



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

FRANCISCO GILBERTO LIMA PAIVA

**UMA ANÁLISE DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA QUALIDADE DE
MALHAS GERADAS EM PARALELO**

RUSSAS

2018

FRANCISCO GILBERTO LIMA PAIVA

UMA ANÁLISE DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA QUALIDADE DE MALHAS
GERADAS EM PARALELO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia de Software
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia de Software.

Orientador: Prof. Dr. Markos Oliveira
Freitas

RUSSAS

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- P168a Paiva, Francisco Gilberto Lima.
Uma análise da Transformada de Hotelling na qualidade de malhas geradas em paralelo / Francisco Gilberto Lima Paiva. – 2018.
51 f. : il. color.
- Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, Curso de Engenharia de Software, Russas, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas.
1. Análise de Componentes Principais. 2. Transformada de Hotelling. 3. Decomposição de domínio. 4. Qualidade de malhas. I. Título.

CDD 005.1

FRANCISCO GILBERTO LIMA PAIVA

UMA ANÁLISE DA TRANSFORMADA DE HOTELLING NA QUALIDADE DE MALHAS
GERADAS EM PARALELO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Engenharia de Software
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Engenharia de Software.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Daniel Márcio Batista de Siqueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ms. Rafael Fernandes Ivo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, pela motivação necessária para continuar buscando meus sonhos.

Aos meus pais, Antônia e Antônio, e meu avô Joaquim, por todo o carinho e incentivo e cuidado para que eu pudesse chegar até aqui. Aos meus irmãos, Gilson e Jerson, pelo apoio sempre que eu precisava. A Leiliane, pela paciência, pelo apoio, pela compreensão durante esses anos e por tentar me fazer uma pessoa melhor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Markos Oliveira Freitas, por me guiar neste trabalho, pela paciência, e por todo o apoio. Agradeço aos professores Daniel e Rafael por aceitarem estar na minha banca e contribuírem para com este trabalho.

Aos meus colegas Wallison e Davidson, que contribuíram da melhor forma para este trabalho. Agradeço a todos os professores, por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Agradeço aos meus amigos que me acompanharam e que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

“Talvez seja este o segredo. Não é o que fazemos,
mas o motivo por que fazemos.”

(Tyrion Lannister, *Game of Thrones*, 2011)

RESUMO

Malhas triangulares são amplamente utilizadas em diversas aplicações para estudos e simulações do mundo real na computação. Buscando gerar malhas cada vez mais refinadas, propostas de gerações em paralelo de malhas são apresentadas na literatura. Porém, um dos grandes problemas é a maneira como será feita a decomposição do domínio em diversos subdomínios para serem distribuídos entre os processadores/*threads* responsáveis por gerar a malha. Uma má divisão do domínio pode acarretar em um desequilíbrio da carga ou deteriorar a qualidade da malha. Este trabalho propõe uma técnica para melhorar o particionamento, utilizando conceitos de Análise de Componentes Principais e Transformações Lineares, com o objetivo de avaliar a influência da técnica na qualidade dos elementos gerados. Ao final, este trabalho apresenta os resultados estatísticos que permitem avaliar como a técnica afetou positivamente a qualidade da malha gerada em modelos que apresentam uma orientação dos eixos principais desalinhada aos eixos globais.

Palavras-chave: Análise de Componentes Principais. Transformada de Hotelling. Decomposição de domínio. Qualidade de malhas.

ABSTRACT

Triangular meshes are widely used in various applications for real-world computer studies and simulations. Seeking to generate increasingly refined meshes, proposed parallel mesh generation methods have been presented in the literature. However, one of the largest problems is how the domain decomposition will be performed in several subdomains to be distributed among the processors /threads responsible for generating a mesh. A bad division of the domain can lead to a load imbalance or can deteriorate the quality of the mesh. This work proposes a technique to improve the partitioning, using concepts of Principal Component Analysis and Linear Transformations, with the objective of evaluating the influence of the technique on the quality of the generated elements. In the end, this work presents statistical results that show how this technique affected positively the quality of the mesh generated in models that present an orientation of the local axes disaligned to the global axes.

Keywords: Principal Component Analysis. Hotelling transform. Domain Decomposition. Mesh Quality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de uso de malhas.	12
Figura 2 – Exemplo de Malhas de interface.	13
Figura 3 – Exemplo de árvore BSP na decomposição de domínio.	16
Figura 4 – Geração de malha de acordo com a BSP.	17
Figura 5 – Exemplos de particionamento no eixo Y (a) e no eixo X (b e c) com a região em cada processo (verde e amarelo) e a região de interface (vermelho).	17
Figura 6 – Geração paralela de malha com interface <i>a posteriori</i>	19
Figura 7 – Ilustração do círculo inscrito e circunscrito ao triângulo a medida que ele se deforma.	19
Figura 8 – Exemplos de tetraedro de boa qualidade e tetraedros de má qualidade.	20
Figura 9 – Componentes principais de um conjunto de variáveis.	21
Figura 10 – Alinhamento dos autovetores com os eixos globais	23
Figura 11 – Comparativo entre as métricas de qualidade de tetraedros	26
Figura 12 – Componentes principais para o modelo de viga (2D).	28
Figura 13 – Transformada de Hotelling aplicada ao modelo.	30
Figura 14 – Modelos.	31
Figura 15 – Casos de teste para o modelo da Viga.	32
Figura 16 – Casos de teste para o modelo da Mão.	32
Figura 17 – Casos de teste para o modelo do Coelho.	33
Figura 18 – Efeito da transformada de Hotelling para o modelo da Viga [Viga-60.30.60]	33
Figura 19 – Maior discrepância para [Viga-0.30.30].	34
Figura 19 – Maior discrepância para [Viga-0.30.30] (continuação).	35
Figura 20 – Menor discrepância para [Viga-0.60.90].	36
Figura 21 – Comparativo entre as diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para os casos de teste da Viga no algoritmo sequencial.	36
Figura 22 – Maiores discrepâncias para o modelo da Viga com 30° e 60° no eixo X.	37
Figura 23 – Comparativo entre as diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para os casos de teste da Mão (coluna da esquerda) e para os casos de teste do Coelho (coluna da direita) no algoritmo sequencial.	38
Figura 24 – Maior discrepância para o modelo da Mão (algoritmo sequencial).	39
Figura 25 – Menor discrepância para o modelo da Mão (algoritmo sequencial).	39

Figura 26 – Maior discrepância para o modelo do Coelho (algoritmo sequencial).	40
Figura 27 – Menor discrepância para o modelo do Coelho (algoritmo sequencial).	40
Figura 28 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Viga no algoritmo paralelo.	41
Figura 28 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Viga no algoritmo paralelo (continuação).	42
Figura 29 – Maior discrepância para [Viga-0.90.30] (algoritmo paralelo).	43
Figura 30 – Menor discrepância para Viga com 0° no eixo X [Viga-0.30.90].	44
Figura 31 – Maiores discrepâncias para Viga com 30° e 60° no eixo X.	45
Figura 32 – Menores discrepâncias para Viga com 30° e 60° no eixo X.	46
Figura 33 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Mão no algoritmo paralelo.	47
Figura 38 – Maiores discrepância para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo).	47
Figura 34 – Maiores discrepâncias para o modelo da Mão com 0°, 30° e 60° no eixo X.	48
Figura 35 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo do Coelho no algoritmo paralelo.	49
Figura 36 – Maior discrepância para Coelho com 0° no eixo X (algoritmo paralelo).	49
Figura 37 – Menor discrepância para o modelo do Coelho com 0° no eixo X (algoritmo paralelo).	50
Figura 38 – Maiores discrepância para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo) (continuação).	50
Figura 39 – Menores discrepâncias para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo).	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	14
<i>1.1.1</i>	<i>Objetivo Geral</i>	14
<i>1.1.2</i>	<i>Objetivos Específicos</i>	14
1.2	Metodologia	14
1.3	Organização do Trabalho	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TÉORICA	16
2.1	Decomposição de domínio	16
2.2	Técnica de geração em paralelo de malhas	18
2.3	Métricas de qualidade de tetraedros	19
2.4	Análise de Componentes Principais	20
2.5	Transformada de Hotelling	22
3	TRABALHOS RELACIONADOS	24
4	TRANSFORMADA DE HOTELLING APLICADA NA TÉCNICA DE- COMPOSIÇÃO DO DOMÍNIO	27
4.1	Técnica proposta	27
<i>4.1.1</i>	<i>Cálculo do vetor da média</i>	27
<i>4.1.2</i>	<i>Cálculo da matriz de covariância</i>	28
<i>4.1.3</i>	<i>Autovalores e autovetores</i>	28
<i>4.1.4</i>	<i>Transformada de Hotelling</i>	29
4.2	Qualidade da malha	30
5	METODOLOGIA E RESULTADOS	31
5.1	Metodologia	31
5.2	Resultados	34
<i>5.2.1</i>	<i>Resultados para o algoritmo sequencial</i>	34
<i>5.2.1.1</i>	<i>Viga</i>	34
<i>5.2.1.2</i>	<i>Modelos da Mão e do Coelho</i>	37
<i>5.2.2</i>	<i>Resultados para o algoritmo paralelo</i>	40
<i>5.2.2.1</i>	<i>Viga</i>	41
<i>5.2.2.2</i>	<i>Modelos da Mão e do Coelho</i>	44

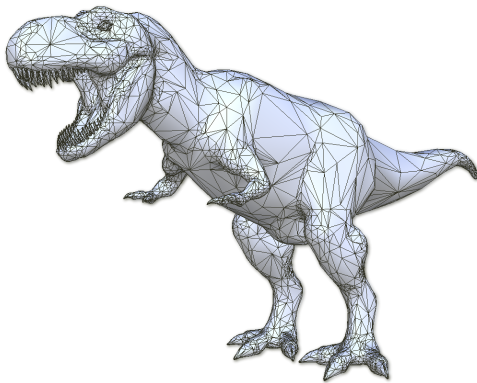
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	52
6.1	Contribuições do trabalho	52
6.2	Trabalhos futuros	52
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Malhas são amplamente utilizadas como uma base para representar geometrias em uma variedade de aplicações (HJELLE; DÆHLEN, 2006), como em Computação Gráfica (CG) (Figura 1a), Sistemas de Informações Geográficas (SIG) (Figura 1b), Projetos Assistidos por Computadores (ou *Computer Aided design*, CAD) (Figura 1c) ou em Métodos de Elementos Finitos (MEF) (Figura 1d).

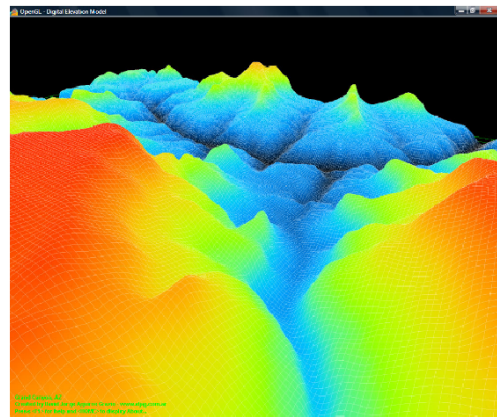
Figura 1 – Exemplos de uso de malhas.

(a) Malha na computação gráfica (modelo t-rex).



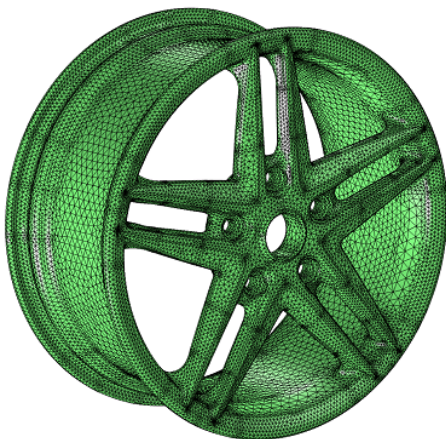
Fonte: <<http://www.topologica.org>>.

(b) Malha de sistemas de informações geográficas (*Grand Canyon*, EUA).



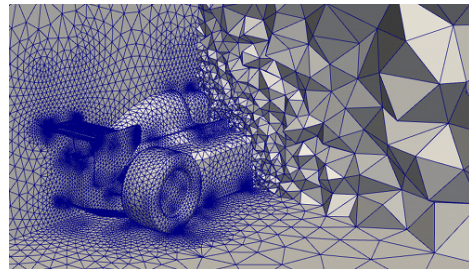
Fonte: <www.mcrenox.com.ar>.

(c) Malha de projetos assistidos por computador (roda).



Fonte: <<https://br.comsol.com/>>.

(d) Malha de engenharia (carro de corrida).



Fonte: <<https://www.symscape.com>>.

A geração de malhas de elementos finitos consiste em dividir o domínio em sub-

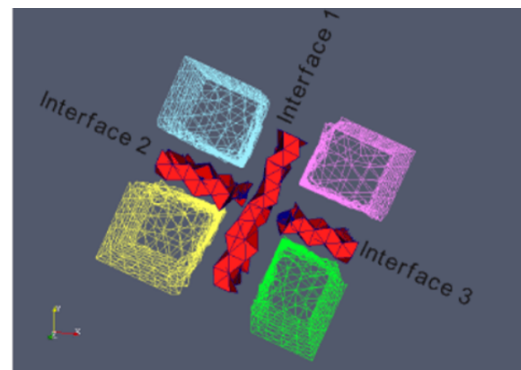
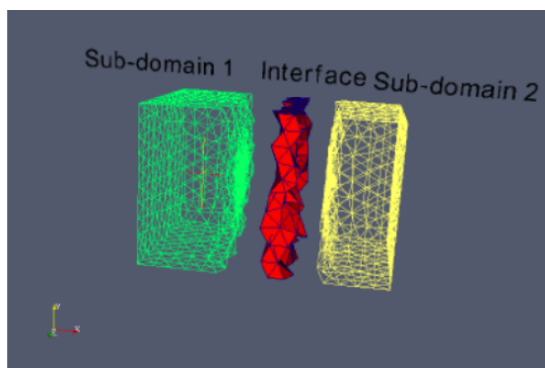
domínios, em forma de triângulos ou quadriláteros, facilitando estudos e simulações. Para um melhor estudo dos fenômenos físicos, a qualidade da malha é um ponto-chave (BOROUCHAKI; GEORGE, 2000), ou seja, o ideal é que a malha seja formada por elementos de boa qualidade. Para malhas isotrópicas triangulares em duas dimensões (2D) ou tetraédricas em três dimensões (3D), que são os casos estudados neste trabalho, um elemento é considerado bom quando ele é próximo do equilátero.

Com a necessidade de gerar malhas cada vez mais refinadas para melhor representar o domínio, é necessário o uso de mais processos, permitindo uma geração paralela de malhas (FREITAS *et al.*, 2016). Para realizar esta Computação de Alto Desempenho, é necessário realizar um particionamento do modelo. Entretanto, trabalhos relacionados como Neto *et al.* (2001), Wang e Yu (2011) e Freitas *et al.* (2016) apresentam formas para geração de malhas com particionamentos baseados em coordenadas globais, ou seja, o plano de particionamento é paralelo a um dos eixos X, Y ou Z. Isso pode acarretar em um desequilíbrio da divisão entre os processos, ou ainda, no aumento da região que forma a fronteira entre os dois subdomínios, chamada de interface (Figura 2a), no momento da decomposição do domínio. Isso pode acontecer, por exemplo, em modelos que apresentam uma orientação dos eixos principais desalinhada ao sistema de coordenadas global. Sendo assim, o ideal é que o particionamento seja realizado com base na orientação do modelo (Figura 2b).

Figura 2 – Exemplo de Malhas de interface.

(a) Malhas de superfície de dois subdomínios e malha gerada na interface.

(b) Plano de particionamento com malha de interface alinhada ao modelo.



Fonte: Adaptado de Zagaris *et al.* (2009).

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal avaliar a definição de um novo sistema de coordenadas baseado nas coordenadas do modelo e suas consequências na qualidade final da malha gerada pela técnica descrita em Freitas *et al.* (2016). Embora a definição do plano de partição esteja intimamente ligada à distribuição uniforme de carga, neste trabalho, busca-se avaliar a influência da técnica proposta na qualidade da malha, e não o melhoramento na divisão de carga. Entretanto, espera-se que, como decorrência do novo sistema de coordenadas, a divisão da carga de trabalho seja mais equilibrada e, conseqüentemente, que o tempo de execução total da técnica seja menor.

1.1.1 *Objetivo Geral*

Analisar a influência da técnica de Análise de Componentes Principais juntamente com a Transformada de Hotelling na qualidade da malha gerada em paralelo para qualquer orientação do modelo.

