AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA: FORMAS DE CONSIDERAR OS *ERROS* DOS ALUNOS NA APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DE LIMITES

Francisco Regis Vieira Alves
Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará
fregis@etfce.br
Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará
herminio@ufc.br
Rosélia Costa de Castro Machado
Universidade Federal do Ceará
roselia@ufc.br

Introdução

A necessidade de compreender a natureza e os motivos que concorrem ao *erro* apresenta suas raízes desde a Grécia Antiga. Brochard (1879, p. 13) lembra que Sócrates formulou algumas considerações sobre este, ao longo da discussão do *Théététe*. Nessa discussão, inicialmente, ele diz que o erro

> *não pode consistir em tomar uma coisa que sabemos por uma coisa que também sabemos, pois, aquele que se engana, se representa o que ele pensa de outro modo, não o conhece de forma absoluta. Não consiste também em tomar algo que não conhecemos por algo que também não conhecemos, pois, a partir de duas ignorâncias não saberíamos realizar um pensamento (BROCHARD, 1979, p. 14).*
>
> Não nos enganamos também tomando o que sabemos por algo que ignoramos. Ou o que ignoramos por algo que sabemos desde que, ignorar significa, por definição, não possuir nenhuma

ISBN: 978-85-89872-42-3

> representação de uma coisa (BROCHARD, 1979, p. 15).

Estas considerações de Sócrates indicam que devemos observar dois elementos que se relacionam à manifestação do erro: o primeiro se refere às próprias coisas ou objetos que são submetidos ao nosso raciocínio, segundo, a natureza das ligações que buscamos estabelecer entre tais objetos.

Por exemplo, quando olhamos aos próprios objetos e cometemos equívocos em relação a estes, sua *existência* é admitida trivialmente? Mudando-se a relação de ordem do conhecimento em relação à ordem da *existência*, podemos dizer que o *erro* consiste também em afirmar o que não existe? Para nós, Sócrates responde provisoriamente esta pergunta quando lembra que *não podemos julgar o que não existe, pois, julgar o que não existe, não seria um julgamento* (BROCHARD, 1979, p. 16).

Nos antigos identificamos a busca pela compreensão da relação entre as *sensações* e as *idéias*. De fato, segundo a doutrina de Sócrates,

> a alma pode ser considerada como um conteúdo de múltiplos tabletes de cera onde estão inscritos diferentes reminiscências. Se ocorrer que uma sensação toca uma destas reminiscências, quando a alma aplica uma sensação a um "souvenir" ou a idéia que lhe convém, estamos com a verdade; estamos com o erro no caso contrário.

Mais adiante ele explica suas palavras dizendo que, freqüentemente, tomamos o *onze* como a soma de *cinco* mais *sete*? Mas tratam-se não de números concretos, mas de números abstratos, ou seja, são coisas ou objetos que não sentimos, mas que sabemos.

ISBN: 978-85-89872-42-3

A ênfase atribuída por Sócrates ao papel dos *sentidos* para a aquisição das nossas idéias e, conseqüentemente, o alcance da *verdade absoluta*, é discutível. De fato, cometemos *erros* quando interpretamos de forma inadequada nossos *sentidos*. Além disso, a possibilidade da *existência* dos objetos matemáticos independe da possibilidade de serem captados pelos nossos sentidos. Sua *existência*, recordando as palavras de Poincaré (1905, p. 7), *é garantida por serem livres de contradições*.

Outra possibilidade de manifestação do erro se deve à nossa capacidade limitada de atenção a tudo que conhecemos. Relacionado a isto, Victor Brochard em sua tese intitulada *De l´erreur*, fundamenta suas considerações iniciais quando sublinha que

> *podemos ter um conhecimento atual e presente ao pensamento, outra coisa é possuir um conhecimento ao qual não dispensamos alguma atenção. Cada um de nós possui uma multiplicidade de lembranças, noções que estão latentes em nós, mas que não fazemos seu uso constante* (BROCHARD, 1879, p. 15).

Por exemplo,

> um matemático conhece bem as propriedades dos números; portanto, ele procura freqüentemente o que ele já conhece, e por conseqüência, ele não sabe o que sabe (BROCHARD, 1979, p. 15).

