



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

BURACO NEGRO DE KERR E QUINTESSÊNCIA

FORTALEZA

2018

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

BURACO NEGRO DE KERR E QUINTESSÊNCIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Coorientador: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C326b Carvalho de Brito, Nícolas.
Buraco Negro de Kerr e Quintessência / Nícolas Carvalho de Brito. – 2018.
65 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
Coorientação: Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz.

1. Solução de Schwarzschild. 2. Quintessência. 3. Algoritmo de Newman-Janis. 4. Solução de Kerr. I.
Título.

CDD 530

NICOLAS CARVALHO DE BRITO

BURACO NEGRO DE KERR E QUINTESSÊNCIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz (Coorientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a aqueles que contribuem para o avanço da Ciência.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho pela orientação e pela paciência.

Ao Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz, pela coorientação, e, também, ao Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho pela participação na Banca examinadora.

Presto um especial agradecimento aos familiares e aos amigos; tanto os colegas de mestrado quanto os amigos do dia a dia.

Por fim, agradeço o apoio financeiro concedido pelo CNPq.

“Einstein’s theory of relativity is undoubtedly one of the greatest achievements of the human mind.” (Ray D’inverno)

RESUMO

O presente trabalho inicia-se com a apresentação de uma concisa derivação das equações de Einstein da gravitação. A partir desse ponto, direciona-se a atenção às soluções estáticas e esfericamente simétricas dessas equações, onde apresenta-se as soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom. Essa parte é concluída com a apresentação do conceito de Quintessência e com a obtenção da solução com Quintessência. Em seguida, Apresenta-se um algoritmo, devido a Ezra T. Newman e Allen I. Janis, conhecido como “truque” de Newman-Janis, que possibilita a obtenção da solução de Kerr, a qual representa campos gravitacionais devidos a um objeto em rotação, a partir de alguns artifícios algébricos. Com a solução de Kerr na presença de Quintessência, analisa-se algumas propriedades dessa solução e destaca-se a influência da Quintessência sobre Buracos negros rotativos, que são consequência direta da Solução de Kerr. Existem muitos trabalhos sobre buracos negros rotativos com Quintessência, mas nenhum deles detalha o desenvolvimento algébrico, o que torna o caminho até a solução de Kerr muito árduo e incerto, principalmente por não haver consenso sobre a validade e os fundamentos do algoritmo de Newman-Janis, por isso, o principal objetivo deste estudo é apresentar, na medida do possível, de forma detalhada, o caminho que leva dos princípios básicos da Relatividade Geral até a solução que descreve um buraco negro rotativo e apresentar a influência da Quintessência sobre esses objetos.

Palavras-chave: Solução de Schwarzschild. Quintessência. Algoritmo de Newman-Janis. Solução de Kerr.

ABSTRACT

The present work starts by presenting a concise derivation of the Einstein's field equations. After, we focus our attention on the static and spherically symmetric exact solutions of the Einstein equations, expliciting the two more basic solutions, which are the Schwarzschild solution and the Reissner-Nordstrom solution. We finish this part by presenting the concept of quintessence and by deriving the solution with quintessence. In turn, we present an algorithm, due to Ezra T. Newman and Allen I. Janis, best known as Newman-Janis 'trick', which allows us to obtain the Kerr solution, which represents gravitational fields due to a rotating body, from some algebraic manipulation. Possessing the Kerr solution in the presence of quintessence, we analyze some properties of the solution and try to show the influence of the quintessence on rotating black holes, which can be extracted from the Kerr Solution. There are a lot of works on rotating black holes and quintessence, but none of them present in a detailed manner the algebraic development, what is one of the reasons why finding the Kerr solution is so hard and uncertain, mainly because there is no agreement about the validity and basis of the Newman-Janis algorithm, that's why the main goal of this work is presenting, when possible, in a detailed manner, the steps from the basic principles of the General Theory of Relativity to the solution that describes a rotating black hole and present the influence of quintessence on these objects.

Keywords: Schwarzschild solution. Quintessence. Newman-Janis algorithm. Kerr solution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Coordenadas esféricas.	28
Figura 2 – Os horizontes de eventos, superfícies de red-shift infinito, superfície de limite estacionário e anel de singularidade da solução de Kerr.	51
Figura 3 – Plot mostrando a variação da forma da ergosfera, na perspectiva de quem vê o plano $x - z$, com o parâmetro de estado da Quintessência, ω , para valores diferentes de a , o parâmetro de rotação do buraco negro rotativo. A linha azul mais externa corresponde a S_- , ao passo que a linha vermelha externa corresponde ao horizonte de evento r_+ . A região compreendida entre essas duas superfícies é a ergosfera.	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
UFC	Universidade Federal do Ceará
UECE	Universidade Estadual do Ceará
EE	Equações de Einstein
CEF	Coordenadas Avançadas de Eddington-Finkelstein
ANJ	Algoritmo de Newman-Janis
CBL	Coordenadas de Boyler-Lindquist
TN	Tetrada Nula

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ	Delta
ϵ	Epsilon
η	Eta
θ	Theta
κ	Kappa
λ	Lambda
μ	Mu
ν	Nu
ξ	Xi
π	Pi
ρ	Rho
σ	Sigma
τ	Tau
ϕ	Phi
ω	Ômega
υ	Upsilon
Γ	Gamma Maiúscula
Σ	Sigma Maiúscula
\longrightarrow	“De para”
\equiv	“Definido como”
\ll	“Muito menor que”
\simeq	“Aproximadamente igual a”
∞	infinito
\rightarrow	“tende a”

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	15
2.1	Equação da geodésica	15
2.2	Relação entre a conexão afim e o tensor métrico	16
2.3	A aproximação newtoniana	18
2.4	Derivada covariante e divergência tensorial	20
2.5	Tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura . .	21
2.6	Derivação das equações de Einstein	23
3	SOLUÇÕES ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS	28
3.1	Solução de Schwarzschild	28
3.2	Solução de Reissner-Nordstrom	31
3.3	Solução com Quintessência	35
4	SOLUÇÃO DE KERR	39
4.1	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	39
4.2	Tetradas nulas	42
4.3	Solução de Kerr a partir de uma transformação complexa . . .	42
4.4	Singularidades e horizontes	49
5	SOLUÇÃO DE KERR COM QUINTESSÊNCIA	52
5.1	Solução de Kerr com Quintessência a partir de uma trans- formação complexa	52
5.2	Singularidades e horizontes	54
6	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICE A – CÁLCULOS DE $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ E $R_{\mu\nu}$ DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	58
	APÊNDICE B – CÁLCULOS DE l^{μ} , n^{μ} , m^{μ} E \bar{m}^{μ} DA SOLUÇÃO DE KERR	63

1 INTRODUÇÃO

Em meados de 1905, Albert Einstein partiu de uma tentativa de generalizar o Princípio da Relatividade, que à época só concebia os referenciais inerciais como aqueles capazes de descrever fenômenos físicos, para obter um princípio da relatividade mais amplo, geral, que inclui todos os referenciais na descrição de fenômenos físicos. Genialmente, ele percebeu que poderia fazer uso do Princípio da Equivalência para validar um princípio da relatividade geral e, ao desenvolver esse estudo, percebeu que poderia usar esse princípio para construir uma teoria da gravitação mais ampla que a Teoria da Gravitação Universal de Newton, que era a teoria vigente à época. Em meados de 1915, após aproximadamente 10 anos de trabalho, Einstein apresentou à comunidade científica equações que descrevem a dinâmica de partículas sujeitas a campos gravitacionais.

O próprio Einstein não acreditava na existência de soluções exatas das suas equações, entretanto, no final do ano de 1915, Karl Schwarzschild obteve a primeira solução exata das equações de Einstein (EE). Essa solução descreve o campo gravitacional, no vácuo, de objetos cuja distribuição de massa é esfericamente simétrica. Em 1916, os físicos Gunnar Nordstrom e Hans Reissner descobriram a solução de Reissner-Nordstrom, que descreve um objeto como o de Schwarzschild, porém com uma carga elétrica centralizada. Por mais relevantes que essas soluções sejam, nesse trabalho não temos o objetivo de analisar as suas propriedades. Elas servirão de ponto de partida para obtermos a solução de Kerr, e de Kerr-Newman, que representam, respectivamente, um objeto como o de Schwarzschild, porém dotado de rotação, e um de Reissner-Nordstrom, também em rotação.

Recentemente, observações astronômicas revelaram que o Universo está em um estágio de expansão acelerada, o que demanda a existência da chamada energia escura (Xu and Wang, 2017). Um modelo de energia escura é chamado de Quintessência, que trata-se de um fluido ideal que permeia todo o Universo. Um fluido ideal é aquele que é incompressível e não viscoso, cujo tensor-energia momentum é, de modo geral, dado por

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu},$$

onde aqui, e ao longo de todo esse trabalho, a assinatura da métrica adotada é $(+ - - -)$, conforme D’Inverno (1992), e a convenção para os índices tensoriais se dá como se segue: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$. Letras gregas do início do alfabeto; índices espaço-temporais, variando de 0 a 3, para sistemas de coordenadas planos, como os utilizados na Relatividade Especial.

λ, μ, ν, \dots . Letras do final do alfabeto grego, variando de 0 a 3, serão usadas para sistemas de coordenadas curvos, isto é, na presença de um campo gravitacional. Tais sistemas são usados majoritariamente na Relatividade Geral.

i, j, k, l, \dots Índices espaciais, variando de 1 a 3.

Um fluido ideal é caracterizado pela sua equação de estado, dada por

$$P = \omega\rho, \tag{1}$$

onde ω é o parâmetro de estado desse fluido. A expansão acelerada do Universo exige que o parâmetro de estado da Quintessência esteja compreendido entre os valores $-1 < \omega < -\frac{1}{3}$. Em 2002, V.V. Kiselev obteve uma solução como a de Schwarzschild, mas considerando a presença de Quintessência. Essa solução também será útil, mas não pelas suas propriedades.

Usaremos a solução de Kiselev como ponto de partida para obter a solução de Kerr na presença de Quintessência. Isto é realizado por meio do uso do algoritmo de Newman-Janis(ANJ). Analisaremos as propriedades dessa solução, tendo como motivação compreender a influência da Quintessência sobre os buracos negros rotativos, que são decorrentes da solução de Kerr.

Assim, este trabalho trás uma demonstração da influência cosmológica da energia escura sobre objetos extremamente localizados, que são os buracos negros.

2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Neste capítulo, obtemos as equações de Einstein da gravitação. Para tanto, primeiramente, estabelecemos o Princípio da Equivalência. Em seguida, partimos da equação da geodésica na ausência de campos gravitacionais e por meio de uma transformação de coordenadas e do Princípio da Equivalência, obtemos a equação da geodésica na presença de campos gravitacionais. Analisamos os termos que surgem nesta equação da geodésica, o que nos leva a definir a conexão afim, e os tensores de curvatura, para em fim, fazendo uso de algumas identidades que envolvem estes tensores e considerando o limite newtoniano, obter as equações de campo de Einstein.

2.1 Equação da geodésica

O Princípio da Equivalência afirma que localmente um referencial não inercial equivale a um referencial inercial na presença de um campo gravitacional, ou, de uma forma mais geral, podemos sempre encontrar um sistema de referência que localmente anula o efeito de um campo gravitacional.

Suponhamos que uma partícula livre move-se numa região onde existe um campo gravitacional arbitrário, tudo isso em relação a um referencial de coordenadas x^μ . Pelo Princípio da Equivalência, existe um sistema de coordenadas, ξ^α , pelo qual, esse campo gravitacional não é observado. Esse sistema é exatamente aquele que, localmente, anula o efeito do campo gravitacional, e passaremos a chamá-lo de *referencial localmente inercial*. Nesse sistema a segunda lei de newton é dada por

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2)$$

onde

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (3)$$

é o tempo próprio.

Agora, por meio de uma transformação de coordenadas, veremos como o segundo sistema escreveria a sua equação de movimento para essa partícula.

