UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DANIEL PIRES MITCHEL

SISTEMAS DE VOTAÇÃO E O TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW

FORTALEZA

2018

DANIEL PIRES MITCHEL

SISTEMAS DE VOTAÇÃO E O TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M668s Mitchel, Daniel Pires.
Sistemas de Votação e o Teorema da Impossibilidade de Arrow / Daniel Pires Mitchel. – 2018.
55 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Sistemas de Votação. 2. Teorema de Arrow. 3. Teoria da Escolha Social. I. Título.
CDD 510

DANIEL PIRES MITCHEL

SISTEMAS DE VOTAÇÃO E O TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 25/10/2018.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Profª. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____
Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação do Ceará (IFCE)

Ao meu filho, Pierre Mitchel.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me permitir chegar até aqui e concretizar mais um sonho;

Aos meus pais, que me deram além da vida, amor, carinho e incentivo em todos os momentos da minha vida;

A minha mulher Ana Carolina Mitchel, por toda atenção, dedicação e compreensão nas minhas ausências e por me amar muito mais do que eu mereço;

Ao meu filho Pierre Mitchel, que foi concebido e nasceu no decorrer desse curso, tornando-se assim um grande incentivador à conclusão deste trabalho;

A minha sogra (minha vida) Valdeisa Moura, por fazer papel de mãe em muitos momentos, por acreditar em mim e sempre me incentivar a ir além;

Ao meu sogro Wilson Gomes por ser uma fonte inesgotável de trocas de ideias e conhecimentos diversos;

Aos meus cunhados Richard Wagner e Wilson Jr. que mesmo nos momentos mais difíceis, nunca me deixaram faltar o líquido sagrado;

A minha irmã Elizabeth Mitchel, pela amizade e companheirismo;

As minhas cunhadas Priscila Oliveira e Flaviane Mesquita por toda a força e otimismo passados a mim para a conclusão dessa etapa da vida;

Aos meus afilhados e sobrinhos João Victor, Richard Filho, Pedro Henrique e Maria Eduarda por se fazerem sempre presentes em todos os momentos em família;

Ao meu orientador Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides, que com toda a sua humildade, dedicação e paciência, acreditou no meu trabalho, e mesmo correndo contra o tempo e seus vários afazeres não desistiu de mim e tornou tudo isso possível;

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFC, por todo empenho, atenção e ensinamentos valiosíssimos destinados a todos nós alunos;

Ao meu colega e agora amigo Francisco Alberto, não somente pela ajuda na formatação desde trabalho, mas por ser um ser humano incrível;

Aos colegas de turma e também amigos Ângelo Victor, Antônio Valdemir, Carlos Davyson, Camila, David Bispo, Max, pelos momentos de estudo, almoços e descontração;

A minha amiga Amélia Brayner, que mesmo estando em vários pontos do planeta sempre esteve tão próximo e me deu bastante apoio; além de ter me presenteado com a oportunidade de conhecer o Pedro, um aluno exemplar e sem igual, e o Dário, um ser humano que é um exemplo a ser seguido;

Aos Professores participantes da banca examinadora Profa. Dra. Ana Shirley Ferreira da Silva e Prof. Dr. Ângelo Papa Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões;

Enfim, a todos que de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

“O melhor para o grupo acontece quando todos no grupo fazem o melhor para si e para o grupo. ” (JOHN FORBES NASH JR.)

RESUMO

Ao longo da história, vários pesquisadores sugeriram diferentes sistemas eleitorais que tinham como intuito definir uma maneira justa ou ética de expressar a "vontade popular" sobre um certo conjunto de escolhas. O foco desse trabalho é em sistemas de votação por ranqueamento em que, ao invés de cada cidadão votar simplesmente no melhor candidato (em sua opinião), ele deverá votar em uma ordem sobre todos os possíveis candidatos (ou opções) de uma eleição. O sistema deve, então, seguindo um conjunto pré-determinado de regras, produzir uma "ordem eleita" pela população. Neste trabalho, estudamos algumas propriedades que usualmente se espera, ou se deseja, para que um tal sistema seja considerado justo. Observamos que o resultado de uma eleição pode mudar dramaticamente quando se usa sistemas diferentes, mesmo que ambos os sistemas pareçam, à priori, retornar escolhas justas. Isso confirma que o resultado de uma eleição está diretamente ligado ao tipo de sistema eleitoral que é adotado. Fazemos também uma análise de vários sistemas influentes ao longo da história da então chamada "Teoria da Escolha Social" para, enfim, terminamos exibindo uma demonstração do influente Teorema da Impossibilidade de Arrow, que diz que em sistemas de votação *por ranqueamento* certas condições importantes e naturais não podem ser satisfeitas simultaneamente. Concluímos, então, que em votações democráticas é necessário abrir mão de uma dessas propriedades (ou não usar um sistema por ranqueamento). Dessa forma, o estudo dos sistemas eleitorais mais comuns tem um papel sofisticado em nos ajudar a definir, criticar ou influenciar o sistema eleitoral utilizado em uma eleição, nos ajudando a perceber os pontos fortes e fracos de cada um deles.

Palavras-chave: Sistemas de votação. Teorema de Arrow. Teoria da Escolha Social.

ABSTRACT

Throughout history, several researchers have suggested different electoral systems that were intended to define a fair or ethical way of expressing the “popular will” over a certain set of choices. The focus of this work is on ranked voting electoral system where, instead of each citizen voting simply for the best candidate (on his / her opinion), he / she should vote in an order on all possible candidates (or options) in an election. The system must then, following a predetermined set of rules, produce an “elected order” by the population. In this work, we study some properties that are usually expected, or desired, for such a system to be considered fair. We note that the outcome of an election can changes dramatically when using different systems, even though both systems seem, a priori, to return fair choices. This confirms that the outcome of an election is directly linked to the type of electoral system that is adopted. We also make an analysis of several influential systems throughout the history of the so-called “Social Choice Theory”. We end this dissertation by exhibiting a proof of Arrow's influential Impossibility Theorem, which says that in any voting system certain desired conditions cannot be satisfied simultaneously. We conclude that in any democratic poll it is necessary to give up one of these properties (or not to use a ranked system). In this way, the study of the most common electoral systems has a sophisticated role in helping us to define, criticize or influence the electoral system used in an election, helping us to perceive the strengths and weaknesses of each one of them.

Keywords: Voting systems. Arrow Theorem. Theory of social choice.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Escolha Social é um tópico de pesquisa interdisciplinar que se encontra na fronteira comum das Ciências Políticas, Economia, Matemática e até mesmo Filosofia. Tendo como base a forma como a sociedade toma suas decisões coletivas, levando em conta métodos mais ou menos adequados, os anseios de quem a compõe, este tema pode ser abordado sob várias perspectivas: a política, que analisa os procedimentos de votação, da estabilidade e da justiça dos resultados; o filosófico, que reconhece que os modos como se adotam as decisões podem traduzir ou violar diferentes princípios éticos, de modo a sustentar, ou não, a sua legitimidade e promover, ou limitar, as liberdades coletivas ou individuais; o econômico, porque toda grande decisão, neste aspecto, é tomada muitas vezes por indivíduos eleitos e atentos às consequências das suas ações sobre as suas possibilidades de reeleição; o matemático, porque o estudo dos problemas de agregação de preferências, e suas regularidades, são bons problemas de modelagem e análise matemática.

O estudo dos sistemas eleitorais não só esclarece a real possibilidade de eleição de cada candidato de maneira justa, como também permite discutir alguns problemas metodológicos de grande profundidade e de bastante alcance interdisciplinar, como a possibilidade de definir uma “vontade popular” ou de discutir as “preferências sociais”. Partindo do princípio de que a história desempenha um papel fundamental na compreensão do caminho percorrido desde que esta discussão se iniciou, optamos por destinar o segundo capítulo desse trabalho ao estudo de alguns aspectos interessantes na história das eleições.

Tendo como objetivo a Teoria Matemática das Eleições, a análise da tomada de decisões coletivas a partir de preferências individuais, no capítulo descrevemos a *Contagem de Borda* e o *Modelo de Condorcet.* Nos referidos sistemas encontram-se as ideias embrionárias que servirão de base para apresentarmos os principais sistemas eleitorais e aquelas que nos parecem ser as condições imprescindíveis a qualquer sistema eleitoral para que este possa representar, verdadeiramente, a vontade popular.

Uma vez feito todo esse estudo de condições e sistemas eleitorais, enunciamos e apresentamos uma demonstração, no capítulo quatro, do Teorema da Impossibilidade de Arrow.

2 ELEIÇÕES E HISTÓRIA

O voto é uma grande conquista da humanidade. O sistema democrático é, sem dúvida, o que mais respeita esta conquista, já que tem como base a relação “a cada eleitor corresponde um voto”. Popularmente reconhecidas como o ponto máximo do exercício da democracia, as eleições têm uma trajetória bem mais complexa do que possamos pensar.

Acredita-se que as civilizações greco-romanas foram o berço desse sistema representativo. Porém, alguns historiadores acreditam que o período e o lugar de origem da votação foram outros. Algumas narrativas míticas celtas e hindus falam sobre a participação dos druidas e sacerdotes na escolha de seus líderes políticos. Quando a prática surgiu na cidade-estado de Atenas, no século 5 a.C., apenas cerca de um quinto da população poderia participar das eleições.

Não só as eleições, bem como o proferimento do voto foram alvo de algumas transformações. Por volta do século II a.C., os romanos tiveram a ideia de criar uma urna onde os votos fossem depositados. Antes disso, o voto era proferido publicamente, o que poderia causar infortúnios diversos na condução de um processo eleitoral livre de qualquer conchavo preexistente. Contudo, essa prática era recorrente entre os príncipes do Sacro-Império Germânico, que decidiam coletivamente quem seria o rei.

Até o século XIX, a compreensão do voto como um direito estendido à maioria dos cidadãos era pouco difundida. Até mesmo nos Estados Unidos da América, um dos mais importantes focos dos ideais de liberdade e autonomia, seus partícipes acreditavam que a ampliação do voto era uma medida que poderia prejudicar a condução de importantes questões nacionais.

Mas afinal, o que tem a ver matemática com escolha social? Bem, o assunto realmente parece não ter conexão com a matemática, mas isso é somente aparência, já que este é um dos poucos momentos em que a matemática e a Política se relacionam. A matemática nos ajuda a compreender como funcionam os processos de escolha social, bem como tenta mostrar que estes métodos nem sempre são perfeitos.

A Matemática ajuda a definirmos formalmente o que é um sistema eleitoral a fim de que possamos estudar propriedades gerais dos diversos sistemas. Com isso, cria-se um tópico de pesquisa ativamente estudado até os dias de hoje. Pretendemos, fazer uma breve introdução histórica a fim de contextualizar o estudo. Dos primeiros registros históricos conhecidos, inclui-se o dilema de Plínio, a eleição do Papa, a contagem de Borda e o modelo de Condorcet.

2.1 As primeiras expressões de voto

A relação entre poder e voto surge de maneira natural em qualquer estrutura social. Ao longo da história, vários grupos tentaram e conseguiram ditar um sistema eleitoral que aumente suas chances de ganhar ou permanecer no poder.

Com isso surgem alguns questionamentos: Como os sistemas eleitorais funcionam? Uma vez facultado o direito do voto como se dá esse processo?

Uma resposta a estas perguntas é dada por SAARI(1995):

> (...) os primeiros processos envolviam tipicamente uma escolha entre SIM e NÃO.(...) uma abordagem do século V a.C. (...) introduz uma modalidade em que os candidatos se expõem a uma assembleia para serem julgados pela multidão que demonstra a sua escolha através de gritos e aclamação (...),procedimento que pode ser considerado como o antecessor da atual contagem dos votos (...).
> Entre muitos outros processos encontra-se o tradicional levantar das mãos e a tentativa ateniense de introduzir um certo grau de anonimato ao deixar pequenas pedras em vasos. O que encontramos, ao longo dos primórdios da História, do ato eleitoral, desde os fóruns romanos e gregos até ao século XVII, é uma grande ênfase no processo - quem pode votar? Como? Quem é elegível? Quem ganha? E como evitar fraude e manipulação?

2.2 O dilema de Plínio

Dentre os primeiros relatos da história da Roma antiga encontra-se escritos do historiador romano Gaius Plinius Caecilius, também conhecido como Plínio, o Jovem, COMAP (61 ou 62-113). Afranius Dexter, cônsul da época, foi encontrado morto e não se sabia determinar a causa de sua morte. Uma moção foi instaurada perante o senado sobre os escravos libertos do cônsul, para investigar a causa do óbito.

Esta moção se deu a partir de um inquérito para apurar a verdade sobre a morte do cônsul e decidir o que fazer com os escravos. “Um senador pensou que deviam ser perdoados. Um segundo senador pensou que deviam ser deportados para uma ilha, um terceiro senador que deveriam ser executados” (COMAP, 1994).

A diversidade de propostas fez com que Plínio separasse as opiniões em três categorias. Plínio descreve três grupos de senadores romanos com opiniões diferentes sobre o que fazer aos escravos libertos, caso se viesse a comprovar que a morte do cônsul não se tratou de suicídio:

- Grupo I - Acreditam na inocência dos escravos libertos, e propõem o perdão; este grupo representa 40% dos senadores;

- Grupo II - Consideram os escravos libertos culpados; no entanto, como acreditam que eles se limitaram a obedecer a uma ordem do cônsul, propõem a deportação para uma ilha, representando este grupo 35% dos senadores;

- Grupo III - Acreditam que os escravos libertos são culpados e como tal devem ser executados, representando este grupo uma minoria de 25% dos senadores.

Com estas porcentagens o resultado da votação vai depender do sistema eleitoral usado pelos senadores. Os escravos libertos seriam perdoados se o sistema eleitoral usado fosse o mais usual, um homem um voto numa eleição dentre todas as propostas pelo senador. Mas se, por exemplo, em vez de se poder votar em todas as alternativas só se pudesse exercer uma votação entre duas, e a votação fosse entre perdão e deportação, o que aconteceria aos escravos libertos? Ou apenas uma votação entre perdão e execução? Ou apenas entre deportação e execução? Como exercício, calcule as porcentagens de votos para cada opção.

Mas porque não considerar uma votação em que fosse realizada seguido um conjunto de regras, previamente acordado, em dois turnos, com as três alternativas, por exemplo:

deportação vs. execução e, em seguida, a alternativa vencedora vs. perdão? Poderia existir, neste último caso, voto estratégico? Ou seja, em eleições com mais de duas alternativas um dos eleitores fornece uma informação enganadora com o objetivo de maximizar a utilidade do seu voto. Atendendo ao objetivo do grupo que está a favor do perdão é de se esperar que tudo façam para que os escravos sejam perdoados. Assim, se os elementos deste grupo na votação deportação vs. execução optarem pela execução, forçam a votação final entre execução e perdão; estando agora sob responsabilidade do grupo que pretende a deportação a decisão final. Então, o objetivo do grupo que quer o perdão pode ser alcançado se, pelo menos, 10% do total de senadores mais um, ou seja, 10/35 que é aproximadamente 29% dos que estão no grupo que querem a deportação (Grupo II) passem na votação final a votar a favor do perdão, o que teria boas chances de acontecer. Por outro lado, se na primeira votação todos do Grupo I e II votassem pela deportação (que seria a opção mais próxima para o objetivo de ambos os grupos), então a segunda votação seria deportação contra perdão, mas neste caso todos dos Grupos II e III votariam novamente pela deportação e o grupo do perdão perderia com toda certeza.