1.1.2 *Objetivos Específicos*

- Apresentar uma técnica que visa melhorar a distribuição de carga, e conseqüentemente, a qualidade da malha em gerações paralelas
- Fornecer os resultados sobre a malha gerada com a aplicação da técnica em modelos que não estão alinhados ao eixos canônicos.
- Fornecer resultados comparativos entre a qualidade da malha gerada com e sem a aplicação da Transformada de Hotelling.

1.2 Metodologia

Devido à natureza da pesquisa realizada, o trabalho será voltado para uma avaliação da adaptação da Transformada de Hotelling para auxiliar na técnica de decomposição de domínio de Freitas *et al.* (2016) visando o melhoramento da técnica.

Para isso, após definida a problemática, e sabendo das aplicações e estudos de componentes principais, a partir de revisões de trabalhos na literatura, pôde-se chegar até a técnica que será descrita na Seção 4. Futuramente, pretende-se utilizar a métrica descrita na

Seção 2.3 para obter os resultados necessários para validar ou não a técnica descrita.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em seis seções. Na Seção 2, é apresentada a fundamentação teórica necessária para compreender o restante do documento. Na Seção 3, relata algumas semelhanças e diferenças entre trabalhos relacionados e o presente trabalho, e a Seção 4 apresenta a técnica a ser utilizada e como será feita a avaliação dos elementos. Na Seção 5, são apresentados os resultados obtidos, e por último, na Seção 6, são apresentadas as conclusões acerca do trabalho e algumas sugestões de trabalhos futuros.

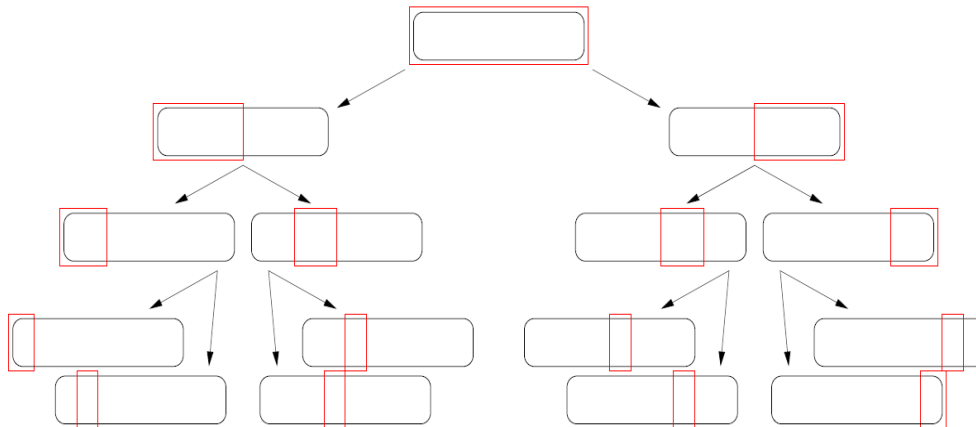
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção cita os conceitos importantes necessários para o desenvolvimento deste trabalho. De início, contextualiza-se sobre decomposição de domínio, geração em paralelo de malhas e qualidade de tetraedros, em seguida, são apresentadas a Análise de Componentes Principais e Transformada de Hotelling.

2.1 Decomposição de domínio

Para haver uma geração em paralelo de malhas, é necessário que haja uma decomposição de domínio, ou seja, que o domínio de entrada seja particionado (ou decomposto) em subdomínios, para que sejam distribuídos entre os diferentes processos ou entre as diferentes *threads* (Figura 3). Estes, por sua vez, serão responsáveis pela geração de malha em cada subdomínio (Figura 4a). As regiões de malha entre os subdomínios são chamados de interface (Figura 4b).

Figura 3 – Exemplo de árvore BSP na decomposição de domínio.



Fonte: (FREITAS *et al.*, 2016).

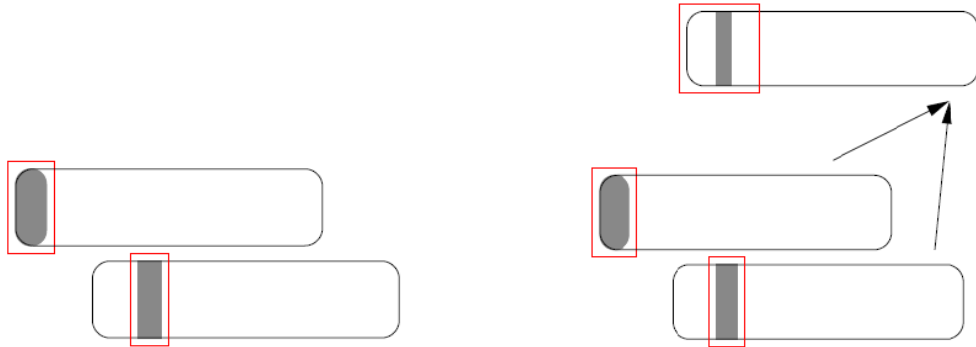
A decomposição de domínio é, geralmente, baseada no cálculo de uma estimativa de carga. Em Freitas *et al.* (2016), essa estimativa é feita em função da quantidade de elementos gerados. Pela dificuldade de se calcular o número de elementos gerados a partir do domínio de entrada, ou seja, da superfície do modelo, é feita uma estimativa dessa carga, com base em estruturas auxiliares, como uma *Octree*, no caso de Freitas *et al.* (2016).

Buscando o melhor equilíbrio, a busca pelo posicionamento do plano de corte ocorre em duas etapas. Na primeira, é feito um teste de particionamento em cada um dos três eixos globais, X, Y e Z, procurando encontrar a melhor distribuição de carga entre os dois subdomínios

Figura 4 – Geração de malha de acordo com a BSP.

(a) Geração das malhas em dois subdomínios.

(b) Geração da malha de interface.



Fonte: (FREITAS *et al.*, 2016).

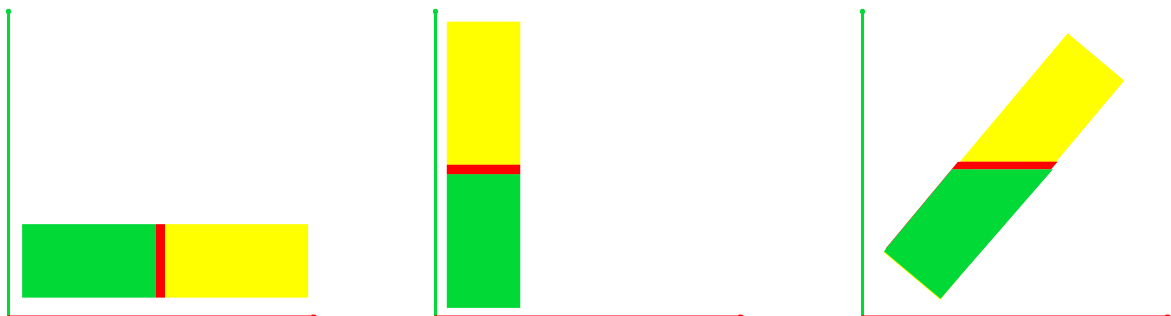
de cada eixo. Na segunda etapa, é escolhida a melhor decomposição dentre os três eixos testados. Essa segunda etapa leva em conta não apenas a estimativa da carga gerada nos subdomínios, mas também as cargas geradas nas interfaces de cada um (Figura 5).

Figura 5 – Exemplos de particionamento no eixo Y (a) e no eixo X (b e c) com a região em cada processo (verde e amarelo) e a região de interface (vermelho).

(a) Modelo alinhado ao eixo X.

(b) Modelo alinhado ao eixo Y.

(c) Modelo desalinhado aos eixos X e Y.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Para a definição de qual é o melhor eixo, leva-se em consideração a estimativa da carga de interface, pois uma interface muito pesada pode degradar o tempo de execução da técnica de geração paralela, mesmo que os dois subdomínios estejam perfeitamente equilibrados. Assim, nem sempre a escolha de um eixo que distribui a carga de maneira mais uniforme é a melhor opção. Se a carga de interface for mais leve em um determinado eixo do que em outro,

mesmo que este outro distribua melhor a carga, é possível que seja escolhido o eixo com menor estimativa de carga de interface. Logo, deve haver um balanceamento entre equilibrar a carga dos dois subdomínios e minimizar a carga de interface. Outro problema além do tempo de execução é que, quando há uma carga de interface muito pesada, a malha de interface pode apresentar uma dificuldade maior para ser gerada, influenciando a qualidade dos elementos gerados.

2.2 Técnica de geração em paralelo de malhas

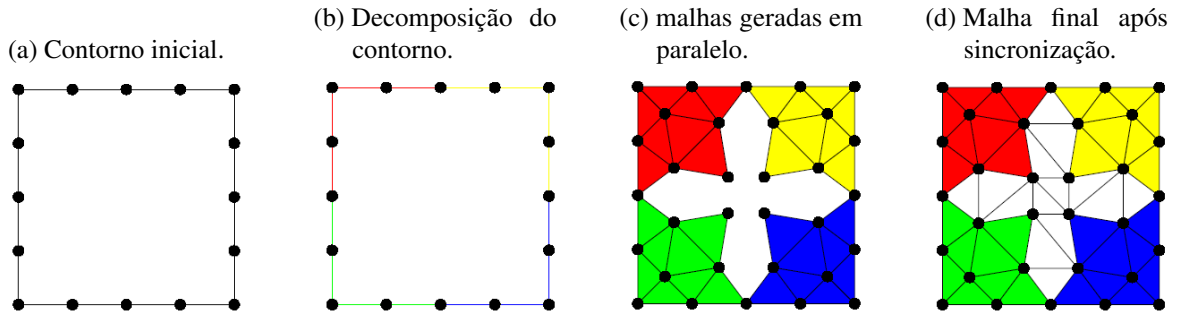
Existem várias técnicas para geração de malhas, entre elas, a técnica paralela apresentada em Freitas *et al.* (2016), que consiste na divisão do domínio de entrada para diferentes processos/*threads*. Em cada subdomínio, a malha é gerada por uma técnica sequencial conhecida como avanço de fronteira, na qual a malha é gerada a partir das restrições que formam o contorno da região.

Na técnica de avanço de fronteira, parte-se do contorno especificado da região (Figura 6a), e são gerados elementos a partir desta. À medida que elementos são gerados, a fronteira é atualizada. O algoritmo termina quando não há mais fronteira, indicando que a região foi totalmente preenchida, ou em casos raros, quando não há possibilidade de gerar novos elementos mesmo havendo fronteira, o que indica que o algoritmo falhou. Isso acontece somente no caso tridimensional, pois é sempre possível gerar uma malha triangular 2D, qualquer que seja a fronteira, e mesmo que essa malha não seja de boa qualidade.

Existem duas principais técnicas de geração em paralelo de malhas. Na primeira, a malha de interface é gerada antes das malhas no interior de cada subdomínio. Por isso, essa técnica é chamada de *a priori*. Na segunda, a malha de interface é gerada depois de geradas as malhas no interior de cada subdomínio. Essa técnica é chamada de *a posteriori*.

Quando trabalhada em paralelo, a técnica *a posteriori* de Freitas *et al.* (2016) deve respeitar um limite reservado para a ligação entre os subdomínios (Figura 6c). Cada malha de superfície é gerada por um determinado processo, e posteriormente, um ou vários processos são responsáveis pela sincronização entre os subdomínios (Figura 6d).

Figura 6 – Geração paralela de malha com interface *a posteriori*.



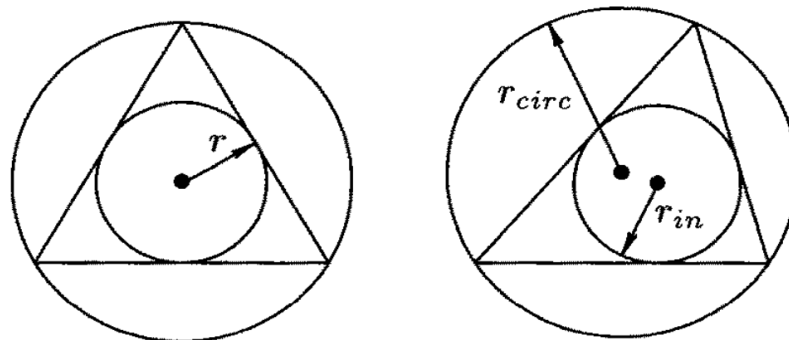
Fonte: (FREITAS *et al.*, 2016).

2.3 Métricas de qualidade de tetraedros

Para estudos mais precisos em MEFs com malhas isotrópicas, é essencial que os elementos da malha sejam os mais regulares possíveis. Nesse caso, os triângulos e os tetraedros considerados de boa qualidade são aqueles de formato próximo do equilátero. Métricas de qualidades de tetraedros são usadas para avaliar a qualidade de tetraedros gerados em malhas de elementos finitos (LIU; JOE, 1994).

A métrica utilizada neste trabalho é conhecida como razão dos raios ρ , definida como $3r_{in}/r_{circ}$, onde r_{in} e r_{circ} são o raio da esfera inscrita e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro, respectivamente (no caso 2D, a métrica é $2r_{in}/r_{circ}$, relativos aos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente, como é apresentado na Figura 7). Nessa métrica, a medida que o triângulo/tetraedro se torna mais distante do equilátero, o valor resultante se aproxima de zero. Para determinar a partir do resultado dessa métrica, se um elemento é bom ou ruim, este trabalho utiliza três faixas de valores.

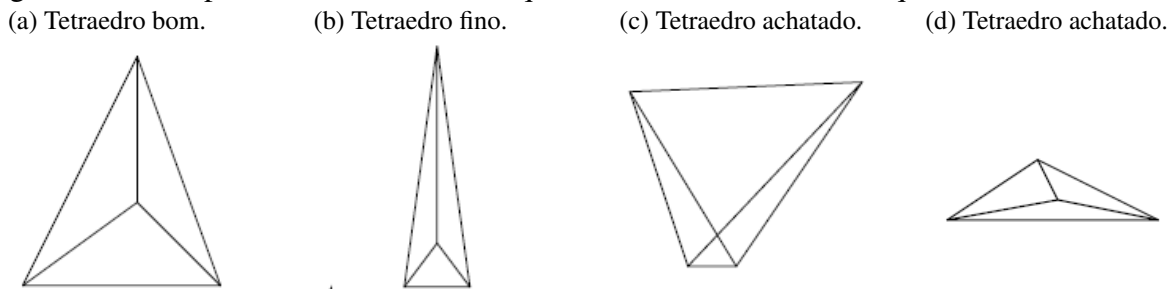
Figura 7 – Ilustração do círculo inscrito e circunscrito ao triângulo a medida que ele se deforma.



Fonte: Adaptado de Liu e Joe (1994).

Elementos com uma qualidade $\rho = 1$ são elementos equiláteros, ou seja, considerados com qualidade perfeita. Assim, elementos de qualidade entre $0,7 \leq \rho < 1,0$ são considerados bons elementos. Elementos de qualidade entre $0,3 \leq \rho < 0,7$ são elementos de qualidade média e elementos de qualidade $0,0 \leq \rho \leq 0,3$ são elementos ruins. Triângulos/tetraedros de qualidade $\rho \approx 0$ são deformados, ou seja, geometricamente distorcidos em um ponto, um segmento de reta, ou um triângulo (no caso de um tetraedro deformado) (Figura 8).

Figura 8 – Exemplos de tetraedro de boa qualidade e tetraedros de má qualidade.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

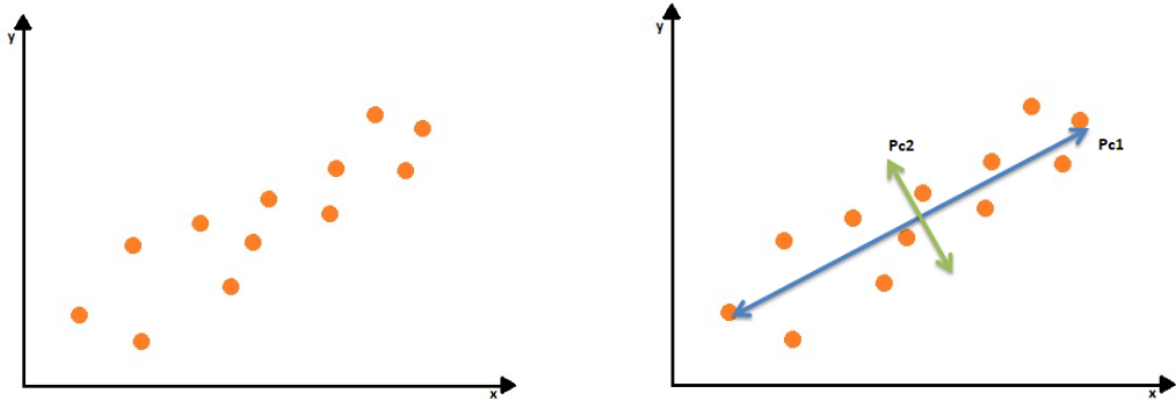
2.4 Análise de Componentes Principais

Um dos métodos estatísticos de múltiplas variáveis mais populares é a Análise de Componentes Principais (PCA), também chamada de *transformada discreta de Karhunen-Loève* (KLT) ou ainda *transformada de Hotelling*, em homenagem respectivamente a Kari Karhunen, Michel Loève e Harold Hotelling (CONCI *et al.*, 2008). Introduzida primeiramente por Pearson (1901), a PCA consiste em encontrar um conjunto de combinações lineares que permite observar a maior variação dos dados. A primeira componente principal é a combinação linear com maior variância, pois é a dimensão na qual as variáveis estão dispersas ao máximo. A segunda componente principal é combinação com maior variância que seja ortogonal a primeira componente. A terceira componente principal é a combinação com maior variância que seja ortogonal às duas anteriores, e assim por diante (Figura 9).