Na transformação $\xi^\alpha \rightarrow x^\mu$, as coordenadas ξ^α são funções das coordenadas x^μ , portanto a equação (2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e usando a relação

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda,$$

obtemos a equação de movimento para o referencial x^μ

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4)$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ são os coeficientes da chamada *conexão afim*, definidos por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (5)$$

Portanto, como x^μ é o referencial que detecta o campo gravitacional, podemos concluir que a informação desse campo está contida nos coeficientes da conexão afim.

2.2 Relação entre a conexão afim e o tensor métrico

O intervalo de tempo próprio pode ser expresso em relação ao sistema x^μ , basta fazermos a transformação de coordenadas de ξ^α para x^μ na equação (3)

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Mas, sabendo que $d\tau^2$ deve ter a forma

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

concluimos que

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

De posse da equação (6), encontraremos a relação entre $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. Derivando parcialmente (6) com respeito a x^λ , obtemos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Multiplicando a equação (5) por $\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \delta^\beta_\alpha \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}. \quad (8)$$

Com (8) e (7), vemos que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Reconhecendo a definição do tensor métrico em (9), podemos escrevê-la como

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}. \quad (10)$$

Intercambiando os índices em (10), as seguintes expressões são também verdadeiras

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\rho\mu}. \quad (12)$$

Assim, se somarmos (10) a (11), e da soma subtraímos (12), ficaremos com a seguinte expressão

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\rho\mu},$$

donde vemos que, devido à simetria da conexão afim, o quarto e o quinto termos no lado direito da equação cancelam-se e, devido à simetria do tensor métrico, o segundo e o último termos também se cancelam, resultando na expressão

$$2\Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}. \quad (13)$$

Nesse momento, faremos uso da expressão que define a inversa do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, a saber

$$g^{\nu\sigma} g_{\rho\nu} = \delta^\sigma_\rho. \quad (14)$$

Multiplicando (13) por $g^{\nu\sigma}$, e fazendo uso de (14), obtemos finalmente

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right), \quad (15)$$

que é a relação entre a conexão afim e o tensor métrica. Portanto, a informação do campo gravitacional está contida nas componentes do tensor métrico. Determinando as componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, determinamos as componentes da conexão afim por meio de (15), e assim, por meio de (4), obtemos as equações de movimento da nossa partícula influenciada pelo campo gravitacional considerado. Precisamos de equações a partir das quais possamos obter as componentes $g_{\mu\nu}$. Aquelas serão as EE da gravitação.

2.3 A aproximação newtoniana

Considere uma partícula que move-se em baixas velocidades numa região permeada por campos gravitacionais estacionários, gerados por matéria não relativística e de baixa intensidade(fraco). Nesse caso, a equação (4) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

A partir da equação (15), escrevemos Γ^λ_{00} como

$$\Gamma^\lambda_{00} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (16)$$

Se lembrarmos que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t},$$

veremos que as duas primeiras parcelas em (16) são nulas, pois o tensor métrico, no caso estacionário, não possui dependência temporal explícita, portanto

$$\Gamma^\lambda_{00} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}. \quad (17)$$

Agora, como nosso campo gravitacional é fraco, esperamos que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ seja praticamente $\eta_{\alpha\beta}$. Diremos que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (18)$$

onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Este termo representa uma *perturbação* da métrica de Minkowski. Com (18) em (17), temos

$$\Gamma^\lambda_{00} = -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\eta_{00} + h_{00}),$$

que resulta em

$$\Gamma^\lambda_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma},$$

pois $\eta_{\alpha\beta}$ é constante, e desprezamos termos de ordem maior do que 1 em $h_{\alpha\beta}$. Obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Apenas a parte espacial nos interessa, e assim

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Devido ao $\eta^{i\sigma}$, isso é equivalente a

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2,$$

mas como

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2},$$

temos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i},$$

de onde resulta

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (19)$$

Da mecânica newtoniana, sabemos que

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (20)$$

onde ϕ é o potencial newtoniano e satisfaz a famosa equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho,$$

onde está sendo considerado $G = 1$. Comparando (19) e (20), obtemos

$$h_{00} = 2\phi + c, \quad (21)$$

onde c é uma constante. Para calcular c , basta lembrarmos que o potencial ϕ associado a um objeto de massa M esfericamente distribuída é dado por

$$\phi = -\frac{M}{r}. \quad (22)$$

Com efeito, em regiões muito distantes da distribuição de matéria, esperamos que os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis, de tal forma que h_{00} seja nulo, portanto, levando

em conta isso e a equação (22) na equação (21), concluímos que c deve ser nulo, assim

$$h_{00} = 2\phi,$$

e finalmente

$$g_{00} = (1 + 2\phi). \quad (23)$$

2.4 Derivada covariante e divergência tensorial

As equações da física devem respeitar o *princípio da covariância geral*, que afirma que as leis da física devem tomar a mesma forma, qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado. Para isto, elas devem ser escritas em termos de tensores.

É fácil verificar que a derivada parcial não é tensorial (a não ser no caso da diferenciação de um escalar). De fato, seja V^μ um campo vetorial arbitrário

$$\begin{aligned} \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} V^\gamma \right) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\gamma} V^\gamma. \end{aligned}$$

Vemos claramente que a derivada parcial do vetor considerado não transforma-se como um tensor por causa do segundo termo presente no lado direito da equação. Resultados semelhantes podem ser verificados para tensores de ordem superior.

É possível obtermos uma diferenciação que seja tensorial fazendo uso da conexão afim. A essa operação tensorial damos o nome de derivada covariante, que será denotada por um ponto e uma vírgula¹ e que é definida da seguinte forma

Derivada covariante de um escalar

$$\phi_{;\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

Derivada de um vetor contravariante

$$V^\nu_{;\mu} = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda$$

Derivada de um vetor covariante

$$V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} V_\lambda$$

¹Essa notação costuma ser acompanhada do uso de uma vírgula como indicador da derivada parcial.

Derivada covariante de um tensor misto de segunda ordem

$$T^{\lambda}_{\mu;\nu} = \frac{\partial T^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu} T^{\gamma}_{\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\gamma}$$

A derivada covariante de tensores de ordem superior segue a mesma lógica.

Derivada covariante do tensor métrico Da definição da derivada covariante

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (24)$$

Juntando (24) e (10), vemos que a derivada covariante do tensor métrico é nula

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \quad (25)$$

Divergência tensorial

$$V^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} V^{\lambda}$$

A derivada covariante tem interpretação semelhante à interpretação da derivada ordinária. Trata-se da comparação dos valores de uma quantidade tensorial em pontos vizinhos. O detalhe é que a derivada covariante, por meio da conexão afim, leva em conta a geometria da variedade sobre a qual a comparação dos valores é feita e assim consegue-se comparar valores em pontos distintos de uma maneira tensorial.

2.5 Tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura

Calculemos o comutador da derivada covariante de um vetor contravariante

$$V^{\lambda}_{;\mu\nu} = (V^{\lambda}_{;\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} V^{\gamma})_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\nu} (V^{\delta}_{;\mu} + \Gamma^{\delta}_{\gamma\mu} V^{\gamma}) - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} (V^{\lambda}_{;\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta} V^{\gamma}). \quad (26)$$

Trocando μ por ν em (26)

$$V^{\lambda}_{;\nu\mu} = (V^{\lambda}_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu} V^{\gamma})_{;\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\mu} (V^{\delta}_{;\nu} + \Gamma^{\delta}_{\gamma\nu} V^{\gamma}) - \Gamma^{\delta}_{\nu\mu} (V^{\lambda}_{;\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta} V^{\gamma}).$$

Subtraindo uma da outra e fazendo várias simplificações

$$V^{\lambda}_{;\mu\nu} - V^{\lambda}_{;\nu\mu} = (\Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} V^{\gamma})_{;\nu} - (\Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu} V^{\gamma})_{;\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\nu} V^{\delta}_{;\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\mu} V^{\delta}_{;\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\nu} \Gamma^{\delta}_{\gamma\mu} V^{\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta} V^{\gamma},$$

de onde obtemos

$$V^{\lambda}_{;\mu\nu} - V^{\lambda}_{;\nu\mu} = (\Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\nu} \Gamma^{\delta}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta}) V^{\gamma}.$$

Pela definição da derivação covariante, o lado esquerdo é tensorial. Por suposição, V^{μ} é um vetor, assim, pela regra do quociente, a quantidade entre parênteses trata-se de um

tensor, que é conhecido como *tensor de curvatura*, definido por

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}. \quad (27)$$

A importância deste tensor reside na sua interpretação geométrica. Um teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em D'Inverno (1992), assegura que uma condição necessária e suficiente para que um tensor métrico seja do tipo minkowskiano é que o tensor de curvatura se anule. Portanto, devido à interpretação geométrica que se faz da gravitação, o tensor de curvatura nos informará se em uma determinada região existe campo gravitacional.

Outros tensores com semelhante interpretação geométrica e de grande utilidade para o nosso desenvolvimento são o *tensor de Ricci*, definido por

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} \quad (28)$$

e o *escalar de curvatura*, obtido por meio do tensor de Ricci da seguinte forma

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}.$$

O tensor de curvatura pode ser escrito numa forma completamente covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}.$$

Essa forma satisfará as seguintes propriedades, como demonstra Weinberg (1972)

(A) Simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$$

(B) Antissimetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$$

(C) Ciclicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$$

Pela definição (28) e pela propriedade (A), verifica-se a simetria do tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}.$$

A partir da propriedade (B), verifica-se que o tensor de Ricci é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado a partir de contrações do tensor de Riemann e que o escalar de curvatura é o único escalar que pode ser formado a partir do tensor de Ricci por contrações Weinberg (1972).

As derivadas covariantes do tensor de curvatura satisfazem a chamada *identi-*

dade de Bianchi Weinberg (1972), dada por

$$R_{\lambda\mu\nu;\eta} + R_{\lambda\mu\eta;\nu} + R_{\lambda\mu\kappa;\eta} = 0.$$

Contraindo os índices λ com ν e levando em conta (25), temos

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^\nu_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0.$$

Contraindo agora os índices μ e κ , obtemos

$$\begin{aligned} R_{;\eta} - R^\mu_{\eta;\mu} - R^\nu_{\eta;\nu} &= 0 \\ \left(R^\mu_{\eta} - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\eta} R \right)_{;\mu} &= 0, \end{aligned}$$

ou, como a derivada covariante do tensor métrico é nula

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\eta} R \right)_{;\mu} = 0.$$

2.6 Derivação das equações de Einstein

Consideremos um sistema de referência que visualiza um campo gravitacional arbitrária. Em qualquer ponto X o Princípio da Equivalência assegura que podemos encontrar um sistema de referência localmente inercial, para o qual valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(X) &= \eta_{\alpha\beta} \\ \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma} \right)_{x=X} &= 0. \end{aligned}$$

Se expandirmos $g_{\alpha\beta}$ numa série de Taylor em torno do ponto X , as equações acima nos asseguram que para pontos x muito próximos do ponto X , $g_{\alpha\beta}$ só diferirá de $\eta_{\alpha\beta}$ por termos quadráticos em $(x - X)$. Portanto, nesse sistema de referência vê-se o campo gravitacional muito fraco próximo de X , e por isso esperamos conseguir obter as equações que o descrevem. Quando descobirmos essas equações, poderemos por meio de uma transformação de coordenadas conhecer o campo visto pelo sistema de referência que vê o campo com uma intensidade arbitrária Weinberg (1972).

Essas equações não podem ser obtidas diretamente, por isso resta-nos a possibilidade de trabalharmos com a aproximação newtoniana, a qual constitui uma boa solução para campos fracos, estáticos e gerados por matéria não relativística, e então tentarmos alguma solução mais geral, ainda para campos fracos.

Vimos que na aproximação newtoniana

$$g_{00} \simeq (1 + 2\phi),$$

onde ϕ é o potencial newtoniano.