Segundo o seu ponto de vista, depreendemos que uma das conseqüências do *erro*, é devida a nossa capacidade limitada de atenção a uma multiplicidade de coisas que sabemos além de possuir-mos uma memória limitada e, nem sempre, esta, e a todo o momento, mostrar-se acessível.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Brochard traduz as formulações gregas, a partir de um ponto de vista moderno, dizendo que

> não existe erro fora do julgamento. Não nos enganamos na medida em que pensamos esta ou aquela coisa, mas na medida em que concebemos algo como existente, ou estando unida a outra coisa. O erro não se encontra nas próprias coisas unidas, mas, nas ligações que estabelecemos entre estas (BROCHARD, 1879, p. 22).

Vemos então a atribuição da categoria de *existência* como condição para o estabelecimento de ligações entre duas coisas e conceber-mos um juízo. Em Matemática, podemos nos referir ou manifestar algum juízo em relação a algum *objeto*. Assim como podemos tornar uma *proposição* como o foco principal de nossas reflexões. As palavras de Brochard, no último parágrafo, se enquadram em ambos os casos, ou seja, reconhecendo-se que o *erro* reside tanto nas ligações estabelecidas entre coisas ou objetos, que temos admitido a sua existência, assim como nas proposições.

Mas de uma forma ou de outra, as possibilidades de manifestação do *erro*, particularmente na Matemática, são inevitáveis, uma vez que *é o próprio entendimento humano que é falível* (BROCHARD, 1879, p. 27).

Além disso, em sua discussão é apontada uma direção alvissareira de compreensão do *erro*, quando ele sublinha as maneiras em que pensamos o *verdadeiro* ou o *falso*. Ele adverte que *se nós acreditamos ou se nós estamos certos, é necessário verificar em que consiste a crença e a certeza* (BROCHARD, 1879, p. 95).

Em Matemática, observamos uma prática usual que caracteriza a possibilidade do alcance mais elevado da *verdade matemática*, da possibilidade de comprova-

ISBN: 978-85-89872-42-3

ção absoluta e da irrefutabilidade dos argumentos envolvidos. Tal prática é nomeada de *prova* ou *demonstração*.

A *crença* cultivada desde os gregos se relaciona à necessidade do *rigor matemático*, garantido por meio de uma *demonstração*. Uma vez verificado, tal conhecimento originado na *crença*, passa a estar fundado numa *verdade absoluta*, como o exemplo de $a^2 = b^2 + c^2$, onde "a", "b" e "c" são a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Vale destacar que o *conceito de conhecimento (knowledge) apresenta conexões bem próximas com as noções de crenças e concepções* (FULVIA, F. e PEHKONEN, E. 2002 p. 42). A definição clássica de conhecimento origina-se com Platão, caracterizando um conhecimento (*knowledge*) como uma *crença justificada verdadeira*. Neste caso particular, abordamos uma *crença* verdadeira justificada que nomeamos de *teorema de Pitágoras*, portanto, trata-se de um conhecimento.

Concordamos com Marin (2003, p. 92) quando adverte que

> a verdade possui ainda outra característica. Ela é não acessível, não porque o poder da razão humana é colocado em dúvida, mas por que se trata de um princípio epistemológico. É possível atingir o falso com certeza (graças à refutação), mas a certeza de se atingir a verdade não existe em virtude precisamente do espectro eventual da refutação.

De fato, se recorrermos à História da Matemática, encontramos com facilidade situações em que determinadas épocas, observávamos o consenso sobre determinado tema ou assunto e, em outras épocas, temos exatamente o contrário, o que era aceito com *verdade*,

ISBN: 978-85-89872-42-3

passa a ser objeto de desconfiança e polêmica entre os matemáticos.

Se não em todos os casos, mas seguramente acreditamos que em parte deles, o motivo desta confusão é devida à evolução da *intuição humana* ao longo dos séculos e, particularmente, a evolução do sentimento de *evidencia matemática*, que pode influenciar de forma decisiva os nossos sentidos. Basta tomar como exemplo, o desastre em se ter considerado a *intuição geométrica* como fundamentação para a *Análise* no século XVIII (HERSH, 1997, p. 139).

O sentimento de *evidencia matemática* influenciou de forma emblemática, inúmeras mentes brilhantes. Neste sentido, são perspicazes os questionamentos de Brochard (1879, p. 40) quando pergunta

> se não existem idéias tão claras e evidentes que implicam em uma adesão por nós sem alguma liberdade, como o caso das idéias matemáticas? Ele responde em parte este questionamento lembrando que algumas destas verdades são necessárias no sentido de que seria impossível de conceber o contrário. Estas idéias se impõem a nós (BROCHARD, 1879, p. 40).

