serão apontados, em seis dimensões, que suavizam o modelo GS no mesmo sentido e seguem as condições físicas previstas.

É dado especial atenção a modelos com delimitação analítica durante o texto, com tais modelos sendo descritos em seis dimensões seguindo as condições de regularidade na origem e de energia, associados com escalares de energia e pressão coerentes fisicamente (descritos como finitos em todo o espaço de bulk, podendo ser aproximadamente zero para lugares distantes o suficiente do mundo de brana considerado).

O artigo publicado e aceito, associada à tese, é intitulado Regular String-like Braneworlds, descrito no arXiv:1711.08564v2 [gr-qc], em 12 de Janeiro de 2019. A revista que aceitou e publicou o artigo foi a The European Physical Journal C – Particles and Fields [49], DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6538-5.

1.3 Objetivos relacionados

Como objetivo geral, tem-se o de solucionar as Equações de Einstein com seis dimensões e inserindo-se, previamente, a constante cosmológica em seis dimensões diferente de zero, a fim de satisfazer o máximo de condições físicas existentes associadas de acordo com a localização gravitacional relacionada, que se referem aos objetivos específicos a seguir enumerados. Em tal desenvolvimento teórico, a constante cosmológica nas quatro dimensões usuais é considerada com valor zero como hipótese, simplificando o cálculo desenvolvido e como considerado por algumas fontes [4,5,12]. Ressalta-se ainda que os fatores de warp são descritos, dessa forma, com dependência apenas da dimensão extra radial de bulk.

Como objetivos específicos deste trabalho, citam-se: 1) obter as condições de regularidade na origem, que correspondem às condições físicas dos fatores de warp sendo satisfeitas quando a dimensão extra radial é nula; 2) satisfazer as condições de energia nula, fraca, forte e dominante, com o intuito de se obter condições físicas aceitas pela Relatividade Geral e pela Teoria Quântica de Campos, mediante escalares das componentes do tensor de energia-tensão, das dimensões extras e do mundo quadridimensional (com o escalar de energia de uma dimensão deste sendo maior ou igual

que os escalares de pressão das demais dimensões, que coerentemente são positivos); 3) localizar as perturbações da métrica para uma dimensão radial extra considerada com um valor máximo necessitando ser definido, assim como ocorre no modelo GS, mediante um valor finito de perturbação da métrica encontrado na coordenada quadridimensional e no espaço de bulk, sob o ponto de vista de uma formulação mais fundamental seguindo apenas uma equação de movimento; e 4) estudar o comportamento da Equação tipo-Schrödinger que é associada a uma localização gravitacional, quanto ao potencial de Schrödinger análogo relacionado à brana.

Nessa análise, respeitando as mesmas condições físicas, são descritas a solução das Equações de Einstein em questão tendo como condição especial o estudo em seis dimensões do modelo GS. Essa suavização é realizada, verificando que uma fonte pode ser analisada por qualquer delimitação de escalar de energia ou pressão considerado físico. Nesta caracterização é entendido como condições físicas preferenciais seguindo-se as condições de energia e pressão aproximadamente com valor de zero para a dimensão extra radial bastante longe do mundo de brana localizado na origem [10,11]. Em relação a isso, são analisadas algumas definições da literatura para os fatores de warp [5,12] e alguns propostos de acordo com os escalares das dimensões extras. Assim, a localização gravitacional pelo espaço de bulk será relacionada coerente e fisicamente, delimitando uma correção ao Potencial Newtoniano equivalentemente pelo Potencial de Yukawa (que é somado ao Potencial Newtoniano para curtas distâncias). Desse modo, como consequências do estudo, é resolvido de modo compatível o Problema da Hierarquia pela possível modificação da massa de Planck em 4D com a distribuição de energia ao longo do espaço de bulk, discutindo-se as influências do Potencial Análogo de Schrödinger no mundo brana (que, segundo o presente texto, pode ter modos massivos com probabilidade finita na região de brana) segundo um Potencial de Yukawa descrito gravitacionalmente. Outras condições que podem ser consideradas físicas seguida pelo texto é a da existência de escalares descritos suavemente, próximos à brana em análise, e das derivadas de primeira ordem serem negativas dos escalares de pressão e energia das Equações de Einstein (descrevendo distribuições de fontes escalares que se assemelham à superfície externa de um sino ao longo do espaço de bulk).

1.4 Estrutura da tese

A estrutura da tese proposta é descrita como: no capítulo 2 é feita uma revisão teórica dos principais assuntos relacionados à temática de localização com brana espessa a que se destina o trabalho, descrevendo casos em cinco dimensões, seis dimensões ou n dimensões quando for uma descrição mais geral. Desse modo, são analisados modelos teóricos existentes segundo a Equação de Einstein com dimensões extras associados pelo espaço de bulk, como pelo modelo teórico da Teoria Quântica de Campos de Abelian-Higgs, pela descrição da lagrangeana de termos quadráticos associada pela gravidade por alguns parâmetros descritos criticamente, como também pelas condições respeitadas segundo a Relatividade Geral com dimensões extras de espaço de bulk. Assim, modelos de brana descritos por Randall-Sundrum e Guergueta-Shaposhnikov, dentre outros, são analisados. Em adição, é estudado um modelo geral de localização gravitacional por modos KK e é discutido brevemente sobre ressonâncias no capítulo 2.

No capítulo 3 são desenvolvidas soluções propostas (que podem ser inéditas segundo a literatura pesquisada) que seguem uma gama de condições matemáticas em seis dimensões, respeitando as condições de regularidade na origem e de energia e suavizando ou não o modelo GS de acordo com cada modelo proposto. Em tais soluções, os escalares de pressão são determinados como sendo iguais, facilitando a análise das condições de energia e estando de acordo com a definição proposta do fator de warp γ em geral. Assim, posteriormente é delimitada uma localização gravitacional, descrevendo os casos especiais atingidos. Quanto às soluções analíticas das Equações de Einstein das seções 3.2 e 3.4, por escalares de pressão das dimensões extras sendo iguais, verificam-se soluções aproximativas escolhendo-se os escalares de pressão, na seção 3.6, com convergência exata seguindo as condições estabelecidas em geral como analisada (destacando-se que tal método é válido pela literatura para regiões onde a solução inicial é bastante precisa [44]). No mesmo sentido matemático, é descrito uma solução aproximativa de localização gravitacional referente às soluções das Equações de Einstein (com número quântico l inteiro positivo ou zero e massa m positiva em geral), que pode ser estendida com os escalares de pressão das dimensões extras não sendo iguais.

No Capítulo 4 são descritas soluções analíticas propostas de uma classe de soluções advinda de uma solução específica, correspondente à Equação de Einstein, sendo analisado uma Equação tipo-Schrödinger subsequentemente de forma analítica

em relação aos gráficos delimitados do potencial análogo de Schrödinger e da função de onda do modo zero respectivos. Outros gráficos gerados são referentes à Equação de Einstein resolvida analiticamente, como as figuras relacionadas ao Escalar de Ricci. Nesse sentido, tem-se como base modos Kaluza-Klein (KK) com ou sem massa para os grávitons considerados, em seis dimensões, para a localização gravitacional considerada.

No capítulo 5 são relatadas as principais conclusões do trabalho, assim como é sinalizado algumas perspectivas ainda em estudo que podem aprofundar o tema e descrever outras condições físicas.

2 MODELOS COM MUNDO BRANA EM 5D OU 6D

Inicialmente, faz-se necessário uma breve descrição de algumas expressões que se conectam diretamente com as demais seções deste capítulo. Logo, enuncia-se a seguinte métrica ds^2 :

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.1)$$

considerando a notação de Einstein em pares de M e N , com: M, N, \dots denotando índices de espaço-tempo D-dimensional, μ, ν, \dots representando índices na membrana p-dimensional e a, b, \dots delimitando as n-dimensões espaciais extras. Ressalta-se que a assinatura considerada é, na maioria dos casos, de $(-1, +1, +1, +1)$ no espaço quadridimensional usual, que é extrapolado coerentemente às dimensões extras. No entanto, equivalentemente, pode ser usado a assinatura $(+1, -1, -1, -1)$.

Desse modo, em D-dimensões, tem-se a ação lagrangeana dada por:

$$S = -\frac{1}{2\kappa_D^2} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^D x \sqrt{-g} L_m, \quad (2.2a)$$

em que κ_D é descrita como a constante gravitacional D-dimensional, Λ é a constante cosmológica do bulk, L_m é a lagrangeana de algum campo de matéria, x é o espaço em uma dimensão, $\sqrt{-g} d^D x$ é o volume D-dimensional e R é o escalar de curvatura (também conhecido como Escalar de Ricci). A Equação de Einstein com constante cosmológica é determinada pelo termo entre parênteses da Eq. (2.2a), associada ao tensor respectivo oriundo de L_m , descrita por:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = K_D (\Lambda g_{MN} + T_{MN}), \quad (2.2b)$$

com os demais termos não definidos descritos como segue.

Assim, de acordo com a Equação de Einstein com constante cosmológica oriunda da mesma ação, tem-se que o tensor T_{MN} é definido por:

$$T_{MN} = \frac{2}{\kappa_D^2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{MN}}, \quad (2.3)$$

em que S_m é a ação referente à L_m e g_{MN} é definido de acordo com a Eq. (2.1), sendo a raiz quadrada de $-g$ representado pelo produtório de todos os g_{MN} multiplicado por -1 .

É importante delimitar também que o tensor de Ricci, oriundo também da Equação de Einstein, é dado na forma tradicional como:

$$R_{MQN}^P = \partial_Q \Gamma_{MN}^P - \partial_N \Gamma_{MQ}^P + \Gamma_{MN}^R \Gamma_{RQ}^P - \Gamma_{MQ}^R \Gamma_{RN}^P, \quad (2.4)$$

em que as conexões da métrica (também conhecidos como símbolos de Christoffel) são determinados por:

$$\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2} g^{PQ} (\partial_M g_{QN} + \partial_N g_{QM} - \partial_Q g_{MN}), \quad (2.5)$$

enquanto que o escalar de Ricci $R = g^{MN} R_{MN}$.

2.1 Modelos em cinco dimensões

2.1.1 Sobre teorias de Kaluza-Klein

A teoria de Kaluza e Klein foi construída inserindo uma quinta dimensão extra compactificada, em relação às quatro dimensões usuais, de forma periódica e circunferencial em relação ao espaço quadridimensional. Este estudo foi a primeira tentativa de unificar a Relatividade com o eletromagnetismo. Em tal teoria, o campo escalar não massivo $\phi(x^\mu, x^5)$ teria um momento quantizado na quinta dimensão por:

$$p^5 = \frac{n}{R}, \quad (2.6)$$

em que n pertença aos inteiros e R seja o raio circunferencial da dimensão periódica em relação ao espaço quadridimensional. Desse modo, o campo escalar pode ser expandido em uma série de Fourier, englobando as cinco dimensões (considerando a quinta dimensão periódica pela exponencial de termo complexo), por:

$$\phi(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{i\frac{n}{R}x^5}. \quad (2.7)$$

Assim, seguindo a equação de movimento $(\partial_\mu \partial^\mu + \partial_5 \partial^5)\phi = 0$, que segue um campo escalar não massivo pelas cinco dimensões associadas simultaneamente, a Eq. (2.7) se torna:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^n(x^\mu) = \frac{n^2}{R^2} \phi^n(x^\mu), \quad (2.8)$$

que é compatível com a Eq. (2.6) como descrita. Assim, mediante a Eq. (2.8), um campo escalar respectivo da quinta dimensão pode assumir uma infinidade de valores de massas, considerando a derivada com respeito ao espaço (oriunda semelhantemente da Mecânica Quântica), de um campo (incluindo a velocidade da luz $c = 1$), como sendo o seu momento respectivo neste espaço. Logo, uma massa pode ser descrita, desse modo pela quinta dimensão, por

$$m^2 = \frac{n^2}{R^2}. \quad (2.9)$$

Pelos experimentos de altas energias, massas originadas por tal quinta dimensão teria que ter valores maiores do que a energia da escala experimental (da ordem de 1 TeV), implicando que o raio de R desse ser menor ou igual à 10^{-21} cm. Este valor é muito pequeno para ser detectado experimentalmente, pois a sensibilidade experimental para realizar tal tarefa não é possível [3]. Em outro estudo discutido na Ref. [10], chamado de modelo ADD, tal valor de R é da ordem de 1 mm, considerando a quinta dimensão ocupada apenas pela gravidade, excluindo os campos do modelo padrão. Neste caso, ainda não foi detectado tal valor, apesar de ser considerado muito grande.

Dessa forma, o Problema da Hierarquia pode ser solucionado, sabendo que, para cada energia maior do que 1 TeV, há desvio de energia para a quinta dimensão de forma quantizada, permitindo que as escalas de energia de Planck e experimental possam ser compatíveis pela teoria do modelo padrão da Física. No modelo ADD, a pequena intensidade da força gravitacional, comparada às outras forças do modelo padrão, é explicada pela diluição da força gravitacional pela dimensão extra, com as outras forças não possuindo tal característica. Isto é razoável, visto que quanto mais distante estiver a fonte de atuação de uma força, em relação ao mundo quadridimensional, menor é a sua influência neste.

2.1.2 Problema da Hierarquia

O Problema da Hierarquia pode ser analisado pela seguinte tabela, que relaciona as forças mais fundamentais da natureza em seu contexto, adaptado de Ref. [35]:

Força	Mediador	Teoria	$\propto r$	Magnitude
Forte	Glúons	Cromodinâmica Quântica (QCD)	Variável (Liberdade Assintótica)	10^{38}
Eletromagnética	Fótons	Eletrodinâmica Quântica (QED)	$1/r^2$	10^{36}
Fraca	Bósons W e Z	Teoria Eletrofraca	e^{-mr}/r	10^{25}
Gravitacional	Gráviton	Relatividade Geral	$1/r^2$	1

Tabela 1: Descrições básicas das forças fundamentais [46].

A respeito da Escala de Planck, também é necessário descrever as seguintes definições, adaptado da Ref. [35]:

Unidade	Conversão de Planck	Unidades no S. I.
Massa	$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$\sim 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Comprimento	$l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c}}$	$\sim 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$
Tempo	$t_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$	$\sim 5.391 \times 10^{-44} \text{ s}$
Carga	$q_{pl} = \sqrt{4\pi\hbar c \epsilon_0}$	$\sim 1.875 \times 10^{-18} \text{ C}$
Temperatura	$\Theta_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G K_b^2}}$	$\sim 1.417 \times 10^{32} \text{ K}$
Energia	$E_{pl} = m_{pl} c^2$	$\sim 1.9561 \times 10^9 \text{ J} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$

Tabela 2: Relação entre a Escala de Planck e as Unidades no Sistema Internacional (S.I.) [47].

As quatro forças têm a mesma intensidade em unidades naturais, no Sistema de Planck, pelas constantes fundamentais serem descritas como iguais à unidade. Este regime, que iguala a Teoria Eletrofraca com a Física Gravitacional, ocorreria em energias da ordem de 10^{19} GeV, chamado de escala de Planck (M_{Pl}). Em contraste, a escala de energia onde vivemos como se conhece, chamada de escala Eletrofraca (M_*), é da ordem de apenas 10^3 GeV ou 1 TeV. A essa diferença de escalas de energia chama-se de Problema da Hierarquia [35].

2.1.3 O modelo de Randall-Sundrum

No modelo de Randall-Sundrum, diferentemente do modelo teórico de Kaluza-Klein, a quinta dimensão não é periódica, estendendo-se ao infinito. Assim, a métrica utilizada para o modelo de Randall-Sundrum é dada por:

$$ds_5^2 = e^{-2A(\rho)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2, \quad (2.10)$$

com e^{-2A} sendo um fator de warp, $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ a métrica de Minkowsky e dr^2 o termo de métrica da quinta dimensão, que pode ser entendida como uma métrica em que há a influência de uma quinta dimensão no mundo quadridimensional. Assim, o espaço quadridimensional é descrito pela métrica de Minkowsky, assumindo a assinatura $(-1, +1, +1, +1)$, com a quinta dimensão descrita coerentemente. O fator de warp é dado pelo termo que multiplica o espaço quadridimensional, em que sua definição é escolhida como tal devido ao desenvolvimento teórico subsequente.

Dessa forma, assim como a Equação de Campo de Einstein é utilizada para uma métrica quadridimensional, por simetria teórica das quatro dimensões em relação à quinta dimensão deve haver a Equação de Einstein seguinte:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \kappa^2 T_{MN}. \quad (2.11)$$

Nesse sentido, utilizando a métrica dada pela Eq. (2.10), a componente da dimensão extra do tensor de Einstein G_{MN} é dada (com apóstrofo significando uma derivada com respeito à ρ) por:

$$G_{55} = 6A'^2 = \kappa^2(-\Lambda) \equiv \frac{-\Lambda}{2M^3}, \quad (2.12)$$

em que a constante Λ assume um valor compatível com a densidade de energia do espaço de bulk (espaço da dimensão extra, só existente no espaço quadridimensional em forma de brana) e $2M^3$ sendo o inverso da Constante de Einstein κ^2 . É importante frisar que a obtenção da Eq. (2.12) foi possível inserindo a energia ao longo do espaço de bulk como constante por definição. Para um caso mais geral, envolvendo mais dimensões extras por exemplo, $2M^3$ deve ser substituído por $2M^{n-2}$, com n sendo igual ao total de dimensões envolvidas no estudo, pois uma ação lagrangeana respectiva, a cada dimensão extra incluída, deve ser compatível com M tendo dimensão do inverso de uma dimensão espacial pelas unidades gaussianas.

Da Eq. (2.12), verifica-se, com simetria de influência de r igual a $-r$ por mesma simetria física nestes casos, que:

$$A(\rho) = k|r|. \quad (2.13)$$

Desse modo, k pode ser negativo, fazendo com que o fator de warp dado pela Eq. (2.10) desapareça no infinito, o que está de acordo com a influência da quinta dimensão, no espaço quadridimensional, ser desprezível para ρ tendendo ao infinito.

Assim, a Eq. (2.13) origina, mediante a Eq. (2.10),

$$ds^2 = e^{-2k|\rho|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dr^2, \quad (2.14)$$

em que se verifica fator de warp semelhante ao dado pelo modelo GS como caso especial deste. Finalmente, pelas mesmas Eqs. (2.10) e (2.11), o modelo de Randall-Sundrum fornece o tensor de Einstein respectivo das quatro dimensões usuais, de forma análoga como deduzida a Eq. (2.13) considerando coerentemente a Eq. (2.12), por (novamente, com cada apóstrofo delimitando uma derivada com respeito à ρ):

$$G_{\mu\nu} = (6A'^2 - 3A'')g_{\mu\nu} = 6k^2 g_{\mu\nu} - 3A'' g_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

com, sabendo que na origem há uma descontinuidade resultante da Eq. (2.13) pelo módulo de ρ ,

$$A'' = 2k\delta(\rho). \quad (2.16)$$

No entanto, a Eq. (2.16) pode ser modificada com a inserção de duas branas no modelo de Randall-Sundrum. Tais branas representam o mundo quadridimensional estaticamente em dois valores distintos da dimensão extra ρ , sendo uma das branas representando a escala de energia de Planck, enquanto a outra é identificada com uma escala de energia experimental compatível.

Dessa forma, para r na origem e em L tendo essas branas respectivas, averígua-se, diferentemente da Eq. (2.16) que representa um espaço de bulk com uma só brana (porém, de forma análoga a este caso),

$$G_{\mu\nu} = 6k^2 g_{\mu\nu} - 6k(\delta(r) - \delta(r-L))g_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

que pode ser entendido como uma redefinição do valor de A'' , fisicamente.

Para harmonizar o resultado da Eq. (2.17) com o resultado da Eq. (2.12) considerando o espaço quadridimensional plano e estático, os segundo e terceiro termos da Eq. (2.17) desaparecem coerentemente com a descrição da energia do espaço da dimensão extra como se seguirá nas próximas equações.

Assim, pelas fontes de energia respectivas de branas descritas como tensão, coerente com ambas sendo descritas analogamente, a Eq. (2.12) é descrita compativelmente com a Eq. (2.17) por:

$$S_1 = -\int d^4x \sqrt{-g_1} \lambda_1 = -\int d^4x d\rho \sqrt{-g} \lambda_1 \delta(r) \quad (2.18a)$$

$$S_2 = -\int d^4x \sqrt{-g_2} \lambda_2 = -\int d^4x d\rho \sqrt{-g} \lambda_2 \delta(r-L), \quad (2.18b)$$

com a inclusão de

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 12kM^3, \quad (2.19)$$

que pode se relacionar com a Eq. (2.12), delimitando λ_1 e λ_2 .

Assim, em resumo, A depende da dimensão extra linearmente, sendo nula na origem, delimitando A na brana de escala em TeV de forma finita, onde é resolvido o Problema da Hierarquia como descrita a próxima seção. Portanto, A' é constante ao longo da dimensão extra com uma descontinuidade na origem, enquanto A'' é descrito por dois deltas, sendo estes encontrados na origem e em $L = r$, com valor nulo nos outros valores da dimensão extra considerada.

2.1.4 O problema da hierarquia resolvido pelo modelo de Randall-Sundrum

O problema da hierarquia, no contexto do modelo de Randall-Sundrum, é englobado como uma brana representando o espaço quadridimensional, que é influenciada pela dimensão extra mediante a métrica da Eq. (2.5). Isto porque, sem a dimensão extra, o espaço quadridimensional conhecido é de Minkovsky pelo modelo padrão, sem fator que multiplica as dimensões, enquanto com a quinta dimensão dada

pelo modelo em questão há o fator de warp multiplicando as quatro dimensões usuais da métrica de Minkowsky.

Assim, o campo escalar de Higgs do modelo padrão é modificado, com influência da quinta dimensão como interpretado o modelo de Randall-Sundrum, pela ação:

$$\begin{aligned} S_{Higgs} &= \int d^4x \sqrt{g_2} \left[g_2^{\mu\nu} D_\mu H^+ D_\nu H - \lambda (H^+ H - v^2)^2 \right] \\ &= \int d^4x e^{-4kL} \left[e^{2kL} \eta^{\mu\nu} D_\mu H^+ D_\nu H - \lambda (H^+ H - v^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que $g_{2\mu\nu} g_2^{\mu\nu} = 1$ e $d^4x (g_2)^{1/2}$ representa um volume equivalente para cinco dimensões independentes.

Logo, introduzindo $e^{kL} H_T = H$, a Eq. (2.20) é dada por:

$$S_{Higgs} = \int d^4x \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu H^+ D_\nu H - \lambda (H^+ H - (e^{-kL} v))^2 \right], \quad (2.21)$$

que está no mesmo formato da ação de Higgs no espaço quadridimensional dado pelo modelo padrão, em que:

$$v_{eff} = e^{-kL} v. \quad (2.22)$$

Assim, o problema da hierarquia pode ser resolvido, ajustando-se o valor de v para um outro valor, relacionado a v_{eff} , dado pela Eq. (2.22). Este ajuste pode ser feito, ao equalizar a escala experimental com a escala de Planck, por kL sendo dado em torno de 35.

Para contextualizar as Eqs. (2.20) e (2.21), uma forma da ação de Higgs se comportar é dada pela seguinte ação, oriunda da Integral de Einstein-Hilbert sem incluir constante cosmológica, coerentemente com a métrica do modelo de Randall-Sundrum pelo fator de warp como determinado:

$$\begin{aligned} S &\ni M^3 \int d^4x \int_{-L}^{+L} d\rho e^{-2k|\rho|} \sqrt{-g^{(0)}} R^{4D}(h_{\mu\nu}^{(0)}) \\ &= M^3 \frac{1 - e^{-2kL}}{k} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} R^{4D}(h_{\mu\nu}^{(0)}) = M_4^2 \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} R^{4D}(h_{\mu\nu}^{(0)}) \end{aligned}, \quad (2.23)$$

em que:

$$M_{Pl}^2 = \frac{(1 - e^{-2kL})M^3}{k}, \quad (2.24)$$

podendo M_{Pl} (massa de energia da escala de Planck) ser ajustada mediante k e L , coerentemente com o problema da Hierarquia, com o mundo em 4D descrito estaticamente em um só valor de L .

O principal resultado de fenomenologia do modelo RS é a correção ao potencial newtoniano, pelos modos massivos, dado por [42, p. 35]:

$$V(r_n) \propto \frac{1}{r_n} \left(1 + \frac{1}{k^2 r_n^2} \right), \quad (2.25)$$

sendo V o potencial newtoniano, k uma constante e r_n o raio em 4D.

2.2 Modelos em seis dimensões

O modelo Guergueta-Shaponishkov (GS) foi introduzido de modo a se assemelhar ao modelo de Randall-Sundrum (RS), por intermédio dos fatores de warp, inserindo-se uma dimensão extra a mais compativelmente, seguindo fontes com valor igual a zero pela Equação de Einstein respectiva. O Problema da Hierarquia neste caso é resolvido ajustando a massa de Planck em 4D por sua respectiva, em 6D, da ação lagrangeana de Einstein-Hilbert, associada a uma tensão na brana tipo-corda como determinada. Sua localização de gravidade foi delimitada analiticamente, porém todas as condições regulares da brana na origem não foram obtidas. A contribuição ao potencial newtoniano do modelo GS é menos perceptível para grandes distâncias de r_n , sendo diretamente proporcional a r_n^{-4} , diferentemente do modelo RS em que há tal contribuição com dependência de r_n^{-3} .

O modelo da corda-charuto [5] segue condições de fontes, associadas a Equação de Einstein e também em 6D, que seguem uma matéria considerada normal como seguirá, diferentemente da condição de vácuo do modelo GS. O problema da Hierarquia é resolvido consequentemente, como resultado da distribuição de fontes ao longo do espaço

de bulk, analisando a massa de Planck em 6D. Esse modelo também caracteriza o mundo-brana localizado na origem. A contribuição ao potencial newtoniano é dado semelhantemente ao do modelo GS.

O modelo tipo-corda suave [12] também segue as mesmas condições de fontes e de localização da brana do modelo da corda-charuto, porém o fator de warp respectivo da dimensão extra angular é descrito diferentemente, delimitando um mundo-brana suave.

Será considerada, em geral, a seguinte métrica e a Equação de Einstein em seis dimensões correspondente (analogamente como analisado em quatro ou cinco dimensões), que são delimitados em casos específicos nos próximos itens desta seção:

$$\begin{aligned} ds^2 &= M^2(\rho) \left[-dt^2 + d\vec{x}^2 \right] + d\rho^2 + L^2(\rho) d\theta^2 \\ &= \sigma(\rho) \left[-dt^2 + d\vec{x}^2 \right] + d\rho^2 + \gamma(\rho) d\theta^2 \end{aligned} \quad , \quad (2.26a)$$

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = K_6 (\Lambda g_{MN} + T_{MN}), \quad (2.26b)$$

com $\sigma (M^2)$ e $\gamma (L^2)$ sendo os fatores de warp e ρ e θ sendo respectivamente a dimensão extra radial de bulk e o ângulo de dimensão extra de bulk.

2.2.1 Condições de regularidade na origem e condições de energia

As condições de regularidade na origem das dimensões extras são detalhadas, como inseridas, por exemplo, em Refs. [6,7], como:

$$M^2(0) = 1, \quad (2.27a)$$

$$[M^2(0)]' = 0, \quad (2.27b)$$

$$L^2(0) = 0, \quad (2.27c)$$

$$[L(0)]' = 1. \quad (2.27d)$$

Dentre as equações acima, as Eqs. (2.27a) e (2.27b) servem para que a geometria da brana apareça naturalmente, de forma induzida (recuperada) em $\rho = 0$. Também, para que a brana tenha apenas quatro dimensões, é coerente que se tenha a descrição das Eqs. (2.27c) e (2.27d).

