



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ TIAGO NOGUEIRA CRUZ

CORRENTES, TEORIA DE MORSE PARA VARIEDADES COM BORDO
E DUALIDADE DE LEFSCHETZ

FORTALEZA

2018

JOSÉ TIAGO NOGUEIRA CRUZ

CORRENTES, TEORIA DE MORSE PARA VARIEDADES COM BORDO E
DUALIDADE DE LEFSCHETZ

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C962c Cruz, José Tiago Nogueira.
Correntes, Teoria de Morse para Variedade com Bordo e Dualidade de Lefschetz / José
Tiago Nogueira Cruz. – 2018.
147 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de
Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru.

1. Correntes. 2. Teoria de Morse para Variedades com Bordo. 3. Dualidade de Lefschetz.
I. Título.

CDD 510

JOSÉ TIAGO NOGUEIRA CRUZ

CORRENTES, TEORIA DE MORSE, DUALIDADE DE LEFSCHETZ PARA
VARIEDADES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 05/12/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Florentiu Daniel Cibotaru (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Vincent Grandjean
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Andrew James Clarke
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Dr. Paolo Piccione
Universidade de São Paulo (USP)

A minha esposa, aos meus pais e a meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

As grandes realizações da nossa vida transcorre dos esforços e vitórias diárias que ocorrem a passos lentos e constroem cada tijolo de um sonho. Nesse momento tão especial da minha vida, venho expressar minha gratidão a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão do meu doutorado.

A minha esposa Leidmar pelo seu amor, carinho, compreensão e dedicação essenciais na minha vida. Você merece muito mais que um singelo obrigado.

Aos meus pais Jesualdo e Zezita pelo amor, apoio e dedicação, ato sempre presente e marcante na minha vida. Vocês fizeram de mim a pessoa que hoje sou e só tenho motivos para agradecer. Não posso deixar de agradecer aos meus irmãos Tiarlos e Tiarlison pela amizade, confiança e companheirismo. Agradeço a meu avó seu Zé das broas (in memoriam) e minha avó dona Hilda pelo carinho que sempre demonstraram com seus netos. Quero deixar meu grande obrigado a todos da minha família em especial a Zezilma, Nilzete e Socorro pela ajuda mais que essencial no início dos estudos.

Ao Professor Ében por despertar a vontade de fazer graduação em Matemática.

Minha imensa gratidão ao professor Daniel Cibotaru pela paciência e ética sempre presentes na sua orientação e dizer que tal trabalho não seria possível sem a sua supervisão.

Aos professores Vincent Grandjean, Alexandre Fernandes, Paolo Piccione e Andrew Clarke por terem aceitado o convite em participar da banca examinadora.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFC, em especial aos professores Marcos Melo, Fábio Montenegro, Luciano Mari, Diego Moreira, Jorge Herbert, Ernani Ribeiro e Darlan Girão que contribuíram diretamente na minha formação.

Entre meus amigos do doutorado destaco Adam, Jocel, Halyson, Manoel pelos estudos iniciais que tivemos no Doutorado. Na fase pós-exame agradeço muito ao meu amigo Wanderley pelo companheirismo ao longo da nossa orientação. Também agradeço aos meus amigos da Pós-Graduação (alunos e ex-alunos) Amilcar Montalban, Antônio Grangeiro, Cláudia Fernandes, Davi Ribeiro, Davi Lustosa, Diego Sousa, Diego Eloi, Eddygledson Gama, Edivalter Sena, Emanuel Viana, Fabrício Oliveira, Fagner, Damiana Vieira, Israel Evangelista, Ivy Girão, João Francisco, Leo Ivo, Marcos Raniere, Renivaldo Sena, Valdir Junior.

Aos professores do DEMPA pelo apoio à liberação do meu afastamento.

Não poderia deixar de agradecer aos professores que tive na minha graduação em especial deixo o meu obrigado ao Evandro, José Alves, Juscelino Silva, Luís Fernando e Humberto Soares.

Agradecimentos também a Andréa Dantas e Jessyca Soares, secretárias da Pós-Graduação, por toda competência e agilidade.

Ao Programa Funcap pelo apoio financeiro.