Para se obter as componentes principais de modelos tridimensionais, a PCA trabalha com vetores do tipo $x_i = [a, b, c]$, onde os valores iniciais são as coordenadas dos vértices que formam o modelo. Após obter todos os vetores dos vértices, é calculado o seu ponto médio, dado por

$$M_x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (2.1)$$

Figura 9 – Componentes principais de um conjunto de variáveis.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

que determinará o centroide do objeto.

Para determinar a relação entre os dados é necessário calcular a matriz de covariância, método esse que serve para medir o grau de dependência entre as variáveis, em que variáveis independentes possuem covariância zero. A matriz é calculada da seguinte forma:

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.2)$$

em que X é a primeira dimensão em análise e Y é a segunda.

Para uma análise em mais de 2 dimensões, é necessário ter a covariância para cada par de dimensões. Para três dimensões a matriz terá o seguinte formato:

$$C_x = \begin{bmatrix} Cov(x,x) & Cov(x,y) & Cov(x,z) \\ Cov(y,x) & Cov(y,y) & Cov(y,z) \\ Cov(z,x) & Cov(z,y) & Cov(z,z) \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Utilizando a matriz, é possível obter um conjunto de autovalores e autovetores. Autovalores e autovetores são os valores λ e vetores v que fazem a equação $C_x v = \lambda v$ ser verdade. Os autovalores podem ser obtidos pela seguinte equação:

$$det(C_x - \lambda I) = 0 \quad (2.3)$$

onde I é a matriz identidade e λ é um autovalor.

A determinante da matriz resulta em uma equação de segundo grau quando se trabalha em duas dimensões e de terceiro grau para três dimensões, cujas raízes são os autovalores. Os autovetores associados aos autovalores são os vetores não-nulos calculados através da

substituição de λ em $(C_x - \lambda I)v = 0$. O autovetor de maior autovalor associado a ele é a componente principal.

2.5 Transformada de Hotelling

Embora alguns autores tratem a transformada de Hotelling e a PCA como um mesmo método, outros o consideram um método derivado da PCA apresentada por Pearson (CONCI *et al.*, 2008). Por mais que as duas se baseiam nas componentes principais das variáveis em estudo, o método de Pearson tem o objetivo de encontrar linhas e planos que melhor se encaixem em um conjunto de pontos no espaço n-dimensional, enquanto que o método de Hotelling permite que, a partir das componentes principais, obtenha-se uma transformação que leva os dados para uma nova orientação, facilitando o estudo das variáveis e permitindo, posteriormente, o retorno destes mesmos dados à orientação original (JOLLIFFE, 1986).

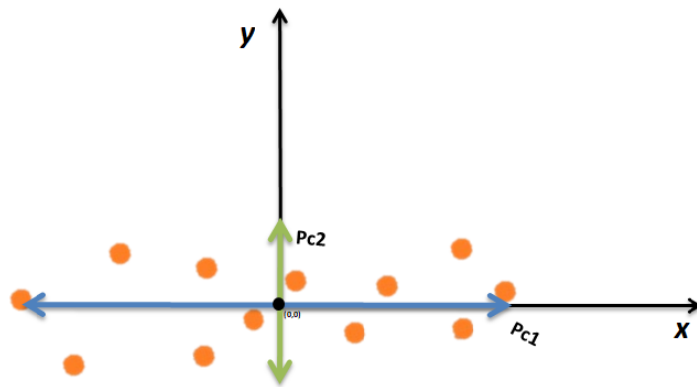
A Transformada de Hotelling auxilia na definição de um novo sistema de coordenadas baseado nas componentes principais do modelo. Esta técnica exige que os autovetores obtidos a partir da matriz de covariância sejam ordenados de forma decrescente pelos seus autovalores associados. Considere λ_1 o maior autovalor e v_1 o autovetor associado a ele, λ_2 e v_2 o segundo maior autovalor e o seu autovetor associado, respectivamente, e assim por diante. Estes autovetores ordenados são colocados na forma de vetor coluna em uma matriz A (2.4), conhecida como matriz de transformação. A partir da matriz A , é possível obter a seguinte transformação apresentada na Equação 2.5.

$$A = [v_1 v_2 \dots v_n] \quad (2.4)$$

$$y = A(x - M_x) \quad (2.5)$$

responsável por mapear os valores de x , ou seja, dos pontos originais, em um novo vetor y , cuja média será zero, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Alinhamento dos autovetores com os eixos globais



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

3 TRABALHOS RELACIONADOS

Esta seção apresenta alguns trabalhos que de alguma forma estão relacionados com esta pesquisa. Inicialmente, é apresentada a técnica descrita em Freitas *et al.* (2016) que gerou a base para o que será discutido neste trabalho. Em seguida, são abordados trabalhos que apresentam técnicas de análise de dados e quais suas contribuições para o trabalho apresentado, incluindo a Transformada de Hotelling. E por fim, são apresentados trabalhos que permitiram selecionar maneiras de medir a qualidade dos elementos gerados pelo algoritmo de geração de malha.

Em Freitas *et al.* (2016), é apresentada uma técnica para geração de malhas em paralelo. A técnica descrita apresenta uma decomposição do domínio por meio de uma estrutura de árvore binária denominada BSP (*Binary Spatial Partitioning*). Apesar de a BSP aceitar qualquer posicionamento do modelo, no trabalho citado, o vetor normal que auxilia na localização do plano de partição estará sempre paralelo a um dos eixos canônicos X, Y ou Z. Isso acontece por que esse particionamento depende de uma outra estrutura de árvore, denominada *Octree*, que é necessariamente alinhada aos eixos globais de posicionamento.

A escolha do particionamento funciona da seguinte maneira. Por conta da liberdade de escolha do ponto onde se localiza o plano de partição, tenta-se escolher o melhor ponto que equilibre a distribuição de carga pelo modelo. Essa distribuição de carga é guiada pela estrutura de *Octree* mencionada anteriormente. Cada célula da BSP é subdividida em duas, até que uma condição de parada seja executada. Neste caso, a condição de parada é que o número de folhas da BSP seja igual ao número de processos/*threads*. Em seguida, cada processo fica responsável pela geração de malha em cada subdomínio, por uma adaptação de uma técnica de avanço de fronteira sequencial.

No trabalho citado, foi dito que poderia ser aplicada uma transformação linear no modelo para deixá-lo alinhado aos eixos globais, gerar a malha, e posteriormente aplicar a transformação linear inversa para levá-lo a orientação original. Tal transformação poderia ser uma mudança de base, que seria feita utilizando os eixos principais do modelo, encontrados como sendo os autovetores da matriz de covariância do fecho convexo do modelo. Esse é o foco deste trabalho.

No trabalho de Pearson (1901) é introduzido inicialmente o conceito de Análise de Componentes Principais (ACP ou PCA, do inglês *Principal Components Analysis*). Em Smith (2002), é apresentado um tutorial desse método que, segundo o autor, é uma forma de analisar

padrões, extrair os dados mais significativos ou reduzir dimensões. Smith (2002) fornece os conceitos necessários e os passos, de modo geral e de uma maneira bastante simplificada, para calcular os autovalores e autovetores, mostrando que a PCA é um técnica genérica, que pode ser aplicada em diferentes métodos para diferentes finalidades.

Em Conci *et al.* (2008), a transformada de Hotelling é tratada como uma derivação do método da Análise de Componentes Principais, apresentando um modo de aplicar uma transformação nas variáveis em estudo, de modo a alinhar os eixos globais na direção dos autovetores.

Em Parthasarathy *et al.* (1994), afirma-se que um dos maiores desafios na geração de malhas tetraédricas é gerar tetraedros de boa qualidade, uma vez que tetraedros de má qualidade podem causar instabilidades numéricas nos MEFs (LIU; JOE, 1994). Nos trabalhos de Liu e Joe (1994), Pébay e Baker (2003) e Dompierre *et al.* (2005) são apresentadas algumas métricas de qualidade de tetraedros, além de uma comparação entre elas.

Dentre as métricas apresentadas nesses trabalhos, foi possível destacar três. Uma delas, conhecida como razão da média η , apresenta uma relação entre o volume v do tetraedro e o comprimento l de suas arestas (Equação 3.1). A razão dos raios ρ é dada por uma relação entre os raios das esferas inscrita r_{in} e circunscrita r_{circ} ao tetraedro, podendo ser calculada como apresentado na Equação (3.2), onde s_i é a área da face i do tetraedro e a , b e c são os produtos das arestas opostas. Essa métrica ρ é a mesma apresentada na Seção 2.3. Por último, a métrica do mínimo ângulo sólido σ é dada pela menor superfície de área formada pela projeção de cada ponto da face do tetraedro em uma esfera de raio unitário, podendo ser calculada como mostra a Equação (3.3). Testes utilizando essas métricas foram realizados para diferentes tetraedros, semelhantes aos apresentados na Figura 8 (LIU; JOE, 1994).

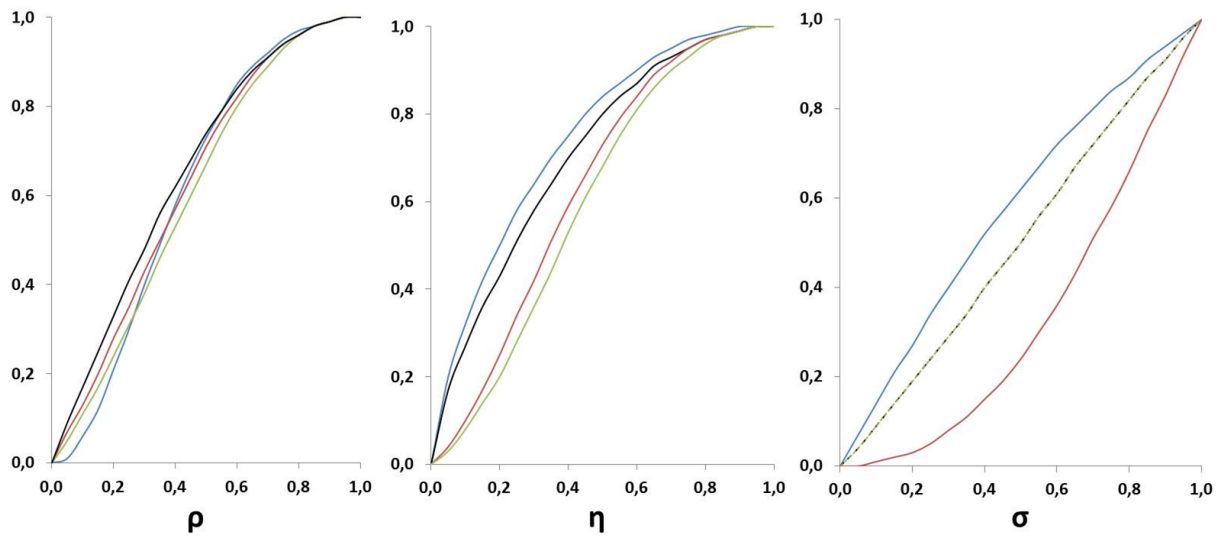
$$\eta = 12(3v)^{2/3} / \sum_{0 \leq i < j \leq 3} l_{ij}^2 \quad (3.1)$$

$$\rho = \frac{216v^2}{\sum_{i=0}^3 s_i \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c+b)(b+c+a)}} \quad (3.2)$$

$$\sigma = \frac{12v}{\sqrt{\prod_{0 \leq i < j \leq 3} (l_{0i} + l_{0j} + l_{ij})(l_{0i} + l_{0j} - l_{ij})}} \quad (3.3)$$

Embora as métricas abordadas fossem equivalentes, após alguns estudos, pôde-se notar que, para diferentes tipos de tetraedros, as métricas apresentavam comportamentos diferentes. Ao final do estudo, foi concluído que a relação dos raios ρ , se comportava de maneira mais uniforme para diferentes tetraedros, distribuindo melhor os valores ao longo da faixa de qualidade definida, como mostra a Figura 11. A mesma técnica serve para avaliar a qualidade de triângulos (2D) e tetraedros (3D), e também foi utilizada em Freitas *et al.* (2016).

Figura 11 – Comparativo entre as métricas de qualidade de tetraedros



Fonte: Reproduzido pelo autor de (LIU; JOE, 1994).

4 TRANSFORMADA DE HOTELLING APLICADA NA TÉCNICA DECOMPOSIÇÃO DO DOMÍNIO

A técnica apresentada a seguir visa diminuir a perda de qualidade da malha gerada em modelos de entrada com diferentes orientações em relação aos eixos globais. Com base no conhecimento descrito até o momento, a seguinte técnica foi desenvolvida. A abordagem descrita neste trabalho é baseada nos métodos de descoberta dos eixos principais do modelo, juntamente com a aplicação de uma transformação para determinar uma nova base que auxilie na definição do plano de corte no momento do particionamento.

É importante reforçar que, embora a técnica ajude no melhoramento do particionamento de carga entre os subdomínios, o foco inicial deste trabalho é em relação à qualidade da malha gerada no final do processo. Outro ponto importante é entender que esta técnica é utilizada em dois momentos no processo de geração paralela da malha. O primeiro acontece no início do processo, logo após a obtenção dos vértices referentes ao domínio de entrada, para uma definição do sistema de coordenadas baseado na orientação do modelo. Essa definição desse sistema de coordenadas pode ser vista como uma rotação com o objetivo de alinhar o modelo aos eixos globais. O segundo momento acontece após a geração da malha final, para retornar o modelo para seu ponto de origem.

Como um dos objetivos é avaliar a qualidade da malha, além da técnica citada, é realizado um estudo aplicando a métrica da relação dos raios para determinar a qualidade dos elementos gerados e a partir deles, poder determinar se houve uma melhora ou não.

4.1 Técnica proposta

4.1.1 Cálculo do vetor da média

O primeiro passo da técnica é a obtenção dos vértices do modelo (Figura 12a). Em seguida, utilizando o método da Análise de Componentes Principais, é calculada a média dos vetores de pontos onde estão localizados os vértices, conforme apresentado na seção 2.4. Cada vetor tem o formato do tipo $v_i = [x_i, y_i, z_i]$, em que os elementos do vetor são as coordenadas do vértice nos eixos X, Y e Z. O vetor da média resultante determinará o centroide do novo sistema de coordenadas a ser utilizado.

4.1.2 Cálculo da matriz de covariância

O próximo passo da técnica é o cálculo da matriz de covariância, utilizando os vértices do modelo e o vetor da média encontrado. A matriz ajuda a identificar os dados que possuem maior variância, pois estes determinarão a direção do eixo principal do modelo. Visando um estudo em três dimensões, a matriz de covariância terá um formato 3x3 onde, para cada par de dimensões, deve ser calculada a covariância entre as duas. A matriz resultante é usada para calcular os autovalores e autovetores.