As condições de energia fraca, forte e dominante são delimitadas respectivamente como discutida na introdução, mediante a Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos, por [12, 38]:

$$\begin{aligned} t_o + t_i &\geq 0, i = \rho, \theta \\ t_o &> 0 \end{aligned}, \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} t_o + t_\rho + t_\theta &\geq 0 \\ t_o + t_i &\geq 0, i = \rho, \theta \end{aligned} \quad (2.28b)$$

e

$$t_o \geq |t_i|, i = \rho, \theta, \quad (2.28c)$$

seguindo-se fontes [39,40,41] pesquisadas por Ref. [38]. As fontes t_o , t_ρ e t_θ são, respectivamente, as fontes de uma dimensão do espaço quadridimensional de Minkowsky, da dimensão extra radial e da dimensão extra angular, num espaço-tempo em 6D. Tais fontes delimitam, em seus respectivos espaços, uma componente escalar do momento de tensor-energia da Equação de Einstein em 6D. Podem ser entendidos, em relação a valores positivos, como seguindo a Teoria Quântica de Campos por termos quadráticos de energia seguir tal restrição em geral, enquanto que a condição de energia dominante está relacionada ao Princípio da Causalidade da Relatividade Geral, relacionada a dimensão de tempo do espaço-tempo em seis dimensões ser associada a um fluxo de distribuição de matéria maior ou igual ao das dimensões extras.

A condição de energia nula pode ser descrita por $t_o + t_i \geq 0$ da condição de energia fraca. Assim, a condição de energia fraca engloba a condição de energia nula. A condição de energia nula, quando violada, possui matéria classificada como “exótica” [38, p. 99]. Na condição de energia forte, há a compreensão da energia nula mas não da energia fraca. A condição forte de energia pode ser violada em todo processo inflacionário com

constante cosmológica, sendo também uma propriedade genérica dos campos escalares, segundo fontes referendadas [38, p. 99]. A condição de energia dominante é a mais restritiva dentre as condições de energia classificadas em relação ao formalismo proposto pela tese, sendo que, quando a matéria obedece a essas quatro condições de energia, ela é chamada de “matéria normal” [38, p. 100].

2.2.2 Modelo GS

O modelo teórico Guerguetta-Shaponishkov GS [4] trata de um estudo que localiza o campo de gravidade (com energia de vácuo) em mundo-brana tipo-corda com seis dimensões: as quatro dimensões usuais em nosso mundo mais duas dimensões extras espaciais que não pertencem ao nosso mundo. Assim, a métrica de Randall-Sundrum pode ser entendida como um caso espacial da métrica do modelo GS, pelo fator de warp identificado na Eq. (2.14).

As Equações de Einstein respectivas da Eq. (2.26), portanto, seguem analogamente como deduzidos os tensores de Einstein do modelo de Randall-Sundrum, sabendo que K_6 (K_4) e Λ (Λ_4) são respectivamente a Constante de Einstein em 6D (4D) com constante cosmológica em 6D (4D), por:

$$\frac{3}{2} \left[\frac{(\sigma)'}{\sigma} \right]' + \frac{3}{2} \left[\frac{(\sigma)'}{\sigma} \right]^2 + \frac{3}{4} \frac{(\gamma)'(\sigma)'}{\gamma\sigma} + \frac{1}{4} \left[\frac{(\gamma)'}{\gamma} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{(\gamma)'}{\gamma} \right]' = -K_6 [\Lambda + t_o(\rho)] + K_4 \frac{\Lambda_4}{\sigma}, \quad (2.29a)$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{(\sigma)'}{\sigma} \right]^2 + \frac{(\gamma)'(\sigma)'}{\gamma\sigma} = -K_6 [\Lambda + t_\rho(\rho)] + 2K_4 \frac{\Lambda_4}{\sigma}, \quad (2.29b)$$

$$2 \left[\frac{(\sigma)'}{\sigma} \right]' + \frac{5}{2} \left[\frac{(\sigma)'}{\sigma} \right]^2 = -K_6 [\Lambda + t_\theta(\rho)] + 2K_4 \frac{\Lambda_4}{\sigma}, \quad (2.29c)$$

em que as Eqs. (2.29a), (2.29b) e (2.29c) referem-se aos espaços quadridimensional, ao longo de ρ e ao longo de θ respectivamente (verificando que os apóstrofes indicam derivada com respeito a ρ e que t_i , $i = \theta, \rho$ e o , representa os escalares de densidade de energia respectivos das duas dimensões extras e de uma dimensão do espaço

quadridimensional de Minkowsky), de acordo com o lado direito destas expressões sendo dada também pela Equação de Einstein em 4D por:

$$R_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{(4)} = K_4\Lambda_4g_{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

Logo, as seguintes condições são obtidas por constante cosmológica em quatro dimensões definida como zero, escalares de energia iguais a zero e constante cosmológica em seis dimensões (Λ) diferente de zero, mediante as Eqs. (2.29), pois assim o lado esquerdo das Eqs. (2.29) são iguais:

$$M^2 = e^{-c_o\rho} = \sigma, \quad (2.31a)$$

$$L^2 = R_o^2 e^{-c_o\rho} = \gamma, \quad (2.31b)$$

$$c_o = \sqrt{\frac{2(-\Lambda)}{5M_6^4}}, \quad (2.31c)$$

sendo $\kappa^{-1/4} = M_6$ a Massa de Planck em seis dimensões, Λ a Constante cosmológica em seis dimensões e R_o a Constante de escala de raio do bulk.

Desse modo, o modelo GS tem a desvantagem de não seguir energias diferentes de zero, além de não delimitar também todas as conhecidas condições de regularidade na origem, advindas, por exemplo, de Refs. [6,7] e outros trabalhos que estudaram a métrica dada pela Eq. (2.26) envolvendo Teoria Quântica de Campos. No entanto, este modelo segue o fator de warp do modelo de Randall-Sundrum mediante a dimensão extra radial, permitindo encontrar a métrica dada pela Eq. (2.10) como um caso especial da métrica em seis dimensões ao anular a variação da coordenada de dimensão extra angular.

No modelo GS existe um modo zero gravitacional, de uma Equação tipo-Schrödinger, normalizado, além de possuir um espectro Kaluza-Klein (KK) que gerava um termo extra de correção ao potencial newtoniano (mediante o Potencial de Yukawa associado a grávitons massivos) diretamente proporcional à r^{-3} , sendo r o raio do potencial newtoniano. O Problema da Hierarquia, é bom repetir, é resolvido inserindo-se uma tensão na brana e sem precisar de ajuste da constante cosmológica. Ademais, para haver

a localização gravitacional em geral, é necessário impor um valor máximo finito para a dimensão radial do espaço de bulk, devido à dependência exponencial da solução referente analítica.

A contribuição ao potencial newtoniano por tal modelo, de maneira contínua e por modos massivos (com vários termos discretos analisados como infinitesimais somados, por intermédio do Potencial de Yukawa associado na brana), por [4]:

$$\Delta V = \frac{32G_N}{3\pi c_o^3} \frac{m_1 m_2}{r_n^4}, \quad (2.32)$$

pelo qual G_N é a Constante Gravitacional de Newton e m_1 e m_2 são massas puntiformes com uma distância entre si por r_n . Como descrito anteriormente, a dependência da contribuição ao potencial newtoniano por r_n é menos perceptível a grandes distâncias de r_n em relação ao modelo de Randall-Sundrum (RS), o que se assemelha mais à Teoria da Gravidade de Newton em dimensões macroscópicas.

2.2.3 Modelo corda-charuto

O modelo de corda-charuto advém, inicialmente, da solução estacionária e bidimensional do fluxo de Ricci [42]:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial \lambda} = -2R_{ab}, \quad (2.33)$$

oriunda pela métrica de

$$ds_2^2 = d\rho^2 + \tanh^2(k\rho)d\theta^2. \quad (2.34)$$

As vantagens de tal modelo, inserido num mundo-brana tipo-corda em 6D, está no fato de haver obediência das condições de energia e de regularidade na origem, diferentemente do modelo GS que segue condição de vácuo para as fontes respectivas.

Assim, como a solução das Equações de Einstein oriunda da Eq. (2.26) é descrita semelhantemente pelas Eqs. (2.29), tem-se, como definido pelo modelo da corda-charuto [5], que

$$M^2(\rho) = e^{-(k\rho - \tanh k\rho)} \quad (2.35a)$$

e

$$L^2(\rho) = \frac{1}{k^2} \tanh^2(k\rho) M^2(\rho), \quad (2.35b)$$

de forma coerente com a Eq. (2.26).

Nesse sentido, a constante cosmológica em seis dimensões está relacionada a k por:

$$k^2 = -2 \frac{K_6 \Lambda}{5}, \quad (2.36)$$

ao se analisar a Equação de Einstein para o modelo matemático da corda-charuto, semelhantemente a $k = c$ como fornecido pela Eq. (2.31c). A vantagem de se trabalhar com o modelo teórico advindo das Eqs. (2.35) está no fato de seguirem as conhecidas condições de regularidade como definidas, além das condições de energia fraca, forte e dominante como especificadas. As tais condições na origem são importantes porque servem para regularizar a geometria próxima à brana.

Para completar a análise, justificando o porquê que o modelo teórico da corda-charuto satisfaz as Eqs. (2.29) e seguem as condições de energia delimitados pelas Eqs. (2.28), são delimitados os seguintes escalares de energia oriundos das Eqs. (2.35) compativelmente:

$$t_o(\rho, k) = \frac{k^2}{K_6} \left(7 \cosh^{-2} k\rho + \frac{13}{2} \cosh^{-2} k\rho \tanh k\rho - \frac{5}{2} \cosh^{-4} k\rho \right), \quad (2.37a)$$

$$t_\rho(\rho, k) = \frac{k^2}{K_6} \left(5 \cosh^{-2} k\rho + 2 \cosh^{-2} k\rho \tanh k\rho - \frac{5}{2} \cosh^{-4} k\rho \right), \quad (2.37b)$$

$$t_\theta(\rho, k) = \frac{k^2}{K_6} \left(5 \cosh^{-2} k\rho + 4 \cosh^{-2} k\rho \tanh k\rho - \frac{5}{2} \cosh^{-4} k\rho \right). \quad (2.37c)$$

Como consequência, esse modelo tem uma característica peculiar próximo à origem, em relação à localização gravitacional próxima à brana, que os modelos propostos que seguem as condições de regularidade na origem, desta tese, obedece equivalentemente. O modelo corda-charuto, em similaridade ao modelo GS, tem comportamento semelhante a este, pela localização gravitacional ou solução das Equações de Einstein (2.29), quando a dimensão extra radial tende ao infinito (exceto por um reescalonamento da massa de gráviton m por $me^{-1/2}$). O Problema da Hierarquia, pelo modelo da corda-charuto, é resolvido por um ajuste no parâmetro k associado à M_6 . Neste modelo há modos massivos ressonantes detectados próximo à brana, pela análise numérica como obtida [43].

2.2.4 Modelo suavizado em 6D

Pela Ref. [12], tal modelo segue a métrica (2.26) e, portanto, às Equações de Einstein (2.29). Ademais, o *ansatz* dado pela Eq. (2.35a), é mantido. Entretanto, o *ansatz* dado pela Eq. (2.35b) é modificado pela seguinte expressão:

$$L^2(\rho) = \rho^2 M^2(\rho), \quad (2.38)$$

que é uma equação que segue semelhantemente o modelo corda-charuto próxima à origem. Como consequência, quando a dimensão extra radial ρ tende ao infinito, a localização gravitacional é semelhante ao do modelo GS, reescalando a constante de massa de gráviton m por $me^{-1/2}$ como há no modelo da corda-charuto. Como resultado, todas as condições de regularidade na origem e de energia também são obedecidas por esse modelo.

2.2.5 Modelo com vórtice abeliano em seis dimensões

A lagrangeana correspondente a esta seção (seguindo o contexto das Eqs. (2.26), em seis dimensões com mundo-brana em quatro dimensões e tipo-corda como relatado), pelo modelo de Abelian-Higgs com constante cosmológica, é descrita por [6,7]:

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2\kappa} - \Lambda + \frac{1}{2} g^{ab} (D_a \varphi)^* D_b \varphi - \frac{1}{4} F^{ab} F_{ab} - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - v^2)^2 \right], \quad (2.39)$$

neste sentido, os primeiros dois termos da ação dada na Eq. (2.39) $(-R/2\kappa - \Lambda)$ representam a Integral de Einstein-Hilbert com Constante Cosmológica, o terceiro termo $((1/2)g^{ab}(D_a\varphi)^*D_b\varphi)$ é delimitado como um termo cinético padrão de campo (com a derivada covariante de gauge $D_j = \nabla_j - ieA_j$, em que ∇_i é a derivada covariante na direção j e e é o acoplamento de gauge), pela Teoria Clássica de Campos (TCC) e com φ sendo um campo de Higgs, o penúltimo termo sendo descrito por $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$, representando o Eletromagnetismo pela TCC com A_i sendo o campo de Eletromagnetismo na direção i e F_{ab} sendo o tensor de Maxwell, e o último termo $((-\lambda/4)(\varphi^*\varphi - v^2)^2)$ sendo uma representação de auto interação também da TCC, analogamente como há na Eq. (2.20), com λ sendo a constante de acoplamento próprio e v a constante de vácuo do Campo de Higgs. Assim, as equações de movimento correspondentes à lagrangeana da Eq. (2.39), por Ref. [7] seguindo o Princípio Variacional e a Eq. (2.3), são:

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi - e^2 A_a A^a \varphi - ie A_a \partial^a \varphi - ie \nabla_a (A^a \varphi) + \lambda (\varphi^* \varphi - v^2)^2 = 0, \quad (2.40a)$$

$$\nabla_a F^{ab} = -e^2 A^b \varphi^* \varphi + \frac{ie}{2} (\varphi \partial^b \varphi^* - \varphi^* \partial^b \varphi) \quad (2.40b)$$

e

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa (T_{ab} + \Lambda g_{ab}), \quad (2.41)$$

com:

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \left[(D_a \varphi)^* D_b \varphi + (D_b \varphi)^* D_a \varphi \right] - F_{ac} F_b^c - g_{ab} \left[\frac{1}{2} (D_a \varphi)^* D^a \varphi - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} - \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi - v^2)^2 \right]. \quad (2.42)$$

A ideia de vórtice (fluxo de matéria que fazem voltas concêntricas em relação a um ponto que, no caso, é onde se localiza a brana, como pode ser percebido por A_j na direção radial sendo zero), caracterizada pelo número de voltas n (winding number) e nas Eqs. (2.40) e (2.41), são dadas por:

$$\varphi(\rho, \theta) = v f(\rho) e^{in\theta} \quad (2.43a)$$

e

$$A_\theta(\rho, \theta) = \frac{1}{e} [n - P(\rho)]. \quad (2.43b)$$

Dessa forma, as Eqs. (2.43), quando inseridas nas Eqs. (2.40) a (2.42), resultam em um sistema de equações que depende somente da dimensão extra radial ρ . Ainda neste contexto, definem-se, por comodidade:

$$v = \kappa v^2, \quad (2.44a)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\lambda} \quad (2.44b)$$

e

$$\mu = \frac{\kappa \Lambda}{\lambda v^2}, \quad (2.44c)$$

em que $m_H = (2\lambda)^{1/2} v$ é a massa do bóson de Higgs e $e v$ é a massa vetorial do bóson de Higgs.

Assim, continuando o assunto exposto, as definições de:

$$H(x) = \frac{d \ln[M(x)]}{dx}, \quad (2.45a)$$

$$F(x) = \frac{d \ln[L_o(x)]}{dx}, \quad (2.45b)$$

$$L_o(x) = \sqrt{\lambda} \nu L(\rho), \quad (2.45c)$$

$$x = \sqrt{\lambda} \nu \rho, \quad (2.45d)$$

juntamente às Eqs. (2.43) e (2.44) [7], delimitam as Eqs. (2.40) e (2.41) da seguinte forma:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + (4H + F) \frac{df}{dx} + (1 - f^2) f - \frac{P^2}{L_o^2} f = 0 \quad (2.46a)$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + (4H - F) \frac{dP}{dx} - \alpha f^2 P = 0 \quad (2.46b)$$

$$\frac{dH}{dx} + 3 \frac{dF}{dx} + F^2 + 6H^2 + 3HF = -\mu - \nu \tau_\theta \quad (2.46c)$$

$$4 \frac{dH}{dx} + 10H^2 = -\mu - \nu \tau_\theta \quad (2.46d)$$

$$4HF + 6H^2 = -\mu - \nu \tau_\rho, \quad (2.46e)$$

em que as Eqs. (2.46c) à (2.46e) delimitam a Equação de Einstein dada pela Eq. (2.41), enquanto as Eqs. (2.46a) e (2.46b) são equivalentes às Eqs. (2.40), com os escalares de energia e pressão descritos mediante a Eq. (2.42), respectivamente para o mundo brana, a dimensão radial extra e a dimensão angular extra, por:

$$\tau_\theta(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} (f^2 - 1)^2 + \frac{1}{2\alpha L_o^2} \left(\frac{dP}{dx} \right)^2 + \frac{f^2 P^2}{2L_o^2}, \quad (2.47a)$$

$$\tau_\rho(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}(f^2 - 1)^2 - \frac{1}{2\alpha L_o^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \frac{f^2 P^2}{2L_o^2}, \quad (2.47b)$$

$$\tau_\theta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}(f^2 - 1)^2 - \frac{1}{2\alpha L_o^2}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 - \frac{f^2 P^2}{2L_o^2}. \quad (2.47c)$$

Seguindo-se as Eqs. (2.40) e (2.41), de acordo com as regularidades na origem sendo respeitadas dadas pelas Eqs. (2.27) e com um vórtice típico sendo seguido ($f(0) = 0, f(\infty) = 1, P(0) = 1$ e $P(\infty) = 0$), verifica-se por método numérico que tais expressões têm fatores de warp semelhantes ao do modelo GS para a dimensão extra radial tendendo a infinito, pois, segundo a Ref. [6], neste limite os fatores de warp σ e γ são diretamente proporcionais a $\exp(-c\rho)$ (com c sendo constante) com a geometria relacionada aproximadamente a métrica correspondente, pela Equação de Einstein, apenas pela Constante Cosmológica Λ .

2.3 Descrições físicas associadas em 5D e 6D

2.3.1 Aspectos universais gravitacionais em modelos com D dimensões

Mediante a Ref. [11], a seguinte métrica, com $\eta_{ab} = (+1, -1, -1, -1)$, x^a sendo as coordenadas em 4D de Minkowsky (com $a = 0, 1, 2, 3$), $z^i = x^{i+3}$ (com $i = 1, \dots, n$) sendo as coordenadas extras em $d - 4$ dimensões e x^μ sendo as coordenadas em d dimensões,

$$ds^2 = e^{-A(z)} \left[(\eta_{ab} + h_{ab}(x, z)) dx^a dx^b - dz^i dz^i \right] = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.48)$$

associada à termos com til delimitados como oriundos de perturbação da métrica (com $g_{\mu\nu} = e^{-A} \tilde{g}_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ sendo o tensor de Einstein não perturbado, $\tilde{G}_{\mu\nu}$ oriundo do tensor de Einstein com perturbações e d sendo o número de dimensões) [3,11,39]

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} + \frac{d-2}{2} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\mu A \tilde{\nabla}_\nu A + \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu A - \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}^\rho A - \frac{d-3}{4} \tilde{\nabla}_\rho A \tilde{\nabla}^\rho A \right) \right], \quad (2.49a)$$

$$\delta \tilde{G}_{\mu\nu} = \partial^\rho \partial_{(\nu} h_{\mu)\rho} - \frac{1}{2} \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h_\rho^\rho - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\rho \partial^\kappa h_{\rho\kappa} - \partial^\rho \partial_\rho h_\kappa^\kappa), \quad (2.49b)$$

resulta, com um gauge denominado sem traço/transverso ($h_b^a = \nabla_b h^{ab} = 0$) que torna não-nulo apenas os termos delimitados por $\partial_\rho h_{\mu\nu}$ (sabendo que apenas os termos com h_{ab} são diferentes de zero em $h_{\mu\nu}$ e lembrando que $A = A(z^i)$) [11]:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} + \frac{d-2}{2} \left[\frac{1}{2} \eta^{\rho\kappa} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial_\kappa A - h_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho A + \frac{d-3}{4} h_{\mu\nu} \partial_\rho A \partial^\rho A \right]. \quad (2.50)$$

Segundo a Ref. [11], de acordo com o tensor de Einstein não perturbado e a definição de $\delta T_{\mu\nu}$ como se segue na próxima equação, considerando somente os termos que possam ser zero segundo o gauge escolhido e a Equação de Einstein não perturbada, tem-se mediante a Eq. (2.50) que:

$$T_\mu^\kappa h_{\kappa\nu} = \delta T_{\mu\nu} = \frac{d-2}{2} \kappa^{-2} \left(-\partial_\rho \partial^\rho A + \frac{d-3}{4} \partial_\rho A \partial^\rho A \right) h_{\mu\nu}. \quad (2.51)$$

Desse modo, os dois termos que permaneceram na Eq. (2.51) são cancelados por dois termos da Eq. (2.50), ao se igualar $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Assim, considerando $\delta G_{\mu\nu} = 0$ pela Eq. (2.50) e $h_{\mu\nu} = e^{(d-2)A/4} \tilde{h}_{\mu\nu}$, segundo os termos restantes da Eq. (2.50) diferentes da Eq. (2.51), tem-se:

$$-\frac{1}{2} \partial^\rho \partial_\rho \tilde{h}_{\mu\nu} + \left[\frac{(d-2)^2}{32} \partial^\rho A \partial_\rho A - \frac{d-2}{8} \partial^\rho \partial_\rho A \right] \tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.52)$$

que pode ser reescrita como uma Equação tipo-Schrödinger, generalizando o resultado encontrado em Randall-Sundrum [1,2] em que há $A(z) = (1+k|z|)^{-2}$ e $d = 5$, com $\tilde{h}_{ab}(x, z) = \check{h}_{ab}(x) \psi(z)$ e $-\eta^{ab} \partial_a \partial_b \check{h}_{ab}(x) = m^2 \check{h}_{ab}(x)$ associado à m ser uma massa de flutuação de Kaluza-Klein em 4D inclusa semelhantemente como há na seção 2.1.1 pela Eq. (2.8), por:

$$-\nabla_z^2 \psi(z) + \left[\frac{(d-2)^2}{16} (\nabla_z A)(\nabla_z A) - \frac{d-2}{4} \nabla_z^2 A \right] \psi(z) = m^2 \psi(z). \quad (2.53)$$

Nos casos em seis dimensões associados à Eq. (2.53), verifica-se que o termo entre colchetes, dado em geral, pode ser descrito, gravitacionalmente, por fatores de warp em função de z e valores inteiros de número de momento angular, como, por exemplo, nos modelos em seis dimensões descritos anteriormente [5,12] e nos demais, também em seis dimensões, a serem discutidos no capítulo 4.

Diante do descrito, como outro aspecto discutido na Ref. [11] de caráter universal, a correção do potencial newtoniano, mediante o Potencial de Yukawa em relação a uma massa de gráviton, é descrita de forma discreta ou contínua (desta forma com infinitos termos de massas diferenciais) de acordo com o mundo-brana em $z = 0$, respectivamente por:

$$\Delta U(r) \sim M_*^{2-d} \frac{M_1 M_2 e^{-mr}}{r_n} \psi_m(0)^2, \quad (2.54a)$$

$$\Delta U(r) \sim M_*^{2-d} \int_{m_0}^{\infty} dm m^{n-1} \frac{M_1 M_2 e^{-mr}}{r_n} \psi_m(0)^2, \quad (2.54b)$$

sendo $\kappa^2 = M_*^{2-d}$, n o número de dimensões total, r_n o raio do potencial newtoniano, M_1 e M_2 as massas de prova puntiforme pelo potencial newtoniano e ψ_m uma solução da Eq. (2.53).

Na Ref. [18] há uma descrição física relacionada a uma quasilocalidade (estudo que envolve a localização de gravidade com espaço-tempo assintoticamente plano longe da brana) mediante uma ressonância por tunelamento em relação ao mundo brana em 4D, descrevendo coerentemente a contribuição de um potencial newtoniano em 5D como há no modelo RS.

Nesse contexto, há ainda modelos de brana Bloch que permite uma descrição com dependência de r^{-3} , analisando uma gravidade localizada [19], assim como há no modelo RS, ao se incluir dois campos escalares reais na ação lagrangeana, juntamente ao termo de Einstein-Hilbert. Ressalta-se que o modelo GS segue o Potencial gravitacional com dependência de r^{-4} , que é associado a um modelo em seis dimensões.

2.3.2 Sobre ressonâncias e localização gravitacional em mundos branas com 5D ou 6D.

Ressonâncias gravitacionais são entendidas como variações abruptas de probabilidade associadas a uma partícula com uma massa em particular, que é associada à função de onda, ou, de outro modo, como um coeficiente de transmissão [16]. Desse modo, encontram-se resultados de ressonâncias em vários artigos [14-18,20-23] no formato de variação de probabilidade, de forma discreta ou contínua, enquanto em Ref. [21] há análise de um caso seguindo um coeficiente de transmissão, que pode ser entendido como um tunelamento de partícula num mundo brana em 4D inserido num mundo em 5D. Associado a essas questões, é possível não haver localização gravitacional com ressonâncias de ondas planas oriunda da equação tipo-Schrodinger [17], assim como também é possível não ter modos localizados em alguns casos sem o campo de dilaton, por haver ação lagrangeana divergente em 5D. Muitos estudos avaliam, sob o contexto de modos massivos ou não massivos de modos Kaluza-Klein (KK), campos diversos que sejam associados à métrica do espaço-tempo e, por conseguinte, à gravidade. Mesmo em trabalhos que tratam de ressonância de grávitons, no entanto, pode ser associado um campo escalar, semelhantemente como delimitada a seção 2.6 sem o campo de dilaton, como há em Refs. [22,23]. Um exemplo de campo inserido são os campos vetoriais de gauge [25], delimitados no contexto do modelo da corda-charuto. Outros exemplos, na física gravitacional, são a inclusão de campos tensoriais de gauge [17,26], campos de Kalb-Ramond [14,16,18], e campos de gauge numa brana Bloch [15].

Como observação relevante, que pode ser associada à fenomenologia como caso limite, ressonâncias gravitacionais devem ser analisadas com massa muito pequena, como há em [23], o que concorda com a suposição existente no modelo GS para massas de origem gravitacional serem bastante baixas, o que pode ser associado à formulação da ação lagrangeana desenvolvida na seção 2.2.5 [6,7] de acordo à contribuição ao potencial newtoniano e a localização gravitacional referente [4,5,11,12].

Assim, o trabalho de I. Oda (2000) [27] delimita, no contexto de métricas estudadas em seis dimensões, também partículas de spin 0, $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{3}{2}$. Logo, os estudos realizados de acordo com outros campos existentes, no lugar de partículas de spin-2 como os grávitons, podem ser analisados semelhantemente com a determinação de equações de movimento referentes a cada campo (partícula), como os detalhados pelas Refs. [27,34].