2.3 A eleição do Papa

Durante a disputa entre Henrique II de Inglaterra e Thomas Becket ainda não existia uma legislação pré-definida para a eleição de um Papa. Mesmo com vários cardeais reunidos, era notório que os clérigos necessitavam de um sistema de eleição, e consequentemente, do estabelecimento de regras que garantissem que haveria um vencedor.

O que existia na época era apenas a imposição de maior ou menor importância aos cardeais, indo de acordo com os mais sábios e aos espiritualmente mais dotados de méritos. Esta dualidade acarretou, em 1130, a eleição de um Papa e um “Antipapa” (um Cardeal que, não aceitando a derrota, se autodenomina como Papa) dando lugar a uma rixa no seio da Igreja. Da mesma forma, esse fato se repetiu em 1159 com a eleição do Papa Alexandre III e do Antipapa Victor IV. Esses dois casos, evidenciam a importância de se definir, com rigor, um sistema eleitoral.

Os sistemas eleitorais são de suma importância para deixar bem claro quem tem direito de voto e o que é necessário para se ter um vencedor. Com o objetivo de não haver mais rixas, a Igreja, no Concílio de Latrão, realizado em 1179, passa a adotar um sistema eleitoral na eleição papal, onde só os Cardeais podem votar. Podendo, a partir de então, qualquer pessoa ser eleita Papa, tendo para isso que obter ⅔ dos votos mais um. E mesmo com esse sistema não se conseguiu evitar rixas. (SAARI, 1995)

Nos dias atuais, o Papa é eleito pelo colégio de cardeais, reunidos no que se chama Conclave, na Capela Sistina, no Vaticano. Em 1975 o então Papa Paulo VI realizou mudanças significativas nas diretrizes para a eleição do Papa, que vieram a ser promulgadas na Constituição Apostólica “Romano Pontifici Eligendo” e onde passaram a não fazer parte do Conclave todos os cardeais com mais de 80 anos. Mas não foram somente essas as alterações, em 1996 o Papa João Paulo II propôs alterações que tiveram papel já na eleição do Papa Bento XVI e também do Papa Francisco. João Paulo II estabeleceu na Constituição Apostólica “Universi Dominici Gregis” que o Colégio de Cardeais só pode ser formado no máximo por 120 cardeais, todos com menos de 80 anos. O Papa é eleito quando obtiver ⅔dos votos mais um; se isso não ocorrer, após um certo número de votações é eleito Papa o cardeal que obtiver metade dos votos mais 1, ou seja, basta uma maioria absoluta simples (JOÃO PAULO II, 1996).

Vale observar que esta regra é uma importante mudança, dado que se pretende que o número de dias de votação não se torne num exercício penoso para todos os cardeais.

E como se dá o processo da eleição de um Papa?

- Quando o Papa morre, o camerlengo, que é o cardeal que assume a igreja interinamente, cumpre um ritual. Ele toca três vezes a testa do Papa com um martelinho e o chama pelo nome de batismo. Sem resposta, ele anuncia oficialmente o seu falecimento;

- O conclave começa 18 dias após a morte do papa, tempo necessário para que os cardeais de todo o mundo cheguem a Roma. Eles se reúnem num edifício ao lado da Basílica de São Pedro e recebem um livro contendo parte da vida e da obra de cada um dos cardeais presentes ao conclave, todos candidatos a ser o novo Papa;

- A eleição é na Capela Sistina, famosa pelas pinturas do genial Michelangelo (1475-1564). Cada cardeal indica o colega que quer como papa e põe o voto (secreto) num cálice. É difícil algum nome receber logo as indicações necessárias: dois terços mais um voto. Por isso, ocorrem várias votações, duas por dia, até surgirem candidatos fortes que consigam atrair cada vez mais apoio;

- No fim de cada rodada, os votos são contados e queimados. Se nenhum cardeal atingiu os dois terços, os votos são queimados com um produto químico que gera uma fumaça negra que sai da capela. Se a votação indicou um novo papa, os votos são queimados com um produto que torna a fumaça branca

- Quando um cardeal atinge dois terços mais um dos votos (ou a maioria simples após 30 votações), o camerlengo pergunta ao vitorioso se ele aceita ser Papa e qual nome deseja usar. Depois, o camerlengo vai ao balcão de pregações na Basílica de São Pedro e diz a famosa frase: Habemus papam, ou seja, “temos um papa”.

2.4 Jean Charles Borda (1733-1799)

Jean Charles Borda nasceu no dia 4 de Maio de 1733 em Dax, uma cidade francesa perto de Bordeaux, sendo filho de uma família nobre; segundo Jean Mascart (MASCART, p. 6) o oficial de cavalaria e capitão naval Jean Charles Borda era um homem notável: matemático; físico experimental; engenheiro de construção naval; astrónomo rigoroso e preciso; foi um dos criadores do sistema métrico (MASCART, pp. 4-5). Com vinte anos debutou para a ciência ao explicar uma questão de Geometria, o que lhe valeu a atenção de D'Alembert e, três anos mais tarde, em 1756, foi aceito na Academia Real das Ciências Francesa. Já membro desta Academia iniciou o estudo sistemático das eleições. Suas descobertas surpreenderam seus contemporâneos. Analisando o sistema eleitoral como um método de agregar opiniões para encontrar uma escolha coletiva, notou que métodos diferentes conduzem a resultados diferentes.

Borda apresentou, oralmente, o problema à Academia Real das Ciências em 16 de julho de 1770, catorze anos antes de ser publicado nas Memórias da Academia sob o título: “Sur les élections par scrutin” (BORDA, p. 657, 1784).

> É a opinião geral, e contra a qual não encontrei ninguém que se objeta, que numa eleição por escrutínio de votos o candidato mais votado é o que reflete a vontade dos eleitores, isto é, o candidato mais votado é aquele que os eleitores preferem entre todos os candidatos. Mas eu vou mostrar que esta opinião, que é verdadeira no caso de uma eleição entre dois candidatos, pode induzir-nos em erro em todos os outros casos (BORDA, 1784).

Ilustrou com um exemplo, no qual vinte e um eleitores escolhiam entre três candidatos, onde considerou as preferências relativas de cada eleitor, isto é, a forma como cada eleitor hierarquizava os candidatos e reparou que era possível eleger um candidato que a maioria dos eleitores colocava em último lugar. Bastava para isso que os votos nos outros dois estivessem suficientemente divididos.

Vamos analisar tal exemplo: suponhamos que temos três candidatos, A, B e C. Dos 21 eleitores, 8 colocam o candidato A em primeiro lugar, dentre os quais 1 prefere o candidato B ao candidato C e 7 preferem o candidato C ao candidato B. Dentre os restantes, 7 preferem o candidato B e 6 preferem o candidato C, no entanto, para estes 13 eleitores o candidato que colocam em último lugar é o candidato A (BORDA, pp. 657-658).

Quantidade de eleitores	Ordem de preferência
1	$A > B > C$
7	$A > C > B$
7	$B > C > A$
6	$C > B > A$

Neste exemplo, o candidato mais votado, segundo a maneira usual de contar os votos, é A, com 8 votos a favor, contra 7 em B e 6 em C. No entanto, esse é o candidato mais detestado pela maioria do eleitorado, uma vez que 13 eleitores em 21 o colocam em último lugar (BORDA, p. 658).

Borda afirmava que a injustiça da maneira usual de contar os votos era devido ao fato dos eleitores não poderem manifestar, no voto, a sua completa opinião sobre todos os candidatos. Para Borda era "necessário dar aos eleitores uma forma de se pronunciarem sobre a ordem de mérito de cada um dos candidatos" (BORDA, p. 658).

Para reforçar a sua opinião chamou a atenção para o fato do candidato A perder em eleições entre pares de candidatos (ou comparações dois a dois) para os outros candidatos. Por exemplo, se a eleição fosse apenas entre A e B, teríamos que A receberia 8 votos e B receberia 13 votos. Entre A e C, teríamos 8 votos para A e 13 votos para C e entre B e C teríamos 8 votos para B e 13 votos para C. Ou seja, Borda salientou o fato do candidato A ser aquilo que mais tarde viria a se chamar um perdedor de Condorcet (BORDA, p. 32).

Como alternativa, Borda apresentou duas maneiras de assimilar as preferências dos eleitores. A seguir, iremos apreciar a elegância da prova, por ele apresentada, de que a segunda maneira de contar as preferências dos eleitores equivale à primeira (BORDA, p. 659).

2.4.1 Eleição por ordem de mérito

Analisemos a primeira maneira de contar as preferências que Borda apresentou. Ele denominou essa maneira de *"eleição por ordem de mérito"*.

> Suponhamos, daqui em diante, que temos três candidatos, e que cada eleitor escreva os seus três nomes num voto, ordenando-os segundo a ordem de mérito que atribui a cada um, e sejam (*A, B, C*), *(A, C, B)*, *(B, C, A)*, etc, os seus possíveis votos; eu considero, daqui em diante um destes votos, por exemplo, o primeiro (*A*, *B*, *C*), aquele em que um eleitor dá o primeiro lugar a *A*, o segundo a *B* e o terceiro a *C*, e eu digo que o grau de superioridade que aquele eleitor dá a *A* sobre *B*, é o mesmo que o mesmo eleitor dá a *B* sobre *C*; com efeito, como o segundo candidato está igualmente sujeito a ocupar todos os graus de mérito, tal e qual os outros dois candidatos *A* e *C*, não temos assim nenhuma razão para dizer que o eleitor que fixou a posição entre os três candidatos, tenha querido colocar *B* mais perto de *A* do que de *C*, ou o que é a mesma coisa, que ele tenha atribuído maior superioridade ao primeiro sobre o segundo, nem ao segundo sobre o terceiro (BORDA, p. 659).

Segundo a explicação de Borda, ele continua citando que não há nenhuma diferença entre os votos de cada eleitor, dado que é suposta a igualdade entre todos os eleitores, salientando, ainda uma vez mais, que a cada lugar corresponde sempre o mesmo grau de mérito. Daí, ele passa a explicar como avaliar os graus de mérito:

> Se [numa eleição com três candidatos] representarmos por α o mérito que cada eleitor atribui ao último lugar, e por $\alpha + \beta$o que ele atribui ao segundo lugar, representaremos por $\alpha + 2\beta$ o mérito atribuído ao primeiro lugar, e o mesmo grau de mérito se dá a cada lugar dado pelos outros eleitores; assim cada último lugar será igualmente representado por α, cada segundo por $\alpha + \beta$ e cada primeiro por$\alpha + 2\beta$ (BORDA, p. 660).

Partindo desse pressuposto, Borda generaliza o seu método para o caso em que há um número qualquer de candidatos:

> No caso de uma eleição com quatro candidatos, os méritos atribuídos pelos eleitores aos quarto, terceiro, segundo e primeiro lugares, podem ser representados por: α; $\alpha + \beta$; $\alpha + 2\beta$; $\alpha + 3\beta$. Far-se-á de igual modo, para um grande número de candidatos" (BORDA, p. 660).

Uma vez determinada a atribuição dos graus de mérito, ele apresenta o procedimento a seguir para a contagem dos graus de mérito totais de cada candidato:

Sabendo disto, fica fácil também perante uma eleição qualquer, calcular o "mérito" obtido por qualquer um dos candidatos. Assim, para cada candidato, multiplicaremos por αo número de votos em que ele foi listado como último lugar; por $\alpha + \beta$ o número de votos em que ele ficou em penúltimo lugar; por $\alpha + 2\beta$, o número de antepenúltimos lugares e assim sucessivamente. Serão considerados todos estes diferentes produtos para cada candidato, e as somas destes produtos representarão o mérito obtido por cada um dos candidatos ou sua quantidade de votos.

Por exemplo, se considerarmos $\alpha = 1$ e $\beta = 1$estabelecemos que ao último lugar corresponde 1 ponto, ao penúltimo correspondem 2 pontos, ao antepenúltimo 3, e assim sucessivamente até ao primeiro que será igual ao número de candidatos. Veremos adiante que α e βpodem assumir os valores que quisermos sem que isso altere os resultados relativos dos candidatos.

Considerando o exemplo de Borda, referido anteriormente, em que vinte e um eleitores votam em três candidatos e cujos votos são:

Eleitor	Ordem de preferência
1	$A > B > C$
2	$A > C > B$
3	$A > C > B$
4	$A > C > B$
5	$A > C > B$
6	$A > C > B$
7	$A > C > B$
8	$A > C > B$
9	$B > C > A$
10	$B > C > A$
11	$B > C > A$
12	$B > C > A$
13	$B > C > A$
14	$B > C > A$
15	$B > C > A$
16	$C > B > A$
17	$C > B > A$
18	$C > B > A$
19	$C > B > A$
20	$C > B > A$
21	$C > B > A$

Como estamos na presença de três candidatos, vamos atribuir ao primeiro lugar 3 pontos, ao segundo 2 e ao terceiro 1.

Realizando a devida contagem temos: o número de pontos do candidato A é 37, obtidos da multiplicação de seus 8 primeiros lugares por 3 e adicionado 13 dos seus 13 últimos lugares, ou seja, $8 \cdot 3 + 13 \cdot 1 = 37$; o candidato B terá 42 pontos, pois 7 eleitores colocam-no em primeiro lugar, assim como outros 7 o colocam em segundo e, de igual modo, outros 7 o colocam em terceiro, temos então $7 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 42$; por fim, o candidato C apresenta um resultado de 47 pontos, uma vez que 6 eleitores o colocam em primeiro lugar, 14 em segundo e 1 em terceiro, nisso $6 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 47$.

Assim, constatamos que usando a eleição por ordem de mérito, o candidato mais votado é C seguido do candidato B e, por fim, o candidato A. Quando comparamos estes resultados com os obtidos segundo a maneira usual de contar os votos, que considera apenas a quantidade de vezes em que cada candidato fica como primeiro na lista de cada eleitor, percebemos que houve uma troca de lugares entre o primeiro e o último. Ou seja, a maneira usual de contar os votos consegue eleger em primeiro lugar o candidato que a maioria dos eleitores coloca em último lugar, tal como anteriormente referido.

A eleição em que, de acordo com Borda, a contagem dos votos é feita por ordem de mérito ficou conhecida por *Contagem de Borda.*

2.4.2 O método das eleições particulares

Depois de apresentar a primeira maneira de contar votos usando o exemplo com 21 eleitores, Borda passa a descrever o que ele chamou de *"método das eleições particulares"*. Nesta empreitada, Borda realiza todas as eleições possíveis entre pares de candidatos, chamando cada uma delas de eleição particular.