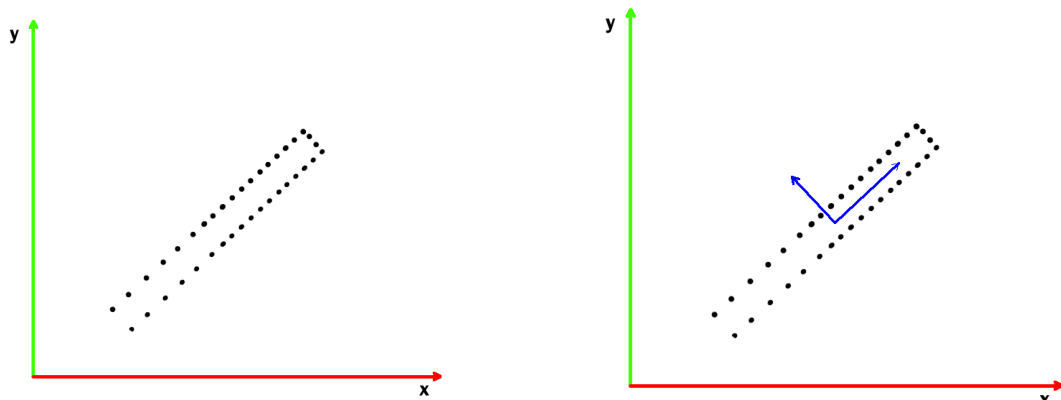
4.1.3 Autovalores e autovetores

Após a obtenção da matriz de covariância, é preciso obter os autovalores desta matriz. Estes autovalores são calculados através da fórmula apresentada na seção 2.4, cujo determinante da matriz resultará em uma equação de terceiro grau (para modelos em 3D). Para calcular os autovalores e autovetores, pode-se utilizar qualquer método numérico para esse propósito. Neste trabalho, utilizou-se o método de Jacobi apresentado em Press *et al.* (1996). O autovetor encontrado associado ao maior autovalor é componente principal do modelo. O segundo maior autovalor é a segunda componente principal e assim por diante. Todos os autovetores são ortogonais uns aos outros, ou seja, formam um ângulo de 90° entre si (Figura 12b).

Figura 12 – Componentes principais para o modelo de viga (2D).

(a) Vértices que formam o modelo (viga).

(b) Componentes principais do modelo.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

4.1.4 Transformada de Hotelling

Depois de identificar as componentes principais do modelo, é feita uma transformação com o objetivo de alinhar os eixos principais aos eixos globais. Essa transformação é conhecida como Transformada de Hotelling. Para aplicar esta técnica, primeiramente, os autovetores devem ser ordenados de forma decrescente dos seus autovalores associados. Desta forma, é criada uma matriz de transformação, na qual cada linha da matriz é um autovetor calculado anteriormente.

Após aplicar esta transformação em todos os vértices que formam a fronteira do modelo, o centroide do modelo passa agora a se localizar na origem dos eixos de coordenadas globais. O modelo também se encontra alinhado aos eixos (Figura 13a), finalizando assim a primeira etapa da técnica.

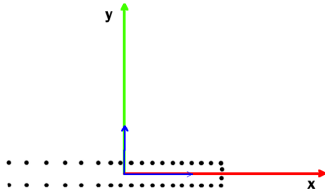
Com o alinhamento do modelo, o plano de decomposição pode agora ser definido de forma a equilibrar o particionamento entre os processos/*threads*. Após finalizado o processo de geração de malha (Figura 13b), é dado início à segunda parte da técnica, que consiste no retorno nos vértices à orientação original. Como as linhas de A são vetores ortonormais, a matriz inversa é igual à sua transposta, e a transformação inversa pode ser feita através da seguinte equação:

$$x = A^{-1}y + M_x \quad (4.1)$$

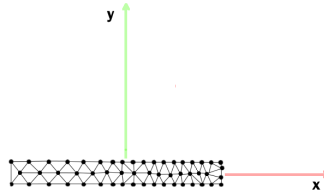
Essa transformação, também deve ser feita para todos os vértices da malha gerada (Figura 13c). Com o processo finalizado é preciso avaliar se houve mudança significativa na qualidade geral da malha.

Figura 13 – Transformada de Hotelling aplicada ao modelo.

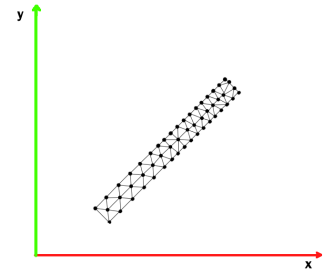
(a) Alinhamento dos autovetores modelo aos eixos globais.



(b) Malha gerada no modelo após o alinhamento.



(c) Retorno do modelo com a malha gerada a sua orientação original.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

4.2 Qualidade da malha

A qualidade da malha é avaliada por meio de histogramas contendo o número de elementos formados em uma faixa de valores que varia de 0,0 a 1,0, de 0,1 em 0,1. De acordo com o valor de qualidade calculado por meio da métrica da razão dos raios, cada elemento é classificado como ruim, médio ou de boa qualidade.

5 METODOLOGIA E RESULTADOS

Nesta seção, é apresentada a metodologia desenvolvida durante o trabalho e, em seguida, são apresentados os resultados obtidos após a realização dos testes, nas Seções 5.1 e 5.2, respectivamente.

5.1 Metodologia

Esta seção apresenta a metodologia após a implementação da técnica descrita neste trabalho, responsável pela obtenção dos resultados que serão discutidos na próxima seção.

A linguagem utilizada para implementação da técnica foi C++, mesma linguagem utilizada para a implementação da técnica de Freitas *et al.* (2016). Os testes foram realizados no Laboratório Interdisciplinar de Ciência da Computação e Engenharia de Software (LINCE). A máquina utilizada para a realização dos testes possui um processador Intel(R) Core(TM) i5-4460 CPU @3.20GHz, 16 GB de RAM com um sistema operacional Linux versão 4.4.0.

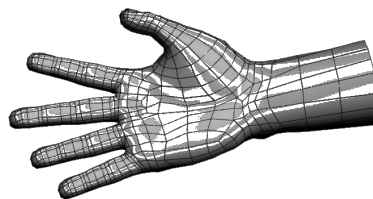
Logo após a implementação da técnica foram selecionados três modelos, uma Viga, uma Mão e um Coelho (*Stanford Bunny*) (Figura 14).

Figura 14 – Modelos.

(a) Viga.



(b) Mão.



(c) Coelho (*Stanford Bunny*).



Fonte: *Google* Imagens.

Para cada modelo, foram gerados diversos outros casos de teste com diferentes orientações nos eixo X, Y e Z. Para isso, foi aplicada uma transformação de rotação em cada um dos modelos, seguindo a ordem de rotação nos eixos Z, depois Y e por último em X. Ao final, foi obtido um modelo para cada orientação, variando de 0 a 90 graus, com um acréscimo de 30° a cada transformação em cada um dos eixos, exceto o eixo X, que varia de 0° a 60°. Por exemplo, o modelo da Viga possui modelos que variam de 0° em X, 0° em Y e 30° em Z até modelos

com 60° em X, 90° em Y e 90° em Z. Neste trabalho, os casos de teste serão identificados da seguinte maneira: entre colchetes com o nome do modelo seguido pelo valor de rotação aplicado aos eixos X, Y e Z respectivamente, e separados por ponto, como em [Exemplo-0.0.0].

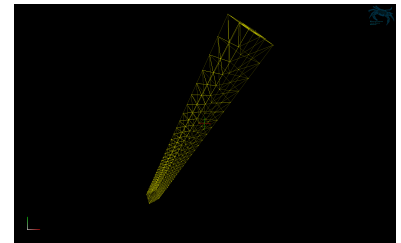
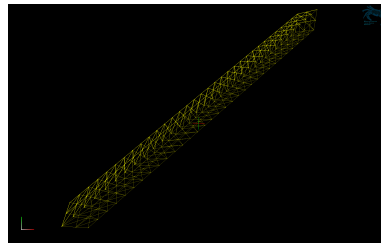
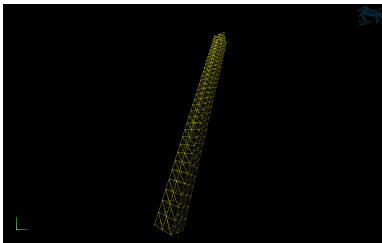
Na Figura 15, são apresentados alguns casos de teste para o modelo da Viga. A Figura 16 mostra casos de teste para o modelo da Mão e, na Figura 17, são apresentados alguns casos para o modelo do Coelho. Em todas as figuras, os eixos X e Y globais estão indicados no canto inferior esquerdo da figura (eixo X em vermelho e eixo Y em verde).

Figura 15 – Casos de teste para o modelo da Viga.

(a) [Viga-0.60.60].

(b) [Viga-30.30.30].

(c) [Viga-60.30.60].



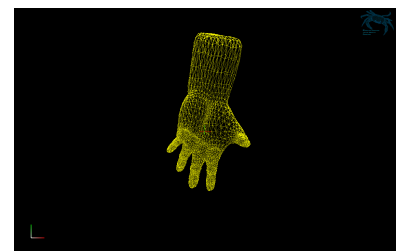
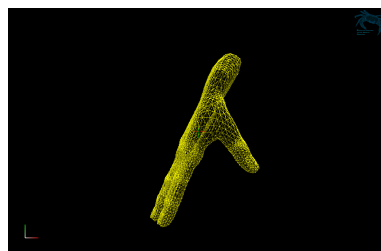
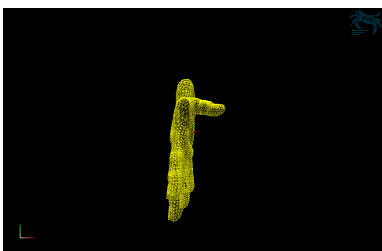
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 16 – Casos de teste para o modelo da Mão.

(a) [Mão-0.30.90].

(b) [Mão-30.30.60].

(c) [Mão-60.60.60].



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

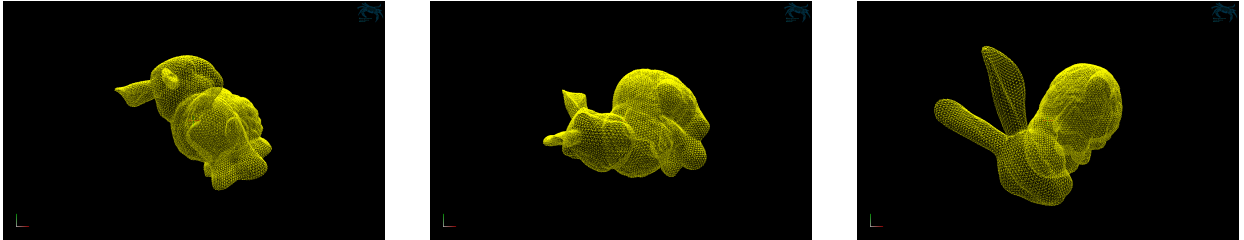
Com a finalidade de realizar um comparativo entre a qualidade das malhas, para cada modelo descrito anteriormente, foi aplicada a transformada de Hotelling (Figura 18) e em seguida foi gerada a malha. A geração da malha foi realizada tanto com a técnica sequencial descrita em Neto *et al.* (2001), quanto com a técnica paralela de Freitas *et al.* (2016) com duas *threads*. Embora este trabalho foque na geração paralela, a comparação entres as malhas geradas

Figura 17 – Casos de teste para o modelo do Coelho.

(a) [Coelho-0.60.30].

(b) [Coelho-30.60.60].

(c) [Coelho-60.0.60].



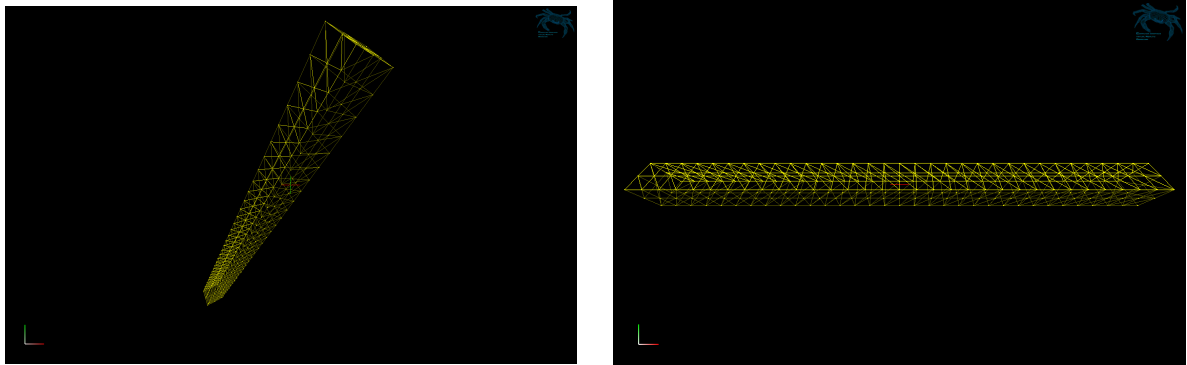
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

sequencialmente é importante para provar que a técnica não ocasiona perda de qualidade da malha sequencial.

Figura 18 – Efeito da transformada de Hotelling para o modelo da Viga [Viga-60.30.60]

(a) Antes de aplicar a transformada de Hotelling.

(b) Após aplicar a transformada de Hotelling.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Os resultados obtidos para os modelos de forma sequencial e paralela geraram os gráficos que serão apresentados posteriormente.

Apesar de o objetivo principal da técnica ser melhorar a forma de decomposição do modelo na técnica paralela, resultados obtidos para a geração sequencial da malha têm o propósito de mostrar que não houve uma influência negativa na qualidade da malha após a transformada de Hotelling. Assim, primeiramente, serão apresentados os resultados obtidos para a técnica sequencial e, posteriormente, serão apresentados os resultados obtidos para a técnica paralela.

5.2 Resultados

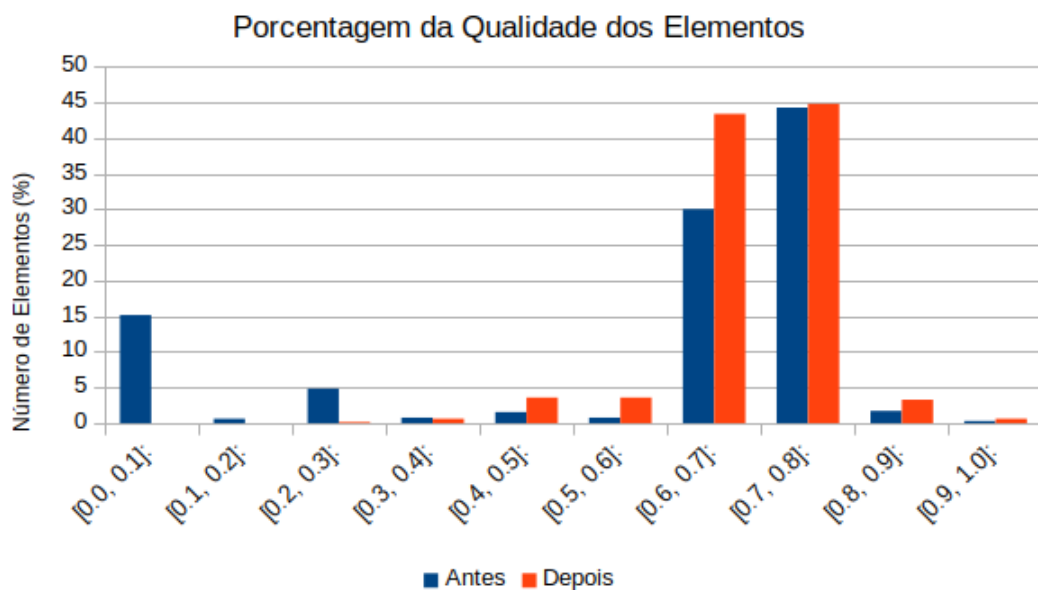
5.2.1 Resultados para o algoritmo sequencial

5.2.1.1 Viga

A Figura 19a mostra a qualidade da malha gerada para o caso de teste [Viga-0.30.30], sendo este o caso mais discrepante entre os casos deste modelo com um ângulo de 0° no eixo X. Cada barra mostra a porcentagem da quantidade de elementos em cada intervalo de qualidade indicado no eixo X do gráfico. As barras azuis mostram a qualidade da malha antes da aplicação da transformada de Hotelling, e as barras vermelhas mostram a qualidade depois da aplicação da transformada.

Figura 19 – Maior discrepância para [Viga-0.30.30].

(a) Porcentagem da quantidade de elementos das malhas geradas.

