



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

KELSON DE SOUSA LEITE

**ESTUDO DE UM SISTEMA DE NÍVEL COM DOIS TANQUES
INTERLIGADOS SUJEITO A PERTURBAÇÕES UTILIZANDO
DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES**

FORTALEZA

2012

KELSON DE SOUSA LEITE

ESTUDO DE UM SISTEMA DE NÍVEL COM DOIS TANQUES INTERLIGADOS
SUJEITO A PERTURBAÇÕES UTILIZANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS
LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica, da Faculdade de
Engenharia da Universidade Federal do
Ceará, como requisito parcial para
obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Elétrica. Área de
Concentração: Eletrônica de Potência e
Acionamentos.

Orientador: Dr. José Carlos Teles
Campos

FORTALEZA

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

-
- L553e Leite, Kelson de Sousa.
Estudo de um sistema de nível com dois tanques interligados sujeito a perturbações utilizando desigualdades matriciais lineares / Kelson de Sousa Leite – 2012.
118 f. : il., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós – Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Eletrônica de potência e Acionamentos.
Orientação: Prof. Dr. José Carlos teles Campos.
1. Engenharia Elétrica. 2. Teoria de Controle. 3. Otimização Matemática. I. Título.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me ter concedido o dom da vida.

A minha esposa, Silmara, pela compreensão e apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Carlos Teles Campos, pelo incentivo, paciência, compreensão e orientação. Meus sinceros agradecimentos.

Ao IFPI e à UFC pelo programa Minter, que contribuíram com o apoio financeiro necessário à realização desse trabalho e desenvolvimento científico.

Aos professores do Departamento de Engenharia Elétrica da UFC, responsáveis diretamente ou indiretamente pela minha formação no programa de Mestrado.

Aos meus amigos de mestrado por todas as etapas que foram vencidas e pelo companheirismo e outros que não citei.

À minha esposa e aos meus pais que muito contribuíram, mesmo que de forma indireta, para a elaboração e execução desta dissertação. Aos professores e colegas da UFC.

RESUMO

A teoria de controle robusto evoluiu consideravelmente ao longo das últimas décadas, apresentando soluções para vários tipos de problemas de análise, desempenho e síntese de sistemas lineares incertos. As desigualdades matriciais lineares (LMIs) e suas técnicas surgiram como poderosas ferramentas em diversas áreas de engenharia de controle para projetos estruturais. Uma propriedade importante das LMIs reside no fato de que o seu conjunto solução é convexo. Esta propriedade é fundamental para que se possam formular problemas em controle robusto como sendo problemas de otimização convexa que minimizam uma função objetivo. Diante destas afirmações o presente trabalho utiliza um sistema de nível de líquido com dois tanques interligados como planta onde a mesma foi modelada, e, em seguida, foi desenvolvido um controlador para garantir a sua estabilidade quadrática, quando submetido a perturbações externas incertas definidas em um politopo. Utilizou-se o regulador linear quadrático com ação integral (LQI) como controlador, porém, o conceito ótimo do LQR não leva em consideração as incertezas paramétricas existentes nas plantas de projeto, com isso, foi apresentado um método de resolução do LQR utilizando otimização convexa. O LQR otimizado via LMIs permite a adição de incertezas para a obtenção do ganho de realimentação de estado. Os resultados obtidos comprovaram que a estratégia de controle LQI via resolução LMI é eficaz como controle robusto, pois é capaz de incluir características referentes à imprecisão do processo, além disso, o controle LQI garante a otimalidade do controle.

Palavras-chave: Modelagem. Simulação. Controle LQR-LMI. Otimização LQR-LMI. Otimização convexa. Sistema de nível de líquido.

ABSTRACT

The robust control theory has evolved considerably over the past decades, providing solutions for various problems of analysis, synthesis and performance of uncertain linear systems. The linear matrix inequalities (LMI) and its techniques have emerged as powerful tools in various areas of control engineering for structural projects. An important property of LMIs is the fact that its solution set is convex. This property is crucial in order to be able to make robust control problems as convex optimization problems that minimize an objective function. Given these statements the present work uses a liquid level system with two tanks connected to the plant where it was modeled, and then a controller is designed to ensure quadratic stability when subjected to external disturbances defined in an uncertain polytope. We used the linear quadratic regulator with integral action (LQI) as a controller, however, the concept of optimal LQR does not take into account the parametric uncertainties in the existing plant design, with it, was presented a method of solving the LQR using convex optimization. LQR optimized via LMI allows the addition of uncertainty to obtain the state feedback gain. The results obtained proved that the strategy of LQI control via LMI resolution is effective as robust control, because it can include features related to the imprecision of the process, moreover, the LQI control ensures the optimality of control.

Keywords: Modeling. Simulation. Control LMI-LQR. LQR-LMI optimization. Convex optimization. System-level liquid.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Reta com descrição paramétrica.....	9
Figura 2.2 – Alguns exemplos de conjuntos convexos e não convexos.....	12
Figura 2.3 – A casca convexa de um conjunto no \mathfrak{R}^2	13
Figura 2.4 – Cone convexo.....	14
Figura 2.5 – Hiperplano no \mathfrak{R}^2 com vetor normal \mathbf{a}	16
Figura 2.6 – Um hiperplano definido por $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ no \mathfrak{R}^2	17
Figura 2.7 – Semiespaço determinado por $\mathbf{a}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0$	17
Figura 2.8 – Intersecção de cinco semiespaços determinando um poliedro.....	18
Figura 2.9 – Exemplo de um politopo com cinco vértices.....	19
Figura 2.10 – Cone semidefinido positivo.....	21
Figura 2.11 – Gráfico de uma função convexa.....	22
Figura 4.1- Sistema de controle de nível com 2 tanques interligados.....	48
Figura 4.2 - Diagrama de blocos do controle LQI.....	52
Gráfico 4.3 - Resposta de regime das curvas da variação de altura.....	60
Gráfico 4.4 - Sinal de controle das vazões do tanque.....	60
Gráfico 4.5 - Curva de Sensibilidade Complementar via SVD.....	61
Gráfico 4.6 - Curva de Sensibilidade do processo via SVD.....	61

LISTA DE SÍMBOLOS

$\text{aff } C$	Casca afim de um conjunto C .
$\text{conc } C$	Casca convexa de um conjunto C .
a^T	Transposta de a .
a^\perp	Complemento ortogonal de a .
S^n	Conjunto de matrizes simétricas $n \times n$.
S_+^n	Conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas.
S_{++}^n	Conjunto de matrizes simétricas definidas positivas.
$\text{Co}\{A_1, \dots, A_L\}$	Casca convexa de matrizes (página 30).
$\text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_q\}$	Matriz bloco diagonal com blocos X_1, X_2, \dots, X_q .
$\bar{\sigma}(A(x))$	Valor singular máximo de uma matriz A .
$G(s)^*$	Transposta conjugada de $G(s)$.

SUMÁRIO

I. INTRODUÇÃO – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE AS LMIS	1
1.1 Objetivo geral do trabalho.....	4
1.2 Objetivos específicos do trabalho.....	4
1.3 Estrutura do trabalho.....	5
1.4 Publicação originada deste trabalho.....	5
II. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO CONVEXA.....	6
2.1 Otimização matemática.....	6
2.2 Solucionando problemas de otimização.....	7
2.2.1 Programação linear.....	8
2.3 Otimização convexa.....	8
2.3.1 Retas e segmentos de reta.....	9
2.3.2 Conjuntos afins.....	10
2.3.3 Conjuntos Convexos.....	11
2.3.4 Cones convexos.....	14
2.3.5 Exemplos de conjuntos convexos.....	15
2.3.5.1 Hiperplano e semiespaço.....	15
2.3.5.2 Poliedro e Politopo.....	18
2.3.5.3 Cone semidefinido positivo.....	20
2.3.6 Funções afins.....	22
2.3.7 Funções convexas.....	22
2.3.8 O problema de otimização convexa.....	23
III. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES.....	24
3.1 Desigualdades matriciais lineares – definição matemática.....	25
3.2 Propriedades das LMIs.....	25
3.2.1 Equivalência entre LMI e desigualdades polinomiais.....	25
3.2.2 Convexidade.....	26
3.2.3 Múltiplas LMIs podem ser expressas como uma única LMI.....	27
3.3 A generalidade das LMIs.....	28
3.3.1 Restrições lineares podem ser expressas por uma LMI.....	28
3.3.2 Estabilidade de sistemas lineares.....	29
3.3.3 Estabilidade de sistemas variantes no tempo e não lineares.....	30

3.3.4	<i>O complemento de Schur</i>	31
3.3.5	<i>Valor singular máximo</i>	32
3.3.6	<i>Desigualdade Elipsoidal</i>	33
3.3.7	<i>Desigualdade algébrica de Riccati</i>	33
3.3.8	<i>Lema real limitado</i>	34
3.3.9	<i>Lema real positivo</i>	35
3.3.10	<i>Procedimento S</i>	36
3.4	Problemas de otimização.....	38
3.4.1	<i>Programação semidefinida</i>	38
3.4.2	<i>Problema do autovalor generalizado</i>	39
3.5	Métodos de solução.....	40
3.5.1	<i>Algoritmo do Elipsóide</i>	41
3.5.2	<i>Método de pontos interiores</i>	43
IV	Simulação LQR – LMI.....	47
4.1	Modelagem do sistema de nível de líquido.....	47
4.2	Modelagem politópica.....	51
4.3	Formulação LMI para o problema LQR.....	52
4.3.1	<i>Controle LQR com ação integral</i>	52
4.3.2	<i>O problema LQR – LMI</i>	53
4.4	Simulação e resultados.....	58
V	CONCLUSÕES.....	62
	APÊNDICES.....	63
	REFERÊNCIAS.....	95

Capítulo I

Revisão bibliográfica sobre as LMIs

As LMIs são desigualdades matriciais lineares (ou afins) em um conjunto de variáveis matriciais. Muitos problemas na teoria de controle podem ser estabelecidos em termos de LMIs e sua existência foi descoberta há aproximadamente cem anos atrás pelo trabalho de Lyapunov. Contudo, até recentemente, existiam poucas rotinas disponíveis para resolver numericamente as LMIs. Nas duas últimas décadas percebe-se um incremento significativo do desenvolvimento de rotinas numéricas sofisticadas tornando possível a solução de problemas de LMIs. Estas rotinas exploram a convexidade do problema LMI para tornar a obtenção dos cálculos numéricos confiáveis.

Na perspectiva da engenharia de controle, uma das principais atrações das LMIs é que elas podem ser usadas para solucionar problemas que envolvem várias variáveis matriciais, e, além disso, diferentes estruturas podem ser impostas nessas variáveis matriciais.

Apesar da aparente “relação” tardia entre descrições por LMIs e várias frentes em teoria de controle, ela não é um fato recente. A primeira descrição por LMIs em teoria de controle surgiu do estudo sobre estabilidade em equações diferenciais, que data 1892, apresentado na tese de doutorado de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (Lyapunov, 1992). Entre as décadas de 1940-1960, A. I. Lur’e, V. A. Yakubovich, dentre outros pesquisadores na antiga União Soviética, formularam vários problemas em controle no contexto de LMIs. No início da década de 1970, já se conheciam descrições explícitas por LMIs para o controle linear quadrático ótimo conforme apresentado em Willems (1971), bem como condições de existência de solução para LMIs associadas ao controle linear quadrático (Molinari, 1975). No livro Boyd et al. (1994) pode-se encontrar um ótimo histórico sobre o desenrolar das LMIs em controle.

No entanto, durante este longo período, a comunidade de controle viu-se privada de uma leitura profunda de como as descrições por LMIs poderiam ser, efetivamente, manipuladas para gerarem soluções numéricas dentro da teoria de

controle – não apenas no contexto do estudo de existência de soluções ou formas indiretas para a sua resolução (por exemplo, usando Riccati, que é um instrumento específico para solucionar LMIs). Além disso, havia dificuldades explícitas da comunidade de controle em agregar técnicas numéricas eficientes para a solução de problemas de otimização semidefinida no formato apropriado à teoria de controle, peça fundamental para que as LMIs pudessem se tornar um instrumento “genérico” e efetivo de que lançar mão. Este tipo de discussão, levantado ainda em 1971 por J. C. Willems reflete o espírito de trabalho e metodologia que envolveu a comunidade de teoria de controle (Boyd et al., 1994).

Uma questão fundamental na teoria de sistemas é a construção de funções de Lyapunov, tanto para a análise de estabilidade quadrática quanto para a síntese de controladores. O estudo de sistemas lineares com parâmetros incertos avançou muito nas últimas duas décadas graças a técnicas de investigação de domínios de estabilidade e de controle robusto derivadas de funções de Lyapunov (Leite et al., 2002).

A denominada estabilidade quadrática, isto é, a existência de uma mesma função de Lyapunov, independente dos parâmetros incertos, garantindo a estabilidade robusta do sistema para o domínio de incertezas considerado, foi talvez o resultado mais importante da década de 80 (Barmish, 1985). Partindo das condições de estabilidade quadrática, inúmeros resultados de análise, controle e filtragem robusta com critérios como as normas H_2 e H_∞ puderam ser desenvolvidas (Boyd et al., 1994).

Apesar de a estabilidade quadrática ser especialmente adequada à análise de sistemas incertos com parâmetros variantes no tempo, os resultados obtidos podem ser bastantes conservadores em muitas situações (Leite et al., 2002). Várias extensões têm aparecido na literatura para análise e síntese de controladores para sistemas lineares incertos. Resultados menos conservadores têm sido obtidos a partir de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (Feron et al., 1996). Alguns trabalhos têm abordado o problema através de funções de Lyapunov quadráticas por partes (Rantzer e Johansson, 2000), mas a solução numérica, em geral, requer elevado esforço computacional.

Considerando apenas sistemas lineares incertos contínuos e invariantes no tempo destacam-se as abordagens apresentadas em (Geromel, de Oliveira e Hsu, 1998) por estarem formuladas em termos de LMIs e pela facilidade de resolução numérica. Uma extensão desses resultados é apresentada em (Peaucelle et al., 2000), tratando diferentes regiões convexas dentro do plano convexo. O enfoque principal contido

nessas abordagens está no aumento da ordem das LMIs e na inclusão de novas variáveis, de maneira a obter, com esses graus de liberdade adicionais, resultados menos conservadores do que os conseguidos com a estabilidade quadrática. Nesses trabalhos, a estabilidade robusta é garantida por uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, construída a partir de matrizes de Lyapunov que são soluções factíveis para um conjunto de LMIs descritas nos vértices do domínio de incertezas. Apesar de fornecer resultados melhores do que os obtidos com a estabilidade quadrática, essas condições ainda são conservadoras quando comparadas com o real domínio de estabilidade, provavelmente pelo fato de exigirem que uma ou mais variáveis satisfaçam conjuntamente todas as LMIs. Condições menos conservadoras, para os casos de maiores dimensões, foram apresentadas em (Ramos e Peres, 2002), baseadas na construção apropriada de um número maior de LMIs descritas em função dos vértices do politopo de incertezas, denominadas de estabilidade robusta.

Com relação aos sistemas discretos no tempo, os testes de estabilidade evoluíram de maneira bastante similar. Dentre os testes baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros destacam-se as abordagens LMI apresentadas em (de Oliveira, Bernussou e Geromel), (de Oliveira, Geromel e Hsu, 1999) e (Peaucelle et al., 2000) (aumento da ordem das LMIs e inclusão de novas variáveis) e, mais recentemente, em (Ramos e Peres, 2001) (aumento do número de LMIs).

A estabilidade robusta de sistemas é um assunto bastante explorado na teoria de controle. Trabalhos recentes têm feito a análise de estabilidade usando LMIs (Chilali et al., 1999). O principal motivo é que a solução de problemas de otimização, com restrições descritas por LMI e função objetivo linear, pode ser obtida usando algoritmos com tempo de convergência polinomial (Gahinet et al, 1995). A maior parte dos resultados só considera a realimentação de estados. Contudo, existem problemas práticos em que a derivada primeira dos estados é mais fácil de obter do que os sinais dos estados. Técnicas de projeto de controle, para sistemas lineares usando realimentação da derivada dos estados (ou, realimentação derivativa), têm sido exploradas sob várias metodologias. Em (Abdelaziz et al, 2004) é apresentada uma solução para plantas com uma entrada e uma saída (SISO). Os autores desenvolveram uma fórmula de Ackermann generalizada. Usando o conceito de estados recíproco (do inglês, Reciprocal State Space (RSS)), um projeto para controle ótimo (LQR) de sistemas lineares determinísticos, foi proposto por (Kwak et al, 2002). Infelizmente nenhum desses resultados pode ser aplicado em sistemas incertos. Recentemente,

condições suficientes, baseadas em LMI, para a estabilidade robusta de sistemas lineares usando realimentação derivativa, foram propostas em (Assunção et al, 2007).

Em (Rossi et al, 2008) foram utilizados os resultados obtidos em (Assunção et al, 2007) onde foram propostas condições necessárias e suficientes, baseadas em LMI, para que sistemas lineares realimentados com a derivada dos estados sejam assintoticamente estáveis. Se a planta possui restrições de desempenho, nem sempre a estabilização é suficiente. Para resolver este caso, foram adicionadas restrições clássicas de projeto de controlador (porcentagem de overshoot, tempo de subida, tempo de acomodação) utilizando o conceito de D-estabilidade de sistemas, visando a alocação de pólos em regiões desejadas. As técnicas de projeto abordadas em (Rossi et al, 2008) são baseadas em critérios modernos de estabilidade e projeto de controladores. Para o projeto destes controladores são implementados programas em pacotes para resolução das LMIs e posterior análise dos resultados obtidos. Um exemplo de sistema mecânico para controle de vibrações demonstra que o projeto de controlador utilizando realimentação da derivada dos estados e o conceito de D-estabilidade não apenas garante a estabilidade assintótica do sistema, mas possibilita atender os índices de desempenho desejados.

1.1 Objetivo geral do trabalho

Utilizar um sistema de nível de líquido com dois tanques interligados como planta com o intuito de modelá-la, e, desenvolver um controlador que garanta a sua estabilidade quadrática quando esta é submetida a perturbações externas incertas definidas em um politopo.

1.2 Objetivos específicos do trabalho

- Apresentar o estudo da otimização convexa como mecanismo fundamental para o tratamento das LMIs em problemas de controle robusto.
- Mostrar que pela propriedade da convexidade do conjunto solução das LMIs é possível formular problemas em controle robusto como sendo problemas de otimização convexa que minimizam uma função objetivo linear de um vetor de variáveis de decisão, sujeito a restrições do tipo desigualdades matriciais lineares.

- Apresentar a formulação matemática dos conceitos de otimização via desigualdades matriciais lineares (LMIs) no controle LQR com ação integral (LQI).
- Aplicar os conceitos de otimização LMI-LQI para o projeto de controle robusto multivariável (planta em questão), analisando a resposta no tempo considerando as incertezas paramétricas politópicas presentes no processo.

1.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está dividido em 5 capítulos, organizados na seguinte forma:

- Capítulo I: revisão bibliográfica sobre as LMIs.
- Capítulo II: estudo da otimização convexa.
- Capítulo III: estudo das LMIs.
- Capítulo IV: formulação do problema LQI-LMI.
- Capítulo V: conclusões do trabalho.

1.4 Publicação originada deste trabalho

Leite, Kelson. S., Costa, Marcus V.S., Campos, J. C.T. “Aplicação e análise de controle LQR com ação integral robusta multivariável otimizado via desigualdades matriciais lineares”. X Conferência brasileira de dinâmica, controle e aplicações, Setembro de 2011. Águas de Lindóia – SP.

Capítulo II

Introdução ao estudo da otimização convexa

A otimização convexa pode ser descrita como uma fusão de três disciplinas: otimização, a análise convexa, e, a teoria dos conjuntos. Ela se tornou uma ferramenta de grande importância na engenharia, possibilitando a solução de muitos problemas práticos de engenharia de forma confiável e eficiente. Hoje, a otimização convexa está fornecendo novas ferramentas computacionais indispensáveis, o que naturalmente estende nossa capacidade de resolver problemas, tais como mínimos quadrados e programação linear para uma classe muito maior e mais rica de problemas (Hindi, 2004).

2.1 Otimização matemática

Um problema de otimização matemática, ou simplesmente problema de otimização, tem a forma (Bertsimas e Tsitsiklis, 1997):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } f_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Onde o vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ é a variável de otimização do problema, a função $f_0 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é a função objetiva, as funções f_i são as funções restritivas (desigualdades), e as constantes b_1, \dots, b_m são os limites, para as restrições.

Geralmente considera-se famílias ou classes de problemas de otimização, caracterizadas pelas formas particulares das funções objetivas e das funções restritivas. Como um exemplo importante, o problema de otimização (2.1) é chamado de programa linear se as funções objetivas e as funções restritivas f_0, \dots, f_m são lineares, isto é, satisfazem o princípio da superposição, a saber

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \tag{2.2}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$ e todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

Neste trabalho, será abordada uma classe de problema de otimização chamada de problema de otimização convexa. Um problema de otimização convexa é aquele em que as funções objetivas e restritivas são convexas, o que implica em satisfazer a desigualdade (Bertsekas, 2003)

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (2.3)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$ e todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ com $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Comparando (2.2) e (2.3), tem-se que a convexidade é mais geral do que linearidade. Desde então, qualquer programa linear, é, portanto, um problema de otimização convexa, pode-se então considerar a otimização convexa como sendo uma generalização da programação linear (Boyd, et al, 2004).

2.2 Solucionando problemas de otimização

Um *método solução* para uma classe de problemas de otimização é um algoritmo que calcula uma solução do problema (para uma dada precisão), tomando um problema particular da classe, isto é, um *caso* do problema. Desde 1940, tem-se com grande esforço desenvolvido algoritmos para solucionar várias classes de problemas de otimização, analisando suas propriedades, e desenvolvendo boas implementações de softwares. A eficácia desses algoritmos, isto é, sua habilidade para solucionar o problema de otimização (2.1), varia consideravelmente, e depende de fatores tais como a forma particular das funções objetiva e restritiva, a quantidade de variáveis e restrições, e estruturas especiais matriciais, tais como esparsividade (Boyd et al., 2004). Para algumas classes de problemas de otimização com soluções difíceis existem algoritmos eficazes que podem solucioná-los de forma confiável, com centenas ou milhares de variáveis de restrições (Bertsimas e Tsitsiklis, 1997).

2.2.1 Programação linear

Uma importante classe de problemas de otimização é a programação linear, em que as funções objetivas e restritivas são lineares (Boyd et al., 2004):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{sujeito a } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Onde os vetores $\mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathfrak{R}^n$ e os escalares $b_1, \dots, b_m \in \mathfrak{R}$ são parâmetros do problema que especificam as funções objetiva e restritiva.