Sabe-se que a componente T_{00} do *tensor momentum-energia*² para matéria não relativística é tal que

$$T_{00} \simeq \rho.$$

As duas últimas expressões na equação de poisson fornecem

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi T_{00}.$$

Essa equação nos leva a pensar que se o tensor momentum-energia fosse o mais geral possível (de qualquer tipo de distribuição de matéria/energia), nossa equação tomaria a forma

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

onde $G_{\alpha\beta}$ deve ser uma combinação linear do tensor métrico com suas derivadas de primeira e segunda ordem. Então, uma transformação de coordenadas assegurada pelo Princípio da Equivalência nos leva às equações que descrevem o campo gravitacional arbitrário, a saber

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o chamado *tensor de Einstein* que é reduzido a $G_{\alpha\beta}$ no limite de campos fracos.

Assumiremos que as seguintes propriedades devem ser satisfeitas por $G_{\mu\nu}$:

- (A) Por definição, $G_{\mu\nu}$ deve ser um tensor.
- (B) $G_{\mu\nu}$ contém apenas termos que são lineares na segunda derivada ou quadráticos na primeira derivada do tensor métrico.
- (C) Como $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, $G_{\mu\nu}$ também deverá ser.
- (D) Como $T_{\mu\nu}$ respeita uma equação de continuidade, $G_{\mu\nu}$ também deverá respeitar:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0.$$

- (E) Para campos fracos, estacionários e que sejam produzidos por matéria não relativística, esperamos que a componente G_{00} do tensor de Einstein seja tal que

²O tensor momentum-energia é um quadritensor que carrega em si informação da massa, energia e momentum de um determinado sistema físico. Tal tensor respeita uma equação da continuidade dada em forma tensorial por $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$.

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}.$$

Fazendo uso dessas propriedades, determinaremos $G_{\mu\nu}$.

As propriedades (A) e (B) requerem que

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (29)$$

pois como vimos, o tensor de curvatura é o único que pode ser obtido a partir do tensor métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem. C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Note que desta forma $G_{\mu\nu}$ satisfaz (C). Escrevendo a equação anterior na forma

$$G^\mu{}_\nu = C_1 R^\mu{}_\nu + C_2 \delta^\mu{}_\nu R,$$

e derivando covariantemente em x^μ , obtemos

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2 \delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}. \quad (30)$$

Vimos na seção anterior que

$$R^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R_{;\mu}.$$

Com isso em (30), temos

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu}. \quad (31)$$

A propriedade (D) impõe que ou

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) = 0,$$

ou

$$R_{;\nu} = 0,$$

e escolhemos o primeiro caso, pois o segundo nos restringiria a um caso particular de tensor energia-momento Weinberg (1972). Portanto

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}.$$

Portanto (29) pode ser posta na forma

$$G_{\mu\nu} = C \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (32)$$

Por fim, faremos uso da propriedade (E) para obter o valor da constante C . Para um sistema não relativístico, $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, por isso devemos considerar $|G_{ij}| \ll |G_{00}|$, então

de (32), concluímos que

$$\begin{aligned} G_{ij} &= C \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) \\ \Rightarrow C \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \right) &\simeq 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R.$$

Usando agora o fato de que na aproximação newtoniana o campo deve ser fraco, ou seja, $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$, então

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &\simeq \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &\simeq R_{00} - R_{kk} \\ &\simeq R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{kk} R \\ &\simeq R_{00} + \frac{3}{2} R, \end{aligned}$$

logo

$$R \simeq -2R_{00}.$$

De (32), temos

$$G_{00} = C \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right) \simeq 2CR_{00}. \quad (33)$$

Para obtermos o valor de R_{00} na aproximação de campo fraco, devemos fazer uso de uma das formas na qual podemos escrever o tensor de curvatura Weinberg (1972)

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right).$$

logo

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

ou

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}. \quad (34)$$

Com (34) em (33), temos

$$G_{00} \simeq C_1 \nabla^2 g_{00},$$

por isso concluímos que $C = 1$.

Finalmente, obtemos as *equações de campo de Einstein*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (35)$$

(35) constituem-se em dez equações diferenciais parciais não-lineares em $g_{\mu\nu}$. A leitura dessa equação pode ser feita como segue: Dado um determinado tensor de momentum-energia, representativo de um determinado sistema físico, (35) informa-nos os valores assumidos por $g_{\mu\nu}$, ou seja, como o espaço-tempo tem sua estrutura geométrica modificada pela presença daquele sistema.

Uma forma alternativa a (35) pode ser obtida. Contraindo-a com $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\mu R &= 8\pi T^\mu{}_\mu \\ R &= -8\pi T^\mu{}_\mu. \end{aligned} \tag{36}$$

Com (36) em (35), obtemos

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right). \tag{37}$$

(37) mostra que as EE no vácuo são dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{38}$$

3 SOLUÇÕES ESTÁTICAS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICAS

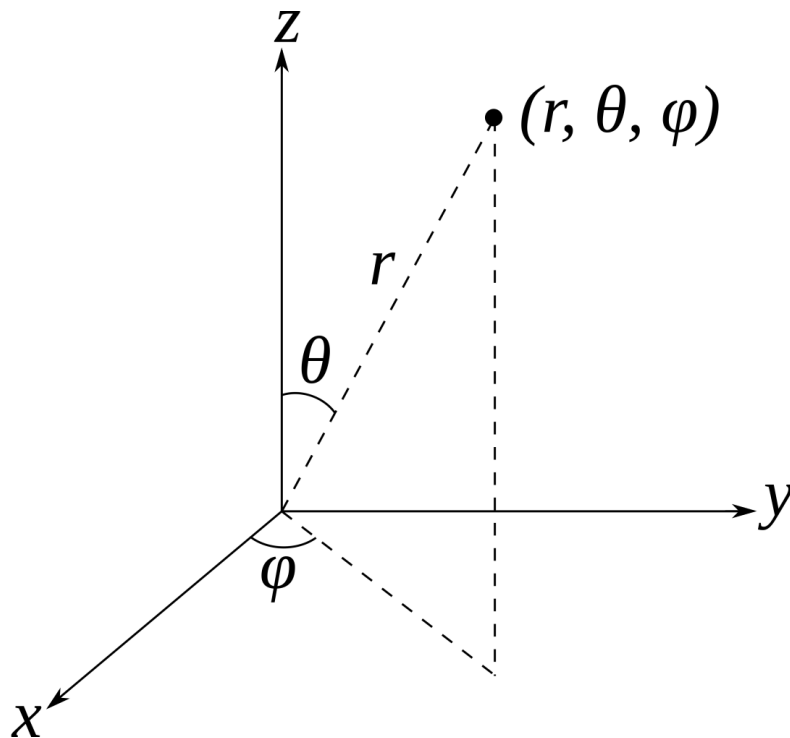
Neste capítulo, de uma forma concisa e direta, apresentamos três soluções estáticas e esfericamente simétricas das EE, a saber a solução de Schwarzschild, a solução de Reissner-Nordstrom e a solução de Schwarzschild com Quintessência.

É um resultado bem estabelecido que a métrica estática e esfericamente simétrica mais geral tem a forma

$$ds^2 = e^a dt^2 - e^b dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2), \quad (39)$$

onde $a = a(r)$, $b = b(r)$. r , θ e ϕ são coordenadas esféricas, ilustradas na figura 1.

Figura 1 – Coordenadas esféricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1 Solução de Schwarzschild

Essa solução satisfará (39) e satisfará também

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (40)$$

pois a distribuição de matéria não se estende por todo o espaço. Como estamos interessados na região em que não há matéria, resolveremos as EE no vácuo, (38).

Uma análise da equação (39) mostra que

$$g_{00} = e^a, \quad g_{11} = -e^b, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \text{sen}^2(\theta) \quad (41)$$

e também que

$$g^{00} = e^{-a}, \quad g^{11} = -e^{-b}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \text{sen}^{-2}(\theta). \quad (42)$$

Precisamos, portanto, determinar a e b . Começemos computando as componentes não nulas da conexão afim³. Seja a definição da conexão afim, a primeira componente não nula é

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} a'.$$

Na sequência, temos

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} e^{-b} e^a a', & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} b', & \Gamma^1_{22} &= -e^{-b} r, & \Gamma^1_{33} &= -e^{-b} r \text{sen}^2(\theta), \\ \Gamma^2_{12} &= r^{-1}, & \Gamma^2_{33} &= -\text{sen}(\theta) \cos(\theta), & \Gamma^3_{13} &= r^{-1}, & \Gamma^3_{23} &= \text{cotg}(\theta). \end{aligned}$$

Calculemos as componentes não nulas do *tensor de Ricci*. Juntando (27) e (28), temos

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}.$$

A primeira componente não nula é

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{00}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{0\lambda}}{\partial x^0} + \Gamma^{\eta}_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{0\eta}.$$

Calculando cada parcela separadamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{00}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{1}{2} e^{(a-b)} a'' + \frac{1}{2} e^{(a-b)} (a' - b') a', & \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{0\lambda}}{\partial x^0} &= 0, \\ \Gamma^{\eta}_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} &= \frac{1}{4} e^{(a-b)} (a')^2 + \frac{1}{4} e^{(a-b)} a' b' + \frac{1}{r} e^{(a-b)} a', & \Gamma^{\eta}_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{0\eta} &= \frac{1}{2} e^{(a-b)} (a')^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(a-b)} a'' + \frac{1}{4} e^{(a-b)} (a')^2 - \frac{1}{4} e^{(a-b)} a' b' + \frac{1}{r} e^{(a-b)} a'. \quad (43)$$

A segunda componente não nula é

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{11}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{1\lambda}}{\partial x^1} + \Gamma^{\eta}_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{1\lambda} \Gamma^{\lambda}_{1\eta}.$$

³O cálculo detalhado dessas quantidades e das componentes não nulas do *Tensor de Ricci* pode ser encontrado no Apêndice A.

Calculando as parcelas, temos

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^\lambda}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2}b'', \quad \frac{\partial \Gamma_{1\lambda}^\lambda}{\partial x^1} = \frac{1}{2}a'' + \frac{1}{2}b'' - \frac{2}{r^2},$$

$$\Gamma_{11}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda = \frac{1}{4}a'b' + \frac{1}{4}(b')^2 + \frac{b'}{r}, \quad \Gamma_{1\lambda}^\eta \Gamma_{1\eta}^\lambda = \frac{1}{4}(a')^2 + \frac{1}{4}(b')^2 + \frac{2}{r^2}.$$

Concluimos que

$$R_{11} = -\frac{1}{2}a'' - \frac{1}{4}(a')^2 + \frac{1}{4}a'b' + \frac{b'}{r}. \quad (44)$$

A terceira componente não nula é

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{2\lambda}^\lambda}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\eta \Gamma_{2\eta}^\lambda.$$

Calculando as parcelas, temos

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^\lambda}{\partial x^\lambda} = -e^{-b} + rb'e^{-b}, \quad \frac{\partial \Gamma_{2\lambda}^\lambda}{\partial x^2} = -\operatorname{cosec}^2(\theta),$$

$$\Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda = -\frac{re^{-b}a'}{2} - \frac{re^{-b}b'}{2} - 2e^{-b}, \quad \Gamma_{2\lambda}^\eta \Gamma_{2\eta}^\lambda = -2e^{-b} + \cotg^2(\theta).$$

Concluimos que

$$R_{22} = -e^{-b} + \frac{rb'e^{-b}}{2} - \frac{ra'e^{-b}}{2} + 1. \quad (45)$$

A quarta componente não nula, R_{33} , se relaciona com R_{22} por meio de

$$R_{33} = \operatorname{sen}^2(\theta)R_{22}. \quad (46)$$

Primeiramente, fazendo uso de (38), (43) e (44), temos

$$\frac{1}{2}a'' + \frac{1}{4}(a')^2 - \frac{1}{4}a'b' + \frac{a'}{r} = 0$$

e

$$-\frac{1}{2}a'' - \frac{1}{4}(a')^2 + \frac{1}{4}a'b' + \frac{b'}{r} = 0.$$

Somando-as, temos

$$a' + b' = 0,$$

que implica em

$$a = -b + c,$$

onde c é uma constante que consideraremos nula, pois acarretaria apenas uma mudança na escala do tempo. Obtemos, portanto

$$g_{00} = e^{-b}. \quad (47)$$

Fazendo uso de (38) e (45)

$$-e^{-b} + \frac{r}{2}(b' - a')e^{-b} + 1 = 0,$$

que é equivalente a

$$e^{-b} - re^{-b}b' = 1,$$

onde usamos $a' = -b'$. É fácil ver que

$$(re^{-b})' = 1,$$

de onde, integrando em r , obtemos

$$e^{-b} = 1 + \frac{k}{r}, \quad (48)$$

onde k é uma constante. Para obter k , basta notarmos que nossa solução é válida para um objeto pontual, então é compatível com o caso newtoniano que foi exposto aqui, assim, juntando (22), (23), (47), (48), temos

$$1 + \frac{k}{r} = 1 - \frac{2M}{r},$$

de onde concluímos que $k = -2m$. Finalmente, obtemos a solução de *schwarzschild*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (49)$$

3.2 Solução de Reissner-Nordstrom

Consideremos um objeto como o do problema de *schwarzschild*, mas que possua uma carga elétrica situada no seu centro. Resolveremos as equações (35) na região externa ao objeto, sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor *energia momentum* decorrente do campo eletrostática gerado pela carga. O campo elétrico não dependerá de θ e ϕ e será radial. Naturalmente, esperamos que o campo elétrico não tenha módulo igual ao do campo produzido num espaço flat, pois sabemos que o campo elétrico se acopla com o campo gravitacional. Isso se tornará explícito quando computarmos o valor de E .