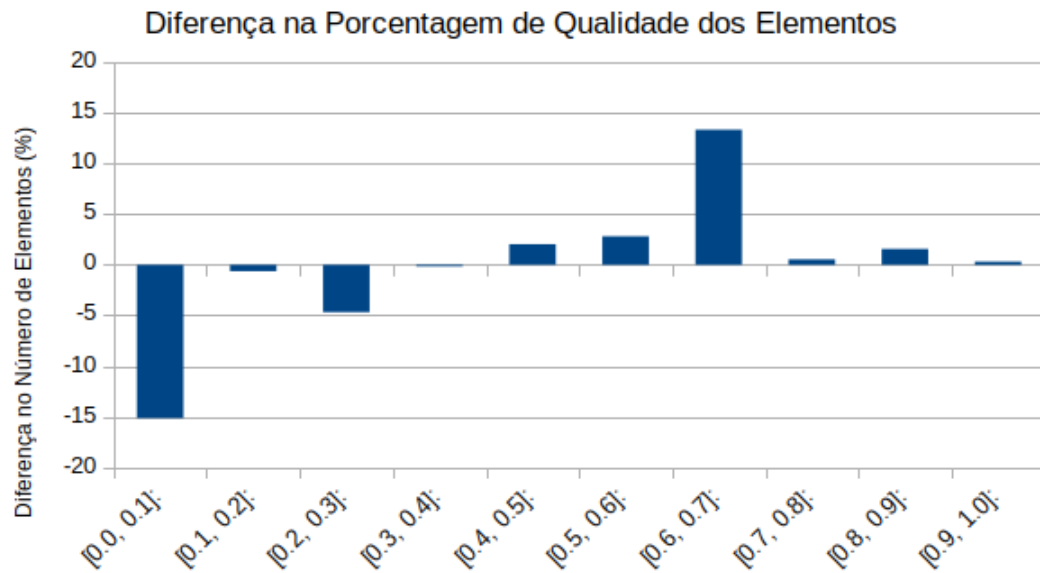


Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Para melhor comparar a qualidade das malhas geradas antes e depois da aplicação da transformada, calcula-se a diferença entre as qualidades das malhas como sendo a diferença, em porcentagem, entre a quantidade de elementos em um determinado intervalo de uma malha gerada antes da transformada e a quantidade de elementos do mesmo intervalo depois da transformada. A Figura 19b apresenta essa diferença em cada intervalo para o número de elementos gerados. Quando a diferença é positiva, significa que houve um aumento do número de elementos naquele intervalo, quando a diferença é negativa, significa que houve uma diminuição de elementos

naquele intervalo.

Figura 19 – Maior discrepância para [Viga-0.30.30] (continuação).
(b) Diferença na porcentagem da qualidade das malhas.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Nos gráficos da Figura 19, pode-se notar que, depois da aplicação da transformada, houve uma diminuição de 15% de elementos de qualidade $\rho \leq 0,1$, os elementos de pior qualidade. Além disso, houve uma diminuição de cerca de 20% de elementos de qualidade $\rho \leq 0,4$. Assim, houve um aumento de cerca de 20% de elementos de qualidade $\rho \geq 0,4$. Portanto, apesar de a diferença total entre as qualidades das malhas ter sido de cerca de 40%, a qualidade geral da malha melhorou com a aplicação da Transformada de *Hotelling*.

Dentre os casos de teste para o modelo da Viga com uma orientação de 0° no eixo X, a Figura 20 apresenta o que gerou a menor diferença total entre as malhas. Com diferença total inferior a 6%, o gráfico mostra uma leve diminuição nos elementos com faixa de qualidade entre 0,2 e 0,3. É possível notar também um pequeno aumento nas faixas com $0,4 \leq \rho < 0,7$ e uma queda na quantidade de elementos nas faixas mais próximas com $0,7 \leq \rho < 0,9$.

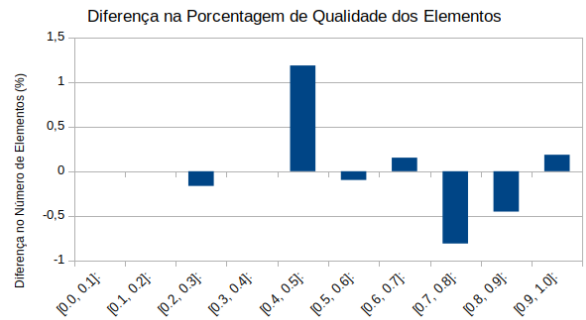
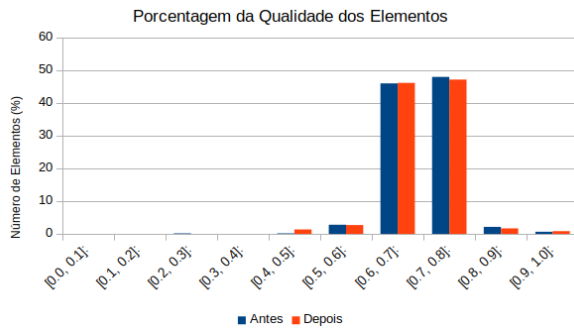
Apesar dessa leve queda na qualidade da malha, essa queda foi proporcionada por elementos antes considerados bons que passaram a ser medianos. Entretanto, não houve aumento nos elementos considerados ruins, que são os que podem causar instabilidades numéricas em métodos de elementos finitos. Além disso, não houve uma diferença significativa para a malha gerada antes da transformada.

Os gráficos da Figura 21 mostra as diferenças totais para as casos de teste com o

Figura 20 – Menor discrepância para [Viga-0.60.90].

(a) Porcentagem da quantidade de elementos das malhas.

(b) Diferença na porcentagem da qualidade das malhas.



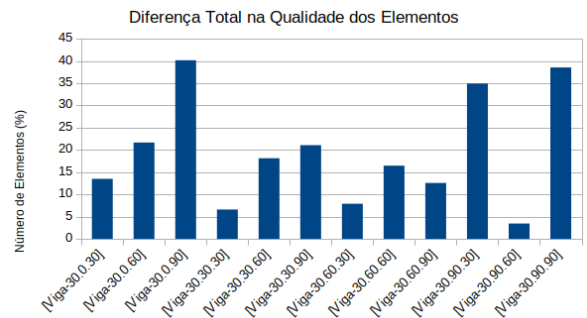
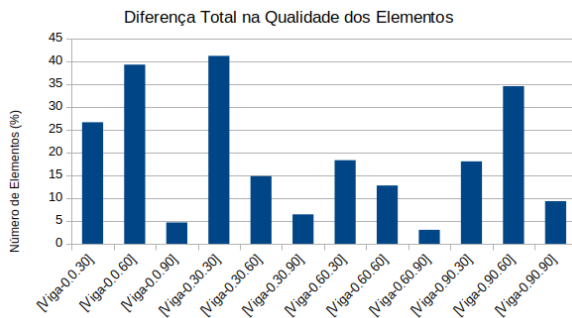
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

eixo X fixado em 0° (Figura 21a), possibilitando a identificação dos casos de maior e menor diferença entre as qualidades das malhas, que foram apresentadas anteriormente. Além disso, mostra os resultados com eixo X fixado em 30° (Figura 21b) e 60° (Figura 21c).

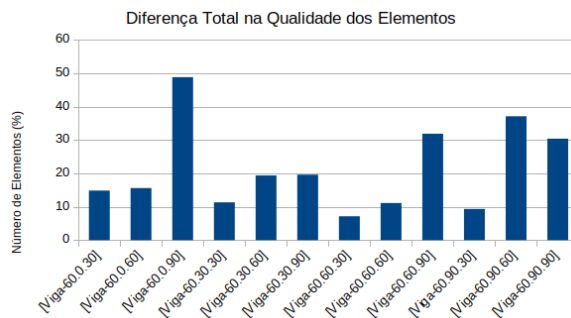
Figura 21 – Comparativo entre as diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para os casos de teste da Viga no algoritmo sequencial.

(a) Comparativo para o modelo da Viga com 0° no eixo X

(b) Comparativo para o modelo da Viga com 30° no eixo X.



(c) Comparativo para o modelo da Viga com 60° no eixo X.

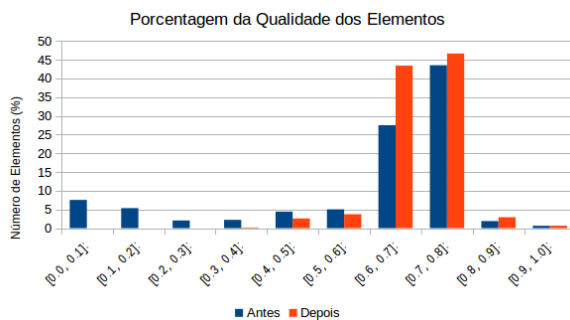


Fonte: Produzida pelo autor (2018).

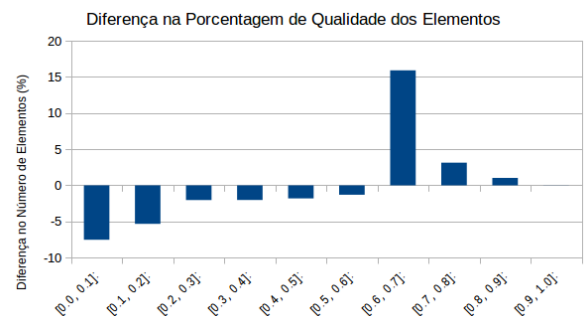
A seguir, são apresentados os resultados para outras orientações da Viga (Figura 22). A coluna da direita da Figura 22, mostra a qualidade da malha, em porcentagem, para os modelos com maior discrepância na qualidade final da malha para as demais orientações estabelecidas para o eixo X. A coluna da direita apresenta a diferença, também em porcentagem, para cada intervalo de qualidade.

Figura 22 – Maiores discrepâncias para o modelo da Viga com 30° e 60° no eixo X.

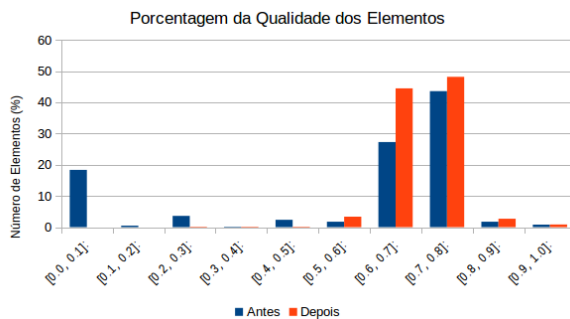
(a) Qualidade da malha da Viga-30.0.90.



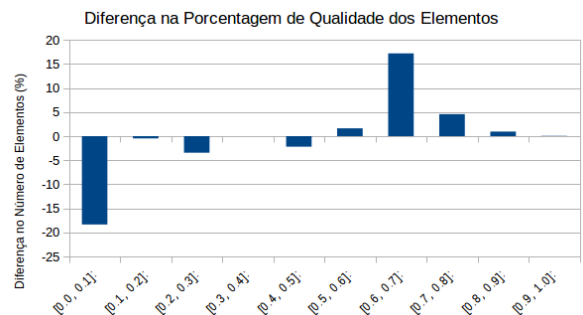
(b) Diferença na qualidade da malha da Viga-30.0.90.



(c) Qualidade da malha da Viga-60.0.90.



(d) Diferença na qualidade da malha da Viga-60.0.90.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

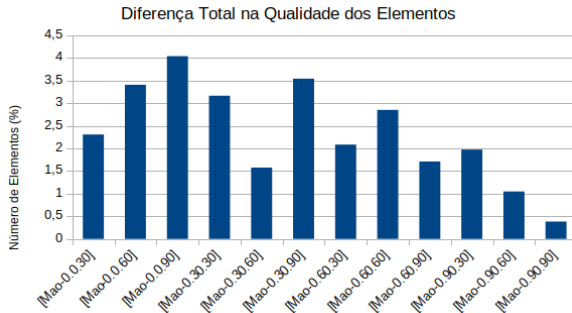
5.2.1.2 Modelos da Mão e do Coelho

A Figura 23 mostra os resultados comparativos entre as diferenças totais para os casos de teste da Mão (à esquerda) e do Coelho (à direita) após a execução da técnica sequencial. Comparativo entre as diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Viga no algoritmo sequencia

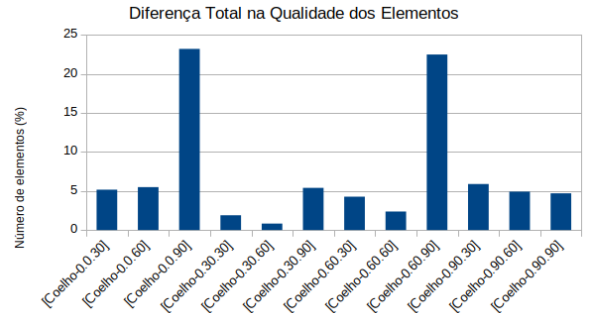
Para os casos de teste da Mão, as diferenças nas qualidades das malhas, mesmo nos casos mais discrepantes, foram pequenas, de aproximadamente 4%. A seguir, são mostrados os

Figura 23 – Comparativo entre as diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para os casos de teste da Mão (coluna da esquerda) e para os casos de teste do Coelho (coluna da direita) no algoritmo sequencial.

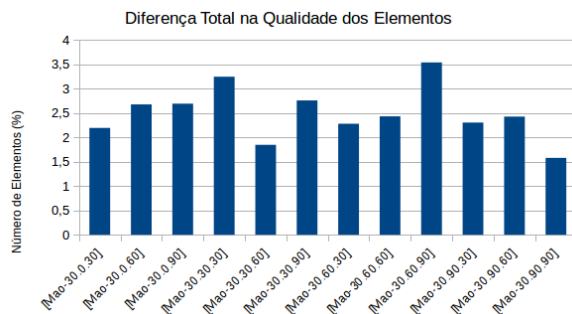
(a) Diferença total para Mão com o eixo X fixado em 0°.



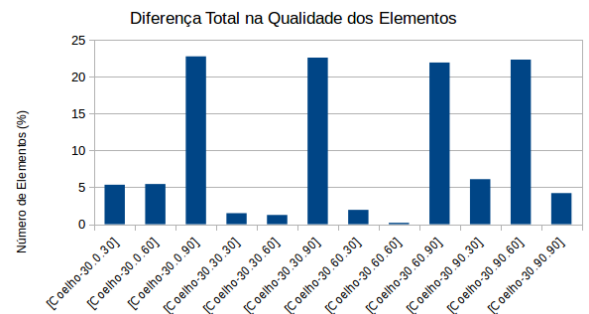
(b) Diferença total para Coelho com o eixo X fixado em 0°.



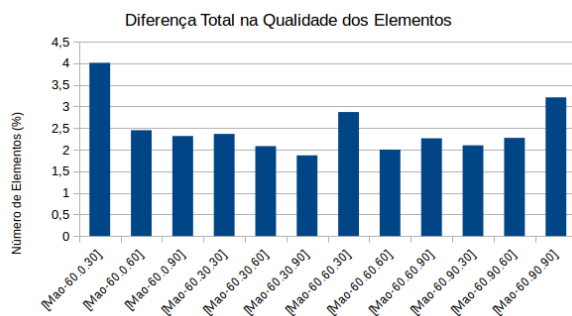
(c) Diferença total para Mão com o eixo X fixado em 30°.



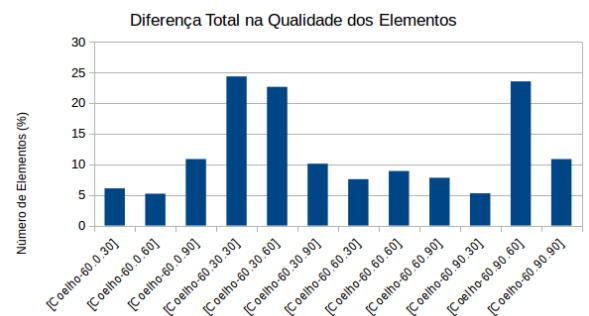
(d) Diferença total para Coelho com o eixo X fixado em 30°.



(e) Diferença total para Mão com o eixo X fixado em 60°.



(f) Diferença total para Coelho com o eixo X fixado em 60°.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

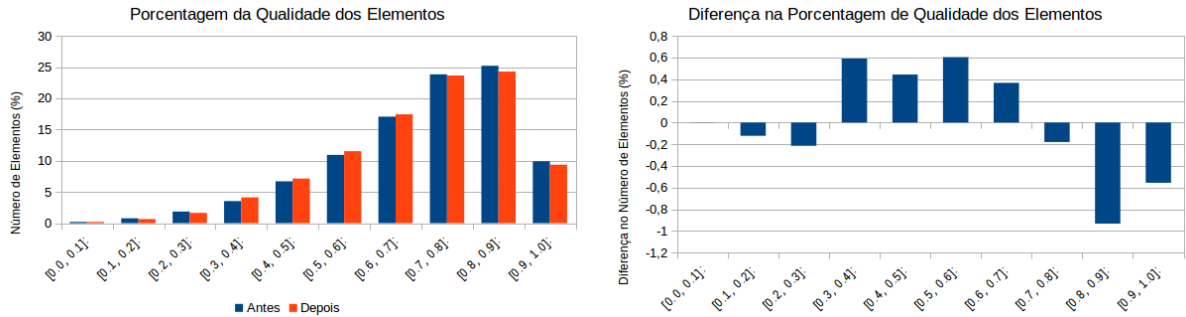
casos que geraram a maior (Figura 24) e a menor (Figura 25) discrepância para todos os casos avaliados, com base nos resultados apresentados anteriormente.

Através dos resultados da Figura 23 para os casos de teste do Coelho, é possível perceber que as maiores diferenças totais entre as malhas ficaram entre 20% e 25%. Assim como na Viga, os casos que obtiveram esses valores apresentaram uma melhoria na qualidade da malha.