Não existe uma fórmula analítica simples para a solução de um programa linear (como existe para o problema dos mínimos quadrados), mas existe uma variedade de métodos muito eficazes para solucioná-los, incluindo o método simplex de Dantzig's, e o método dos pontos interiores (Gonzaga, 1992).

Algumas aplicações conduzem diretamente a programas lineares na forma (2.4), ou em várias outras formas padrões. Em muitos outros casos o problema de otimização original não tem uma forma padrão de programa linear, mas pode ser transformado para um programa linear equivalente e então, resolvido (Dantzig, 1993)

2.3 Otimização convexa

Nos últimos anos, a otimização convexa tem sido uma ferramenta computacional de grande importância na engenharia, como já foi mencionado na introdução deste capítulo, graças à sua grande capacidade prática de resolver problemas de forma confiável e eficiente. O objetivo desta seção é fornecer uma visão geral dos conceitos básicos de conjuntos convexos, funções convexas, etc. no intuito de formular matematicamente um problema de otimização convexa, que será utilizado na implementação do controlador LQI otimizado por LMIs .

2.3.1 Retas e segmentos de reta

Seja $x_1 \neq x_2$ dois pontos no \mathfrak{R}^n . Pontos na forma

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \quad (2.5)$$

onde $\theta \in \mathfrak{R}$, formam uma reta que passa através de x_1 e x_2 . O valor do parâmetro $\theta = 0$ corresponde a $y = x_2$, e o valor do parâmetro $\theta = 1$ corresponde a $y = x_1$. Os valores do parâmetro θ entre 0 e 1 corresponde ao segmento de reta entre x_1 e x_2 (Valentine, 1964)

Expressando y na forma

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2) \quad (2.6)$$

tem-se outra interpretação: y é uma soma do ponto base x_2 (correspondente a $\theta = 0$) e a direção $x_1 - x_2$ (nos pontos de x_2 a x_1) medido pelo parâmetro θ . Assim, θ fornece a fração da trajetória de x_2 a x_1 onde y está. Como θ aumenta de 0 a 1, o ponto y se move de x_2 para x_1 ; para $\theta > 1$, o ponto y está na reta além de x_1 (Boyd et al., 2004). Isto está ilustrado na figura 2.1.

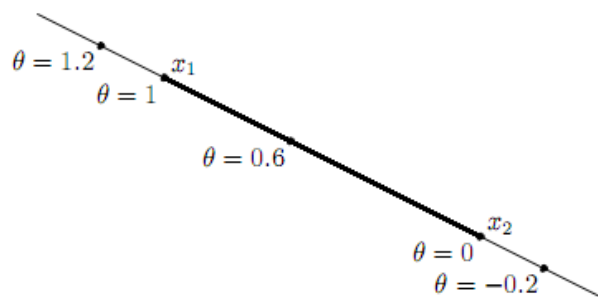


Figura 2.1 - A reta que passa através x_1 e x_2 é descrita parametricamente por $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$, onde θ varia em \mathfrak{R} . O segmento de reta entre x_1 e x_2 , que corresponde a θ de 0 a 1, é mostrado em negrito.

2.3.2 Conjuntos afins

Um conjunto $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ é afim se a reta que une quaisquer dois pontos distintos em C estiver em C , isto é, se para algum $x_1, x_2 \in C$ onde $\theta \in \mathfrak{R}$, tem-se que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. Em outras palavras, C contém a combinação linear de quaisquer dois pontos em C , contanto que a soma dos coeficientes na combinação linear seja 1 (Valentine, 1964).

Esta idéia pode ser generalizada para mais que dois pontos. Um ponto na forma $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$, onde $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, é dito ser uma combinação afim dos pontos x_1, \dots, x_k . Usando a introdução da definição do conjunto afim, pode se mostrar que um conjunto afim contém todas as combinações afins desses pontos: Se C é um conjunto afim, $x_1, \dots, x_k \in C$, e $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, então o ponto $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ também pertence a C (Valentine, 1964).

Se C é um conjunto afim e $x_0 \in C$, então o conjunto (Boyd et al., 2004)

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\} \quad (2.7)$$

é um subespaço, isto é, V é fechado em relação às operações soma e produto por um escalar. Para observar isto, seja $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$. Então tem-se que $v_1 + x_0 \in C$ e $v_2 + x_0 \in C$, e então

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 = \alpha(v_1 + x_0) + \beta(v_2 + x_0) + (1 - \alpha - \beta)x_0 \in C, \quad (2.8)$$

desde que C seja afim, e $\alpha + \beta + (1 - \alpha - \beta) = 1$. Então, conclui-se que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$, pois $\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 \in C$.

Assim, o conjunto afim C pode ser expresso como

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\}, \quad (2.9)$$

isto é, como um subespaço mais um complemento. O subespaço V associado com o conjunto afim C não depende da escolha de x_0 , tal x_0 pode ser escolhido como um ponto de C . A dimensão de um conjunto afim C é definida como a dimensão do subespaço $V = C - x_0$, onde x_0 é um elemento de C .

Exemplo 2.1- *Conjunto solução de equações lineares.* O conjunto solução de um sistema de equações lineares, $C = \{x \mid Ax = b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, é um conjunto afim. Para mostrar isso, seja $x_1, x_2 \in C$, isto é, $Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$. Então para qualquer θ , tem-se que

$$\begin{aligned} A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \\ &= \theta b + (1-\theta)b \\ &= b, \end{aligned} \tag{2.10}$$

que mostra que a combinação afim $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ está também em C . O subespaço associado ao conjunto afim C é o espaço nulo de A . Pode-se obter também o contrário, todo conjunto afim pode ser expressado como um conjunto solução de um sistema de equações lineares.

O conjunto de todas as combinações afins dos pontos em algum conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *casca afim* de C , e denotado por $\text{aff } C$ (Valentine, 1964):

$$\text{aff } C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_1, \dots, x_k \in C, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\}. \tag{2.11}$$

A *casca afim* é o menor conjunto afim que contém C , no seguinte sentido: se S é um conjunto afim com $C \subseteq S$, então $\text{aff } C \subseteq S$.

2.3.3 Conjuntos Convexos

Um conjunto C é convexo se o segmento de reta entre quaisquer dois pontos em C está em C , isto é, se para quaisquer $x_1, x_2 \in C$ e qualquer θ com $0 \leq \theta \leq 1$, tem-se que (Rockafellar, 1970)

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C. \quad (2.12)$$

Em outras palavras, pode-se dizer que um conjunto é convexo se cada ponto no conjunto puder ser visto por todos os outros pontos, ao longo de uma trajetória retilínea desobstruída entre eles, onde o meio desobstruído está no conjunto. Todo conjunto afim é também convexo, pois ele contém as retas inteiras entre quaisquer dois pontos distintos nele, e, portanto, o segmento de reta entre os pontos (Hiriart-Urruty e Lemaréchal, 2001).. A figura 2.2 ilustra alguns conjuntos convexos e não convexos no \mathfrak{R}^2 .

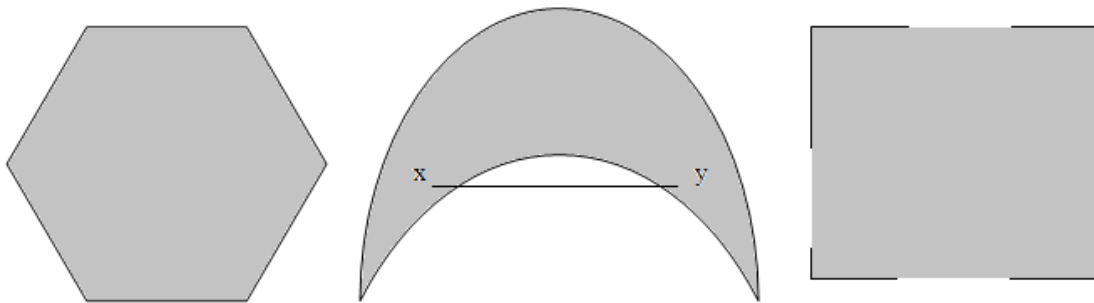


Figura 2.2 – Alguns conjuntos convexos e não convexos. À esquerda: um hexágono, que inclui seus limites (convexo) No centro: O conjunto na forma de uma “lua” não é convexo, pois o segmento de reta entre os pontos x e y não está contido totalmente no conjunto. À direita: O quadrado contém alguns pontos limitados e outros não, portanto não é convexo.

Um ponto da forma $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$, onde $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$ e $\theta_i \geq 0$, $i=1, \dots, k$, é uma combinação convexa dos pontos x_1, \dots, x_k . Pode-se mostrar também que um conjunto é convexo se e somente se ele contiver todas as combinações convexas desses pontos (Hiriart-Urruty e Lemaréchal, 1993)

A casca convexa de um conjunto C, denotado por $\text{conv } C$, é o conjunto de todas as combinações convexas dos pontos em C (Valentine, 1964):

$$\text{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i=1, \dots, k, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\} \quad (2.13)$$

Como o próprio nome sugere a *casca convexa* $\text{conv } C$ é sempre convexa. É o menor conjunto convexo que contém C : Se B é um conjunto convexo qualquer que contém C , então $\text{conv } C \subseteq B$. A figura 2.3 ilustra a definição de *casca convexa*.

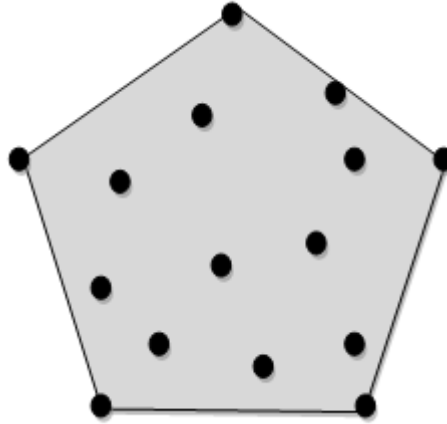


Figura 2.3 – A *casca convexa* de um conjunto no \mathfrak{R}^2 de quinze pontos formando um pentágono.

A idéia de uma combinação convexa pode ser generalizada para incluir somas infinitas, integrais e etc. Por exemplo, sejam $\theta_1, \theta_2, \dots$ tais que satisfaçam (Boyd et al., 2004)

$$\theta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1, \quad (2.14)$$

e $x_1, x_2, \dots, \in C$, onde $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ é convexo. Então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i \in C, \quad (2.15)$$

se a série convergir. De uma forma mais geral, seja $p: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ satisfazendo $p(x) \geq 0$ para todo $x \in C$ e $\int_C p(x) dx = 1$, onde $C \subseteq \mathfrak{R}^n$ é convexo. Então

$$\int_C p(x)x dx \in C, \quad (2.16)$$

se a integral existir.

2.3.4 Cones convexos

Um conjunto C é um *cone*, ou *homogêneo não negativo*, se para todo $x \in C$ e $\theta \geq 0$ tem-se que $\theta x \in C$. Um conjunto C é um *cone convexo* se para qualquer $x_1, x_2 \in C$ e $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, tem-se que (Berman, 1973)

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C. \quad (2.17)$$

Pontos desta forma podem ser descritos geometricamente na forma de uma “fatia” bidimensional com ápice em 0 e extremidades passando através de x_1 e x_2 . (Ver figura 2.4).

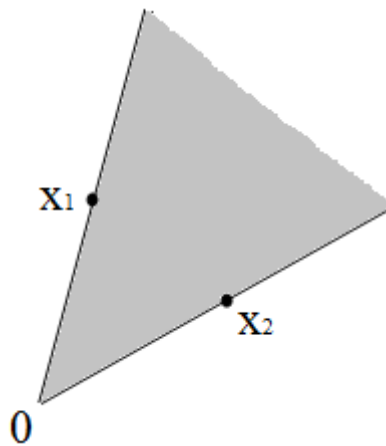


Figura 2.4 – A “fatia” mostra todos os pontos da forma $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$, onde $\theta_1, \theta_2 \geq 0$. O ápice da “fatia” (que corresponde a $\theta_1 = \theta_2 = 0$) está em 0 ; as extremidades (que correspondem a $\theta_1 = 0$ ou $\theta_2 = 0$) passam pelos pontos x e y .

Um ponto da forma $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ com $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$ é chamado de combinação cônica (ou combinação linear não homogênea) de x_1, \dots, x_k . Se x_i está em um cone convexo C , então toda combinação cônica de x_i está em C . Pode-se dizer também que, um conjunto C é um cone convexo se e somente se ele contém todas as combinações cônicas de seus elementos. Assim como para as combinações convexas (ou afins), a idéia da combinação cônica pode ser generalizada para somas infinitas e integrais (Berman, 1973).

2.3.5 Exemplos de conjuntos convexos

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos importantes de conjuntos convexos. Serão apresentados inicialmente os conceitos de *hiperplano* e *semi-espacos* com o objetivo de trazer uma interpretação geométrica que ajudará na compreensão da definição de um *politopo* que é um conjunto convexo do tipo *poliedro limitado*.

2.3.5.1 Hiperplano e semiespaço

Um hiperplano é um conjunto da forma (Boyd et al., 2004)

$$\left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \right\}, \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{a} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{a} \neq 0$, e $b \in \mathfrak{R}$. Analiticamente ele é um conjunto solução de uma equação linear não trivial entre os componentes de \mathbf{x} (e portanto um conjunto afim). Geometricamente, o hiperplano $\left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \right\}$ pode ser interpretado como um conjunto de pontos com um produto interno constante para um dado vetor \mathbf{a} , ou como um hiperplano com *vetor normal* \mathbf{a} ; a constante $b \in \mathfrak{R}$ determina o complemento do hiperplano da origem. Esta interpretação geométrica pode ser entendida expressando o hiperplano na forma (Boyd et al., 2004)

$$\left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \right\} \quad (2.19)$$

onde \mathbf{x}_0 é qualquer ponto no hiperplano (isto é, qualquer ponto que satisfaça $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_0 = b$). Esta representação pode por sua vez ser expressa como (Boyd et al., 2004)

$$\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\} = x_0 + a^\perp, \quad (2.20)$$

onde a^\perp denota o complemento ortogonal de \mathbf{a} , isto é, o conjunto de todos os vetores ortogonais:

$$a^\perp = \{v \mid a^T v = 0\}. \quad (2.21)$$

Isto mostra que o hiperplano consiste de um complemento x_0 , mais todos os vetores ortogonais ao vetor \mathbf{a} (normal). Estas interpretações geométricas são ilustradas na figura 2.5.

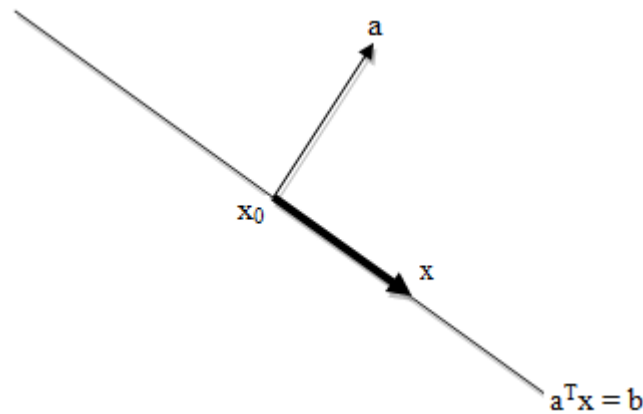


Figura 2.5 – Hiperplano no \mathfrak{R}^2 , com vetor normal \mathbf{a} e um ponto x_0 no hiperplano. Para qualquer ponto x no hiperplano, $x - x_0$ (seta em negrito) é ortogonal ao vetor normal \mathbf{a} .

Um hiperplano divide o espaço \mathfrak{R}^n em dois semiespaços. Um semiespaço (fechado) é um conjunto da forma (Boyd et al., 2004)

$$\{x \mid a^T x \leq b\}, \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{a} \neq 0$, isto é, o conjunto solução de uma desigualdade linear (não trivial). Semiespaços são convexos, mas não afins. Isto é ilustrado na figura 2.6.

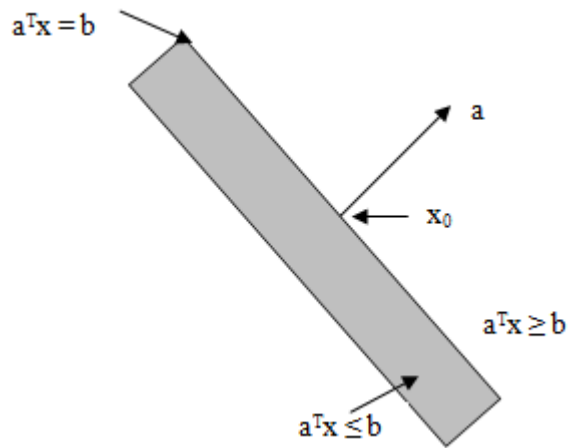


Figura 2.6 – Um hiperplano definido por $a^T x = b$ no \mathcal{R}^2 determina dois semiespaços. O semiespaço determinado por $a^T x \geq b$ (região não sombreada) é o semiespaço estendido na direção \mathbf{a} . O semiespaço determinado por $a^T x \leq b$ (região sombreada) estende na direção $-\mathbf{a}$. O vetor \mathbf{a} é normal em relação a estes semiespaços.

O semiespaço (2.22) pode também ser expresso como (Boyd et al., 2004)

$$\{x \mid a^T(x - x_0) \leq 0\}, \quad (2.23)$$

onde x_0 é qualquer ponto sobre o hiperplano associado, isto é, que satisfaça $a^T x_0 = b$. A representação (2.23) sugere uma interpretação geométrica simples: o semiespaço consiste em um x_0 mais qualquer vetor que forma um ângulo obtuso (ou reto) com o vetor normal \mathbf{a} (normal externo). Isto está ilustrado na figura 2.7.

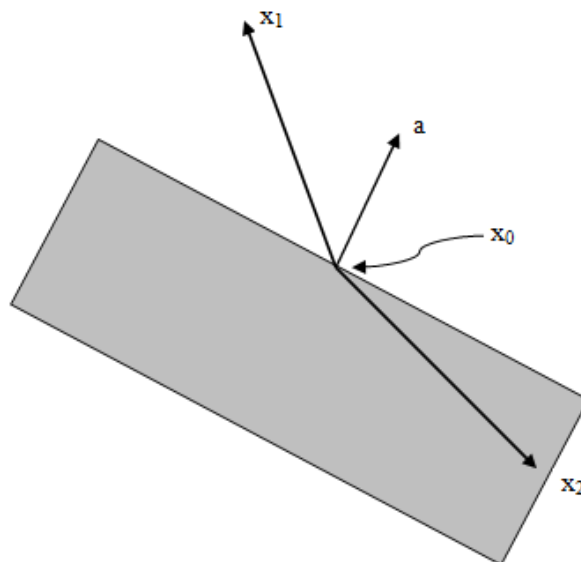


Figura 2.7 – O conjunto sombreado é o semiespaço determinado por $a^T(x - x_0) \leq 0$. O vetor $x_1 - x_0$ forma um ângulo agudo com o vetor \mathbf{a} , então x_1 não está no semi-espaço. O vetor $x_2 - x_0$ forma um ângulo obtuso com o vetor \mathbf{a} , e está, portanto, no semiespaço.

A fronteira do semi-espaço (2.24) é o hiperplano $\{x \mid a^T x = b\}$. O conjunto $\{x \mid a^T x < b\}$, que o interior do semiespaço $\{x \mid a^T x \leq b\}$, é chamado de semiespaço aberto.

2.3.5.2 Poliedro e Politopo

Um poliedro é definido como um conjunto solução de um número finito de igualdades e desigualdades lineares (Sonnevend, 1986)

$$P = \{x \mid a_j^T x \leq b_j, j=1, \dots, m, c_j^T x = d_j, j=1, \dots, p\}. \quad (2.24)$$

Um poliedro é assim a intersecção de um número finito de semiespaços e hiperplanos. Conjuntos afins (por exemplo, subespaços, hiperplanos, retas), raios, segmentos de reta e semiespaços são todos poliedros. Poliedros são conjuntos convexos. Um poliedro limitado é às vezes chamado de politopo, mas alguns autores usam a convenção contrária (isto é, politopo para qualquer conjunto na forma (2.24), e poliedro quando for limitado). A figura 2.8 mostra um exemplo de um poliedro definido como uma intersecção de cinco semiespaços.

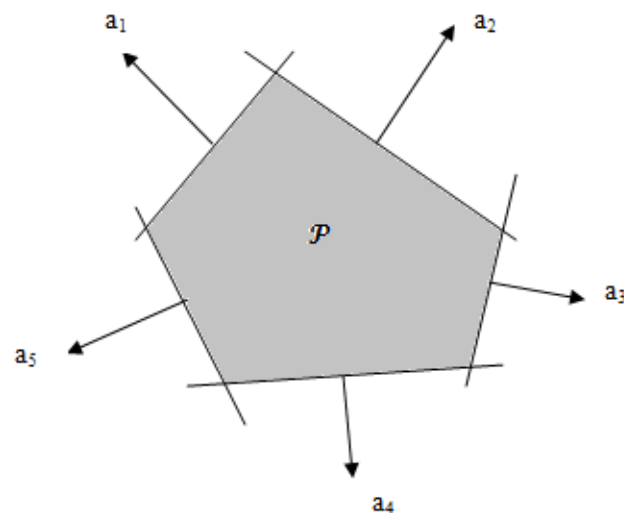


Figura 2.8 – O poliedro P é a intersecção dos cinco semiespaços, com os vetores normais a_1, \dots, a_5 .

Exemplo 2.2 – Seja P um polítopo descrito por cinco vértices, $P = \text{conv} \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$, lembrando que conv denota casca convexa (seção 2.3.4), como ilustrado na figura 2.9. Qualquer ponto $p \in P$ pode ser escrito através da combinação convexa dos vértices: $p = \sum_{i=1}^5 \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1$ (por exemplo, o ponto $p_2 = 1/3v_4 + 2/3p_1$, e $p_1 = 1/2v_1 + 1/2v_2$). Por analogia, pode-se supor que cada vértice é uma matriz A de um conjunto de sistemas autônomos ($\dot{x} = Ax$) (Aguirre, 2007).

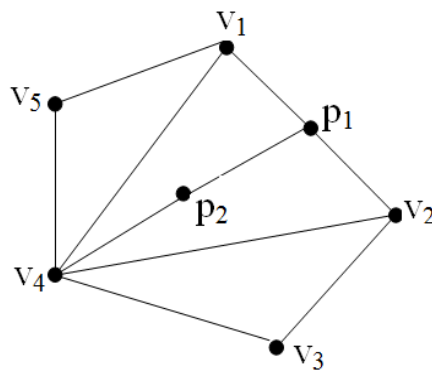


Figura 2.9 – Exemplo de um polítopo com cinco vértices.

Uma notação compacta usada para (2.26) é (Boyd et al., 2004)

$$P = \{x \mid Ax \preceq b, Cx = d\} \quad (2.25)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_p^T \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

e o símbolo \preceq denota desigualdade vetorial ou desigualdade no que diz respeito às componentes no \Re^m , por exemplo: $u \preceq v$ significa $u_i \preceq v_i$ para $i = 1, \dots, m$. Esta notação (\preceq) será muito utilizada no capítulo 3 no contexto usual para sinais de matrizes.