3 SOLUÇÕES PROPOSTAS DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN COM LOCALIZAÇÃO GRAVITACIONAL

Serão analisadas soluções oriundas das Equações de Einstein com a proposta de suavização do modelo GS, seguindo uma métrica que pode ser analisada em geral na seção 2.2. Desse modo, serão analisadas soluções das Equações de Campo de Einstein correspondentes à seguinte métrica:

$$ds_6^2 = \sigma \left(-dt^2 + d\vec{x}^2 \right) + d\rho^2 + \gamma d\theta^2, \quad (2.26a)$$

que são detalhadas como descritas as Eqs. (2.29) associando-se Λ_4 igual a zero. Assim, as próximas seções deste capítulo abordarão as Eqs. (2.29), com

$$\sigma = e^{\int A d\rho} \quad (3.1a)$$

$$t_i = \frac{\lambda_i}{\cosh^2(c\rho)}, \quad (3.1b)$$

em que λ_i é uma constante com λ_o sendo uma constante apenas num caso especial que será discutido no capítulo 4, c sendo uma constante como será determinada e a Eq. (3.1b) sendo generalizada para outros casos distintos nos casos gerais e gerando, mediante a Eq. (2.29c),

$$2A' + \frac{5}{2}A^2 = -K_6 \left(\Lambda + \frac{\lambda_o}{\cosh^2(c\rho)} \right), \quad (3.2)$$

com apóstrofo indicando derivada com respeito à ρ . É importante frisar que as soluções gerais deste capítulo, seguindo as restrições associadas, abrangem quaisquer soluções

específicas, como a seção 3.2 abrange todas as soluções específicas analíticas das seções 3.1, 3.2 e do modelo E do capítulo 4. Ademais, as soluções desenvolvidas neste capítulo não foram encontradas na literatura pesquisa, sendo, portanto, propostas de solução.

Na seção 3.1 serão discutidas soluções analíticas da Equação de Einstein, que consideram os escalares de pressão, das dimensões extras, como iguais, também com delimitação das condições de energia e de regularidade na origem e generalizando para outros casos o valor de A oriunda da Eq. (3.2). Assim, também será discutida a localização gravitacional e o potencial de Schrödinger respectivos.

A seguir, na seção 3.2, é especificado um método de construção de solução analítica ou precisando resolver uma integral bem definida, em concordância com as soluções analíticas investigadas pelas seções precedentes e que também seguem as condições de energia e de regularidade pela origem.

Na seção 3.3 será demonstrada uma solução diferencial geral (diferente da desenvolvida na seção 3.2, como será discutido pela falta de unicidade com condições de contorno diferentes da solução diferencial) que suaviza o modelo GS, com especificação das condições físicas sendo satisfeitas e que possibilitam tal solução como coerente fisicamente. Entretanto, esta solução não é resolvida analiticamente em tal seção, só havendo obtenção de equações diferenciais que sigam todas as condições supostamente exigidas, necessitando também resolver algumas integrais que fazem parte da solução associados aos fatores de warp. Assim, as soluções associadas à tal desenvolvimento teórico, de forma numérica ou analítica, são possíveis para todos os casos possíveis de Λ e para qualquer valor de ρ e de $\lambda_{\rho,\theta}$ como especificado (com exceção de $\lambda_{\rho,\theta} = -\Lambda$ que ocorre no modelo da corda-charuto e no modelo tipo-corda suave[5,12]), podendo-se utilizar o método numérico da diferença finita quando delimitado uma condição de contorno compatível com a solução sendo real.

Na seção 3.4 será discutida uma solução geral e analítica alternativa, da seção 3.3, seguindo todas as condições de contorno matemática e que, como de fato deve ser pelo analisado na seção 3.3, não segue qualquer solução pelo método geral analisado na seção 3.2. Verificar-se-á um caso especial na localização gravitacional referente à tal solução.

Na seção 3.5 discute-se a respeito de uma solução analítica, seguindo a Equação de Einstein, envolvendo uma lagrangeana específica e a constante cosmológica. Na seção 3.6 será analisado soluções aproximativas que se esperam serem convergentemente exatas, de modo geral, de acordo com as soluções do capítulo 3.

3.1 Soluções obtidas com escalares-de-pressão iguais das dimensões extras

3.1.1 Solução das Equações de Einstein

A solução de A iniciou-se pela seguinte expressão:

$$A = \frac{4}{5} \frac{u'}{u}, \quad (3.3)$$

em que:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{5K_6}{8} (\Lambda + \lambda_\theta \cosh^{-2}(c\rho)) u = \\ & = [1 - \tanh^2(c\rho)]^2 c^2 \frac{d^2 u}{d[\tanh^2(c\rho)]} - 2(1 - \tanh(c\rho)) c^2 \tanh(c\rho) \frac{du}{d \tanh(c\rho)} + \\ & + \frac{5}{8} K_6 (\Lambda + \lambda_\theta \cosh^{-2}(c\rho)) u = \quad . \quad (3.4) \\ & = [1 - \tanh^2(c\rho)]^2 c^2 \frac{d^2 u}{d[\tanh^2(c\rho)]} - 2(1 - \tanh(c\rho)) c^2 \tanh(c\rho) \frac{du}{d \tanh(c\rho)} + \\ & + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \tanh^2(c\rho)} \right] [1 - \tanh^2(c\rho)] u = 0 \end{aligned}$$

Então, a Eq. (3.3), analisada pela Equação de Riccati, permite-nos achar a próxima solução pela Equação Diferencial Associada de Legendre, que pode ser verificada pelo conhecido método associado [50] como descrito pelas Eqs. (3.3) e (3.4), por:

$$A = \frac{4 \left[\left(P^{+\sqrt{\frac{5\Lambda}{8c^2} K_6 = m}} \left(\tanh(c\rho) \right) \right)' + C_1 \left(Q^{+\sqrt{\frac{5\Lambda}{8c^2} K_6 = m}} \left(\tanh(c\rho) \right) \right)' \right]}{5 \left[\left(P^{+\sqrt{\frac{5\Lambda}{8c^2} K_6 = m}} \left(\tanh(c\rho) \right) \right) + C_1 Q^{+\sqrt{\frac{5\Lambda}{8c^2} K_6 = m}} \left(\tanh(c\rho) \right) \right]}, \quad (3.5)$$

sendo: $P_n^m(\tanh(c\rho))$ o Polinômio Associado de Legendre de primeiro tipo e em função de $\tanh(c\rho)$, $Q_n^m(\tanh(c\rho))$ o Polinômio Associado de Legendre de segundo tipo e em função de $\tanh(c\rho)$, C_1 a Constante arbitrária da solução. Analisando mais diretamente a Eq. (3.2), pode-se ter a solução de $A = -c_0 \tanh(c\rho)$ que será discutida no próximo capítulo. De acordo com a descrição das condições de regularidade na origem pela seção 2.2.1, deve-se delimitar o intervalo de $0 \leq \rho < +\infty$, como se tornará evidente nesta seção. Também, é possível definir $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

As duas soluções analíticas de A devem ser analisadas de forma complementar por $A(0) = 0$, com ambas tendo mesma solução ou diferente soluções (segundo a quais parâmetros estão associadas, descritas na Eq. (3.2)) pelas condições inseridas como foram determinadas. Entretanto, a solução analítica dada mediante a Eq. (3.5) abrange mais casos do que a outra solução analítica comentada da Eq. (3.2), que é mais simples. A solução mais simples será descrita com mais atenção no próximo capítulo. É importante observar também que há a possibilidade de a solução de A não ter unicidade em geral por ser não linear segundo a Ref. [30]. No presente texto, verificar-se-á segundo as seções 3.3 e 3.4 deste capítulo que, de fato, não há unicidade, que descrevem outra solução com mesmos parâmetros oriundos da equação diferencial de Einstein associada. Assim, para os mesmos escalares de pressão segundo os mesmos parâmetros desta seção descritos em geral, não há solução analítica de acordo com as seções 3.3 e 3.4 para mesmas condições de contorno de u e u' da presente seção (o que indica também que a solução de u também não tem unicidade em geral, pois as condições de contorno deste podem ser descritas, em geral, por duas soluções gerais complementares, uma valendo para ρ igual a zero e a outra não).

Na solução da Eq. (3.5) é observado que A , com $\rho = 0$, pode ser zero unicamente com zero ou positivo $-\Lambda$ por zero C_1 com alguns valores para m , obedecendo as condições de regularidade na origem de σ . Isso é verdade porque, unicamente para zero C_1 e m igual a 0, 2, 4, 6, 8, ..., tem-se zero A para $\rho = 0$. Para outros casos de positivo $-\Lambda$ e mesmo limite, A tende a um valor infinito. Entretanto, se for requerido a condição de ρ tendendo ao infinito de forma geral, então é obtido Λ diferente de zero suavizando o modelo GS, por finito A como uma identidade pela Eq. (2.31a) e $A = -c_0 = -4m/5$. Esta solução serve como exemplo de solução com restrições, que pode descrever fisicamente um modelo GS suavizado com Λ diferente de zero. A suavização do modelo GS será completada pelo fator de warp γ nesta seção descrita, seguindo a Eq. (2.31b) para ρ tendendo a um valor infinito e positivo.

Para esclarecimento, os Polinômios Associados de Legendre são caracterizados pelas próximas relações [28,29]:

$$P_n^m(\tanh(c\rho)) = (1 - \tanh^2(c\rho))^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d[\tanh^m(c\rho)]} P_n(\tanh(c\rho)) \quad (3.6a)$$

$$Q_n^m(\tanh(c\rho)) = (1 - \tanh^2(c\rho))^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d[\tanh^m(c\rho)]} Q_n(\tanh(c\rho)), \quad (3.6b)$$

com:

$$Q_n(\tanh(c\rho)) = P_n(\tanh(c\rho)) \int \frac{d \tanh(c\rho)}{(1 - \tanh^2(c\rho))(P_n(\tanh(c\rho)))^2} \quad (3.7a)$$

$$P_n(\tanh(c\rho)) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \tanh^j(c\rho), \quad (3.7b)$$

em que P_n pode ser dado por c_j , com j par (incluindo $j = 0$) ou j ímpar, diferente de zero [28,29]. Este é outro modo de interpretar Q_n sendo um P_n , com diferentes valores de j do mesmo P_n na mesma solução geral da equação diferencial associada de Legendre. Desse modo, considerando unicamente par ou zero j para P_n , a solução analítica segue as condições de regularidade na origem. Se neste modo C_I puder ser diferente de zero, não é possível ter $A = 0$ por mesmo P_n (que, de outro modo, resulta numa solução com A diferente de zero) por Q_n e $\rho = 0$ em concordância com isso. Assim, a solução é verdade por valores reais de m e n . Portanto, tem-se, de maneira completa, a solução de A pelo método da Equação de Riccati. Nesse sentido, a solução dada pela Eq. (3.5), para ser coerente fisicamente, deve ter positivo ou zero $-\Lambda$ para qualquer valor positivo de t_θ , de modo coerente.

Desse modo, a solução de A , como dada pela Eq. (3.5) (ou qualquer outra solução de A , com mesma condição de contorno e possível outro *ansatz* fisicamente distinto da descrita pela Eq. (3.1b), o que serve como base para as discussões mais gerais do texto), permite identificar:

$$A(0) = \rho \frac{dA(0)}{d\rho} = -\frac{K_6}{2} \left(\Lambda + \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} \right) \rho, \quad (3.8)$$

por intermédio da Eq. (3.2) associada.

O próximo passo é o de solucionar a Eq. (2.29b) também na origem, conforme a Eq. (3.8). Assim, primeiramente γ é isolado pela Eq. (2.29b):

$$\gamma = C_2 e^{\int \left[-\frac{3}{2} A - \frac{K_6}{A} \left(\Lambda + \frac{\lambda_\rho}{\cosh^2(c\rho)} \right) \right] d\rho}, \quad (3.9)$$

em que é assumido λ_ρ e λ_θ como constantes para qualquer valor definido de ρ e C_2 é uma constante arbitrária. Portanto, no mesmo modo como descrita a Eq. (3.8), próxima à origem a Eq. (3.9) é reescrita como:

$$\gamma \cong C_2 e^{\int \left[\frac{K_6}{\frac{K_6}{2}(\Lambda + \lambda_\theta)\rho} (\Lambda + \lambda_\rho) \right] d\rho} = C_2 e^{\int \left[\frac{C_3}{\rho} \right] d\rho} = C_4 \rho^{C_3}, \quad (3.10)$$

sendo C_3 e C_4 constantes. Assim, pela Eq. (3.10), ambas as condições de regularidade na origem referents e γ são obedecidas com $C_3 = 2$ e $C_4 = 1$, coerentemente com as outras condições de regularidade na origem sendo verdade pelas Eq. (3.25) com $C_1 = 0$, de:

$$\lambda_\rho = \lambda_\theta, \quad (3.11)$$

com

$$t_\rho = \frac{\lambda_\rho}{\cosh^2(c\rho)}. \quad (3.12)$$

Desse modo, em geral (não apenas para os escalares das dimensões extras como especificadas, como será examinado nas seções de cunho mais geral), os escalares de pressão das dimensões extras são consideradas como iguais para todo valor de ρ .

Logo, em cada uma das Eqs. (2.29b) e (2.29c), o lado esquerdo desses foram equacionados, delimitando:

$$\gamma = \exp\left[\int A(\rho)d\rho + 2\ln(C_5 A(\rho)) + C_6\right] = \sigma(\rho)C_7^2 A^2, \quad (3.13)$$

com C_5 , C_6 e C_7 constantes e seguindo as condições de regularidade na origem de γ por um ajuste de C_7 .

Dessa maneira, a constante C_7 pode ser definida da seguinte forma, associada à Eq. (3.8):

$$C_7 = \frac{-2}{K_6(\Lambda + \lambda_\theta)}. \quad (3.14)$$

Pela próxima expressão tem-se $\lambda_o > \lambda_\rho = \lambda_\theta$ pela Eq. (3.25), sendo a Eq. (3.15) verdade como desenvolvida [4] pelas Eqs. (2.29) em geral, considerando zero Λ_4 e os apóstrofos delimitando derivada com respeito a ρ :

$$2\frac{\sigma'}{\sigma}(t_o - t_\rho) + \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}(t_\theta - t_\rho) = t_\rho'. \quad (3.15)$$

Todos os escalares de energia, pelas soluções desenvolvidas para os fatores de warp, são aproximadamente zero para ρ tendendo ao infinito. Ademais, todas as condições de energia são satisfeitas. No caso da solução dada por A da Eq. (3.5), isso é verdade porque A é sempre negativo (com λ_θ em modulo maior que $-\Lambda$ e seguindo c positivo), associado à Eq. (3.15) e ρ positivo. Nas seções 3.3 e 3.4, as mesmas condições físicas são obedecidas, com ρ sendo positivo. No caso que suaviza o modelo GS com positivo ρ , os fatores de warp são positivos e decrescentes, sendo aproximadamente zero para ρ tendendo ao infinito. Casos análogos existem com negativo ρ e t_ρ' e A positivos com mesmos valores em módulo sendo as únicas mudanças, por mesmos fatores de warp.

Pode ser provado que A é negativo estendendo o caso de n sendo um positivo inteiro para um real e positivo n muito próximo do valor anterior, por $C_1 = 0$. Assim, o intervalo definido de ρ é coerente com as condições de energia, mediante a Eq. (3.8) com $c > 0$ e $C_7 < 0$. Portanto, os fatores de warp podem ser determinados por:

$$\int Ad\rho = \int_0^\rho Ad\rho = \int_0^\rho \frac{4}{5P_n^m} \frac{dP_n^m}{d\rho} d\rho = \int_0^\rho \frac{4}{5P_n^m} dP_n^m = \frac{4}{5} \ln \left[\frac{P_n^m(\tanh(c\rho))}{P_n^m(0)} \right], \quad (3.16)$$

pelo qual é obtida a solução analítica dos fatores de warp pela Eq. (3.5):

$$\sigma = \left[\frac{P_n^m(\tanh(c\rho))}{P_n^m(0)} \right]^{\frac{4}{5}}, \quad (3.17a)$$

$$\gamma = \frac{1}{[P_n^m(0)]^{\frac{4}{5}} [P_n^m(\tanh(c\rho))]^{\frac{6}{5}}} \left[C_7 \frac{dP_n^m(\tanh(c\rho))}{d\rho} \right]^2, \quad (3.17b)$$

O Escalar de Ricci associado às Eqs. (2.29) é dado por [5]

$$R = \frac{1}{\sigma} \tilde{R} - 4 \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 - \frac{2\sigma'\gamma'}{\sigma\gamma} - \frac{\gamma''}{\gamma} - \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2, \quad (3.18)$$

com a métrica de Minkowsky delimitando o Escalar de Ricci do mundo brana por:

$$\tilde{R} = 4K_4\Lambda_4 = 0. \quad (3.19)$$

Então, com suporte no lado direito da Eq. (3.2) e com apóstrofos significando derivadas com respeito a ρ , tem-se:

$$R = 3K_6 \left(\Lambda + \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} \right) - 5A' - \frac{2A''}{A}, \quad (3.20)$$

que segue, no limite de ρ infinitamente grande, $R = 3K_6\Lambda$.

3.1.2 Localização gravitacional

Considerando a seção 2.3.1 analogamente, com h_{ab} sendo redefinido igualmente por $h_{\mu\nu}$, a equação de movimento de um gráviton pode ser dada, também seguindo, assim como na seção 2.3.1, um gauge transverso e sem traço dado por:

$$h_v^\mu = \nabla_\nu h^{\mu\nu} = 0,$$

tem-se a seguinte equação de movimento gravitacional, para a componente transversa do espaço de bulk [3,4,27]:

$$-\frac{1}{\sigma\sqrt{\gamma}}\partial_\rho(\sigma^2\sqrt{\gamma}\partial_\rho\phi_m) = m^2\phi_m,$$

em que foi considerado $-\eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu h_{\mu\nu}(x) = m^2 h_{\mu\nu}(x)$ (condição de massa m de gráviton com ∇_μ sendo o operador de uma derivada covariante) e $h_{\mu\nu}(x, \rho, \theta) = \phi_m(\rho)h_{\mu\nu}(x)\sum_{l=0}^{\infty} e^{il\theta}$ (conhecida como decomposição de Kaluza-Klein (KK)) e que pode ser reescrita por:

$$-\partial_\rho{}^2\phi_m - \left(\frac{2\sigma'}{\sigma} + \frac{\gamma'}{2\gamma}\right)\partial_\rho\phi_m = \sigma^{-1}m^2\phi_m.$$

Assim, a localização gravitacional pode ser estudada por:

$$-\partial_\rho{}^2\phi_m - \left[\frac{5}{2}A + \frac{A'}{A}\right]\partial_\rho\phi_m = e^{\int_{A_0}^{\rho} Ad\rho} m^2\phi_m, \quad (3.21a)$$

$$m^2 = m_o^2 - \frac{l^2}{\beta(\rho)}, \quad (3.21b)$$

sendo m_o uma constante de massa e l um número inteiro de momento angular intrínseco.

Logo, considerando β variável, a massa m é dependente da posição no espaço de bulk para l diferente de zero.

Poderia ser estudado os resultados analíticos da Equação de Einstein para outros campos, como nas Refs. [11,27,36], porém, nesta seção, apenas será considerado o gráviton de spin-2.

Neste sentido, pode ser reescrita a Eq. (3.21a), pelas soluções das Eqs. (3.5) e (3.17a), por:

$$-\partial_\rho^2 \phi_m - \left[\frac{5}{2} \frac{[P_n^m(\tanh(c\rho))]}{P_n^m(\tanh(c\rho))} + \frac{\left\{ \frac{[P_n^m(\tanh(c\rho))]}{P_n^m(\tanh(c\rho))} \right\}}{\frac{[P_n^m(\tanh(c\rho))]}{P_n^m(\tanh(c\rho))}} \right] \partial_\rho \phi_m = \left[\frac{P_n^m(\tanh(c\rho))}{P_n^m(0)} \right]^{\frac{4}{5}} m^2 \phi_m. \quad (3.22a)$$

Então, como se tem a solução da Equação de Einstein que suaviza o modelo GS, há também uma suavização do modelo GS no mesmo limite (ρ tendendo ao infinito). Em outras palavras, nesse limite, o modelo descrito pela seção presente obedece

$$-\partial_\rho^2 \phi_m + \frac{5}{2} c_o \partial_\rho \phi_m \cong C_{sa} e^{-c_o \rho} m^2 \phi_m, \quad (3.23)$$

com mesmo comportamento do modelo GS e, como consequência, tem-se máximo valor finito para ρ com o intuito de haver localização gravitacional por somente ϕ_m como função de onda, em que C_{sa} é uma Constante associada à solução para ρ tendendo ao infinito. O modo zero gravitacional deste tipo de função de onda é, de forma localizada, uma constante [4], pois o espaço-tempo permite esta localização gravitacional com a normalização da função de onda no espaço de bulk. Assim, como os demais modelos deste capítulo que suavizam o modelo GS, a localização gravitacional, para ρ tendendo ao infinito, corresponde aproximada e igualmente o modelo GS, diferente um pouco dos modelos estudados de tipo-corda suave e corda charuto [5,12] que consideram m substituído por $m/e^{1/2}$ pela localização gravitacional, no mesmo limite. Assim, pode-se dizer que os modelos descritos por este capítulo recuperam o modelo GS igualmente, para quando os escalares de pressão e energia são zero, assim como no modelo GS.

Assim, ϕ_m com ρ tendendo ao infinito é descrito coerentemente de maneira similar ao modelo GS, mediante a Eq. (3.23) com:

$$\phi_m(\rho) \cong e^{\frac{5}{4} c_o \rho} \left[D_1 J_{5/2} \left(\frac{2C_{sa}^{1/2} m}{c_o} e^{(c_o/2)\rho} \right) + D_2 Y_{5/2} \left(\frac{2C_{sa}^{1/2} m}{c_o} e^{(c_o/2)\rho} \right) \right]. \quad (3.24)$$

em que D_1 e D_2 são constantes arbitrárias e $J_{5/2}$ e $Y_{5/2}$ são funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, de ordem 5/2.

Para o caso limite de ρ próximo de zero, os modelos descritos nesta seção, segundo as Eqs. (3.22), fornecem:

$$-\partial_\rho^2 \phi_m - \frac{1}{\rho} \partial_\rho \phi_m \cong \left(m_o^2 - \frac{l^2}{\rho^2} \right) \phi_m, \quad (3.25)$$

resultando pelas funções de Bessel respectivas:

$$\phi_m \cong D_3 J_l(m_o \rho) + D_4 Y_l(m_o \rho), \quad (3.26)$$

sendo D_3 e D_4 constantes arbitrárias e permitindo uma localização gravitacional coerentemente com o modelo corda-charuto, tipo-corda suave e os demais modelos analisados que seguem as condições de regularidade na origem [4,12]. Observa-se também que pelo estado s e $l = 1$ talvez seja encontrado um modo ressonante massivo por uma análise numérica. Poderia ser investigado uma Equação tipo Schrödinger [5,12,43] oriundo de ϕ_m , porém preferiu-se adotar esse formalismo apenas no capítulo 4, em que se encontra muitas soluções com uma barreira de potencial infinito na origem e que podem indicar influência de modo massivo por potencial de barreira finita para $l = 1$ em relação a um mundo brana.

3.1.3 Problema da Hierarquia

O Problema da Hierarquia pode ser solucionado, compativelmente, pela próxima relação [4,5]:

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty d\rho \sigma \sqrt{\gamma}, \quad (3.27)$$

em que, pela solução analítica obtida pelos fatores de warp associada à Eq. (3.8),

$$M_p^2 = 2\pi M_6^4 \int_0^\infty e^{\int_0^\rho \frac{3A}{2} d\rho} C_7 A d\rho = -\frac{4\pi M_6^4 C_7}{3},$$

(3.28)

em que C_7 é dado pela Eq. (3.14). A solução dada pela Eq. (3.28) pode ser estendida aos demais casos que seguem as condições de regularidade na origem e suavizam o modelo GS, com $dA/d\rho$ sendo finito na origem e $t_\theta(\rho = 0) = \lambda_\theta$, como há em soluções analíticas do capítulo 4 e deste capítulo.

Desse modo, o valor de λ_θ pode ser ajustado, coerentemente com o valor requerido de M_6 , sabendo que as condições de energia da solução analítica dos fatores de warp são obedecidos coerentemente com λ_θ maior do que Λ (com $\Lambda < 0$) em módulo e c positivo.

3.2 Método geral de construção de solução seguindo escalares-de-pressão iguais

Em concordância com as soluções de A que ocorrem na seção 3.1, pode-se construir qualquer função de A que possua:

- 1) A tendendo a $-c_o$ com ρ tendendo ao infinito;
- 2) A igual a zero para $\rho = 0$;
- 3) $A = -c_o f$, em que f e ρ são sempre positivos;
- 4) A é diretamente proporcional a ρ próximo da origem;
- 5) o intervalo de integração de A seja de zero a ρ ; e

6) a derivada segunda de A , com respeito à ρ , seja sempre positiva, com A sendo função real cada vez mais próximo de uma constante por variação positiva de ρ .

Desse modo, a Eq. (3.13) pode ser seguida associada à Eq. (3.15), delimitando todas as condições físicas requeridas de regularidade na origem e de energia dominante (segundo-se escalares de pressão t_ρ e t_θ como iguais). A condição 6), é bom ressaltar, é possível de provar que não pode ser relaxada, para $dt_\theta/d\rho < 0$ e $A < 0$ para $\rho > 0$.

Assim, pode-se construir vários modelos que suavizam o modelo GS. As únicas restrições são seguir as condições inseridas e a Eq. (3.13). Então, para a solução ser totalmente analítica da Equação de Einstein, pode-se escolher uma função de A que tenha solução, sem integração numérica, para o fator de warp σ .

Por exemplo, pode-se determinar analiticamente os fatores de warp σ e γ por:

$$A = -c_o \frac{b\rho}{a + b\rho}, \quad (3.29)$$

com b e a sendo constantes, em que $a = 1$ e $b = K_0(\Lambda + t_0(\rho = 0))/c_o$ é possível em geral com positivo b diferente de zero (com b negativo haveria A negativo com ρ negativo), em que os fatores de warp são dados por:

$$\sigma = \exp\left[-\frac{c_o}{b}\left(b\rho - a \ln\left|\frac{a + b\rho}{a}\right|\right)\right], \quad (3.30a)$$

$$\gamma = \exp\left[-\frac{c_o}{b}\left(b\rho - a \ln\left|\frac{a + b\rho}{a}\right|\right)\right]\left(\frac{a}{c_o b}\right)^2 \left(c_o \frac{b\rho}{a + b\rho}\right)^2, \quad (3.30b)$$

considerando que há suavização do modelo GS e $A \leq 0$ com $a > 0$, $b > 0$ e $\rho \geq 0$.

Então, todas as condições matemáticas de localização gravitacional são dadas pela seção precedente, segundo esse tipo de solução e, portanto, tem-se localização gravitacional similarmente. O mesmo ocorre com o Problema da Hierarquia como resolvido, que também deve seguir a seção 3.1.3.

Generalizando a Eq. (3.29), pode-se ter, portanto, um valor de A mais geral, com mesmos valores de inequações das constantes e de ρ , dado por:

$$A = -c_o \frac{b\rho + \sum_i C_{1i} \rho^{C_{2i}}}{a + b\rho + \sum_i C_{1i} \rho^{C_{2i}}} < 0, \quad (3.31)$$

sendo C_{1i} qualquer constante e C_{2i} uma constante maior do que 1. Nesse sentido, para $C_{1i} > 0$, a Eq. (3.31) é facilmente respeitada, em que é possível suavização na origem das fontes escalares da Equação de Einstein (com $C_{11} = b^2$, $a = 1$ e $C_{21} = 2$). Na próxima seção será vista uma solução diferencial que segue solução distinta, mesmo com mesmos parâmetros da Equação de Einstein, da ocorrida na Eq. (3.31), mas que segue as mesmas condições físicas requeridas. Isso ocorre devido a não unicidade da solução fornecida mediante a Eq. (2.29c), em geral, que tem como caso particular a Eq. (3.2), como é possível de acordo com a Ref. [30] (tendo, por consequência, implicação similarmente a

não unicidade na solução geral para equações ordinárias diferenciais lineares de segunda ordem e homogêneas que se conectam à Equação de Riccati oriunda da Eq. (2.29c)).