$T_{\mu\nu}$ é o tensor *energia momentum de Maxwell*, dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\delta} F_{\mu\lambda} F_{\nu\delta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \right), \quad (50)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor *field-strength* e satisfaz as *equações de maxwell na forma covariante*

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu}, \quad (51)$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0. \quad (52)$$

Mostremos que com esse tensor, as equações (35) reduzem-se a

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (53)$$

Contraindo (50) com $g^{\mu\nu}$, temos

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-F_{\mu\lambda} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\delta} F_{\nu\delta}) + \frac{1}{4} \delta^{\mu}_{\mu} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \right],$$

de onde resulta que

$$T^{\nu}_{\nu} = \frac{1}{4\pi} (-F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} + F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta}) = 0. \quad (54)$$

Com (54) em (36), obtemos a nulidade do *escalar de Ricci* que, quando considerada em (35), reproduz o resultado desejado, isto é, a validade de (53).

No nosso caso, como nosso campo só possui componente radial, $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$(F_{\mu\nu}) = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde vemos que as únicas componentes não nulas de $F_{\mu\nu}$ são

$$F_{01} = -E(r) \quad (55)$$

e

$$F_{10} = E(r). \quad (56)$$

Como $F^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\delta} F_{\lambda\delta}$, $F^{\mu\nu}$ terá apenas as componentes

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{0\lambda} g^{1\delta} F_{\lambda\delta} \\ &= g^{00} g^{11} F_{01} \\ &= e^{-(a+b)} E(r) \end{aligned} \quad (57)$$

e

$$F^{10} = -e^{-(a+b)} E(r),$$

onde usamos g^{00} e g^{11} , definidos em (42), (56) e levamos em conta a antissimetria de $F^{\mu\nu}$. Com essas informações na segunda das *equações de Maxwell*, (52), verifica-se que ela se reduz a uma identidade, portanto não nos trás nenhuma informação útil. Levando em conta (51), com o lado direito nulo, pois a região onde estamos considerando o campo elétrico não possui carga, apenas a equação com $\nu = 0$ não se reduz a uma identidade,

assim

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\mu} F^{0\mu} \\
&= \partial_{\mu} F^{0\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} F^{0\lambda} + \Gamma^0_{\mu\lambda} F^{\lambda\mu} \\
&= \partial_1 F^{01} + \Gamma^{\mu}_{\mu 1} F^{01},
\end{aligned}$$

onde usamos a definição da derivada covariante de um tensor contravariante de segunda ordem e anulamos a terceira parcela da segunda linha, $\Gamma^0_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, por se tratar da contração de uma quantidade simétrica com uma quantidade antissimétrica. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_1 F^{01} + \Gamma^0_{01} F^{01} + \Gamma^1_{11} F^{01} + \Gamma^2_{21} F^{01} + \Gamma^3_{31} F^{01} \\
&= \partial_r (e^{-(a+b)} E) + \frac{1}{2} e^{-(a+b)} (a' + b') E + \frac{2}{r} e^{-(a+b)} E,
\end{aligned}$$

onde usamos os valores das componentes da conexão afim obtidos na seção anterior e (57). Devemos manter em mente que a solução que buscamos deve ser esférica e estática, portanto, tudo que obtivemos na seção anterior, levando em conta apenas essas hipóteses, também será válido nesta seção. Multiplicando por r^2 e operando a derivada do primeiro termo, temos

$$r^2 e^{-(a+b)} E' - \frac{a' + b'}{2} r^2 e^{-(a+b)} E + 2r e^{-(a+b)} E = 0.$$

Multiplicando por $e^{\frac{1}{2}(a+b)}$, temos

$$r^2 e^{-\frac{1}{2}(a+b)} E' - \frac{a' + b'}{2} r^2 e^{-\frac{1}{2}(a+b)} E + 2r e^{-\frac{1}{2}(a+b)} E = 0,$$

que pode ser escrita como

$$(r^2 e^{-\frac{1}{2}(a+b)} E)' = 0.$$

Integrando com respeito a r e isolando E , temos

$$E = \frac{e^{\frac{1}{2}(a+b)} \epsilon}{r^2}, \quad (58)$$

onde ϵ é a constante de integração. Se considerarmos a e b iguais a zero em (39), obtemos a métrica *flat*, isto é, ausência de gravidade. Fazendo o mesmo em (58), vemos que $E = \frac{\epsilon}{r^2}$, portanto vemos que a constante ϵ trata-se da carga elétrica.

Agora estamos aptos a resolver as equações (53). Começamos calculando R_{00} , dado por

$$R_{00} = 8\pi T_{00}. \quad (59)$$

Fazendo uso de (50), (42), (41), (55) e (57), temos

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\delta} F_{0\lambda} F_{0\delta} + \frac{1}{4} g_{00} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[-g^{11} F_{01} F_{01} + \frac{1}{4} g_{00} (F_{10} F^{10} + F_{01} F^{01}) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} e^{-b} E^2 \right).
\end{aligned} \tag{60}$$

Com (60) e (43) em (59), temos

$$\frac{1}{2} a'' + \frac{1}{4} (a')^2 - \frac{1}{4} a' b' + \frac{a'}{r} = e^{-a} E^2. \tag{61}$$

Calculemos

$$R_{11} = 8\pi T_{11}. \tag{62}$$

Temos, analogamente

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\delta} F_{1\lambda} F_{1\delta} + \frac{1}{4} g_{11} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{00} F_{10} F_{10} + \frac{1}{2} g_{11} F_{10} F^{10} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-a} E^2 \right).
\end{aligned} \tag{63}$$

Com (63) e (44) em (62), temos

$$-\frac{1}{2} a'' - \frac{1}{4} (a')^2 + \frac{1}{4} a' b' + \frac{b'}{r} = -e^{-a} E^2. \tag{64}$$

Somando (61) a (64), temos

$$a' + b' = 0$$

que implica em

$$a = -b,$$

onde consideramos a constante de integração nula pelo mesmo motivo que visto na seção anterior. Calculemos

$$R_{22} = 8\pi T_{22}. \tag{65}$$

Temos

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\lambda\delta} F_{2\lambda} F_{2\delta} + \frac{1}{4} g_{22} F_{\lambda\delta} F^{\lambda\delta} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} g_{22} F_{10} F^{10} \\
&= \frac{1}{8\pi} r^2 E^2.
\end{aligned} \tag{66}$$

Com (66) e (45) em (65) e lembrando de (58), temos

$$-e^{-b} + \frac{r}{2}(b' - a')e^{-b} + 1 = \frac{\epsilon^2}{r^2},$$

que é equivalente a

$$e^{-b} - re^{-b}b' = 1 - \frac{\epsilon^2}{r^2},$$

onde usamos $a' = -b'$. É fácil ver que

$$(re^{-b})' = 1 - \frac{\epsilon^2}{r^2},$$

de onde obtemos

$$e^{-b} = 1 + \frac{\epsilon^2}{r^2} + \frac{k}{r}.$$

Fazendo ϵ igual a zero e comparando com o caso da seção anterior, verificamos que $k = -2M$. Portanto

$$e^{-b} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}.$$

Finalmente, obtemos a solução de *Reissner-Nordstrom*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\epsilon^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2).$$

3.3 Solução com Quintessência

A última solução trata-se da solução com Quintessência. Como já destacado, a Quintessência surgiu para modelar a expansão acelerada do Universo. Observa-se que tal expansão é isotrópica, portanto, o tensor *energia momentum* associado à Quintessência deve ser esfericamente simétrico. A forma geral do tensor *energia momentum* é dada por Kiselev (2003)

$$T_0^0 = \rho_q(r),$$

$$T_i^j = \rho_q(r)\alpha \left[- (1 + 3B) \frac{r_i r^j}{r_n r^n} + B \delta_i^j \right],$$

onde B é um parâmetro que depende da estrutura interna da Quintessência e α é um parâmetro que está associado ao estado de Quintessência. Calculando a média isotrópica, temos

$$\langle T_i^j \rangle = \rho_q(r)\alpha \left[- (1 + 3B) \frac{\langle r_i r^j \rangle}{r_n r^n} + B \langle \delta_i^j \rangle \right].$$

Sendo $\langle r_i r^j \rangle = \frac{1}{3} \delta_i^j r_n r^n$, vê-se que

$$\langle T_i^j \rangle = -\rho_q(r) \frac{\alpha}{3} \delta_i^j.$$

Como trata-se de uma expansão, devemos ter uma pressão negativa, portanto

$$\langle T_i^j \rangle = -p_q(r)\delta_i^j.$$

Assim, obtemos

$$p_q = \omega_q \rho_q, \quad \omega_q = \frac{1}{3}\alpha,$$

que trata-se da equação de estado da Quintessência.

Neste caso, precisaremos das EE na forma (35), portanto, precisamos calcular o escalar de curvatura

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}.$$

Assim, usando (41), (43), (44), (45) e (46), temos

$$\begin{aligned} R = e^{-b} & \left[\frac{a''}{2} + \frac{(a')^2}{4} - \frac{a'b'}{4} + \frac{a'}{r} \right] - e^{-b} \left[-\frac{a''}{2} - \frac{(a')^2}{4} + \frac{a'b'}{4} + \frac{a'}{r} \right] \\ & - 2r^{-2} \left(-e^{-b} + \frac{rb'e^{-b}}{2} - \frac{ra'e^{-b}}{2} + 1 \right), \end{aligned}$$

logo

$$R = e^{-b} \left[a'' + \frac{1}{2}(a')^2 - \frac{1}{2}a'b' + \frac{2}{r}(a' - b') + \frac{2}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2}.$$

Com esse resultado, temos

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{e^{(a-b)}b'}{r} - \frac{e^{(a-b)}}{r^2} + \frac{e^a}{r^2}. \quad (67)$$

Usando $G_\mu^\nu = g^{\nu\lambda}G_{\mu\lambda}$, temos

$$G_\mu^\nu = g^{\nu\lambda} \left(R_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}R \right).$$

Dessa equação podemos obter as quatro componentes não nulas do *tensor de Einstein*. A primeira é dada por

$$G_0^0 = g^{0\lambda} \left(R_{0\lambda} - \frac{1}{2}g_{0\lambda}R \right),$$

de onde vemos que

$$G_0^0 = g^{00} \left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right),$$

e, fazendo uso de (41), (42) e (67), obtemos

$$G_0^0 = e^{-b} \left(\frac{b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}.$$

De modo análogo

$$G_1^1 = -e^{-b} \left(\frac{a'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2},$$

e

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-b} \left[a'' + \frac{(a')^2}{2} + \frac{a' - b'}{r} - \frac{a'b'}{2} \right].$$