Exemplo 2.3 O ortante não negativo é o conjunto de pontos com componentes não negativas, ou seja,

$$\mathfrak{R}_+^n = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\} = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n \mid x \succeq 0 \right\}. \quad (2.27)$$

(Aqui \mathfrak{R}_+ denota o conjunto de números reais não negativos: $\mathfrak{R}_+ = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \geq 0\}$). O ortante não negativo é um poliedro e um cone, portanto, chamado de cone poliedral.

2.3.5.3 Cone semidefinido positivo

O conjunto S_+^n é um cone convexo se $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ e $A, B \in S_+^n$, então $\theta_1 A + \theta_2 B \in S_+^n$. Isto pode ser visto diretamente da definição da semidefinição positiva: para qualquer $x \in \mathfrak{R}^n$, tem-se (Berman, 1973)

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x \geq 0, \quad (2.28)$$

se $A \succeq 0$, $B \succeq 0$ e $\theta_1, \theta_2 \geq 0$.

Observações:

- A notação S^n denota um conjunto de matrizes simétricas $n \times n$, onde

$$S^n = \left\{ X \in \mathfrak{R}^{n \times n} \mid X = X^T \right\}, \quad (2.29)$$

que é um espaço vetorial com dimensão $n(n + 1)/2$.

- A notação S_+^n denota um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas, onde:

$$S_+^n = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\} \quad (2.30)$$

- A notação S_{++}^n denota um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas, onde:

$$S_{++}^n = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}. \quad (2.31)$$

(Estas duas últimas notações têm o significado análogo ao de \mathfrak{R}_+ , que denota os reais não negativos, e \mathfrak{R}_{++} , que denota os reais positivos, respectivamente.)

Exemplo 2.4: O cone semidefinido positivo no S^2 . Tem-se (Boyd et al., 2004)

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad xz \geq y^2. \quad (2.32)$$

Os limites deste cone são mostrados na figura 2.10, traçado no \mathfrak{R}^3 como (x, y, z) .

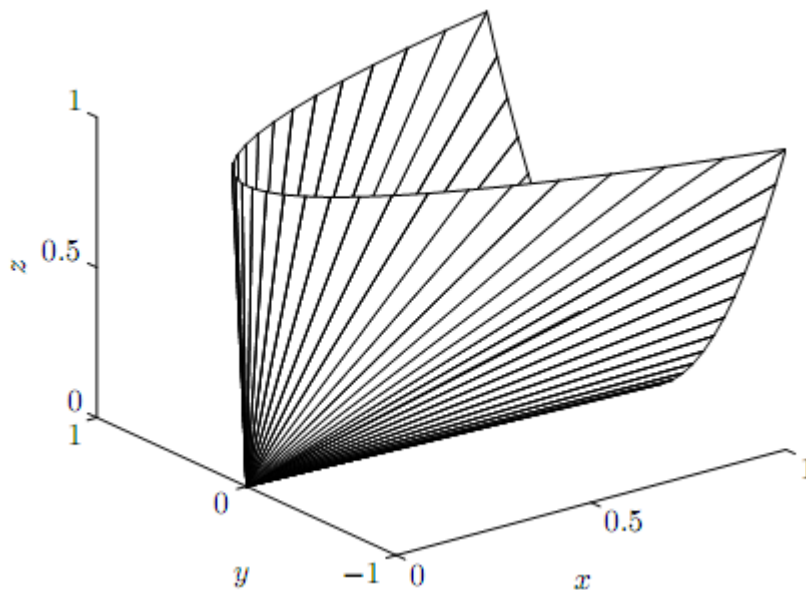


Figura 2.10 – Limites de um cone semidefinido positivo no S^2 .

2.3.6 Funções afins

Uma função $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ é afim se for uma soma de uma função linear e uma constante, isto é, se ela tiver a forma $f(x) = Ax + b$, onde $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathfrak{R}^m$. Seja $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ convexo e $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ uma função afim, então a imagem de f em S , (Roberts e Varberg, 1973)

$$f(S) = \{ f(x) \mid x \in S \}, \quad (2.33)$$

é convexa.

2.3.7 Funções convexas

A função $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é convexa se o $\text{dom } f$ (domínio de f) é um conjunto convexo e se para todo $x, y \in \text{dom } f$, e θ com $0 \leq \theta \leq 1$, tem-se, portanto que (Roberts e Varberg, 1973)

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y). \quad (2.34)$$

Geometricamente, esta desigualdade significa que o segmento de reta entre $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, que é uma corda de x para y , está sobre o gráfico de f (figura 2.11).

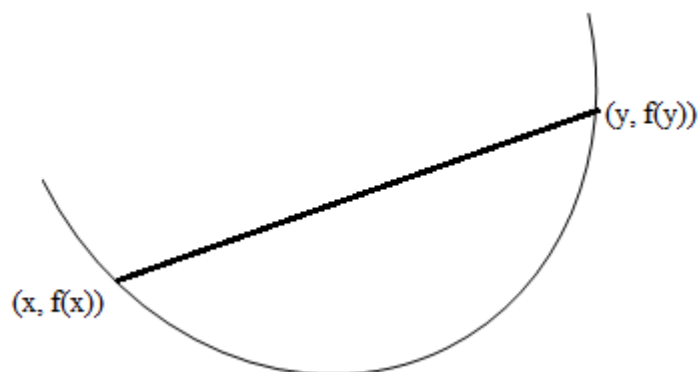


Figura 2.11- Gráfico de uma função convexa. A corda (segmento de reta) entre quaisquer dois pontos do gráfico está sobre o gráfico.

2.3.8 O problema de otimização convexa

Enfim, a seguir será apresentado o formalismo matemático de um problema de otimização convexa, que será utilizado na implementação do controlador LQI otimizado por LMIs (capítulo 4).

Um problema de otimização convexa é aquele na forma (Boyd et al., 2004)

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f_0(x) \\ & \text{sujeito a } f_i(x) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde as funções $f_0, \dots, f_m : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ são convexas, isto é, satisfazem

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (2.36)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$ e todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ com $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. O problema dos mínimos quadrados e o problema de programação linear são ambos casos especiais do problema de otimização convexa geral (2.35).

Não existe uma fórmula analítica geral para a solução de problemas de otimização convexa, mas (como nos problemas de programação linear) existem muitos métodos eficientes para solucioná-los. O método dos pontos interiores é muito trabalhado na prática, e em alguns casos pode-se demonstrar a solução de um problema com uma especificada precisão com um número de operações sem exceder os problemas de dimensões de um polinômio (Ben-Tal e Nemirovski, 2001)

Como os métodos para a solução de programas lineares, o método dos pontos interiores são muito confiáveis. Pela exploração da estrutura do problema (tal como dispersão), pode-se resolver uma variedade de problemas, com muitas centenas de variáveis e restrições (Alizadeh et al., 1998).

Não se pode ainda exigir que a solução de um problema de otimização convexa seja um tecnologia madura, como a solução dos problemas dos mínimos quadrados ou programação linear. Mas é razoável esperar que a solução geral para o problema de otimização convexa se tornará uma tecnologia dentro de alguns anos.

Capítulo III

Desigualdades matriciais lineares

Introdução

O uso de desigualdades matriciais lineares (LMIs), na teoria de controle começou a se desenvolver a partir da década de 80, com a criação e aperfeiçoamento de algoritmos de otimização convexa, como pontos interiores. A partir de então muitos dos resultados usuais da teoria de controle e sistemas, estão sendo reescritos como LMIs (Trofino, 2000).

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma restrição convexa, consequentemente, problemas de otimização com funções objetivas convexas e restrições LMI são solucionadas através de algoritmos como o de Nemirovskii (Nemirovskii e Gahinet, 1994). O estudo com LMIs tem sido de grande importância na procura de soluções para problemas de controle, pois, permite o tratamento simultâneo de vários requisitos de desempenho e robustez. Outro ponto de suma importância é que na abordagem LMI, a busca de soluções para problemas mais complexos, principalmente quando há presença de elementos incertos, pode ser simplificada devido às propriedades de convexidade e linearidade (Trofino, 2000).

A forma de uma LMI é bem geral. Desigualdades lineares, desigualdades quadráticas convexas, desigualdades de normas matriciais, e várias restrições da teoria de controle tais como desigualdades de Lyapunov e Riccati podem ser escritas como LMIs (Boyd et al., 1994). Assim, as LMIs são usadas para resolver uma ampla variedade de problemas de otimização e controle.

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos para a formulação LMI na análise e desempenho de sistemas lineares para os casos invariantes no tempo e incerto.

3.1 Desigualdades matriciais lineares – definição matemática

Uma desigualdade matricial linear (LMI) tem a forma (Boyd et al., 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^m$, $F_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. A desigualdade significa que $F(x)$ é uma matriz definida positiva, ou seja,

$$z^T F(x) z > 0, \forall z \neq 0, z \in \mathfrak{R}^n. \quad (3.2)$$

As matrizes simétricas F_i , $i = 0, 1, \dots, m$ são fixas e x é a variável. Assim, $F(x)$ é uma função afim dos elementos de x .

A equação (3.1) é uma LMI estrita. Para $F(x)$ semidefinida positiva tem-se uma LMI não estrita. Uma LMI estrita é factível se o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é não vazio (uma definição similar é aplicada em LMIs não estritas). Qualquer LMI não estrita factível pode ser reduzida a uma LMI estrita factível equivalente eliminando restrições de igualdade implícita e, em seguida, reduzindo a LMI resultante, removendo qualquer espaço nulo constante (Boyd et al., 1994, página 19). Em outras palavras, a LMI $F(x)$ é um funcional afim, mapeando um espaço vetorial na entrada, em um cone de matrizes simétricas semidefinidas negativas na saída. Portanto, uma propriedade inerente das LMIs é apresentar simetria em sua estrutura. De outra forma, uma LMI pode ser vista como uma desigualdade com elementos matriciais e simétrica.

3.2 Propriedades das LMIs

Será utilizado aqui algumas noções sobre funções e conjuntos convexos. A seguir são apresentadas algumas das principais propriedades básicas das LMIs.

3.2.1 Equivalência entre LMI e desigualdades polinomiais

É importante representar uma LMI em termos de desigualdades escalares. Mais especificamente, a LMI (3.1) é equivalente a n desigualdades polinomiais. Para verificar

isto, será considerado o resultado (bem conhecido na teoria matricial, por exemplo, página 951 de Wylie e Barrett (1995)) em que uma matriz simétrica real A é definida positiva se e somente se todos os seus menores principais forem positivos. Seja A_{ij} o ij -ésimo elemento de A . Lembrando que os menores principais de A são

$$A_{11}, \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Este resultado é aplicado no intuito de afirmar que a LMI (3.1) é equivalente a:

$$F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} > 0 \quad (\text{uma desigualdade linear})$$

$$\left(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} \right) \left(F_{0,22} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,22} \right) - \left(F_{0,12} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,12} \right) \left(F_{0,21} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,21} \right) > 0$$

(uma desigualdade quadrática)

⋮

$$\det \begin{pmatrix} F(x)_{11} & \dots & F(x)_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ F(x)_{k1} & \dots & F(x)_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{desigualdade polinomial de ordem } k)$$

⋮

$$\det(F(x)) > 0 \quad (\text{desigualdade polinomial de ordem } n)$$

As n desigualdades polinomiais variam em x da primeira ordem para ordem n .

3.2.2 Convexidade

Um conjunto C é convexo se $\lambda y + (1-\lambda)x \in C$ para todo $x, y \in C$ e $\lambda \in (0, 1)$ (Peressini et al., 1988). Uma importante propriedade das LMIs é que o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é convexo, ou seja, a LMI (3.1) constitui uma restrição convexa em x . Para

verificar isto, seja x e y dois vetores tais que $F(x) > 0$ e $F(y) > 0$, e seja $\lambda \in (0, 1)$. Então, aplicando a convexidade em (3.1) tem-se que

$$\begin{aligned}
 F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) F_i \\
 &= \lambda F_0 + (1-\lambda)F_0 + \sum_{i=1}^m \lambda x_i F_i + \sum_{i=1}^m (1-\lambda)y_i F_i \\
 &= \lambda \left(F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \right) + (1-\lambda) \left(F_0 + \sum_{i=1}^m y_i F_i \right) \\
 &= \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) > 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

e a prova está completa, pois x também é solução da LMI. Essa propriedade é fundamental no desenvolvimento e aplicação de algoritmos eficientes para a solução de LMI.

3.2.3 Múltiplas LMIs podem ser expressas como uma única LMI

Uma das vantagens na representação de problemas de controle de processos com LMI é a capacidade em considerar múltiplas necessidades de controle anexando LMIs adicionais. Seja um conjunto definido por q LMIs:

$$F^1(x) > 0; F^2(x) > 0; \dots; F^q(x) > 0 \tag{3.5}$$

Então, uma única LMI equivalente pode ser dada por (Gahinet et al., 1995).

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i = \text{diag}\{F^1(x), F^2(x), \dots, F^q(x)\} > 0, \tag{3.6}$$

onde

$$F_i = \text{diag}\{F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^q\} \quad \forall i = 0, \dots, m \tag{3.7}$$

e $\text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_q\}$ é uma matriz bloco diagonal com blocos X_1, X_2, \dots, X_q . Este resultado pode ser provado pelo fato que os autovalores da matriz bloco diagonal são iguais a união dos autovalores dos blocos.

3.3 A generalidade das LMIs

Esta seção apresenta como muitas desigualdades comuns podem ser escritas como LMIs. Além disso, muitas propriedades de interesse da teoria de controle podem ser escritas exatamente em termos da factibilidade de uma LMI. Tal problema é conhecido como *problema de factibilidade LMI*.

3.3.1 Restrições lineares podem ser expressas por uma LMI

Restrições lineares estão em toda parte nas aplicações em controle de processos. O modelo do controle preditivo tornou-se o método mais popular para projetos de controladores multivariáveis em muitas indústrias, principalmente pela capacidade de endereçar as restrições nas variáveis do processo (Garcia et al., 1989). Formulações do modelo do controle preditivo como programação linear padrão e programação quadrática podem ser escritos em termos de LMIs. Será mostrado o primeiro passo, de como escrever restrições lineares nas variáveis do processo como restrições LMIs (Ricke, 1990).

Seja a restrição linear geral $Ax < b$ escrita como n desigualdades escalares:

$$b_i - \sum_{j=1}^m A_{ij}x_j > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

onde $b \in \mathfrak{R}^n$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, e $x \in \mathfrak{R}^m$. Cada uma das n desigualdades escalares é uma LMI. Já que múltiplas LMIs podem ser escritas como uma única LMI, então a desigualdade (3.8) pode ser expressa como uma única LMI.

3.3.2 Estabilidade de sistemas lineares

Estabilidade é uma das necessidades mais básicas para qualquer sistema em malha fechada. Alguns métodos para analisar a estabilidade de sistemas lineares são tratados em livros textos sobre controle de processos tais como Ogunnaike (1994) e Packard (1992). Além disso, alguns processos não lineares podem ser analisados (pelo menos em algum grau) com técnicas lineares realizando uma mudança de variáveis (Ogunnaike e Wright, 1997).

O método de Lyapunov para analisar estabilidade é descrito em muitos textos de dinâmica de processos (Himmelblau e Bischoff, 1968). A idéia básica é encontrar uma função de estado definida positiva (chamada função de Lyapunov) cuja derivada no tempo é definida negativa. Uma condição necessária e suficiente para o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (3.9)$$

ser estável é a existência de uma função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, onde P é uma matriz simétrica definida positiva tal que a derivada no tempo de V é negativa para todo $x \neq 0$ (Perlmutter, 1972):

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A^T P + P A) x < 0, \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow A^T P + P A < 0 \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) é uma LMI, onde P é a variável. Para verificar isto, basta selecionar uma base para uma matriz simétrica $n \times n$. Como exemplo de base, para $i \geq j$ seja E^{ij} uma matriz com os elementos (i, j) e (j, i) iguais a 1, e todos os outros elementos iguais a 0. Existem $m = n(n + 1)/2$ matrizes E^{ij} linearmente independentes e qualquer matriz simétrica P pode ser escrita unicamente como

$$P = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n P_{ij} E^{ij}, \quad (3.12)$$

onde P_{ij} é o (i, j) elemento de P . Assim a matriz E^{ij} forma uma base para a matriz simétrica $n \times n$ (de fato, se as colunas de cada E^{ij} são vetores colunas, então os vetores resultantes formam uma base ortogonal).

Substituindo P em (3.11) em termos das matrizes bases dada (3.12) tem-se uma forma alternativa para a desigualdade de Lyapunov, ou seja,

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= A^T \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i \geq j}^n P_{ij} E^{ij} \right) + \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i \geq j}^n P_{ij} E^{ij} \right) A \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i \geq j}^n P_{ij} (A^T E^{ij} + E^{ij} A) < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

que está na forma da LMI (3.1), com $F_0 = 0$ e $F_k = -A^T E^{ij} - E^{ij} A$, para $k = 1, \dots, m$. Os elementos do vetor x em (3.1) são os P_{ij} , com $i \geq j$.

3.3.3 Estabilidade de sistemas variantes no tempo e não lineares

Alguns processos comumente encontrados nas aplicações de controle podem ser adequadamente modelados como linear invariante no tempo (LTI). Entretanto, muitos outros não podem ser analisados adequadamente usando técnicas LTI (Arkun et al., 1998) (VanAntwerp et al., 1997).

Na seção anterior foi mostrado como testar a estabilidade de um sistema linear representando-o como um problema de factibilidade LMI. Agora será considerada a generalização do problema de testar a estabilidade de um conjunto de sistemas lineares variantes no tempo descrevendo-o como uma casca convexa de matrizes (uma matriz politopo):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_L\} \quad (3.14)$$

Uma forma alternativa para escrever (3.14) seria (Pardalos e Rosen, 1987):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \sum_{i=1}^L \lambda_i A_i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1. \quad (3.15)$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ que prova a estabilidade de (3.15) é a existência de $P = P^T > 0$ que satisfaça:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall A(t) \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_L\} \quad (3.16)$$

$$\Leftrightarrow x^T [A(t)^T P + P A(t)] x < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall A(t) \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_L\} \quad (3.17)$$

$$\Leftrightarrow A(t)^T P + P A(t) < 0, \quad \forall A(t) \in \text{Co}\{A_1, \dots, A_L\} \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i A_i \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i A_i \right) < 0, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1 \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_i^T P + P A_i) < 0, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1 \quad (3.20)$$

$$\Leftrightarrow A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (3.21)$$

A procura por um P que satisfaça estas desigualdades é um problema de factibilidade LMI. Esta condição é também suficiente para a estabilidade de sistemas não lineares variantes no tempo onde o Jacobiano do sistema não linear está contido dentro da casca convexa em (3.15) (Liu, 1968).

3.3.4 O complemento de Schur

O complemento de Schur converte uma classe de desigualdades não lineares convexas que aparecem regularmente nos problemas de controle em uma LMI. As desigualdades não lineares convexas são (Laub, 1979)

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad (3.22)$$

onde $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$, e $S(x)$ são funções afins em x . O lema do complemento de Schur converte este conjunto de desigualdades não lineares convexas numa LMI equivalente, a saber

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.23)$$

Uma prova do complemento de Schur usando apenas o cálculo elementar é dada no apêndice. A seguir, o complemento de Schur será aplicado em várias desigualdades que aparecem no controle de processos.

3.3.5 Valor singular máximo

O valor singular máximo mede o ganho máximo de um sistema multivariável, onde a magnitude do vetor de entrada e saída é quantificado pela norma Euclidiana (Skogestad, 1996). Ele é muito utilizado também para quantificar a robustez e o desempenho no domínio da frequência em sistemas multivariáveis (Morari e Zafriou, 1989).

O valor singular máximo de uma matriz A com dependência afim em x é denotado por $\bar{\sigma}(A(x))$, que é a raiz quadrada dos autovalores de $A(x)A(x)^T$. A desigualdade $\bar{\sigma}(A(x)) < 1$ é uma restrição convexa não linear em x que pode ser escrita como uma LMI usando o complemento de Schur:

$$\bar{\sigma}(A(x)) < 1 \Leftrightarrow A(x)A(x)^T < I \quad (3.24)$$

$$\Leftrightarrow I - A(x)I^{-1}A(x)^T > 0 \quad (3.25)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & A(x) \\ A(x)^T & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.26)$$

Nas expressões acima $A(x)$ corresponde a $S(x)$ na LMI (3.23), $Q(x)$ e $R(x)$ correspondem a I .

3.3.6 Desigualdade Elipsoidal

Restrições elipsóides são importantes em identificação de processos, estimação de parâmetros, e estatística (Beck e Arnold, 1997).

Um elipsóide descrito por (Braatz e Crisalle, 1998)

$$(x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) < 1, \quad P = P^T > 0 \quad (3.27)$$

pode ser expresso como uma LMI usando o complemento de Schur com $Q(x) = I$, $R(x) = P$, e $S(x) = (x - x_c)^T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & (x - x_c)^T \\ (x - x_c) & P \end{bmatrix} > 0. \quad (3.28)$$

3.3.7 Desigualdade algébrica de Riccati

As equações algébricas de Riccati são usadas extensivamente em controle ótimo, como descrito nos livros textos sobre controle de processo avançado (Ray, 1981) (Skogestad, 1988). Um resultado envolvendo a equação de Riccati pode ser substituído por um resultado equivalente onde a igualdade é substituída por uma desigualdade (Willems, 1971). Mais especificamente, estes controladores ótimos podem ser construídos calculando uma matriz P simétrica definida positiva que satisfaça a desigualdade algébrica de Riccati:

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \quad (3.29)$$

onde A e B são fixos, Q é uma matriz simétrica fixa, e R é uma matriz fixa simétrica definida positiva.

A desigualdade de Riccati é quadrática em P , mas pode ser expressa como uma desigualdade matricial linear aplicando o complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0. \quad (3.30)$$

As duas seções a seguir fornecem exemplos sobre a desigualdade algébrica de Riccati para analisar as propriedades de sistemas lineares e não lineares.