> Suponhamos que temos uma eleição entre três candidatos A, B e C; como podemos combinar estes três candidatos dois a dois de três maneiras diferentes, realizaremos três eleições particulares. Sejam os resultados destas eleições os seguintes:

1ª eleição: entre A e B	a votos para A
	b votos para B

2ª eleição: entre A e C	a' votos para A
	c votos para C

3ª eleição: entre B e C	b' votos para B
	c' votos para C

> O método das eleições particulares trata de encontrar o valor comparativo dos votos obtidos por cada um dos três candidatos. Para isso, vamos supor que estas eleições são o resultado de uma eleição por ordem de mérito. Isto é possível pois conhecemos o lugar ocupado por cada candidato no voto de cada eleitor. Podemos determinar o número de votos que um candidato tem numa eleição realizada entre ele e um outro candidato qualquer (BORDA, p. 662).

Considerando as duas eleições particulares, que cada candidato vai disputar, é possível determinar o número de pontos obtidos por cada candidato como se estivesse disputando uma eleição por ordem de mérito. Assim, o candidato A na comparação com o candidato B obtém a votos e na comparação com o candidato C obtém a' votos. Logo, o número de pontos do candidato A é dado pela soma $a + a'$. Analogamente, obtemos para o candidato B a quantidade $b + b'$ pontos e, o candidato C obterá $c + c'$ pontos.

Posto isto, Borda parte de uma eleição por ordem de mérito em que considera x o número de eleitores que dão a sua preferência a A, colocando-o em primeiro lugar no voto, y o número de eleitores que o colocam em segundo lugar e z o número de eleitores que o colocam em terceiro lugar. Dado que estamos na presença de uma eleição entre três candidatos a votação em A é dada por $3x + 2y + z$. Representando por ξ o número de eleitores, que é igual a $x + y + z$, podemos eliminar z da pontuação do candidato A, que é igual a $2x + y + \xi$. Dado que a parcela ξ é comum à votação de todos os candidatos, poderíamos dizer que A recebe $2x + y$ pontos. Ao fazer isso para todos os candidatos, não alteramos a ordem relativa entre eles. Observe que isso é mesmo que escolher $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ como pesos para a contagem de Borda. Veja também que para valores quaisquer de α e β, a pontuação do candidato seria $(2x + y)\beta + \xi\alpha$. E que para quaisquer α e β positivos a ordem entre os candidatos não se altera. O mesmo vale se houverem mais candidatos.

De modo natural, Borda mostra que o método da eleição por ordem de mérito e o método das eleições particulares, são equivalentes. O argumento dele é sobre três candidatos, mas também vale em geral.

> Agora, observe-se que por cada primeiro lugar que o candidato A tenha na eleição por ordem de mérito ele recebe dois votos nas eleições particulares, a saber, um da eleição entre A e B e outro da eleição entre A e C; que por cada segundo lugar que venha a obter na eleição por ordem de mérito ele terá exatamente um voto nas eleições particulares; e pela terceira posição na eleição por ordem de mérito ele não receberá nenhum voto na eleição particular. Donde concluímos que o número de votos que ele terá em todas as eleições particulares, a + a', é igual a 2x + y; mas como acabamos de verificar a quantidade 2x + y representa o valor da votação no candidato A na eleição por ordem

> de mérito; por conseguinte a quantidade a + a' representará nas eleições particulares. Isto também se aplica a eleições realizadas entre um grande número de candidatos. (BORDA, p. 663)

De acordo com os votos do exemplo apresentado por Borda, podemos determinar os valores de a, a', b, b', c, c', sabendo que os resultados das eleições particulares podem ser determinados caso cada eleitor tenha definida uma ordem de mérito entre todos os candidatos. Temos então: $a = 8$, $a' = 8$, $b = 13$, $b' = 8$, $c = 13$, $c' = 13$. Desta forma, podemos determinar a pontuação de cada um dos candidatos: o candidato *A* recebe $a + a' = 16$ votos; o candidato *B* recebe $b + b' = 21$ votos; e o candidato *C* recebe $c + c' = 26$ votos (BORDA, p. 663)

A diferença apresentada entre o resultado obtido nestas eleições particulares e o resultado obtido na eleição por ordem de mérito quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ está no fato de que nesta última termos adicionado à votação final de todos os candidatos a parcela correspondente ao número de eleitores. Com isso, se subtrairmos ao resultado obtido, na eleição por ordem de mérito os 21 votos, correspondentes aos 21 eleitores vamos obter o mesmo resultado.

Veja, então, que a ordem relativa entre os candidatos é a mesma, seja na eleição por ordem de mérito ou na eleição particular.

Borda chama a atenção para o fato de o método das eleições particulares tornar-se impraticável para um elevado número de candidatos, tornando-se o método por ordem de mérito muito mais eficiente e fácil de usar (BORDA, pp. 663-664).

2.4.3 A precisão da maneira usual de contar votos

Vamos analisar as duas últimas páginas da Memória apresentada à Academia (BORDA, p. 664-665), onde é estudado em quais condições o resultado de maneira usual de contar os votos coincide com a vontade da maioria dos eleitores.

Consideremos m o número de candidatos e ξ o número de eleitores. Realiza-se uma eleição por ordem de mérito. Seja A o candidato mais votado, digamos com x votos, e B o candidato com o segundo maior número de votos, digamos y. Considerando o caso extremo em que, por um lado, todos os eleitores que não colocaram o candidato A em primeiro lugar, o colocaram em último lugar e, por outro lado, todos os eleitores que não colocaram o candidato B em primeiro lugar o colocaram em segundo. Como estamos na presença de m candidatos, ao primeiro lugar correspondem m pontos, ao segundo lugar correspondem $m - 1$ e ao último lugar irá, naturalmente, corresponder a 1 voto; por conseguinte, na eleição por *ordem de mérito* a pontuação do candidato A é igual a $mx + \xi - x$ e a pontuação do candidato B igual a $my + (m-1)(\xi - y)$, de onde concluímos que o resultado da eleição só é favorável ao candidato A se se verificar:

$$mx + \xi - x > my + (m-1)(\xi - y).$$

Que é equivalente a:

$$x > \frac{y + (m-2)\xi}{m-1}.$$

Analisando a inequação que acabamos de encontrar, se considerarmos $m = 2$ vamos obter $x > y$, o que significa que no caso de termos uma eleição entre dois candidatos, o candidato que tiver a maioria dos votos é legitimamente eleito; como se refere Borda: *"Assim neste caso, mas somente neste caso, o método de contar votos usual em eleições dá o resultado exato"* (BORDA, p.665). Supondo agora que todos os eleitores que não votam no candidato A votam no candidato B, ou seja, $y = \xi - x$, o valor que substituído na inequação anterior faz com que:

$$x > \xi \frac{m-1}{m}.$$

Quando temos uma eleição entre três candidatos, $m = 3$, e obtemos $y > \frac{2}{3}\xi$. Isto quer dizer que, numa eleição entre três candidatos, se um deles tiver mais do que $\frac{2}{3}$ dos votos podemos dizer que ele é um justo vencedor. Do mesmo modo, quando temos quatro candidatos, y tem que ser maior que $\frac{3}{4}\xi$, e assim sucessivamente.

"Finalmente, se o número de candidatos é igual ou maior que o número de eleitores, a inequação $x > \frac{y+(m-2)\xi}{m-1}$ será equivalente a $x > \xi - 1$, o que significa que, nestes casos, só o candidato que reunir a unanimidade dos votos pode ser declarado vencedor" (BORDA. P.665)

Borda termina sua memória dizendo:

"Tudo o que disse sobre eleições também se aplica a deliberações, dado que as deliberações não são mais do que uma espécie de eleições entre diferentes opiniões, estando, portanto, sujeitas às mesmas regras" (BORDA. P.665)

2.5 Marquês de Condorcet (1743-1794)

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet nasceu na cidade de Ribemont, Comuna na França em 17 de Setembro de 1743 (MCLEAN, p. 3). Filho de um cavaleiro que veio a morrer cinco semanas depois do nascimento do filho, o que valeu ao filho a atribuição do título nobre de Marquês de Condorcet. Ele foi um matemático precoce, filósofo, economista e sociólogo. Membro da Academia Real das Ciências Francesa desde 1769, tornou-se seu secretário vitalício em 1777. "Foi um enciclopedista que ajudou a trilhar o caminho para a revolução francesa e mais tarde veio a ser membro da Assembleia Legislativa; mas a sua atitude independente levou-o à prisão onde viria a morrer". Condorcet foi contemporâneo de Jean Jacques Rousseau (1712-1778), também ele um dos pensadores mais influentes no desencadeamento da revolução francesa (MCLEAN6, p. vii).

2.5.1 O sistema eleitoral de Condorcet

A democracia é, por definição, um sistema político em que a autoridade parte do povo, tendo como princípio que a opinião da maioria dos cidadãos deve ser imposta ao restante da sociedade. Na tentativa de responder a questões naturais, tais como: "O que é a maioria?" Ou, "Como descobrir a opinião da maioria dos cidadãos? ", surgem os sistemas eleitorais. Como já comentado anteriormente, um dos primeiros a estudar os sistemas eleitorais foi Jean Charles Borda, ao mostrar à Academia de Ciências Francesa que o candidato mais votado em primeiro lugar (o candidato da maioria) pode também ser simultaneamente o mais detestado. Depois desse feito, é Condorcet que no seu ensaio apresenta um sistema eleitoral procurando responder às falhas detectadas por Borda na maneira usual de contar votos e, também, às falhas, entretanto detectadas, no sistema eleitoral apresentado pelo próprio Borda.

O sistema eleitoral apresentado por Condorcet é baseado em comparações dois a dois e satisfaz a seguinte condição: se existir um candidato que derrote *todos* os outros em comparações dois a dois, então esse deve ser declarado vencedor. Caso tal candidato exista ele é chamado de *Vencedor de Condorcet*. Qualquer sistema que satisfaça esse critério é chamado de “método de Condorcet” e existem vários métodos que cumprem tal objetivo. A diferença entre tais métodos se dá apenas quando não existe um vencedor de Condorcet e, neste caso, os métodos podem usar diferentes critérios para escolher o vencedor. Um exemplo natural em que não há vencedor de Condorcet é no jogo “pedra, papel e tesoura”.

O sistema eleitoral que foi apresentado por Condorcet é baseado em comparações dois a dois e se apoia no chamado *“Critério do Vencedor de Condorcet (CVC)”*, conforme descrito acima. Veremos na seção 3 que o método de Borda não satisfaz o CVC.

2.5.2 O método de Condorcet

Os métodos de Condorcet, também chamados de métodos de paridade, são uma classe de métodos de votação que seguem o critério de Condorcet. Como na seção anterior, também assumimos que cada eleitor possui uma ordem de preferência sobre todos os candidatos. Digamos que tal ordem é declarada em uma cédula eleitoral. Dizemos que uma ordenação supera outra se a maioria dos votos a coloca em posição melhor nas cédulas. Os métodos de Condorcet comparam todo par de ordenações, e a ordenação que supera toda outra, caso exista, é declarada vencedora. É possível ainda, remover a ordenação vencedora e aplicar novamente o método para encontrar a segunda melhor ordenação e continuar até definir uma ordem sobre as opções.

Esses métodos são frequentemente referidos coletivamente como métodos de Condorcet, porque o critério de Condorcet garante que todos eles dão o mesmo resultado quando em cada passo existe um vencedor de Condorcet. As diferenças entre os métodos de Condorcet ocorrem em situações onde nenhuma opção supera todas as outras, implicando que existe um ciclo de opções que superam umas as outras, chamado de P*aradoxo de Condorcet* ou C*onjunto de Smith*.

Consideramos um método de Condorcet genérico como sendo um método abstrato que assume que não existe um conjunto de Smith, ou seja, não resolve esses ciclos. As versões especificas de métodos Condorcet que selecionam os vencedores mesmo em casos que não exista um vencedor de Condorcet são chamados *métodos de completação de Condorcet.*

Uma versão simples de um método de completação Condorcet é o *minimax*: se nenhuma operação supera todas, para cada opção A, dentre as eleições particulares em que A perde, aquela em que A perde pela maior diferença de votos. Essa diferença é a pontuação de A e declaramos como vencendo o candidato de menor pontuação (estamos desconsiderando aqui o risco de haver empates, assumindo que o conjunto de eleitores seja grande). Outro método simples é o *método de Copeland*, em que o vencedor é a opção que vence a maior quantidade das comparações dois a dois (independentemente de por quantos votos).

O *método de Schulze* (1997), também conhecido como *“redução sequencial de Schwartz”,* e o método dos *pares ranqueados* (1987) são outros dois métodos de Condorcet recentemente criados que satisfazem um grande número de critérios de desejáveis em um bom sistema de votação.

Um método de Condorcet geral, em vez de atribuir uma pontuação a cada posição nas ordens de preferência dos eleitores, como no método de Borda, considera apenas a relação de superação entre os pares de opções. O método de Condorcet, quando não há um conjunto de Smith, pode ser considerado mais justo que o de Borda. Por outro lado, esse nem sempre é o caso. Por exemplo, pode acontecer de que A é preferível a B, B é preferível a C e C é preferível a A (situação conhecida como “Tripla de Condorcet”, ilustrada na Figura 1). Isto significa que o método de Condorcet nem sempre induz uma pré-ordem no conjunto das alternativas. Novamente, usamos o exemplo do jogo “pedra, papel e tesoura”.

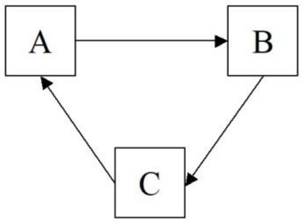

Figura 1 – Tripleta de Condorcet.

Uma outra situação a ser analisada, é quando existem sub-alternativas para cada alternativa. Considere a situação em que uma alternativa só é preferida à outra quando a sub-alternativa melhor colocada da primeira fica à frente da sub-alternativa melhor colocada da segunda, a segunda colocada da primeira é melhor que a segunda colocada da segunda e assim sucessivamente até que a pior colocada da primeira também fica à frente da pior colocada da segunda. No caso em que para duas A e Bnão acontece que A é preferida a Bnem que$B$ é preferida a A, dizemos que o decisor é indiferente em relação a A e B ou que as alternativas A e B são incomparáveis. Nesta situação, o decisor é considerado fracamente racional pois as preferências estritas são transitivas, mas a indiferença não é.

Para ilustrar, considere três alternativas (A, B, C), cada uma com duas sub-alternativas. Em um determinado critério, a ordenação ocorreu conforme apresentado na Tabela 1.

Posicão	**Alternativa**
1	$A1$
2	$B1$
3	$B2$
4	$C1$
5	$C2$
6	$A2$

Tabela 1 – Ordenação das alternativas.