Para encerrar nossa pequena incursão filosófica sobre o *erro*, que desempenha naturalmente um importante papel na atividade avaliativa, destacamos duas das possibilidades de sua utilização didática: *usar os erros dos alunos como instrumentos para explorar o funcionamento da mente; aproveitá-los como elementos fundamentais para o desenvolvimento de uma disciplina* (CURY, 1994, p. 85). A última possibilidade destacada por Cury terá uma atenção especial no decorrer do trabalho.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Como Avaliar o *Erro* no Ensino do Cálculo

Os mecanismos de aquisição de conhecimento descritos por Brosseau (2002, p. 83), segundo ele, *podem ser aplicados à epistemologia ou a História das Ciências, assim como ao ensino e a aprendizagem*. Em ambos os casos, Brosseau discute a necessidade de considerarmos a noção de *obstáculo* relacionado ao conhecimento científico.

A importância atribuída por Brosseau à noção de *obstáculo* reside no fato de que este se manifesta, tanto na frente científica como na frente pedagógica, por erros. Questões acerca da natureza dos problemas abordados e sobre o conhecimento necessário em sua resolução, são alguns exemplos de situações que permitem o surgimento destes *obstáculos* durante a resolução de problemas no Cálculo.

Nos estudos de Bachelard em Física, Brosseau (2002, p. 83) relata que ele identificou:

> obstáculos da primeira experiência; obstáculos relativos ao conhecimento geral; obstáculos verbais; obstáculos do uso impróprio de imagens mentais familiares; obstáculos do conhecimento unitário e pragmático, dentre outros.

Em determinadas condições, os *obstáculos* identificados na Física por Gastón Bachelard, ocorrem também na Matemática. Neste contexto, Brousseau (2002, p. 84) diz que *um obstáculo é constituído aparentemente por erros*. Mas não em todo tipo de *erro*. Por exemplo, erros transitórios, erráticos ou esporádicos não constituem *obstáculos*. Por outro lado, erros persistentes, interconectados, indicam um *obstáculo*.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Vejamos um tipo de *obstáculo* no Cálculo que costumeiramente provoca incompreensões.

> Quando o aluno estudo Cálculo pela primeira vez, freqüentemente, ele encontrará objetos matemáticos fornecidos por exemplos e descritos por definições (PINTO, 1998, p. 25).

O aluno é colocado em contato com estas *definições formais*, paulatinamente no estudo de: *limites, derivada e integral*.

Concordamos com Pinto (1998, p. 25) quando adverte que *muitas destas definições são determinadas por conceitos, que podem ser adquiridos intuitivamente ou por experiência*. Mas é aí que temos o surgimento de *obstáculos*. De fato, dependendo da abordagem didática para a apresentação destas definições pelo professor, os alunos enfrentam sérios entraves para a compreensão destes conceitos.

De fato, mesmo matemáticos considerados brilhantes, como Newton e Leibniz, apresentavam compreensões distintas do mesmo conceito. Cotrill (1999, p. 4) lembra que *Newton não via a regra da cadeia como um teorema ou procedimento. E sim, como um algoritmo natural empregado em vários procedimentos*. Segundo a notação de Leibniz, a utilização dos *infinitesimais* por meio do pensamento analítico e geométrico, mantinha regra da cadeia implicitamente definida.

Mas seja no uso a definições ou teoremas como no caso da regra da cadeia, Sierpinska (1992, apud, PINTO, 1998, p. 26) *diz que o modo de introdução de conceitos, revertendo-se de* $conceito \rightarrow definição$ *para a forma* $definição \rightarrow conceito$ *é considerado um obstáculo epistemológico e pode causar grandes dificuldades*.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Vale sublinhar que, no ensino atual, evidenciamos um *obstáculo*, quando o aluno não consegue perceber a caracterização da *regra da cadeia* como um *teorema*, mas apenas como um procedimento algorítmico. Semelhantemente no caso dos *limites*, algumas regras operatórias são assumidas pelo professor, como um passe de mágica.

A importância na identificação destes *obstáculos* adquire importância no momento da avaliação da aprendizagem. É necessária a compreensão por parte do professor que, determinados procedimentos inadequados, podem possuir raízes no passado dos estudantes ou são conseqüência da natureza epistemológica de determinado conteúdo.