Nota-se, também, que a maioria dos casos que demonstraram diferenças totais menores que 10%.

Figura 24 – Maior discrepância para o modelo da Mão (algoritmo sequencial).

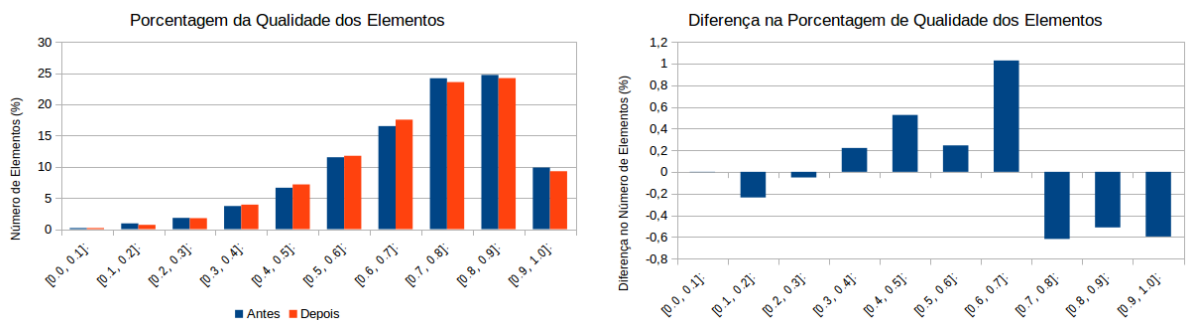
- (a) Qualidade da malha da Mão-60.0.30. (b) Diferença na qualidade da malha da Mão-60.0.30.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 25 – Menor discrepância para o modelo da Mão (algoritmo sequencial).

- (a) Qualidade da malha da Mão-0.90.90. (b) Diferença na qualidade da malha da Mão-0.90.90.



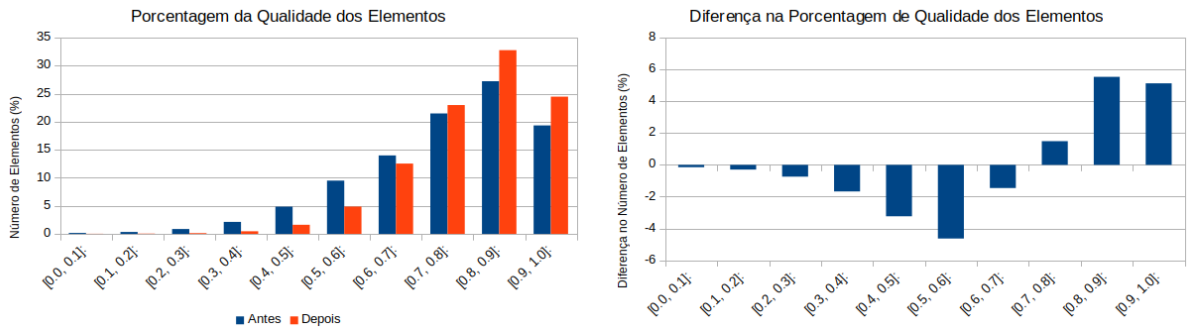
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Analisando-se individualmente o caso de maior discrepância (Figura 26), nota-se que a quantidade de elementos na faixa de qualidade $\rho < 0,7$ diminuíram, e conseqüentemente, aumentou a quantidade de elementos de qualidade entre 0,7 e 1,0. A Figura 27 mostra um aumento para elementos na faixa $\rho < 0,6$ menor que 0,2%, assim como nos elementos com $0,8 \leq \rho < 0,9$. Como consequência, houve uma diminuição de elementos nas faixas com $0,6 \leq \rho < 0,8$. Entretanto, como os valores não chegam a 0,3%, pode-se considerar que essas discrepâncias são insignificantes, e não afetaram de maneira relevante a qualidade da malha.

Embora o propósito principal do trabalho não seja, exatamente, a qualidade das malhas geradas sequencialmente, estes resultados mostram que, de maneira geral, o algoritmo apresentou bons resultados. Nos casos considerados ruins, não houve uma piora significativa

Figura 26 – Maior discrepância para o modelo do Coelho (algoritmo sequencial).

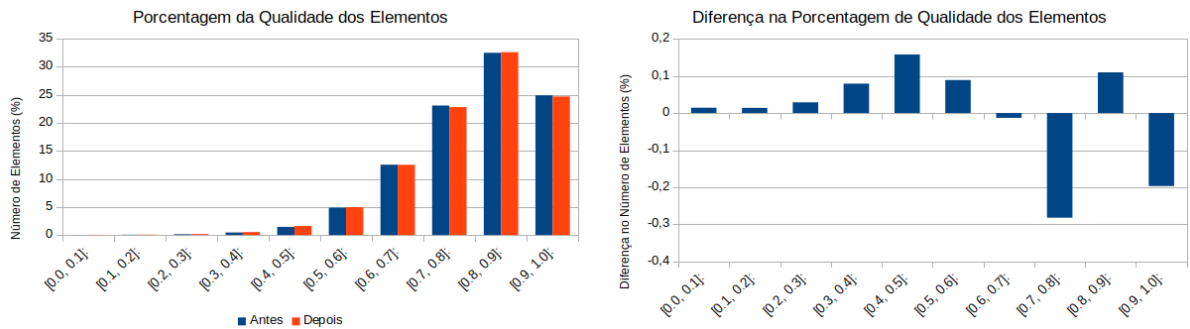
- (a) Qualidade da malha do Coelho-60.30.30. (b) Diferença na qualidade da malha da Coelho-60.30.30.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 27 – Menor discrepância para o modelo do Coelho (algoritmo sequencial).

- (a) Qualidade da malha do Coelho-30.60.60. (b) Diferença na qualidade da malha da Coelho-30.60.60.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

para os modelos que apresentaram aumento de elementos na faixa de qualidade $\rho < 0,4$. Além disso, a malha apresentou uma melhora para os casos com diferença total superior a 10% para o modelo da Viga, 1,5% para o modelo da Mão e 5% para o modelo do Coelho.

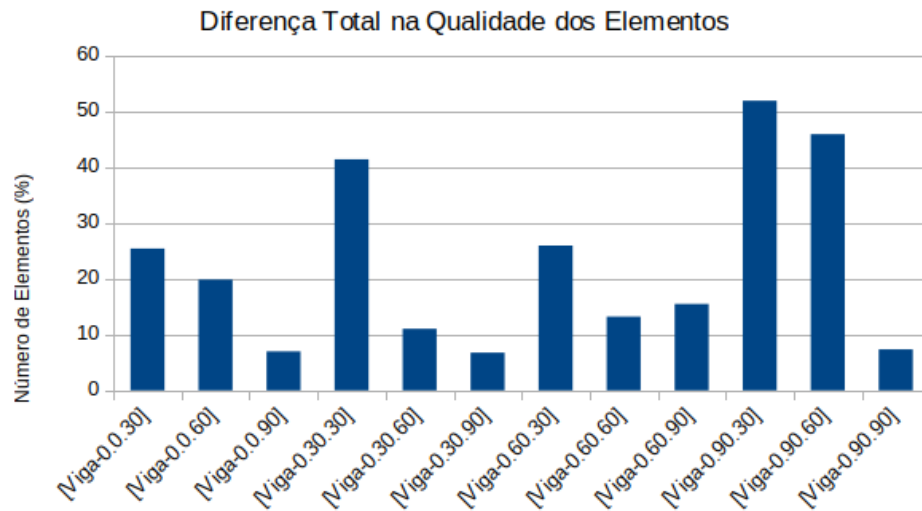
5.2.2 Resultados para o algoritmo paralelo

Nesta seção, serão apresentados os testes para o algoritmo paralelo com dois processos, que é o foco do trabalho. Os modelos utilizados para o algoritmo paralelo foram os mesmos apresentados para o algoritmo sequencial. Inicialmente serão mostrados os resultados para a Viga e, depois, para os modelos da Mão e do Coelho.

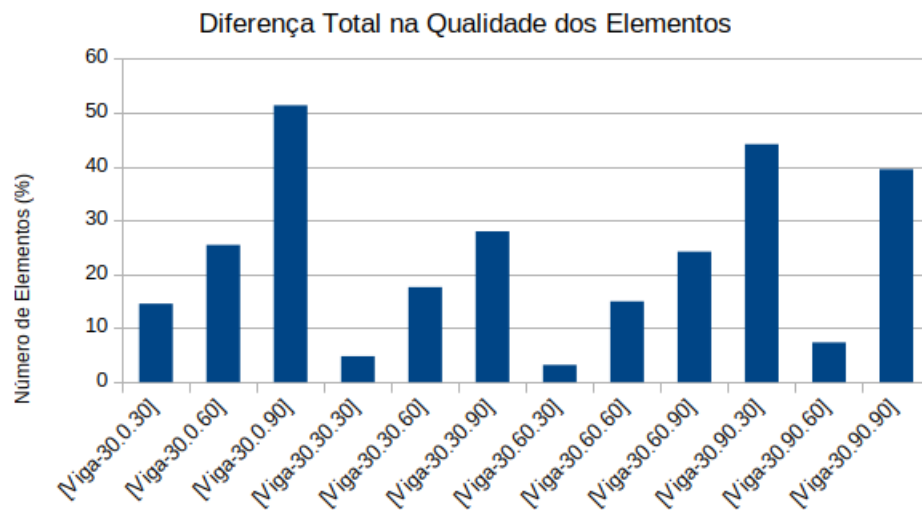
5.2.2.1 Viga

A Figura 28 apresenta os resultados para os comparativos entre os modelos para os casos de teste da Viga.

Figura 28 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Viga no algoritmo paralelo.
(a) Diferença total nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Viga com 0° no eixo X.



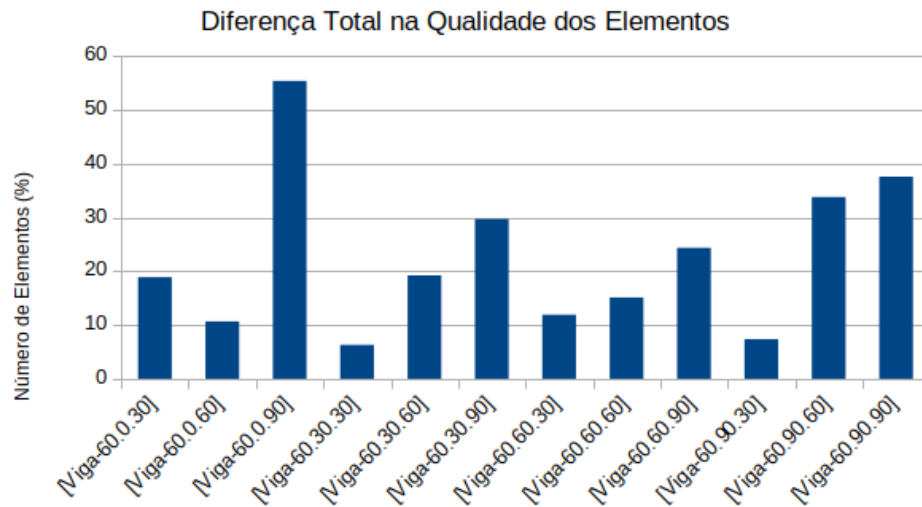
(b) Diferença total nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Viga com 30° no eixo X.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 28 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Viga no algoritmo paralelo (continuação).

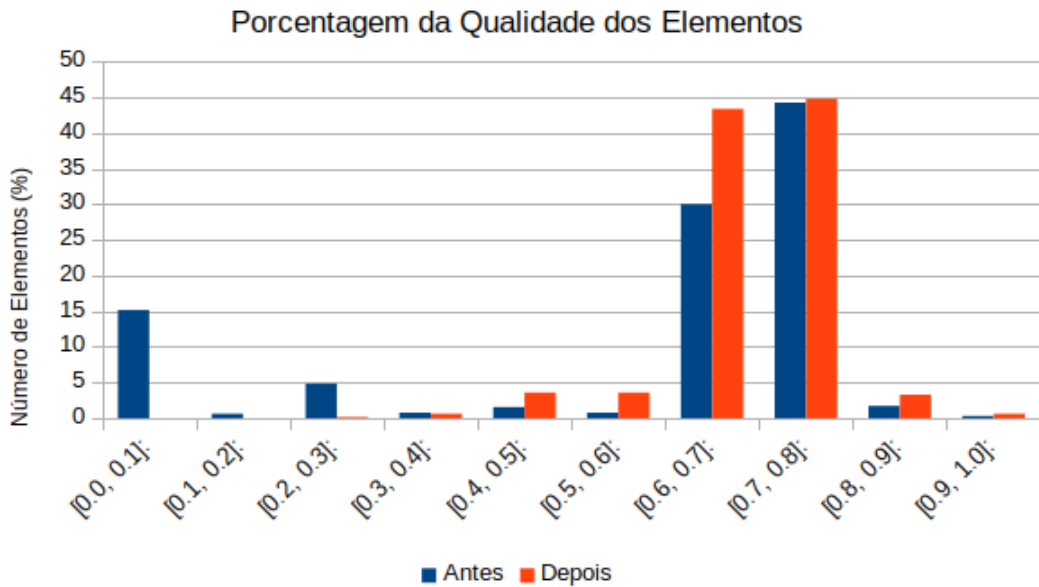
(c) Diferença total nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Viga com 60° no eixo X.



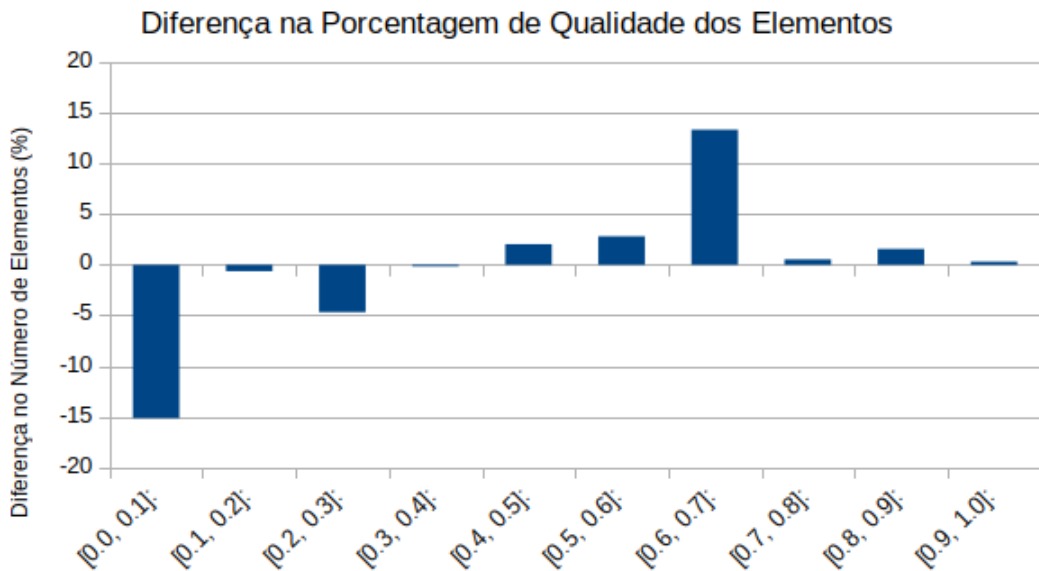
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Para os resultados da Viga com um ângulo de 0° no eixo X (Figura 28a), pode-se notar que 9 dos 12 casos apresentados obtiveram valores de diferença total acima de 10%. A [Viga 0.90.30] (Figura 29) foi o caso que demonstrou maior discrepância entre os dados, com diferença total superior a 50%. O caso com menor discrepância total foi a [Viga-0.30.90] (Figura 30), inferior a 10%.

Figura 29 – Maior discrepância para [Viga-0.90.30] (algoritmo paralelo).
 (a) Porcentagem da quantidade de elementos das malhas geradas.



(b) Diferença na porcentagem da qualidade das malhas.