Comparando as alternativas A e B na Tabela 1, verifica-se que a melhor colocada da alternativa A $(A1)$ fica melhor posicionada que a melhor colocada que a alternativa B $(B1)$ e a pior colocada da alternativa A $(A2)$ fica em uma posição pior que a pior posição da alternativa$B$ $(B2)$, assim, tem-se um empate entre as alternativas $A\ e\ B$. Comparando-se agora as alternativas $A\ e\ C$, verifica-se que ocorre a mesma situação ocorrida entre $A\ e\ B$, assim, as alternativas $A\ e\ C$ também ficam empatadas. Neste caso, a alternativa Aé indiferente às alternativas $B\ e\ C$, no entanto, $B\ e\ C$ não são indiferentes entre si. Logo, a transitividade da indiferença não é respeitada. Como será mostrado adiante, esta é uma situação que ocorre em campeonatos em que haja ordenação de times baseada na ordenação dos indivíduos pertencentes aos times. Um exemplo desta situação é o campeonato mundial de construtores de Fórmula 1.

Exemplo 2.1

Esse exemplo é baseado no que foi feito em (BARBA-ROMERO, S. & POMEROL, 1997)

O campeonato de Fórmula 1 teve início em 1950 em Silverstone, na Inglaterra com apenas 6Grandes Prêmios a serem disputados na Europa. O regulamento do campeonato mundial Fórmula 1, para pilotos, determina que o piloto campeão da temporada é o piloto que soma maior número de pontos ao final de todas as corridas da temporada. Os outros pilotos tinham a classificação no campeonato também determinada pelo total de pontos alcançados. O sistema de pontuação do campeonato sofreu alteração ao longo dos anos, conforme Haigh (2009). A Tabela 2 apresenta os sistemas de pontuação utilizados ao longo do campeonato.

Temporada/Posição	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
1950-1959	8	6	4	3	2					
1960	8	6	4	3	2	1				
1961-1990	9	6	4	3	2	1				
1991-2002	10	6	4	3	2	1				
2003-2009	10	8	6	5	4	3	2	1		
2010-atual	25	18	15	12	10	8	6	4	2	1

Tabela 2 – Sistemas de Pontuação da Fórmula 1.

Como podemos verificar na Tabela 2, a partir do ano de 2010, um maior número de pilotos passou a pontuar em cada corrida. No entanto, em cada corrida, apenas os dez primeiros colocados somam pontos, sendo a pontuação de cada colocado apresentada na Tabela 2. No campeonato de 2012, disputou-se um total de 20 corridas, com 24 pilotos participando década prova, num total de 2 pilotos por cada equipe, tendo, então, 12 equipes participantes.

Este regulamento é, na verdade, uma variação do método de Borda. Mas não é o método de Borda já que a diferença entre a quantidade de pontos obtidos de uma posição para a seguinte não é constante. O regulamento prevê a possibilidade de empates na pontuação final, preconizando sucessivos critérios de desempate. Assim, usa o método Lexicográfico sendo o critério mais importante (e, portanto, o primeiro a ser usado) a pontuação obtida com o método de Borda modificado. Havendo duas alternativas ou mais com o mesmo número de pontos somados ao final do campeonato, é considerado o maior número de vitórias de cada piloto para que haja o desempate. Permanecendo as alternativas empatadas, o segundo critério é o maior número decorridas em que cada piloto terminou uma corrida em segundo lugar e assim sucessivamente.

Diversos problemas ou situações antidesportivas podem ocorrer como consequência da utilização deste sistema de pontuação como descrito em (SOARES DE MELLO et al., 2005), como a de um piloto propositalmente perder uma posição para que um colega ganhe mais pontos.

Em relação ao campeonato de construtores, ou seja, por equipes, o primeiro mundial de construtores foi entregue no ano de 1958, para a equipe Vanwall. Na maioria das temporadas até 1979, somente os resultados do melhor piloto da equipe em cada corrida era considerado para a apuração do campeonato. No ano seguinte, houve modificação na regra, e os pontos eram obtidos pela soma dos resultados dos dois pilotos de uma equipe, o que dura até hoje. Somente em dez ocasiões a equipe campeã do mundial de construtores não teve um de seus pilotos conquistando o título de campeão de pilotos. Assim, como no caso do campeonato de pilotos, a equipe construtora vencedora do campeonato é a equipe que soma maior número de pontos, somando os pontos obtidos por seus dois pilotos em cada corrida do campeonato. Note-se que esta soma de pontos pode provocar distorções semelhantes às apontadas por Soares de Melloet al. (2005) para o campeonato de pilotos. Estas distorções podem ser agravadas pelo fato de, atualmente, uma equipe pequena (STR-Ferrari) ser, na prática, uma filial de uma das grandes equipes (Red Bull-Renault).

Nosso objetivo aqui é expor uma maneira alternativa de classificar as equipes que não seja baseada em pontos por cada posição (contudo, este método não é adotado no campeonato oficial). O método proposto será uma adaptação de um método geral de Condorcet, onde atentamos para o fato de que como cada equipe (alternativa) tem dois pilotos (sub-alternativas) neste campeonato pode acontecer dos decisores (corridas) ser apenas fracamente racional ou seja, duas equipes serem incomparáveis em uma dada corrida (se ignoramos a pontuação oficial). Faremos isso com um exemplo do campeonato de 2012.

Análise do campeonato de 2012

O campeonato de 2012 caracterizou-se pela disputa entre as equipes Red Bull-Renault, Suber-Ferrari, McLaren-Mercedes e Lotus-Renault, sendo mais acirrada entre as duas primeiras. Foi um dos campeonatos mais disputados dos últimos anos, com oito pilotos diferentes vencendo corridas ao longo da temporada. Devido a essa regularidade de resultados, o campeonato pode apresentar distorções. Por conta disso, será feita uma análise por métodos ordinais. Essa classificação encerra as distorções apresentados por (SOARES DE MELLO et al., 2005), oriunda da forma como os métodos ordinais são usados.

Para obter uma ordenação do campeonato de construtores sem essas distorções, será aplicado uma adaptação de um método geral de Condorcet. Uma característica desta análise é que cada equipe possui dois pilotos participando de cada corrida. Desta forma, a análise de Condorcet não é tão direta como no método tradicional. A existência de sub-alternativas implica em decisão fracamente racional como mostrado anteriormente.

Para extrair uma ordenação da matriz, as alternativas são comparadas duas a duas para estabelecer a preferência do decisor. Para avaliação da preferência entre as equipes que participam do campeonato de construtores da Fórmula 1, é preciso comparar as sub-alternativas de cada uma delas, pois cada equipe participa do campeonato com dois pilotos. A Tabela 3 apresenta a comparação entre as equipes Sauber-Ferrari e Williams-Renault. Nesta tabela, a primeira coluna apresenta cada uma das corridas do campeonato. As colunas 2 a 5, apresentam as posições de cada um dos pilotos destas equipes ao final de cada uma das provas. Para efeitos da construção dessa matriz considera-se que entre duas equipes, se algum piloto abandonar uma corrida, o piloto que completou mais voltas fica melhor classificado que um piloto que completou menos voltas. Ainda, um piloto que abandonou superou aquele que não obteve tempos para se classificar para a largada, e este foi melhor que aquele que nem participou dos treinos. As colunas 6 a 8 apresentam as relações de preferência entre as equipes. O número 1 na coluna representa a preferência do decisor. Por exemplo, na corrida disputada na Austrália, os dois pilotos da equipe Sauber-Ferrari terminaram a corrida em posições melhores que os pilotos da equipe Williams-Renault. Neste caso, a primeira equipe é preferida em relação à segunda. Na corrida realizada na China, ocorreu o inverso, os dois pilotos da equipe Williams-Renault terminam em posições à frente dos pilotos da equipe Sauber-Ferrari, logo, a equipe Williams-Renault é a preferida. Uma terceira situação ocorreu na corrida da Malásia. O piloto Sérgio Perez, da equipe Sauber-Ferrari termina à frente dos pilotos da equipe Williams-Renault, no entanto, o piloto Kamul Kobayashi, também da equipe Sauber-Ferrari termina atrás dos pilotos da equipe Williams-Renault. Neste caso, não existe uma equipe preferida, caracterizando um empate entre as alternativas. Vale ressaltar que sempre haverá empate entre as alternativas quando um piloto de uma equipe ganhar a corrida e o outro piloto desistir na largada pois, em relação a qualquer outra equipe em que os dois pilotos participarem de pelo menos uma volta da prova, uma equipe será preferida em uma sub-alternativa mas não será preferida na outra.

	Equipe	Suber-Ferrari		Willians-Renaut		Alternativa vencedora		
	Piloto	Sergio Perez	Kamui Kobayashi	Pastor Maldonado	Bruno Sena	Sauber-Ferrari	Willians-Renault	Empate
Corrida	Austrália	8	6	13	16	1		
	Malásia	2	23	19	6			1
	China	11	10	8	7		1	
	Bahrein	11	13	23	22	1		
	Espanha	20	5	1	23			1
	Mônaco	11	21	23	10			1
	Canadá	3	9	13	17	1		
	Europa	9	22	12	10			1
	Inglaterra	22	11	16	9		1	
	Alemanha	6	4	15	17	1		
	Hungria	14	18	13	7		1	
	Bélgica	21	13	20	12		1	
	Itália	2	9	11	10	1		
	Cingapura	10	13	22	18	1		
	Japão	22	3	8	14			1
	Coréia	11	22	14	15			1
	India	24	14	16	10		1	
	Abu Dhabi	15	6	5	8		1	
	USA	11	14	9	10		1	
	Brasil	24	9	22	23			1
	Total					6	7	7

Tabela 3 – Comparação entre as equipes Sauber-Ferrari e Williams-Renault.

Depois de comparar as sub-alternativas em todas as provas, as vitórias de cada uma das alternativas e os empates são somados. A alternativa que tiver a maior soma é a alternativa preferida e esse resultado implica no número 1 da linha referente a alternativa na Tabela 4.

A Tabela 4 mostra a matriz de adjacência obtida para o método de Condorcet relativo ao campeonato de construtores de Fórmula 1 de 2012. O número 1 significa que a equipe indicada na linha obteve mais vezes uma classificação melhor que a equipe indicada na coluna. Os espaços em branco equivalem a zeros. A ordem em que as equipes aparecem na matriz equivale à sua ordenação oficial no campeonato.

As ordenações finais de todas as corridas foram obtidas no site http://www.f1.com.

	Red bull Racing-Renault racing	Ferrari	McLaren-Mercedes	Lotus-Renault	Mercedes	Sauber-Ferrari	Force India-Mercedes	Willians-Renault	STR-Ferrari	Caterham-Renault	Marussia-Cosworth	HTR-Cosworth
Red bull Racing-Renault racing		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ferrari			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
McLaren-Mercedes	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
Lotus-Renault					1	1						
Mercedes			1				1	1	1	1	1	1
Sauber-Ferrari			1		1			1	1	1	1	1
Force India-Mercedes					1	1		1	1	1	1	1
Willians-Renault				1						1	1	1
STR-Ferrari					1			1		1	1	1
Caterham-Renault					1						1	1
Marussia-Cosworth					1							1
HRT-Cosworth												

Tabela 4 – Matriz de adjacência de Condorcet para o campeonato de construtores de 2012.

Para extrair uma ordenação da matriz começa-se por fazer uma *destilação descendente* (DIAS ET AL., 1996). Para tal, observa-se se há alguma equipe que supera todas as outras, ou seja, se existe alguma linha cujo único zero seja na diagonal principal. Retira-se essa equipe e repete-se o procedimento. Com essa destilação, é possível fazer a ordenação de todas as equipes, na sequência seguinte: RedBull Racing-Renault, Ferrari, McLaren-Mercedes, Lotus-Renault, Force India-Mercedes, Sauber-Ferrari, STR-Ferrari, Mercedes, Williams-Renault, Caterham-Renault, Marussia-Cosworth e HRT-Cosworth.

Repare que, nessa ordenação, só houve alteração, em relação à classificação oficial, nas equipes Force India-Mercedes e Mercedes. Todas as demais equipes possuem a mesma ordenação que a ordenação oficial. Caso não se conseguisse fazer uma ordenação decrescente de todas as equipes por não haver, a partir de certo ponto, equipes dominantes, deveria ser feito então o procedimento inverso, uma destilação ascendente. Neste tipo de destilação, é possível identificar as equipes dominadas. A ordenação obtida pelo método de Condorcet, comparada com a ordenação oficial, é apresentada na Tabela 5.

Piloto	Classificação de Condorcet	Classificação oficial	Variação
Red bull Racing-Renault racing	1	1	0
Ferrari	2	2	0
McLaren-Mercedes	3	3	0
Lotus-Renault	4	4	0
Mercedes	5	7	0
Sauber-Ferrari	6	6	0
Force India-Mercedes	7	5	-2
Willians-Renault	8	8	0
STR-Ferrari	9	9	0
Caterham-Renault	10	10	0
Marussia-Cosworth	11	11	0
HRT-Cosworth	12	12	0

Tabela 5 – Resultados finais de 2012 (oficial e Condorcet).

Foi mostrado ao longo deste exemplo que, devido à analogia formal entre o campeonato mundial de Fórmula 1 e um processo de escolha multidecisor, não existe um regulamento que atenda a todos os métodos de escolha existentes e que possa ser considerado justo. No entanto, o regulamento vigente até 2002, agrava os defeitos do método de Borda, no qual ele se baseia. O método de Condorcet permite contornar as distorções do método da variante do método de Borda usada, mas nem sempre fornece uma ordenação completa, devido à existência dos ciclos de intransitividade. Além disso, é um método extremamente técnico para ser entendido pelo público.

A comparação do resultado oficial e o obtido pelo método de Condorcet mostra resultados muito semelhantes, com variações apenas entre as equipes Force India-Mercedes e Mercedes. Usando os resultados do campeonato de 2012, foi possível ordenar todas as equipes através do método de Condorcet, por não ter havido nenhum ciclo de intransitividade entre as alternativas. Quando surgem estes ciclos intransitivos, a solução que ele fornece é menos sensível às alternativas irrelevantes que o método de Borda e uma alternativa é usar o método de Copeland (BARBA-ROMERO e POMEROL, 1997). Esse método consiste em contar quantas vezes cada uma é preferível, ou seja, somar os elementos de cada linha da matriz de adjacência. As alternativas

são então ordenadas pelo resultado dessa soma.
O método de Copeland alia a vantagem de fornecer uma ordenação total, ao fato de dar o mesmo resultado de Condorcet, quando este não apresenta nenhum ciclo de intransitividade. Quando esses ciclos existem, o método de Copeland permite fazer a ordenação, e mantém a classificação das alternativas (equipes) que não pertencem a nenhum ciclo de intransitividade.

3 SISTEMAS DE VOTAÇÃO

Consideremos uma eleição com *n* candidatos, $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Chama-se *voto* de um eleitor (ou eventualmente, boletim de voto) a qualquer lista ordenada composta pelos *n* candidatos, tendo em conta as preferências do eleitor; cada eleitor ordena sempre do que prefere mais para o que prefere menos, ou não prefere. Observe que cada voto, nos dá uma lista transitiva de preferência por eleitor. Ou seja, se um determinado eleitor prefere C_i a C_j e prefere C_j a C_k então ele prefere C_i a C_k.