Metodologia, Procedimentos e *Análise a Priori* das Situações Problema

No tocante ao desenvolvimento metodológico, a *pesquisa participante* foi desenvolvida ao longo do ano de 2007, na disciplina *Cálculo Diferencial Integral*, do Curso de Engenharia Ambiental, no Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará – CEFET/CE, UNED de Maracanaú. Utilizamos uma *amostra* de 30 alunos, do 1º semestre. Adotamos o *estudo de caso* para a observação detalhada de um acontecimento específico (BOGDAN e BIKLEN, 1994, pg. 89), que envolve a relação aluno-professor-saber matemático. Os instrumentos de coleta de informações adotados foram: *entrevistas semi-estruturadas*, a *observação* e dois *questionários de investigação* (DE KETELE, J. M. & ROEGIERS, X, 1996, p. 31) aplicados juntamente com as avaliações. Finalmente, realizamos observações em sala de aula e no laboratório.

ISBN: 978-85-89872-42-3

A escolha das questões foi guiada a partir de dois referenciais: o primeiro foi consubstanciado a partir de nossa própria experiência didática com a disciplina, enquanto que o segundo tomou por base os estudos e investigações (AMADEI, 2005; BLOCH, 2000; COTTRILL, 1999; MAURICE, 2000; PICAZO, 2004; SILVA, 2001) realizados na área de investigação denominada Educação Matemática. Estes trabalhos, na sua maioria, apresentam com o foco principal no objeto matemático chamado de *limite*. Apresentamos resumidamente algumas das situações-problemas:

(1) Calcular a derivada de $h(x) = Cos(\frac{e}{\sqrt{x}})$

(2) Calcular o limite $Lim_{x\to 0^+}(1+sen(4x))^{Cotg(x)}$.

(3) Calcular $Lim_{x\to\infty}(\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}})$

(4) Tomando por base a representação do gráfico mostrada pelo computador. Avaliar o seguinte limite $Lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Ilustração 1: Exemplos de situações-problema

Análise *a priori* das situações:

Na 1ª questão, requeremos a utilização da regra da cadeia e da derivação do quociente . Na 2ª questão, após chamar $y = (1+sen(4x))^{Cotg(x)}$, o aluno deve utilizar propriedades da função $g(x) = \ln(x)$ e, finalmente, identificar as condições de utilização para a *Regra de L´Hopital*. Enquanto que na questão 3, exigimos a seguinte manipulação:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \frac{x\cdot(3+\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(2-\frac{5}{x^2})}} = \frac{x\cdot(3+\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(2-\frac{5}{x^2})}}.$$

Finalmente, no último caso, o aluno precisa aplicar algumas propriedades dos *produtos notáveis*

ISBN: 978-85-89872-42-3

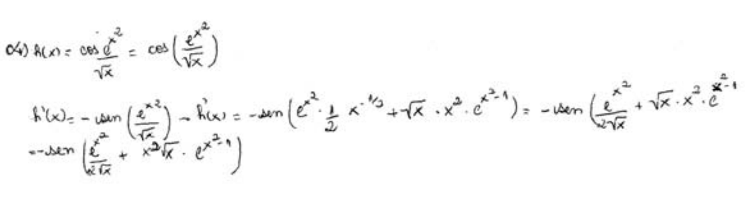
$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, para superar a *indeterminação* do tipo $Lim_{x\to\infty}(+\infty - \infty)$. Todavia, em todas as situações, a compreensão do aluno foi auxiliada pela representação no computador. O que seria inviável no ambiente lápis e papel.

Análise dos Protocolos dos Estudantes

Os trechos de avaliações exibidas abaixo nos fornecem exemplos de manifestação de *erros operacionais* dos estudantes. Estes *erros* podem se caracterizar-se: pelo emprego de "regras imaginárias" criadas pelos alunos, pela aplicação inadequada de teoremas, pelo uso do *raciocínio por analogia* inadequado.

Aluno 1: Evidenciamos abaixo a utilização inadequada da fórmula de derivação para a soma $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, em vez da derivação do quociente. É interessante a manipulação inicial, descrita por

$$\frac{Cos(e^{x^2})}{\sqrt{x}} = Cos(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}).$$



04) $h(x) = \frac{\cos e^{x^2}}{\sqrt{x}} = \cos\left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}\right)$

$h'(x) = -sen\left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}\right) \rightarrow h'(x) = -sen\left(e^{x^2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} + \sqrt{x} \cdot x^2 \cdot e^{x^2-1}\right) = -sen\left(\frac{e^{x^2}}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot x^2 \cdot e^{x^2-1}\right)$