Suporemos que nosso tensor de energia momentum satisfaz condições de aditividade e linearidade para que possamos obter os casos demonstrados nas seções anteriores a partir do resultado que obteremos. Primeiramente, fazendo $T_0^0 = T_1^1$, temos

$$a + b = 0.$$

Façamos a seguinte substituição

$$b = -\ln(1 + f), \quad (68)$$

para tornar as equações diferenciais com as quais vamos lidar lineares. A partir de agora, consideremos $4\pi = 1$ nas EE. Levando em conta (68) nas EE, obtemos equações diferenciais lineares em f

$$T_0^0 = T_1^1 = -\frac{1}{2r^2}(f + rf'). \quad (69)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{4r}(2f' + rf''). \quad (70)$$

A linearidade dessas equações nos revela que a solução geral desse problema é a solução do problema constituído de um conjunto de tensores energia momentum que podem ser somados

$$\sum_n c_n f_n \longrightarrow \sum_n c_n T_\mu^\nu[f_n]$$

A condição de aditividade e linearidade fixa o valor de B

$$B = -\frac{3w_q + 1}{6w_q}.$$

Assim, obtemos

$$T_0^0 = T_1^1 = \rho_q, \quad (71)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{2}\rho_q(3w_q + 1). \quad (72)$$

Juntando (69) e (70) a (71) e (72), temos

$$r^2 f'' + 3(1 + w_q)rf' + (3w_q + 1)f = 0,$$

que trata-se de uma equação de Euler-Cauchy, cujas soluções são

$$f_q = \frac{c}{r^{3w_q+1}}, \quad (73)$$

e

$$f_0 = -\frac{2M}{r},$$

onde já estamos adiantando o valor da constante na segunda solução porque facilmente faz-se um limite tendendo ao caso da seção 1, e verifica-se que a constante assumi esse valor. Com (73) em (69), temos

$$\begin{aligned} \rho_q &= -\frac{1}{2r^2} \left[\frac{c}{r^{3w_q+1}} + r \frac{-c(3w_q+1)}{r^{3w_q+2}} \right] \\ &= -\frac{c}{2} \left(\frac{3w_q}{r^{3w_q+1}} \right), \end{aligned}$$

que nos fornece uma relação entre c , ρ e w . Concluimos, portanto, apresentando a métrica no caso de Quintessência

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r} \right)^{3w_q+1} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r} \right)^{3w_q+1} \right]^{-1} dr^2 \\ &\quad - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \end{aligned} \quad (74)$$

onde em r_n estão contidas a constante c e o parâmetro w_q .

4 SOLUÇÃO DE KERR

Neste capítulo, apresentamos um algoritmo algébrico, conhecido como “*truque de Newman-Janis*” ou, simplesmente, algoritmo de *Newman-Janis*, com o qual obtemos, a partir das soluções estáticas e esfericamente simétricas previamente obtidas, uma solução das EE que descreve objetos como o de *Schwarzschild*, porém rotativos. Portanto, como a *solução de Schwarzschild* representa um buraco negro estático e esfericamente simétrico, a solução resultante, chamada de *solução de Kerr*, representa um buraco negro rotativo. Podemos também proceder da mesma maneira para obter uma solução rotativa, a partir da solução de *Reisner-Nordstrom*, que representa um buraco negro rotativo com carga elétrica centralizada, e outra, a partir da solução *com Quintessência*, que representa um buraco negro rotativo em um Universo permeado por Quintessência. O último caso é feito no capítulo seguinte.

4.1 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Em 1963, o matemático, neozelandês, *Roy Patrick Kerr*, obteve uma solução exata das equações de vácuo de Einstein que descreve objetos rotativos. Como pode ser verificado no trabalho original Kerr (1963), com detalhes em Adler, Bazin, and Schiffer (1975), esse processo se revela bastante longo e trabalhoso. Como destacado, seguiremos o processo, desenvolvido por *Ezra T. Newman* e *Allen I. Janis*, originalmente apresentado em Newman and Janis (1965). Este método é bem mais direto, entretanto, é composto por alguns passos, pouco fundamentados, que ainda hoje levam a diferentes interpretações⁴. Nosso objetivo aqui é apenas fazer uso do método para obter as soluções rotativas, portanto, não iremos nos ater aos fundamentos do algoritmo. Para algumas interpretações, ver Rajan (2015).

Um dos “mistérios” do algoritmo de Newman-Janis(ANJ) é que ele só funciona nas chamadas *Coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein*(CEF), assim, para que possamos proceder com o método, precisamos passar das *coordenadas de Schwarzschild* para as CEF.

Para tanto, consideremos um photon, ou qualquer outro objeto tipo-luz, sujeito à influência do campo de Schwarzschild radial. Isso implica que

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0,$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao tempo próprio⁵. Levando em conta a

⁴Devido a essa característica do método, ele é chamado por muitos autores de “truque”. Ele é visto como algo que ainda requer algumas explicações, mas que funciona, dado que se obtém, a partir dele, a mesma solução que *Roy Kerr* obteve resolvendo diretamente as EE.

⁵Qualquer outro parâmetro afim produziria o mesmo resultado, como se pode ver em D’Inverno (1992).

métrica de Schwarzschild, a Regra da Cadeia e o resultado acima, temos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0. \quad (75)$$

Consideremos apenas a primeira das quatro equações da geodésica que descreve esse movimento, fazendo $\lambda = 0$ em (4), assim, temos

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Desenvolvendo essa expressão, obtemos

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{00} (\dot{x}^0)^2 + 2\Gamma^0_{0i} \dot{x}^0 \dot{x}^i + \Gamma^0_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad (76)$$

de onde é fácil verificar que

$$\ddot{t} + 2\frac{1}{2}a' \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (77)$$

pois a única componente não nula, que aparece na equação (76), da conexão afim é a $\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}a'$. Como

$$e^a = \left(1 - \frac{2M}{r}\right),$$

temos

$$a' = \frac{\frac{2M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (78)$$

Com (78) em (77), vemos que

$$\ddot{t} + \frac{\frac{2m}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{t} \dot{r} = 0.$$

Pela Regra do Produto, temos

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \right] = 0,$$

que integrando, obtemos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (79)$$

onde k é a constante decorrente da integração. Com (79) em (75), encontramos

$$\dot{r}^2 = k^2,$$

ou

$$\dot{r} = \pm k. \quad (80)$$

Poderíamos resolver em τ a equação acima e usar esse resultado em (79) para obter t em função de τ , mas nosso objetivo não é analisar as equações de movimento; ao invés

disso, analisemos a relação entre t e r . Considerando a equação negativa em (80)⁶, e (79), isolamos k para obter

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{r-2M}, \quad (81)$$

onde usamos

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\frac{dt}{d\tau}}{\frac{dr}{d\tau}} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}}.$$

Integrando (81), chegamos em

$$t = -r - 2M \ln(r - 2M) + c, \quad (82)$$

onde c é a constante de integração.

O segundo passo é definir uma nova variável que linearize a relação entre nossas coordenadas temporal e radial. Isso é obtido por meio de

$$t \rightarrow \bar{t} = t - 2M \ln(r - 2M), \quad (83)$$

pois facilmente se verifica que

$$\bar{t} = -r + c.$$

Diferenciando (83), temos

$$d\bar{t} = dt - \frac{2M}{r-2M} dr. \quad (84)$$

Isolando dt em (84) e elevando o resultado ao quadrado, temos

$$dt^2 = d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r-2M} d\bar{t} dr + \frac{4M^2}{(r-2M)^2} dr^2. \quad (85)$$

Com (84) e (85) em (49), temos

$$ds^2 = \frac{r-2M}{r} \left[d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r-2M} d\bar{t} dr + \frac{4M^2}{(r-2M)^2} dr^2 \right] - \frac{r}{r-2M} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2),$$

que, após um simples desenvolvimento algébrico, resulta em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t} dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (86)$$

Essa ainda não é a métrica de Schwarzschild nas CEF na forma que queremos. O último passo é definir a seguinte troca de coordenadas

⁶Ambas as escolhas de sinal tem um significado físico-geométrico que não nos será útil. Para uma análise destes significados ver D'Inverno (1992) e Carroll (2004).

$$v = \bar{t} - r,$$

que, com o seu quadrado, pode ser substituída em (86), resultando em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dv^2 + 2dv dr + dr^2) + \frac{4M}{r}(dv + dr)dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2),$$

a partir do que, executado algumas operações algébricas, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dv dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (87)$$

Essa é a métrica de Schwarzschild nas CEF. Portanto, para passar das coordenadas de Schwarzschild, (t, r, θ, ϕ) , para as CEF, (v, r', θ', ϕ') , efetuamos as transformações

$$v = t - r - 2M \ln(r - 2M), \quad r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad \phi' = \phi.$$

4.2 Tetradas nulas

As tetradas nulas são um conjunto de quatro vetores tipo nulos definidos ponto a ponto de espaços tangentes a variedades. O formalismo que as trata foge ao escopo deste trabalho. Para uma introdução ao formalismo, ver Newman and Penrose (1963). O resultado que nos interessa diz que em cada ponto de uma variedade, pode-se expressar o tensor métrica desta variedade em relação à tetrada nula(TN) definida nesse ponto, no espaço tangente, das seguintes formas

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu.$$

e

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (88)$$

4.3 Solução de Kerr a partir de uma transformação complexa

A partir de (87), obtemos a matriz que contém as componentes do tensor métrico na forma covariante, a saber

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Para obter a inversa, isto é, a matriz que contém as componentes $g^{\mu\nu}$, usemos o método de Gauss-Jordan ⁷, assim

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 - \frac{2M}{r} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

onde, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_3 \rightarrow -\frac{1}{r^2}L_3$ e $L_4 \rightarrow -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)}L_4$, temos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{2M}{r} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{array} \right).$$

Com $L_2 \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}L_2$, obtemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{array} \right).$$

Fazendo $L_2 \rightarrow L_1 - L_2$, chegamos em

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{array} \right).$$

Considerando que $L_2 \rightarrow -(1 - \frac{2M}{r})L_2$, ficamos com

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{array} \right).$$

Portanto, concluímos que

⁷Qualquer outro método pode ser utilizado, inclusive o cálculo direto, fazendo uso de $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$.

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix},$$

de onde extraímos os valores não nulos de $g^{\mu\nu}$

$$g^{01} = 1, \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)}. \quad (89)$$

A partir de (88) é fácil verificar que (89) pode ser escrito em termos da seguinte TN

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, 1, 0, 0) = \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0\right) = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\text{sen}(\theta)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}(\theta)}\delta_3^\mu\right), \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(0, 0, 1, \frac{-i}{\text{sen}(\theta)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)}\delta_3^\mu\right). \end{aligned} \quad (90)$$

O ‘truque’ começa ao permitirmos que a coordenada r assuma valores complexos D’Inverno (1992), assim precisamos complexificar as equações anteriores que envolvem essa coordenada. Esse é o passo mais difícil de realizar, pois não há qualquer regra justificada que nos diga qual complexificação escolher, o que nos faz ter que utilizar a estratégia da tentativa e erro Erbin (2015)⁸. Felizmente, na literatura encontra-se o seguinte conjunto de complexificações como a escolha que funciona

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow \frac{1}{2}(r + \bar{r}) = \text{Re}(r), \\ \frac{1}{r} &\longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) = \frac{\text{Re}(r)}{|r|^2}, \\ r^2 &\longrightarrow |r|^2 = r\bar{r} \end{aligned} \quad (91)$$

onde a terceira complexificação é utilizada no caso da complexificação da solução de Reissner-Nordstrom e da solução com Quintessência, como veremos. Aplicando a complexificação à TN (90), temos

⁸Nesse ponto vemos como o método é extremamente arbitrário, pois não há qualquer razão *a priori* que justifique uma complexificação e não outra.