3.3 Solução geral e diferencial da Equação de Einstein com escalares-de-pressão iguais e podendo suavizar o modelo GS

Primeiramente, pela Eq. (2.29c),

$$2\frac{dA}{d\rho} + \frac{5}{2}A^2 = -K_6\left(\Lambda + \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)}\right), \quad (3.32)$$

com λ_i ($i = \theta, \rho$) e c sendo constantes. Apesar do *ansatz* da Eq. (3.1b) ser seguido nesta seção, será visto que ele pode ser substituído coerentemente por outro escalar físico em geral como será abordado nesta seção.

Apesar da solução da presente seção ser descrita unicamente por equações diferenciais, ela delimita uma solução para qualquer *ansatz* de escalar t_θ com um valor finito, positivo e aproximadamente zero para ρ tendendo ao infinito, seguindo todas as condições de energia e de regularidade na origem. Isso é realizado em geral, respectivamente às Eqs. (2.29), com variação da condição de contorno, distante da origem e de forma a haver valores reais, sendo possível. Também, desse modo, será verificado que $t_\theta = t_\rho$, permitindo um estudo de localização gravitacional pela Eq. (3.21). Como uma consequência, esta interpretação torna possível o estudo por método numérico de equações diferenciais ordinárias, seguindo soluções distintas das vistas analiticamente com $A(0) = 0$ pelo método da Equação de Riccati ou outro método, como analisado pelas seções precedentes. Isto é possível pois é admitido que $A = 0$ como função de ponto extra à solução, para $\rho = 0$ e em outro ponto crítico (que são pontos críticos que não têm solução numérica ou analítica para A analisado fora desses pontos extras desta seção), o que torna verdade, com condição de contorno diferente próximo à origem, que a solução dada por esta seção, para A , seja diferente da construída de A analisado pela Eq. (3.31). Para isso, no entanto, o intervalo de integração do fator de warp σ é redefinido, invertendo-o, sendo de ρ a 0, como será analisado na seção 3.4. Há ainda o fato de se considerar a solução

diferencial de forma geral, podendo-se verificar todas as condições físicas em geral. Portanto, foram delimitadas as razões dessa abordagem na presente seção.

A próxima relação da Eq. (3.33) pelas próximas explanações pode reproduzir exatamente a Eq. (3.32), como será discutido e provado. Assim, a Eq. (3.32) é reescrita, nesta seção, com o primeiro termo substituindo o termo respectivo a $4A'/5$ e mantendo uma possível solução pela Eq. (3.32) geral, porque f_A pode ser qualquer função de ρ coerentemente, por:

$$f_A A^2(\rho) + A^2(\rho) = -\frac{2}{5} K_6 \left(\Lambda + \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} \right) = f_\theta. \quad (3.33)$$

Em outras palavras, será demonstrado em um modo mais simples que se todos os lados da Eq. (3.33) são iguais para todos os lados da Eq. (3.32) com derivada de A associada como descrita em geral e exatamente, então se tem completada a demonstração de identidade.

Desse modo, a derivada de A deve ser analisada como:

$$\frac{4}{5} A' = A^2 f_A \therefore \int \frac{4}{5} \frac{A'}{A^2} d\rho = -\frac{4}{5A} - C_A = \int f_A d\rho \therefore A = -\frac{4}{5} \frac{1}{\int f_A d\rho + C_A}, \quad (3.34)$$

verificando a generalidade existindo com C_A sendo uma constante. Portanto, a Eq. (3.32) é reescrita, com mesmas condições descritas pelas Eqs. (3.33) e (3.34) e, consequentemente, sendo consistente:

$$\frac{16(1+f_A)}{\left(\int f_A d\rho + C_A\right)^2 25} = f_\theta, \quad (3.35)$$

em que uma coerente solução, de f_A , reproduz a Eq. (3.32) pela Eq. (3.34) por

$$\left[\frac{4}{5} A' = \frac{16}{25} \frac{f_A}{\left(\int f_A d\rho + C_A\right)^2} \right] + \left[A^2 = \frac{16}{25} \frac{1}{\left(\int f_A d\rho + C_A\right)^2} \right] = f_\theta, \quad (3.36)$$

que pode-se entender como uma integral indefinida (com zero C_A) por

$$\int f_A d\rho = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{1+f_A}{f_\theta}}. \quad (3.37)$$

A Eq. (3.36) pode delimitar também a Eq. (3.32) por f_A em função de A e A' (de Eq. (3.34)) pela Eq. (3.35).

Desse modo, em relação à variável f_A , a seguinte função é inserida compativelmente da forma mais geral possível:

$$f_E = f_E(\rho), \quad (3.38)$$

descrevendo o valor de f_A como de forma exata e geral para ρ diferente de zero por:

$$f_A^2 = \frac{16}{25} \frac{1+f_A}{4\rho^2 f_\theta} f_E^2. \quad (3.39)$$

Assim, o valor de f_A pode ser isolado, pela Eq. (3.39), dando a solução por uma equação quadrática, permitindo-se determinar:

$$f_A = \frac{\frac{16f_E^2}{25f_\theta} \pm \sqrt{\frac{256f_E^4}{625f_\theta^2} + \frac{256\rho^2 f_E^2}{25f_\theta}}}{8\rho^2}, \quad (3.40)$$

com a Eq. (3.34) reescrita por:

$$A = -\frac{4}{5} \frac{1}{\int \left(\frac{\frac{16f_E^2}{25f_\theta} \pm \sqrt{\frac{256f_E^4}{625f_\theta^2} + \frac{256\rho^2 f_E^2}{25f_\theta}}}{8\rho^2} \right) d\rho + C_A}. \quad (3.41)$$

De fato, a Eq. (3.41) tem a mesma formulação matemática de A da Eq. (3.34) no contexto da Eq. (3.35), que é a mesma Eq. (3.32) pela relação dada oriunda da Eq. (3.34) como provado, delimitando todas as básicas equações do formalismo.

Portanto, se a solução é possível de ser obtida analiticamente utilizando a Eq. (3.41), tem-se a solução de A . Isso não será feito como já discutido, porém as condições de regularidade na origem são analisadas como se segue nos próximos desenvolvimentos.

Assim, assumindo f_θ positivo ou negativo com qualquer sinal, a Eq. (3.41), próximo à origem (ρ tendendo a zero), tende a:

$$A \cong -\frac{4}{5} \frac{1}{\int \left[\frac{\frac{16f_E^2}{25 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]} \pm \sqrt{\frac{256f_E^4}{625 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]^2}}}{8\rho^2} \right] d\rho + C_A}. \quad (3.42)$$

Desse modo, analisando a variação relativa de f_θ e f_E praticamente com valor zero, em relação a uma variação relativa de ρ explícita no denominador do integrando da Eq. (3.42), é obtido:

$$A \cong -\frac{4}{5} \frac{1}{-\frac{1}{8} \left\{ \frac{16f_E^2}{25 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]} \pm \sqrt{\frac{256f_E^4}{625 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]^2}} \right\} \frac{1}{\rho} + C_A}, \quad (3.43)$$

que resulta em duas possíveis soluções reais (com C_1 sendo zero por $A' = 0$), dadas por:

$$A \cong -\frac{4}{5} \frac{1}{C_A} = -\sqrt{-\frac{2}{5} K_6 (\Lambda + \lambda_\theta) - \frac{4}{5} C_1} \quad (3.44a)$$

e

$$A \cong -\frac{4}{5} \frac{\rho}{-\frac{1}{8} \left\{ \frac{32f_E^2}{25 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]} \right\} + C_A \rho}, \quad (3.44b)$$

em que a Eq. (3.44a) pode corresponder ao modelo GS com ρ próximo da origem. A Eq. (3.44a) é entendida como originada de Λ and λ_θ sendo constantes, de maneira similar a Λ no modelo GS, enquanto pela Eq. (3.44b) todas as condições de regularidade pela origem do fator de warp σ são satisfeitas, diferentemente do modelo GS. O valor negativo de A na Eq. (3.44a) advém de uma suavização do modelo GS associada. A Eq. (3.44a) advém de f_θ ser positivo (negativo) na origem para sinal de menos (mais) na Eq. (3.43), enquanto a Eq. (3.44b) considera f_θ negativo (positivo) próximo à origem com o sinal de menos (mais). Em todas as soluções desta seção, ressalta-se que f_θ não pode ser assumida na origem como tendo valor de zero (como ocorre na solução analítica dos modelos da corda-charuto e tipo-corda suave [5,12]), sendo as soluções válidas para todo valor de ρ como especificado inicialmente na presente seção.

Descrevendo o caso de ρ próximo da origem, semelhantemente como analisado pela Eq. (3.8) por $A(0)$ sendo zero, há:

$$\frac{4}{5} A'(\rho \rightarrow 0) = -\frac{2}{5} K_6(\Lambda + \lambda_\theta) = -\frac{16}{25} \frac{1}{\left[\frac{f_E^2 32}{25 \left[-K_6 \frac{2}{5} (\Lambda + \lambda_\theta) \right]} \right]} = \frac{4}{5C_7}, \quad (3.45)$$

de acordo com um Λ positivo ou negativo seguindo a Eq. (3.14). Desse modo, tem-se $f_E = 2$ próximo à origem, concordando com os resultados da Eq. (3.44b) seguindo as condições de regularidade na origem oriunda das Eqs. (2.27) (incluindo-se a Eq. (3.13) como demonstrada). Logo, averigua-se, pela Eq. (3.33):

$$A = \mp \sqrt{\frac{f_\theta}{1 + f_A}}, \quad (3.46)$$

em que o negativo ou positivo sinal é respectivo ao negativo ou positivo f_θ próxima à origem (analisando a Equação de Einstein pelas próximas expressões para A). Portanto, com A devendo ser positivo para a suavização do modelo GS, $f_\theta > 0$ na origem.

Assim, seguindo as Eqs. (3.37) e (3.39),

$$\int f_A d\rho = \frac{2f_A \rho}{f_E}. \quad (3.47)$$

Então, inserindo-se [31]

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right), \quad (3.48)$$

que, com a sendo uma constante positiva, a Eq. (3.40) e ambos os lados da Eq. (3.47), permite-se verificar que

$$f_A = f_{A_0} + C \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2}, \quad (3.49a)$$

$$f_E = \sqrt{\frac{1}{2} \left(C \sqrt{a^2 - \rho^2} + f_{A_0} \rho^2 \right) \left[\frac{16}{200 f_\theta} + \frac{2}{25} \frac{\rho^2}{f_\theta (C \sqrt{a^2 - \rho^2} + f_{A_0} \rho^2)} \right]^{-1} - 2\rho \left(f_{A_0} + C \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} \right)}, \quad (3.49b)$$

$$= \frac{\left\{ C \left[-\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) \right] + \int f_{A_0} d\rho \right\}}$$

considerando C como uma constante negativa com, na origem, f_θ sendo negativo, pela próxima expressão. No contexto da Eq. (3.48), deve-se relatar que a raiz quadrada pode ser substituída por a , eliminando o segundo termo do lado direito desta equação, de acordo com uma solução respectiva para qualquer valor real por qualquer valor válido da dimensão extra radial como especificada. Deve ser antecipado que os resultados das Eqs. (3.49) são coerentes com a respectiva equação diferencial analisada pelas próximas equações, que demonstra um desenvolvimento teórico consistente.

Para as constantes relacionadas, A é delimitado de acordo com as Eqs. (3.49) para qualquer valor válido de ρ , com $f_E = 2$ aproximadamente descrito na origem pela Eq. (3.45), por:

$$\sqrt{\frac{25}{4} \left[-\frac{2}{5} K_6(\Lambda + \lambda_\theta) \right]} Ca = 2. \quad (3.50)$$

Então, das Eqs. (3.49) e (3.50), tem-se duas distintas soluções gerais com diferentes condições de contorno, com a segunda solução geral sendo possível segundo definição da Eq. (3.49a). Isso é descrito mais claramente com ρ tendendo a zero, em que entre as duas soluções gerais (incluindo a solução dada pela seção 3.2), para A , têm diferentes valores de contorno e, conseqüentemente, também têm diferentes soluções. Assim, nesta descrição, percebe-se porque f_{A0} e sua integral não existem para $\rho = 0$, o que explica a solução dada pela Eq. (3.31) ser diferente da estudada nesta seção. Pode-se unicamente impor a condição $\rho = 0$ depois de uma manipulação algébrica da solução de A , mas a base desse formalismo não segue isso (pois $A = A(f_A)$ pela Eq. (3.34)) e, portanto, não permite que a solução de A seja dada pela Eq. (3.31) pela presente seção. Uma das soluções desta seção pode considerar um caso especial com a tendendo ao infinito (sendo esta solução a que suaviza o modelo GS por permitir qualquer valor de ρ como se segue), o que completa a discussão. Os modelos das Refs. [5,12] das seções 2.2.3 e 2.2.4 não seguem tal análise, porque, como deve ser lembrado, $f_\theta = 0$ em $\rho = 0$ nestes estudos pesquisados.

Para delimitar um máximo e interessante valor de ρ seguindo A sempre real e negativo coerentemente com a Eq. (3.50), pode-se interpretar como fisicamente coerente se considerar t_ρ maior do que Λ em módulo com:

$$-\Lambda = \lambda_\theta \cosh^{-2}(ca) = t_\theta(\rho = a), \quad (3.51)$$

para o caso de negativo Λ e com a segunda igualdade sendo mais geral. Assim, a condição para a Eq. (3.51) pode ser entendida como a constante cosmológica representando uma parte de uma pressão ou energia local, com tal pressão ou energia local tendo um positivo valor pela Teoria Quântica de Campos. Para o caso de positivo Λ qualquer valor de ρ é possível, com $a^2 - \rho^2$ permitindo ser substituído por uma constante positiva coerentemente com a Eq. (3.50). Desse modo, mesmo com o valor de a maior sendo possível nesta seção semelhantemente associada com escalares positivos de t_θ , a definição da Eq. (3.50) foi delimitada em concordância com a constante cosmológica se referindo a uma pressão local quando associada à dimensão angular de bulk. Entretanto, a suavização do modelo

GS é impossível com a Eq. (3.51) associada à Eq. (3.49a) para finitos valores de ρ , que é corrigido por $a^2 - \rho^2$ substituído por a^2 para suavizar o modelo GS de maneira compatível, desaparecendo o segundo termo do lado direito da Eq. (3.49a).

Então, combinando as Eqs. (3.34) e (3.46) pelas Eqs. (3.49), tem-se a seguinte expressão para negativo (positivo) A para sinal superior (inferior) e seguindo a Eq. (3.32) de Eq. (3.35) como provado:

$$\begin{aligned} \mp \sqrt{\frac{f_\theta}{1 + f_{A_0} + C \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2}}} &= \\ = -\frac{4}{5} \frac{1}{\int f_{A_0} d\rho - C \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} - C \text{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) + C_A} &= A \end{aligned} \quad (3.52)$$

Neste ponto, algumas mudanças devem ser feitas coerentemente com as Eqs. (3.49) e (3.52), para garantir que f_{A_0} seja real quando f_θ é aproximadamente zero como segue, sabendo-se que, de modo consistente e em geral, $C_A = 0$.

Desse modo, a integral de f_{A_0} pode ser isolada pela Eq. (3.49b), resultando em:

$$\int f_{A_0} d\rho = -G_1 \pm \sqrt{G_2}, \quad (3.53)$$

em que tem-se a escolha do sinal mais (menos) com a integral tendendo a zero próximo à origem de ρ positivo e negativo (positivo) f_θ na origem (porque esse é o único modo de se ter a respectiva integral com o relacionado valor de ρ descrito coerentemente com a Eq. (3.50) e o prévio formalismo pela Eq. (3.45) existir, com finito valor de f_{A_0} delimitado em tempo apropriado), com

$$G_1 = -C \left(\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho} + \text{sen}^{-1}\left(\frac{\rho}{a}\right) \right) \quad (3.54a)$$

e

$$G_2 = \frac{8}{\rho^2} \left(C\sqrt{a^2 - \rho^2} + f_{A_0}\rho^2 \right) \left(\frac{2}{25f_\theta} + \frac{2}{25} \frac{\rho^2}{f_\theta \left(C\sqrt{a^2 - \rho^2} + f_{A_0}\rho^2 \right)} \right). \quad (3.54b)$$

Neste sentido, a solução, em geral, tem valor zero para o limite de ρ próximo de zero no lado esquerdo da Eq. (3.53), porque f_{A_0} deve ser finito e constante em uma solução contínua para ρ tendendo a zero. Se isso não fosse verdade, então o mesmo termo é infinito na origem, o que não faz sentido pelas requeridas condições de A próxima a origem pela Eq. (3.45) e as condições de regularidade na origem de σ . Uma outra delimitação é sobre f_{A_0} ser considerado contínuo (o que é provado associando-o a um método numérico de finita diferença). Há indicação de que a solução de f_{A_0} dependa de uma condição de contorno para que seja real, segundo as Eqs. (3.54) associadas à solução aproximativa da seção 3.6.1. Uma solução real de f_{A_0} é possível, de forma geral, pela solução analítica dada pela seção 3.4 como seguirá.

Assim, esta solução é verdade com todo o formalismo prévio desenvolvido, porque a Eq. (3.53) como desenvolvida, quando substituída na Eq. (3.52), resulta em uma identidade pela constante de integração C_A sendo zero, sabendo-se que a Eq. (3.53) foi deduzida sem utilizar a Eq. (3.52). Desse modo, a solução dada pela Eq. (3.52) segue a Eq. (3.32) como foi provado. Assim, a solução, analogamente à solução dada pela seção 3.1.1, é dada associando-a às Eqs. (3.1a) e (3.13).

Sobre a Eq. (3.53), o termo de f_{A_0} é dado como

$$f_{A_0} = \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\left(-G_1 - \int f_{A_0} d\rho \right)^2 - \frac{16}{25f_\theta} \right] \frac{25f_\theta}{16}. \quad (3.55)$$

Pela Eq. (3,75) oriundo da Eq. (3.52), a integral pela Eq. (3.53) é infinitamente positiva com f_{A_0} sendo aproximadamente finito e negativo (positivo) para f_θ próximo de zero e negativo (positivo). Isso é verificado mais claramente pela Eq. (3.52) de acordo com a próxima equação, com A sendo suavizado unicamente com A'/A sendo aproximadamente zero nesse limite. Entretanto, pode-se entender que f_{A_0} possa ser infinitamente negativo (positivo) no mesmo limite, com A não suave, porque o termo A deve também ocorrer da integral de f_{A_0} ser aproximadamente infinito e positivo próximo a esse limite. Se isto não é verdade, então f_{A_0} é finito com sua integral crescendo infinitamente em mesmo limite, o que não pode ser verdade e prova a asserção delimitada

como verdade. Assim, está justificada a inclusão dos intervalos de integração e de derivada como segue, porque, de outro modo os valores de f_{Ao} e de sua integral não faz sentido para a solução no início desta seção. Assim, pela Equação de Einstein do início desta seção não suavizando o modelo GS, com $dA/d\rho$ tendo elemento diferencial $d\rho$ sendo negativo, ρ deve ser positivo sem mudar o formalismo, com $A < 0$ e $f_\theta < 0$ até $f_\theta = 0$ (para positivo f_θ será discutido mais adiante). Entretanto, seguindo $f_\theta > 0$ na origem suaviza-se o modelo GS por esta seção, tendo-se $A > 0$ com positivo ρ também sem mudar o formalismo inicial com $dA/d\rho$ tendo elemento diferencial $d\rho$ também negativo. Nas próximas expressões, considera-se elemento diferencial $d\rho$ positivo em derivadas.

Assim, a Eq. (3.55) pode ser reescrita, seguindo coerentemente f_{Ao} e sua integral (o que mantém a Eq. (3.34) inserindo-se um intervalo de integração compatível), por

$$f_{Ao1} = \int_{\rho}^0 f_{Ao} d\rho, \quad (3.56)$$

em que

$$f'_{Ao1} = \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \frac{25G_1^2 f_\theta}{16} - 1 + \frac{25G_1 f_\theta}{8} f_{Ao1} + \frac{25 f_\theta}{16} f_{Ao1}^2, \quad (3.57)$$

sendo a Eq. (3.57) analisada pela Equação de Riccati e o operador de derivada é dado por $d/d(-\rho)$ na Eq. (3.57) e nas próximas expressões. Neste sentido, a Eq. (3.57) suaviza o modelo GS com a infinitamente grande e um escalar de pressão $t_\theta = t_\rho$ compatível, porque é impossível se ter valor zero ou infinito de f_{Ao1} pela Eq. (3.57) para ρ tendendo ao infinito e mesmas condições. Assim, o formalismo adotado nesta seção é especial, porque ele gera, associado à Eq. (3.13), um modelo GS suavizado geral com várias condições de contorno e com as condições de regularidade na origem e as condições de energia sendo obedecidas para ρ positivo. O único pensamento que se poderia ter como incorreto, sem sê-lo, é o de achar que a solução não é válida porque f_{Ao} unicamente existe de ρ tendendo a zero e não $\rho = 0$. Isso é resolvido inserindo $A = 0$ como uma função de ponto extra de $\rho = 0$ (por mesma função de A , mas com $f_E = 2$, $f_{Ao1} = 0$) e $f_\theta = 0$, desaparecendo as discontinuidades. Assim, em geral pela Eq. (3.49a), deve-se colocar, em mesma condição limite da origem do espaço de bulk, $f_{Ao} = (-1 + 25Caf_\theta(\rho = 0)/8)^{-1} =$

1. Outra condição relevante é que, para $f_{Aol} = -G_1$, existe A tendendo a infinito negativo, havendo uma descontinuidade no gráfico de A neste ponto (pode-se provar que isso ocorre para sempre contínuo e negativo $dt_\theta/d\rho$ com $f_\theta < 0$ na origem).

Desse modo, a Eq. (3.57) pode ser solucionada por

$$w'' - \left(\frac{f'_\theta}{f_\theta} + \frac{25}{8} G_1 f_\theta \right) w' + \left(\frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \frac{25}{16} G_1^2 f_\theta - 1 \right) \frac{25 f_\theta}{16} w = 0, \quad (3.58)$$

pela razão de que, segundo método da Ref. [50],

$$f_{Aol} = -\frac{w'16}{f_\theta w25}. \quad (3.59)$$

Dessa forma, sabendo o valor de f_{Aol} , tem-se o valor de f'_{Aol} em um modo analítico. Percebe-se também que a solução de A é distinta da seção 3.2 por A' , na Equação de Einstein, ter $d\rho$ negativo, diferentemente da seção 3.2. Assim, para condição de contorno diferente de u' e mesma condição de contorno de u , da seção 3.1 associada à seção 3.2, em geral (para u' a condição de contorno é diferente pelas duas soluções de A gerais como analisadas nesta seção e na seção precedente), em todo ponto da solução, pode haver solução analítica da Eq. (3.57) via Eq. (3.58) mediante a Eq. (3.59).

Em concordância com toda a presente seção, casos com maiores valores de ρ (em outras palavras, por f_θ mudando de valor negativo a positivo, em que se tem A tendo a zero), associado a negativo Λ , também são possíveis de obter como segue. Isso é feito pela transição de valor negativo para positivo de f_θ , substituindo C por $-C$, A por $-A$ e mudando o sinal de mais pelo de menos da Eq. (3.53). Assim, como descrita, a raiz quadrada de $a^2 - \rho^2$ é trocada por a , coerentemente com C analisado da Eq. (3.50) sendo substituída por $-C$, porque para $A' = 0$ isso é também verdade na transição de valor negativo para outro positivo pelo termo f_θ . Então, isso foi delimitado com A sendo negativo para valores positivos de ρ , de f_{Aol} sendo infinitamente positivo em f_θ tendendo a zero. Em um modo similar, pode-se ter positivo valor de f_θ na origem para qualquer valor relacionado de positivo ρ , em concordância com A sendo positivo, com C delimitado unicamente pela Eq. (3.50). Desse modo, a solução diferencial e real com negativo valor de Λ desta seção segue o modelo GS para positivo ρ , com f_θ na origem sendo positivo.

Além disso, analogamente a um modelo GS suavizado, soluções com positivo Λ não fornecem solução real em geral para os fatores de warp e A .

O modelo teórico desta seção é compatível com qualquer *ansatz* para o escalar de pressão t_θ , seguindo a Eq. (3.13) relacionado por todas as condições de regularidade pela origem como satisfeitas, em um modo físico (com valor positivo e, para ρ tendendo ao infinito, aproximadamente zero, com todas as condições respeitadas por derivada com respeito a ρ de t_ρ sendo negativo segundo a Eq. (3.15)), o que permite a suavização do modelo GS. É bom ressaltar que a presente seção, quando associada à suavização do modelo GS, também segue analogamente os casos especiais de localização gravitacional, vistos anteriormente, assim como o Problema da Hierarquia como resolvido compativelmente. Na próxima seção será discutida uma solução analítica geral para A , seguindo a solução diferencial que suaviza o modelo GS como estudado.

3.4 Solução analítica alternativa da solução geral diferencial que suaviza o modelo GS

3.4.1 Solução da Equação de Einstein

Nesta seção será determinada uma solução alternativa da solução diferencial analisada na seção anterior. Assim, será considerado qualquer valor positivo da dimensão extra radial ρ , pelo formalismo inicial da seção precedente. Dessa forma, o formalismo adotado é dado (com a definição de γ adotada para solucionar a solução diferencial da seção anterior) por (redefinindo de outra forma o fator de warp σ):

$$\sigma = e^{\int_0^{\rho} A d\rho} \quad (3.1a)$$

$$A = -\frac{4}{5} \frac{1}{\int f_A d\rho + C_A}, \quad (3.34)$$

$$\gamma = \sigma(\rho) C_7^2 A^2, \quad (3.13)$$

que pode seguir a Eq. (3.13) como será analisado. Outra expressão que se destaca, para as próximas equações (com a tendo outro sentido), é dada por $-\Lambda = t_\theta(\rho = a)$ para positivo ρ .