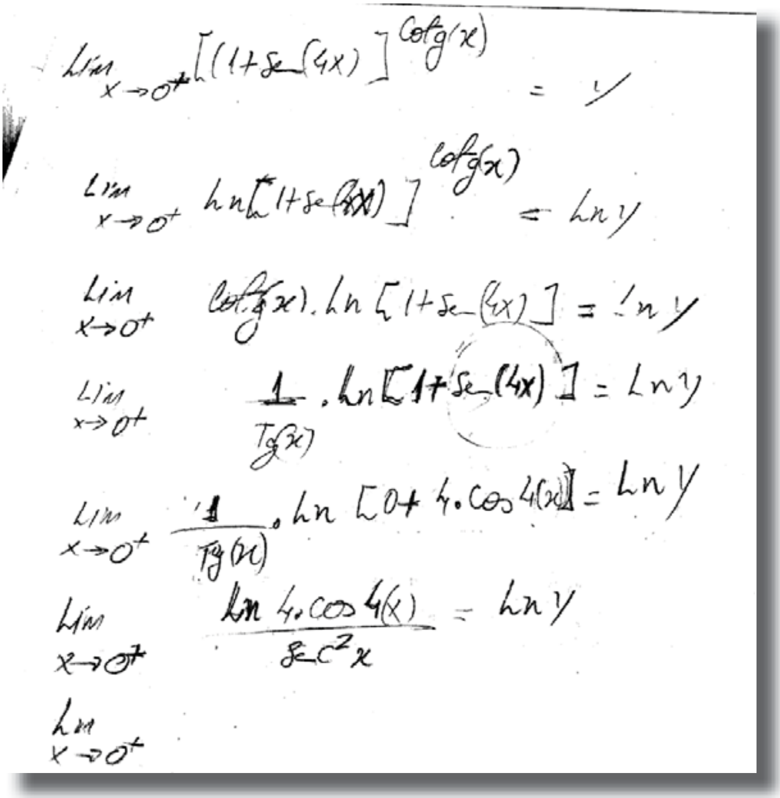
$= -sen\left(\frac{e^{x^2}}{2\sqrt{x}} + x^2\sqrt{x} \cdot e^{x^2-1}\right)$

Aluno 2: Na resolução inicial desta questão, chamando a seguinte expressão:

ISBN: 978-85-89872-42-3

$y=(1+sen(4x))^{Cotg(x)} \therefore Ln(y)=Ln[(1+sen(4x))^{Cotg(x)}] \rightarrow Ln(y)=Cotg(x)\cdot Ln[(1+sen(4x))]$

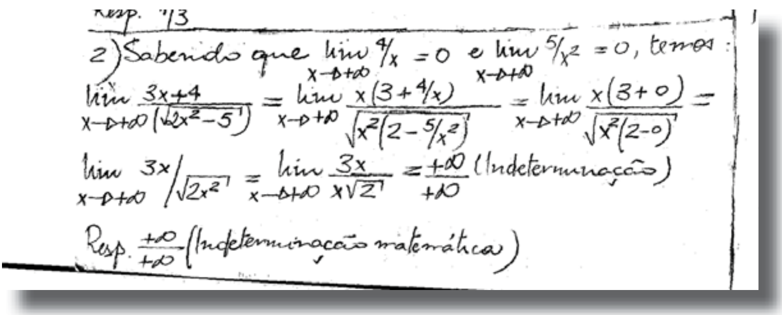
Agora, devemos tomar o limite em ambos os lados $Lim_{x\to 0^+}(Ln(y)) = Lim_{x\to 0^+}(Cotg(x)\cdot Ln[(1+sen(4x))])$. Observamos abaixo que o aluno 2, toma o processo de limite apenas do lado esquerdo da expressão.



Percebemos também na transição da 4ª para a 5ª linha, que o aluno deriva apenas o numerador e não deriva também a função do denominador, como prevê a regra de $L\acute{}Hopital$ $Lim_{x\to a}\dfrac{f}{g} = Lim_{x\to a}\dfrac{f\,'}{g\,'}$.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Aluno 3: É interessante a ressalva que o aluno 3 apresenta, como $Lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$. Por outro lado, o aluno manifesta um erro freqüente, que se constitui em calcular o limite por partes da expressão, avaliando o comportamento do quociente duas vezes, com o mesmo limite.