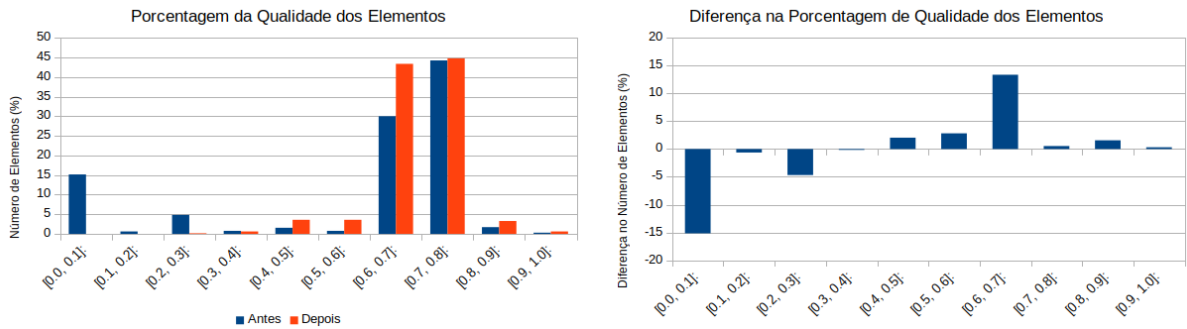
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

A Figura 29 mostra uma redução nos elementos com $0,0 \leq \rho < 0,4$, com aproximadamente 20% de elementos a menos na faixa $\rho < 0,1$, os considerados ruins, que, conseqüentemente, passaram para a faixa de medianos a bons. O caso de teste com menor discrepância (Figura 30) não apresentou elementos nas faixas com $\rho < 0,4$ antes da aplicação da transformada porém, após a aplicação da técnica, o número de elementos na faixa $0,3 \leq \rho < 0,6$ aumentou, o número de elementos na faixa $0,6 \leq \rho < 0,8$ diminuiu e o número de elementos na faixa $\rho \geq 0,8$ aumentou.

Figura 30 – Menor discrepância para Viga com 0° no eixo X [Viga-0.30.90].

(a) Porcentagem da quantidade de elementos das malhas geradas.

(b) Diferença na porcentagem da qualidade das malhas.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Observando os gráficos da Figura 31, pode-se ver que, com base na diferença total apresentada anteriormente, para os dois casos da Viga com maior discrepância para as demais orientações do eixo X, houve uma redução superior a 15% em elementos considerados muito ruins ($\rho < 0,1$), além de uma diminuição nas faixas $\rho < 0,4$ para a [Viga-30.0.90] e $\rho < 0,6$ para a [Viga-60.0.90]. Ambos os casos demonstraram um acréscimo nos elementos considerados médios e bons.

Para os casos com menor discrepância (Figura 32), considerados aqueles que obtiveram uma queda na qualidade da malha, estes apresentaram uma diferença total inferior a 2% para os casos fixados em 60° no eixo X, e inferior a 1% para os casos fixados em 30° no eixo X.

De maneira geral, para os casos de teste do modelo da Viga que apresentaram diferença total na qualidade superior a 15%, houve uma diminuição no número de elementos considerados ruins ($0 \leq \rho < 0,3$) e, conseqüentemente, um aumento de elementos considerados de qualidade média a boa.

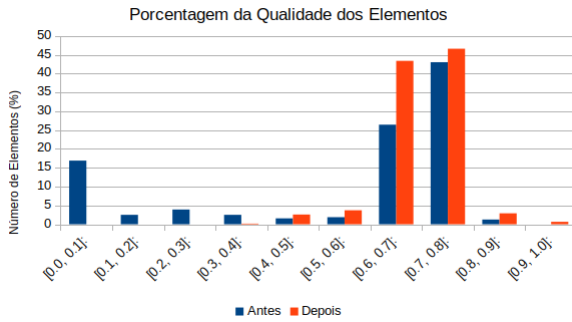
5.2.2.2 Modelos da Mão e do Coelho

Esta subseção mostra os resultados obtidos da execução paralela para os outros modelos testados, ou seja, a Mão e o Coelho (*Stanford Bunny*) apresentados no início da seção de metodologia.

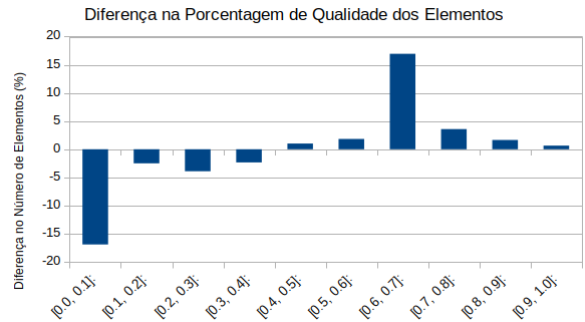
A Figura 33 mostra os resultados comparativos entre as diferenças totais obtidas para os casos de teste do modelo da Mão. Pelos gráficos, pode-se observar que, para todos os casos avaliados, a diferença total se manteve pequena, não ultrapassando os 4% nos casos mais

Figura 31 – Maiores discrepâncias para Viga com 30° e 60° no eixo X.

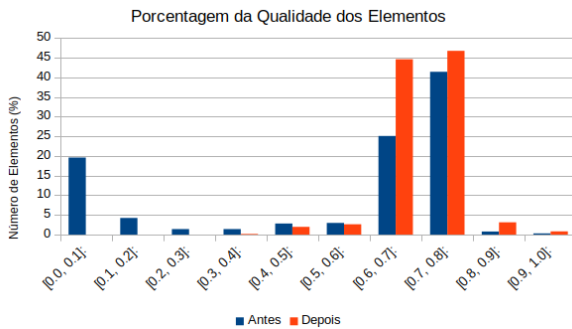
(a) Qualidade da malha para Viga-30.0.90.



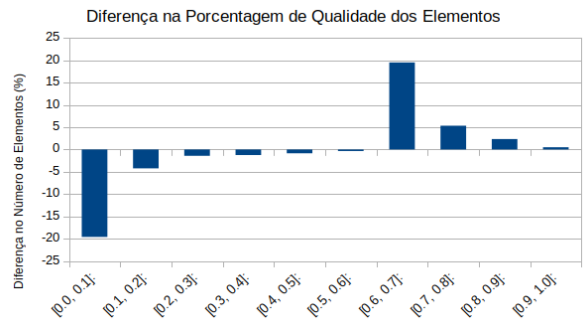
(b) Diferença na qualidade da malha para Viga-30.0.90.



(c) Qualidade da malha para Viga-60.0.90.



(d) Diferença na qualidade da malha para Viga-60.0.90.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

discrepantes.

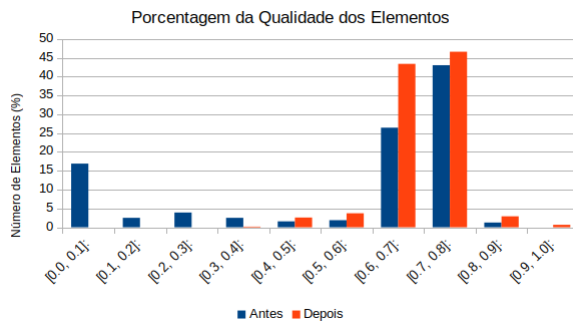
Em uma análise mais detalhada para os casos da Figura 33, os resultados para este modelo seguem a tendência dos resultados para os demais modelos, ou seja, nos casos com maior discrepância, pode-se notar uma redução no número de elementos considerados ruins. Na Figura 34a e 34b, observa-se uma queda na porcentagem de elementos com $p < 0,5$ e, para este caso, uma diminuição em elementos considerados bons ($\rho \geq 0,8$), juntamente com um aumento no número de elementos de qualidade média a boa ($0,5 \leq \rho < 0,8$).

Para o caso da [Mão-30.60.90] apresentado nas Figuras 34c e 34d, nota-se um aumento de elementos entre 0,1 e 0,7 inferior a 1%, assim como uma redução em elementos com $p \geq 0,7$ e $p < 0,1$. O caso [Mão-60.0.30] (Figuras 34e e 34f) também apresentou uma queda em elementos ruins e em elementos bons, conseqüentemente houve um aumento nas faixas consideradas de qualidade média ($0,3 \leq \rho < 0,7$). Porém, em todas as faixas de qualidade, a diferença foi inferior a 1%.

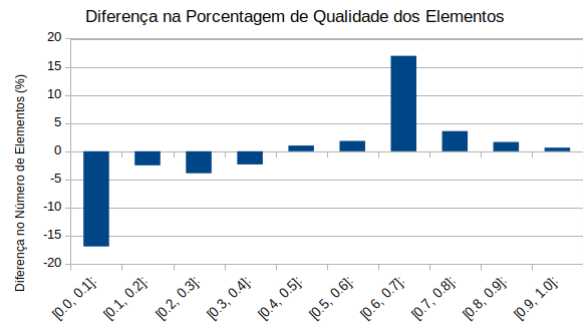
Na Figura 35, são apresentados os comparativos em relação a diferença total na

Figura 32 – Menores discrepâncias para Viga com 30° e 60° no eixo X.

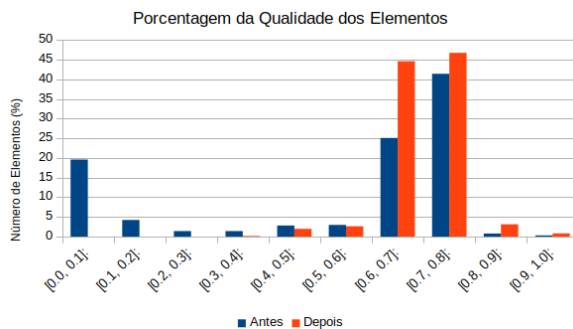
(a) Qualidade da malha para Viga-30.60.30.



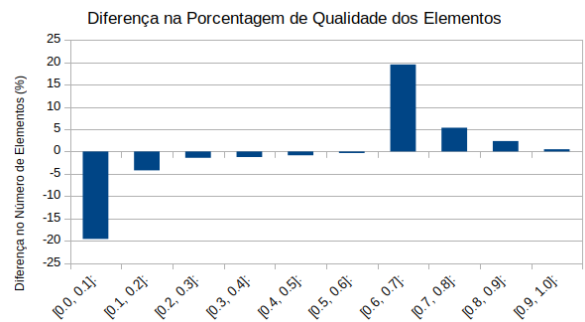
(b) Diferença na qualidade da malha para Viga-30.60.30.



(c) Qualidade da malha para Viga-60.30.30.



(d) Diferença na qualidade da malha para Viga-60.30.30.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

qualidade da malha dos casos de teste para o modelo do Coelho.

Para um ângulo fixado em 0° no eixo X, a maioria dos casos apresentou uma diferença total inferior a 5%, exceto nos três casos mais discrepantes com valores próximos a 20%. Pode-se observar na Figura 36, o caso de teste [Coelho-0.30.90], que apresentou a maior diferença para os casos com a configuração citada anteriormente.

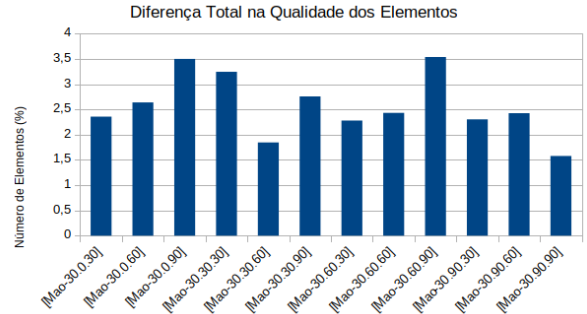
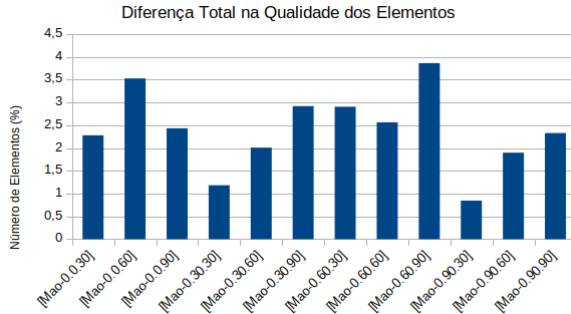
Para o caso demonstrado na Figura 36, pode-se ver que a variação individual em cada faixa de qualidade não superou os 5%. Também pode-se observar uma redução nos elementos com $\rho < 0,7$ e, dessa forma, um aumento nos elementos com valores $\rho \geq 0,7$. Na Figura 37, é possível perceber uma diferença muito pequena nas faixas de valores de qualidade, com um máximo próximo a 0,3% de queda no número de elementos com $0,6 \leq \rho < 0,8$. Além de um aumento, de maneira geral, no número de elementos nas faixas menores que 0,6.

A Figura 38 exibe os resultados que apresentaram maior diferença total para o eixo X fixado em 30° (Figuras 38a e 38b), e em 60° (Figuras 38c e 38d). É possível identificar que ambos os gráficos apresentam resultados semelhantes, tanto em relação a porcentagem

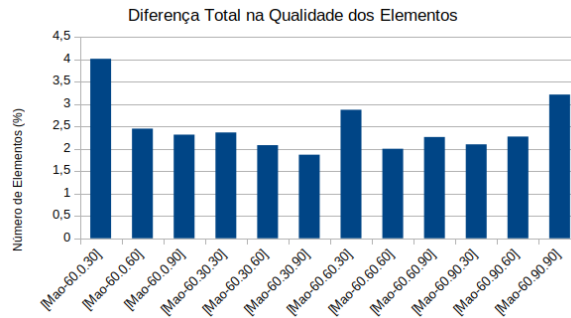
Figura 33 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo da Mão no algoritmo paralelo.

(a) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Mão com 0° no eixo X.

(b) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Mão com 30° no eixo X.



(c) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo da Mão com 60° no eixo X.



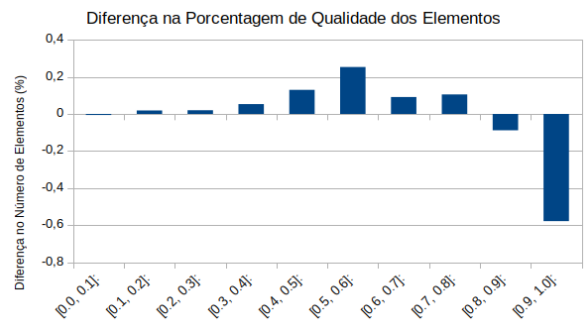
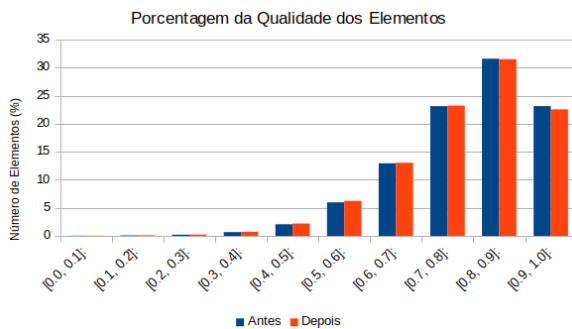
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

do número de elementos medianos e ruins que diminuiriam, quanto em relação ao aumento no número de elementos nas faixas $p \geq 0,7$.

Figura 38 – Maiores discrepância para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo).

(a) Qualidade da malha para Coelho-30.60.60.

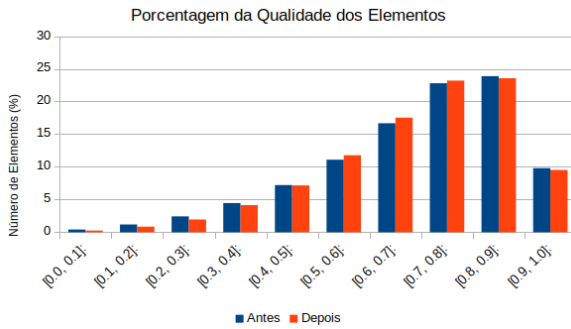
(b) Diferença na qualidade da malha para Coelho-30.60.60.



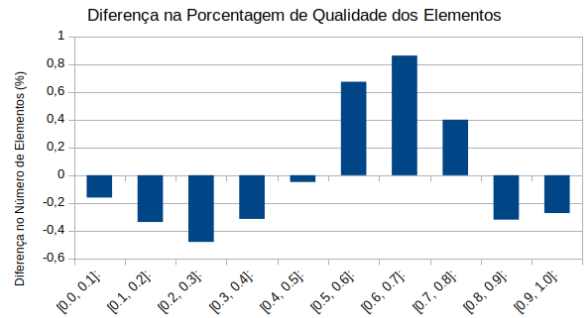
Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 34 – Maiores discrepâncias para o modelo da Mão com 0°, 30° e 60° no eixo X.

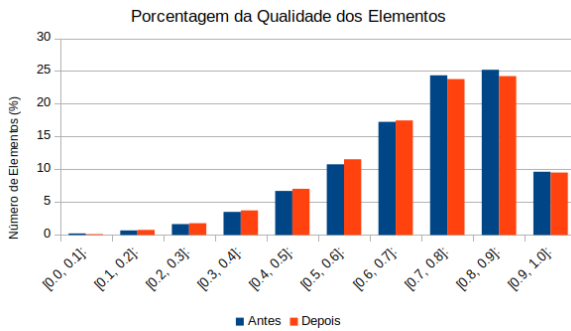
(a) Qualidade da malha para Mão-0.60.90.