Um *sistema eleitoral por ranqueamento* é um processo, ou regra, em que dado um número m de eleitores e uma sequência de votos $R_1, R_2, \ldots\ R_m$, onde R_i representa o voto (ou seja, a ordem entre candidatos escolhida) do eleitor i, para cada i de 1 a m, ele estabelece uma ordem final, R como sendo o resultado (ou escolha coletiva) da votação. Observe que, a ordem produzida pelo sistema também deve ser uma ordem transitiva, mas não exclui a possibilidade de haver empates.

Note que o voto definido desta forma, contém muito mais informações do que um voto em que o eleitor escolhe apenas um candidato. Além disso, o sistema não precisa necessariamente usar toda essa informação. Por exemplo, um determinado sistema pode considerar apenas o primeiro elemento de cada lista, o que nos daria uma eleição semelhante àquela em que cada eleitor vota apenas em seu candidato favorito. Por outro lado, com o voto definido como uma lista, podemos usá-lo para determinar o resultado de uma eleição entre qualquer par de candidatos: a maneira mais natural de fazer isso é simplesmente contar em quantas listas um dos candidatos aparece em melhor posição do que o outro, como vimos na seção anterior.

Quando escrevermos $X > Y$, devemos ler que o candidato$X$ é preferido relativamente a Y, ficando claro, pelo contexto, se estamos falando da preferência de um eleitor específico ou do resultado produzido pelo sistema. Por exemplo, na presença de um sistema eleitoral com três candidatos, *A*, *B* e *C*, quando a preferência de um eleitor é em primeiro lugar o candidato *B*, em segundo *C* e por fim *A* o seu voto será denotado por:

$B > C > A$	*ou*	B C A

Tabela 3.1: Representação de um voto

Uma vez que, ao votar, os candidatos são ordenados por cada eleitor, em alguns sistemas opta-se por atribuir uma pontuação à posição de cada candidato, como nos exemplos da contagem de Borda e do campeonato de Fórmula 1. Essa é uma das maneiras de se processar um voto, dentro de um sistema eleitoral, mas não é a única.

Nos sistemas eleitorais que iremos estudar cada eleitor é importante de maneira igualitária e por isso, é importante saber apenas a quantidade de votos para cada ordenação dos candidatos. Num conjunto com três candidatos $S = \{A, B, C\}$, a situação que em geral iremos considerar dá origem a 3!, ou seja, 6 tipos de votos diferentes a saber:

Tipo	Classificação
1	$C > B > A$
2	$C > A > B$
3	$A > C > B$
4	$A > B > C$
5	$B > A > C$
6	$B > C > A$

Tabela 3.2: Tipos de votos

Usando um triângulo equilátero, em que identificamos os vértices com os candidatos, obtemos uma representação geométrica da Tabela 3.2, associando a cada tipo de voto uma região do triângulo, conforme pode ser observado na Figura 3.1, em que os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 estão colocados na região associada a cada um dos seis tipos de voto (este procedimento será detalhado mais adiante nos exemplos 3.1 e 3.2).

Uma lista ordenada onde conste o número de votos de cada tipo é chamada de *perfil eleitoral*. Por exemplo, a lista (30,1,10,1,10,29) corresponde a: 30 votos do tipo 1; 1 voto do tipo 2; 10 votos do tipo 3; 1 voto do tipo 4; 10 votos do tipo 5; e 29 votos do tipo 6. A representação deste perfil no triângulo equilátero, Figura 3.2, permite efetuar o cálculo do resultado de cada candidato para alguns sistemas eleitorais, como se explica no Exemplo 3.1. Note que, sobre os lados e vértices do triângulo anotamos também as somas de alguns dos números. O número sobre um vértice indica a quantidade de votos em que o candidato relacionado àquele vértice fica em primeiro. E, para cada X e Y, sobre o lado XY anotamos dois números onde o número mais próximo de X corresponde à quantidade de votos em que X fica na frente de Y.

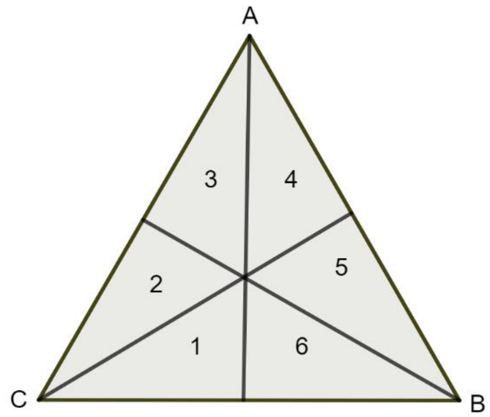

Figura 3.1: Associação de cada tipo de voto, à correspondente área do triângulo

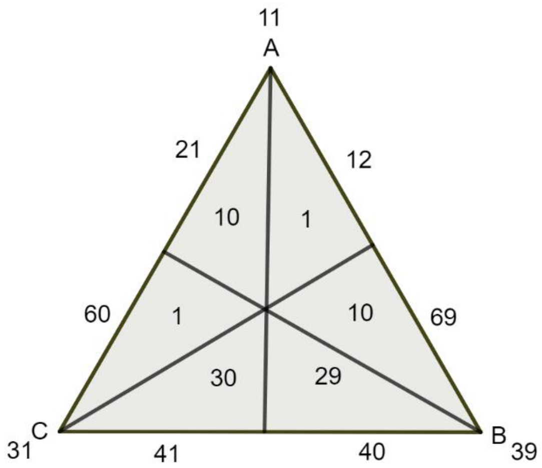

Figura 3.2: Exemplo de um perfil e resultados associados a dois sistemas eleitorais

3.1 Sistemas eleitorais

Nesta subseção, listamos alguns sistemas eleitorais mais comuns e vamos estudar suas principais propriedades.

1. ***Sistema plural (ou Uninominal,"um Homem um voto"):*** A ordenação dos candidatos é feita contando, para cada um, o número de votos em que este ficou em primeiro lugar, e os candidatos são ordenados por ordem não-crescente do correspondente número de votos obtidos.

2. ***Contagem de Borda:*** A cada posição do voto é atribuído um número de pontos: 0 (zero) para a última, 1 (um) para a penúltima, etc. …, adicionando-se 1 (um) ponto quando se passa de uma posição para a imediatamente acima. Os pontos ganhos de cada candidato são adicionados, e os candidatos são ordenados por ordem não-crescente dos pontos obtidos.

3. ***Sistema de Hare:*** Eliminam-se, em eleições sucessivas, o(s) candidato(s) com menor número de primeiros lugares, sendo os candidatos ordenados por ordem inversa de eliminação.

4. ***Sistema sequencial aos pares com agenda (S.S.P.A.):*** Acorda-se uma ordenação preliminar dos candidatos, chamada *agenda*; consideram-se os resultados de eleições entre pares de candidatos (comparações dois a dois), pela ordem dada na agenda, começando pelos dois candidatos considerados piores pela agenda, eliminando-se o derrotado e prosseguindo até a agenda conter apenas um elemento. Os candidatos são finalmente ordenados (do melhor para o pior) por ordem inversa de eliminação da agenda.

5. ***Ditadura:*** Escolhe-se um eleitor, o *ditador*. Dada uma sequência de listas de preferências individuais, ignoram-se todas com exceção da lista do ditador. A ordem escolhida pelo sistema é a ordem escolhida pelo ditador. (Veja que neste sistema não é necessário conhecer o perfil eleitoral pois os eleitores não são tratados de forma igualitária).

Agora vamos analisar dois exemplos de como é que na presença de um perfil se determina a ordem eleita em alguns sistemas eleitorais diferentes, usando no primeiro exemplo o triângulo da Figura 3.2, e no segundo a Tabela 3.3 e o triângulo da Figura 3.2.

Exemplo 3.1

Considere o perfil de votos (30,1,10,1,10,29) como na Figura 3.2. Tem-se que para o sistema eleitoral plural, o número de votos de cada candidato é a soma dos pontos que estão nas duas regiões do triângulo mais próximas do vértice que representa cada um dos candidatos e tal número também está escrito no próprio vértice. Assim, o candidato A tem 31 votos, o candidato B tem 39 votos e o candidato C tem 11 votos, ou seja, o vencedor é o candidato B, ficando em segundo o candidato A e em último o candidato C(ou seja, $B > A > C$). Considerando o sistema sequencial aos pares com agenda, o resultado de cada comparação é dado pelos valores que estão sobre o lado do triângulo entre os dois candidatos; por exemplo, na comparação apenas entre os candidatos B e C, o candidato Bganha 69 pontos, enquanto que Cganha 12 pontos. Veja que, em comparações dois a dois, o candidato A ganha dos outros dois, e na comparação entre os candidatos B e C o vencedor éB. Assim, em um método de Condorcet a ordem escolhida seria $A > B > C$. A pontuação de cada candidato para a contagem de Borda pode ser facilmente obtida adicionando-se as pontuações que cada candidato obtém nas comparações dois a dois: o candidato A obtém 101 pontos, o candidato B obtém 109 pontos e o candidato Cobtém 43 pontos, e assim, usando a contagem de Borda o resultado seria $B > A > C$.

Exemplo 3.2

Tome um conjunto com 15 membros (que designaremos por eleitores) do Conselho Pedagógico de uma Escola, que têm de optar por uma dentre três disciplinas (ou alternativas) para oferecer como opção aos seus estudantes. O resultado da votação é o seguinte: 6 eleitores preferem a disciplina de “Artes Marciais” (AM) em primeiro lugar, em segundo lugar preferem “Temas Musicais” (TM) e por fim, “Introdução à Política” (IP); 5 eleitores preferem em primeiro lugar a disciplina de IP, em segundo preferem TM e em terceiro AM; por último, os restantes 4 eleitores preferem a disciplina de TM em primeiro lugar, em segundo lugar preferem IP e por fim, AM. Observe a Tabela 3.3 e o triângulo da Figura 3.3.

Votos	Preferência
6	$AM > TM > IP$
5	$IP > TM > AM$
4	$TM > IP > AM$

Tabela 3.3: Preferências do Conselho Pedagógico

Determina-se o vencedor e a ordenação final usando o sistema eleitoral sequencial aos pares, com a agenda $IP > TM > AM$, isto é, determina-se a alternativa vencedora da eleição entre AM e TM e a alternativa vencedora desta eleição disputa a eleição com a alternativa IP. Assim, por simples observação do triângulo da Figura 3.3 vemos que a alternativa vencedora da primeira comparação é TM, pois esta alternativa obtém 9 votos, enquanto que AM obtém 6. Agora, na comparação entre TM e IP, a alternativa TM obtém 10 votos e IP obtém 5. Conclui-se que a ordenação final das alternativas para o sistema eleitoral sequencial aos pares com a agenda $IP > TM > AM$é: em primeiro lugar TM, em segundo IP e em último AM.

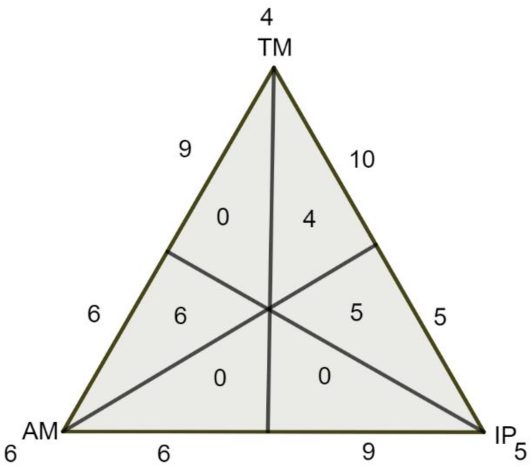

Figura 3.3: Representação das preferências do Conselho Pedagógico

A Tabela 3.4 nos permite observar as ordenações finais das três alternativas que o Conselho Pedagógico votou, usando diferentes sistemas eleitorais.

Sistema	**Ordem eleita**
Plural	AM > IP > TM
Hare	IP > AM > TM
S.S.P.A. IP> TM > AM	TM > IP > AM
S.S.P.A. AM > IP > TM	TM > AM > IP
Borda	TM > IP > AM
Condorcet	TM > IP > AM

Tabela 3.4: Ordenações finais usando vários sistemas eleitorais

Estes dois exemplos mostram de forma clara e até chocante a influência que os sistemas eleitorais têm no resultado final de uma votação. Seria bom que conseguíssemos dizer que alguns dos sistemas eleitorais dão mais garantias democráticas que os restantes. Para isso vamos analisar algumas condições a que um sistema eleitoral verdadeiramente democrático deve satisfazer.

3.2 Condições

As condições seguintes parecem ser desejáveis para que um sistema eleitoral democrático possa traduzir as preferências dos eleitores.

1. ***Condição de Pareto (ou de unanimidade):***
   i. ***condição fraca:*** Se o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y* em todos os votos, então, na lista final (correspondente ao resultado da votação), deve-se ter que o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y*.
   ii. **condição forte:** Se o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y* em todos os votos e adicionalmente há, pelo menos, um voto onde o candidato *X* é preferido ao candidato *Y*, então, na lista final (correspondente ao resultado da votação), deve-se ter que o candidato *X* é preferido(estritamente) ao candidato *Y*.

Observação: Daqui em diante usaremos o termo “condição de Pareto” para designar a “condição forte de Pareto”.

2. ***Critério do Vencedor de Condorcet (CVC):*** Se existir um vencedor de Condorcet, este deve ser o vencedor da eleição. O ***vencedor de Condorcet*** é o candidato que em comparações dois a dois ganha de todos os outros (se existir, é fácil ver que é único); o ***perdedor de Condorcet*** é um candidato que, igualmente, em comparações dois a dois perde com todos os outros (se existir é fácil ver que é único).

3. ***Monotonia:*** Se de uma eleição para outra, envolvendo os mesmos eleitores e os mesmos candidatos, a posição de um dos candidatos for alterada, em um ou mais votos, mas sempre a favor desse candidato, então a sua posição na ordenação final não deve ser inferior à posição em que ficou colocado na primeira eleição.

4. ***Independência das Alternativas Irrelevantes (IAI):*** Se em duas eleições distintas, envolvendo os mesmos eleitores e os mesmos candidatos, a ordem relativa de dois dos candidatos não for alterada em nenhum voto, então a ordem relativa desses mesmos candidatos no resultado final deve ser a mesma.

5. ***Igualdade (ou anonimato):***A sequência dos votos é irrelevante para o resultado da eleição. Ou seja, o resultado depende apenas da quantidade de votos de cada tipo. Ou seja, todos os eleitores são tratados de forma isonômica.

6. ***Neutralidade:*** Se todos os eleitores cometerem o erro de trocar os candidatos X e Y, então basta trocar X com Y no resultado final para corrigir o erro. Ou seja, todos os candidatos são tratados de forma isonômica.

Repare que a quinta condição, igualdade, não é satisfeita se o sistema eleitoral for a ditadura. Mas a ditadura satisfaz a neutralidade e todos os outros sistemas eleitorais descritos na seção anterior satisfazem as duas últimas condições, conforme realçado na Tabela 3.5.