Resp. $1/3$

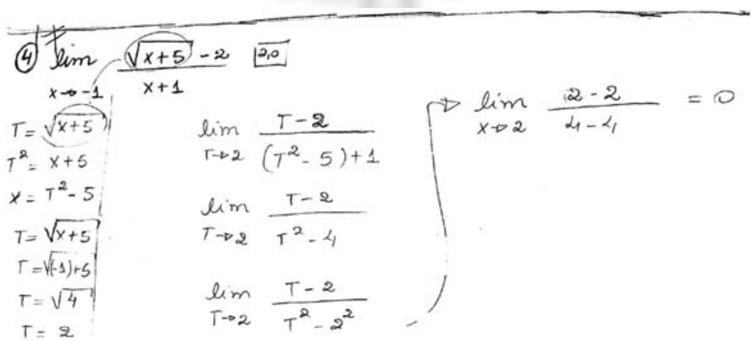
2) Sabendo que $\lim_{x \to +\infty} 4/x = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} 5/x^2 = 0$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{(\sqrt{2x^2-5})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(3+4/x)}{\sqrt{x^2(2-5/x^2)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(3+0)}{\sqrt{x^2(2-0)}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x/\sqrt{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x\sqrt{2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

Resp. $\frac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação matemática)

Aluno 4: No trecho da avaliação do aluno 4, observamos o que mesmo realiza com êxito a substituição, inclusive alterando a variação da variável de $x \to -1$ para $x \to 2$. Contudo, a última fatoração requerida para a eliminação da indeterminação não é realizada, além da igualdade absurda $Lim_{t \to 2} \frac{2-2}{4-4} = 0$.



(4) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$ $\boxed{2{,}0}$

$T = \sqrt{x+5}$

$T^2 = x+5$

$x = T^2 - 5$

$T = \sqrt{x+5}$

$T = \sqrt{(-1)+5}$

$T = \sqrt{4}$

$T = 2$

$$\lim_{T \to 2} \frac{T-2}{(T^2-5)+1}$$

$$\lim_{T \to 2} \frac{T-2}{T^2-4}$$

$$\lim_{T \to 2} \frac{T-2}{T^2-2^2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2-2}{4-4} = 0$$

ISBN: 978-85-89872-42-3

Aluno 5: O aluno consegue se livrar da indeterminação, caso tivesse tentado calcular diretamente o limite. Contudo, realiza uma manipulação inesperada:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = x^2+1-x^2$$

$$\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Análise das Entrevistas

Após a aplicação das avaliações, realizamos entrevistas *semi-estruturadas* com os sujeitos participantes, com a intenção de descrever e qualitativamente a manifestação dos *erros* presentes nos instrumentos. As perguntas foram direcionadas para compreender suas decisões em cada situação, o motivo do emprego de regras, a consciência da possibilidade ou não do emprego de teoremas e a capacidade de memorização de alguns resultados estudados em sala da aula.

Aluno 6: Algumas das fórmulas são complicadas.... não sei de onde elas vem...A fórmula da derivada do quociente é muito esquisita.

O aluno seguinte destaca sua dificuldade relativa à memorização das fórmulas freqüentemente adotadas no Cálculo.

ISBN: 978-85-89872-42-3

Aluno 8: Algumas fórmulas me parecem estranhas e eu tenho dificuldade em memorizar. Mas eu confundo a derivada da soma com a derivada do produto.

No estudo desta teoria ocorrem comportamentos estranhos das funções utilizadas. Parte deste comportamento é chamado de *indeterminação.* O próximo sujeito aponta sua dificuldade na operacionalização das questões diante do surgimento de alguma delas, como por exemplo ${}^{0}\!/_{0}$.

Aluno 11: Não sei por que aquela simplificação. Não compreendo o símbolo $\frac{0}{0}$, quando ele aparece não entendo mais nada.

considerações finais

Referendando-se em nossa experiência, poderíamos afirmar que a atividade de avaliar os erros dos alunos na disciplina de *Cálculo*, pode tornar-se uma tarefa relativamente simplificada, quando nos deixamos influencia pelo *formalismo* e, no atemos prioritariamente ao *pensamento algorítmico* (OTTE, 1991, p. 285).

Como sabemos esta corrente filosófica da Matemática, considerava como conceito central na Matemática, a noção de *sistema formal* (CURRY, 1983, p. 203). No caso do Cálculo, tal *sistema* é constituído por um conjunto de convenções e simbologias que carregam, perante os olhos dos alunos, um grande mistério em sua origem de raízes weierstrassianas.