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \delta_1^\mu, \\
n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \delta_1^\mu, \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\bar{r}}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right), \\
\bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right),
\end{aligned} \tag{92}$$

onde ao longo de todo o procedimento, mantivemos as propriedades definidas para a TN na seção anterior, a saber, l^μ e n^μ reais e m^μ e \bar{m}^μ complexo conjugado um do outro D'Inverno (1992). Para obter a TN que gera a métrica rotativa, precisamos da seguinte mudança de coordenadas, onde tanto v' quanto r' são reais,

$$v \rightarrow v' = v - ia \cos(\theta), \quad r \rightarrow r' = r + ia \cos(\theta), \quad \theta \rightarrow \theta' = \theta, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi. \tag{93}$$

Assim, aplicando essas transformações de coordenadas à TN (92), obtemos⁹

$$\begin{aligned}
l'^\mu &= \delta_1^\mu, \\
n'^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{\Sigma(r', \theta)} \right) \delta_1^\mu, \\
m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(i a \text{sen}(\theta) (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right), \\
\bar{m}'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos(\theta))} \left(-i a \text{sen}(\theta) (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right),
\end{aligned}$$

onde $\Sigma(r', \theta) = r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)$. Como antecipado, essa é a TN que gera a solução de Kerr. Substituindo-a em

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu.$$

temos

$$\begin{aligned}
g'^{00} &= 2l'^0 n'^0 - 2m'^0 \bar{m}'^0 = -\frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}, \\
g'^{01} &= g'^{10} = l'^1 n'^0 + l'^0 n'^1 - m'^1 \bar{m}'^0 - m'^0 \bar{m}'^1 = 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}, \\
g'^{11} &= 2l'^1 n'^1 - 2m'^1 \bar{m}'^1 = \frac{2Mr'}{\Sigma} - 1 - \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}, \\
g'^{12} &= g'^{21} = l'^1 n'^2 + l'^2 n'^1 - m'^1 \bar{m}'^2 - m'^2 \bar{m}'^1 = 0,
\end{aligned}$$

⁹Os detalhes podem ser encontrados no Apêndice B

$$\begin{aligned}
g'^{22} &= 2l'^2 n'^2 - 2m'^2 \bar{m}'^2 = -\frac{1}{\Sigma}, \\
g'^{02} &= g'^{20} = l'^0 n'^2 + l'^2 n'^0 - m'^0 \bar{m}'^2 - m'^2 \bar{m}'^0 = 0, \\
g'^{03} &= g'^{30} = l'^0 n'^3 + l'^3 n'^0 - m'^0 \bar{m}'^3 - m'^3 \bar{m}'^0 = -\frac{a}{\Sigma}, \\
g'^{13} &= g'^{31} = l'^1 n'^3 + l'^3 n'^1 - m'^1 \bar{m}'^3 - m'^3 \bar{m}'^1 = \frac{a}{\Sigma}, \\
g'^{23} &= g'^{32} = l'^2 n'^3 + l'^3 n'^2 - m'^2 \bar{m}'^3 - m'^3 \bar{m}'^2 = 0, \\
g'^{33} &= 2l'^3 n'^3 - 2m'^3 \bar{m}'^3 = -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2(\theta)}.
\end{aligned}$$

Desses resultados, formamos a matriz

$$(g'^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & \frac{2Mr'}{\Sigma} - \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} - 1 & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}.$$

Para calcular sua inversa, utilizemos novamente o método de Gauss-Jordan. Começamos com

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & \frac{2Mr'}{\Sigma} - \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} - 1 & 0 & \frac{a}{\Sigma} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Efetuando as operações, $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$, $L_2 \rightarrow L_2 + a \text{sen}^2(\theta) L_4$ e $L_3 \rightarrow -\Sigma L_3$, temos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2Mr'}{\Sigma} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2Mr'}{\Sigma} - 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \text{sen}^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Fazendo $L_2 \rightarrow -L_2 + L_1$, obtemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{2Mr'}{\Sigma} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a \text{sen}^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Em seguida, fazendo $L_1 \rightarrow L_1 - \frac{2Mr'}{\Sigma}L_2$, vê-se que

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma sen^2(\theta)} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Agora focamos na quarta linha, L_4 . Fazendo $L_4 \rightarrow \frac{\Sigma}{a}L_4 + L_1$, temos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{asen^2(\theta)} & 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{\Sigma}{a} + \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \end{array} \right).$$

Fazendo $L_4 \rightarrow L_4 - L_2$, obtemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{asen^2(\theta)} & -\frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{\Sigma}{a} + \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} + asen^2(\theta) \end{array} \right).$$

Por fim, fazendo $L_4 \rightarrow -asen^2(\theta)L_4$, obtemos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} & -asen^2(\theta) & 0 & -\Sigma sen^2(\theta) - \frac{2Mr'a^2 sen^4(\theta)}{\Sigma} - a^2 sen^4(\theta) \end{array} \right),$$

de onde concluímos que

$$(g'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} \\ 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{2Mr'asen^2(\theta)}{\Sigma} & -asen^2(\theta) & 0 & -\Sigma sen^2(\theta) - \frac{2Mr'a^2 sen^4(\theta)}{\Sigma} - a^2 sen^4(\theta) \end{pmatrix}.$$

Assim, a métrica de Kerr é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr'}{\Sigma}\right)dv'^2 + 2dv'dr' + \frac{4Mar'sen^2(\theta)}{\Sigma}dv'd\phi - 2asen^2(\theta)dr'd\phi \\ - \Sigma d\theta^2 - \left(r'^2 + a^2 + \frac{2Mr'a^2 sen^2(\theta)}{\Sigma}\right)sen^2(\theta)d\phi^2.$$

Daqui para frente podemos desconsiderar o ' das coordenadas, pois as trans-

formações de coordenadas utilizadas já não são úteis; daqui para frente o que interessa é a forma da solução. Essa forma da solução de Kerr é chamada de forma avançada de Eddington-Finkelstein, por ser decorrente da solução de Schwarzschild escrita nas CEF. Ocorre que essa forma não é útil para a análise das propriedades da solução de Kerr. Entretanto, Robert H. Boyer e Richard W. Lindquist propuseram a seguinte mudança de coordenadas Boyer and Lindquist (1967)

$$dv = dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta(r)} dr, \quad d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta(r)} dr, \quad (94)$$

onde $\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2Mr$, que levam à chamada forma de Boyer-Lindquist da solução de Kerr

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + 2a \sin^2(\theta) \frac{2Mr}{\Sigma} dt d\bar{\phi} - \Sigma d\theta^2 - \sin^2(\theta) \left(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2(\theta) \frac{2Mr}{\Sigma}\right) d\bar{\phi}^2. \quad (95)$$

É importante que fique claro que essas coordenadas não são, necessariamente, as coordenadas esféricas com as quais começamos esse desenvolvimento. Parece difícil acreditar que depois de todos os passos que fizemos até aqui, apenas com uma nova mudança de coordenadas voltaríamos às coordenadas esféricas originais. O que Boyer e Lindquist fizeram foi procurar coordenadas do tipo schwarzschild, isto é, coordenadas tais que no limite em que a tende a zero, a solução de Kerr tende a uma solução na forma da solução de Schwarzschild nas coordenadas de schwarzschild (coordenadas esféricas) e isso é exatamente o que acontece, como pode ser verificado em (95).

Por mais que essa última forma seja a mais adequada para analisarmos algumas propriedades da solução de Kerr, nem ela, nem a forma avançada de Eddington-Finkelstein são as formas originais, isto é, a forma na qual Roy Kerr chegou em 1963. Kerr fez uso de coordenadas tipo cartesianas e obteve

$$ds^2 = dt^{*2} - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left[dt^* + \frac{r}{a^2 + r^2} (x dx + y dy) + \frac{a}{a^2 + r^2} (y dx - x dy) + \frac{z}{r} \right]^2, \quad (96)$$

onde

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) + a \sin(\theta) \sin(\phi), \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) - a \sin(\theta) \cos(\phi), \\ z &= r \cos(\theta). \end{aligned} \quad (97)$$

Algumas propriedades básicas da solução de Kerr podem ser extraídas de (95) a partir de uma análise direta. Primeiramente, é fácil ver que essa solução não depende explicitamente de t e ϕ , o que implica que o campo gravitacional de um buraco negro rotativo é axialmente simétrico, isto é, não muda ao longo do seu entorno, e é estacionário, pois não muda com a mera passagem do tempo. A solução também é simétrica em relação à reflexão simultânea de t e ϕ e de t e a , sugerindo que a é o parâmetro de rotação, o que já estamos considerando como pressuposto.

Como já apontado, as coordenadas na solução (95) não são necessariamente as coordenadas esféricas habituais. Com efeito, seja, R a coordenada esférica radial, temos

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Usando (97), temos

$$R^2 = r^2 + a^2 \sin^2(\theta).$$

Porém, para $r \geq a$,

$$R = r + \frac{a^2 \sin^2(\theta)}{2r} + \dots,$$

o que mostra que R e r coincidem assintoticamente, isto é, quando $r \rightarrow \infty$, e também coincidem quando $a \rightarrow 0$, ou seja, na ausência de rotação. É fácil ver, a partir de (96) que $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ quando $R \rightarrow \infty$, o que implica que a métrica de Kerr é assintoticamente minkowskiana.

4.4 Singularidades e horizontes

O cálculo do invariante de Riemann, $R^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma}$, mostra que a métrica de Kerr tem apenas uma singularidade intrínseca¹⁰, que ocorre quando $\Sigma = 0$ (D'Inverno, 1992), logo

$$r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0. \quad (98)$$

Como r é real, (98) só admite a solução $r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0$, que implica em $r = \pm ia \cos(\theta) = 0$ ¹¹. Com isso em (97), obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (99)$$

Conclui-se que a singularidade essencial da solução de Kerr é um anel de singularidade de raio a ¹². Portanto, quanto maior a velocidade de rotação, maior a e maior o anel de

¹⁰As singularidades intrínsecas, também chamadas de essenciais, físicas, reais ou não removíveis são aquelas que não podem ser retiradas por meio de uma mudança de coordenadas. São intrínsecas à solução.

¹¹Perceba que de (98), obtém-se $r^2 = -a^2 \cos^2(\theta)$, de onde se conclui que $r = \pm ia \cos(\theta)$, o que não é possível, dado que estamos assumindo que r é real.

¹²Uma interpretação é que a rotação da solução de Schwarzschild degenera a singularidade essencial de Schwarzschild, transformando-a do ponto, definido por $r = 0$, para o anel de singularidade, definido

singularidade.

É um resultado bem estabelecido que a determinação das superfícies de red-shift infinito, tanto para as soluções estáticas quanto para a solução de Kerr se dá pela nulidade da componente g_{00} , assim, a partir de (95), temos

$$\Sigma - 2Mr = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2(\theta) = 0,$$

de onde obtemos

$$r_{S^\pm} = M \pm (M^2 - a^2 \cos^2(\theta))^{\frac{1}{2}}. \quad (100)$$

Dessa equação, percebemos que no limite em que $a \rightarrow 0$, $r_{S^-} \rightarrow 0$ e $r_{S^+} \rightarrow 2M$, isto é, na ausência de rotação, ou seja, em Schwarzschild, r_{S^-} se identifica com a singularidade essencial de Schwarzschild e r_{S^+} se identifica com o horizonte de eventos de Schwarzschild, dado por $r = 2M$. Perceba que ambas são axialmente simétricas, dado que não há dependência explícita em ϕ .