Desse modo, são especificadas as seguintes condições, seguindo a Eq. (3.2) para qualquer *ansatz* de t_θ que permita a suavização do modelo GS e permitindo obedecer todas as condições de energia (como discutido na solução diferencial pela Eq. (3.56)):

$$\sum_j |c_{2j}|^{-\frac{c_{4j}c_{2j}}{c_{3j}^2}} c_{1j} - \sum_j c_{1j} \exp \left[c_{4j} \left(-\frac{1}{\pm c_{3j}a} + \frac{c_{2j}}{c_{3j}^2} \ln \left| \frac{c_{3j} \pm c_{2j}a}{a} \right| \right) \right] = \pm \frac{4}{5} \sqrt{-\frac{5}{2K_6\Lambda}}, \quad (3.60a)$$

$$\int f_A d\rho = (1-c_2)^{-1} c_1 \rho^{-c_2+1} + \sum_j c_{1j} \exp \left[c_{4j} \left(-\frac{1}{\pm c_{3j}(a-\rho)} + \frac{c_{2j}}{c_{3j}^2} \ln \left| \frac{c_{3j} \pm c_{2j}(a-\rho)}{a-\rho} \right| \right) \right] + B_1 \frac{\rho^2}{B_2 + \rho^3}, \quad (3.60b)$$

$$- \sum_j c_{1j} \exp \left[c_{4j} \left(-\frac{1}{\pm c_{3j}a} + \frac{c_{2j}}{c_{3j}^2} \ln \left| \frac{c_{3j} \pm c_{2j}a}{a} \right| \right) \right]$$

$$c_2 = 2$$

$$\frac{df_A(\rho)}{d\rho} \int_0^\rho f_A(\rho) d\rho \geq 2f_A^2(\rho) + 2f_A(\rho), \quad (3.60c)$$

$$\sum_j \frac{\pm c_{1j}c_{4j}}{a^2(c_{3j} \pm c_{2j}a)} \left| \frac{c_{3j} \pm c_{2j}a}{a} \right|^{\frac{c_{4j}c_{2j}}{c_{3j}^2}} \exp \left(\frac{c_{4j}}{\mp c_{3j}a} \right) = 1, \quad (3.60d)$$

com B_1 e B_2 sendo constantes arbitrárias, o sinal superior (inferior) para negativo (positivo) f_θ na origem, com a sendo uma constante de ajuste negativa para f_θ positivo na origem e c_{1j} positivo (negativo). Os termos c_{2j} e c_{3j} podem ser respectivamente positivo e negativo delimitados de acordo com as Eqs. (3.60), enquanto c_{4j} é positivo ou negativo respectivamente para ρ menor ou maior que a . Nas Eqs. (3.60a) e no somatório que não está em função de ρ da Eq. (3.60b), c_{4j} segue semelhantemente $\rho < a$. Na descrição dessas constantes, admite-se que ρ seja diferente de a e zero. Os pontos de $\rho = 0$ e $f_\theta = 0$ são delimitados, por funções extras desses pontos, por $A = 0$. Desse modo, semelhantemente foi seguido o método de Frobenius [28] pelo somatório dos termos de j . Como na seção 3.3, $C_A = 0$.

Averigua-se, pelas condições estabelecidas, que as Eqs. (3.60) só existem para ρ diferente de 0 ou a , em geral. Também, A e A' tendem a zero para ρ tendendo a a , como deve ser verdade pela discussão a ser realizada na seção aproximativa correspondente (seção 3.7.1) com A^2 aproximadamente $-f_\theta$ ou f_θ no mesmo limite de ρ . As condições de regularidade na origem são seguidas com a função extra de ponto $A = 0$ em $\rho = 0$, como detalhado na seção anterior, assim como é $A = 0$ em $\rho = a$, o que mantém a continuidade da solução. Também, é verificado o mesmo comportamento assintótico da seção anterior, próximo ao limite de ρ igual a a , para f_A e de sua integral, possibilitando uma solução suave com $A' = 0$ no mesmo limite. Poder-se-ia incluir termos que são descritos por $c_1(b^2 - \rho^2)^{1/2}/\rho^2$ (com b sendo a constante a em geral referente da seção 3.3, como se seguirá no fim desta seção) para poder descrever o caso geral que não suaviza o modelo GS da seção 3.3. Esta generalização é entendida de modo compatível com a Eq. (3.49a).

Pode-se escolher, como *ansatz* para o fator de warp γ , a expressão dada como segue, compatível com as condições de regularidades na origem (Eqs. (2.27)) e t_ρ , assim como t_o , podendo ser finito, por:

$$k(\rho) = -\frac{C_{k2}}{C_{k3}\rho + C_{k1}}, \quad (3.61a)$$

$$\gamma = \frac{f_\gamma}{k^2} \tanh^2(k\rho)\sigma, \quad (3.61b)$$

em que a Eq. (3.61a) pode ser suposta para satisfazer, para qualquer ρ tendendo ao infinito, uma variação da dimensão extra radial θ analogamente a uma coordenada Cartesiana (porque, em mesmo limite desse modo, a variação espacial dada por $d\theta$ é verificada como uma coordenada Cartesiana), com: $f_\gamma =$ Função tendendo a 1 próxima à origem e respeitando as condições de energia, $C_{kj} =$ Constante compatível de kj e o λ_i , $i = \rho, \theta$, tendem serem iguais entre si com ρ tendendo a zero. Entretanto, desse modo unicamente com k sendo uma constante ($C_{k3} = 0$) pode-se ter o modelo da corda-charuto [5] suavizado como caso especial seguindo especialmente σ e $c_{lj} = 0$. Contudo, com zero C_{k1} , a Eq. (3.61b) tem como caso especial o modelo suavizado em relação ao modelo da corda-charuto, pela Ref. [12].

Sobre as Eqs. (3.60) seguindo a Eq. (3.13) em vez da Eq. (3.61), os respectivos escalares t_i das Equações de Einstein (2.29) serão positivos, sendo aproximadamente zero para ρ tendendo ao infinito segundo as Eqs. (3.60) como delimitadas e, portanto, sendo coerentes especial e fisicamente como analisado na Ref. [11]. Neste tipo de solução pode-se ter a condição de energia dominante satisfeita, porque A é negativo para todo ρ positivo, obedecendo as Eqs. (3.60b) e (3.60c) de acordo com a Eq. (3.15), em que todas as equações de Eq. (3.60c) seguem de demonstração para que a derivada de t_θ seja sempre negativa. Desse modo, pelas condições dadas, para qualquer intervalo de ρ podendo ser escolhido com valores reais de f_{A_0} ser negativa (positiva) para ρ menor (maior) que a tendo que seguir as inequações da Eq. (3.60c), há obediência da condição de energia dominante (com $A'' = 0$ na origem para escalares suaves na origem). Em adição, por se ter $d^2A/d\rho^2 \geq 0$ (com elemento diferencial $d\rho$ positivo) para $f_\theta > 0$ na origem e $B_1B_2 > 0$, por $f_{A_0} > 0$ pelas Eqs. (3.60), segue-se a condição de energia dominante.

Um fato interessante, no caso de máximo valor de c_{2i} tendendo a dois (mas maior), não se tem λ_θ (pelo *ansatz* da Eq. (3.1b)) como constante, em geral nesta seção, porque a derivada com respeito à ρ do lado esquerdo da Eq. (3.35) é diferente de zero (sendo divergente) na origem quando associadas pelas Eqs. (3.60) em geral. Então, pelas Eqs. (3.60) respeitando λ_θ como uma constante igual à $-\Lambda$, não é possível obedecer a Eq. (3.13) da Eq. (3.1b), pois não se segue as condições de regularidade na origem dessa forma. Só é possível se seguir as condições de regularidade na origem do fator de warp σ , pela Eq. (3.2) com mesmo *ansatz* escolhido para t_θ (ou outro que também tenha derivada com valor zero na origem), com o maior valor escolhido para c_2 sendo maior que 3 (por esta seção, com primeiro termo da Eq. (3.60b) sendo positivo). Logo, não é possível se ter a Eq. (3.13) seguida por $\lambda_\theta = -\Lambda$ com as condições de regularidade na origem de γ respeitadas. Assim, seguindo-se em geral as Eqs. (3.61), os modelos da corda-charuto [5] e o do tipo-corda suave [12] são obtidos como casos especiais de função extra $A = 0$ para $\rho = 0$.

Dessa forma, então, a seção anterior tem descrição equivalente, seguindo-se a Eq. (3.13) e as restrições impostas pelas Eqs. (3.60), por:

$$\lambda_\theta = -\frac{8}{5c_1K_6} - \Lambda. \quad (3.62)$$

Pela Eq. (3.62), pelo já discutido, λ_θ por ser constante em um valor diferente de $-\Lambda$. Assim, pode-se reconhecer que $c_1 = -Cb$ (b equivalente a a da seção anterior), o que

torna as constantes C e b em função dos parâmetros da equação diferencial de Einstein da componente angular associando-se as Eqs. (3.50) e (3.62) que têm o mesmo resultado.

Como deveria ser, a solução dada pela Eq. (3.62) é coerente com f_θ ser negativo na origem, por A também sendo negativo, pela solução diferencial da seção anterior que suaviza o modelo GS, com as condições físicas de energia e de regularidade na origem como respeitadas, em geral. Desse modo, tem-se uma descrição como solução analítica da seção anterior, que é uma solução diferencial, seguindo-se a Eq. (3.13). Nesse sentido, a constante b associada a uma constante arbitrária da solução de f_{A_0} , da seção 3.3 (por B_1 e B_2), deve delimitar uma região de f_A em geral não pertencente a valores existentes, para mesmo ρ , para um valor diferente de b . Isto pode ser verificado mediante valores tendendo à origem do espaço de bulk, associado à condição de contorno dada por B_1 e B_2 , pois, assim, a condição de contorno dada somente por b é totalmente predominante em relação a condição de contorno por uma constante arbitrária da solução de f_{A_0} .

3.4.2 Localização gravitacional

A localização de gravidade referente à solução analítica da seção anterior, que representa a solução diferencial respectiva, é descrita com base nas seguintes expressões que são repetidas no texto como segue:

$$-\partial_\rho^2 \phi_m - \left[\frac{5}{2} A + \frac{A'}{A} \right] \partial_\rho \phi_m = e^{\int_0^\rho A d\rho} m^2 \phi_m, \quad (3.21a)$$

$$m^2 = m_o^2 - \frac{l^2}{\beta(\rho)}, \quad (3.21b)$$

Assim, no caso analisado pelo limite de $-\rho = a$ da seção anterior quando há transição de f_θ negativo para positivo (em que A'/A tende a zero), com $m = m_o$, verifica-se pela Eq. (3.2) que

$$-\partial_\rho^2 \phi_m \cong e^{-\int_0^\rho A d\rho} m^2 \phi_m, \quad (3.63)$$

tendo como solução analítica respectiva a seguinte expressão:

$$\phi_m \cong D_5 \operatorname{sen} \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^\rho A d\rho} m\rho \right) + D_6 \cos \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^\rho A d\rho} m\rho \right). \quad (3.64)$$

Deve ser lembrado que os casos especiais de localização gravitacional, seguidos anteriormente, são seguidos pelo modelo geral desta seção.

3.5 Solução da Equação de Einstein com componentes escalares de pressão e energia respectivos iguais

Por intermédio das Eqs. (2.29), o lado esquerdo de cada uma dessas expressões é igualado, delimitando (e redefinindo A):

$$\gamma = \exp[A(\rho) + 2 \ln(C_1 A'(\rho)) + C_2], \quad (3.65a)$$

$$\sigma = \exp[A(\rho)], \quad (3.65b)$$

$$A(\rho) = \frac{4}{5} \ln\{C_4[\rho + C_3]\}, \quad (3.65c)$$

que segue todas as condições de energia e não obedece todas as condições de regularidade na origem, como também para ρ tendendo ao infinito também não tendo os fatores de warp γ e σ aproximadamente zero, com C_1 , C_2 , C_3 e C_4 redefinidos como constantes arbitrárias. Percebe-se, nesta solução, que há concordância com a solução dada pela Eq. (3.13), em que A é definido diferentemente pelo fator de warp σ .

Dessa forma, seguindo-se as Eqs. (3.65), tem-se:

$$t_o = t_\rho = t_\theta = -\Lambda. \quad (3.66)$$

Se o próximo modelo teórico [32] será seguido com a ação lagrangeana dada por:

$$S = \frac{1}{2K_6^2} \int d^6x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda + g^{MN} \nabla_M \phi \nabla_N \phi - V(\phi) \right], \quad (3.67)$$

então as equações de movimento são [32]:

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = K_6^2 \left[\partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left(\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + V(\phi) \right) \right] - K_6^2 \Lambda g_{MN} \quad (3.68a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M \left[\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi \right] = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.68b)$$

Portanto, como descritas as equações de movimento, seguindo a métrica da Eq. (2.26a) com $\gamma = e^{-B(\rho)}$ tem-se [32]:

$$t_o(\rho) = t_\theta(\rho) = -\frac{\phi^2}{2} + V(\phi), \quad (3.69a)$$

$$t_\rho(\rho) = \frac{\phi^2}{2} + V(\phi), \quad (3.69b)$$

$$R = -5(A'(\rho))^2 + 2A'(\rho)B'(\rho) - \frac{1}{2}(B'(\rho))^2 - 4A''(\rho) + B''(\rho), \quad (3.69c)$$

com os apóstrofes significando derivadas com respeito à ρ . Portanto, segundo as Eqs. (3.65) e (3.66):

$$V = -\Lambda \quad (3.70a)$$

$$B(\rho) = A(\rho) - 2\ln(C_1 A'(\rho)) - C_2 \quad (3.70b)$$

$$\phi(\rho) = C_5, \quad (3.70c)$$

com C_5 sendo uma constante. Assim, as condições de energia são satisfeitas por Λ diferente de zero, porém se tem $R = 0$ pela Equação de Einstein. O valor do Escalar de Ricci, segundo a Ref. [32], deveria ser físico com $R > 0$. Nesse sentido, tem-se uma explicação do que pode estar relacionado a constante cosmológica Λ , mediante as Eqs. (3.70) e (3.65). Inclusive, a noção de uma brana associada às condições de regularidade na origem perde sentido neste contexto, pois a densidade de energia é constante em todo o espaço tempo em seis dimensões estudado. Portanto, $V = V(\phi) = -\Lambda$ é possível de delimitar segundo a ação lagrangeana delimitada pela Eq. (3.67). O valor dessa constante cosmológica abrange também o mundo brana em 4D associado estudado, em qualquer posição que esteja no espaço de bulk ou não.

3.6 Soluções aproximativas de Equação de Einstein e localização gravitacional

Utilizando o método já existente como discutido por Byron e Fuller (1992) [44, p. 484-489], tem-se, para pontos extremos com pequena variação de ρ próxima, que a aproximação é melhorada de forma convergentemente exata com uma solução inicial bem aproximada no mesmo extremo, de forma iterativa a cada nova aproximação pela mesma equação diferencial. Logo, os próximos cálculos têm consistência comprovada nesse sentido. Assim, o método utilizado nesta seção, de todo modo, serve para melhorar a precisão desses intervalos de solução. Entretanto, ainda faltando comprovação computacional, tal aproximação é esperada, seguindo mais outras condições, com solução exata convergentemente para infinitas aproximações consideradas e em todo o intervalo considerado da variável de dimensão extra radial ρ , como inserida nas próximas subseções.

3.6.1 Solução aproximativa da solução diferencial geral da Equação de Einstein

Nesta seção, soluções aproximadas serão realizadas referentemente às seções 3.3 e 3.4, para os fatores de warp.

Inserire-se uma “natural” e aproximativa solução de f_{A01} pela seguinte expressão:

$$f_{Ao1} \cong f_{Ao1ap.} = -2G_1 + \sqrt{4G_1^2 + \frac{16}{25f_\theta}}, \quad (3.71)$$

que é obtida ao ser associada com a expressão:

$$-G_1 + f_{ao2} = f_{ao1}. \quad (3.72a)$$

Assim, seguindo os casos limites de ρ tendendo a zero e infinito e f_θ tendendo a um valor zero de Eq. (3.57), há a motivação:

$$f_{Ao1} \cong f_{Ao1ap.} = -2G_1 + \sqrt{4G_1^2 + \frac{16f_{Ao1}'}{25f_\theta}} - \rho \frac{1 + (c\rho)^4 \frac{G_1}{\rho^2}}{1 + (c\rho)^3}. \quad (3.72b)$$

Desse modo, com o segundo termo da raiz quadrada da Eq. (3.72b) permitindo estudar o caso limite de f_θ predominantemente próximo a zero (com termo extra O incluído, para satisfazer no mesmo limite a Eq. (3.72b) como será mais detalhada, o que é possível de verificar pela Eq. (3.72a) comparada à Eq. (3.71) com f_{Ao2} tendendo ao infinito, por f_{Ao1} também tendendo ao infinito como detalhado na seção 3.3), pode-se analisar os outros limites em um modo mais coerente. Então, de acordo com valores convergentes para cada extremo de limite associado a f_{Ao1} e f'_{Ao1} como se segue, considerando negativo (positivo) f_{Ao1}' para negativo (positivo) f_θ garantido de forma real pelas constantes aproximativas relacionadas (como condição de contorno), a próxima expressão é, com positivo ρ e positivo c e superior (inferior) sinal para negativo (positivo) f_θ na origem,

$$f_{Ao1} \cong f_{ao1ap.} = -2G_1 \pm \sqrt{(2G_1)^2 + \frac{16}{25} \frac{\frac{1}{(c\rho_e)^3} [1 + (c\rho_e)^6 + [c(\rho_e - \rho)]^3 (c\rho_e)^3]}{\int_0^\rho f_\theta d\rho - B_3 + O} - \frac{4}{5} \sqrt{|f_\theta|} [c(\rho_e - \rho)]^3}}^2, \quad (3.72c)$$

$$+ \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) \frac{1 + (c\rho_e)^8 - (c\rho)^4 [c(\rho_e - \rho)]^2 \frac{G_1}{\rho^2}}{1 + (c\rho_e)^8 + (c\rho)^6} + B_1 \frac{\rho^2}{B_2 + \rho^3}$$

pelas expressões (em que o termo O pode ser desprezado como se verificará, não resultando em dificuldade para a solução, enquanto $B_3 = 0$ para $f_\theta > 0$ na origem):

$$\frac{2K_6}{5} \left[\Lambda \rho_e + \lambda_\theta \frac{\tanh(c\rho_e)}{c} \right] = B_3 = \int_0^{\rho_e} f_\theta d\rho \quad (3.73a)$$

$$\frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho_e)} = -\Lambda = t_\theta(\rho = -\rho_e) \quad (3.73b)$$

$$O = B_4 = \lim_{\rho \rightarrow \rho_e} \sqrt{|f_\theta|} \quad (3.73c)$$

em que ρ_e é positivo (para f_θ sempre positivo o valor de ρ_e pode ser 1 nos denominadores e 0 nos numeradores, seguindo sinal inferior), com C sendo substituído por $-C$ originados de mudança de valor negativo a positivo de f_θ e B_1 e B_2 sendo constantes aproximativas equivalentemente consideradas como condições de contorno ao longo do desenvolvimento teórico associado. Pela Eq. (3.73c), tem-se O tendendo à raiz quadrada de f_θ , para ρ tendendo a ρ_e , com sua respectiva derivada em mesmo limite sendo zero (com um pouco distante desse limite O sendo desprezível). Dessa forma, no limite de ρ tendendo à ρ_e , o termo O é predominante de forma aproximada na Eq. (3.72c). A inclusão da função O descreve o limite de f_θ próximo a zero ser descrito de forma suave, para satisfazer as condições do problema que serão todos associados à Eq. (3.72c), relativamente a um método similar de aproximação de f_{Aol} (ou, em outras palavras, A) dado para o fator de warp σ desenvolvido pela Eq. (3.76), que, brevemente, será determinada. Entretanto, O é considerado desprezível pelas próximas explicações e pelo método adotado de convergência exata, tanto para A como para os fatores de warp.

Assim, A não precisa ser trocado por $-A$ segundo a seção 3.3 associada pela Eq. (3.52) (quando descrita próximo de f_θ tendendo a zero), mas ρ é trocado por $-\rho$ na Eq. (3.52) com zero C_A , mantendo o sinal de mais da Eq. (3.53), se houver positivo f_θ modificado para negativo f_θ em tal transição. Tais descrições são consideradas unicamente pela Eq. (3.52) e a mudança de C como delimitada pela seção 3.3, porque o modo como a Eq. (3.72c) foi delimitada permite isso. Assim, para f_θ significativamente diferente de zero, o termo O pode ser considerado zero, que tem como implicação nesta seção de poder não ser considerado para os métodos aproximativos (inclusive dos fatores

de warp). Dessa maneira, o termo O serve unicamente para suavizar o valor de A próximo de ρ_e .

É enfatizado que a Eq. (3.72c) pode ser formulada em um modo mais geral, para qualquer *ansatz* físico considerado dos escalares como discutidos na seção 3.3, pelo formalismo presente que tem como meta demonstrar soluções aproximadas da seção 3.3. Isso é possível seguindo a última igualdade das Eqs. (3.73a) e (3.73b). Em adição, é assumido que ρ seja multiplicado por c para um *ansatz* de escalar físico de pressão. Uma outra condição que deve ser obedecida para se seguir a condição de energia dominante como realizada é o de se ter a derivada de $t_\rho = t_\theta$ ser sempre negativa da Eq. (3.15) como delimitada. Deve também ser lembrado que os parâmetros seguem a Eq. (3.50) em geral para qualquer *ansatz* de t_θ considerado.

Nesse sentido, é possível inserir uma constante extra arbitrária com mesma aproximação da Eq. (3.72c), por $f_{Ao3} + f_{Ao1ap} = f_{Ao1}$ originado da Eq. (3.52), porém, por esse cálculo ser desnecessário, não será efetuada. Desse modo, a solução da Eq. (3.72c), permitindo cada nova solução como inserida analogamente em mesmo modo em mesma Eq. (3.50) por condições enumeradas como se seguirá por:

$$\begin{aligned}
 f_{Ao} &= E_{Ao1} + E_{Ao} + \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\left(-G_1 - \int_{0^+}^{\rho} \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\frac{(-G_1 - f_{Ao1})^2}{-\frac{16}{25f_\theta}} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} d\rho \right)^2 - \frac{16}{25f_\theta} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} \cong \\
 &\cong E_{Ao1} + \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\left(-G_1 - \int_{0^+}^{\rho} \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\frac{(-G_1 - f_{Ao1})^2}{-\frac{16}{25f_\theta}} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} d\rho \right)^2 - \frac{16}{25f_\theta} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\left(-G_1 - \int_{0^+}^{\rho} \left\{ \frac{-C\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho^2} + \left[\frac{(-G_1 - f_{Ao1,n})^2}{-\frac{16}{25f_\theta}} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} d\rho \right)^2 - \frac{16}{25f_\theta} \right] \frac{25f_\theta}{16} \right\} = f_{Ao(n+1)}
 \end{aligned} \tag{3.74a}$$

com: E_{Ao1} = Erro de f_{Ao1} , E_{Ao} = Erro de aproximativo f_{Ao} e o n relacionado a f_{aon} significando uma n -ésima aproximação, pelo que é percebido ser possível segundo as condições a serem estabelecidas em breve, pela última igualdade, uma aproximação cada vez mais convergente à solução exata em todo o domínio quando se aumenta o valor de n .

Como critério de que a solução será convergente exatamente com infinitas aproximações, basta delimitar que, se a solução não estiver mudando seu valor

significativamente para qualquer valor de ρ , depois de uma aproximação extra analogamente da Eq. (3.74a), então se tem este tipo de solução. Caso contrário, se a solução inicial dada pela Eq. (3.74a) não é boa para qualquer valor de ρ , então existe significativas correções por novas aproximações como segue iterativamente, aumentando n , pois cada termo novo incluído na equação diferencial respectiva aumenta significativamente a aproximação em seu contexto com erros existentes não sendo desprezíveis (pois, com um dos erros considerados desprezíveis, significa que a solução é próxima da exata). Este critério pode ter base também no que é discutido pela Ref. [44], envolvendo pontos com precisão também convergente, analogamente.

Neste sentido, a existência de erros $E_{A_{o1}}$ e E_{A_o} para alguns valores de ρ ser positivo ou negativo (que é a forma mais geral possível de ser analisado o problema), pela Eq. (3.74a), permite uma aproximação convergente exatamente, com reais valores de $f_{A_{o1}}$ para positivo $-\Lambda$.

Assim, isso é obtido, associado à aproximação ser convergentemente exata para regiões onde a aproximação inicial é suficientemente boa [44], por:

1) para ρ tendendo ao infinito, f_θ próximo de zero e ρ tendendo a zero, $f_{A_{o1}}$ e f_{A_o} tendo aproximadamente erro igual a zero pela Eq. (3.72c) de limites reais;

2) a existência de erros sendo positivos ou negativos da Eq. (3.72c) de $f_{A_{o1}}$ e f_{A_o} em alguns pontos, pela condição 1 e próximo aos extremos delimitados pela mesma condição;

3) $f_{A_{o1}}$ e f_{A_o} , de Eq. (3.72c), terem a análise de valores intermediários de ρ para os erros associados entre dois extremo mais próximos de valor de ρ (em que a solução é mais aproximada em um intervalo de ρ em cada extremo), maior em módulo a soma desses erros serão em relação a cada extremo;

4) a condição 3 ser verdade porque a solução é contínua pela Eq. (3.72c) para A com valores reais;

5) o termo O pode ser considerado igual a zero por uma aproximação convergente exatamente, porque se terá esse termo tendendo a zero com ρ próximo ou não de ρ_e com mesma aproximação;

6) pelo menos alguns valores de B_1 e B_2 descrever valores reais para a solução, seguindo uma raiz quadrada real delimitada pela Eq. (3.57), podendo tais constantes regular também a positividade ou negatividade dos erros associados; e

7) das prévias condições enumeradas ter ambos os erros de f_{A_o} e $f_{A_{o1}}$, que não são ambos positivos ou negativos, desaparecerem para novas aproximações com convergência

exata, porque para alguns valores de ρ , com ambos os erros positivos ou negativos de f_{Ao1} e f_{Ao} , todos os erros de E_{Ao1} e E_{Ao} devem decrescer em módulo segundo um gráfico de erros em geral (dependente de ajuste das constantes de condição de contorno se erros em grande módulo dependerem disso, o qual não é o caso da última expressão vista e da próxima equação).

Em outras palavras, este método pode ser descrito como uma solução iterativa pela respectiva equação diferencial, mas com as condições como delimitadas, descrevendo uma aproximação com convergência exata para todo o domínio da solução. É bom salientar que este método não garante aproximação convergentemente exata para qualquer equação diferencial de primeira ordem, assim como de ordens superiores, mas nos casos tratados da seção 3.6 este método é válido.

Para contornar a dificuldade encontrada pela Eq. (3.74a) sobre as associadas integrais, pode-se analisar o problema com a Eq. (3.53) analogamente com mesmos sinais como antecipados nesta seção mantendo o mesmo A da Eq. (3.52) (seguindo-se a Eq. (3.56) com $f_{ao1n}' = d(f_{Ao1n})/d(\pm\rho)$ como delimitado na seção 3.3) e com zero C_A , por:

$$f_{Ad(n+1)} \cong -G_1 \pm \sqrt{\frac{16}{\rho^2 25 f_\theta} \left(C \sqrt{a^2 - \rho^2} + \left(-G_1 \pm \sqrt{\frac{16}{\rho^2 25 f_\theta} \left(C \sqrt{a^2 - \rho^2} + f_{Adn}' \rho^2 + \rho^2 \right)} \right) \rho^2 + \rho^2 \right)}, \quad (3.74b)$$

com mesmos critérios relacionados pela Eq. (3.74a) com superior (inferior) sinal relacionado a negativo (positivo) f_θ na origem, permitindo uma solução aproximada analítica. Desse modo, com C substituído por $-C$ e A substituído por $-A$ da Eq. (3.50) por negativo f_θ se transformando em positivo f_θ . No caso de sempre positivo f_θ deve-se seguir de maneira única Ca descrito pela Eq. (3.50).