Sistema de Votação \ Condições	Igualdade	Neutralidade
Plural	Sim	Sim
Contagem de Borda	Sim	Sim
Hare	Sim	Sim
Sequencial aos pares com agenda	Sim	Sim
Ditadura	Não	Sim

Tabela 3.5: Quinta e sexta condições / Sistemas de votação

Alan D. Taylor em [8, pp. 96-127] mostra quais das primeiras quatro condições acima referidas são, ou não, satisfeitas pelos cinco sistemas de votação aqui considerados. A Tabela 3.6 sintetiza essa informação. Em http://gg.gg/c9f89 encontra-se um tabela semelhante com vários outros métodos e várias outras condições.

Sistema de votação \ Condições	Pareto	CVC	Monotonia	IAI
Plural	Fraca	Não	Sim	Não
Contagem de Borda	Forte	Não	Sim	Não
Hare	Fraca	Não	Não	Não
Sequencial aos pares com agenda	Não	Sim	Sim	Não
Ditadura	Fraca	Não	Sim	Sim

Tabela 3.6: Primeiras quatro condições / Sistemas de votação

Para verificar a veracidade da Tabela 3.6 vamos, por um lado, primeiro provar todas as propriedades que cada um dos sistemas eleitorais satisfaz e depois daremos contraexemplos para as que não são satisfeitas. Faremos isso percorrendo a tabela coluna por coluna.

Proposição 3.1.1 *O sistema plural satisfaz a condição de Pareto fraca mas não a forte.*

Demonstração: Se o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y* em todos os votos, então X possui no mínimo tantos primeiros lugares quanto Y, ficando na ordem eleita numa colocação melhor ou igual a Y. Mas ainda que X adicionalmente fique em alguns dos votos numa posição estritamente melhor do que Y, se em tais X não ficar em primeiro, ele não ganhará pontos a mais que Y e eles ficarão empatados na ordem final. ■

Proposição 3.1.2 *A contagem de Borda satisfaz a condição de Pareto forte.*

Demonstração: Considere que o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y* em todos os votos, excetuando-se pelo menos um voto onde o candidato *X* é preferido relativamente ao candidato *Y*. Então, *X* recebe pelo menos um ponto a mais do que *Y* e assim quando adicionamos os pontos obtidos por cada candidato, o candidato *X* obtém, pelo menos, mais um ponto que o candidato Y. ■

Proposição 3.1.3 *O sistema de Hare satisfaz a condição de Pareto fraca mas não a forte.*

Demonstração: Considere que o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato *Y* em todos os votos. Resulta que em qualquer das eleições intermediárias, Y tem no máximo tantos primeiros lugares que *X*, logo X não pode ser eliminado antes de Y. Mas ainda que existam votos em que X está estritamente na frente de Y, eles podem ser eliminados numa mesma rodada ficando empatados na ordem eleita (por exemplo, se ambos não tiverem nenhum primeiro lugar, ambos serão eliminados na primeira rodada). ■

Proposição 3.1.4 *O sistema sequencial aos pares com agenda satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere-se que o candidato *X* é o vencedor de Condorcet. No sistema sequencial aos pares com agenda, o candidato vencedor é aquele que não é eliminado em nenhuma das comparações dois a dois que são feitas sucessivamente (segundo a agenda previamente acordada). Mas o vencedor de Condorcet é, precisamente, o candidato que ganha de todos os outros em comparações dois a dois. Então, *X* é o vencedor de Condorcet, o que prova a proposição. ■

Proposição 3.1.5 *O sistema plural satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considere um candidato *X* numa posição qualquer da lista eleita. Considere que um ou mais eleitores muda a posição de X, mas sempre a seu favor. Veja que número de primeiros lugares de X não pode diminuir e o número de primeiros lugares de outros candidatos não pode aumentar. Dessa forma, X não pode ficar colocado numa posição inferior à que tinha inicialmente. ■

Proposição 3.1.6 *A contagem de Borda satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Seja *X* um candidato. Suponha-se que algum ou alguns eleitores trocam a posição do candidato *X* no seu voto por uma imediatamente acima. A troca efetuada num só voto adiciona um ponto ao total que o candidato *X* tinha e subtrai um ponto de outro candidato (com o qual foi feita a troca), deixando a pontuação de todos os outros candidatos inalterada. Assim, o candidato *X* melhora a sua pontuação, nunca podendo ficar numa posição inferior à que tinha inicialmente. Ao fazer isso várias vezes, o candidato X também termina numa posição melhor ou igual à que estava inicialmente. ■

Proposição 3.1.7 *O sistema sequencial aos pares com agenda satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considere-se uma agenda previamente fixada. Suponha-se ainda que algum eleitor troca a posição do candidato *X* com a posição do candidato, Y, que estava imediatamente acima de X no seu voto. De fato, essa troca afeta unicamente o candidato *X* numa eventual eleição contra Y, de forma favorável a X. Assim, a posição final de X fica melhor ou igual à original. Ao fazer isso várias vezes, o candidato X também termina numa posição melhor ou igual à que estava inicialmente. ■

Proposição 3.1.8 *A Ditadura satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Seja *X* um candidato. Suponha-se que algum ou alguns eleitores trocam a posição do candidato *X* com um candidato que está acima no seu voto. Se tal candidato não for o ditador, nada muda na ordem eleita. Se tal candidato for o ditador, na ordem eleita a posição de X melhora. Logo, em todo caso, a posição de X na ordenação final não fica pior do que estava na ordenação inicial. ■

Proposição 3.1.9 *A Ditadura satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Sejam X e Y candidatos quaisquer. Assim como na proposição anterior, o único voto que importa é a ordem escolhida pelo ditador. Se os votos mudam, mas a ordem relativa entre X e Y não muda em nenhum dos votos, em particular ela não muda no voto do ditador e, portanto, não muda na ordem eleita. ■

Proposição 3.1.10 *A Ditadura satisfaz a condição de Pareto fraca, mas não a forte.*

Demonstração: Considere-se que o candidato *X* é preferido ou está empatado com o candidato

Y em todos os votos. Então, em particular isso vale para o voto do ditador e, portanto, vale para a ordem eleita. Suponha adicionalmente que em pelo menos um voto o candidato *X* é preferido (estritamente) ao candidato *Y*, e que este voto não é o do ditador. Se o ditador considera que X e Y estão empatados então, *X* e *Y* ficarão empatados no resultado final da eleição. ■

Proposição 3.1.11 *O sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a condição de Pareto.*

Demonstração: Consideremos quatro candidatos, que designaremos por *A*, *B*, *C* e *D*, a agenda $A < B < C < D$, e o perfil eleitoral dado pela Tabela 3.7.

Todos os eleitores preferem o candidato *B* ao candidato *D*, mas com a agenda $A<B<C<D$ o candidato *A* derrota o candidato *B* por 2 a 1; em seguida, *A* perde para *C*, também pelo mesmo resultado; e por fim o candidato *D* derrota o candidato *C*, novamente, pelo resultado 2 a 1. Assim o candidato *D* é o vencedor, apesar de nenhum eleitor preferir D a *B*. A condição de Pareto não é verificada pelo sistema sequencial aos pares com agenda. ■

Número de eleitores:	1	1	1
Votos	*A* *B* *C* *D*	*C* *A* *B* *D*	*B* *D* *C* *A*

Tabela 3.7: Perfil para a proposição 3.1.10

Proposição 3.1.12 *O sistema de votação plural não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 9 eleitores, dado pela Tabela 3.8.

Número de eleitores:	4	3	2
Votos	*A* *B* *C*	*B* *C* *A*	*C* *B* *A*

Tabela 3.8: Perfil para a proposição 3.1.12

Com o sistema plural o candidato *A* é o vencedor com 4 votos, contra 3 do candidato *B*e 2 do candidato *C*. Mas o vencedor de Condorcet é *B*, pois em comparações dois a dois ele ganha do candidato *A* por 5 a 4 e do candidato *C* por 7 a 2. ■

Proposição 3.1.13 *A contagem de Borda não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 5 eleitores, dado pela Tabela 3.9.

Número de eleitores:	3	2
Votos	*A*	*B*
	B	*C*
	C	*A*

Tabela 3.9: Perfil para a proposição 3.1.13

Usando a contagem de Borda, *B* é o candidato vencedor. De fato, a pontuação do candidato *A* é $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$ pontos; a do candidato *B* é $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ pontos; enquanto que a pontuação do candidato *C* é $3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$ pontos. Contudo, *A* é o vencedor de Condorcet, pois derrota cada um dos outros dois candidatos, em comparações dois a dois, por 3 a 2. ■

Proposição 3.1.14 *O sistema de Hare não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere cinco candidatos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e o perfil eleitoral formado por 17 eleitores conforme detalhado na Tabela 3.10.

Número de eleitores	5	4	3	3	2
Votos	*A*	*E*	*D*	*C*	*B*
	B	*B*	*B*	*B*	*C*
	C	*C*	*C*	*D*	*D*
	D	*D*	*E*	*E*	*E*
	E	*A*	*A*	*A*	*A*

Tabela 3.10: Perfil para a proposição 3.1.14

Observe que o vencedor de Condorcet é o candidato *B*. De fato, *B* derrota *A* por 12 a 5; derrota *C* por 14 a 3; derrota *D* por 14 a 3; e derrota *E* por 13 a 4. No entanto, usando o sistema de Hare, *B* não é o candidato vencedor, sendo até o candidato com menos primeiros lugares, só 2 em 17 eleitores o colocam em primeiro lugar. *B* é o primeiro candidato a ser eliminado de todos os votos. ■

Proposição 3.1.15 *A Ditadura não satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Considere três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 3 eleitores dado pela Tabela 3.11.

Número de eleitores:	1	2
Votos	*A*	*C*
	B	*B*
	C	*A*

Tabela 3.11: Perfil para a proposição 3.1.15

Considere que o voto do ditador é o voto representado na primeira coluna da tabela. Assim, *A* é o vencedor apesar de *C* ser claramente o vencedor de Condorcet, pois derrota, em comparações dois a dois, quer *A* quer *B* por 2 a 1. ■

Proposição 3.1.16 *O sistema de Hare não satisfaz a Monotonia.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 17 eleitores, dado pela Tabela 3.12.

Número de eleitores:	7	5	4	1
Votos	*A*	*C*	*B*	*B*
	B	*A*	*C*	*A*
	C	*B*	*A*	*C*

Tabela 3.12: Perfil para a proposição 3.1.16

Há dois candidatos com 5 primeiros lugares e um com 7. Assim, eliminamos os candidatos *B* e *C* nos restando o candidato *A* que será então o vencedor. Portanto, com este perfil eleitoral e usando o sistema eleitoral de Hare, o candidato *A* é o vencedor.

Número de eleitores:	8	5	4
Votos	*A*	*C*	*B*
	B	*A*	*C*
	C	*B*	*A*

Tabela 3.13: Perfil para a proposição 3.1.16

Suponha agora que um só eleitor, o representado na última coluna da Tabela 3.12, troca, no seu voto, a posição de *A* pela do candidato que está acima, podendo assim, adicionar aos eleitores representados na primeira coluna da Tabela 3.12. Esta mudança produz o perfil representado na Tabela 3.13. Aplicando novamente o sistema eleitoral de Hare a este novo perfil, o candidato *B* é o primeiro a ser eliminado, resultando o perfil ilustrado na Tabela 3.14.

Número de eleitores:	8	9
Votos	*A* *C*	*C* *A*

Tabela 3.14: Perfil para a proposição 3.1.15

Ou seja, agora o candidato *C* é o candidato vencedor segundo o sistema de Hare, pois obtém 9 primeiros lugares dos 17 possíveis. Esta mudança de candidato vencedor de *A* para *C* mostra que o sistema eleitoral de Hare não satisfaz a monotonia. ■

Proposição 3.1.17 *O sistema plural não satisfaz a condição de Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considere três candidatos *A*, *B*, e *C*, e o perfil eleitoral formado por 7 eleitores, conforme detalhado na Tabela 3.15. Com o sistema eleitoral plural o vencedor é o candidato *A*, dado que dispõe de 3 primeiros lugares contra 2 de cada um dos outros dois candidatos.

Número de eleitores:	3	2	2
Votos	*A* *B* *C*	*B* *C* *A*	*C* *B* *A*

Tabela 3.15: Perfil para a proposição 3.1.17

Suponha-se, agora, que os eleitores representados na terceira coluna da Tabela 3.15 mudam o seu voto, colocando o candidato *C* entre o candidato *B* e o candidato *A*, dando origem ao perfil representado na Tabela 3.16.

Número de eleitores:	3	4
Votos	*A* *B* *C*	*B* *C* *A*

Tabela 3.16: Perfil para a proposição 3.1.17

Vale salientar que esta troca mantém a posição relativa do candidato *B* relativamente ao candidato *A*. No entanto, com o sistema eleitoral plural o candidato *B* é agora o vencedor com 4 primeiros lugares contra 3 do candidato A, ou seja, ninguém mudou as suas preferências relativamente aos candidatos *A* e *B*, mas o candidato *B*, de derrotado passou a vencedor. O que prova que o sistema eleitoral plural não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.

■

Proposição 3.1.18 *A contagem de Borda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considere três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 5 eleitores, dado pela Tabela 3.17.

Número de eleitores:	3	2
Votos	*A* *B* *C*	*C* *B* *A*

Tabela 3.17: Perfil para a proposição 3.1.18

A contagem de Borda elege o candidato *A* como candidato vencedor uma vez que a pontuação de cada candidato é: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$ pontos para o candidato *A*; $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ pontos para o candidato *B*; e $3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$ para o candidato *C*. Suponhamos agora que os eleitores representados na segunda coluna da Tabela 3.17 resolvem mudar a posição do candidato *C* colocando-o em segundo lugar, o que não altera a posição relativa dos candidatos *A* e *B*, criando um novo perfil eleitoral, que está representado na Tabela 3.18.

Número de eleitores:	3	2
Votos	*A* *B* *C*	*B* *C* *A*

Tabela 3.18: Perfil para a proposição 3.1.18

A contagem de Borda elege agora o candidato *B* como vencedor com 7 pontos, contra 6 pontos do candidato *A* e 2 do candidato *C*. Assim, o vencedor desta eleição mudou de *A* para *B* apesar de ninguém ter mudado as preferências relativas do candidato *A* em relação ao candidato *B*. O que mostra que a contagem de Borda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ■

Proposição 3.1.19 *O sistema de Hare não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se três candidatos *A*, *B* e *C*, e o perfil eleitoral formado por 4 eleitores, dado pela Tabela 3.19.

Número de eleitores:	2	1	1
	A	*B*	*C*

Votos	*B* *C*	*C* *A*	*B* *A*

Tabela 3.19: Perfil para a proposição 3.1.19

Com o sistema eleitoral de Hare o candidato *A* é o vencedor. Suponha-se agora que o eleitor representado na terceira coluna da Tabela 3.19 muda o seu voto, colocando o candidato *C*entre o candidato *B* e o candidato *A*, alteração que não muda a posição relativa dos candidatos *A* e *B* , originando o perfil eleitoral representado na Tabela 3.20.