3.3.8 Lema real limitado

O lema real limitado forma uma base para a abordagem LMI em controle de processos robustos (VanAntwerp et al., 1997). Embora o lema real limitado tenha aplicação para o controle de processos lineares e não lineares, o resultado atual é baseado na representação em espaço de estado de um sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = 0 \quad (3.31)$$

onde $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, e $D \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ são fornecidos. Supondo que A seja estável e que (A, B, C) seja mínimo (Kailath, 1980), a matriz função de transferência será

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.32)$$

O desempenho de pior-caso de um sistema medido em termos da integral do erro quadrático da entrada e saída é quantificado pela norma H_∞ (Zhou et al., 1995):

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(G(s)) = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (3.33)$$

A norma H_∞ pode ser escrita em termos de uma LMI. Para verificar isto, será usado um resultado da literatura (Zhou et al., 1988) em que a norma H_∞ de $G(s)$ é menor que γ se e somente se $\gamma^2 I - D^T D > 0$ e existe um $P = P^T > 0$ tal que

$$(A^T P + PA + C^T C) + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T P + D^T C) < 0 \quad (3.34)$$

O complemento de Schur implica que esta desigualdade de Riccati é equivalente para a existência de $P = P^T > 0$ tal que a seguinte LMI seja verdadeira:

$$\begin{bmatrix} -[A^T P + PA + C^T C] & -[PB + C^T D] \\ -[B^T P + D^T C] & \gamma^2 I - D^T D \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.36)$$

É comum incorporar pesos na entrada u e na saída y tal que a condição de interesse seja que a norma H_∞ de $W_1(s)G(s)W_2(s)$ é menor que 1. Um sistema com a norma H_∞ menor que 1 é considerado *estritamente real limitado*. Esta condição é verificada testando a factibilidade da LMI usando as matrizes de espaço de estado para o produto $W_1(s)G(s)W_2(s)$.

3.3.9 Lema real positivo

A análise da robustez tem sido muito aplicada na literatura de controle de processos. Uma propriedade que é regularmente explorada no desenvolvimento de ferramentas para análise de robustez (Banjerdpongchai e How, 1998) para sistemas lineares sujeito a perturbações lineares ou não lineares é denominada passividade (How e Hall, 1993). O sistema linear (3.31) é passivo se

$$\int_0^\tau u(t)^T y(t) dt \geq 0 \quad (3.37)$$

para todo u e $\tau \geq 0$. Esta propriedade é equivalente para a existência de um $P = P^T > 0$ tal que (Boyd et al., 1994)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.38)$$

É importante mostrar a relação entre o lema real limitado e o lema real positivo (Anderson, 1972), especialmente porque ela é frequentemente mencionada na literatura de controle robusto. Um resultado padrão da teoria de sistema (Åstrom e Wittenmark, 1995) é que a passividade é equivalente a $G(s)$ em (3.32) sendo real positivo, ou seja,

$$G(s)^* + G(s) \geq 0 \quad \forall \text{Re}\{s\} > 0 \quad (3.39)$$

onde $G(s)^*$ é a transposta conjugada de $G(s)$ (Dorato et al., 1995).

A relação entre o real limitado e o real positivo é que $[I - G(s)][I + G(s)]^{-1}$ é estritamente real positivo se e somente se $G(s)$ é estritamente real limitado. Isto se deriva de (Ly et al., 1994)

$$\bar{\sigma}(A) < 1 \Leftrightarrow A^* A < I \quad (3.40)$$

$$\Leftrightarrow (I + A^*)^{-1}(2I - 2A^* A)(I + A^*)^{-1} > 0 \quad (3.41)$$

$$\Leftrightarrow (I + A^*)^{-1} \left[(I - A^*)(I + A) + (I + A^*)(I - A)(I + A)^{-1} > 0 \right] \quad (3.42)$$

$$\Leftrightarrow (I + A^*)^{-1}(I - A^*) + (I - A)(I + A)^{-1} > 0 \quad (3.43)$$

$$\Leftrightarrow \left[(I - A)(I + A)^{-1} \right]^* + (I - A)(I + A)^{-1} > 0 \quad (3.44)$$

3.3.10 Procedimento S

O procedimento S estende a utilidade das LMIs permitindo que condições de não-LMIs que aparecem geralmente em análises de sistemas não lineares possam ser representados como LMIs (Boyd et al., 1994). A seguir é descrito sobre como procedimento S é aplicado em funções quadráticas, e depois será discutida esta aplicação para formas quadráticas.

Sejam $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ funções escalares quadráticas de $x \in \mathfrak{R}^n$ tais que (Horn e Johnson, 1991):

$$\alpha_i(x) = x^T T_i x + 2u_i^T x + \beta_i, \quad i = 0, \dots, p; \quad T_i = T_i^T \quad (3.45)$$

A existência de $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tal que

$$\alpha_0(x) - \sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x) \geq 0, \quad \forall x, \quad (3.46)$$

implica que

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \forall x \text{ tal que } \alpha_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.47)$$

Para verificar a veracidade disto, seja $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tal que (3.46) seja verdadeiro para todo $\alpha_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p$. Então

$$\alpha_0(x) \geq \sum_{i=1}^p \tau_i \alpha_i(x) \geq 0, \quad \forall x. \quad (3.48)$$

Nota-se que a expressão (3.46) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & \beta_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & \beta_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.49)$$

desde que

$$x^T T x + 2u^T x + \beta \geq 0, \quad \forall x \quad (3.50)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T & u \\ u^T & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x \quad (3.51)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi x \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T & u \\ u^T & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi x \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x, \xi \quad (3.52)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T & u \\ u^T & \beta \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.53)$$

O procedimento S descrito acima pode ser equivalentemente escrito em termos das formas quadráticas (Uhlig, 1979). Ao invés de escrever na versão acima que está em termos de desigualdades não estritas, escreve-se na versão que é aplicada para o caso onde a principal desigualdade é estrita (a prova é similar). Seja T_0, \dots, T_p matrizes simétricas. Se existir $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ tal que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0, \quad (3.54)$$

então

$$x^T T_0 x > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad \text{tal que} \quad x^T T_i x \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.55)$$

3.4 Problemas de otimização

Muitos problemas de controle e otimização podem ser escritos encontrando uma solução factível para um conjunto de LMIs. A maioria dos problemas, contudo, são escritos em termos da otimização de uma simples função objetivo sobre um conjunto de LMIs.

Nesta seção será apresentado alguns dos mais comuns problemas de otimização LMI que aparecem nas aplicações de controle.

3.4.1 Programação semidefinida

O problema de otimização a seguir é comumente conhecido como programação semidefinida (SDP) (Alizadeh, 1992):

$$\inf_{\substack{x \\ F(x) > 0}} c^T x \quad (3.56)$$

Um SDP que geralmente aparece em aplicações de controle é chamado problema de autovalor LMI (EVP). É uma minimização do autovalor máximo de uma matriz com dependência afim na variável x , sujeito a uma restrição LMI em x . Muitos testes de análise de desempenho tais como o cálculo da norma H_∞ em (3.33), podem ser escritos em termos de um EVP (Vandenberghe e Boyd, 1996). Duas formas comuns de EVP são apresentadas a seguir:

$$\inf_{\substack{x, \lambda \\ \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0}} \lambda \quad (3.57)$$

$$\inf_{\substack{x, \lambda \\ A(x, \lambda) > 0}} \lambda \quad (3.58)$$

onde $A(x, \lambda)$ é afim em x e λ .

O problema de autovalor (3.57) pode ser escrito na forma (3.58) definindo $A(x, \lambda) = \text{diag}\{\lambda I - A(x), B(x)\}$ (lembrando que LMIs múltiplas podem ser escritas

como uma única LMI de dimensão superior). Para mostrar que o problema na forma (3.58) pode ser escrito na forma (3.56), define-se

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x^T & \lambda \end{bmatrix}^T, \quad F(\hat{x}) = A\hat{x}, \quad e \quad c^T = \begin{bmatrix} 0^T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.59)$$

onde 0 é um vetor de zeros. Pode-se verificar também que (3.56) transforma-se em (3.57) considerando que

$$\inf_{F(x) > 0} c^T x = \inf_{\substack{c^T x < \lambda \\ F(x) > 0}} \lambda = \inf_{\substack{1\lambda - c^T x > 0 \\ F(x) > 0}} \lambda = \inf_{F(x) > 0} \lambda. \quad (3.60)$$

3.4.2 Problema do autovalor generalizado

Um grande número de propriedades do controle pode ser solucionado como um problema do autovalor generalizado (GEVP). Um GEVP consiste em, dada as matrizes quadradas A e B, com $B > 0$, encontrar um escalar λ e um vetor não nulo y tal que (Boyd e Ghaoui, 1993)

$$Ay = \lambda By \quad (3.61)$$

O cálculo do maior autovalor generalizado pode ser escrito em termos de um problema de otimização com restrições LMI. Considerando que B definido positivo implica que para λ suficientemente grande, $\lambda B - A > 0$. Como λ é reduzido de algum valor suficientemente alto, em algum ponto a matriz $\lambda B - A$ perderá o posto, nesse ponto existe um vetor y não nulo que resolve (3.61), implicando que este valor de λ é o maior autovalor generalizado. Portanto

$$\lambda_{\text{máx}} = \min_{\lambda B - A \geq 0} \lambda = \inf_{\lambda B - A > 0} \lambda \quad (3.62)$$

Geralmente se deseja minimizar o maior autovalor generalizado de duas matrizes, A e B, cada uma com dependência afim na variável x, sujeito a uma restrição LMI em x, ou seja:

$$\inf_{\substack{B(x) > 0 \\ C(x) > 0}} \lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x)) \quad (3.63)$$

Em (3.63) $\lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x))$ é o maior autovalor generalizado das matrizes A e B, com dependência afim em x. Para (3.62) este problema de otimização é equivalente a

$$\inf_{\substack{\lambda \\ \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0}} \lambda \quad (3.64)$$

O problema de minimizar o máximo autovalor generalizado é uma função objetiva semiconvexa sujeita a uma restrição convexa, onde a semiconvexidade significa que

$$\lambda_{\text{máx}}(A(\theta x + (1-\theta)z), B(\theta x + (1-\theta)z)) \leq \max\{\lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x)), \lambda_{\text{máx}}(A(z), B(z))\} \quad (3.65)$$

para todo $\theta \in [0, 1]$ e todo x e z factíveis. Para verificar a veracidade disto, primeiro define-se um $\hat{\lambda}$ igual ao lado direito de (3.65). Então

$$\hat{\lambda} \geq \lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x)) \text{ e } \hat{\lambda} \geq \lambda_{\text{máx}}(A(z), B(z)). \quad (3.66)$$

De (3.62) isto implica que

$$\hat{\lambda}B(x) - A(x) \geq 0 \text{ e } \hat{\lambda}B(z) - A(z) \geq 0. \quad (3.67)$$

Segue que, para todo $\theta \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \theta[\hat{\lambda}B(x) - A(x)] + (1-\theta)[\hat{\lambda}B(z) - A(z)] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda}B(\theta x + (1-\theta)z) - A(\theta x + (1-\theta)z) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Isto e (3.62) implica que

$$\hat{\lambda} \geq \lambda_{\text{máx}}(A(\theta x + (1-\theta)z), B(\theta x + (1-\theta)z)). \quad (3.69)$$

3.5 Métodos de solução

Os problemas definidos nas subsecções anteriores podem ser resolvidos por métodos numéricos eficientes. Nesta seção será discutido algumas idéias básicas de alguns desses métodos.

3.5.1 Algoritmo do Elipsóide

O principal objetivo desse algoritmo é determinar o valor ótimo de uma função convexa $f: \wp \rightarrow \Re$ (Boyd et. al., 1994). A seguir serão apresentados a entrada e os passos para implementação desse algoritmo.

Entrada: Uma função convexa $f: \wp \rightarrow \Re$ com $\wp \subset \Re^n$. Um elipsóide (Bland et al., 1981)

$$\varepsilon_0 := \left\{ x \in \Re^n \mid (x - x_0)^T P_0^{-1} (x - x_0) \leq 1 \right\} \quad (3.70)$$

centrado em $x_0 \in \Re^n$ e orientado por uma matriz definida positiva $P_0 = P^T$ tal que ele contém uma solução ótima do problema para minimizar f . Seja $\varepsilon > 0$ o nível de precisão e seja $k = 0$.

Passo 1: Calcular o subgradiente $g_k \in \partial f(x_k)$ e estabelecer

$$\begin{aligned} L_k &:= \max_{\ell \leq k} \left(f(x_\ell) - \sqrt{g_\ell^T P_\ell g_\ell} \right) \\ U_k &:= \min_{\ell \leq k} f(x_\ell) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Se $g_k = 0$ ou $U_k - L_k < \varepsilon$, então fixa-se $x^* = x_k$ e pára a rotina. Do contrário prossegue-se com o passo 2.

Passo 2: Fazer

$$H_k := \varepsilon_k \cap \left\{ x \in \Re^n \mid \langle g_k, x - x_k \rangle \leq 0 \right\} \quad (3.72).$$

Passo 3: Estabelecer

$$\begin{aligned} x_{k+1} &:= x_k - \frac{P_k g_k}{(n+1) \sqrt{g_k^T P_k g_k}} \\ P_{k+1} &:= \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(P_k - \frac{2}{(n+1) g_k^T P_k g_k} P_k g_k g_k^T P_k \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

e definir o elipsóide como

$$\varepsilon_{k+1} := \left\{ x \in \mathfrak{R}^n \mid (x - x_{k+1})^T P_{k+1}^{-1} (x - x_{k+1}) \leq 1 \right\} \quad (3.74)$$

com centro x_{k+1} e orientação P_{k+1} .

Passo 4: Estabelecer k para $k + 1$ e retornar ao passo 1.

Saída: O ponto x^* com a propriedade que $\left| f(x^*) - \inf_{x \in \wp} f(x) \right| \leq \varepsilon$.

O algoritmo elipsóide determina, portanto, o valor de f com precisão arbitrária. O ponto x^* é, geralmente, uma solução quase ótima ou não ótima a menos que $g_k = 0$ no final do algoritmo. Somente neste caso x^* é uma solução ótima. Portanto, o algoritmo não necessariamente calcula a solução, mas somente o valor ótimo $V_{\text{opt}} = \inf_{x \in \wp} f(x)$.

A ideia por trás do algoritmo é a que segue (Akgul, 1984): o algoritmo é inicializado por uma escolha de x_0 e P_0 tal que existe uma solução ótima x_{opt} no elipsóide ε_0 . Se \wp é limitado então uma escolha segura é tal que $\wp \subseteq \varepsilon_0$. O subgradiente $g_k \in \partial f(x_k)$ divide o \mathfrak{R}^n em dois semiespaços

$$\left\{ x \mid \langle g_k, x - x_k \rangle < 0 \right\} \text{ e } \left\{ x \mid \langle g_k, x - x_k \rangle > 0 \right\} \quad (3.75)$$

enquanto o plano cortante $\left\{ x \mid \langle g_k, x - x_k \rangle = 0 \right\}$ passa através do centro do elipsóide ε_k para cada k . Desde que $f(x) > f(x_k)$ quando $\langle g_k, x - x_k \rangle > 0$, a solução ótima x_{opt} é garantida sendo localizada em H_k . O elipsóide definido no passo 3 contém H_k e é o menor elipsóide com esta propriedade. Iterando sobre k , o algoritmo produz uma sequência de elipsóides $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ cujos volumes diminuem de acordo com

$$\text{vol}(\varepsilon_{k+1}) = \det(P_{k+1}) \leq e^{-\frac{1}{2n}} \det(P_k) = e^{-\frac{1}{2n}} \text{vol}(\varepsilon_k) \quad (3.76)$$

e cada elipsóide contém x_{opt} . A sequência dos centros x_0, x_1, x_2, \dots dos elipsóides geram uma sequência de funções $f(x_k)$ que convergem para um valor ótimo $f(x_{\text{opt}})$. A convergência do algoritmo é em ‘tempo polinomial’ pelo fato que o volume do elipsóide decresce geometricamente. Desde que $x_{\text{opt}} \in \varepsilon_k$ para todo k , tem-se

$$\begin{aligned}
f(x_k) &\geq f(x_{\text{opt}}) \geq f(x_k) + \langle g_k, x_{\text{opt}} - x_k \rangle \geq \\
&\geq f(x_k) + \inf_{\xi \in \mathcal{E}_k} \langle g_k, \xi - x_k \rangle = f(x_k) - \sqrt{g_k^T P_k g_k}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

tal que $L_k \leq f(x_{\text{opt}}) \leq U_k$ define os limites superior e inferior sobre o valor ótimo.

O algoritmo do elipsóide é muito robusto do ponto de vista numérico e implica em pouca necessidade de memória para o seu desempenho. Contudo, a convergência pode ser um tanto lenta o que pode ser uma desvantagem para muitos problemas de otimização.

3.5.2 Método de pontos interiores

O maior avanço da otimização convexa aconteceu na introdução dos métodos de pontos interiores. Estes métodos foram desenvolvidos numa série de trabalho e tornaram-se de grande interesse no contexto de problemas LMIs no trabalho de Yurii Nesterov e Arkadii Nemirovskii.

A principal idéia é a seguinte (Nesterov e Nemirovskii, 1988): seja F uma função afim e seja $\mathcal{D} := \{F(x) < 0\}$ o domínio de uma função convexa $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ que se deseja minimizar. Ou seja, considera-se o problema de otimização convexa

$$V_{\text{opt}} = \inf_{x \in \mathcal{D}} f(x) \tag{3.78}$$

Para solucionar este problema (ou seja, para determinar a solução ótima ou quase ótima), primeiro é necessário introduzir uma *barreira de função*. Esta é uma função ϕ necessária para

- (a) ser estritamente convexa no interior de \mathcal{D} e
- (b) aproximar-se de $+\infty$ ao longo de cada sequência de pontos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no interior de \mathcal{D} que converge para o ponto limitado de \mathcal{D} .

Dada tal barreira de função ϕ , o problema de otimização restrita para minimizar $f(x)$ sobre todo $x \in \mathcal{D}$ é substituído por um problema de otimização sem restrições para minimizar o funcional

$$f_t(x) := tf(x) + \phi(x) \quad (3.79)$$

onde $t > 0$ é chamado de *parâmetro de penalização*. Nota-se que f_t é estritamente convexa em \mathcal{R}^n . A principal idéia é determinar o mapeamento $t \mapsto x(t)$ que associado com algum $t > 0$ minimiza $x(t)$ de f_t . Posteriormente, considera-se que o comportamento deste mapeamento varia com o parâmetro de penalização t . Em quase todos os métodos dos pontos interiores, o problema de otimização sem restrição (3.79) é resolvido com a clássica técnica de iteração de Newton-Raphson para aproximar o mínimo de f_t . Sob determinadas suposições para uma sequência definida adequadamente de parâmetros de penalização t_n com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ a sequência $x(t_n)$ com $n \in \mathbb{Z}_+$ convergirá para o ponto ótimo x_{opt} que é a solução do problema de otimização convexa original. Ou seja, o limite de $x_{\text{opt}} := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe e $V_{\text{opt}} = f(x_{\text{opt}})$.

Uma pequena modificação deste tema é obtida substituindo o problema de otimização de restrição original pelo problema de otimização irrestrita para minimizar (Nesterov e Nemirovskii, 1988)

$$g_t(x) := \phi_0(t - f(x)) + \phi(x) \quad (3.80)$$

onde $t > t_0 := V_{\text{opt}}$ e ϕ_0 é uma função barreira para o semieixo real não negativo. Novamente, a idéia é determinar para todo $t > 0$ um minimizador $x(t)$ de g_t (normalmente usando o algoritmo clássico de Newton-Raphson) e considerar o ‘caminho’ $t \mapsto x(t)$ como uma função do parâmetro de penalização t . A curva $t \mapsto x(t)$ com $t > t_0$ é chamada de *caminho dos centros* para o problema de otimização. Em condições adequadas as soluções $x(t)$ são analíticas e têm um limite com $t \downarrow t_0$, considerado x_{opt} . O ponto $x_{\text{opt}} := \lim_{t \downarrow t_0} x(t)$ é ótimo no sentido de que $V_{\text{opt}} = f(x_{\text{opt}})$ uma vez que para $t > t_0$, $x(t)$ é factível e satisfaz $f(x(t)) < t$.

O método dos pontos interiores podem ser aplicados tanto para o problema LMI de factibilidade como para o problema LMI de otimização. Considerando o problema de factibilidade associado com a LMI $F(x) \prec 0$, uma escolha para a função barreira seria a função logarítmica

$$\phi(x) := \begin{cases} \log \det -F(x)^{-1} & \text{se } x \in \wp \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.81)$$

Sob a suposição de que o conjunto factível \wp é limitado e não vazio, segue que ϕ é estritamente convexo e, portanto, ele define uma função barreira para o conjunto factibilidade \wp . Pela proposição A.1 (ver apêndice), sabe-se que existe um único x_{opt} tal que $\phi(x_{\text{opt}})$ é um mínimo global de ϕ . O ponto x_{opt} obviamente pertence a \wp e é chamado de *centro analítico* do conjunto factibilidade \wp . Ele é usualmente obtido na forma mais eficaz da iteração clássica de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \left(\phi''(x_k) \right)^{-1} \phi'(x_k) \quad (3.82)$$

Em (3.82) ϕ' e ϕ'' denotam o gradiente e a Hessiana de ϕ , respectivamente.

A convergência desse algoritmo pode ser analisada como segue. Desde que ϕ seja bastante convexo e suficientemente plano, existem números L e M tais que para todos os vetores u com norma $\|u\| = 1$ assegura-se que

$$\begin{aligned} u^T \phi''(x) u &\geq M \\ \left\| \phi''(x) u - \phi''(y) u \right\| &\leq L \|x - y\| \end{aligned} \quad (3.83)$$

Nesse caso,

$$\left\| \phi'(x_{k+1}) \right\|^2 \leq \frac{L}{2M^2} \left\| \phi'(x_k) \right\|^2 \quad (3.84)$$

para que, quando o valor inicial x_0 é tal que $\frac{L}{2M^2} \left\| \phi'(x_0) \right\| < 1$ o método é garantido para convergir quadraticamente.

A idéia será em implementar este algoritmo de tal forma que a convergência quadrática possa ser garantida para o maior conjunto possível de valores iniciais x_0 . Por este motivo a iteração (3.82) é modificada como segue

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k (\lambda(x_k)) \left(\phi''(x_k) \right)^{-1} \phi'(x_k) \quad (3.85)$$

onde

$$\alpha_k(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda < 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{1 + \lambda} & \text{se } \lambda \geq 2 - \sqrt{3} \end{cases} \quad (3.86)$$

e $\lambda(x) := \sqrt{\phi'(x)^T \phi''(x) \phi'(x)}$ é chamado de *decremento de Newton* associado com ϕ . É este fator de amortecimento que garante que t_k convergirá para o centro analítico x_{opt} , o único minimizador de ϕ . É importante notar que o tamanho do passo é variável na magnitude. O algoritmo garante que x_k é sempre factível no sentido que $x_k \in \mathcal{D}$ e que x_k converge globalmente para minimizar o x_{opt} de ϕ . Pode-se mostrar que $\phi(x_k) - \phi(x_{\text{opt}}) \leq \varepsilon$ quando

$$k \geq c_1 + c_2 \log \log(1/\varepsilon) + c_3 (\phi(x_0) - \phi(x_{\text{opt}})) \quad (3.87)$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes. O primeiro e segundo termos no lado direito não dependem do critério de otimização e a restrição LMI específica. O segundo termo pode ser desprezado para pequenos valores de ε .