Para completar o estudo de solução aproximada de forma convergente, das Equações de Einstein, o valor relacionado ao fator de warp σ da seção de solução diferencial geral 3.3 pela Eq. (3.1a) com positivo ρ , resultando em primeira aproximação (permitindo utilizar $C_{sa} = 1$):

$$e^{-\frac{h(\rho)}{A} \left\{ +\frac{2}{5} K_6 \left[\Lambda \rho + \lambda_\theta \frac{\tanh(c\rho)}{c} \right] - \frac{4A}{5} + F(\rho) \right\}} \cong \sigma \cong e^{-\frac{h(\rho)}{A} \left(+ \int_0^\rho f_\theta d\rho - \frac{4A}{5} + F(\rho) \right)}, \quad (3.75)$$

com:

$$h(\rho) = \frac{2h_o(\rho)+1}{h_o(\rho)+1}, \quad (3.76)$$

em que a segunda igualdade da Eq. (3.75) pode ser descrita por qualquer escalar físico de pressão como discutido. A inclusão do termo de aproximação O , neste contexto, é importante para se seguir todas aproximações requeridas pelo métodos nos extremos analisados. No entanto, para A bem aproximado, esse valor naturalmente surgirá, resolvendo o problema de todo modo com O desprezível. Desse modo, h pode ser assumido como aproximadamente entre os extremos de ρ , com aproximação próxima a da exata nos três limites analisados pela solução de A . De fato e exatamente, $h = 1.5$ para ρ tendendo a zero e $h = 1$ para ρ tendendo ao infinito.

Desse modo, para se obter uma solução convergente exata de σ no contexto obtido anteriormente para a variável A , deve-se proceder analogamente às condições das Eqs. (3.75), com σ_{ap} descrito de σ delimitado pela Eq. (3.75), da próxima expressão:

$$\sqrt{-\frac{5}{2}\sigma_{apn}^2 \left\{ K_6 \left[\Lambda + \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} \right] + 2A' \right\}^{-1}} \cong \sigma_{n+1} \cong \sqrt{-\frac{5}{2}\sigma_{apn}^2 \{K_6[\Lambda + t_\theta] + 2A'\}^{-1}}, \quad (3.77)$$

que segue para σ_{apn} (em uma n -ésima aproximação e derivadas com $d\rho$ negativo) por (com a integral da Eq. (3.1a) sendo uma constante em $\rho = \rho_e$, pelas derivadas de h , F e g serem zero para $\rho = 0$ e ρ tendendo ao infinito e ρ_e , associado à valor aproximadamente zero para F nos limites de $\rho = 0$ e ρ tendendo ao infinito e $g = -1$ em $\rho = \rho_e$):

$$F(\rho) = g \left[\frac{A^{\rho_e}}{h} \int_0^\rho A d\rho - \int_0^\rho f_\theta d\rho + \frac{4}{5}A \right], \quad (3.78a)$$

$$g = 2\rho^3 \left[\frac{1}{\rho_e^3 \left(1 + \frac{\rho^5}{\rho_e^5} \right)} - \frac{1(\rho^2 - \rho_e^2)}{2\rho_e^5 \left(1 + \frac{\rho^7}{\rho_e^7} \right)} \right], \quad (3.78b)$$

$$h_o(\rho) = \frac{1}{1 + c^2 \rho^2 e^{\frac{|\rho|}{|\rho| - \rho_e}}}, \quad (3.78c)$$

Então, foi determinado $h = h(\rho = \rho_e) = 1$ para σ_{ap} . descrito inicialmente, havendo uma solução convergente exatamente para os intervalos próximos aos menores erros iniciais ou, de forma mais abrangente, em todo o domínio da solução de acordo com as condições como analisadas em geral. Observa-se, nesse contexto, que a solução aproximativa dada pelas últimas equações estão de acordo com o valor de A bastante preciso.

3.6.2 Solução aproximativa geral diferente

A seção 3.2 permite determinar um método geral de solução que descreva qualquer possível solução, mediante o método adotado na seção anterior como modelo aproximativo. Todas as condições físicas requeridas, desse modo, são obedecidas (de brana regular de energia). Tal solução geral é distinta da apresentada na seção anterior, devido a não unicidade da solução das Equações de Einstein como vista comparando a solução diferencial geral analisada pela seção 3.3 e a seção 3.2. Simplesmente, adota-se, semelhantemente como já inferido, a seguinte expressão com iteração nova a cada valor maior de n e mediante a Eq. (3.2) por (com derivadas por $d\rho$ positivo):

$$A_{ap,(n+1)} = \sqrt{f_\theta - \frac{4}{5} A'_{ap,n}}, \quad (3.79)$$

com, identicamente à solução mais simples encontrada na seção 3.2 satisfazendo todas as condições de aproximação necessária do método,

$$A_{ap,1} = -c_o \frac{b\rho}{a + b\rho}, \quad (3.80)$$

sendo o apóstrofo significando uma derivada com respeito à ρ com a sendo diretamente proporcional a b . Dessa forma, diferentemente da seção 3.2, o foco está em saber uma solução, porém de forma aproximada, definindo-se um *ansatz* específico para t_θ (devendo

seguir as condições de energia como salientado pelas condições dadas pela seção de cunho analítico 3.2.

Nesta solução, se for imposto uma condição de contorno diferente, como ocorre na seção anterior mediante as constantes aproximativas, por exemplo, o resultado não mudará, pois tal termo tende a desaparecer com n bastante grande no método utilizado para essa seção. Isto não é surpresa, pois há a condição de contorno $A = 0$ para $\rho = 0$. Ademais, pelas Eqs. (3.75) e (3.77), o valor de F pode ser zero em vez da Eq. (3.78a), porém seguindo $d\rho$ positivo, para a solução desta seção, invertendo o intervalo de integração da integral de σ .

3.6.3 Solução aproximativa geral de localização gravitacional

Repetindo o mesmo método, porém, para satisfazer as mesmas condições deste, tendo que haver soluções com boa aproximação, para valores da variável ρ tendendo ao infinito e a zero, também da derivada segunda com respeito à ρ da perturbação da métrica ϕ_m . Outra diferença está na estrutura da solução aproximativa inicial, em relação à equação diferencial como delimitada, que permite que todos os erros sendo positivos ou negativos, relativos às derivadas e ao próprio termo de ϕ_m no extremo tendendo ao infinito. Assim, as condições são satisfeitas ao introduzir:

$$\phi \cong \phi_{ap.} = F_1(\rho)\phi_{ap.1} + F_2(\rho)\phi_{ap.2}, \quad (3.81)$$

em que $\phi_{ap.2}$ e $\phi_{ap.1}$ são as soluções aproximativas de ϕ_m respectivamente pelas Eqs. (3.24) e (3.26), associados à

$$F_1 = \frac{1}{1 + |c^3 \rho^3|} \quad (3.82a)$$

$$F_2 = \frac{e^{|\rho|} |c^3 \rho^3|}{1 + e^{|\rho|} |c^3 \rho^3|}. \quad (3.82b)$$

Assim, é possível utilizar as Eqs. (3.21), pelo método desenvolvido, por:

$$\left\{ -\partial_{\rho}^2 \phi_{ap,n} - \left[\frac{5}{2} A + \frac{A'}{A} \right] \partial_{\rho} \phi_{ap,n} \right\} \frac{e^{\int_{\rho}^{\rho} Ad\rho}}{m^2} \cong \phi_{ap,(n+1)}, \quad (3.83)$$

conhecendo-se todas as variáveis de forma aproximada convergentemente exata ou analítica e possibilitando obter, para n bastante grande, o valor de ϕ_m com qualquer valor positivo ou inteiro de l . Observa-se que as constantes das soluções aproximadas $\phi_{ap,2}$ e $\phi_{ap,1}$ devem ser conectadas, com D_1 podendo-se diferir apenas por um fator constante, a D_3 ou D_4 , assim como D_2 do mesmo modo. Nesse sentido, tal formalismo é coerente para uma solução convergente exatamente para os modelos teóricos das seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Este método pode ser estendido para qualquer solução da Equação de Einstein que siga as condições de regularidade na origem e suavize o modelo GS ao menos similarmente. Haverá um modelo pelo próximo capítulo em que a localização gravitacional, para ρ tendendo ao infinito, não seja representado pelo modelo GS mas que, analogamente, pode ter solução aproximativa como discutido nesta seção.

4 CLASSE DE SOLUÇÕES ANALÍTICA DE MUNDOS DE BRANAS REGULARES

Na seção 4.1, seguindo-se também a Ref. [49], serão discutidas soluções que seguem as condições de energia e suavizam o modelo GS (ou, em outras palavras, que representa o modelo GS aproximadamente para um valor infinitamente grande da variável radial de bulk da Eq. (2.26a)). Nesta seção, também será especificado um modelo mais semelhante ao modelo GS (de acordo com as condições de regularidade na origem) e outro que, para a dimensão extra radial tendendo ao infinito, delimita os escalares t_o e t_ρ com valores distintos do modelo GS (ou seja, neste caso tais escalares são determinados como constantes positivas diferentes de zero). Na seção 4.2 o potencial análogo de Schrödinger é discutido coerentemente e algumas figuras são detalhadas nesta seção com o intuito de esclarecer sobre os escalares, o modo zero da Equação tipo-Schrödinger e o potencial análogo de Schrödinger. Na seção 4.3 será relacionada a lagrangeana de um vórtice abeliano, associada à mesma métrica por um dos modelos analíticos.

As seções 4.1 e 4.2 foram feitas em conjunto mais com o prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva, que independentemente iniciou os estudos nesta direção. Salienta-se que houve também a participação de meu orientador, prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, neste texto do capítulo 4 direcionado a ser um artigo, no desenvolvimento teórico inicial.

Ressalta-se que os modelos B e D estão descritos pela Ref. [49], sendo o artigo publicado referente à tese, que está associada a algumas soluções gerais e específicas do capítulo 3, mais especificamente, das seções 3.1, 3.2 e as respectivas a estas da seção 3.6.

4.1 Soluções da Equação de Einstein

Associado com a seguinte expressão:

$$\gamma = e^{\int B d\rho} = e^{\int A d\rho + F} = \beta(\rho)\sigma, \quad (4.1)$$

sendo em geral uma função

$$F = F(\rho), \quad (4.2)$$

as primeira duas Equações de Einstein (2.29) são reescritas, ainda em geral, por:

$$\frac{3}{2}A' + \frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{4}AB + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{2}B' = -K_6(\Lambda + t_o(\rho)), \quad (4.3a)$$

$$\frac{3}{2}A^2 + AB = -K_6(\Lambda + t_\rho(\rho)), \quad (4.3b)$$

sendo a Eq. (2.29c) descrita pela Eq. (4.2) e utilizando a delimitação dada por Eq. (4.1a). Desse modo, para fim de esclarecimento, quando F é aproximadamente $2/\rho$ próximo à origem, seguindo a solução de σ como seguirá, pode ser obedecido todas as condições de regularidade na origem.

Desde que seja assumido o *ansatz* da Eq. (3.1b), relacionado pela Fig. 1, pode-se ter como solução, com $p = 1$, que:

$$A = -c_o \tanh^p(c\rho), \quad (4.4)$$

seguindo-se a relação $2K_6\lambda_0 + 4c_o c = 5c_o^2$ (o que deve ser o mesmo de $\lambda_0 = c_o^2[5 - (5/2n_o)]/2K_6$, com $n_o = 1, 2, 3, 4, \dots$, da Eq. (3.5) com mesmas condições de contorno na origem por $c = 5c_o/8n_o$). Poderia ser visto uma solução de A que abrange outros valores de p constante mas, devido à simplicidade desta solução, será discutido soluções que abrangem especificamente a solução dada pela Eq. (4.4) com $p = 1$. Desse modo, a solução de um dos fatores de warp é, segundo a Eq. (4.1a) e relacionado pela Fig. 2,

$$\sigma = \cosh^{\frac{-c_o}{c}}(c\rho). \quad (4.5)$$

Será considerado alguns casos especiais que sigam o formalismo desenvolvido inicialmente neste item, em que $t_\theta = \cosh^{-2}(c\rho)$.

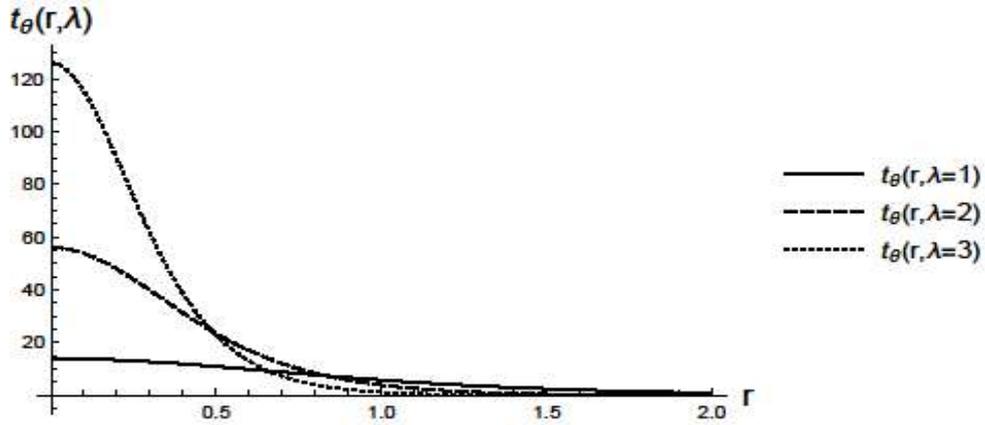


Figura 1: Escalar t_θ com a relação crítica de $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$.

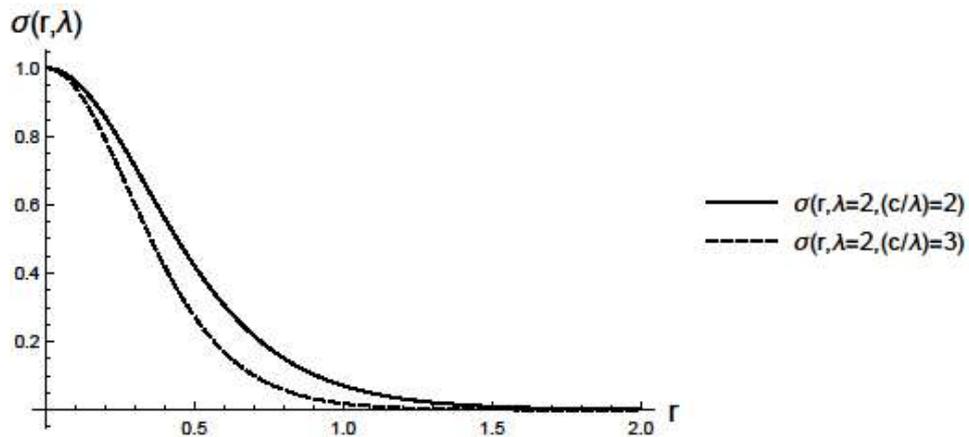


Figura 2: Fator de warp σ com $c/\lambda = c_o/c$ e $r = \rho$.

A. $F(\rho) = 0$.

Neste caso especial [48], tem-se que a solução é dada como:

$$t_o = t_\theta = \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} > t_\rho = \frac{-\Lambda}{\cosh^2(c\rho)}, \quad (4.6)$$

seguindo o fator de warp $\gamma = R_o^2 \sigma$, analogamente ao modelo GS [4] (como relacionado pela seção 2.2.1) pela não obediência das condições de regularidade na origem do fator de warp γ .

B. $F(\rho) = \frac{m}{c\rho}$.

Neste modelo descrito pela Ref. [49] como de disco de warped, o fator de warp γ pode seguir suas condições de regularidade na origem com:

$$\gamma = \frac{\rho^{\frac{m}{c}}}{\cosh^c(c\rho)}, \quad (4.9)$$

em que os escalares em geral de t_o e t_ρ são delimitados, pelas Eqs. (2.29) respectivas por:

$$t_\rho = K_6^{-1} \left(\frac{5}{2} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{c_o m \tanh(c\rho)}{c\rho} \right), \quad (4.10a)$$

$$t_o = K_6^{-1} \left(\frac{5}{2} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{5c_o^2 \tanh(c\rho)}{4c\rho} + \frac{c}{2m\rho^2} \left(1 - \frac{m}{2c} \right) \right). \quad (4.10b)$$

Observa-se que as condições de regularidade pela origem de γ e que o escalar t_o é finito, em todo valor positivo de ρ , se $m = 2c$, como há nas Figs. 3 e 4. Ademais, desse modo, todas as condições de energia são seguidas. Esse modelo é mais semelhante ao modelo tipo-corda suave [12] analisado pela seção 2.2.4, tendo mesma condição assintótica para ρ infinitamente grande e mesmo comportamento próximo à origem (diferindo-se por λ_θ diferente de $-\Lambda$). O Escalar de Ricci tem gráfico descrito coerentemente como finito, como determinado pelas Eqs. (3.18) e (3.19), segundo a Fig. 5 e $c_o = 2c$ associado a $m = 2c$.

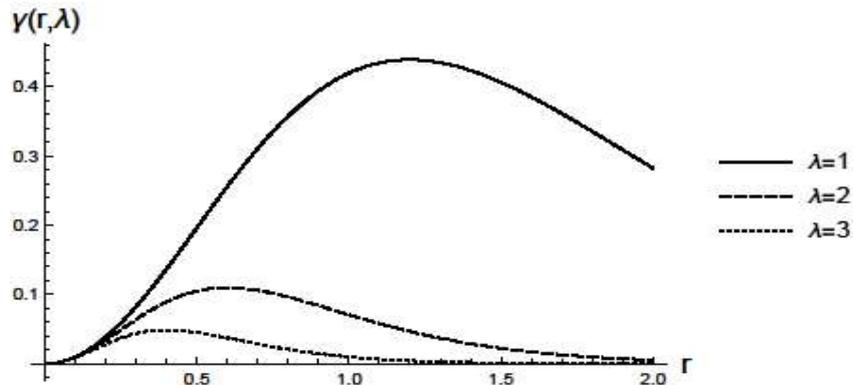


Figura 3: Fator de warp γ segundo a relação $m = c_o = 2c = 2\lambda$ do modelo B com $r = \rho$.

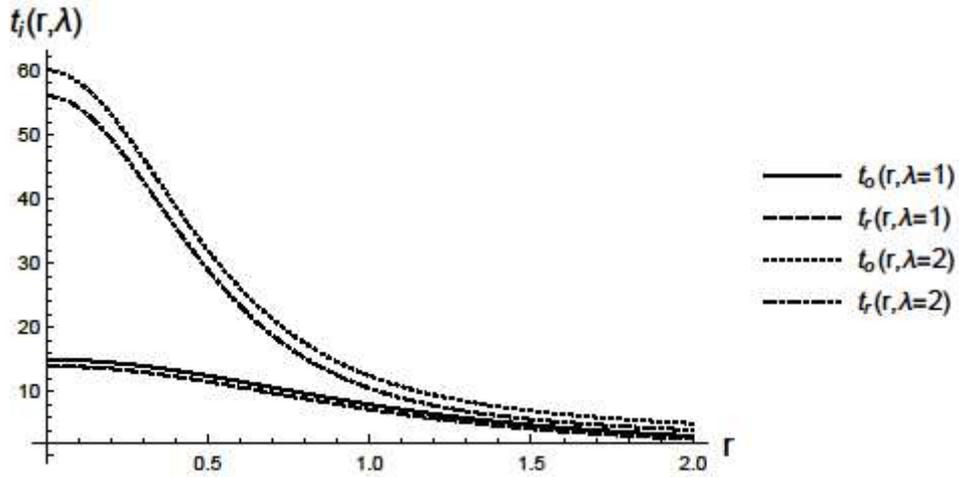


Figura 4: Relação entre t_o e t_ρ do modelo B com $m = c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$.

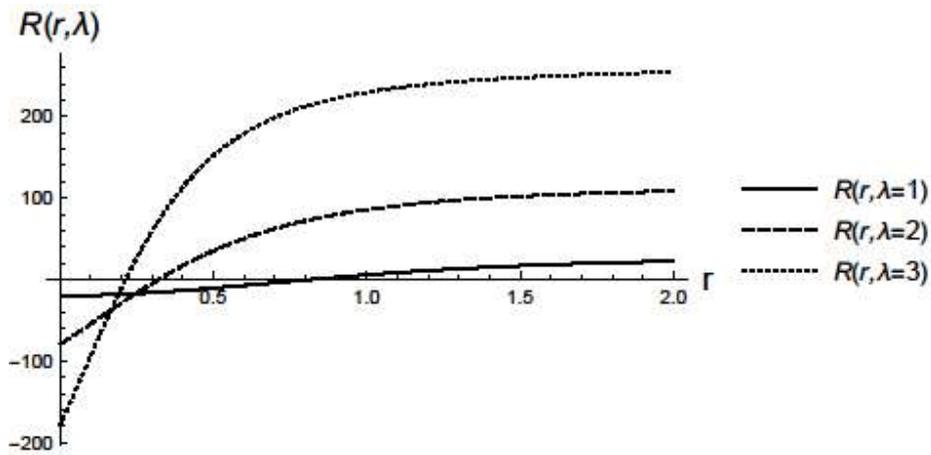


Figura 5: Escalar de Ricci do modelo B, com $m = c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$.

$$C. F(\rho) = \frac{2c_o}{n_1 \sinh(n_2 c \rho)}.$$

Em tal caso o fator de warp γ pode ser dado com $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$, que em caso especial é relacionado pela Fig. 6 seguindo as condições de regularidade na origem, pela relação geral:

$$\gamma = \frac{4}{c^2} \left(\tanh^{\frac{2c_o}{n_1 c}} \left(\frac{n_2 c \rho}{2} \right) \cosh^{\frac{c_o}{c}} (c \rho) \right), \quad (4.11)$$

com os escalares que podem ser fornecidos pelas Eqs. (2.29) ou (4.3) referentes a esse caso especial:

$$t_\rho = K_6^{-1} \left(\frac{5}{2} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{c_o^2}{\cosh(c\rho)} \right), \quad (4.12a)$$

$$t_o = K_6^{-1} \left(\frac{13}{4} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{5c_o^2}{4 \cosh(c\rho)} + \frac{c_o}{4 \sinh^2(c\rho)} (2c \cosh(c\rho) - c_o) \right). \quad (4.12b)$$

Dessa forma, com $n_l = 1$ e $c_o = 2c$, as condições de regularidade na origem de γ são satisfeitas e o escalar t_o é finito para todo valor de ρ positivo. Nesse sentido, também as condições de energia são satisfeitas. Esse modelo tem semelhança mais próxima com o modelo corda-charuto, analisado na seção 2.2.2, pois para ρ próximo da origem ou infinitamente grande ambos os modelos são aproximadamente iguais (com a diferença de que λ_θ é diferente de $-\Lambda$ no presente caso). Assim, os escalares de pressão e o Escalar de Ricci, desse modelo, são finitos para $c_o = 2c$.

Considerando o modelo C com $n_l = 3$ e $n_2 = 1$, tem-se analogamente ao caso de $n_l = 2$ do mesmo modelo, porém com $c_o = 3c$, que:

$$\gamma = \frac{4}{c^2} \left(\tanh^{\frac{2c_o}{3c}} \left(\frac{c\rho}{2} \right) \cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho) \right), \quad (4.13)$$

seguinte:

$$t_\rho = K_6^{-1} \left(\frac{5}{2} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{2c_o^2}{3 \cosh(c\rho)} \right), \quad (4.14a)$$

$$t_o = K_6^{-1} \left(\frac{19}{6} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{5c_o^2}{6 \cosh(c\rho)} + \frac{c_o}{4 \sinh^2(c\rho)} \left(2c \cosh(c\rho) - \frac{2c_o}{3} \right) \right). \quad (4.14b)$$

Para outros valores de n_l e n_2 o cálculo poderia ser feito seguindo-se as mesmas condições, generalizando o caso estudado C, apenas sabendo-se que F é

aproximadamente $2/\rho$ próximo à origem em todos os casos para se seguir as condições de regularidade na origem, o que, por consequência, é associado a t_o finito na origem.

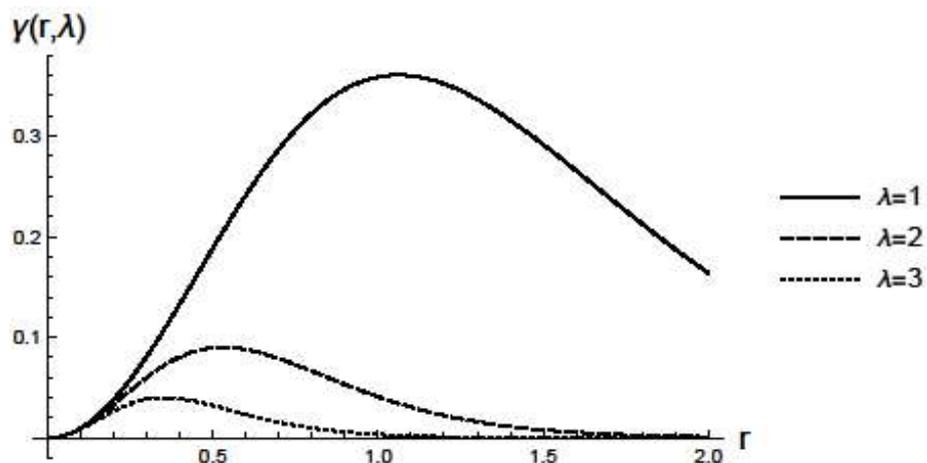


Figura 6: Fator de warp γ do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$, $n_1 = 2n_2 = 2$ e $r = \rho$.

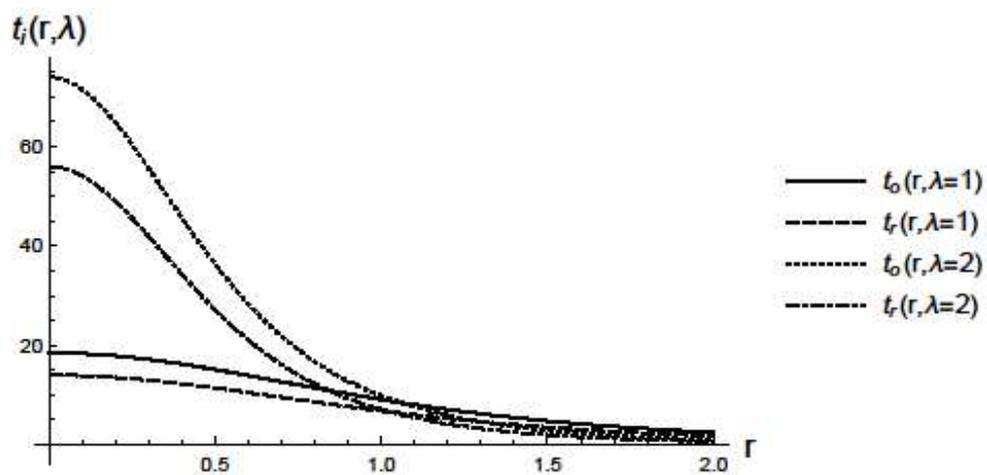


Figura 7: Relação entre t_o e t_p do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$, $n_1 = 2n_2 = 2$ e $r = \rho$.