Número de eleitores:	2	2
Votos	*A* *B* *C*	*B* *C* *A*

Tabela 3.20: Perfil para a proposição 3.1.19

Os candidatos *A* e *B* aparecem agora empatados em primeiro lugar (cada um com, exatamente, metade dos votos, ou seja, dois) apesar de ninguém ter mudado a sua preferência no que diz respeito aos candidatos *A* e *B*. Assim, o candidato *B* passou de derrotado a vencedor. Isto mostra que o sistema eleitoral de Hare não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ■

Proposição 3.1.20 *O sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes.*

Demonstração: Considerem-se os candidatos *C*, *B* e *A*, e assuma-se que a agenda é dada por esta ordem alfabética inversa. Tome-se o perfil eleitoral dado pela Tabela 3.21, constituído por 3 eleitores.

Número de eleitores:	1	1	1
Votos	*C* *B* *A*	*A* *C* *B*	*B* *A* *C*

Tabela 3.21: Perfil para a proposição 3.1.20

Com o sistema sequencial aos pares com agenda e com a agenda considerada, o candidato *C* derrota o candidato *B* por 2 a 1 e em seguida perde para o candidato A também por 2 a 1. Assim, o candidato *A* é o vencedor (o candidato *B* é um dos derrotados). Mas suponha-se que o eleitor representado na primeira coluna da Tabela 3.21 muda a posição do candidato *C* colocando-o entre os candidatos *B* e *A*, dando origem ao perfil eleitoral da Tabela 3.22.

Número de eleitores:	1	1	1
Votos	*B* *C* *A*	*A* *C* *B*	*B* *A* *C*

Tabela 3.22: Perfil para a proposição 3.1.20

Utilizando o mesmo sistema eleitoral e a mesma agenda (a fixada inicialmente), o candidato *B* derrota agora o candidato *C* por 2 a 1 e também derrota o candidato *A* pelo mesmo resultado, ou seja, *B* é o novo vencedor. No entanto, o eleitor que mudou o seu voto não alterou a sua opinião quanto aos candidatos *A* e *B*, pois continua a preferir o candidato *B*. Mas esta alteração fez com que o candidato *B* passasse de derrotado a vencedor, o que mostra que o sistema sequencial aos pares com agenda não satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes. ■

3.3 A escolha como resultado de uma eleição

Feita a análise de alguns sistemas eleitorais, bem como de um certo número de condições, é de fundamental importância perceber a qual sistema eleitoral melhor pode ser conferido a designação de sistema eleitoral democrático, tendo em vista a vontade coletiva dos eleitores. Em 1950, Kenneth Arrow demonstrou que é impossível encontrar um sistema eleitoral que satisfaça certas condições básicas e que tenha a capacidade de tomar decisões coletivas que respeite de uma forma tanto quanto possível, e fiel, as escolhas individuais, o que causou uma certa surpresa aos estudiosos do assunto. Arrow usou ideias muito originais para a época e métodos formais procedentes da lógica e da teoria de conjuntos que eram completamente novos em Economia. (PANERO, p. 13).

Conforme nota Lorrie Cranor na sua tese de doutorado[1], *“a essência deste teorema é que não há nenhum método de associar as preferências individuais sobre três ou mais alternativas que satisfaça várias condições de lisura e que gere sempre um resultado lógico. As condições, que Arrow definiu com rigor, de lisura e racionalidade foram analisadas detalhadamente por outros estudiosos. Contudo, nenhum encontrou um modo de enfraquecer uma ou mais dessas condições que permita obter um sistema de votação satisfatório que fique imune aos paradoxos das votações. Portanto, o teorema de Arrow tem a profunda implicação de em muitas situações não haver um modo justo e lógico de associar as preferências individuais - não há modo de determinar com precisão a vontade coletiva do povo”.*

As condições de lisura mencionadas acima são apenas a condição de Pareto (forte), a Independência das Alternativas Irrelevantes e a Monotonia.

A condição de Pareto é muito utilizada em economia, teoria de jogos, engenharia e ciências sociais. O nome vem do matemático, economista, sociólogo e filósofo italiano Vilfredo Pareto[2] (1848-1923) que fez licenciatura em Matemática e doutorado em Engenharia na Universidade Politécnica de Turim. Foi professor de Economia e Gestão nas Universidade de Florença (Itália) e Lausanne (Suíça). Pareto utilizou, de forma não sistemática, a matemática para traduzir a evolução da economia. Por isso sofreu muitas críticas. Escreveu ele:

“Alguns críticos gritam autoritariamente contra as novas teorias como sendo absurdas porque tentam exprimir fenômenos econômicos por meio de fórmulas matemáticas”.

Ao que Pareto respondeu:

“(...) longe de pretender exprimir fenômenos complexos com uma fórmula simples, os economistas claramente reconhecem que não sabem nem nunca saberão a teoria de cada fenômeno concreto em todos os seus detalhes. Eles estão apenas familiarizados com fenômenos ideais que são uma aproximação cada vez mais próxima dos casos concretos”.[3]

---

[1](http://lorrie.cranor.org/pubs/diss/book.html)

[2]Nota biográfica retirada da Wikipedia, das páginas: (http://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto) ; e (http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_efficiency) .

[3](http://www.marxists.org/reference/subject/economics/pareto/theories.htm)

A Independência das Alternativas Irrelevantes, sendo um critério para "avaliar" regras de ordenação, foi introduzido na literatura moderna por Huntington (1938), Nash (1950) e Arrow (1950). No entanto, já Condorcet o tinha usado, tanto em 1785, como em 1788, assim como Daunou, em 1803, apelou à Independência das Alternativas Irrelevantes como parte de um argumento a favor do sistema eleitoral de Condorcet contra a contagem de Borda [10, p. 107].

4 TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW

Em 1950, Kenneth Arrow publicou um artigo no *"Journal of Political Economy"* intitulado "A Difficulty in the concept of Social Welfare". Demonstrou nesse artigo o Teorema que ficou conhecido como, *Teorema da Impossibilidade de Arrow,* apesar de Arrow o ter designado em (ARROW, 1950, p. 342) por *Teorema da Possibilidade* (Possibility Theorem) e por *Teorema da Possibilidade Geral* (General Possibility Theorem) em (ARROW, 1963, p. 59). De acordo com Paul Samuelson, citado por Taylor (TAYLOR, p. 249), a descoberta do Teorema da Impossibilidade foi uma das razões que levaram à atribuição a Arrow do prêmio Nobel de Economia em 1972. O Teorema da Impossibilidade de Arrow aparece também num livro de Arrow (ARROW, 1963, p. 342), como corolário de uma série de observações e consequências que Arrow vai tirando das definições e condições que vai introduzindo e que culminam na sua demonstração. O objetivo, neste capítulo, é apresentar uma demonstração do *Teorema da Impossibilidade de Arrow*, baseada em Taylor (TAYLOR, pp. 248-259).

Teorema 4.1 *Não existe nenhum sistema eleitoral por ranqueamento com domínio irrestrito, ou seja, que necessariamente produz uma ordem eleita para qualquer sequência de votos, que satisfaça simultaneamente a condição de Pareto forte, a Independência das Alternativas Irrelevantes e a Monotonia.*

Mencionamos que existe uma versão alternativa do Teorema onde a condição "Monotonia" é substituída pela não ditadura. Escreveremos sobre isso na seção seguinte.

Para o restante do capítulo considera-se *C* um conjunto com pelo menos três candidatos, ξ um conjunto finito de eleitores e, por contradição, considere um sistema eleitoral por ranqueamento que satisfaz as condições do Teorema de Arrow.

Definição 4.2 *Dado um subconjunto χ de ξ, e dois candidatos distintos, X e Y, dizemos que* $\boldsymbol{\chi}$ ***pode forçar X acima de Y****, escreve-se* $\boldsymbol{\chi} \to X > Y$*, quando o sistema elege uma ordem em que* $X > Y$ *sempre que todos os eleitores do conjunto* $\boldsymbol{\chi}$ *colocarem X à frente de Y.*

Esta definição permite fazer a seguinte observação, que vai desempenhar um papel crucial na demonstração dos demais lemas que usaremos na prova do Teorema da Impossibilidade de Arrow.

Observação 4.3 *Como o sistema eleitoral que estamos considerando satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes e a Monotonia, a fim de mostrar que*$\boldsymbol{\chi} \to X > Y$*, basta exibir um conjunto de votos onde:*

1. *Todos em* $\boldsymbol{\chi}$ *tem*$X > Y$ *nos seus votos;*
2. *Todos os que não estão em* $\boldsymbol{\chi}$ *tem* $Y > X$ *nos seus votos;*
3. *Como resultado da eleição obtém-se* $X > Y$.

Para ver que isto é válido, note que a Independência das Alternativas Irrelevantes nos diz que *X* ficar acima de *Y* no resultado final da eleição não depende da posição ocupada por outros candidatos. A Monotonia garante que basta considerar o caso em que todos os eleitores que não pertencem a $\boldsymbol{\chi}$coloquem no seu voto $Y > X$. Assim, qualquer mudança que ocorra nos eleitores que não pertencem a $\boldsymbol{\chi}$ só irá favorecer o candidato *X* e como, no conjunto de votos exibido, se verifica que $X > Y$ no resultado final, o mesmo continuará a verificar após hipotética mudança que venha a ocorrer nos referidos eleitores. ∎

Definição 4.4 *O conjunto χ é dito um conjunto ditador se $\chi \rightarrow X > Y$, para todos X e Y distintos pertencentes a C.*

Observação 4.5

1. *Se χ é o conjunto de todos os eleitores, então χ é um conjunto ditador (pela condição de Pareto).*
2. *Seja P um eleitor e $\chi = \{P\}$. Temos que χ é um conjunto ditador, se e somente se, Pé um ditador.* ■

Tendo em vista a demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow vamos demonstrar um resultado que dá uma boa oportunidade de ver como a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto são usadas em conjunto e nos permite poupar bastante trabalho na demonstração dos demais lemas.

Proposição 4.6 *Um sistema eleitoral em que a eleição envolve pelo menos três candidatos e que satisfaça simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto forte só admite o empate de dois candidatos quando esses candidatos estão empatados em todos os votos.*

Demonstração: Considere um sistema que satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes e a condição de Pareto forte e existe um perfil de votos envolvendo pelo menos três candidatos no qual dois candidatos, *A* e *B*, estão empatados no resultado final, que denotamos como $A \asymp B$, e não o estão em, pelo menos, um dos votos. Seja χ o conjunto dos eleitores que preferem *A* a *B* e suponha, sem perda de generalidade, que $\chi \neq \emptyset$. Seja ainda У o conjunto dos eleitores que preferem *B* a *A* e seja $\boldsymbol{Z}$ o conjunto dos eleitores em que os candidatos *A* e *B* estão empatados. O perfil eleitoral respectivo é traduzido pela Tabela 4.1.

χ	У	$\boldsymbol{Z}$
$A > B$	$B > A$	$A \asymp B$

Tabela 4.1: $A \asymp B$

Seja *C* um terceiro candidato, cuja existência está garantida por hipótese. Considere uma outra votação em que todos os eleitores de χ colocam *C* em algum lugar entre *A* e *B*, em que os eleitores de У preferem *C* a *B*, e em que os eleitores de $\boldsymbol{Z}$ colocam os três candidatos empatados, obtendo-se a relação $A \asymp B \asymp C$. Tal situação é traduzida pela Tabela 4.2.

χ	У	$\boldsymbol{Z}$
$A > C > B$	$C > B > A$	$A \asymp B \asymp C$

Tabela 4.2: $C > B \asymp A$

Nesta eleição, as posições relativas de *A* e de *B* se mantiveram, pelo que no resultado final devemos ter$A \asymp B$, dada a Independência das Alternativas Irrelevantes. No entanto, pela condição de Pareto, como não existe nenhum voto onde $C < B$ e existe um em que $C > B$, então no resultado final deve ocorrer$C > B$. Como $B \asymp A$, teremos $C > A$.

Consideremos agora uma terceira votação em que todos os eleitores de χe de У permutam as posições dos candidatos *B* e *C*, e os eleitores de $\boldsymbol{Z}$ continuam a manter os três candidatos *A*, *B* e *C* empatados. Vejamos a Tabela 4.3.

χ	У	$\mathcal{Z}$
$A > B > C$	$B > C > A$	$A \asymp B \asymp C$

Tabela 4.3: $A \asymp B > C$

A Independência das Alternativas Irrelevantes garante que $A \asymp B$, dado que as posições relativas dos candidatos A e B ficam inalteradas. Pela condição de Pareto, no resultado final desta terceira eleição devemos ter $B > C$. Como $A \asymp B$, então $A > C$.

Comparando as posições relativas dos candidatos A e C, tem-se que da segunda eleição (Tabela 4.2) para a terceira eleição (Tabela 4.3) nenhum eleitor alterou as posições relativas destes dois candidatos. Logo, pela Independência das Alternativas Irrelevantes o resultado tem de ser o mesmo. Mas vimos na segunda eleição que $C > A$ (Tabela 4.2) e na terceira eleição que $A > C$ (Tabela 4.3), ou seja, estamos perante uma contradição.

$\square$

Os cinco lemas seguintes são suficientes para completar a demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow. Mencionamos que a Independência das Alternativas Irrelevantes só é diretamente usada na demonstração do Lema 4.7.

Lema 4.7 *Suponha-se que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$, e que У e $\boldsymbol{Z}$ formam uma partição de $\boldsymbol{\chi}$ (podendo um deles ser o conjunto vazio). Se A > B em todos de χ e B > A em todos de χ^c. Então,* У $\to A > C$ *ou* $\boldsymbol{Z} \to C > B, \forall\ C \notin \{A, B\}$.

Demonstração: Como У *e* $\boldsymbol{Z}$ formam uma partição qualquer do conjunto $\boldsymbol{\chi}$ e usando a Observação 4.5, considere uma eleição em que todos os eleitores de $\boldsymbol{\chi}$ colocam $A > B$, sendo que os У colocam $A > B > C$ e os de $\boldsymbol{Z}$ colocam $C > A > B$; e os demais colocam $B > C > A$.

Como supomos que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$, então no resultado final obter-se-á $A > B$. Em particular, verifica-se que não se podem obter simultaneamente $B > C$ e $C > A$ no resultado final dessa eleição pois teríamos pela transitividade, $B > A$ como resultado final. Portanto, devemos ter $A > C$ ou $C > B$.

Vamos considerar os dois casos:

Caso 1: No resultado final dessa eleição obtemos $A > C$.

Neste caso, temos um perfil em que todos os eleitores de У colocam $A > C$ nos seus votos e todos os outros eleitores colocam $C > A$; no resultado final obtemos $A > C$. Tendo em conta a Observação 4.5, concluímos que У $\to A > C$ o que prova o Lema 4.7 para este primeiro caso.

Caso 2: No resultado final obtemos $C > B$.