RESUMO

Sejam M uma variedade compacta com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Morse-Smale, tame e com campo gradiente tangente ao bordo. O fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ do campo $-\nabla f$ é completo e para $\omega \in \Omega^k(M)$ seu limite pode ser escrito como

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}_k(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p]$$

onde $\text{Cr}_k(f)$ são os pontos críticos da f de índice k ,

$$[\tilde{U}_p] = [U_p] - \sum_{q \in \text{Cr}_k(f)} \bar{n}(p, q) \cdot [U_q]$$

e $\bar{n}(p, q)$ é a soma de todas as trajetórias quando atribuí um sinal que vem a partir de uma convenção de orientação que relacionam as orientações das variedades estáveis e instáveis.

Definindo $\mathbb{P} := \varphi_t^* : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ e $\Omega_D^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega|_{\partial M} = 0\}$, a imagem do limite das restrições

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_t^r : \Omega_D^k(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{m-k}(M) & & \mathbb{P}_t^a : \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{m-k}(M^\circ) \\ \omega & \longmapsto & \int_M \varphi_t^* \omega \wedge \cdot & & \omega & \longmapsto & \int_M (\varphi_t^\circ)^* \omega \wedge \cdot \end{array}$$

serão denotadas por $\mathcal{U}_k^{r/a}$ e o par $(\mathcal{U}_k^{r/a}, d)$ são complexos isomorfos a complexos que realizam a homologia absoluta e relativa de M . Além disso, os operadores $\mathbb{P}^{r/a}$ são quase isomorfismos. Resultados análogos também podem ser refinados para coeficientes inteiros usando símplices suaves no contexto de correntes integrais.

Palavras-chave: Correntes. Condição-Tame. Transversalidade. Morse-Smale.

ABSTRACT

Let M be a compact manifold with boundary and $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a Morse-Smale function, tame and with gradient field tangent to the boundary. The flow $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ of the field $-\nabla f$ is complete and for $\omega \in \Omega^k(M)$ its limit can be written as

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}_k(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p]$$

where $\text{Cr}_k(f)$ are the critical points of f with index k ,

$$[\tilde{U}_p] = [U_p] - \sum_{q \in \text{Cr}_k(f)} \bar{n}(p, q) \cdot [U_q]$$

and $\bar{n}(p, q)$ is the sum of all trajectories when it assigns a signal coming from an orientation convention relating the orientations of stable and unstable manifolds.

Defining $\mathbb{P} := \varphi_t^* : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ and $\Omega_D^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega|_{\partial M} = 0\}$, the image of the limit of restriction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_t^r : \Omega_D^k(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{m-k}(M) & & \mathbb{P}_t^a : \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{m-k}(M^\circ) \\ \omega & \longmapsto & \int_M \varphi_t^* \omega \wedge \cdot & & \omega & \longmapsto & \int_M (\varphi_t^\circ)^* \omega \wedge \cdot \end{array}$$

will be denoted by $\mathcal{U}_k^{r/a}$ and the pair $(\mathcal{U}_k^{r/a}, d)$ are isomorphism complexes that perform the absolute and relative homology of M . Furthermore, the operators $\mathbb{P}^{r/a}$ are quasi-isomorphisms. Analogous results can also be refined to integer coefficients using smooth simplex in the context of integral currents.