O problema de otimização para minimizar $f(x)$ sujeito a LMI $F(x) \prec 0$ pode ser visto como um problema de factibilidade para a LMI

$$\tilde{F}_t(x) := \begin{pmatrix} f(x) - t & 0 \\ 0 & F(x) \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.88)$$

onde $t > t_0 := \inf_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ é o parâmetro de penalização. Usando a mesma função de barreira para essa desigualdade matricial linear gera-se o problema de otimização irrestrita para minimizar

$$g_t(x) := \log \det -\hat{F}_t(x)^{-1} = \underbrace{\log \frac{1}{t - f(x)}}_{\phi_0(t - f(x))} + \underbrace{\log \det F(x)^{-1}}_{\phi(x)} \quad (3.89)$$

que está na forma (3.80). Devido a convexidade estrita de g_t o minimizador $x(t)$ de g_t é único para todo $t > t_0$. Pode-se mostrar que a sequência $x(t)$ é factível para todo $t > t_0$ e aproxima o mínimo $\inf_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ com $t \downarrow t_0$.

Capítulo IV

Simulação LQR - LMI

Introdução

Este capítulo trás o objetivo principal do trabalho, que é a aplicação dos fundamentos teóricos sobre as LMIs num problema de controle robusto, mais precisamente em implementar um controlador LQI ou LQR com ação integral, tornando um problema de minimização de uma função custo em um problema de otimização convexa no contexto das LMIs, onde a partir dessa nova formulação matemática LQI-LMI, o controlador implementado leva em consideração as incertezas presentes na planta em questão (sistema duplo de nível de líquido). Portanto, o primeiro passo será a modelagem da planta, partindo assim das equações diferenciais que trazem as características físicas bem como as próprias grandezas físicas da planta até o formalismo convencional de equações de estado. O segundo passo é a descrição matemática das incertezas paramétricas presentes na planta, depois do formalismo matemático baseado no conjunto convexo politopo, será apresentada as grandezas incertas e em seguida serão reescritas como incertezas politópicas do problema. Em terceiro lugar, será apresentado o formalismo matemático do regulador linear quadrático com ação integral, e a partir de suas idéias será iniciado o processo de transformação do problema LQR para um problema de otimização convexa, onde será apresentado o algoritmo de resolução envolvendo as LMIs necessárias na solução do problema em questão, e, enfim apresentação e discussão dos resultados obtidos com a simulação.

4.1 Modelagem do sistema de nível de líquido

A figura 4.1 apresenta um sistema de controle de nível de dois tanques interligados, onde os dois reservatórios interagem. As entradas do tanque são variações das vazões medidas u_1 e u_2 em (m^3/s). As saídas do processo são as variações de altura h_1 e h_2 . H_1 e H_2 são as alturas médias (em regime permanente) das colunas no tanque em (m). Q_{u1} e Q_{u2} são as vazões médias (em regime permanente) de entrada do tanque e Q_1 , Q_2 são as vazões médias (em regime permanente) de transição nos tubos de conexões.

A_1 e A_2 são as áreas das seções dos tanques em (m^2). k_1 e k_2 são os parâmetros incertos da planta que dependem da resistência ao fluxo de líquido da tubulação. A expressão do tanque segue o mesmo modelo apresentado por (Bachur et al., 2010).

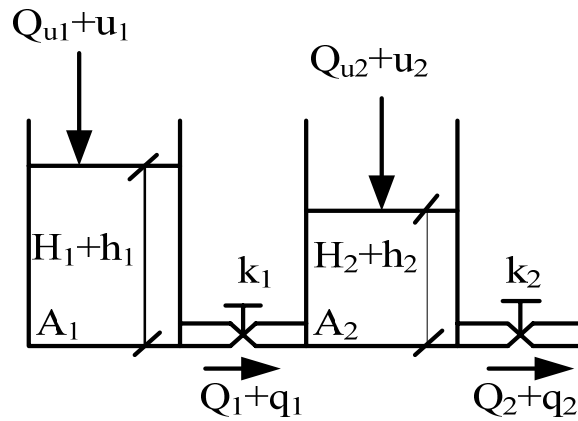


Figura 4.1- Sistema de controle de nível com 2 tanques interligados.

Considerando o fluxo ao longo de uma tubulação curta, que conecta os dois reservatórios, a resistência R ao fluxo de líquido nessa tubulação ou restrição é definida como a variação na diferença de nível (a diferença entre o nível dos líquidos nos dois reservatórios) necessária para causar a variação unitária na taxa de escoamento. Para o sistema de nível de líquido da Figura 4.1, o líquido flui em duas válvulas de restrição, na lateral dos reservatórios. Como o fluxo nessa restrição é considerado laminar, a relação entre a vazão em regime permanente e a altura do nível em regime permanente na restrição será dada por (Ogata, 2003):

$$Q = KH \quad (4.1)$$

onde

Q = vazão em volume em regime permanente, m^3/s

K = coeficiente, m^2/s

H = altura do nível em regime permanente, m .

Para o fluxo laminar, a resistência R é obtida como:

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q} \quad (4.2)$$

A resistência no escoamento laminar é constante e análoga à resistência elétrica. A seguir, foram admitidas apenas pequenas variações das variáveis a partir dos valores de regime permanente. Utilizando os símbolos definidos na Figura 4.1, obtiveram-se as seguintes equações para esse sistema (Ogata, 2003):

$$A_1 dh_1 = (u_1 - q_1) dt \quad (4.3)$$

$$k_1(h_1 - h_2) = q_1 \quad (4.4)$$

$$A_2 dh_2 = (q_1 + u_2 - q_2) dt \quad (4.5)$$

$$k_2 h_2 = q_2 \quad (4.6)$$

onde, de (4.1) e (4.2), tem-se

$$k_1 = \frac{1}{R_1} \text{ e } k_2 = \frac{1}{R_2} \quad (4.7)$$

Eliminando-se q_1 da Equação (4.3) utilizando-se (4.4), resulta:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} [u_1 - k_1(h_1 - h_2)] \quad (4.8)$$

Eliminando-se q_1 e q_2 na Equação (4.5) com o auxílio das equações (4.4) e (4.6), tem-se:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} [k_1(h_1 - h_2) + u_2 - k_2 h_2] \quad (4.9)$$

Definindo-se as variáveis de estado x_1 e x_2 como:

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1 \\ x_2 &= h_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

e as variáveis de saída y_1 e y_2 como:

$$\begin{aligned} y_1 = h_1 = x_1 \\ y_2 = h_2 = x_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Então, as equações (4.8) e (4.9) podem ser escritas como:

$$\dot{h}_1 = -\frac{k_1}{A_1}h_1 + \frac{k_1}{A_1}h_2 + \frac{1}{A_1}u_1 \quad (4.12)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{k_1}{A_2}h_1 - \frac{k_1+k_2}{A_2}h_2 + \frac{1}{A_2}u_2 \quad (4.13)$$

Sob a representação matricial-vetorial padrão, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

que é a equação de estado, e

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

que é a equação de saída.

Sendo assim, os valores dos vetores e matrizes do espaço de estado são escritos como

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_1}{A_1} \\ \frac{k_1}{A_2} & -\frac{k_1+k_2}{A_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

sendo

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) \quad (4.18)$$

Na prática, os valores de k_1 e k_2 da matriz A são incertos, como já foi mencionado no começo desta seção, ou seja, tem-se apenas uma noção de que faixa de valores eles podem assumir.

4.2 Modelagem politópica

Um grande problema ao se trabalhar com sistema incertos é como tratar a incerteza na formulação final do problema, pois dependendo do tipo de incertezas, pode-se inserir mais restrição na busca de solução do problema (Trofino, 2000).

Para a planta em questão (figura 4.1) as incertezas estão presentes apenas na matriz A , conforme a equação 4.17. Uma alternativa seria descrever os possíveis valores que a matriz $A(\delta)$ (onde δ é o vetor dos parâmetros incertos) pode assumir através de uma combinação convexa dos valores extremos assumidos pelas incertezas (ver apêndice A.6). Sendo que

$$\delta \in B_\delta = \{\delta_i : |\delta_i| \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, q\} \quad (4.19)$$

onde B_δ representa um politopo com 2^q vértices, onde q é o número de incertezas no problema. Lembrando que um politopo é um conjunto convexo fechado, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices, ou por inequações matriciais (ver seção 2.3.5.2 do capítulo 2).

Este tipo de abordagem para descrever as incertezas é conhecido como abordagem politópica e será formalmente anunciada a seguir:

Definição 4.1: A classe de matrizes $A(\delta)$ com incertezas na forma politópica pode ser descrita pelo conjunto (Trofino, 2000)

$$A = \left\{ A : A = \sum_{i=1}^j q_i A_i, \quad \sum_{i=1}^j q_i = 1, \quad q_i \geq 0 \right\} \quad (4.20)$$

onde o conjunto A é convexo, fechado e as matrizes A_i são conhecidas.

4.3 Formulação LMI para o problema LQR

Esta seção apresenta o conceito do método de controle LQR robusto aplicado nesse trabalho. Será formulado o problema do LQR incerto na forma de LMI. Os conceitos utilizados serão aplicados na planta do sistema de nível linear para derivar um controlador LQR.

4.3.1 Controle LQR com ação integral

O regulador linear quadrático com ação integral, o LQI consiste no servomecanismo ótimo baseado na minimização do índice de desempenho quadrático (Ogata, 2003), dado por um processo modelado em equação de estados do tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \quad (4.21)$$

Em que a figura 4.2 mostra o diagrama de blocos do servomecanismo de ação integral.

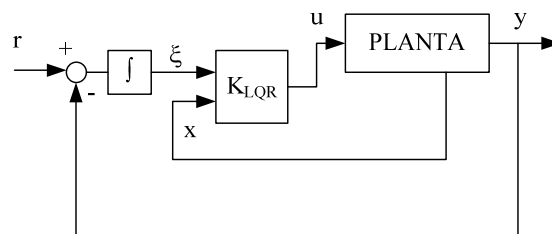


Figura 4.2 - Diagrama de blocos do controle LQI.

Da figura 4.2, são obtidas as seguintes equações:

$$\dot{\xi} = r - Cx, \quad (4.22)$$

$$u = K_i \xi - Kx \rightarrow u = -\begin{bmatrix} K & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

sendo

$$u = -\begin{bmatrix} K & -K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = -K_{LQR} \hat{x}. \quad (4.24)$$

De (Ogata, 2003) são obtidas as seguintes expressões:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4.25)$$

onde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Isto para que o índice de desempenho representado por:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{x}' Q \hat{x} + u' R u) dt \quad (4.27)$$

seja satisfeito.

4.3.2 O problema LQR - LMI

A formulação LMI para o LQR foi adaptada de (Feron, Balakrishnan, Boyd e Ghaoui, 1992). Dado o sistema apresentado em (4.18), o controlador LQR ótimo é obtido pelo uso do ganho de realimentação de estado K que minimize o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (\hat{x}' Q \hat{x} + u' R u) dt \quad (4.28)$$

onde Q é uma matriz semidefinida positiva e simétrica e R é uma matriz definida positiva e simétrica. O par (A, B) deve ser controlável. O problema LQR pode ser visto como uma minimização balanceada de uma combinação linear dos estados \hat{x} e a entrada de controle u . A matriz de peso Q estabelece quais estados devem ser controlados mais rigorosamente que outros. R balanceia a quantidade de ação do controle para ser aplicada dependendo do quão grande é o desvio do estado \hat{x}_i . Este balanceamento do custo de otimização restringe a magnitude do sinal de controle.

Aplicando-se o conceito de traço da matriz em ambos os lados na equação (4.28), tem-se

$$\text{Tr}(J) = \int_0^{\infty} \text{Tr}(\hat{x}' Q \hat{x} + u' R u) dt \quad (4.29)$$

Usando-se a técnica de realimentação de estados, cuja lei de controle é dada por (4.24), sendo K o ganho de realimentação de estados, chega-se a

$$J = \int_0^{\infty} \text{Tr}(\hat{x}' (Q + K'_{LQR} R K_{LQR}) \hat{x}) dt. \quad (4.30)$$

Utilizando-se o principio da associatividade do traço da matriz e considerando-se o sistema proposto invariante no tempo, tem-se

$$J = \text{Tr}(Q + K'_{LQR} R K_{LQR}) \text{Tr} \left(\int_0^{\infty} (\hat{x} \hat{x}') dt \right). \quad (4.31)$$

Baseado então no equacionamento matemático proposto por (Olalla et al., 2009) e (Ko et al., 2006). De (4.31), tem-se

$$J = \text{Tr}(Q + K' R K) \text{Tr}(P) \quad (4.32)$$

onde

$$P = \int_0^{\infty} (\hat{x} \hat{x}') dt \quad (4.33)$$

logo

$$J = \text{Tr}(QP + K'RKP) \quad (4.34)$$

Utilizando-se o conceito de desigualdade de Lyapunov, proposto por (Ko et al., 2006), segue-se

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}' + I < 0, \quad (4.35)$$

sendo

$$\tilde{A} = A - BK. \quad (4.36)$$

Substituindo-se (4.36) em (4.35), então

$$(A - BK)P + P(A - BK)' + I < 0. \quad (4.37)$$

No entanto, a desigualdade (4.37) não é linear porque a função objetivo envolve uma multiplicação entre as variáveis P e K. Todavia, quando isso acontecer, é possível realizar uma mudança de variável no intuito de linearizar a expressão desejada. Então, fazendo-se

$$Y = KP \rightarrow K = YP^{-1} \quad (4.38)$$

e substituindo-se em (4.37):

$$(AP - BY) + (AP - BY)' + I < 0, \quad (4.39)$$

logo

$$AP - BY + PA' - Y'B' + I < 0, \quad (4.40)$$

que é o conceito de desigualdade de Lyapunov segundo (Boyd, Feron e Balakrishnan, 1992) em malha fechada. Aplicando-se (4.38) em (4.34), tem-se

$$J = \text{Tr}(QP + K'RY) \quad (4.41)$$

Fazendo

$$K' = (P^{-1})'Y' = (P')^{-1}Y' = P^{-1}Y' \quad (4.42)$$

e substituindo em (4.41) tem-se

$$J = \text{Tr}(\mathbf{QP} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{R}\mathbf{Y}) \quad (4.43)$$

Usando-se o conceito de comutatividade e linearidade do traço da matriz, e fazendo $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{R}^{1/2}$, $\mathbf{a} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{R}^{1/2}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y}$ com a propriedade $\text{Tr}(\mathbf{ab}) = \text{Tr}(\mathbf{ba})$ tem-se que

$$J = \text{Tr}(\mathbf{QP}) + \text{Tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y}) \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow J = \text{Tr}(\mathbf{QP}) + \text{Tr}(\mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{R}^{1/2}) \quad (4.45)$$

O segundo termo da expressão (4.45) é não linear podendo, portanto ser substituído por uma segunda variável auxiliar \mathbf{X} , tal que deseja-se minimizar o traço de \mathbf{X} , em que

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{X}} \text{Tr}(\mathbf{X}) \\ & \text{sujeito a } \mathbf{X} - \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{R}^{1/2} \succ 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

que, por sua vez, pode ser decomposto utilizando-se o conceito de complemento de Schur segundo (Boyd et al., 1994) em (4.46)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{R}^{1/2}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}'\mathbf{R}^{1/2} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.47)$$

Deste modo, para uma formulação completa de resolução via LMI aplicada ao controle LQI, as equações (4.40), (4.41) e (4.45) são as principais expressões matemáticas para o processo de otimização. Sendo, portanto

$$\min_{\mathbf{P}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}} \text{Tr}(\mathbf{QP}) + \text{Tr}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \succ 0 \quad (4.48)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & R^{1/2}Y \\ Y'R^{1/2} & P \end{bmatrix} \succ 0, P \succ 0 \quad e \quad (4.49)$$

$$AP - BY + BA' - Y'B' + I \prec 0 \quad (4.50)$$

Obtidos os ganhos através das expressões (4.26), (4.48), (4.49) e (4.50), são obtidos os seguintes modelos em malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (4.51)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

As expressões (4.51) e (4.52) denotam o modelo em malha fechada da figura 4.2. O vetor r é a entrada de referência. Deste modo a matriz de transferência no modelo em malha fechada é

$$T(s) = C_c(sI - A_c)B_c = GK(I + GK)^{-1} \quad (4.53)$$

e

$$S(s) = I - T(s). \quad (4.54)$$

Em que $S(s)$ e $T(s)$ são respectivamente as matrizes de transferência de sensibilidade e de sensibilidade complementar (Bahram e Hassul, 1993).

A função de sensibilidade avalia quanto o modelo controlado é capaz de rejeitar distúrbios, que são perturbações de grandes amplitudes e de baixas frequência. Já a função de sensibilidade complementar avalia o quanto o modelo é eficaz na supressão de ruídos, que são perturbações de pequenas amplitudes e de altas frequências.

Sendo tais funções satisfatórias dentro da necessidade de projeto, é dito que o sistema é robusto. Para isso, é necessário que o modelo seja submetido à análise de incertezas, que podem ser paramétricas, com o uso de politópicos, e não paramétricas, com o uso de incertezas aditivas e multiplicativas. Para este caso avalia-se apenas as incertezas politópicas para levantar o nível de robustez do processo. O modo de

avaliação de robustez do modelo é dado na resposta em frequência. Em sistemas SISO, os diagramas de Bode e Nyquist são as ferramentas mais usadas para este tipo de análise. Para sistemas MIMO, é feita a decomposição em valores singulares. Para visualização de processos multivariáveis na frequência, basta usar a função *sigma* no Matlab, que é mostrado o comportamento do sistema na frequência.

4.4 Simulação e resultados

Para a planta da figura 4.1 as áreas das seções dos tanques são $A_1=A_2=5\text{m}^2$, segundo (Bachur, Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2010). Admite-se uma faixa de imprecisão de $0,15 \leq k_1 \leq 0,25$ e de $0,2 \leq k_2 \leq 0,3$, como apresentado também por (Bachur, Gonçalves, Palhares e Takahashi, 2010). Essas faixas de imprecisão podem ser tratadas como politopos. Portanto tais imprecisões são incorporadas ao processo de resolução via LMI. Uma das vantagens da otimização desse tipo de problema via desigualdade matricial linear está inclusão de incertezas paramétricas para obtenção do ganho. A estratégia de controle LQI visa à minimização do índice de desempenho mediante a escolha dos parâmetros de ponderação Q e R.

O tempo de simulação do processo é de 400 segundos. A altura de referência h_1 é escolhida de 0,2 m até o tempo $t=200\text{s}$. Em seguida, é reduzida para 0,15 m de $t=200\text{s}$ em diante. No mesmo instante, a altura de referência h_2 é escolhida de 0,1 m até o tempo $t=200\text{s}$, em seguida, é reduzida para 0,15 m do $t=200\text{s}$ em diante. As matrizes de ponderação escolhidas foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

cujos ganhos de realimentação de estado são

$$\mathbf{K}_{\text{LQR-LMI}} = \begin{bmatrix} 0.4584 & 0.0931 & -0.0316 & -0.0000 \\ 0.0931 & 0.3323 & 0.0000 & -0.0316 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

em que

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.4584 & 0.0931 \\ 0.0931 & 0.3323 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 0.0316 & 0 \\ 0 & 0.0316 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

conforme (4.24).

As respostas das saídas do processo são mostradas na Fig. 4.3. Percebe-se que o tempo de estabilização do processo é de 108 s. Foi acrescentada uma perturbação que varia de 1% a 3% tanto na saída como nos estados, de modo a simular um possível problema real. A Fig. 4.4 mostra o esforço de controle da variação de vazão nos tanques. A figura 4.5 mostra a curva de sensibilidade complementar explicada conforme 4.53 via decomposição em valores singulares (SVD). A curva na figura 4.5 indica que o modelo, simbolizado pela MTMF consegue obter uma margem de ganho infinita em relação ao modelo de malha aberta simbolizado na legenda por MTMA. A figura 4.6 mostra a curva de sensibilidade do processo no espaço da frequência em SVD. De acordo com (Bahram e Hassul 1993), a análise em SVD é usada para sistemas mono e multivariáveis, onde podem ser avaliadas a robustez e o desempenho de um determinado processo. O sistema em SVD é mais apropriado para processos multivariáveis, pois as curvas de bode não são boas ferramentas para análises desses sistemas. Observa-se que existe uma boa rejeição a distúrbios em relação aos modelos em malha aberta.

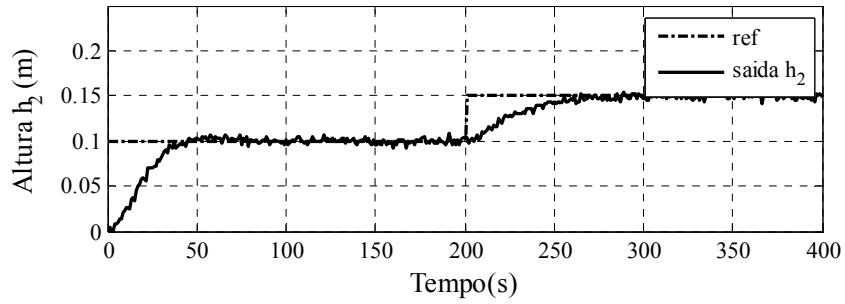
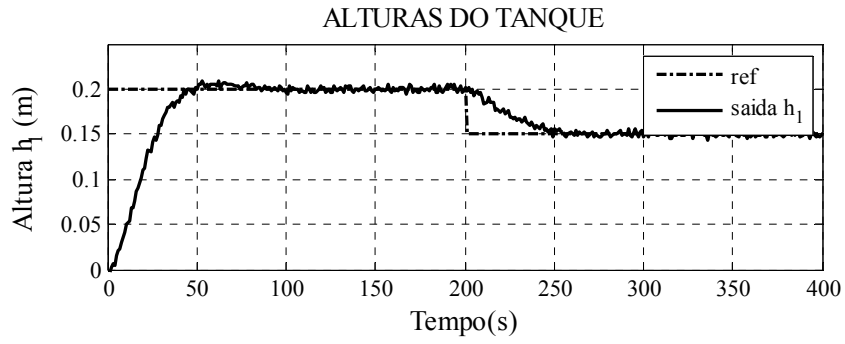


Figura 4.3 - Resposta de regime das curvas da variação de altura.