A visão nebulosa em relação a alguns conteúdos da Matemática, não é um privilégio do aluno. Acreditamos

ISBN: 978-85-89872-42-3

que o professor, influenciado pelo *formalismo*, também enfrenta dificuldades em identificar determinados obstáculos. Neste sentido, Cury (1994, p. 65) adverte que

> existe uma relação entre a visão formalista e a avaliação: vista como um conjunto de regras que levam o aluno a produzir essas regras de forma rígida, sem falhas, sem desvios. (...) O que está em pauta não é, apenas, a correspondência entre uma forma de conceber a Matemática e uma forma de ensiná-la; é, também, a idéia da avaliação que está ligada a cada concepção.

Por outro lado, mesmo que o mestre não permaneça acomodado ao *ensino tradicional*, ou seja, um ensino de Matemática que segue o percurso: $definição \rightarrow teorema \rightarrow exercícios \rightarrow definição$, para ele desenvolver uma proposta de *avaliação qualitativa*, acreditamos na exigência da compreensão aprofundada de um dos objetos principais desta proposta, que se caracteriza pela compreensão do *erro*. Embora, a partir das colocações iniciais de Brochard, concluímos que a identificação e a compreensão da natureza do *erro*, não se constituem tarefas fáceis.

O ato de avaliar na aprendizagem de Cálculo exige experiência e a vigilância em relação à possibilidade da manifestação de uma enorme quantidade de erros relacionados à noção de *limite*. Neste estudo, mantivemos nossa atenção a determinados procedimentos e aplicação adequada de *teoremas* e regras operatórias de *limites*.

A importância desta análise é justificada por Tall, D. e Schwarzenberger, L. E. (1978, p. 9) quando lembram que *a aritmética dos limites é usualmente tratada no primeiro ano de universidade, e os estudantes tem igualmente um período pesado de provas*. Ele lembra que algumas

ISBN: 978-85-89872-42-3

propriedades operatórias intuitivas, como $Lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{t_n}$,são usadas na prática pelos estudantes, contudo, *sua verificação formal pode impraticável no primeiro ano de universidade*.

Além disso, a escolha deste objeto matemático foi influenciada pela tendência predominante no ensino de Cálculo que se caracteriza, segundo Silva (2001, p. 62), pela tradição do ensino dos limites. Nossa intenção foi identificar alguns destes procedimentos recorrentes e não aleatórios presentes nas estratégias dos alunos. Para um professor iniciante, os *erros* apontados nos protocolos dos alunos podem parecer banais, contudo, para nós, eles carregam uma incompreensão antiga, conseqüência da contradição entre modelo formal estudado e suas representações, crenças e imagens mentais. Em relação a esta incompreensão, nossa suspeita durante as observações foi confirmada posteriormente ao decorrer das entrevistas.

Cornu (1991, apud, TALL, 2002, p. 154) ratifica nossa última afirmação quando sublinha que *antes do ensino formal de limites, os alunos já possuem certo número de idéias, imagens e algum conhecimento, a partir da experiência diária*. A incoerência entre as representações, imagens mentais e as formulações lógicas, como as *definições formais*, relacionadas particularmente à noção de limites, podem gerar graves conflitos aos estudantes, conforme Tall (1988, p. 2).

Finalmente, se desejamos desenvolver uma proposta de avaliação no Cálculo que contemple de forma satisfatória a evolução da aprendizagem conceitual dos alunos, devemos, como lembra Vergnaud (1996, p. 212), considerar três aspectos: considerar a natureza das si-

ISBN: 978-85-89872-42-3

tuações que propiciam o sentido da noção de *limite*; as formas e notações corriqueiras e exigidas neste sistema formal e, finalmente, as operações necessárias que caracterizam a operacionalidade do conceito de limites.

Dentre os três elementos apontados por Vergnaud, se observarmos o sistema de representação simbólico usual do Cálculo, que se manifestou como um entrave para os estudantes, ao longo da pesquisa, nós sentiremos sérias dificuldades para avaliar o sentido dos seus erros. Tais dificuldades são devidas ao caráter sintático e semântico da linguagem. Neste sentido, Maurice (2000, p. 248) explica que um *elemento importante que devemos distinguir nas explicações dos alunos é o elemento semântico. No ensino de Matemática secundário, a expressão "indeterminação" não existe e "impossível" é pouco freqüente ou raramente definido. Estas expressões não se referem á nada de concreto da realidade*. Portanto, a vigilância redobrada para este e outros aspectos, nunca será demais, se tencionamos acompanhar e avaliar razoavelmente a evolução cognitiva dos nossos educando.

Bibliografia

AMADEI, F. L. **O infinito: um obstáculo epistemológico no estudo da Matemática** (dissertação de mestrado), PUC/SP, 2005.