Keywords: Currents. Condition-Tame. Transversality. Morse-Smale.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CORRENTES E COMPLEXOS EM VARIEDADES SEM BORDO	24
2.1	Teoria de Morse para Variedades sem Bordo e Homologia	24
2.2	Pullback de Fluxos Morse-Smale e Correntes em Variedades sem Bordo	29
2.3	Existência e Cálculo do Limite	32
2.4	Homotopia entre Complexo de Rham e Complexo de Morse com Coeficientes Reais em Variedades sem Bordo	45
2.5	Isomorfismo com Coeficientes Reais da Homologia do Complexo de Correntes com o Complexo de Morse - Caso sem Bordo	49
3	CORRENTES E COMPLEXOS DE MORSES PARA VARIEDADES COM BORDO	55
3.1	Teoria de Morse para Variedades com Bordo e a Homologia Absoluta e Relativa	55
3.2	Existência e Cálculo dos Limites no Caso com Bordo	62
3.3	Isomorfismo com Coeficientes Reais da Homologia do Complexo de Correntes com o Complexo de Morse - Caso com Bordo	74
4	COEFICIENTES INTEIROS	86
4.1	Coeficientes Inteiros para Variedades sem Bordo	86
4.2	Isomorfismo com Coeficientes inteiros- Caso sem Bordo	93
4.3	Isomorfismos com Coeficientes Inteiros - Caso com Bordo	95
4.4	Continuidade	98
5	ORIENTAÇÕES	101
5.1	Orientação do Limite no Caso sem Bordo	101
5.2	O Bordo de U_p como corrente no caso Morse sem fronteira	104
5.3	Orientação das Componentes de \tilde{U}_p no Caso com Bordo e o Sinal de $\partial\tilde{U}_p$ como Corrente	107
6	APÊNDICE	108
6.1	Correntes	108
6.2	Dualidade de Lefschetz para Variedades não Compactas	114
6.3	Blow-up no Interior e no Bordo	126
6.4	Coordenadas Tames dos Pontos de Bordo	131
6.5	Hipersuperfícies e Homologia de Morse	134
6.6	Novos Complexos e suas Dualidade	141
7	CONCLUSÃO	145
	REFERÊNCIAS	146

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese temos como objetivo estender resultados de HARVEY and LAWSON JR (2001) para fluxos induzidos pelo campo gradiente de uma função de Morse definida em uma variedade Riemanniana compacta com bordo. No caso sem bordo, Harvey e Lawson mostraram que o complexo de Rham é homotópico ao complexo de Morse-Witten via uma homotopia explícita. O complexo de Morse-Witten pode ser realizado como um subcomplexo do complexo de correntes $\mathcal{D}'_k(M) = (\Omega_{\text{cpt}}^k(M))^*$ da variedade e a homotopia é construída através da família de morfismos de cadeias

$$\Omega^*(M) \ni \mathbf{P}_t(\omega) := \varphi_t^* \omega \in \mathcal{D}'_*(M)$$

onde φ_t é o fluxo do campo gradiente negativo. Quando $t = -\infty$ a imagem do $\mathbf{P}_{-\infty} := \mathbf{P}$ é o subcomplexo gerado pelas variedades instáveis e este pode ser naturalmente identificado com o complexo de Morse-Witten.

De fato, no lugar de "fazer correr" formas suaves a teoria pode ser feita para cadeias (singulares) suaves que também são correntes. Uma contribuição desta tese é dar uma apresentação rigorosa nos dois casos (com e sem bordo) da deformação do complexo de cadeias suaves. Detalhes importantes que têm a ver com interseções de correntes não são feitos no artigo de HARVEY and LAWSON JR (2001) e serão discutidos aqui. Evidentemente, essa situação pode ser vista como o caso dos coeficientes inteiros enquanto a primeira parte (com formas) representa o caso com coeficientes reais.

Quando M é uma variedade com fronteira, há pelo menos duas possibilidades de tratar a teoria de Morse: a versão clássica que considera a fronteira como nível regular da função e a versão mais recente dos matemáticos Kronheimer e Mrowka onde o gradiente é tangente à fronteira. E é essa segunda abordagem que estamos assumindo aqui.

Na construção de Teoria de Morse sobre variedades com fronteiras, Kronheimer e Mrowka classificaram os pontos críticos da fronteira em dois conjuntos. Verifica-se que a normal exterior é um autovetor associado a um autovalor $\alpha \neq 0$ da Hessiana da função de Morse f . Os pontos críticos do bordo serão aqueles para quais o autovalor da normal exterior é $\alpha > 0$ chamado de estáveis (denotado por $\text{Cr}^s(f)$) e $\alpha < 0$ chamado de instáveis (denotado por $\text{Cr}^u(f)$). Juntando a cada um desses conjuntos os pontos críticos do interior ($\text{Cr}^0(f)$), pode-se construir dois complexos. As diferenciais são dadas pela contagem cuidadosa das trajetórias entre dois pontos de índices consecutivos como veremos mais na frente. É importante enfatizar que uma certa condição de transversalidade tipo Smale é necessária também na teoria de Kronheimer e Mrowka.