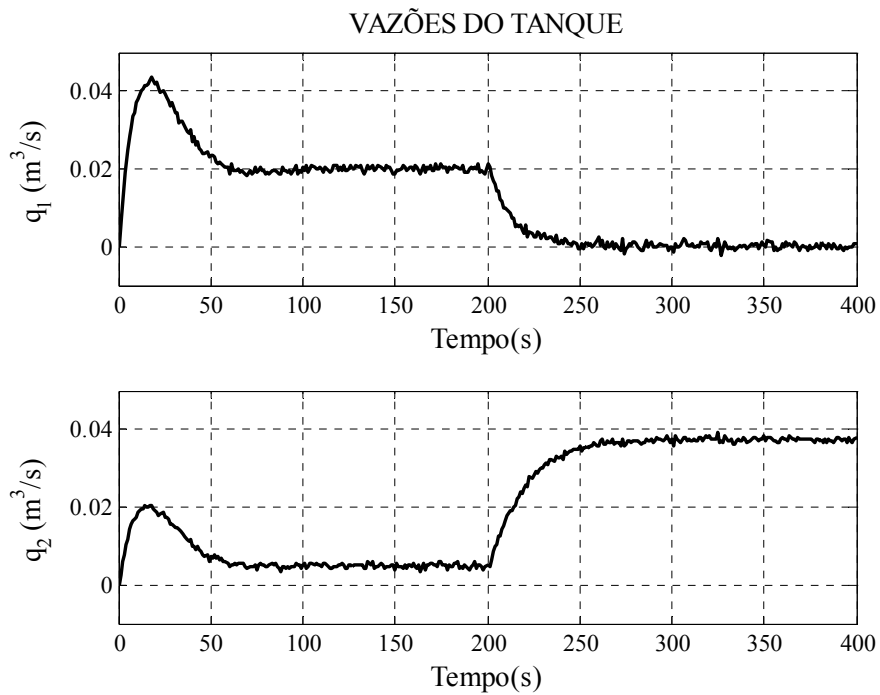


Figura 4.4 - Sinal de controle das vazões do tanque.

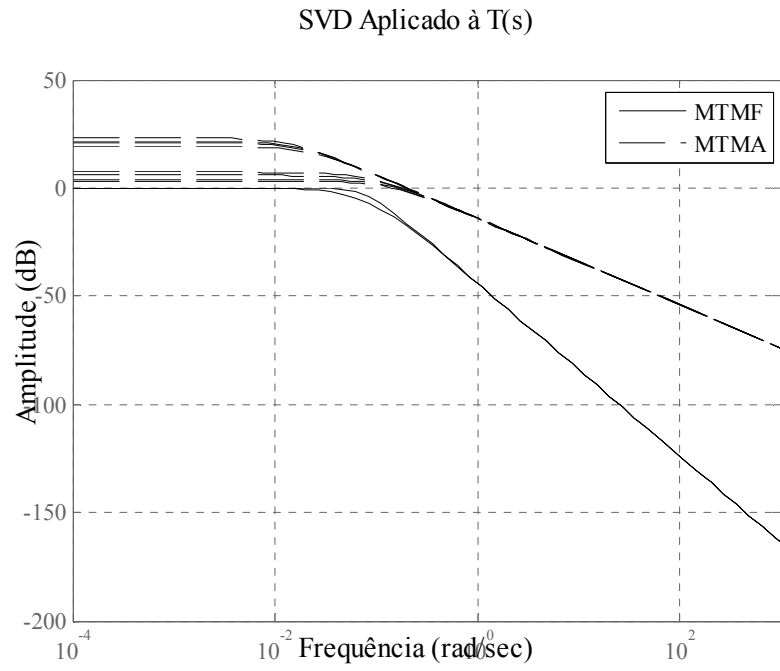


Figura 4.5 - Curva de Sensibilidade Complementar via decomposição de valores singulares – SVD.

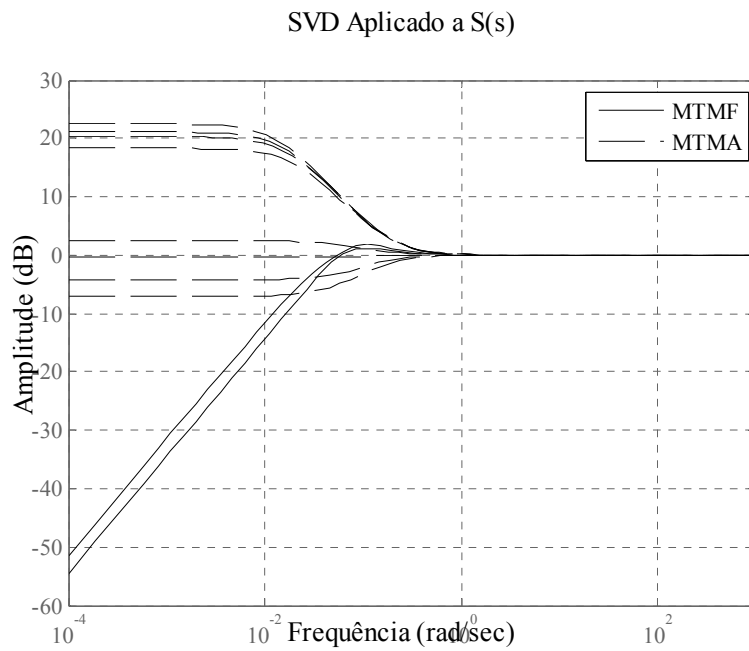


Figura 4.6 - Curva de Sensibilidade do processo via SVD

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se uma planta do tipo sistema de nível de líquido duplo linear (tanque duplo) no intuito de controlá-la levando em consideração as incertezas presentes nas válvulas de restrições do tanque. Foi escolhido um controlador do tipo LQR com ação integral ou simplesmente LQI, contudo, o conceito ótimo do LQI não leva em consideração as incertezas paramétricas existentes na planta do projeto. Neste caso, foi proposta a idéia de se implementar este controlador utilizando as técnicas LMIs, tornando-o num LQI robusto, cuja otimização por LMIs permitiu a adição de incertezas para a obtenção do ganho de realimentação de estado. Para a realização desta implementação buscou-se na literatura especializada sobre as técnicas LMIs, onde se estudou sobre a otimização convexa, base para o entendimento das LMIs na teoria de controle. A partir daí foi possível transformar o problema de minimização de uma função custo do LQI em um problema de otimização convexa no contexto das LMIs, onde a partir dessa nova formulação matemática LQI-LMI, o controlador implementado leva em consideração as incertezas presentes na planta em questão (sistema duplo de nível de líquido).

Observou-se também que, um dos grandes benefícios nas formulações por LMIs é que estender todos os resultados apresentados para sistemas incertos, com incertezas descritas por um polítopo, não geram nenhuma complexidade extra em termos de notação. Isto é, basta escrever as restrições dos vários problemas de otimização semidefinida, para todos os vértices de um polítopo.

Os resultados obtidos neste trabalho comprovaram que a estratégia de controle LQI via resolução LMI é eficaz como controle robusto. O controle LQI garante a otimalidade do controle, entretanto, não é garantida a robustez do processo quando os parâmetros são variáveis. Esta vantagem torna o controle LQI via LMI uma poderosa estratégia na otimização de soluções de controle robusto. E, também, os pacotes computacionais Yalmip e Sedumi são ferramentas bastante eficazes para o processamento desses cálculos no software computacional Matlab.

APÊNDICE A

Resultados complementares

A.1 Funções quadráticas

Uma função quadrática é toda função $v : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ do tipo:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (\text{A.1})$$

onde x_i, x_j são duas componentes quaisquer da variável vetorial x e a_{ij} são constantes.

A condição $a_{ij} = a_{ji}$ é simplesmente uma normalização e pode ser feita sem perda de generalidade.

Exemplo A.1: Seja

$$v(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_1 + 10x_2^2, \quad (\text{A.2})$$

esta expressão pode ser reescrita como

$$v(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2, \quad (\text{A.3})$$

ou ainda, como

$$v(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 10x_2^2. \quad (\text{A.4})$$

Assim, toda forma quadrática pode ser representada em termos matriciais através de uma matriz simétrica cujos elementos são as constantes a_{ij} . Ainda para o exemplo A.1, tem-se que

$$v(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x'Ax, \quad (\text{A.5})$$

e, que a matriz A é simétrica. A mesma normalização em (A.5) pode ser feita em termos matriciais. Retornando ao exemplo A.1, seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, A = (B + B')/2, \tilde{A} = (B - B')/2 \quad (\text{A.6})$$

pode-se verificar que $B = A + \tilde{A}$. Como $x' B' x$ é um escalar real tem-se que $x' B' x = (x' B' x)' = x' B x$. Logo tem-se que

$$x' B x = x' A x + x' \tilde{A} x = x' A x + (x' B x - x' B' x)/2 = x' A x \quad (\text{A.7})$$

Em situações particulares, tipicamente quando é preciso representar um sistema por sua função de transferência, pode-se precisar trabalhar com formas quadráticas complexas. Quando a_{ij} são constantes complexas, basta trocar a relação $a_{ij} = a_{ji}$ por $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, onde \bar{a}_{ji} é o conjugado complexo de a_{ij} . Nesse caso a matriz A recebe o nome de hermitiana e satisfaz a relação $A = A' = A^*$ onde o símbolo A^* representa o transposto conjugado complexo de A .

Pode-se mostrar ainda as seguintes propriedades para as formas quadráticas:

i. Toda matriz real simétrica possui autovalores reais;

ii. A função $v(x) = x' P x$ é positiva para todo $x \neq 0$ se, e somente se, os autovalores da matriz P são todos positivos. Nesse caso diz-se que $v(x)$ é uma função definida positiva (notação: $v(x) > 0$), e P é uma matriz simétrica definida positiva (notação: $P \succ 0$). A notação \succ é usada no contexto usual para sinais de matrizes, isto é, $P \succ 0$ é dita ser definida positiva sendo todos os seus autovalores positivos. Adota-se notação semelhante para: matriz definida negativa ($P \prec 0$) tendo todos os seus autovalores negativos; matriz semidefinida positiva ($P \succeq 0$) sendo todos os seus autovalores não-negativos; matriz semidefinida negativa ($P \preceq 0$) sendo todos os seus autovalores não-positivos.

iii. Uma matriz P é definida positiva ($P \succ 0$) se, e somente se, os determinantes menores principais de P forem positivos. Esse resultado é conhecido como critério de Sylvester.

iv. A função $v(x) = x' P x$ é uma medida de distância do ponto x à origem quando P é definida positiva. Por exemplo, para a seguinte função definida positiva:

$$v(x) = x' P x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

tem-se que

$$v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 \quad (\text{A.9})$$

v. Todas as propriedades anteriores continuam válidas se x e P forem complexos e troca-se x', P' por x^*, P^* . Em particular a matriz P deve ser hermitiana, isto é, $P = P^*$.

A.2 Estabilidade quadrática de Lyapunov – a primeira descrição por LMIs na teoria de controle

Segundo o *The MacTutor History of Mathematics archive*, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) foi colega e contemporâneo de Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) na Universidade de São Petersburgo, tendo ambos trabalhado com Pafnuti Lvovich Tchebychev (1821-1894). Lyapunov apresentou sua tese de doutorado *The general problem of the stability of motion* em 1892 à Universidade de Moscou. O chamado teorema de Lyapunov (Lyapunov, 1992), adaptado para o caso de sistemas lineares contínuos no tempo, poderia ser formulado diretamente em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, de Linear Matrix Inequalities).

A estabilidade de um ponto de equilíbrio é usualmente caracterizada pela teoria de Lyapunov. Intuitivamente, a estabilidade de um sistema dinâmico está relacionada com a função “energia” deste sistema. Se a função energia do sistema é sempre não negativa e decrescente com relação ao tempo, as trajetórias do sistema tendem à origem, que, sem perda de generalidade, pode ser considerado como sendo o ponto de equilíbrio de interesse do sistema dinâmico (Trofino, 2000).

Fazendo uma análise mais genérica, a teoria de Lyapunov garante, para sistemas invariantes no tempo, que o ponto de equilíbrio é estável se existe uma função escalar (tipo energia) $v(x)$ tal que (Trofino, 2000):

$$\begin{aligned}
&\bullet v(x) > 0, \forall x \neq 0 \in B_x, \text{ e} \\
&\bullet \dot{v}(x) < 0, \forall x \neq 0 \in B_x
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

onde B_x caracteriza uma região na vizinhança do ponto de equilíbrio (origem). A seguir será apresentado um exemplo de aplicação para as condições de estabilidade de Lyapunov apresentadas em (A.10).

Exemplo A.2: *Análise de estabilidade de um sistema LTI.* Seja o seguinte sistema linear invariante no tempo (Trofino, 2000)

$$\dot{x} = Ax \tag{A.11}$$

onde x representa os estados do sistema e A é uma matriz constante.

Problema: utilizando a noção de estabilidade quadrática, obter uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (A.11).

Solução: para se determinar a estabilidade quadrática de um sistema linear invariante no tempo, deve-se procurar uma função de Lyapunov $v(x) > 0$ tal que $\dot{v}(x) < 0$. Portanto, seja uma função quadrática, $v(x) = x'Px$, e o sistema (A.11). A expressão de $\dot{v}(x)$ é dada por:

$$\dot{v} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x \tag{A.12}$$

Então, pode-se escrever que:

$$v(x) > 0 \Leftrightarrow \exists P = P' \succ 0 \text{ e } \dot{v}(x) < 0 \Leftrightarrow (A'P + PA) \prec 0. \tag{A.13}$$

Logo, uma condição necessária e suficiente para este sistema ser globalmente quadraticamente estável é:

$$\exists P = P' \succ 0 : A'P + PA \prec 0 \tag{A.14}$$

A relação (A.14) é conhecida na literatura como inequação de Lyapunov para sistemas lineares, sendo considerada, portanto, a primeira descrição por LMIs na teoria de controle.

Pode-se agora formalizar o teorema de Lyapunov para sistemas lineares contínuos no tempo:

Teorema A.1 (Lyapunov): As trajetórias de $\dot{x} = Ax$ convergem para a origem se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que $A'P + PA \prec 0$. Nesse caso, diz-se que o sistema (ou simplesmente, a matriz A) é assintoticamente estável no sentido de Lyapunov (Lyapunov, 1992).

As LMIs do teorema A.1 podem ser obtidas diretamente a partir da função quadrática $v(x) = x'Px$. Lembrando que a desigualdade $A'P + PA \prec 0$ exige que a matriz simétrica $A'P + PA$ seja definida negativa, assim como $P \succ 0$ deve ser simétrica e definida positiva, e, uma matriz $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é definida positiva se

$$x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{A.15})$$

o que implica que todos os autovalores (ou que todos os menores principais líderes) de P devem ser positivos. Assim, $A'P + PA$ é definida negativa se $-(A'P + PA) \succ 0$. Ver por exemplo (Horn and Johnson, 1985) para outras propriedades de formas quadráticas e de matrizes definidas positivas.

A seguir será apresentado outro exemplo de aplicação para as condições de estabilidade de Lyapunov, portanto utilizando o teorema A.1, sendo fornecido um valor para a matriz A .

Exemplo A.3: Determinar analiticamente a estabilidade do sistema LTI (A.15), utilizando as condições propostas no exemplo A.2 (Trofino, 2000):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Solução: seja a função de Lyapunov: $v(x) = x'Px$ com P dado por:

$$P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

o sistema (A.16) é quadraticamente estável se:

- $\exists a > 0, b > 0$ tais que $A'P + PA < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

- Isto é, $\exists P = P' > 0, \forall a, b > 0$ tal que $A'P + PA < 0$, assegurando assim, a estabilidade do sistema. Logo, o sistema LTI (A.16) é quadraticamente estável.

A.3 A primeira menção explícita de uma LMI

Fazendo um breve histórico do desenvolvimento das LMIs, vários resultados em engenharia poderiam ser citados (Boyd et al., 1994). Existem aplicações relacionadas com o método de Lyapunov (Lur'e, Postnikov) em problemas práticos como a estabilidade de um sistema de controle com não-linearidades no atuador, por volta do ano de 1940; o lema de positividade real (Yakubovich, Popov, Kalman), relação com passividade, teorema do pequeno ganho, critério linear quadrático, solução por meio de equações algébricas de Riccati, em 1960. A primeira menção explícita de uma LMI é atribuída a J. C. Willems, (Willems, 1971), em um artigo que apresenta a LMI abaixo

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + Q & PB + C' \\ B'P + C & R \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (\text{A.19})$$

que pode ser resolvida (P é a variável, e as matrizes A, B, C, Q e R são conhecidas) estudando-se as soluções simétricas da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - (PB + C')R^{-1}(B'P + C) + Q = 0 \quad (\text{A.20})$$

Embora existam diversas LMIs que podem ser resolvidas a partir de equações, nem sempre é este o caso. Por exemplo, dadas as matrizes A_1 e A_2 , encontrar P tal que

$$P > 0, \quad A_1'P + PA_1 < 0, \quad A_2'P + PA_2 < 0 \quad (\text{A.21})$$

é um problema que não possui solução explícita. No entanto, trata-se de um problema convexo, que pode ser resolvido numericamente de maneira simples, com convergência garantida (Oliveira et al., 2008).

A.4 Forma afim e forma matricial de uma LMI

Normalmente uma LMI não aparece na forma afim, mas sim na forma matricial como a inequação de Lyapunov (A.14). Para reescrever esta inequação na forma afim, busca-se encontrar os valores de F_i tal que (Trofino, 2000):

$$F(P) = A'P + PA = F_0 + \sum x_i F_i \quad \text{com } x_i = \{P_{kj}, \dots, P_{nn}\} \quad (\text{A.22})$$

No exemplo a seguir, a transposição da forma matricial para a forma afim é apenas uma questão de notação. Entretanto, esta transformação não é necessária, já que a forma matricial é a forma padrão de entrada dos pacotes computacionais existentes.

Exemplo A.4: Seja

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x \quad (\text{A.23})$$

pela condição de estabilidade de Lyapunov este sistema será estável se $\exists P \succ 0$ tal que

$$v(x) = x'Px > 0 \quad \text{com } P \succ 0 \quad \text{e} \quad \dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x < 0, \quad \text{onde } P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_4 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $x_1 = P_1$, $x_2 = P_2$, $x_3 = P_2'$, $x_4 = P_4$, em (A.22) tem-se que

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}' P + P \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = F_0 + P_1 F_1 + P_2 (F_2 + F_3) + P_4 F_4 \quad (\text{A.24})$$

que implica em

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ F_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, & F_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A.5 Exemplos de LMIs

Uma LMI guarda grande similaridade com uma desigualdade linear, típica restrição imposta na programação linear:

$$a^T x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m \leq b, \quad b, a_i \in \mathfrak{R}. \quad (\text{A.26})$$

De fato, um conjunto de restrições lineares da programação linear é uma LMI, considerando:

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$
$$F(x) \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \text{diag} \left\{ a_i^T x - b_i \right\} \quad (\text{A.27})$$

sendo que $\text{diag}(\cdot)$ denota uma matriz diagonal.

O caso escalar é também uma forma simples de LMI:

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad F(x) = x - y \geq 0 \quad (\text{A.28})$$

Outro exemplo simples de uma LMI é a descrição do sinal de uma matriz simétrica com elementos lineares atendendo a desigualdade:

$$F(X) = X \succeq \varepsilon I, \quad \text{com} \quad \varepsilon > 0 \quad (\text{A.29})$$

isto é, P é definida positiva. Neste caso, os espaços de entrada e saída são cones de matrizes simétricas definidas positivas, em outras palavras, a “variável” é uma matriz.

A.6 Convexidade – uma propriedade das LMIs para solucionar problemas com incertezas

De acordo com a seção 2.3.3 do capítulo 2, um conjunto C é convexo se $\forall x, y \in \mathfrak{R}$ e todo θ com $0 \leq \theta \leq 1$ tem-se

$$\theta x + (1 - \theta)y \in C \quad (\text{A.30})$$

Ou seja, um conjunto C será convexo se para quaisquer dois pontos x e $y \in C$ o segmento de reta unindo estes pontos também pertença a este conjunto. Pela teoria dos conjuntos tem-se que todo conjunto afim será sempre convexo. Então tem-se que o conjunto solução de uma LMI sendo afim é também convexo. Uma LMI será também convexa nos dados se as matrizes F_i são afins em δ , onde δ representa o vetor de parâmetros incertos (Trofino, 2000).

A característica da convexidade é uma das mais importantes propriedades das LMIs, pois facilita, principalmente, a busca de solução para sistemas incertos. Por exemplo, considera-se agora que a matriz A na equação (A.23) dependa de δ , ou seja,

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 + \delta & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

A estabilidade deste sistema será analisada, considerando que as incertezas estejam descritas na forma politópica, para tal considera-se que $\delta \in B_\delta = \{\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}\}$, onde a região politópica B_δ representa os valores admissíveis da incerteza. Para verificar a estabilidade deste sistema é necessário testar a condição de Lyapunov (A.14) para todos os valores de $\delta \in B_\delta$, ou seja, encontrar uma matriz positiva definida P tal que

$$\forall \delta \in B_\delta : \quad A(\delta)'P + PA(\delta) \prec 0 \quad (\text{A.32})$$

Este, porém, é um problema de dimensão infinita, de difícil solução. Mas como a matriz $A(\delta)$ é afim em δ e aparece de forma linear na inequação de Lyapunov, pode-se pela propriedade de convexidade testar a condição acima apenas para os vértices da região B_δ . Ou seja, se existe uma matriz $P \succ 0$ tal que

$$\begin{aligned} A(\delta_{\min})'P + PA(\delta_{\min}) &\prec 0 \\ A(\delta_{\max})'P + PA(\delta_{\max}) &\prec 0 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

é garantido, assim, que para toda a região B_δ o sistema será estável e $v(x) = x'Px$ será uma função de Lyapunov para o sistema.

A.7 Formulação explícita de uma LMI

As LMIs (A.14) associadas ao teorema de Lyapunov (teorema A.1) podem ser resolvidas explicitamente. Para isso, escolhe-se uma matriz simétrica definida positiva Q arbitrária (a escolha mais simples é $Q = I$) e resolve-se a equação linear (Oliveira et al., 2008)

$$A^T P + PA + Q = 0. \quad (\text{A.34})$$

A solução P é definida positiva se e somente se o sistema for estável. Com base nessa afirmação pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema A.2: O sistema linear invariante

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{A.35})$$

é exponencialmente estável, isto é, os autovalores (λ) da matriz A possuem parte real estritamente negativa, se, e somente se, a solução P simétrica da equação matricial:

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (\text{A.36})$$

for positiva definida, onde Q é uma matriz positiva definida dada que pode ser arbitrariamente escolhida.

Exemplo A.5: O sistema $\dot{x} = Ax$ com (Trofino et al., 2003)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

é estável pois $\lambda(A) = \{-1, -1\}$. Logo, deve-se encontrar uma solução $P \succ 0$ para $A^T P + PA + Q = 0$, sendo $Q \succ 0$ uma matriz positiva definida que pode ser escolhida de forma arbitrária. Escolhendo Q igual à identidade e P uma matriz simétrica genérica tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

que, aplicando em $A^T P + PA + Q = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{A.39})$$

que resulta em

$$\begin{bmatrix} -P_2 & -P_3 \\ P_1 - 2P_2 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2 & P_1 - 2P_2 \\ P_3 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.40})$$

E, portanto,

$$\begin{cases} -2P_2 + 1 = 0 \\ -P_3 + P_1 - 2P_2 = 0 \\ 2P_2 - 4P_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = 1/2 \\ P_3 = 1/2 \\ P_1 = 3/2 \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{cases} \text{Menores principais :} \\ P_1 = 3/2 > 0 \\ \det(P) = 3/2 \times 1/2 - (1/2)^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Logo $P \succ 0$, pois seus menores principais são positivos, e, portanto o sistema é exponencialmente estável.