BLOCH, I. **L´enseignement de l´analyse à la charnière lycée/université: saviors, connaissances et conditions relatives à la validation** (these de doctorat), Université Bordeaux I, 2000.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**, Porto: Editora Porto, 1994.

ISBN: 978-85-89872-42-3

BROCHARD, V. **De l´erreur** (thése de doctorat), Paris: Faculté de Lettres de Paris, 1879.

BROSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactiques de mathematiques 1970 – 1990**, London: Klumer Academic Publishers, 2002.

CORNU, B. **Limits**, In: TALL, D. (Ed) **Advanced Mathematical Thinking**, Londres: Klumer Academic Press, 2002, p. 153-165.

COTTRILL, J. F. **Students understanding of the concept of chain rule in First Year Calculus and the relations to their understanding of composition of functions** (thesis), Purdue University, 1999.

CURRY, H. **Remarks on definition and the nature of Mathematics**, In: **Philosophy of Mathematics**, Bernacef, P. e Putnam, H. New York: Oxford University Press, 1983, p. 201-207.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos** (tese de doutorado), UFRGS, 1994.

DE KETELE, J. M. & ROEGIERS, X. **Méthodologie du recueil d´informations: fondements des méthodes d´observations, des questionnaires, d´interviews**, Paris: De Boeck, 1996.

FULVIA, F. e PEHKONEN, E. **Rethinking Characterizations of Beliefs**, In: GILAH, L. PEHKONEN, E. TORNER, G. **Beliefs: a hidden variable in Mathematics Education?** New York: Klumer Academic Publishers, vol. 31, 2002.

HERSH, R. **What is Mathematics Really? ,** New York: Oxford University Press, 1997.

MARIN, D. **Contribution a une reflexion sur L´idée du Vrai dans l´enseignement des Mathematiques en classes de Quatrieme et Troisieme de College** (these de doctorat), Limiere Lyion II, 2003.

ISBN: 978-85-89872-42-3

MAURICE, L. **Les idées d´éleves du collegial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant l´intervenir le zero et l´infini** (thèse de doctorat), Université Laval, Canadá, 2000.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**, São Paulo: UNESP Editora, 1991.

PICAZO, J. T. **Evaluation de Habilidades Cognitivas en La Résolución de Problemas Matemáticos** (tesi doctoral), Universitat de Valência, 2004.

PINTO, M. F. **Student´s understanding of real analysis** (thesis), University of Warwick, 1998.

POINCARÉ, H. **La valeur de la Science**, Paris: Ernest Flammarion, 1905.

SILVA, F. R. A **Tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos** (tese de doutorado), UNICAMP, 2001.

TALL, D. e SCHWARZENBERGER, L. E. **Conflicts in the learning of Real and Limits**, Mathematical Teaching, 82, 1978, p. 44-49.

TALL, D. **Concept Image and Concept Definition**, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, 1988, p. 37-41.

VERGNAUD, G. **La Théorie des Champs Conceptuels**, In: Brun, J. **Didactique des Mathemaiques**, Paris Delachaux et Niéstle, 1996.

ISBN: 978-85-89872-42-3

ANEXO I:

Comportamento geométrico de algumas situações-problemas exploradas com o auxílio informático.

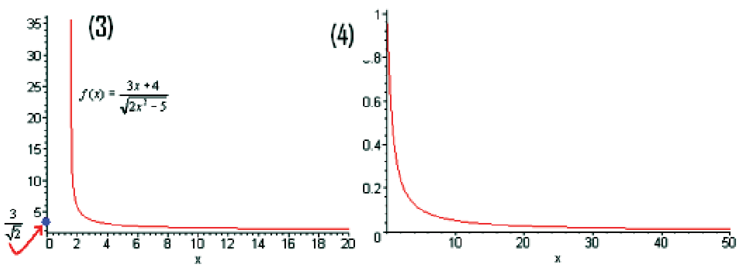
(1) Calcular a derivada de $h(x) = Cos(\frac{e}{\sqrt{x}})$

(2) Calcular o limite $Lim_{x \to 0^+}(1 + sen(4x))^{Cotg(x)}$.

(3) Calcular $Lim_{x \to +\infty}(\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}})$

(4) Tomando por base a representação do gráfico mostrada pelo computador. Avaliar o seguinte limite $Lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$

Na avaliação do limite $Lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Vemos abaixo o seu gráfico que foi apresentado aos alunos no momento da avaliação. No quadro (4) vemos que a imagem da função se aproxima de zero.



ISBN: 978-85-89872-42-3