Com o argumento análogo ao usado no caso 1, mostra-se que $\boldsymbol{Z} \to C > B$

Com esses dois casos, damos como provado o Lema 4.7. $\blacksquare$

Lema 4.8 *Suponha-se que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$. Então, $\boldsymbol{\chi} \to A > C$ e $\boldsymbol{\chi} \to C > B, \forall\ C \notin \{A, B\}$.*

Demonstração: Considere, inicialmente, a partição de $\boldsymbol{\chi}$ em У e $\boldsymbol{Z}$ onde У = χ e $\boldsymbol{Z} = \emptyset$. Pelo Lema 4.7, temos que $\boldsymbol{\chi} \to A > C \; ou \; \emptyset \to C > B$. Como a segunda opção não pode ser verdadeira pela condição de Pareto, temos que $\boldsymbol{\chi} \to A > C$. Completando a demonstração, de forma análoga, agora fazendo У $= \emptyset$ e $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\chi}$, concluímos que $\boldsymbol{\chi} \to C > B$. ■

Lema 4.9 *Se $\boldsymbol{\chi} \to A > B$, então $\boldsymbol{\chi} \to B > A$.*

Demonstração: Assuma que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$. Pelo Lema 4.8 temos que, em particular,$\boldsymbol{\chi} \to A > C$ para todo $C \notin \{A, B\}$. Agora, fixe um tal candidato *C*. Novamente pelo Lema 4.8, temos que para todo $D \notin \{A, C\}$temos que $\boldsymbol{\chi} \to D > C$. Em particular, fazendo $D = B$, temos que, $\boldsymbol{\chi} \to B > C$. De forma análoga, mais uma vez pelo Lema 4.8 temos que para todo $E \notin \{B, C\}$ vale que $\boldsymbol{\chi} \to B > E$. Em particular, fazendo $E = A$, temos que $\boldsymbol{\chi} \to B > A$. ■

Lema 4.10 *Se existem dois candidatos A e B e existe χ □ ξ tais que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$, então $\boldsymbol{\chi}$ é um conjunto ditador.*

Demonstração: Assuma que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$e suponha que *X* e *Y* são dois candidatos quaisquer. Precisa-se mostrar que $\boldsymbol{\chi} \to X > Y$. Note que o Lema 4.9 garante que $\boldsymbol{\chi} \to B > A$. Assim, o Lema 4.8 permite concluir que $\boldsymbol{\chi}$ pode forçar *A* acima ou abaixo de qualquer candidato (diferente de *A*), da mesma forma como pode forçar *B* acima ou abaixo de qualquer candidato (diferente de *B*). Para concluir a prova desse lema, considere-se dois casos.

Caso 1: $A = Y$

Aqui é preciso mostrar que $\boldsymbol{\chi} \to X > A$. Mas, como já dissemos χ pode forçar *A* abaixo de qualquer outro candidato, logo $\boldsymbol{\chi} \to X > A$.

Caso 2: $A \neq Y$

Com $\boldsymbol{\chi} \to A > B$e $A \neq Y$, sabe-se que $\boldsymbol{\chi} \to A > Y$. Assim, novamente pelo Lema 4.8, $\boldsymbol{\chi}$ pode forçar *Y* abaixo de qualquer candidato. Em particular, $\boldsymbol{\chi} \to X > Y$ como queríamos demonstrar.

■

Lema 4.11 *Suponha-se que $\boldsymbol{\chi}$ é um conjunto ditador. Considere dois conjuntos У e $\boldsymbol{Z}$ não vazios, tais que $\boldsymbol{\chi} =$ У $\cup \, \boldsymbol{Z}$ e У $\cap \, \boldsymbol{Z} = \emptyset$, isto é, Уe $\boldsymbol{Z}$ formam uma partição de $\boldsymbol{\chi}$. Então, У é um conjunto ditador ou $\boldsymbol{Z}$ é um conjunto ditador.*

Demonstração: Considere três candidatos distintos *A*, *B* e *C*. Uma vez que $\boldsymbol{\chi}$ é um conjunto ditador, tem-se que $\boldsymbol{\chi} \to A > B$. O Lema 4.7 garante que ou У $\to A > C$, e neste caso Уé um conjunto ditador pelo Lema 4.10; ou $\boldsymbol{Z} \to C > B$ e então $\boldsymbol{Z}$ é um conjunto ditador, novamente pelo Lema 4.10. ■

Como vimos pela Observação 4.5, o conjunto de todos os eleitores, ξ, é um conjunto ditador. O objetivo a que se pretende chegar está no extremo oposto, isto é, mostrar que existe um conjunto ditador unitário $\boldsymbol{\chi} = \{A\}$. Isso contradiz o que assumimos sobre o sistema eleitoral em questão, pois o sistema ditatorial não satisfaz a condição de Pareto forte (como vimos na

Proposição 3.1.11). Para isso, basta aplicar o Lema 4.11 sucessivamente, iniciando por qualquer partição não trivial do universo dos eleitores $\xi = \chi$ em dois conjuntos $\mathcal{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$**,** concluímos que pelo menos um desses conjuntos é um conjunto ditador e possui menos elementos do que $\boldsymbol{\chi}$. Repetimos isso, substituindo $\boldsymbol{\chi}$ por esse novo conjunto até obter um conjunto unitário. Dessa forma, o Lema 4.11 implica o Teorema de Arrow.

4.1 A importância da Independência das Alternativas Irrelevantes

Na seção 3.1 foram introduzidos cinco sistemas eleitorais e, além das duas simetrias (igualdade e neutralidade), quatro condições desejáveis: a de Pareto (fraca e forte), a Monotonia, o Critério do Vencedor de Condorcet (CVC) e a Independência das Alternativas Irrelevantes (IAI). Foi mostrado que dentre esses sistemas só a Ditadura satisfaz a IAI, e só o sistema sequencial aos pares com agenda satisfaz o CVC. Mas, além de nenhum sistema eleitoral satisfazer IAI, Monotonia e Condição de Pareto Forte, aparentemente para que um sistema eleitoral reflita adequadamente a vontade coletiva, provaremos a seguir uma outra versão do Teorema.

Teorema da Impossibilidade (versão alternativa) *Não há nenhum sistema eleitoral, para três ou mais candidatos, que satisfaça simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e o Critério do Vencedor de Condorcet.*

Demonstração: Assuma, por redução ao absurdo, que existe um sistema eleitoral que satisfaz simultaneamente a Independência das Alternativas Irrelevantes e o Critério do Vencedor de Condorcet. Mostraremos que este sistema eleitoral, quando aplicado ao perfil cíclico de Condorcet (para três candidatos), não produz um conjunto de vencedores, o que é uma contradição, pois por definição de sistema eleitoral tem que se obter como resultado final uma ordenação.

Tipo 1	Tipo 3	Tipo 5
A	*C*	*B*
B	*A*	*C*
C	*B*	*A*

Tabela 4.5: Perfil cíclico de Condorcet,p_1

Considere o conjunto de candidatos S = {*A*,*B*,*C*}, e o perfil cíclico de Condorcet da Tabela 4.5, formado por três eleitores. Vamos designar esse perfil por p_1. Como pode ser observado na Figura 4.1, não se produz um vencedor de Condorcet.

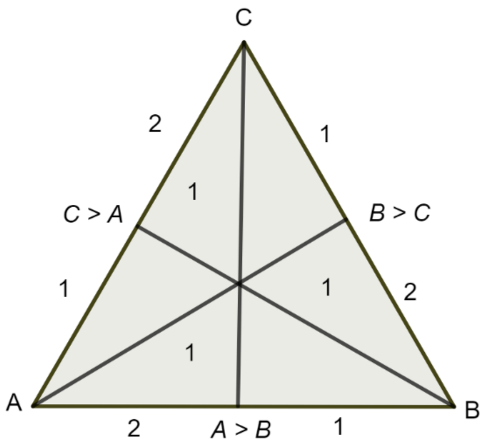

Figura 4.1: Resultado de p_1

Seja $\boldsymbol{V_1}$ o conjunto dos vencedores para o perfil p_1, que por hipótese é determinado pelo sistema eleitoral.

(i). $A \notin \boldsymbol{V}_1$
Seja p_2 o perfil da Tabela 4.6, obtido do perfil p_1 por troca de *B* com *C* no eleitor correspondente à terceira coluna.

Como o sistema eleitoral considerado satisfaz o Critério do Vencedor de Condorcet, então *C* é o vencedor, ou seja, $\boldsymbol{V}_2 = \{C\}$, pois *C* derrota, em comparações dois a dois, cada um dos outros candidatos, por 2 a 1, conforme pode ser observado na Figura 4.2

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 4
A	*C*	*C*
B	*A*	*B*
C	*B*	*A*

Tabela 4.6: Perfil cíclico de Condorcet, p_2

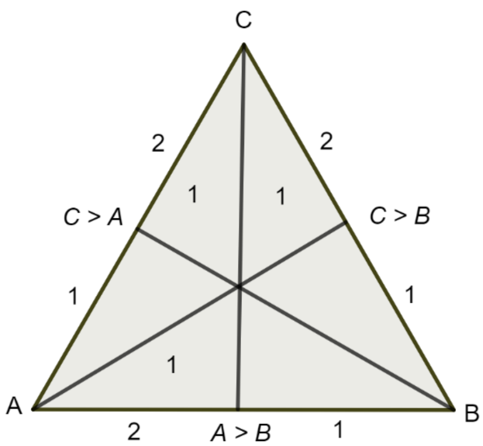

Figura 4.2: Resultado de p_2

Considere agora o eleitor correspondente à terceira coluna da Tabela 4.6. Ele prefere o candidato *C* ao candidato *A*. Portanto, de p_1 para p_2 não se altera a posição do candidato *C* relativamente ao candidato *A*. Então, como por hipótese, o sistema eleitoral satisfaz a Independência das Alternativas Irrelevantes, se $A \in \boldsymbol{V}_1$, então, $A \in \boldsymbol{V}_2$. Mas, como se verifica que $\boldsymbol{V}_2 = \{C\}$e $A \neq C$, então só podemos ter que $A \notin \boldsymbol{V}_1$.

(ii). $B \notin \boldsymbol{V}_1$
A demonstração é análoga à anterior, bastando trocar no perfil da Tabela 4.5, na segunda coluna, correspondente ao segundo eleitor, as posições de *C* e *A*. O que permite mostrar que $B \notin \boldsymbol{V}_1$, usando um argumento idêntico ao que foi usado em **(i)**.

(iii). $C \notin \boldsymbol{V}_1$
A demonstração é análoga às anteriores, bastando trocar no perfil da Tabela 4.5, na primeira coluna, correspondente ao primeiro eleitor, as posições de *A* e *B*.

Por **(i)**, **(ii)** e **(iii)** mostra-se que $A, B, C \notin \boldsymbol{V}_1$, ou seja $\boldsymbol{V}_1 = \emptyset$, o que está em contradição com o sistema eleitoral. ■

Este resultado que acaba de ser demonstrado, põe em evidência o fato da condição da Independência das Alternativas Irrelevantes ser uma condição bastante forte. Assim, na presença de três ou mais candidatos (ou alternativas) não é possível exibir um sistema eleitoral que possa ser considerado "razoável" no sentido em que reflete a vontade coletiva.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi mostrar como o resultado de uma eleição pode depender bastante do sistema eleitoral utilizado. Mostramos também que é impossível arranjar um processo, método ou algoritmo, um sistema eleitoral ou de votação, que decida, a partir de um conjunto das listas de preferência, uma ordenação das alternativas que reflita o melhor possível as preferências dos eleitores.

Uma das consequências do Teorema de Arrow é que não podemos em nenhuma política, passar de maneira razoável, a partir de uma coleção de rankings individuais, para uma ordem de preferência global. Filosoficamente, isso sugere que as escolhas sociais e políticas para uma comunidade não podem ser feitas simplesmente agregando as escolhas dos indivíduos. Em particular, não podemos considerar as preferências de uma comunidade (finita) de alguma forma equivalente à soma das preferências de seus membros.

Isto levanta uma série de questões interessantes sobre a eficácia de uma *"regra da maioria"*. Se as preferências de uma comunidade não puderem ser reduzidas às preferências dos indivíduos que a compõem, então parece razoável inferir a partir disso que o que é do interesse individual da maioria dos membros, não é necessariamente o que é do interesse da comunidade como um todo. Além disso, isto é reminiscente da concepção de Jean-Jacques Rousseau da vontade geral, que, pelo menos em parte, informa as modernas concepções de governança e democracia. Afim de proteger nossas ideias sobre a democracia, (representada aqui, de maneira quase informal, pela condição de Pareto, pela monotonicidade e pela irrelevância de alternativas independentes), talvez devamos concluir que uma comunidade deve ser governada como uma comunidade; coletivos, em particular, devem tomar decisões coletivas, e não confiar na benevolência do indivíduo.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M., SOARES DE MELLO, J. C. C. B., RAMOS, T. G. & SANT́ANNA, A. P. **Weak Rationality in Football Results: An Analysis of the Guanabara Cup Using the Bowman and Colantoni Method.** 3rd IMA International Conference on Mathematics in Sport. Salford: The Institute of Mathematics and its Applicatios, 2011.

ARROW, K. J., **A difficulty in the concept of social welfare**, Journal of Political Economy, Vol. 58, Issue 4, (1950), 328-346.

ARROW, K. J., **Social Choice and Individual Values**, 2nd edition, Yale University Press, 1963.

BARBA-ROMERO, S. & POMEROL, **J. C. Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos e Utilización Práctica**: Universidad de Alcalá, 1997 (Colección de Economia).

BORDA, J. C, **Mémoire sur les Elections au Scrutin, Histoire de L'Académie Royale des Sciences**, Paris: 1784.

W.H. FREEMAN, **For All Practical Purposes -** an introduction to contemporary mathematics, 3rd edition, London, (1994), 334-339.

CONDORCET, J. M., [1785], **Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix**, Chelsea Publishing Company, (1972). Reimpressão.

GOMES JUNIOR, S. F. & SOARES DE MELLO, J. C. C. B. **Avaliação dos pilotos no campeonato mundial de Fórmula 1 no ano de 2006 utilizando modelo DEA com restrições cone rattio não arquimedianas**. Sistemas & Gestão Vol. 2, n. 3, p. 216-230, 2007.

JOÃO PAULO II, **Constituição Apostólica** - Universi Dominici Gregis, Roma, 1996.

MASCART, J., **La vie et les travaux du chevalier Jean-Charles de Borda** (1733- 1799). Épisodes de la vie scientifique au XVIIIe siècle, Seconde édition, Presses de l'Université de Paris-Sorbonne, 2000.

MCLEAN, I. (Editor) & Hewitt, F. (Editor), **Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory**, Edward Elgar, Oxford, 1994.

MCLEAN, I., **Independence of Irrelevant Alternatives before Arrow, Mathematical Social Sciences**, Vol. 30, (1995), 107-126.

PANERO, M. M., & LAPRESTA, J. L. C , José Isidoro Morales, **Precursor Ilustrado de la Teoria de la Elección Social: Edición facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinion en las Elecciones** (1797) y Apêndice (1805), Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, 2003.

SAARI, D. G., **Basic Geometry of Voting**, Springer-Verlag, New York,1995.

TAYLOR, A. D., **Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof**, Springer-Verlag, New York,1995.