A solução da equação de Lyapunov pode também ser obtida por meio de um procedimento de otimização convexa envolvendo LMIs. Definindo $\text{Tr}(P)$ como o traço da matriz P (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de P), dadas as matrizes A e $Q = Q' \succ 0$, tem-se (Oliveira et al., 2008)

$$\begin{aligned} & \min_P \text{Tr}(P) \\ & \text{sujeito a } P \succ 0, \quad A'P + PA + Q \prec 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

A minimização do traço leva a solução para o mais próximo possível da igualdade (dentro da precisão numérica do solver de LMIs). Uma solução definida positiva P existe sempre que A for assintoticamente estável. O $\text{Tr}(P)$ é uma função linear dos elementos da matriz P e, portanto, o problema é convexo (minimização de uma função objetivo linear com restrições que definem um conjunto convexo). Usando a interface Yalmip (Löfberg, 2004) que, dentre outros problemas de otimização envolvendo

programação semidefinida, aplica-se também à programação de LMIs, pode-se resolver o problema de otimização (A.43) no Matlab.

A.8 Ferramentas para a formulação LMI em problemas de controle

Nem todo resultado da teoria de controle aparece diretamente na forma de uma LMI, como a equação de Lyapunov. Mas algumas ferramentas da álgebra matricial ajudam a transpor estes resultados para uma formulação LMI (Trofino, 2000). Algumas ferramentas básicas, envolvendo matrizes, para a manipulação de LMIs podem ser encontradas em diversos livros e artigos, como por exemplo, (Boyd et al., 1994), (Gahinet et al., 1995), (Skelton et al., 1998), (Zhou et al., 1996).

A.8.1 Mudança de variáveis

Muitos problemas de controle podem ser representados na forma de um conjunto de desigualdades matriciais não lineares, isto é, as desigualdades são não lineares nas variáveis matriciais procuradas. Contudo, definindo novas variáveis é possível linearizar as desigualdades não lineares, gerando assim, uma possibilidade de solucionar esses problemas pelo método LMI.

Exemplo A.6: *Problema de síntese de controle com realimentação de estados.* Seja o problema de encontrar uma matriz $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que a matriz $A + BF \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tenha todos os seus autovalores no semiplano esquerdo complexo. Pela teoria das equações de Lyapunov (ver Zhou et al., 1996), isto é equivalente a encontrar uma matriz F e uma matriz definida positiva $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que assegure a seguinte desigualdade

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) \prec 0 \quad (\text{A.44})$$

ou

$$A^T P + PA + F^T B^T P + PBF \prec 0 \quad (\text{A.45})$$

Este problema não está na forma LMI devido os termos que contém o produto de F e P. Se (A.45) for multiplicado em ambos os lados por $Q := P^{-1}$ (que não muda a definição da expressão desde que $\text{posto}(P) = \text{posto}(Q) = n$) obtém-se

$$P^{-1}A^T P P^{-1} + P^{-1}P A P^{-1} + P^{-1}F^T B^T P P^{-1} + P^{-1}P B F P^{-1} \prec 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\Rightarrow P^{-1}A^T + A P^{-1} + P^{-1}F^T B^T + B F P^{-1} \prec 0 \quad (\text{A.47})$$

$$\Rightarrow Q A^T + A Q + Q F^T B^T + B F Q \prec 0 \quad (\text{A.48})$$

A expressão (A.48) é uma nova desigualdade matricial nas variáveis $Q \succ 0$ e F, mas ela ainda é não linear. Para retificar isto, será definida uma segunda variável $L = FQ$. A variável Q é simétrica e, portanto, $Q = Q^T$. Aplicando a transposta de uma matriz e multiplicando por B^T em ambos os lados de $L = FQ$ tem-se que $L^T B^T = Q F^T B^T$, que, substituindo em (A.48), resulta em

$$Q A^T + A Q + L^T B^T + B L \prec 0 \quad (\text{A.49})$$

A desigualdade (A.49) é um problema de factibilidade na forma LMI nas novas variáveis $Q \succ 0$ e $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Uma vez que esta LMI é solucionada pode-se recuperar a matriz de realimentação de estado com $F = LQ^{-1}$ e a variável de Lyapunov com $P = Q^{-1}$. Portanto fazendo uma mudança de variáveis pode-se obter uma LMI a partir de uma desigualdade matricial não linear.

A.9 LMIs em síntese de controladores

A síntese de controladores é uma tarefa bastante complexa por envolver um grande número de variáveis, como característica da planta ou sistema a ser controlado (linear, não linear, com incertezas), restrições nas variáveis de entrada e saída, comportamento desejado (regulador, “tracking”), desempenho (tempo de resposta, rejeição de perturbações), etc.

As LMIs também podem ser utilizadas na solução de problemas de síntese de controladores, isto é, na busca por uma lei de controle que estabilize assintoticamente um sistema dinâmico (Oliveira et al., 2008)

A.9.1 Realimentação de estados

Seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{A.50})$$

O problema de estabilização pode ser assim formulado: determinar uma matriz $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que a lei de controle linear

$$u = Kx \quad (\text{A.51})$$

estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (\text{A.52})$$

Para sistemas precisamente conhecidos, ganhos de realimentação de estados que estabilizam o sistema podem ser calculados por procedimentos de alocação de autovalores, impondo que todos tenham parte real negativa. No contexto das LMIs, para a determinação de um ganho K que estabilize o sistema, os passos são (Oliveira et al., 2008):

- escrever as condições de estabilidade para o sistema em malha fechada;
- aplicar as equivalências e mudanças de variáveis que linearizem o problema, transformando-os em LMIs. Às vezes se faz necessária a aplicação do complemento de Schur.

O sistema $(A + BK)$ é estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov $P = P' \succ 0$ tal que

$$(A + BK)'P + P(A + BK) \prec 0 \quad (\text{A.53})$$

Por congruência, tem-se

$$P^{-1} \left((A + BK)' P + P(A + BK) \right) P^{-1} = P^{-1} A' + A P^{-1} + P^{-1} K' B' + B K P^{-1} \prec 0 \quad (\text{A.54})$$

e, com a mudança de variáveis $W = P^{-1}$, $Z = KW$ chega-se à LMI

$$AW + WA' + BZ + Z'B' \prec 0 \quad (\text{A.55})$$

A condição de síntese de um ganho de realimentação de estados em termos de LMIs pode ser formulada como o teorema a seguir

Teorema A.3: Existe K tal que $(A + BK)$ é estável se e somente se existirem $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que

$$W \succ 0, \quad AW + WA' + BZ + Z'B' \prec 0 \quad (\text{A.56})$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por $K = ZW^{-1}$.

Prova: Com $W \succ 0$ e Z dados, a LMI acima pode ser reescrita

$$(A + BZW^{-1})W + W(A + BZW^{-1})' \prec 0 \Leftrightarrow (A + BK)W + W(A + BK)' \prec 0 \quad (\text{A.57})$$

$$\Leftrightarrow W^{-1} \left((A + BK)W + W(A + BK)' \right) W^{-1} \prec 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\Leftrightarrow (A + BK)' P + P(A + BK) \prec 0, \quad P = W^{-1}, \quad K = ZW^{-1} \quad (\text{A.59})$$

Com o teorema A.3, a busca conjunta do ganho K estabilizante e da matriz P de Lyapunov foi transformada em um problema convexo. Esse resultado, formulado como um teste de factibilidade de LMIs e publicado em (Bernussou et al., 1989), abriu caminho para que inúmeros problemas de controle e de filtragem para sistemas dinâmicos pudessem ser convertidos em problemas convexos.

A.10 Prova do complemento de Schur

Supondo que

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.60})$$

e definindo

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

então

$$F(u, v) > 0 \quad \forall \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.62})$$

Primeiro considera-se $u = 0$. Então

$$F(0, v) = v^T R(x) v, \quad \forall v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad R(x) > 0.$$

Depois considera-se que

$$v = -R(x)^{-1} S(x)^T u \quad \text{com} \quad u \neq 0.$$

Então

$$\begin{aligned} F(u, v) &= u^T \left(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \right) u > 0, \quad \forall u \neq 0 \\ &\Rightarrow Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad R(x) > 0 \tag{A.63}$$

com $F(u, v)$ definido em (A.61).

Fixando u e otimizando sobre v :

$$\nabla_v F^T = 2Rv + 2S^T u = 0 \tag{A.64}$$

Desde que $R > 0$, (A.64) fornece um extremo único $v = -R^{-1}S^T u$. Substituindo em (A.61) tem-se que $F(u) = u^T \left(Q - SR^{-1}S^T \right) u$. Para $\left(Q - SR^{-1}S^T \right) > 0$ o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Assim, o mínimo de $F(u, v)$ ocorre em $(0, 0)$ e igual a zero. Portanto, $F(u, v)$ é definido positivo.

A.11 Mínimo global e local

Definição A.1 (otimalidade global e local) Seja \wp um subconjunto de um espaço normalizado \aleph . Um elemento $x_0 \in \wp$ é considerado uma solução ótima local de $f : \wp \rightarrow \Re$ se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \tag{A.65}$$

para todo $x \in \wp$ com $\|x - x_0\| < \varepsilon$. O elemento será chamado de solução ótima global se (A.65) valer para todo $x \in \wp$.

Em palavras, $x_0 \in \wp$ é uma solução ótima local se existir uma vizinhança de x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todos os pontos factíveis próximos de x_0 . Segundo esta definição, uma solução ótima global  também ótima na vizinhança.

Proposição A.1 Seja $f : \wp \rightarrow \Re$ convexa. Toda solução ótima local de f é uma solução ótima global. Além disso, se f é estritamente convexa, então a solução ótima global  única.

Prova: Seja f convexa e considera-se que $x_0 \in \wp$ é uma solução ótima local de f . Então para todo $x \in \wp$ e $\alpha \in (0, 1)$ suficientemente pequeno,

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) = f((1 - \alpha)x_0 + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(x) \tag{A.66}$$

Isto implica que

$$0 \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \tag{A.67}$$

ou $f(x_0) \leq f(x)$. Portanto, x_0  uma solução ótima global de f . Se f é estritamente convexa, então a segunda desigualdade em (A.66)  estrita tal que (A.67) torna-se estrita para todo $x \in \wp$. Portanto, x_0 será única.

APÊNDICE B

Pacotes Yalmip e Sedumi no Matlab

Introdução

Neste apêndice serão apresentados os pacotes que foram utilizados na resolução das LMIs. Inicialmente será definido cada pacote com descrição de suas características e principais aplicações; em seguida será discutida a construção de três algoritmos (passo a passo) para a solução de alguns problemas conhecidos em controle utilizando os pacotes Yalmip e Sedumi no sentido de fornecer uma compreensão geral sobre as linhas de textos bem como as principais funções utilizadas pelos pacotes para solucionar as LMIs ou problemas envolvendo LMIs.

B.1 Características dos pacotes Yalmip e Sedumi

• Yalmip

Esse pacote (toolbox) permite que problemas envolvendo programação matemática sejam representados de maneira mais natural no Matlab. Ele pode ser usado em diversas situações. Por exemplo: em problemas de programação linear, programação inteira e mista, problemas de programação semidefinida e em desigualdades matriciais bilineares. Uma das grandes vantagens desse pacote é que ele apresenta suporte para vários solvers (resolvedores). Por exemplo, esse pacote pode resolver LMIs com o LMILab (solver do LMI control toolbox) ou com o Sedumi. Uma lista completa com todos os solvers que esse pacote suporta pode ser encontrada no arquivo ‘yalmip.htm’ que está dentro da pasta yalmip (Assunção e Teixeira, 2001).

• Sedumi

É um pacote de otimização restrito a cones de matrizes simétricas desenvolvido por Jos Sturm (Sturm, 1999). Esse pacote é um solver para problemas de programação semidefinida. Nesse trabalho ele será usado exclusivamente para a solução de LMIs. Atualmente os dois solvers mais usados na literatura especializada são o LMILab e o Sedumi. O Yalmip funciona mais rápido com o Sedumi, daí a motivação

para usar esse pacote. O LMILab possui um algoritmo baseado no método de pontos interiores, e a sua complexidade é dada por K^3L , já o Sedumi usa uma técnica de otimização sobre cones homogêneos duais, e a sua complexidade é dada por: $K^2L^{2.5} + L^{3.5}$, sendo K o número de variáveis escalares e L o número de linhas usadas nas LMIs. Assim, dependendo do problema um solver será mais rápido que o outro. Atualmente é comum encontrar na literatura especializada, trabalhos em que o autor compara as soluções obtidas por esses dois solvers (Assunção e Teixeira, 2001).

B.2 Exemplos de aplicação de LMIs utilizando os pacotes Yalmip e Sedumi

Agora serão apresentados alguns comandos do pacote Yalmip, necessários para a solução de LMIs. O exemplos B.1 e B.2 tratam do critério de estabilidade de Lyapunov, onde serão utilizados dois algoritmos para determinar uma matriz P que garanta a estabilidade de um sistema autônomo. O primeiro algoritmo trabalha apenas em cima das LMIs fornecidas pelo problema obtendo os resíduos das restrições do problema de otimização ‘Primal’ e ‘Dual’, nesse algoritmo é fornecida a matriz A e a dimensão da matriz P. No segundo algoritmo a solução da equação de Lyapunov é obtida por meio de um procedimento de otimização, definindo o traço da matriz P como uma função objetiva a ser resolvida. O exemplo B.3 apresenta um algoritmo para a solução de um problema de projeto de controlador usando realimentação de estados.

Exemplo B.1: O sistema autônomo

$$\dot{x} = Ax \tag{B.1}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

é exponencialmente estável, onde, com uma solução

$$P = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

tem-se que as seguintes LMIs são satisfeitas

$$\left. \begin{array}{l} P > 0, \\ A'P + PA < 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.4})$$

Um algoritmo para a verificação da estabilidade do sistema (B.1) no matlab via Yalmip e Sedumi pode ser escrito da seguinte maneira (Assunção e Teixeira, 2001):

ALGORITMO 1

- 1) $A = [0 \ 1; -1 \ -2];$
- 2) $P = \text{sdpvar}(2, 2);$
- 3) $\text{Restr} = \text{set}(P > 0) + \text{set}(A'*P + P*A < 0);$
- 4) $\text{solvesdp}(\text{Restr}, []);$
- 5) $[r, d] = \text{checkset}(\text{Restr});$
- 6) $\text{if } \text{sum}(r < 0) == 0$
- 7) $\text{disp}(\text{'Sistema estável'})$
- 8) $P_feasible = \text{double}(P);$
- 9) else
- 10) $\text{disp}(\text{'Sistema instável'})$
- 11) end

COMENTÁRIOS SOBRE AS LINHAS DE COMANDOS

Linha 1: declaração da matriz A.

Linha 2: nesse caso, a única variável do problema é a matriz P, que deverá ser encontrada pelo solver. Para definir uma variável no Yalmip usa-se o comando `sdpvar`. Esse comando tem os seguintes argumentos:

`sdpvar(n, m, 'field', 'type')`, onde:

n : número de linhas da matriz;

m : número de colunas da matriz;

field = {'real', 'complex'} : diz se a matriz variável é real ou se assume números complexos;

type = {'symmetric', 'full', 'hermitian', 'toeplitz', 'hankel', 'skew'}: diz se a matriz variável é simétrica, completa, ...

Os argumentos field e type foram omitidos no exemplo. Na verdade, esses argumentos são muito pouco usados. Por exemplo, se a matriz variável é quadrada, então o Yalmip entende que `sdpvar (2, 2)` é equivalente a: `sdpvar (2, 2, 'real', 'symmetric')`.

Linha 3: mostra como se deve armazenar as restrições do problema. Todas as restrições (LMIs) do problema devem ser escritas dentro do comando `set ()` e armazenadas dentro de uma variável, nesse caso a variável `Restr`. Essa variável é usada na linha 4 para resolver as LMIs.

Linha 4: a função `solvesdp` é o comando que diz para o Yalmip resolver as LMIs. O `solvesdp` é usado para resolver qualquer problema de otimização. Os argumentos dessa função são:

```
sol = solvesdp(Restr, obj, opts)
```

`sol`: estrutura contendo as principais informações sobre o processo de resolução das LMIs. Por exemplo, a estrutura mostra se o solver teve algum problema numérico durante os cálculos, se o solver encontrou uma solução factível, tempo gasto pelo Yalmip para montar as LMIs e o tempo gasto pelo solver para resolvê-las.

`Restr`: essa variável contém todas as LMIs do problema (ver linha 3).

`obj`: essa variável representa a função objetivo do problema. Por default o Yalmip entende que a variável `obj` é uma função de minimização, quando o problema for de maximização multiplica-se a variável `obj` pelo sinal negativo (`-obj`). Esse argumento também pode ser vazio (`[]`), como na linha 4 desse exemplo, como o objetivo do exemplo era apenas a obtenção de uma solução factível, então a variável `obj` é vazia (`obj = []`).

opts: essa variável contém uma estrutura do tipo sdpsettings. Com ela pode-se alterar o solver usado pelo solvesdp, para resolver o problema. O Yalmip suporta vários solvers, dessa maneira pode-se escolher qual solver será usado para resolver as LMIs. Quando o Sedumi está instalado, o Yalmip automaticamente o transforma no solver padrão. Contudo, o Yalmip também permite que as LMIs sejam resolvidas com o solver do matlab (LMILab). Para fazer isso basta usar os comandos: opts = sdpsettings e opts.solver = 'lmilab'. Esses comandos criam uma variável com a estrutura do tipo sdpsettings, essa estrutura permite escolher o solver, e alterar alguns dos seus parâmetros.

Linha 5: a função checkset obtém os resíduos das restrições do problema de otimização Primal e Dual.

Linhas 6: mostra como verificar se a solução obtida pelo solvesdp realmente satisfaz as restrições LMI através do laço if.

Linha 8: a função double converte a estrutura P (matriz variável Yalmip) em uma matriz numérica.

Resolvendo o exemplo proposto usando o algoritmo 1 obtém-se os seguintes valores:

$$P = \begin{bmatrix} 1,2633 & 0,3646 \\ 0,3646 & 0,5473 \end{bmatrix}, \quad \text{autovalores de } P = 0,3943 \text{ e } 1,4163 \quad (\text{B.5})$$

Os autovalores da matriz P são positivos, logo a matriz é definida positiva, além disso, os autovalores da matriz $A'P + PA$ são negativos (-1,4603 e -0,72904). Então, existe uma matriz P satisfazendo as condições de Lyapunov (B.4) e, portanto o sistema (B.1) é estável.

Exemplo B.2: O exemplo anterior, sobre a solução da equação de Lyapunov, pode também ser resolvido por meio de um procedimento de otimização envolvendo LMIs, onde se define $\text{Tr}(P)$ como o traço da matriz P, dadas as matrizes A e $Q = Q' > 0$, formulando assim, o seguinte problema (Oliveira et al., 2008)

$$\begin{aligned} & \min_P \text{Tr}(P) \\ & \text{sujeito a } P \succ 0, \quad A'P + PA + Q \prec 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Portanto, utilizando os dados do exemplo anterior, temos o seguinte algoritmo de solução via Yalmip e Sedumi (Assunção e Teixeira, 2001):

ALGORITMO 2:

- Primeiramente as matrizes que são dados do problema são criadas:

```
A = [0 1; -1 -2];
```

```
Q = eye(2);
```

- A variável que armazenará as LMIs do problema é inicializada:

```
LMIs = set([ ]);
```

O nome LMIs é opcional, pode-se usar qualquer nome aceito para a declaração de variáveis no matlab.

- Na sequência é feita a declaração da matriz de Lyapunov usando o comando `sdpvar`, que cria uma variável matricial simétrica de dimensão 2 x 2:

```
P = sdpvar(2, 2, 'symmetric');
```

- As LMIs a serem resolvidas são acrescentadas na variável LMIs:

```
LMIs = LMIs + set(P > 0) + set(-A'*P-P*A-Q > 0);
```

As operações de transposição e multiplicação de matrizes são feitas de maneira direta.

- Como último passo antes da resolução, a função objetivo do problema a ser resolvido é declarada:

```
obj = trace (P);
```

O comando `trace` do matlab pode ser aplicado normalmente em uma variável do tipo `sdpvar`.

- Finalmente, o procedimento de otimização é executado por meio do comando `solvesdp` e, neste caso, o resolvidor de LMIs escolhido foi o Sedumi (Sturn, 1999):

```
sol = solvesdp(LMIs, obj, sdpsettings ('solver', 'sedumi'))
```


Outros resolvedores poderiam ser escolhidos, como por exemplo o LMI Control Toolbox (substituir `sedumi` por `lmlab`) ou o SDPT3 (substituir `sedumi` por `sdpt30` (Toh et al., 1999). Mais detalhes sobre resolvedores de programação semidefinida podem ser encontrados no website do Yalmip, seção solvers.

O valor da função objetivo pode ser conferido aplicando a função `double` na variável que armazena os dados da função objetivo:

```
double (obj)
ans =
    2.0000
```

Similarmente, o valor da matriz de Lyapunov também pode ser conferido:

```
double (P)
ans =
    1.5000    0.5000
    0.5000    0.5000
```

O valor, a menos de uma precisão numérica, é igual ao valor obtido usando a equação de Lyapunov. Portanto, comparando os valores da matriz P , obtida usando os algoritmos 1 e 2, tem-se que o método do algoritmo 2 via procedimento de otimização convexa é mais eficaz que o método do algoritmo 1 visto que se iguala aos resultados obtidos se fosse utilizado um método analítico para resolução.

Exemplo B.3: Projeto de controladores usando realimentação de estados.

Seja o sistema dinâmico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{B.7}$$

sendo $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ os estados do sistema, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ matrizes conhecidas e $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ a entrada de controle. O projeto de controladores com realimentação de

estados consiste em encontrar uma matriz $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que ao realimentar o sistema (B.7) com a entrada $u(t) = -L x(t)$, o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t), \quad (\text{B.8})$$

é assintoticamente estável.

O controlador L que garante a estabilidade assintótica de (B.8) pode ser encontrado com as LMIs

$$\left. \begin{array}{l} X \succ 0 \\ AX + XA' - BM - M'B' \prec 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Sendo que o controlador L desejado é dado por $L = MX^{-1}$. Para resolver esse problema, seja o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (\text{B.10})$$

Os autovalores desse sistema são: 1 e 4, logo o sistema é instável. O objetivo é projetar um controlador L que seja capaz de estabilizar o sistema (B.10). Um algoritmo para solucionar esse problema no matlab usando Yalmip e Sedumi é descrito a seguir (Assunção e Teixeira, 2001).