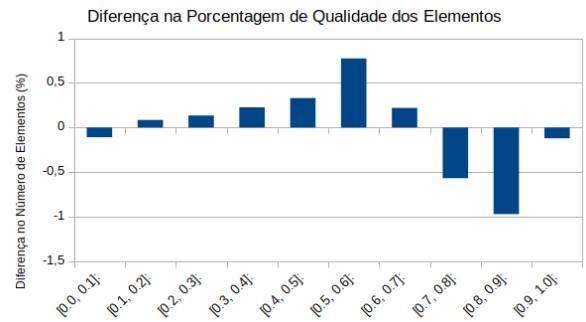
(b) Diferença na qualidade da malha para Mão-0.60.90.



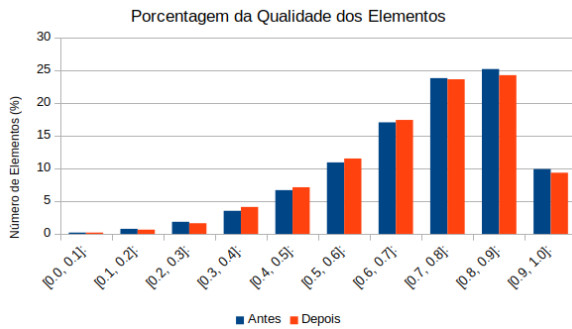
(c) Qualidade da malha para Mão-30.60.90.



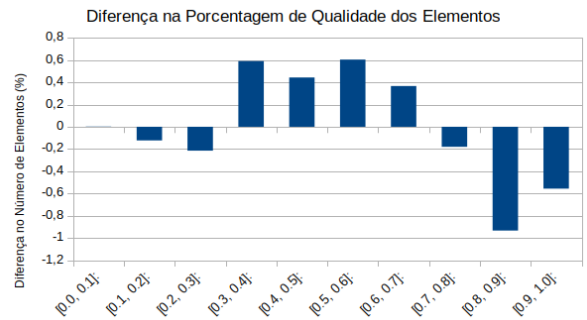
(d) Diferença na qualidade da malha para Mão-30.60.90.



(e) Qualidade da malha para Mão-60.0.30.



(f) Diferença na qualidade da malha para Mão-60.0.30.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

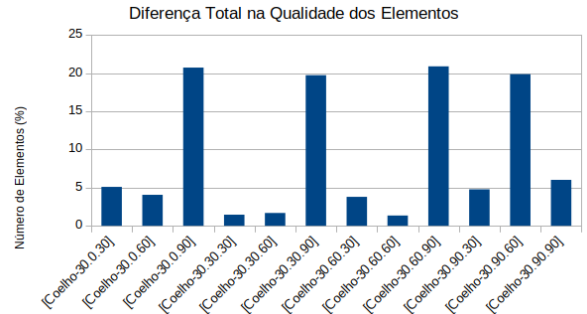
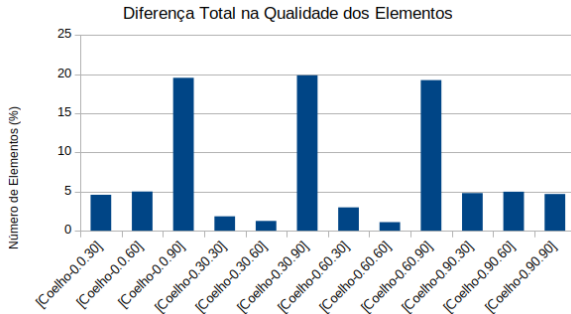
Para os casos menos discrepantes mostrados na Figura 39, pode-se ver que, embora os elementos gerados tenham perdido qualidade, a variação em cada faixa foi baixa, menor que 0,6% na faixa com maior diferença entre a qualidade dos elementos para o caso de teste [Coelho-30.60.60], e , menor do que 1% para o caso de teste [Coelho-60.90.30].

Ao final dos testes realizados, pode-se perceber uma tendência, que quanto maior a diferença total, melhor é a qualidade da malha em relação aos casos em que não foram aplicados a

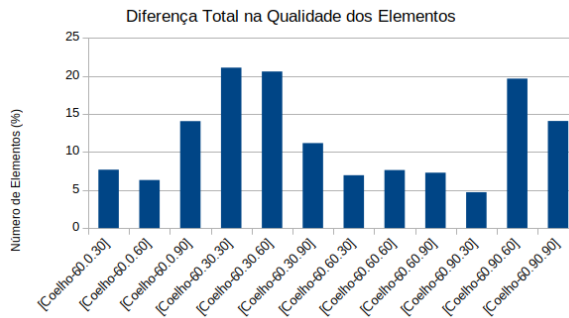
Figura 35 – Comparativo entre as diferenças totais para o modelo do Coelho no algoritmo paralelo.

(a) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo do Coelho com 0° no eixo X.

(b) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo do Coelho com 30° no eixo X.



(c) Diferenças nas porcentagens da qualidade das malhas para o modelo do Coelho com 60° no eixo X.

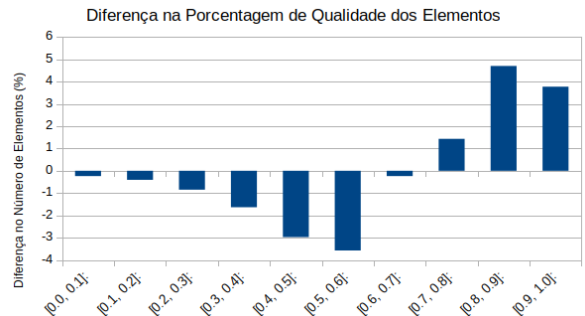
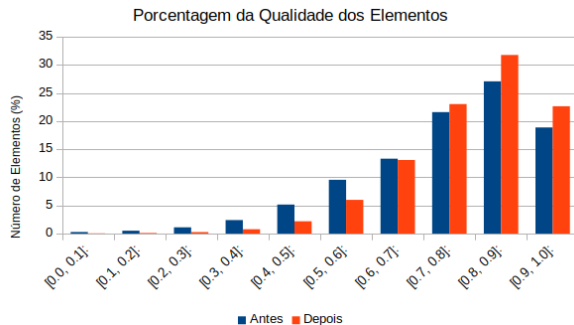


Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 36 – Maior discrepância para Coelho com 0° no eixo X (algoritmo paralelo).

(a) Qualidade da malha para Coelho-0.30.90.

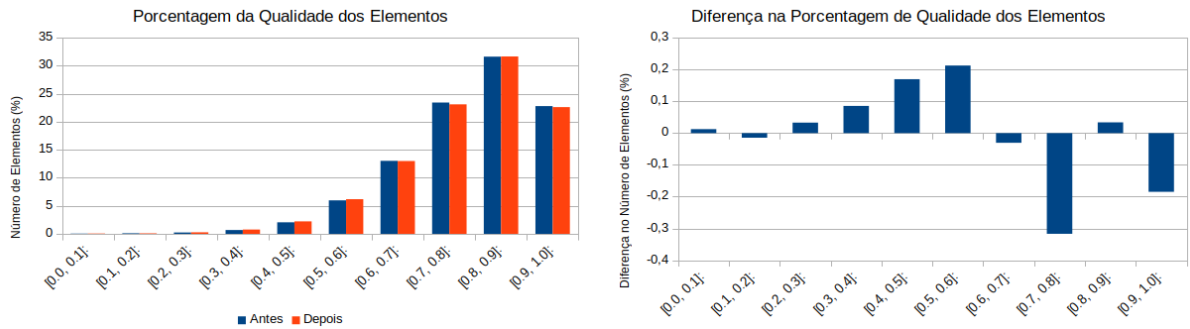
(b) Diferença na qualidade da malha para Coelho-0.30.90.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

transformada. Além disso, nota-se que, na maior parte dos casos de teste, o algoritmo sequencial apresentou uma melhora na qualidade da malha gerada.

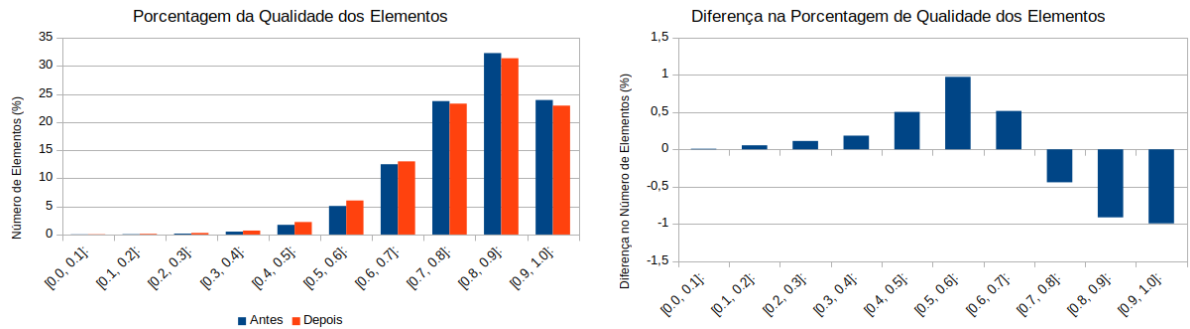
Figura 37 – Menor discrepância para o modelo do Coelho com 0° no eixo X (algoritmo paralelo).
 (a) Qualidade da malha para Coelho-0.60.60. (b) Diferença na qualidade da malha para Coelho-0.60.60.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

Figura 38 – Maiores discrepância para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo) (continuação).

(c) Qualidade da malha para Coelho-60.90.30. (d) Diferença na qualidade da malha para Coelho-60.90.30.

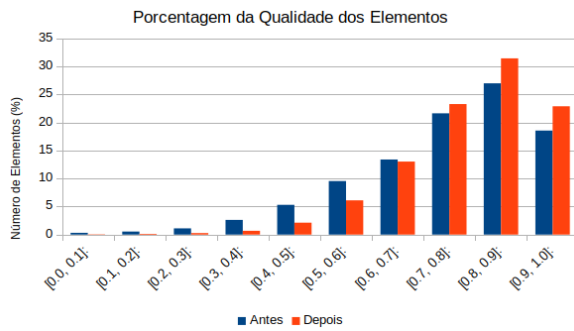


Fonte: Produzida pelo autor (2018).

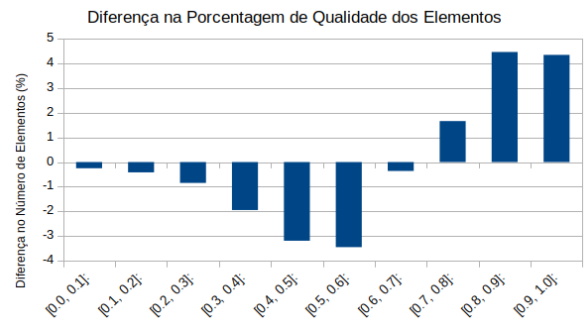
A próxima seção apresenta as conclusões acerca dos resultados obtidos neste trabalho de forma geral, assim como os trabalhos futuros.

Figura 39 – Menores discrepâncias para o modelo do Coelho com 30° e 60° no eixo X (algoritmo paralelo).

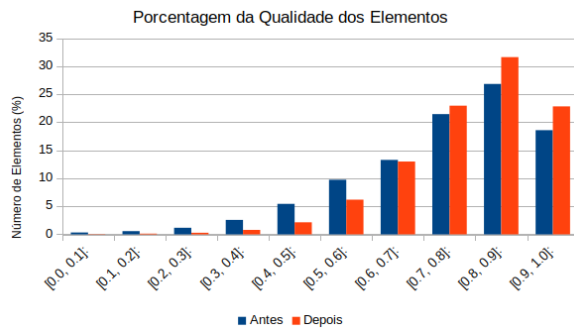
(a) Qualidade da malha para Coelho-30.60.90.



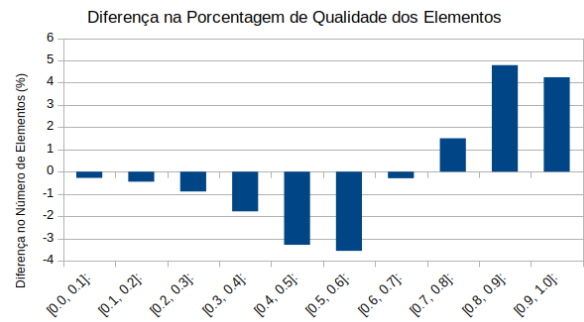
(b) Diferença na qualidade da malha para [Coelho-30.60.90].



(c) Qualidade da malha para Coelho-60.30.30.



(d) Diferença na qualidade da malha para Coelho-60.30.30.



Fonte: Produzida pelo autor (2018).

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Contribuições do trabalho

Este trabalho apresentou uma técnica conhecida como transformada de Hotelling para melhoria na qualidade de malhas geradas sequencialmente e em paralelo. A ideia principal da técnica consiste em descobrir os autovalores e autovetores que melhor representem a orientação do modelo em estudo, e, em seguida, alinhar esses autovetores com as coordenadas globais, permitindo, assim, uma melhor definição do eixo de particionamento.

A transformada, tanto para o algoritmo sequencial quanto para o paralelo, manteve ou reduziu a quantidade de elementos considerados ruins, ou seja, manteve ou melhorou a qualidade geral da malha. Desta forma, os resultados mostraram que o algoritmo apresentado por Freitas *et al.* (2016) funciona melhor para modelos alinhados aos eixos globais, pois a geração da malha depende da estrutura da *octree* que, por sua vez, é alinhada aos eixos globais.

Foi observado que o alinhamento dos eixos do modelo aos eixos globais fez com que a escolha do plano de particionamento do modelo gerasse uma divisão com uma menor área de malha de interface.

Por fim, observou-se que, em alguns casos de teste, houve um deslocamento de elementos da faixa de médios para a faixa de ruins, ou da faixa de elementos bons para elementos médios. Porém, os valores apresentados de tal deslocamento foram pequenos, não inviabilizando nem anulando os bons resultados obtidos a partir da aplicação da técnica da transformada de Hotelling.

6.2 Trabalhos futuros

Alguns pontos ainda podem ser melhorados neste trabalho. O primeiro, seria realizar mais testes em modelos mais refinados e com um maior número de faces contornos. Nesse trabalho, o modelo que apresentou tais características (modelo da Mão), demonstrou pouca diferença na qualidade.

A segunda melhoria seria na aplicação da transformada de Hotelling a cada particionamento realizado, fazendo com que os domínios em cada processo fiquem alinhados e, conseqüentemente, a qualidade da malha gerada em cada subdomínio seja melhorada.

REFERÊNCIAS

- BOROUCHAKI, H.; GEORGE, P.-L. Quality mesh generation. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics**, v. 328, n. 6, p. 505–518, 2000.
- CONCI, A.; AZEVEDO, E.; LETA, F. R. **Computação gráfica**. [S.l.]: Elsevier, 2008.
- DOMPIERRE, J.; VALLET, M.-G.; LABBÉ, P.; GUIBAULT, F. An analysis of simplex shape measures for anisotropic meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 194, n. 48-49, p. 4895–4914, 2005.
- FREITAS, M. O.; WAWRZYNEK, P. A.; CAVALCANTE-NETO, J. B.; VIDAL, C. A.; CARTER, B. J.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. Parallel generation of meshes with cracks using binary spatial decomposition. **Engineering with Computers**, Springer, v. 32, n. 4, p. 655–674, 2016.
- HJELLE, Ø.; DÆHLEN, M. **Triangulations and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- JOLLIFFE, I. T. Principal component analysis and factor analysis. In: **Principal component analysis**. [S.l.]: Springer, 1986. p. 115–128.
- LIU, A.; JOE, B. Relationship between tetrahedron shape measures. **BIT Numerical Mathematics**, Springer, v. 34, n. 2, p. 268–287, 1994.
- NETO, J. C.; WAWRZYNEK, P. A.; CARVALHO, M. T.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. An algorithm for three-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. **Engineering with Computers**, Springer, v. 17, n. 1, p. 75–91, 2001.
- PARTHASARATHY, V.; GRAICHEN, C.; HATHAWAY, A. A comparison of tetrahedron quality measures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 255–261, 1994.
- PEARSON, K. Principal components analysis. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 6, n. 2, p. 559, 1901.
- PÉBAY, P.; BAKER, T. Analysis of triangle quality measures. **Mathematics of Computation**, v. 72, n. 244, p. 1817–1839, 2003.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in C**. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1996. v. 2.
- SMITH, L. I. **A tutorial on principal components analysis**. [S.l.], 2002.
- WANG, J.; YU, Z. Adaptive and quality tetrahedral mesh generation. In: IEEE. **Computer Science and Automation Engineering (CSAE), 2011 IEEE International Conference on**. [S.l.], 2011. v. 3, p. 323–327.
- ZAGARIS, G.; PIRZADEH, S.; CHRISOCHOIDES, N. A framework for parallel unstructured grid generation for practical aerodynamic simulations. In: **47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 980.