Em cada caso tratado aqui (com coeficientes reais ou inteiros) vamos fazer correr dois complexos. Um que calcula a cohomologia absoluta e um que calcula a cohomologia relativa. Um ponto delicado dessa tese foi encontrar os complexos de formas que

são canonicamente isomorfomos aos complexos Morse-Witten construídos por Kronheimer e Mrowka.

Uma vez encerrado o caso com bordo voltamos para analisar uma situação nova no caso de fluxos de Morse em uma variedade compacta sem bordo. A novidade vem do fato que o campo gradiente será tangente a uma hipersuperfície dada. Isso requer uma outra condição de transversalidade Smale, porque aquela padrão não pode ser satisfeita. Há variedades estáveis e instáveis contidas na hipersuperfície e por isso não podem ser transversais dentro da variedade ambiente. Há um complexo de Morse associado a essa situação que calcula a homologia da variedade. Uma das novidades é que a diferencial desse complexo conta também trajetórias quebradas entre pontos críticos de índice consecutivo. Isso é uma manifestação da falta de transversalidade clássica Smale.

Faremos agora parte informal dos resultados obtidos nesta tese.

As linhas de fluxos do campo *gradiente negativo* que chegam ou partem de um ponto crítico p dão origem a duas subvariedades mergulhadas de M chamadas de variedade instável U_p e estável S_p

$$U_p := \left\{ x \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

e

$$S_p := \left\{ x \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

onde φ_t é o grupo a 1-parâmetro de difeomorfismos gerado pelo campo gradiente negativo. A dimensão de U_p é a quantidade de autovalores negativos da matriz Hessiana de f assim conhecida como índice do ponto crítico e denotada por λ_p e a dimensão de S_p é $m - \lambda_p$. O subscrito k na notação $\text{Cr}_k^s(f)$, $\text{Cr}_k^s(f)$ e $\text{Cr}_k^u(f)$ significa o conjuntos dos pontos críticos de índice k .

Em pontos de $\text{Cr}^s(f)$ as variedades instáveis estão totalmente contida no bordo enquanto as variedades estáveis são subvariedades com bordo. Já para pontos de $\text{Cr}^u(f)$ temos uma situação oposta, pois as variedades estáveis estão inteiramente contidas no bordo.

Seja A o anel dos coeficientes. Defina

$$C_k^0 = \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} A \cdot p, \quad C_k^s = \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} A \cdot p \quad \text{e} \quad C_k^u = \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} A \cdot p$$

e denote por $n(p, q)$ o número (com sinal) de trajetórias entre p e q e $\bar{n}(p, q)$ o número (com sinal) de trajetórias entre p e q que estão contidas no bordo. O sinal é dado por certas considerações ligadas as orientações de U_p e S_q . Para detalhes veja a Subseção 3.1.

Considere os complexos $\check{C}_k = C_k^0 \oplus C_k^s$, $\hat{C} = C_k^0 \oplus C_k^u$ e as diferenciais

$$\check{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_0^0 & -\partial_0^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^0 & \bar{\partial}_s^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix} \quad \hat{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_0^0 & \partial_0^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^0 & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix}$$

cujas entradas dessas matrizes são operadores de contagem. Devido ao fato que um ponto crítico instável tem índice um a menos quando visto como ponto crítico da restrição do gradiente a fronteira, há situações que entre pontos críticos de índice consecutivos há trajetórias quebradas. Por exemplo, o operador com a barra em cima $\bar{\partial}_u^s : C_k^s \rightarrow C_k^u$ é responsável pelas trajetórias no bordo de M que ligam pontos críticos de mesmo índice e a composição $\partial_s^u \bar{\partial}_u^s$ considera trajetórias quebradas cuja diferença entre os índices dos pontos críticos é igual a 1 e que ligam um ponto crítico instável a outro ponto crítico instável

Os complexos $(\check{C}_*, \check{\partial})$ e $(\hat{C}_*, \hat{\partial})$ calculam a homologia absoluta e a relativa, respectivamente, ou seja,

$$H_k(\check{C}_*, \check{\partial}) = H_k(M, A) \quad H_k(\hat{C}_*, \hat{\partial}) = H_k(M, \partial M, A).$$

Kronheimer e Mrowka esboçaram uma demonstração desses isomorfismos que também são produtos secundário dos nossos resultados.