ALGORITMO 3:

- 1) $A = [1 \ 2 ; 0 \ 4];$
- 2) $B = [0 ; 1];$
- 3) $X = \text{sdpvar}(2,2);$
- 4) $M = \text{sdpvar}(1,2);$
- 5) $\text{Restr} = \text{set}(X > 0) + \text{set}(A * X + X * A' - B * M - M' * B' < 0);$
- 6) $\text{solvesdp}(\text{Restr}, []);$
- 7) $[r, d] = \text{checkset}(\text{Restr});$
- 8) $\text{if sum}(r < 0) == 0$

- 9) `disp('O sistema pode ser controlado')`
- 10) `X = double(X);`
- 11) `M = double(M);`
- 12) `L = M*inv(X)`
- 13) `Autovalor = eig(A-B*L)`
- 14) `else`
- 15) `disp('O sistema não pode ser controlado')`
- 16) `end`

COMENTÁRIOS SOBRE ALGUMAS LINHAS DE COMANDO:

Nas linhas 3) e 4), como já foi comentado antes, quando a matriz é quadrada o Yalmip automaticamente entende que a matriz é simétrica, na linha 3) o comando é equivalente a: `X = sdpvar(2, 2, 'real', 'full')`. Na linha 4) a matriz possui o número de linhas diferente do número de colunas, dessa forma o comando da linha 4) é equivalente a: `M = sdpvar(1, 2, 'real', 'full')`.

Resolvendo o algoritmo acima no matlab obtêm-se os seguintes valores:

$$\left. \begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0,8397 & -0,6 \\ -0,6 & 1,4397 \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} -0,1206 & 6,2589 \end{bmatrix} \\ L = MX^{-1} &= \begin{bmatrix} 4,219 & 6,1056 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (B.11)$$

com os autovalores da matriz $A - BL$ iguais a: $-0,5528 \pm 2,455i$.

B.3 Algoritmo utilizado para a simulação do processo no tanque

```
close all,
clear all,
clc
% SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE 2a ORDEM MIMO DO TANQUE
% DADO AS SEGUINTEs MATRIZES DE EQUAÇÃO DE ESTADOS
r1=[0.15 0.25]; r2=[0.2 0.3]; c1=5; c2=c1;

% OBTENDO AS INCERTEZAS DO PROCESSO
for i=1:2
    for j=1:2
        a{2*(i-1)+j}=[-r1(i)/c1 r1(i)/c1; r1(i)/c2 -((r1(i)/c2)+(r2(j)/c2))];
    end
end
b(1,1)=1/c1; b(2,2)=1/c2; b(1,2)=0; b(2,1)=0; c=eye(2); d=zeros(2);

% APLICAÇÃO DO CONTROLE LQR-LMI NAS INCERTEZAS
for i=1:4
    ahat{i}=[a{i} zeros(size(b)); -c zeros(size(d))];
end
bhat=[b; zeros(size(d))];

% PARAMETROS DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO
R=100*[1 0;0 1]; Q=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0.1 0;0 0 0 0.1];
% % gerando matrizes simetricas

LMIs=set([]);
X=sdpvar(2,2,'symmetric');
Y=sdpvar(2,4,'full');
P=sdpvar(4,4,'symmetric');
for i=1:4
    LMIs=LMIs+set(P>0)+set([X sqrt(R)*Y; Y'*sqrt(R) P]>0);
    LMIs=LMIs+set(ahat{i}*P+P*ahat{i}'-bhat*Y-Y'*bhat'+eye(4)<0);
end
obj=trace(Q*P)+trace(X);
```

```

sol=solvesdp(LMIs,obj);
khat=double(Y)*inv(double(P));

k=khat(1:2,1:2); ki=-khat(1:2,3:end);
r1=mean([0.15 0.25]); r2=mean([0.2 0.3]); c1=5; c2=5;
aa=[-r1/c1 r1/c1; r1/c2 -((r1/c2)+(r2/c2))];
A=[aa-b*k b*ki; -c zeros(size(d))];
B=[zeros(size(b)); eye(size(d))];
C=[c zeros(size(d))];
D=d;

x0=zeros(4,1); t=0:1:400; nit=length(t);
r=[0.2*ones(1,ceil(nit/2)) 0.15*ones(1,ceil(nit/2)-1);
    0.1*ones(1,ceil(nit/2)) 0.15*ones(1,ceil(nit/2)-1)];

sys=ss(aa,b,c,d);
sysc=ss(A,B,C,D);
[y,t,x]=lsim(sysc,r,t,x0);
y=y+(1+2*rand)*1e-3*randn(size(y));
x=x+(1+2*rand)*1e-3*randn(size(x));
u=(-khat*x)';

% Respostas no tempo
figure(1),subplot(2,1,1), plot(t,r(1,:),'k-.',t,y(:,1),'k-',
    'linewidth',2), axis([0 nit-1 0 0.25]),
set(gca,'fontsize',10,'fontname','Times New Roman')
xlabel('Tempo(s)','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal'),
ylabel('Altura h_1 (m)','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal')
legend('ref','saida h_1'); grid
title('ALTURAS DO TANQUE','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal')

```

```

subplot(2,1,2), plot(t,r(2,:),'k-.',t,y(:,2),'k-', 'linewidth',2),
axis([0 nit-1 0 0.25]),
set(gca, 'fontsize',10, 'fontname', 'Times New Roman')
xlabel('Tempo(s)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal'),
ylabel('Altura h_2 (m)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
legend('ref', 'saida h_2'); grid

```

```

figure(2),
subplot(2,1,1), plot(t,u(:,1),'k-', 'linewidth',2), axis([0 nit-1 -0.01
0.05]), grid
set(gca, 'fontsize',10, 'fontname', 'Times New Roman')
xlabel('Tempo(s)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal'),
ylabel('q_1 (m^3/s)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
title('VAZÕES DO TANQUE', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')

```

```

subplot(2,1,2), plot(t,u(:,2),'k-', 'linewidth',2), axis([0 nit-1 -0.01
0.05]), grid
set(gca, 'fontsize',10, 'fontname', 'Times New Roman')
xlabel('Tempo(s)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal'),
ylabel('q_2 (m^3/s)', 'fontsize',12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')

```

```

% Respostas na Frequencia

```

```

% Obtenção das incertezas na frequência

```

```

sys4=ss(double(a{4}),b,c,d); T4=sys4; S4=eye(2)-T4;
sys3=ss(double(a{3}),b,c,d); T3=sys3; S3=eye(2)-T3;
sys2=ss(double(a{2}),b,c,d); T2=sys2; S2=eye(2)-T2;
sys1=ss(double(a{1}),b,c,d); T1=sys1; S1=eye(2)-T1;

```

```

sys_ma=ss(aa,b,c,d);

```

```

T=sysc; %sensibilidade complementar
S=eye(2)-T; %sensibilidade
w=logspace(-3,2,200); %faixa de frequencia

```

```

M1=(sys1/sys_ma)-eye(2);
M2=(sys2/sys_ma)-eye(2);
M3=(sys3/sys_ma)-eye(2);
M4=(sys4/sys_ma)-eye(2);

```

```

s=tf('s');

```

```

Dm1=M1.c*inv(s*M1.e-M1.a)*M1.b+M1.d;
Dm2=M2.c*inv(s*M2.e-M2.a)*M2.b+M2.d;
Dm3=M3.c*inv(s*M3.e-M3.a)*M3.b+M3.d;
Dm4=M4.c*inv(s*M4.e-M4.a)*M4.b+M4.d;

```

```

figure(3),
sigma(T,'k-',T1,'k--',T2,'k--',T3,'k--',T4,'k--');
set(gca,'fontsize',10,'fontname','Times New Roman')
xlabel('Frequência','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal'),
ylabel('Amplitude','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal')
title('SVD Aplicado à T(s)','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal')
legend('MTMF','MTMA');
grid;

```

```

figure(4),
sigma(S,'k-',S1,'k--',S2,'k--',S3,'k--',S4,'k--');
set(gca,'fontsize',10,'fontname','Times New Roman')
xlabel('Frequência','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal'),
ylabel('Amplitude','fontsize',12,'fontname','Times New
Roman','fontangle','normal')

```

```

title('SVD Aplicado à S', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
legend('MTMF', 'MTMA');
title('SVD Aplicado a S(s)');
grid

```

```

figure(5),
sigma(T/S, 'k-', T1/S1, 'k--', T2/S2, 'k--', T3/S3, 'k--', T4/S4, 'k--');
set(gca, 'fontsize', 10, 'fontname', 'Times New Roman')
xlabel('Frequência', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal'),
ylabel('Amplitude', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
title('SVD Aplicado à S', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
legend('|GK|', 'G_i');
title('SVD Aplicado ao modelo controlado em MTMA');
grid

```

```

figure(6),
sigma(1/T, 'k-', M1, 'k--', M2, 'k--', M3, 'k--', M4, 'k--');
set(gca, 'fontsize', 10, 'fontname', 'Times New Roman')
xlabel('Frequência', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal'),
ylabel('Amplitude', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
title('SVD Aplicado à S', 'fontsize', 12, 'fontname', 'Times New
Roman', 'fontangle', 'normal')
legend('1/T', 'M(j)\omega');
title('Análise de Estabilidade Robusta');
grid

```


Referências bibliográficas

- [1] Abdelaziz, T. H. S. and Valásek, M. “Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback,” *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, n° 4, pp. 377-385, 2004.

- [2] Aguirre, Luís Antonio. *Enciclopédia de Automática: controle e automação*. 1 ed, São Paulo: Blucher, 2007.

- [3] Akguil, M. *Topics in Relaxation and Ellipsoidal Methods*, volume 97 of Research Notes in Mathematics. Pitman, 1984.

- [4] Alizadeh, F. *Combinatorial Optimization with Interior-Point Methods and Semi-Definite Matrices*. PhD thesis, University of Minnesota, 1991.

- [5] Alizadeh, F. Optimization over the positive semi-definite cone: interior-point methods and combinatorial algorithms, in: P. M. Pardalos (Ed.), *Advances in Optimization and Parallel Computing*, Elsevier Science, 1992, pp. 1 ± 25.

- [6] Alizadeh, F., Haeberly, J. P. A., and Overton, M. L. Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: Convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):746–768, 1998.

- [7] Anderson, B. D. O. The small-gain theorem, the passivity theorem, and their equivalence, *J. Franklin Institute* 293 (1972) 105-115.

- [8] Arkun, Y., Banerjee, A., and Lakshmanan, N. M. Self scheduling MPC using LPV models. In R. Berber, C. Kravaris (Eds.). Non linear Model Based Control. NATO ASI Series. Kluwer Academic Publishers, London, 1998.
- [9] Assunção, E., Teixeira M. C. M. “Projeto de sistemas de controle via LMIs usando o Matlab”, in J. Balthazar, V. Oliveira, G. Silva e J. Rosário (editores), Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos, pp. 350-368, 2001.
- [10] Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. Controle Ótimo H_2 e H_∞ com Modificação de Zeros para o Problema de Rastreamento Usando LMIs, *SBA Controle & Automação* 15(4): 413-422, 2004.
- [11] Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A., da Silva, N. A. P., and Cardim R. “Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems,” *International Journal of Control*, vol. 80, n° 8, pp. 1260-1270, August 2007.
- [12] Åström, K. J., Wittenmark, B. Adaptive Control, 2nd ed, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.
- [13] Bachur, W. E. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. “Síntese de Controladores Robustos por Realimentação Dinâmica de saída Considerando Modelo de Referência Baseada em Otimização no Espaço de parâmetros do Controlador” XVIII Congresso Brasileiro de Automática, pp 4062-4067, 12-16 de Setembro de 2010.
- [14] Banjerdpongchai, D., How, J. P. Parametric robust H_2 control design with generalized multipliers via LMI synthesis, *Int. J. of Control* 70 (1998) 481-503.
- [15] Barmish, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of na uncertain system, *Journal of Optimization Theory and Applications* 46(4): 399-408, 1985.

- [16] Beck, J. V., Arnold, K. J. Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, New York, 1997.
- [17] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [18] Berman, A. Cones, Matrices and Mathematical Programming. Springer, 1973.
- [19] Bernussou, J., Peres, P. L. D. and Geromel, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, Systems & Control Letters 13(1): 65-72, 1989.
- [20] Bertsekas, D. P. Convex Analysis and Optimization. Athena Scientific ,2003.
- [21] Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N. Introduction to Linear Optimization. Athena Scientific, 1997.
- [22] Bland, R. G., Goldfarb, D., and Todd, M. J. The ellipsoid method: A survey. Operations Research, 29(6):1039-1091, 1981.
- [23] Bjorck, A. Numerical Methods for Least Squares Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- [24] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

- [25] Boyd, S. P. e Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [26] Boyd, S., and El Ghaoui, L. Method of centers for minimizing generalized eigenvalues. *Linear Algebra and Applications*, special issue on Numerical Linear Algebra Methods in Control, Signals and Systems, 188:63-111, July 1993.
- [27] Braatz, R. D., Crisalle, O. D. Robustness analysis for systems with ellipsoidal uncertainty, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 8 (1998) 1113-1117.
- [28] Chen, C. T. *Linear system theory and design*, Oxford, 3^a edition, 1999.
- [29] Chilali, M., Gahinet, P., and Apkarian, P. "Robust Pole Placement in LMI Regions," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, n° 12, pp. 2257-2270, 1999.
- [30] Dantzig, G. B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [31] de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* 37(4): 261-265.
- [32] de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Hsu, L. (1999). LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case, *Linear Algebra and Its Applications* 296(1-3): 27-38.
- [33] Dorato, P., Abdallah, C., Cerone, V. *Linear – Quadratic Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

- [34] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A. (1989). State-Space solutions to standard H_2 e H_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-34(8): 831-847.
- [35] Doyle, J. C., Francis, B. A. e Tannebaum, A. (1992). *Feedback Control Theory*, MacMillan, New York, NY.
- [36] Feron, E., Balakrishnan, V., Boyd, S., and Ghaoui, L. El. “Numerical methods for H_2 related problems,” in *Proc. ACC*, 1992, pp. 2921-2922.
- [37] Feron, E., Apkarian, P. e Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* 41(7): 1041-1046.
- [38] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. and Chilali, M. LMI Control Toolbox User’s Guide, The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [39] Garcia, C. E., Prett, D. M., Morari, M. Model predictive control: Theory and practice – a survey, *Automatica* 25 (1989) 335 - 348.
- [40] Geromel, J. C., de Oliveira, M. C. e Hsu, L. (1998). LMI characterization of structural and robust stability, *Linear Algebra and Its Applications* 285(1-3): 69-80.
- [41] Ghaoui, L. El, Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*. SIAM, 2000.
- [42] Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2005). Improved optimization approach to the H_2/H_∞ control problem for linear systems, *IEEE Proceedings – Control Theory and Applications* 152(2): 171-176.

- [43] Gonzaga, C. C. Path-following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34(2):167–224, 1992.
- [44] Himmelblau, D. M., Bischoff, K. B. *Process Analysis and Simulation: Deterministic Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [45] Hindi, H. (2004). A tutorial on convex optimization, *Proceedings of American Control Conference*, Vol. ThP01.1, Boston, pp. 3252-3265.
- [46] Hiriart-Urruty, J. -B. and Lemaréchal, C. *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer, 2001. Abridged version of *Convex Analysis and Minimization Algorithms* volumes 1 and 2.
- [47] Hiriart-Urruty, J. -B. and Lemaréchal, C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer, 1993. Two volumes.
- [48] Horn, R. A. and Johnson, C. R. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [49] Horn, R., and Johnson, C. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [50] How, J. P., Hall, S. R. Connections between the Popov stability criterion and bounds for real parameter uncertainty. in: *Proc. of the American Control Conf.*, IEEE Press, Piscataway, New Jersey, 1993, pp. 1084-1089.

- [51] Isermann, R., and Ballé, P. “Trends in the applications of model-based fault detection and diagnosis of technical processes,” *Control Engineering Practice*, vol. 5, n° 5, pp. 709-719, 1997.
- [52] Kailath, T. *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [53] Kanev, S., Scherer, C., Verhaegen, M. e de Schutter, M. (2004). Robust output-feedback controller design via local BMI optimization, *Automatica* 40(7): 1115-1127.
- [54] Kwak, S. K., Washington, G., and Yedavalli, R. K. “Acceleration Feedback-Based Active and Passive Vibration Control of Landing Gear Components,” *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 15, n° 1, pp. 1-9, 2002.
- [55] Ko, H. S., Dumont, G. A. Jatskevich, J., Moshref, A. “A New LMI Representation of LQR Based Voltage Control of Grid-Connected Wind Farm”, *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA*, pp.851-856, June 14-16.
- [56] Kolman, B, Hill, D. R.; *Introdução à álgebra linear: com aplicações*, Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [57] Laub, A. J. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-24(6):913-921, December 1979.
- [58] Lawson C. L. and Hanson R. J.. *Solving Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. First published in 1974 by Prentice-Hall.
- [59] Leite, V. J. S., Montagner, V. F., Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. (2002). *Estabilidade robusta de sistemas contínuos do tempo através de desigualdades*

matriciais lineares, XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal, RN, pp. 2878-2883.

- [60] Liu, R. W. Convergent systems, *IEEE Trans. on Auto. Control* 13 (1968) 384-391.
- [61] Ly, J.H., Safonov, M.G., Ahmad, F. Positive real Parrott theorem with application to LMI controller synthesis, in: *Proc. of the American Control Conf.*, IEEE Press, Piscataway, New Jersey, 1994, pp. 50 ± 52.
- [62] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion, *International Journal of Control* 55(3): 531-534, 1992.
- [63] Molinari, B. (1975). Conditions for nonpositive solutions of the Linear Matrix Inequality, *IEEE Transactions on Automatic Control* 20(6): 804-806.
- [64] Morari, M., Zafiriou, E. *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [65] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*, tradução Paulo Álvaro Maya; Revisao Técnica Fabrizio Leonardi [et al.] – São Paulo; Prentice Hall, 2003.
- [66] Ogunnaike, B., Wright, R. A. Industrial applications of non-linear control, in: J. C. Kantor, C. E. Garcia, B. Carnahan (Eds.), *Fifth International Conference on Chemical Process Control* vol. 93 of *AIChE Symposium Series* No. 316, AIChE, New York, 1997, pp. 46-59.
- [67] Ogunnaike, B. A., Ray, W. H. *Process Dynamics, Modeling, and Control*, Oxford University Press, New York, 1994.

- [68] Olalla, C., Leyva, R., El Aroudi, A., Queinnec, I. "Robust LQR Control for PWM Converters: An LMI Approach", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 56, no. 7, pp 2548-2558, July 2009.
- [69] Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, M. C. and Peres, P. L. D. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions, *Systems & Control Letters* 57(8): 680-689, 2008.
- [70] Packard, A., Becker, G. Quadratic stabilization of parametrically-dependent linear systems using parametrically-dependent linear dynamic feedback, *Advances in Robust and Nonlinear Control Systems DSC 43* (1992) 29 - 36.
- [71] Pardalos, P. M., Rosen, J. B. *Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications*, volume 268 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [72] Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. e Bernussou, J. (2000). A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Systems & Control Letters* 40(1): 21-30.
- [73] Peressini, A. L., Sullivan, F. E, Uhl Jr., J. J. *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [74] Perlmutter, D. D. *Stability of Chemical Reactors*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
- [75] Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. (2001). A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems, *Systems & Control Letters* 43(5): 371-378.

- [76] Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. (2002). An LMI conditions for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(4): 675-678.
- [77] Rantzer, A. e Johansson, M. (2000). Piecewise linear quadratic optimal control, *IEEE Transactions on Automatic Control* 45(4): 629-637.
- [78] Ray, W. H. *Advanced Process Control*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [79] Ricker, N. L. Model predictive control with state estimation, *Ind. Eng. Chem. Res.* 29 (1990) 374 - 382.
- [80] Roberts, A. W. and Varberg, D. E.. *Convex Functions*. Academic Press, 1973.
- [81] Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [82] Scilab Group, "Scilab 2.1, user's guide," *Inria Technical Report, to appear*.
- [83] Skelton, R. E., Iwasaki, T. and Grigoriadis, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Taylor & Francis, Bristol, PA, 1998.
- [84] Skogestad, S., Morari, M., Doyle, J. C. Robust control of illconditioned plants: High purity distillation, *IEEE Trans. on Auto. Control* 33(1988) 1092 ± 1105.
- [85] Skogestad, S., Postlethwaite, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley, New York, 1996.

- [86] Sonnevend, G. An ‘analytical centre’ for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In Lecture Notes in Control and Information Sciences, volume 84, pages 866–878. Springer, 1986.
- [87] Sturm, J. “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones,” *Optimization Methods and Software*, vol.11/12, pp. 625-653, 1999. version 1.05. [Online]. Available : <http://fewcal.kub.nl/sturm>. Último acesso em 26 de outubro de 2011.
- [88] Tiel, J. V. Convex Analysis. An Introductory Text. John Wiley & Sons, 1984.
- [89] Toh, K. C., Todd, M. J. and Tutuncu, R. SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3, *Optimization Methods and Software* 11(1): 545-581, 1999.
- [90] Trofino, A. Controle Robusto. UFSC, Florianópolis, SC, 2000.
- [91] Trofino, A, Coutinho, D, Barbosa, K. A, Sistemas multivariáveis: Uma abordagem via LMIs Versão preliminar, Florianópolis, agosto de 2003. Disponível em: <http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas/das-6600/>. Último acesso em 26 de outubro de 2011.
- [92] Uhlig, F. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey. *Linear Algebra and Appl.*, 25:219{237, 1979.
- [93] Valentine, F. A. Convex Sets. McGraw-Hill, 1964.
- [94] VanAntwerp, J. G., Braatz, R. D., Sahinidis, N. V. Globally optimal robust reliable control of large scale paper machines, in: Proc. of the American Control Conf., IEEE Press, Piscataway, NJ, 1997, pp. 1473-1477.

- [95] Vandenberghe, L., Boyd, S. Semidefinite programming, *SIAM Review* 38 (1996) 49 ± 95.
- [96] Yang, R., Lu, e Xie, L. (2005) Robust H_2 e H_∞ controllo f discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback, *International Journal of Control* 78(16): 1285-1294.
- [97] Zhong, M., Ding, S. X., Lam, J., and Wang, H. “An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems,” *Automatica*, vol. 39, n° 3, pp. 543-550, 2003.
- [98] Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [99] Webster, R. *Convexity*. Oxford University Press, 1994.
- [100] Willems, J. C. Least squares stationary optimal control and algebrics Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-16(6): 621-634, 1971.
- [101] Wylie, C. R., Barrett, L. C. *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [102] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K. *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1995.
- [103] Zhou, K., Khargonekar, P. P. An algebraic Riccati equation approach to h_∞ optimization, *Systems and Control Letters* 11 (1988) 85-91.