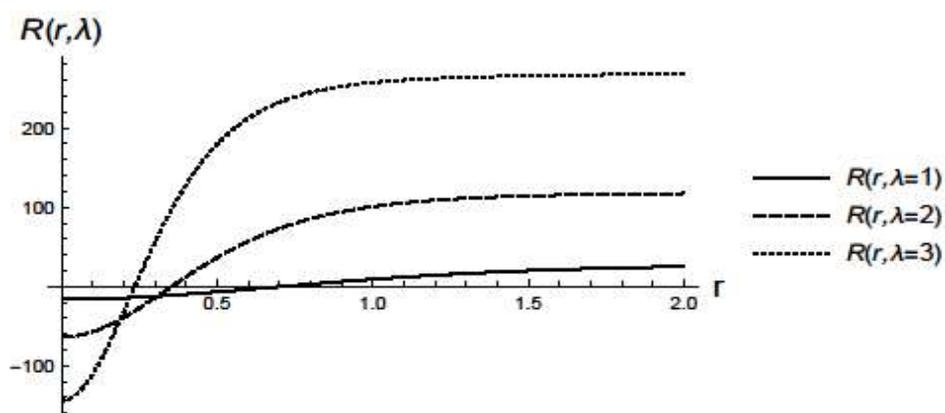


Figura 8: Escalar de Ricci do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$ e $n_1 = 2n_2 = 2$.

$$\mathbf{D.} \quad F(\rho) = \frac{m_1}{\tanh(m_2 \rho)}.$$

Neste modelo, que pode ser analisado pela Ref. [49] com $m_1 = 2m_2 = 2c$, o fator de warp γ é descrito por (com m_1 e m_2 sendo constantes):

$$\gamma = \left(\frac{1}{m_2} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} \sinh^{\frac{m_1}{m_2}}(m_2 \rho) \cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho), \quad (4.15)$$

com os escalares restantes descritos, segundo as mesmas Eqs. (2.29) ou (4.3) associadas, por:

$$t_\rho = K_6^{-1} \left(\frac{5}{2} \frac{c_o^2}{\cosh^2(c\rho)} + \frac{c_o m_1 \tanh(c\rho)}{\tanh(m_2 \rho)} \right), \quad (4.16a)$$

$$t_o = K_6^{-1} \left[\frac{1}{4} \left(-m_1^2 \coth^2(m_2 \rho) + m_1 \left(\frac{2m_2}{\sinh^2(m_2 \rho)} + 5c_o \frac{\tanh(c\rho)}{\tanh(m_2 \rho)} \right) + \right) + \frac{5}{2} c_o^2 \right], \quad (4.16b)$$

em que o fator de warp e os escalares de pressão determinados seguem as Figs. 9 e 11 com $c_o = 4m_2 = 3c$ e a Fig. 10 com $c_o = 4m_2 = 2c$, que segue semelhantemente o caso das Figs. 9 e 11.

Tal modelo tem um comportamento assintótico diferente dos demais estudos neste texto, para ρ infinitamente grande, não suavizando o modelo GS pelas Eqs. (4.3). Este modelo é denominado de exótico, por ser bastante diferente, por exemplo, do modelo da corda-charuto [5] ou do tipo-corda suave [12], ao não suavizar o modelo GS.

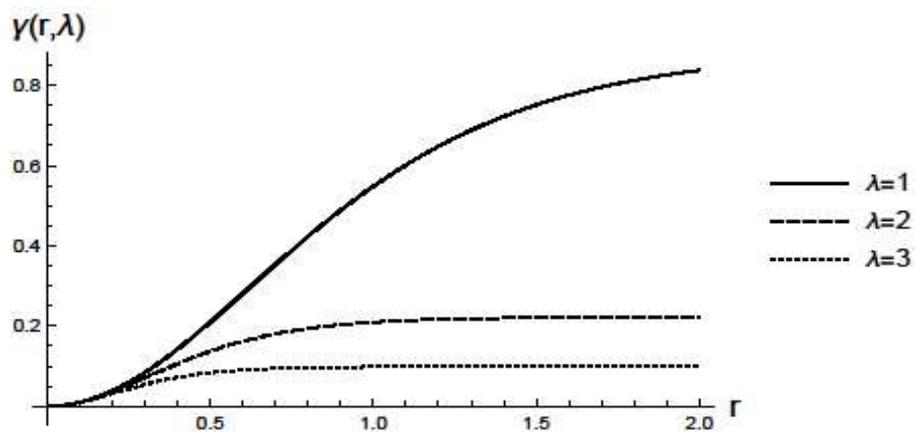


Figura 9: Fator de warp γ do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$.

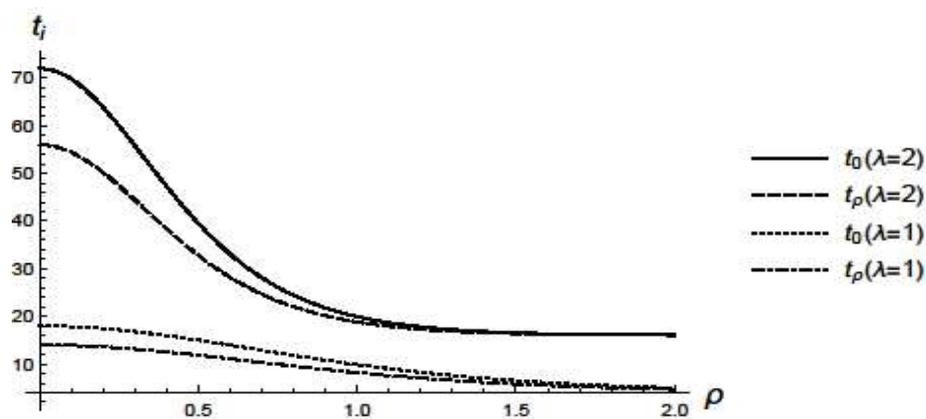


Figura 10: Relação entre os escalares t_o e t_ρ do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 2c = 2\lambda$ e $r = \rho$.

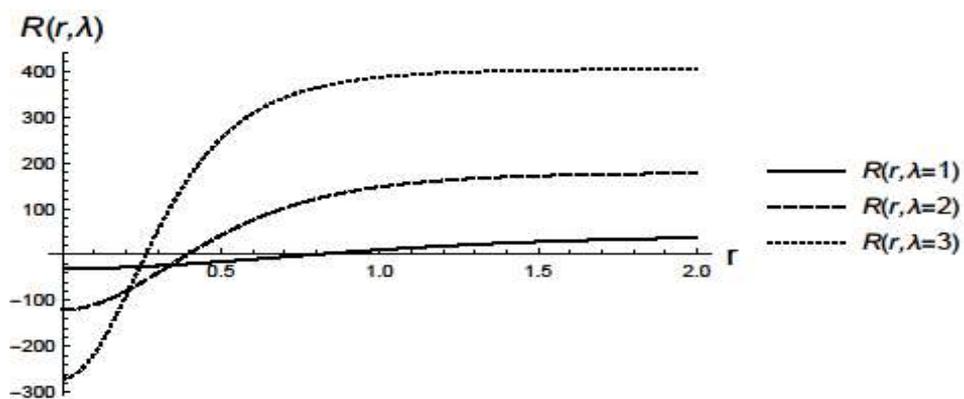


Figura 11: Escalar de Ricci do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 3c = 3\lambda$ e $r = \rho$.

E.

Neste caso será considerada a Eq. (4.6) em conexão com a Eq. (3.13), que tem relação próxima à desenvolvida na seção 3.1, delimitando-a em geral seguindo-se as condições de regularidade na origem por

$$\gamma = \frac{\tanh^2(c\rho)}{c^2 \cosh^{\frac{c_0}{c}}(c\rho)}. \quad (4.17)$$

Os escalares de pressão t_ρ e de energia t_o são descritos, como delimitada as Eqs. (4.3) que podem ser associadas à Eq. (3.9) e (3.15), por:

$$t_\rho = \frac{\lambda_\rho}{\cosh^2(c\rho)} = \frac{\lambda_\theta}{\cosh^2(c\rho)} = t_\theta, \quad (4.18a)$$

$$t_o = \frac{\lambda_o}{\cosh^2(c\rho)} = \frac{\lambda_\theta \left(1 + \frac{c}{c_o}\right)}{\cosh^2(c\rho)}. \quad (4.18b)$$

Assim, os escalares referentes ao modelo E possuem uma distribuição de densidade de pressão e escalar semelhante a um formato de sino, semelhantemente ao fator de warp σ com $c_o = 2c$. Esse modelo é interessante porque é descrito em geral, seguindo as condições de regularidade na origem e as condições de energia. De fato, o modelo E pode ser considerado um caso especial do modelo C, com $n_2 = 2$ e $n_1 = c_o/2c$. Importante destacar que, assim como em modelos do capítulo 3, os escalares de pressão t_ρ e t_θ podem ser analisados como escalares de energia, de maneira física.

Nos modelos B, C, D e E estudados verifica-se que os escalares respectivos, na origem, é suave (tem derivada igual a zero) diferentemente dos modelos em seis dimensões, que suavizam o modelo GS, da corda-charuto e tipo-corda suave discutidos nas seções 2.2.3 e 2.2.4.

A localização gravitacional dos modelos descritos nesta seção pode ser analisada semelhantemente como desenvolvida a seção 2.3.1 [10].

4.2 Localização gravitacional

4.2.1 Aspectos de localização gravitacional

Considera-se a seguinte expressão já desenvolvida no capítulo anterior:

$$-\partial_{\rho}^2 \phi_m - \left(2\sigma' \sigma^{-1} + \frac{\gamma'}{2\gamma} \right) \partial_{\rho} \phi_m = \sigma^{-1} m^2 \phi_m, \quad (4.19)$$

com:

$$m^2 = m_o^2 - \frac{l^2}{\beta(\rho)}, \quad (4.20)$$

sendo m_o uma constante de massa e l um número inteiro de momento angular intrínseco. Desse modo, considerando β variável, a massa m é dependente da posição no espaço de bulk para l diferente de zero.

Assim, com as mudanças de variável $z = \int \sigma^{-\frac{1}{2}} d\rho$ (o que delimita uma métrica conforme, segundo a Eq. (2.26a)) e de $\phi_m = u\psi$ [12]:

$$u = C_u \sigma^{-\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.21)$$

em que C_u é uma constante arbitrária, tem-se que haja, (com cada ponto simbolizando uma derivada com respeito à z) com U sendo o potencial análogo de Schrödinger:

$$-\ddot{\Psi}(z) + U(z)\Psi(z) = m^2\Psi(z), \quad (4.22)$$

$$U(z) = W(z) + \dot{W}(z) + \frac{l^2}{\beta(z)}, \quad (4.23a)$$

enquanto

$$W(z) = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{4} \frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (4.23b)$$

é uma função similar ao denominado superpotencial como há na mecânica quântica supersimétrica.

Nos modelos B, C e D averigua-se que $z = \lambda \theta^{-1} \sinh(c\rho)$ para $c_0 = 2c$, o que corresponde a um comportamento entre z e ρ semelhante próximo à origem.

O modo zero (com $m = 0 = l$) também pode ser estudado em cada modelo, sendo determinado por (como há por $\phi_m = u\psi$ e a Eq. (4.21) com ϕ_0 igual a uma constante) [5,12]:

$$\Psi(z) = \sigma^{\frac{1}{2}}(z) \beta^{\frac{1}{4}}(z), \quad (4.24)$$

que apresenta um comportamento normalizado pelo espaço de bulk, sem contribuição no mundo brana para o potencial newtoniano (pois $\Psi(0) = 0$). As contribuições ao potencial newtoniano podem ser analisadas também mediante $\phi_m = \phi_m(0)$ como uma função de onda, porém Ψ está descrito num formato de Equação tipo-Schrödinger, o que dá maior representatividade para Ψ como função de onda. Assim, como ocorre nos modelos GS e RS, o modo de massa m diferente de zero, quando associado à função de probabilidade diferente de zero na origem ($z = \rho = 0$), pode contribuir ao potencial newtoniano como descritas as Eqs. (2.54), mediante o potencial de Yukawa para curtas distâncias.

Desse modo, as Figs. 12, 13 e 14 relacionam o modo zero respectivamente dos modelos B, C e D, enquanto as Figs. 15 a 20 relacionam o Potencial análogo de Schrödinger de tais modelos.

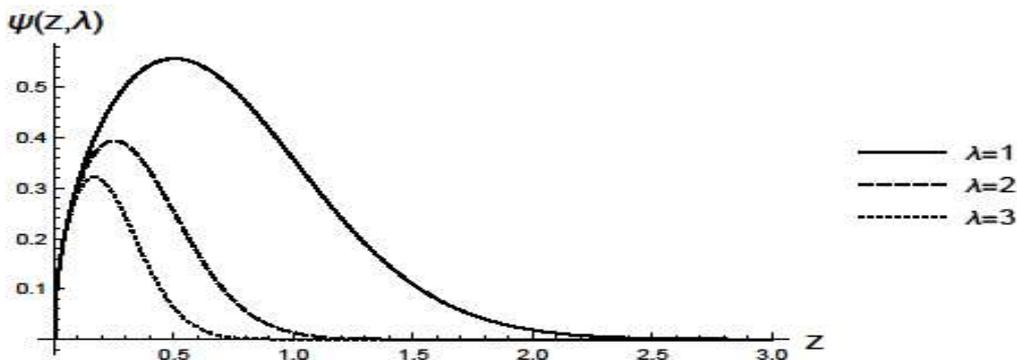


Figura 12: Modo zero do modelo B com $m = c_0 = 2c = 2\lambda$.

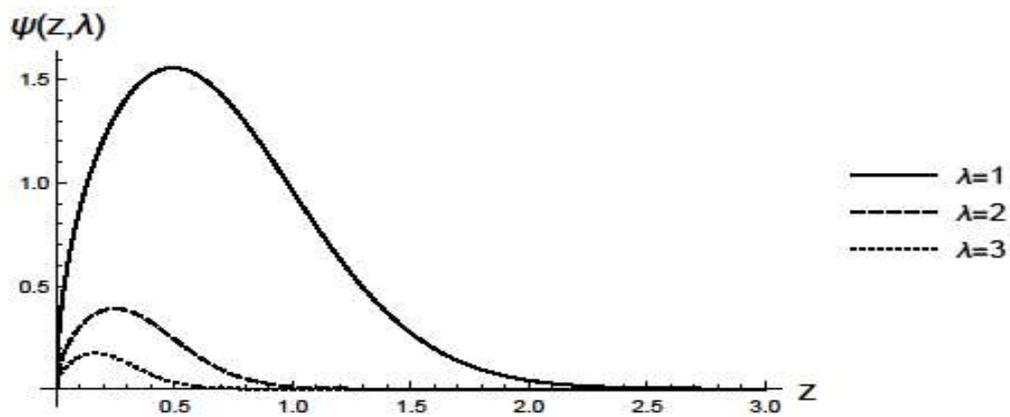


Figura 13: Modo zero do modelo C com $c_o = 2c = 2\lambda$ e $n_1 = 2n_2 = 2$.

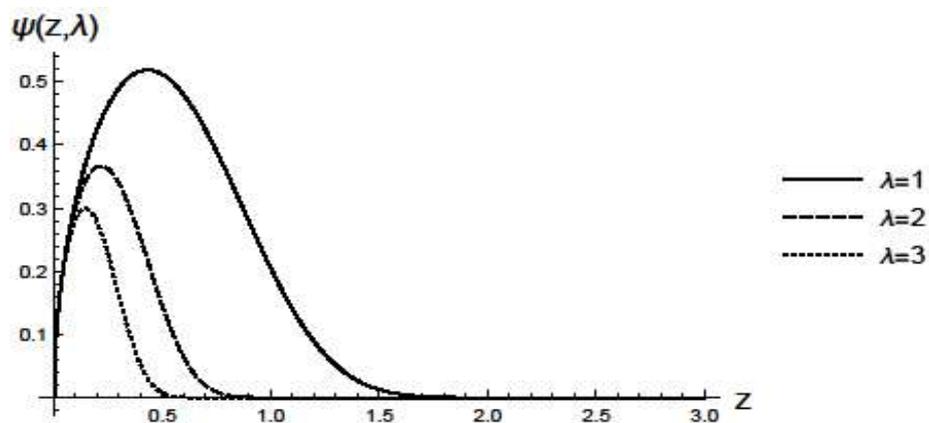


Figura 14: Modo zero do modelo D com $c_o = m_1 = 2m_2 = 3c = 3\lambda$.

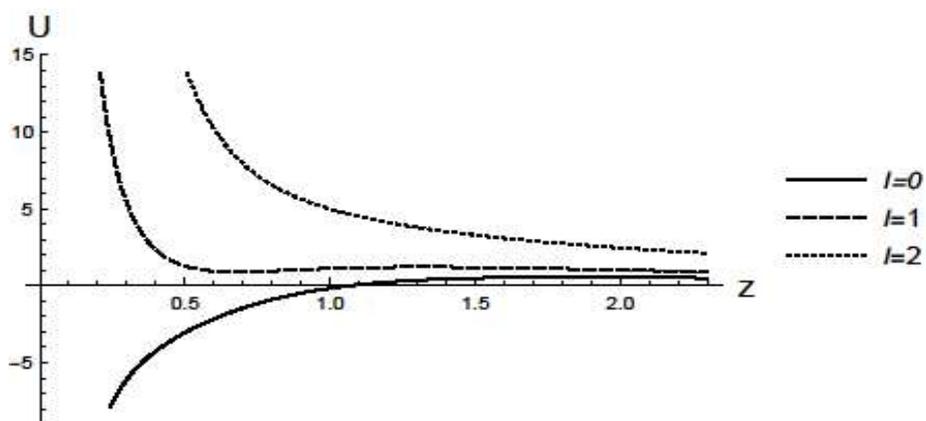


Figura 15: Potencial análogo de Schrödinger do modelo B com $c = 1$ e $m = c_o = 2c = 2\lambda$.

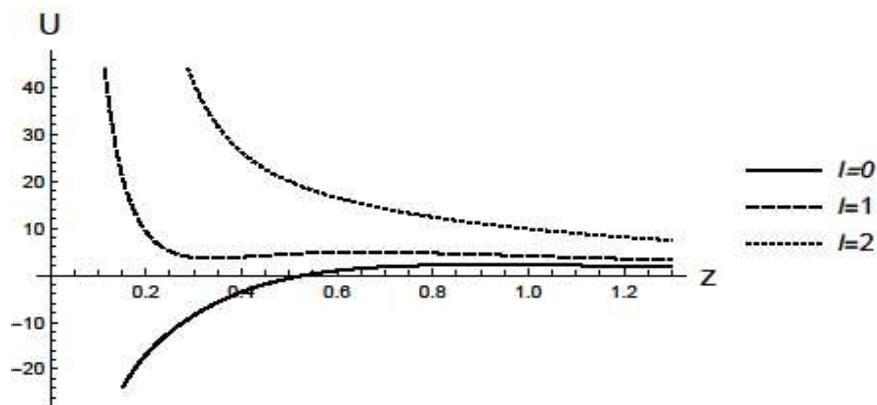


Figura 16: Potencial análogo de Schrödinger do modelo B com $m = c = 2$ e $c_o = 2c = 2\lambda$.

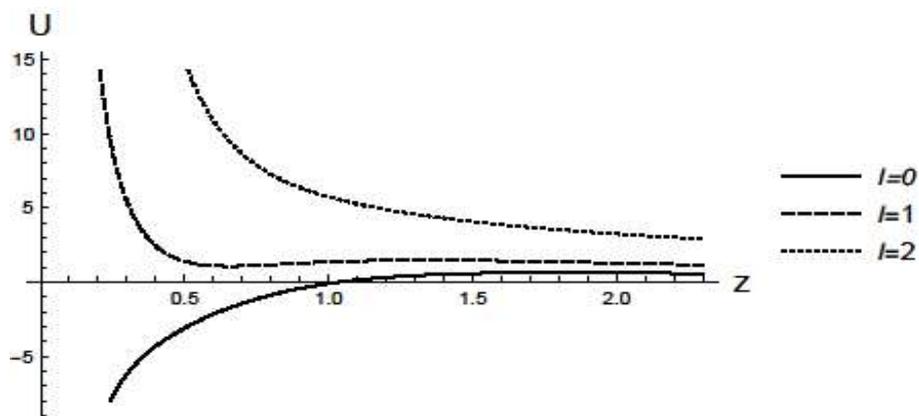


Figura 17: Potencial análogo de Schrödinger com $c = 1$ e $c_o = 2c = 2\lambda$ do modelo C com $n_l = 2n_l = 2$.

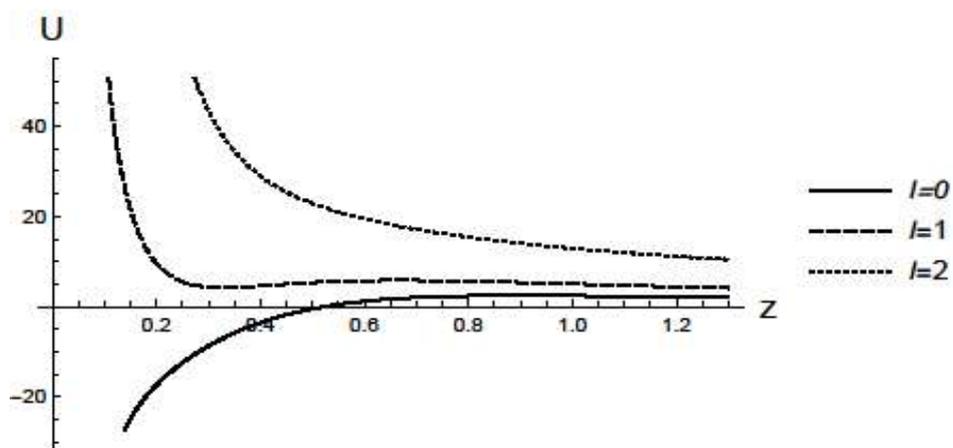


Figura 18: Potencial análogo de Schrödinger com $c = 2$ e $c_o = 2c = 2\lambda$ do modelo C com $n_l = 2n_l = 2$.

Como exemplo de localização gravitacional, são associados os termos referentes ao modelo E (que, dentre os modelos, é o que possui mais liberdade de análise pelos parâmetros envolvidos e que também pode ser relacionado ao caso analisado pela seção 3.1), que pode seguir a Eq. (3.21a), resultando em:

$$-\partial_\rho^2 \phi_m - \left[-\frac{5}{2} c_o \tanh(c\rho) + c \frac{1}{\cosh^2(c\rho) \tanh(c\rho)} \right] \partial_\rho \phi_m = \frac{m^2 \phi_m}{\cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho)}, \quad (4.25)$$

com o potencial análogo de Schrödinger possibilitando descrever, pela Eq. (4.23a) sob escalares de pressão iguais,

$$U(\rho) = \sigma \left(2A^2 + \frac{9}{4} A' - \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A''}{2A} \right) + \frac{l^2}{C_7^2 A^2} \quad (4.26)$$

em que

$$C_7 = \frac{-2}{K_6(\Lambda + \lambda_\theta)}, \quad (3.14)$$

podendo seguir um dos casos gerais dados pelas seções 3.2 e 3.4 do capítulo 3 ou o caso mais amplo de parâmetros envolvidos da Equação de Einstein (3.2) advindo da solução da Eq. (3.5) ou, similar a esta solução, pelo modelo E (que pode ter mesma solução advinda da seção 3.1 pela Eq. (3.5)) como:

$$U(\rho) = \cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho) \left[2c_o^2 \tanh^2(c\rho) + \frac{9}{4} c c_o \cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho) - \frac{\cosh^{\frac{2c_o}{c}}(c\rho)}{4 \tanh^2(c\rho)} - \frac{c c_o}{2} \cosh^{\frac{c_o}{c}}(c\rho) \right]. \quad (4.27)$$

Estudando a localização gravitacional mediante uma Equação tipo-Schrödinger, como verificado na seção presente envolvendo algumas soluções analíticas da Equação de Einstein, pode-se perceber pela solução dada mediante o modelo E que, para $c_o = 2c$, há comportamento semelhante aos modelos B e C (com $n = 2$) estudados próximo à origem, enquanto para $c_o = 3c$ há resultados teóricos semelhantes aos dos modelos C (com

$n = 3$), também próximo à origem. O modelo C segue análoga e aproximadamente os casos especiais de localização gravitacional de ϕ_m , enquanto o modelo B segue analogamente a localização gravitacional do modelo tipo-corda suave abordado na seção 2.2.4 [12]. Assim, o modelo E deve seguir também as seções 3.1.2 e 3.1.3 analogamente, sem perda de generalidade.

Há modelos que seguem campos escalares reais de acordo com uma cinemática padrão, delimitada por uma lagrangeana com base na Teoria Quântica de Campos, descrevendo uma delimitação do potencial pelo espaço de bulk em em cinco ou quatro dimensões [33,34]. Nesse sentido, porém em seis dimensões, há estudo que inclui a variável temporal no espaço-tempo [36].

Observa-se, no texto de tese, que foi dada ênfase, como função de onda, a variável desconhecida Ψ da Equação tipo-Shrödinger como analisada. No entanto, poder-se-ia supostamente adotar ϕ_m como tal função de onda. Neste caso, o modo zero de ϕ_m seria descrito por [4] (com D_0 sendo uma constante arbitrária):

$$\phi_0(\rho) = \sqrt{\frac{3c_o}{2R_0}} + D_0 \int_0^\rho e^{-3 \int_0^\rho Ad\rho} R_0 d\rho, \quad (4.28)$$

que só faz sentido, de forma normalizável para todo valor positivo de ρ , se ϕ_0 for uma constante, pois a parte variável diverge para grandes valores de ρ , seguindo-se [4,5]:

$$\phi'_m(0) = \phi'_m(\infty) = 0, \quad (4.29a)$$

$$\int_0^\infty d\rho \sigma \sqrt{\gamma} \phi_m^* \phi_n = \delta_{mn}. \quad (4.29b)$$

As Eqs. (4.29) descrevem uma variável como função de onda, assim como deve ser descrito, em seu contexto, a variável Ψ como função de onda, semelhantemente advinda da Mecânica Quântica e envolvendo um mundo brana inserido em um espaço de seis dimensões.

Com o intuito de descrever um modelo analítico aproximadamente, procedendo sobre o modelo GS do mesmo modo que há na Ref. [43], a função de onda do modo massivo nulo ψ_0 e do modo massivo ψ_m do modelo GS, correspondentes a uma equação

tipo-Schrödinger pelos modos de Kaluza-Klein e coerente com as condições de contorno, devem corresponder a:

$$\psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{7c_o}{2R_0}} e^{-c_o\rho} \quad (4.30a)$$

e

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{2}{m\pi}} \left(\frac{1}{mz}\right)^2 \left[(m^2 z^2 - 3mz - 3)(\cos(mz) - \sin(mz)) \right], \quad (4.30b)$$

sendo:

$$z = \frac{2}{c_o} e^{\frac{c_o}{2}\rho}. \quad (4.31)$$

Portanto, as Eqs. (4.30) são aproximadamente corretas para o modelo E determinado, seguindo-se z e ρ bastante grande (ou tendendo ao infinito) com m substituído por $m2^{-c_o/c}$, pois as Eqs. (4.30) advinda desse modelo é a mesma do modelo GS no mesmo limite, aproximadamente, seguindo-se as Eqs. (3.21).

4.2.2 Fatores de warp do modelo D e localização gravitacional referente

Diante da relação entre z e ρ em geral, tem-se, para c_o/c igual a 6, que:

$$z = \int_0^\rho \sigma^{-1/2} d\rho = \frac{3\sinh(c\rho)}{4c} + \frac{\sinh(3c\rho)}{12c} = \frac{1}{c} \sinh(c\rho) + \frac{1}{3c} \sinh^3(c\rho), \quad (4.32)$$

o que permite descrever com a única solução real, resolvendo a equação cúbica associada com a variável sendo o $\sinh(c\rho)$, que:

$$\sinh(c\rho) = -\frac{2^{1/3}}{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}}{2^{1/3}}. \quad (4.33)$$

Assim, o fator de warp σ pode ser descrito pela Eq. (4.33) associada pela identidade de $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$, resultando, para o modelo D e os demais, em:

$$\sigma = \frac{1}{\left(1 + \left(-\frac{2^{1/3}}{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}}{2^{1/3}}\right)^2\right)^3}. \quad (4.34)$$

Para o fator β , pode-se ter um valor para $m_2 = 3c$ (segundo as Eqs. (4.31), (4.32) e (4.33)) e $m_2 = c$ (segundo as Eqs. (4.32) e (4.33)), de acordo com as condições de regularidade na origem, que descrevem coerentemente o fator de warp γ em função de z por intermédio da Eq. (4.34).