Por fim, obtemos os horizontes de eventos pela nulidade de g^{11} . Para obtê-la, consideremos a relação de inversão

$$g^{1\mu} g_{\mu 1} = \delta^1_1,$$

que, abrindo a soma, fornece

$$g^{10} g_{01} + g^{11} g_{11} + g^{12} g_{21} + g^{13} g_{31} = \delta^1_1,$$

logo, de (93), temos

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}},$$

ou

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\Sigma}.$$

Assim, os horizontes de eventos vêm de

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2 = 0,$$

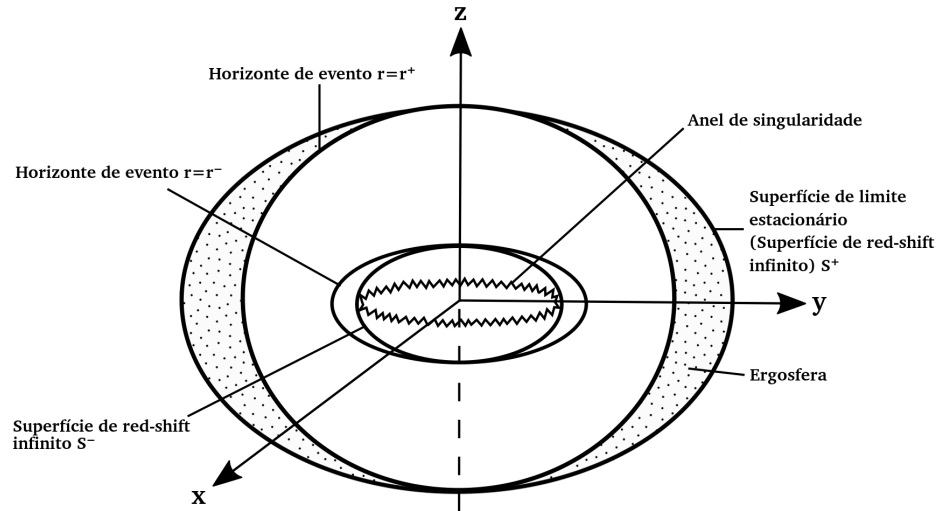
de onde se conclui, assumindo que $a^2 < M^2$,

$$r_\pm = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (101)$$

Portanto, no limite em que $a \rightarrow 0$, $r_+ \rightarrow 2M$ e $r_- \rightarrow 0$. O horizonte de evento r_+ é interno a S_+ , sendo que eles coincidem nos polos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. A região definida entre essas duas superfícies é chamada de ergosfera. Todas essas curvas, o anel de singularidade, bem

como a esgorfera estão ilustradas na figura 1.

Figura 2 – Os horizontes de eventos, superfícies de red-shift infinito, superfície de limite estacionário e anel de singularidade da solução de Kerr.



Fonte: Adaptada de D'inverno, 1992, pag. 255.

5 SOLUÇÃO DE KERR COM QUINTESSÊNCIA

Neste capítulo, finalizamos o presente estudo apresentando a solução de Kerr com Quintessência. Para obtê-la, seguimos os passos apresentados no capítulo anterior, porém incluindo o termo de Quintessência. Infelizmente, o ANJ não é aplicável a todo caso, por exemplo, por razões que ainda não são claras, ele não é aplicável à solução das EE com constante cosmológica. Para uma análise análoga à feita aqui, mas que inclui a constante cosmológica por meio do software Mathematica, ver Xu and Wang (2017).

5.1 Solução de Kerr com Quintessência a partir de uma transformação complexa

Podemos escrever a equação (74) como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w+1}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w+1}}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (102)$$

O caso com $\alpha = -e^2$ e $\omega = \frac{1}{3}$ corresponde à solução de Reissner-Nordstrom, portanto, obtendo a solução de Kerr com Quintessência, obtemos também como caso particular a solução de Kerr-Newman, que é a solução de Kerr obtida a partir da solução de Reissner-Nordstrom. Começemos pela transformação de Eddington-Finkelstein, dada por

$$dv = dt - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w+1}}\right)^{-1} dr. \quad (103)$$

Elevando (103) ao quadrado e substituindo o resultado em (102), obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w+1}}\right) dv^2 + 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2).$$

Utilizando novamente a relação

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\nu \bar{m}^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu,$$

obtemos a seguinte TN

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3w+1}}\right) \delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin(\theta)} \delta_3^\mu\right), \end{aligned}$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right).$$

Aplicando as complexificações definidas em (91), temos

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) - \frac{\alpha}{(r\bar{r})^{\frac{3w+1}{2}}} \right] \delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right), \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right). \end{aligned}$$

Aplicando novamente as transformações de coordenadas (93), com a , como vimos no capítulo anterior, o parâmetro de rotação, temos

$$\begin{aligned} l'^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n'^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}} \right) \delta_1^\mu, \\ m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(i \text{asen}(\theta) (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right), \\ \bar{m}'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos(\theta))} \left(-i \text{asen}(\theta) (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^\mu \right), \end{aligned}$$

que é a TN que gera a solução de Kerr com Quintessência. Substituindo esse resultado em

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu,$$

e procedendo exatamente como no capítulo anterior, obtemos as componentes não nulas de $g'^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g'^{00} &= -\frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}, & g'^{01} &= 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}, & g'^{03} &= -\frac{a}{\Sigma} \\ g'^{11} &= \frac{2Mr'}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}} - \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} - 1, & g'^{13} &= \frac{a}{\Sigma}, & g'^{22} &= -\frac{1}{\Sigma} \\ & & & & g'^{33} &= -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2(\theta)}, \end{aligned}$$

de onde formamos a matriz

$$(g'^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ 1 + \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} & \frac{2Mr'}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}} - \frac{a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} - 1 & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}.$$

Invertendo-a, exatamente como fizemos anteriormente, temos

$$(g'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 - \xi(r', \theta) & 1 & 0 & \xi(r', \theta)asen^2(\theta) \\ 1 & 0 & 0 & -asen^2(\theta) \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \xi(r', \theta)asen^2(\theta) & -asen^2(\theta) & 0 & -[\Sigma + (\xi(r', \theta) + 1)asen^2(\theta)]asen^2(\theta) \end{pmatrix},$$

onde $\xi(r', \theta) = \frac{2Mr'}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}$. Assim, a métrica de Kerr com Quintessência, nas CEF é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr'}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right)dv'^2 + 2dv'dr' + 2\left(\frac{2Mr'}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right)a \sin^2(\theta)dv'd\phi \\ - 2a \sin^2(\theta)dr'd\phi - \Sigma d\theta^2 - \left[r'^2 + a^2 + \left(\frac{2Mr'}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right)a^2 \sin^2(\theta)\right] \sin^2(\theta)d\phi^2.$$

Assim como fizemos no capítulo anterior, a partir de agora, desconsideraremos o ' e aplicaremos as coordenadas de Boyer-Lindquist(CBL) (94), para obter

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right)dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + 2a \sin^2(\theta) \left(\frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right) \frac{2Mr}{\Sigma} dt d\bar{\phi} \\ - \Sigma d\theta^2 - \sin^2(\theta) \left[r^2 + a^2 + a^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}}\right)\right] d\bar{\phi}^2, \quad (104)$$

onde, dessa vez, $\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2Mr - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w-1}{2}}}$. Essa é a solução de Kerr com Quintessência nas CBL.

5.2 Singularidades e horizontes

Analogamente a o que foi feito no capítulo precedente, obtemos as superfícies de red-shift infinito, fazendo $g_{00} = 0$ em (104), assim

$$1 - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w+1}{2}}} = 0,$$

de onde, transformando Σ no denominador comum, obtemos

$$\Sigma - 2Mr - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w-1}{2}}}. \quad (105)$$

Os horizontes de evento são obtidos, novamente, de $g^{11} = 0$. Procedendo como no capítulo anterior, temos

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\Sigma},$$

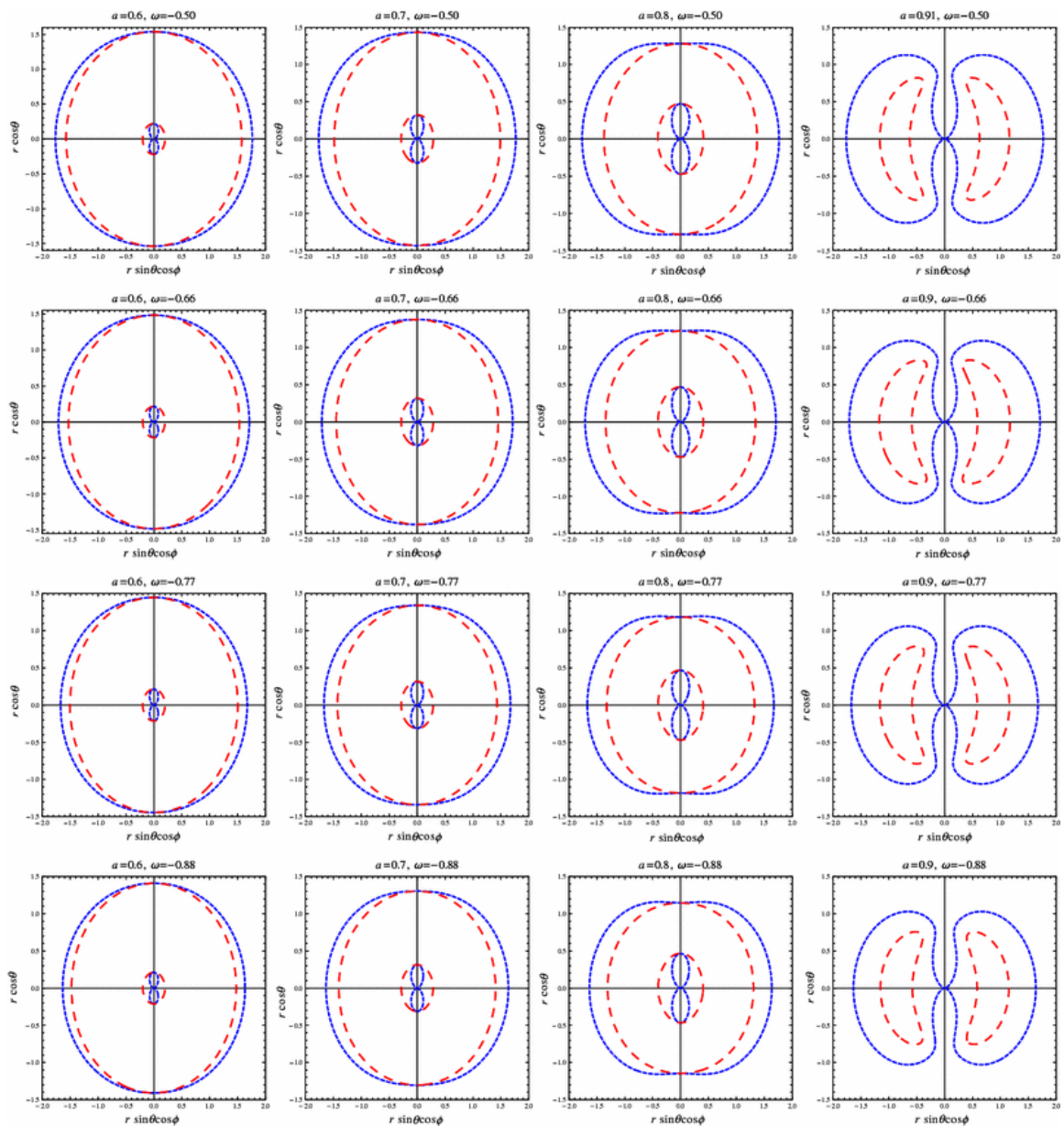
de onde obtemos

$$r^2 + a^2 - 2Mr - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3w-1}{2}}} = 0. \quad (106)$$

Perceba que, na presença de Quintessência, os horizontes de evento dependem de θ , o que não ocorre no buraco negro de Kerr, o que pode ser visto em (101).

Diferentemente de (100) e (101), (105) e (106), não possuem solução analítica. Sushant G. Ghosh Ghosh (2016) as estudou numericamente e, a partir disso, obteve, graficamente, a relação entre essas superfícies e o parâmetro de Quintessência, como está ilustrado na figura 3. Como se pode perceber, por mais que haja apenas um pequeno aumento na área da ergosfera, em função do aumento de ω , essa mudança é perceptível.

Figura 3 – Plot mostrando a variação da forma da ergosfera, na perspectiva de quem vê o plano $x - z$, com o parâmetro de estado da Quintessência, ω , para valores diferentes de a , o parâmetro de rotação do buraco negro rotativo. A linha azul mais externa corresponde a S_- , ao passo que a linha vermelha externa corresponde ao horizonte de evento r_+ . A região compreendida entre essas duas superfícies é a ergosfera.