Os valores respectivos de β para $m_2 = 3c$ e $m_2 = c$ para o modelo D são dados por:

$$\beta = \frac{144}{9} \left[z - \frac{3}{4c} \left(-\frac{2^{1/3}}{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}}{2^{1/3}} \right) \right]^2, \quad (4.35a)$$

$$\beta = \left(-\frac{2^{1/3}}{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(3cz + \sqrt{4 + 9c^2 z^2}\right)^{1/3}}{2^{1/3}} \right)^2 \frac{1}{c^2}. \quad (4.35b)$$

Para $c_o/c = 2$ o cálculo analítico em função de z é possível para os fatores de warp, com $\beta = z^2$ (modelo D), $\beta = z^2/(1+c^2 z^2)$ (modelo E) e $\sigma = (1+c^2 z^2)^{-1}$ (o modelo D seguiria, em relação à variável conforme z , um modelo análogo à ρ pelo modelo B), assim como é possível também obter, para o modelo C, o fator de warp γ pela identidade que existe entre $\sinh^2 x$ e $\cosh^2 x$. Para $c/c_o = 6$ o cálculo é análogo aos modelos C e E. Os fatores de warp delimitados nesta seção, para o modelo D, são delimitados pelas Figs. 19 e 20 a seguir. Enquanto isso a Fig. 21 delimita uma condição interessante. Esta condição é relacionada a um poço em $l = 1$ com $c = 1$, que é relacionada à $l = 0$ e $c = 2$, de maneira quântica, segundo a Equação tipo-Schroedinger, o que pode permitir uma transição entre

a condição de $l = 1$ relacionada para a associada à $l = 0$ e se verificar um gráviton massivo na brana na origem com probabilidade finita. Em adição, para um mundo brana um pouco deslocado da origem ou segundo Ref. [49] por modelos DGP, o estado de $l = 1$ pode permitir um modo massivo que é ressonante segundo a localização gravitacional de ϕ_m , o que torna isso não verdade para l maior que 1.

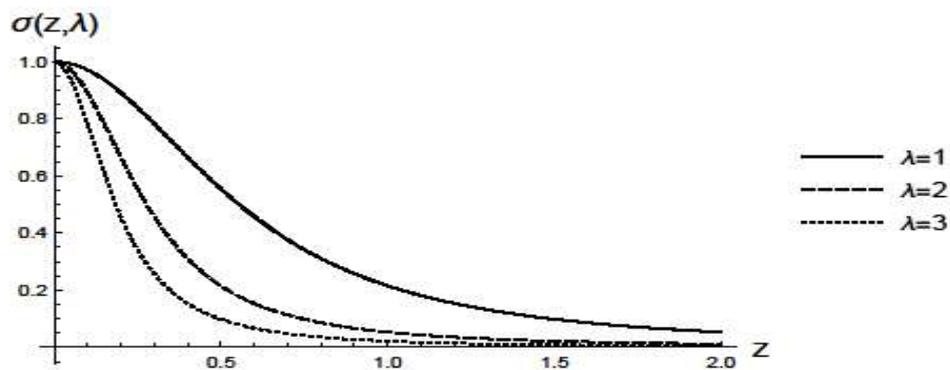


Figura 19: Fator de warp σ em função de z de modelo D, para $c_0/\lambda = c_0/c = 6$.

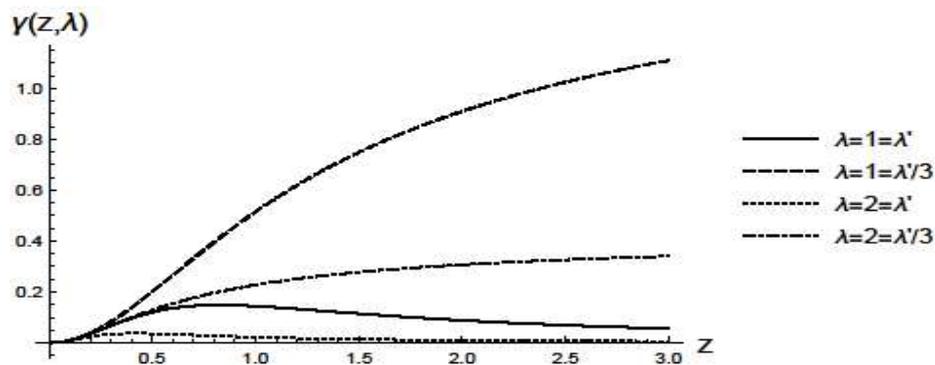


Figura 20: Fator de warp γ em função de z de modelo D, com $c_0/c = 6$, $\lambda = c$ e $\lambda' = m_2 = m_1/2$.

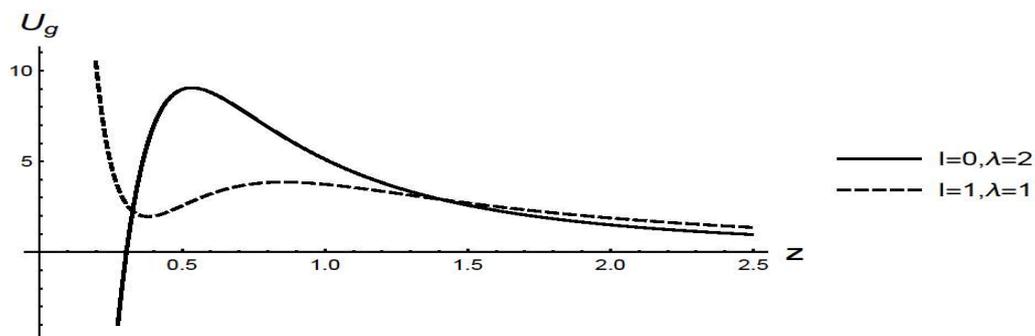


Figura 21: Potencial análogo de Schroedinger para $c_0/c = 6$ e $m_1/2 = m_2 = c = \lambda$ de modelo D.

De acordo com a Eq. (4.19) e pelo modelo D, para $m_l = c_o = 2c = 2m_2$ e regiões suficientemente próximas e longe da brana respectivamente, há aproximadamente para um modo sem massa, para um número inteiro l em geral, que:

$$\phi_0'' + \frac{2}{\rho} \phi_0' - \frac{l^2}{\rho^2} \phi_0 \cong 0, \quad (4.36a)$$

$$\phi_0'' - 5c \phi_0' - c^2 l^2 \phi_0 \cong 0, \quad (4.36b)$$

que possuem respectivamente como solução analítica,

$$\phi_0 \cong C_1 \rho^{\frac{1}{2}il \left(\frac{i - \sqrt{-1-4l^2}}{l} \right)} + C_2 \rho^{\frac{1}{2}il \left(\frac{i + \sqrt{-1-4l^2}}{l} \right)}, \quad (4.37a)$$

$$\phi_0 \cong C_3 \exp\left(\frac{1}{2} \rho (5c + c\sqrt{25-4l^2})\right) + C_4 \exp\left(\frac{1}{2} \rho (5c - c\sqrt{25-4l^2})\right), \quad (4.37b)$$

tendo-se que escolher $C_2 = 0 = C_4$ e para C_1 e C_3 uma constante positiva para haver localização gravitacional coerentemente de forma normalizada.

Analisando o modo massivo, com l igual ou diferente de zero, tem-se que o modelo D permite a mesma solução obtida pelo capítulo 3 para ρ tendendo a zero, segundo a Eq. (3.26), pois nesse limite $\sinh(c\rho)$ é aproximadamente $c\rho$. No entanto, diferentemente do modelo GS (que é seguido igual ou semelhantemente por todas as demais soluções (do capítulo 3 e deste capítulo)), para ρ tendendo ao infinito e seguindo-se as condições de regularidade na origem há a obtenção, aproximadamente, de:

$$\phi_m'' + \left(-\frac{5}{2}c_o + m_2\right) \phi_m' + e^{c\rho} m^2 2^{-\frac{c_o}{c}} \phi_m \cong 0, \quad (4.38)$$

com solução associada que pode ser descrita como [49]

$$\phi_m \cong C_5 e^{-\frac{1}{2}\rho\left(m_2 - \frac{5}{2}c_o\right)} J_{\frac{5}{2} \frac{m_2}{c_o}} \left(\frac{2m\sqrt{e^{c\rho}}}{2^{\frac{c_o}{2c}} c_o} \right) + C_6 e^{-\frac{1}{2}\rho\left(m_2 - \frac{5}{2}c_o\right)} Y_{\frac{5}{2} \frac{m_2}{c_o}} \left(\frac{2m\sqrt{e^{c\rho}}}{2^{\frac{c_o}{2c}} c_o} \right), \quad (4.39)$$

em que, para $m_2 > 5c_o/2$, há barreira gravitacional indo pra zero por ρ tendendo a infinito com C_5 igual a zero e C_6 constante positiva arbitrariamente. Para $m_2 < 5c_o/2$, há localização gravitacional apenas com valor máximo de ρ finito, considerando $C_6 = 0$ e C_5 positivo arbitrariamente, comportando-se semelhantemente ao caso de modelo GS. Em tais casos, as constantes C_5 e C_6 são zero para evitar divergência em $\rho = 0$. Assim, a Eq. (4.39) segue o modelo GS apenas como caso especial, para $m_2 = 0$.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

5.1 Conclusões

A Equação de Einstein, pela métrica em seis dimensões que permite a suavização do modelo GS segundo a Eq. (2.26a), foi delimitada em geral analiticamente, seguindo as condições de regularidade na origem e as condições de energia, de forma a suavizar o modelo, para ρ tendendo ao infinito, de forma aproximadamente igual ao modelo GS, segundo as seções 3.2 e 3.4 com escalares de pressão $t_\rho = t_\theta$ (permitindo descrever esses escalares de pressão como também, de outra forma física, escalares de energia). Relacionado à seção 3.4, tem-se sua solução diferencial segundo a seção 3.3, suavizando o modelo GS com a dimensão extra radial ρ sendo positiva para o caso de $f_\theta > 0$ na origem, diferentemente como há na seção 3.2, em distinta solução geral, com $f_\theta < 0$ na origem. Dessa forma, essas soluções gerais são complementares entre si em relação a f_θ na origem.

Foram obtidos de forma totalmente analítica pela Equação de Einstein, os modelos específicos respectivos das seções 3.1, 3.2 e 4.1, em que na seção 4.1 os modelos B, C e D seguem todas as condições regulares na origem e de energia, enquanto o modelo A não segue as condições regulares na origem e o modelo E é um caso especial do modelo C. O modelo E é mais simples que o modelo C por ter menos termos associados nos escalares da Equação de Einstein (porém permitindo, ainda assim, liberdades na definição destes em relação à variação por dimensão extra radial e no valor de cada escalar em relação a cada valor da dimensão extra radial pelo valor de contorno na origem). O modelo B pode ser considerado regular, similar ao fator de warp γ do modelo tipo-corda suave, o C seguindo semelhantemente o fator de warp γ , pelo modelo corda-charuto, excetuando como inserido o fator de warp σ , e o D é considerado um modelo de brana exótica por não suavizar o modelo GS completamente (inclusive no limite para a dimensão extra radial tendendo ao infinito pela perturbação da métrica). Assim, foi obtida solução analítica específica na seção 3.1 que se relaciona diretamente ao modelo E desenvolvido analiticamente pelo capítulo 4, na seção 4.1, seguindo todas as condições de brana regular na origem e de energia. Entretanto, pela solução dada pela seção 3.1 ser mais abrangente, em relação ao modelo E referente, a solução dada pela seção 3.1 pode considerar uma constante cosmológica em seis dimensões igual a zero ou outros valores possíveis

diferentes, pelo mesmo modelo teórico da Equação de Einstein. No entanto, para alguns valores específicos e seguindo mesmas condições físicas, a solução dada pelo modelo E do capítulo 4 é diferente da solução mais abrangente, acarretando numa solução descrevendo os escalares de energia e pressão com formato analítico muito simples.

Assim, no capítulo 4 foi estudada uma solução analítica (que pode ser derivada da seção 3.1), relacionando 5 casos especiais associados. O modelo A descreve uma realidade física semelhante ao modelo GS, sem seguir as condições de contorno do fator de warp γ , mas seguindo as condições de energia, que já foi discutido na Ref. [48]. Dessa forma, para os modelos B, C e D seguirem todas as condições de energia com escalares associados finitos, as condições de regularidade na origem tiveram que ser obedecidas. Dentro desses casos há o modelo E (seguindo escalares de pressão também iguais e, portanto, permitindo descrevê-los também como escalares de energia e não de pressão). Ressalta-se também que, pelo modelos D e E, assim como possivelmente pelo modelo C, foi determinado algumas soluções analíticas dos fatores de warp e do potencial análogo de Schroedinger com valores críticos (com c/c_0 igual a 2 ou 6) pela variável conforme z da Equação tipo-Schroedinger, o que permite uma análise mais clara de tais fatores de warp em função de uma variável conforme de uma métrica em seis dimensões como discutida.

Diferentemente do que se pode pensar, as duas soluções analíticas gerais do capítulo 3 são distintas com mesmos parâmetros e mesmas fontes escalares, pois envolvem soluções com condições de contorno distintas em A , para a dimensão extra radial tendendo a zero, associado a elemento diferencial $d\rho$ ser positivo na seção 3.2 e negativo na seção 3.3 para a Equação de Einstein. A solução da seção 3.3 pode ser analisada também, pela Equação de Einstein, com elemento diferencial $d\rho$ positivo e A substituído por $-A$, o que delimita a mesma Equação de Einstein, sob mesmos parâmetros, com condições de contorno diferentes em geral. Na solução diferencial analítica da seção 3.3 há funções de ponto extras descritas por $A = 0$ em $\rho = 0$ e $f_\theta = 0$, que tornam a solução contínua em toda a extensão da dimensão extra radial de bulk ρ e permitindo a associação física com as condições de regularidade na origem. Nesse sentido, a solução analítica, obtida na seção 3.1, é diferente da solução obtida, com mesmos *ansatz* específicos, da solução obtida pela seção 3.3 que é representada pela seção 3.4 analiticamente. Nessas soluções, os escalares de pressão t_θ e t_ρ são iguais em geral.

Nesse sentido, a localização gravitacional é delimitada, pois tais soluções seguem os casos especiais oriundos do modelo da corda-charuto ou tipo-corda suave [5,12] para ρ próximo à origem, assim como é aproximadamente igual ao modelo GS para a mesma

variável tendendo ao infinito (infinitamente longe da brana). A influência sobre a energia potencial gravitacional, num mundo brana, é semelhante como nas discussões acerca do capítulo 4.

Nas soluções da Equação de Einstein, foram analisadas algumas condições gerais, como há na seção 3.3, que não suavizam o modelo GS para a dimensão extra radial tendendo a zero, pois a variável ρ pode não ser maior que um valor fixo no modo mais geral de solução. Entretanto, como caso especial, a suavização do modelo GS é possível. Dessa forma, o Problema da Hierarquia é resolvido compativelmente, de forma exata, segundo a seção 3.1.3 com um ajuste da Massa de Planck em 6D (M_6), que pode ser estendida aos demais casos analisados pelo capítulo 3, assim como do capítulo 4.

Ademais, na seção 3.6 foi desenvolvido um método que se espera aproximar uma solução convergentemente exata para grandes valores de quantidade de iteração n , seguindo todas as condições físicas especificadas de energia e de regularidade na origem. Tal método é utilizado para cálculo de A , que está relacionado diretamente ao fator de warp σ , da solução diferencial da seção 3.3 segundo os escalares de pressão iguais, assim como também na seção 3.2 coerentemente também com escalares de pressão iguais e, ainda, relaciona as perturbações gravitacionais no mesmo sentido das soluções gerais associadas aos fatores de warp, relacionadas com número quântico l igual a zero ou inteiro positivo. Esse método é interessante por se poder escolher os escalares de pressão como se quiser. Salienta-se que, a nível de intervalo pequeno da variável explícita de dimensão radial de bulk, envolvendo um erro inicial pequeno segundo a primeira aproximação, a análise, coerente com o método introduzido, já é conhecida [44] e fornece um resultado convergentemente exato para uma quantidade cada vez maior de iterações.

Quanto à localização gravitacional, no capítulo 4 se analisou casos que podem permitir a existência de grávitons localizados na brana (que deve ser verificado por um modelo numérico em todo o domínio, com o fim de se observar se há barreira de perturbação de métrica grande o suficiente fora da região próxima à brana), assim como há nos modelos analíticos do capítulo 3. Pelo potencial análogo de Schroedinger estudado, relacionado à tais modelos, pode-se explicar um tunelamento para um gráviton massivo chegar na brana, se for concluído que há um modo ressonante de uma onda s com número quântico $l = 1$, até a brana em que se localiza o mundo quadridimensional relacionado ao potencial de Yukawa associado ao potencial de Newton, por um estudo numérico. Pelo potencial de Schroedinger, há um potencial atrativo das partículas em relação à brana, embora sem haver modo ressonante, para $l = 0$. Em adição, também foi

estudado casos especiais do modelo D para a localização gravitacional, com novas soluções, pela seção 4.2.2, podendo haver localização gravitacional mesmo para ρ tendendo ao infinito, diferentemente do modelo GS, assim como também pode seguir semelhantemente o modelo GS. A solução compatível do Problema da Hierarquia, no capítulo 4, é descrito semelhantemente ao do capítulo 3.

5.2 Perspectivas

Averiguar como se comportaria qualquer solução que queira, em torno da Equação de Einstein, torna-se interessante mediante os modelos aproximativos serem verdadeiros da seção 3.7, para todo o domínio da solução. No entanto, para tal, é importante também ser associado computacionalmente se tais soluções são, de fato, convergentes exatamente, sabendo que as condições matemáticas estabelecidas estão em nível geral quanto aos erros associados, abrangendo todo caso e, portanto, sendo confiável.

Uma tentativa de análise é a de se achar uma lagrangeana compatível com um estudo quântico e com as soluções analíticas obtidas no capítulo 4, de modo convencional matematicamente, pois a lagrangeana de vórtices abelianos, pelo analisado, não permite essa associação direta por todas as suas equações de movimento.

Uma possibilidade, para a Física Matemática, é a da inclusão de soluções gerais distintas das clássicas, pelo formalismo identificado na seção 3.3 do capítulo 3, para equações diferenciais lineares e ordinárias de segunda ordem e homogêneas.

REFERÊNCIAS

- [1] RANDALL L. e SUNDRUM R., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].
- [2] RANDALL L. e SUNDRUM R., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].
- [3] GABELLA, Maxime. “The Randall-Sundrum Model”. IPPC, EPFL, 2006.
- [4] GUERGUETTA, Tony e SHAPOSHINKOV, Mikhail. “Localizing Gravity on a Stringlike Defect in Six Dimensions”. In: *Physical Review Letters*, Vol. 85, numero 2, 2000.
- [5] SILVA, J. E. G.; SANTOS, V. e ALMEIDA, C. A. S. “Gravity localization in a string-cigar braneworld”. In: *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 30 (2), p. 025005 (17pp), 2013.
- [6] GIOVANINI, Massimo. “Gauge field localization on Abelian vórtices in six dimensions”. In: *Physical Review D*, **66**, 044016, 2002. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.044016.
- [7] GIOVANINI, Massimo, LE BÉ, Jean-Vincent e RIEDERER, Stéphane. “Zero modes of six-dimensional Abelian vórtices”. In: *Classical and quantum gravity* **19**, 2002, p. 3357-3385.
- [8] ZHONG, Yi; CHEN, Feing-Wei; XIE, Qun-Ying e LIU, Yu-Xiao. “Warped brane worlds in critical gravity”. In: *The European Physical Journal C*, 2014, vol 74, p. 3185. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3185-8.
- [9] LÜ, H. e POPE, C. N. “Critical Gravity in Four Dimensions”. In: *Physical Review Letters*, 106, 181302, 2011. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.181302.
- [10] ARKANI-HAMED, N., DIMOPOLOUS, S. e DVALI, G. R., *Phys. Rev.* **D59**, 086004, (1999) hep-ph/9807344.
- [11] CSÁKI Csaba, ERLICH, Joshua, HOLLOWOOD, Tomothy J. e SHIRMAN, Yury, “Universal aspects of gravity localized on thick branes”. In: *Nuclear Physics B* 581, 2000, 309-338.
- [12] ARAÚJO, J. C. B.; SILVA, J. E. C.; VERAS, D. F. S. and ALMEIDA, C. A. S. “A smoothed string-like braneworld in six dimensions”. In: *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 17 de Março, 2015, Vol. 75 (3).

- [13] CHEN, Feing-Wei; LIU, Yu-Xiao; ZHONG, Yuan; WANG, Yong-Quang e WU, Shao-Feng. *Brane worlds in critical gravity*. In: Physical Review D, **88**, 104033, 2013. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.104033.
- [14] W.T. Cruz, R.V. Maluf, C.A.S. Almeida, “Kalb-Ramond field localization on the Bloch brane”, Eur. Phys. Journal C 73 2523 (2013) 2
- [15] W.T. Cruz, Aristeu R.P. Lima, and C.A.S. Almeida, “Gauge field localization on the Bloch brane”, Phys. Rev. D 87 045018 (2013) 2. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.045018.
- [16] W. T. Cruz, M. O. Tahim and C. A. S. Almeida, “Results in Kalb-Ramond field localization and resonances on deformed branes”, Europhys. Lett. 88, 41001 (2009) 2
- [17] M. O. Tahim, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Tensor gauge field localization in branes”, Phys. Rev. D 79, 085022 (2009) 2. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.085022.
- [18] Yun-Zhi Du, Li Zhao, Yi Xhong, Chun-E Fu, and Heng Guo, “Resonances of Kalb-Ramond field on symmetric and asymmetric thick branes”, arXiv:hep-th/1301.3204v1, 15 de janeiro, 2013.
- [19] C. Csaki, Joshua Erlich, and Timothy J. Hollowood, “Quasilocalization of Gravity on a Brane by Resonant Modes”, Phys. Rev. Lett. Vol. 84, numero 26, 5932 (2000).
- [20] A. R. Gomes, “Gravity on the Bloch brane”, arXiv:hep-th/0611291 10, 27 de novembro, 2006.
- [21] W.T. Cruz, L.S.J. Sousa, R.V. Maluf, C.A.S. Almeida, “Graviton Resonances on two-field thick branes”, Phys. Lett. B 730 314-319, 5 de fevereiro, 2014. 2, 12. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.01.061.
- [22] W. T. Cruz, A. R. Gomes and C. A. S. Almeida, “Graviton resonances on deformed branes”, Europhys. Lett. 96, 3, 31001 (2011).
- [23] W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Resonances in gravitational scenario given by deformed branes”, Eur. Phys. J. C 71, 1709 (2011). DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1709-z.
- [25] F. W. V. Costa, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, “Gauge vector field localization on 3-brane placed in a warped transverse resolved conifold”, Phys. Rev. D 87, 125010 (2013) 2, 20
- [26] L. J. S. Sousa, W. T. Cruz and C. A. S. Almeida, “Tensor gauge field localization on a string-like defect”, Phys. Lett. B 711, 97, p. 97-103 (2012) 2. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.03.057.
- [27] ODA, Ichiro. “Localization of Matters on a String-like Defect”. In: Physics Letters B, 2000, Vol.496(1), pp.113-121. Arxiv:hep-th/0006203v2, 2000.

- [28] ARFKEN, George B.; e WEBER, Hans J. Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. Editora Campus, tradução da 6ª Edição, 2005.
- [29] BASSALO, J. M. F. e CATTANI, M. S. D. **Elementos de Física Matemática: Equações diferenciais ordinárias, transformadas e funções especiais**. Vol. 1, Editora Livraria da Física, 1ª Edição, p. 153, 2010.
- [30] BOYCE, William E. e DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8ª Edição, Editora LTC, 2006, p. 38,41.
- [31] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª Edição, Editora HARBRA ltda, p. F-4, 1994.
- [32] L. J. S. Sousa, C. A. S. Silva and C. A. S. Almeida, “Brane bounce-type configurations in a string-like scenario”, Phys. Lett. B 718, 579 (2012) 2. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.09.070.
- [33] W. T. Cruz, R. V. Maluf, L. J. S. Sousa, and C. A. S. Almeida, “Gravity localization in sine-gordon braneworlds”, Annals of Physics 364 (2016), 25-34. DOI: 10.1016/j.aop.2015.10.016.
- [34] I. Oda, “Bosonic fields in the string-like defect model” Phys. Rev. D **62**, 126009 (2000) Doi: 10.1103/PhysRevD.62.126009.
- [35] DANTAS, D. M. **Aspectos gerais do confinamento de campos em mundos brana não fatorizáveis de seis dimensões com enfoque na localização de férmions de Dirac, Rarita-Schwinger e Elko**. Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2016 (Tese).
- [36] Pavle Midodashvili, “Localization of Matter Fields in the 6D Standing Wave Braneworld”, Int. J. Theor. Phys. (2014) 53:1174-1187. DOI: 10.1007/s10773-013-1914-7.
- [37] CRUZ, W. T.; TAHIM, M. O. e ALMEIDA, C. A. S. “Gauge field localization on a dilatonic deformed brane” In: Physics Letters B, 29 de março, 2010, Vol. 686 (4-5), pp. 259-263.
- [38] SOUSA, L. J. S. de. **Localização de campos em branas isotrópicas e anisotrópicas em seis dimensões**. Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2013 (Tese).
- [39] WALD, R. General Relativity. The University of Chicago Press, p. 446, 1984.
- [40] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. The Large Scale structure of Space-time. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.
- [41] VISSER, M. Lorentzian wormholes from Einstein to Hawking, AIP Press (1995).

- [42] SILVA, J. G. da S. **Sobre modificações na estrutura geométrica em cenários de branas**. Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, 2013 (Tese).
- [43] VERAS, D. F. S.; SILVA, J. E. G.; CRUZ, W. T.; ALMEIDA, C. A. S. “Gravitational Kaluza-Klein modes in the string-cigar braneworld”. arXiv:1409.3180v1 [hep-th], setembro de 2014.
- [44] BYRON, F. W. Jr.; e FULLER, R. W. Mathematics of Classical and Quantum Physics. Dover Publications, Inc, New York, 1992, p. 484-487.
- [45] ABBOTT, B. P. et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In: Physical Review Letters, 2016.
- [46] Rickroleau, “Elementary particles”, Nova (2003). <http://www.pbs.org/wgbh/nova/elegant/partflash.html>; Space Math Group, “The Elementary Particle” Nasa (2012). <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/universe/6Page85.pdf>
- [47] Barrow, John D. (2002). “The Constants of Nature; From Alpha to Omega-The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe”. New York: Pantheon Books. ISBN 0-375-42221-8.
- [48] S., Rafael S. Torrealba. “Localizing Gauge Fields on a Topological Abelian String and the Coulomb Law”. Arxiv:1003.4199v2 [hep-th] 24 de abril de 2010.
- [49] J. E. G. Silva; W. H. P. Brandão; R. V. Maluf; and C. A. S. Almeida “Regular string-like braneworlds”. In: The European Physical Journal C (Particles and Fields), p. 77-79, 2019. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6538-5. arXiv:1711.08564v1 [gr-qc], 12 de janeiro (2019).
- [50] Wikipedia. “Riccati Equation”. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Riccati_equation. Acesso em: Janeiro (2019).