Fonte: Sushant G. Ghosh, 2016, pag. 8.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, obteve-se a partir da solução de Schwarzschild com Quintessência, a solução de Kerr na presença de Quintessência, fazendo uso do ANJ. Essa solução descreve um buraco negro rotativo em um Universo onde a energia escura é do tipo quintessencial. A partir da análise de seus horizontes de evento e superfícies de redshift infinito, conclui-se que a Quintessência, por meio de seu parâmetro de estado, ω , influencia a esfericidade do buraco negro rotativo, fazendo com que a área daquele aumente, à medida que ω aumenta.

Como perspectivas futuras, o resultado aqui obtido pode ser utilizado para demonstrar que o Mecanismo de Penrose, processo pelo qual teoriza-se que é possível extrair energia de um buraco negro rotativo, é sensível à Quintessência, isto é, a energia extraída de um buraco negro rotativo deve ser função, também, de ω .

REFERÊNCIAS

- Adler, Ronald; Bazin, Maurice; Schiffer, Menahem. *Introduction to general relativity*. New York : McGraw-Hill, 1975.
- Boyer, Robert H.; Lindquist, Richard W. *Maximal analytic extension of the Kerr metric*, v. 8. J. Math. Phys., 1967, 265 p.
- Carroll, Sean M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison Wesley, 2004.
- D’Inverno, R. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- Erbin, Harold. *Janis–Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation*, v. 47. 2015, 19 p.
- Ghosh, Sushant G. *Rotating black hole and quintessence*. Eur. Phys. J., 2016, 222 p.
- Kerr, Roy P. *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, v. 11. American Physical Society, 1963, 237–238 p.
- Kiselev, V. V. *Quintessence and black holes*, v. 20. Classical and Quantum Gravity, 2003, 1187-1197 p.
- Newman, E.; Penrose, R. *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*. Journal of Mathematical Physics, 1963.
- Newman, E. T.; Janis, A. I. *Note on the Kerr spinning particle metric*, v. 6. Journal of Mathematical Physics, 1965, 915-917 p.
- Rajan, Del. *Complex Spacetimes and the Newman-Janis trick*. 2015.
- Weinberg, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- Xu, Zhaoyi; Wang, Jiancheng. *Kerr-Newman-AdS Black Hole In Quintessential Dark Energy*, v. D95. Phys. Rev., 2017, 064015 p.

APÊNDICE A – CÁLCULOS DE $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ E $R_{\mu\nu}$ DA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Seja a definição da conexão afim, a primeira componente não nula é

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \\ &= \frac{1}{2} a'.\end{aligned}$$

Na sequência, temos

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(- \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-b} e^a a'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\ &= \frac{1}{2} b'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{2\sigma}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(- \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\ &= -e^{-b} r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(- \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\ &= -e^{-b} r \operatorname{sen}^2(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{2\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
&= r^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2} g^{2\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&= -\text{sen}(\theta) \cos(\theta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} g^{3\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
&= r^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{3\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma 3}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{\sigma 2}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
&= \text{cotg}(\theta).
\end{aligned}$$

Calculamos as componentes não nulas do *tensor de Ricci*. Juntando (27) e (28), temos

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta}.$$

A primeira componente não nula é

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{0\lambda}}{\partial x^0} + \Gamma^\eta_{00} \Gamma^\lambda_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{0\eta}.$$

Calculamos cada um dos termos separadamente.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma^\lambda_{00}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{00}}{\partial x^3} \\
&= \frac{1}{2} e^{(a-b)} a'' + \frac{1}{2} e^{(a-b)} (a' - b') a'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{0\lambda}}{\partial x^0} &= \frac{\partial \Gamma^0_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^2_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^3_{03}}{\partial x^0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\eta}_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} &= \Gamma^0_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 0} + \Gamma^1_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 1} + \Gamma^2_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 2} + \Gamma^3_{00} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 3} \\ &= \Gamma^1_{00} \left(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{(a-b)} (a')^2 + \frac{1}{4} e^{(a-b)} a' b' + \frac{1}{r} e^{(a-b)} a' .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\eta}_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{0\eta} &= \Gamma^0_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{00} + \Gamma^1_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{01} + \Gamma^2_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{02} + \Gamma^3_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{03} \\ &= \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{01} \\ &= \frac{1}{2} e^{(a-b)} (a')^2 .\end{aligned}$$

Assim, juntando esses quatro últimos resultados, temos

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(a-b)} a'' + \frac{1}{4} e^{(a-b)} (a')^2 - \frac{1}{4} e^{(a-b)} a' b' + \frac{1}{r} e^{(a-b)} a' .$$

A segunda componente não nula é

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{11}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{1\lambda}}{\partial x^1} + \Gamma^{\eta}_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{1\lambda} \Gamma^{\lambda}_{1\eta} .$$

Calculando as parcelas, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{11}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial \Gamma^0_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{2} b'' .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{1\lambda}}{\partial x^1} &= \frac{\partial \Gamma^0_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} \\ &= \frac{1}{2} a'' + \frac{1}{2} b'' - \frac{2}{r^2} .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\eta}_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} &= \Gamma^0_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 0} + \Gamma^1_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 1} + \Gamma^2_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 2} + \Gamma^3_{11} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 3} \\ &= \Gamma^1_{11} \left(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31} \right) \\ &= \frac{1}{4} a' b' + \frac{1}{4} (b')^2 + \frac{b'}{r} .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1\lambda}^\eta \Gamma_{1\eta}^\lambda &= \Gamma_{1\lambda}^0 \Gamma_{10}^\lambda + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{11}^\lambda + \Gamma_{1\lambda}^2 \Gamma_{12}^\lambda + \Gamma_{1\lambda}^3 \Gamma_{13}^\lambda \\
&= \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 \\
&= \frac{1}{4}(a')^2 + \frac{1}{4}(b')^2 + \frac{2}{r^2}.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$R_{11} = -\frac{1}{2}a'' - \frac{1}{4}(a')^2 + \frac{1}{4}a'b' + \frac{b'}{r}.$$

A terceira componente não nula é

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{2\lambda}^\lambda}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\eta \Gamma_{2\eta}^\lambda.$$

Calculando as parcelas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{22}^\lambda}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{22}^3}{\partial x^3} \\
&= -e^{-b} + rb'e^{-b}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{2\lambda}^\lambda}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Gamma_{20}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} \\
&= -\operatorname{cosec}^2(\theta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda &= \Gamma_{22}^0 \Gamma_{\lambda 0}^\lambda + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{\lambda 1}^\lambda + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{\lambda 2}^\lambda + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{\lambda 3}^\lambda \\
&= \Gamma_{22}^1 \left(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \right) \\
&= -\frac{re^{-b}a'}{2} - \frac{re^{-b}b'}{2} - 2e^{-b}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{2\lambda}^\eta \Gamma_{2\eta}^\lambda &= \Gamma_{2\lambda}^0 \Gamma_{02}^\lambda + \Gamma_{2\lambda}^1 \Gamma_{12}^\lambda + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{22}^\lambda + \Gamma_{2\lambda}^3 \Gamma_{32}^\lambda \\
&= 2\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= -2e^{-b} + \cotg^2(\theta).
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$R_{22} = -e^{-b} + \frac{rb'e^{-b}}{2} - \frac{ra'e^{-b}}{2} + 1.$$

A quarta componente não nula é

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{3\lambda}^\lambda}{\partial x^3} + \Gamma_{33}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^\eta \Gamma_{3\eta}^\lambda.$$

Calculando as parcelas, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{33}}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial \Gamma^0_{33}}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(-e^{-b} r \operatorname{sen}^2(\theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta}(-\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)) \\ &= \operatorname{sen}^2(\theta)(e^{-b} b' r - e^{-b}) - (\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{3\lambda}}{\partial x^3} &= \frac{\partial \Gamma^0_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^1_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^2_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial \Gamma^3_{33}}{\partial x^3} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\eta}_{33} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} &= \Gamma^0_{33} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 0} + \Gamma^1_{33} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 1} + \Gamma^2_{33} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 2} + \Gamma^3_{33} \Gamma^{\lambda}_{\lambda 3} \\ &= \Gamma^1_{33} \left(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31} \right) + \Gamma^2_{33} \left(\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32} \right) \\ &= -e^{-b} r \operatorname{sen}^2(\theta) \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'}{2} + \frac{2}{r} \right) - \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) (\cotg(\theta)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\eta}_{3\lambda} \Gamma^{\lambda}_{3\eta} &= \Gamma^0_{3\lambda} \Gamma^{\lambda}_{30} + \Gamma^1_{3\lambda} \Gamma^{\lambda}_{31} + \Gamma^2_{3\lambda} \Gamma^{\lambda}_{32} + \Gamma^3_{3\lambda} \Gamma^{\lambda}_{33} \\ &= 2\Gamma^1_{33} \Gamma^3_{31} + 2\Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33} \\ &= -2e^{-b} \operatorname{sen}^2(\theta) - 2\cotg(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta).\end{aligned}$$

Concluimos que

$$R_{33} = \operatorname{sen}^2(\theta) \left(-e^{-b} + \frac{rb'e^{-b}}{2} - \frac{ra'e^{-b}}{2} + 1 \right).$$

Percebe-se que as componentes R_{22} e R_{33} se relacionam por meio de

$$R_{33} = \operatorname{sen}^2(\theta) R_{22}.$$

APÊNDICE B – CÁLCULOS DE l'^{μ} , n'^{μ} , m'^{μ} E \bar{m}'^{μ} DA SOLUÇÃO DE KERR

A tetrada transforma-se segundo $Z'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} Z^{\nu}$, onde $Z^{\mu} = (l^{\mu}, n^{\mu}, m^{\mu}, \bar{m}^{\mu})$, assim, verificamos que

$$l'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} l^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \delta_0^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0},$$

onde levamos em conta o valor de l^{μ} que se obtém das equações (92). Com esse resultado e observando a equação (93), temos

$$\begin{aligned} l'^0 &= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} = \frac{\partial v'}{\partial v} = 1, \\ l'^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = \frac{\partial r'}{\partial v} = 0, \\ l'^2 &= \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} = \frac{\partial \theta'}{\partial v} = 0, \\ l'^3 &= \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} = \frac{\partial \phi'}{\partial v} = 0, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$l'^{\mu} = \delta_0^{\mu}.$$

Para n^{μ} , temos

$$n'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} n^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \delta_0^{\mu} - \frac{1}{2} \left[1 - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \delta_1^{\mu} \right\} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left[1 - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1}. \quad (107)$$

Levando em conta (93), temos que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{r' - ia \cos(\theta)} + \frac{1}{r' + ia \cos(\theta)} = \frac{2r'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)}.$$

Com isso (107) se torna

$$n'^{\mu} = -\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1},$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} n'^0 &= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} = \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial v'}{\partial r} = 1, \\ n'^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \frac{\partial r'}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial r'}{\partial r} = \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right), \end{aligned}$$

$$n'^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = \frac{\partial \theta'}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial \theta'}{\partial r} = 0,$$

$$n'^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = \frac{\partial \phi'}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \frac{\partial \phi'}{\partial r} = 0,$$

de onde concluímos que

$$n'^{\mu} = \delta_0^{\mu} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right) \delta_1^{\mu}.$$

Para m^{μ} , temos

$$m'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} m^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\delta_2^{\nu} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^{\nu} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^2} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^3} \right)$$

de onde obtemos

$$m'^0 = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^2} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial v'}{\partial \phi} \right) = \frac{iasen(\theta)}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))},$$

$$m'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial r'}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial r'}{\partial \phi} \right) = -\frac{iasen(\theta)}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))},$$

$$m'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial \theta'}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))},$$

$$m'^3 = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial x'^3}{\partial x^2} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \frac{i}{\text{sen}(\theta)},$$

assim,

$$m'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos(\theta))} \left(iasen(\theta) (\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) + \delta_2^{\mu} + \frac{i}{\text{sen}(\theta)} \delta_3^{\mu} \right).$$

Dessa equação é fácil ver que

$$\bar{m}'^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia \cos(\theta))} \left(-iasen(\theta)(\delta_0^{\mu} - \delta_1^{\mu}) + \delta_2^{\mu} - \frac{i}{sen(\theta)}\delta_3^{\mu} \right).$$

Portanto, o resultado está demonstrado.