Iremos deformar dois espaços de formas: $\Omega_D^*(M) := \{\omega \in \Omega^*(M) \mid \omega|_{\partial M} = 0\}$ usando o fluxo para obter complexos de correntes isomorfos a $(\check{C}, \check{\partial}, \mathbb{R})$ e $\Omega^*(M)$ usando o fluxo restrito ao interior e obter subcomplexos de correntes isomorfos a $(\hat{C}, \hat{\partial}, \mathbb{R})$. Faremos isso através dos operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^r : \Omega_D^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M) & \mathbb{P}_t^a : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M^\circ) \\ \omega &\longmapsto \int_M \varphi_t^* \omega \wedge \cdot & \omega &\longmapsto \int_M (\varphi_t^\circ)^* \omega \wedge \cdot \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\varphi_t^\circ := \varphi_t|_{M^\circ}$. Os limites desses operadores

$$\mathbb{P}^{r/a} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{P}_t^r$$

são quasi isomorfismos. Sua essência está na dualidade de Lefschetz que vem do pairing não degenerado

$$\mathcal{L} : \Omega^k(M, \partial M) \times \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \gamma; \eta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_M \omega \wedge \eta + \int_{\partial M} \gamma \wedge \iota^* \eta. \quad (2)$$

Esse pairing induz dois operadores

$$\mathcal{L}_I : \Omega^k(M, \partial M) \rightarrow \mathcal{D}'_{n-k}(M), \quad \mathcal{L}_I(\omega, \gamma) = \{\eta \rightarrow \mathcal{L}_{(\omega, \gamma)}(\eta)\};$$

$$\mathcal{L}_{II} : \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \mathcal{D}'_k(M, \partial M), \quad \mathcal{L}_{II}(\eta) = \left(\omega \rightarrow \int_M \omega \wedge \eta; \gamma \rightarrow \int_{\partial M} \gamma \wedge \iota^* \eta \right)$$

que geram isomorfismos a nível de cohomologia/homologia. O primeiro operador \mathbb{P}_t^r usa a aplicação \mathcal{L}_I com o fato que a homologia do complexo $(\Omega_D^*(M), d)$ é isomorfa a homologia do complexo $(\Omega^k(M, \partial M), d)$ e o segundo operador \mathbb{P}^a usa \mathcal{L}_{II} e a Proposição 3.2 em CIBOTARU (2016), isto é, aplicação $\mathcal{D}'_*(M, \partial M) \rightarrow \mathcal{D}'_*(M \setminus \partial M)$ definida por $(T, S) \rightarrow T|_{M \setminus \partial M}$ induz um isomorfismo em homologia.

Os operadores $\mathbb{T}_t : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k+1}(M)$ e $\mathbb{S}_t : \Omega^k(\partial M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(\partial M)$ definidos por

$$\mathbb{T}_t(\omega) = \int_{[t,0] \times M} \varphi^* \omega \quad \mathbb{S}_t(\gamma) = \int_{[t,0] \times \partial M} \varphi^* \gamma$$

satisfazem a igualdade

$$d \circ \mathbb{T}_t + (-1)^* \mathbb{T}_t \circ d + \mathbb{S}_t = \mathbb{I} - \mathbb{P}_t. \quad (3)$$

Estamos adotando a convenção clássica da Teoria de Morse que assume o campo gradiente negativo, pois é a mesma convenção adotada em KRONHEIMER and MROWKA (2007). Isso justifica o porque estamos considerando a integração sobre $[t, 0] \times M$ no operador \mathbb{T}_t .

Note que a equação 3 implica em

$$d \circ \mathbb{T}_t^{r/a} + (-1)^* \mathbb{T}_t^{r/a} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}_t^{r/a}, \quad (4)$$

onde $\mathbb{T}_t^{r/a}$ é obtido da mesma maneira que $\mathbb{P}_t^{r/a}$.

Passando ao núcleos de Schwartz, a fórmula de homotopia (3) se transforma nas equações de correntes em $M \times M$

$$d\mathbf{T}_t + \mathbf{S}_t = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}_t \quad (5)$$

onde $\mathbf{\Delta} \subset M \times M$ é a diagonal e $\mathbf{P}_t = [\text{gráfico reverso de } \varphi_t]$. Lembremos como isso funciona. Para um kernel qualquer \mathbf{R} o operador associado e \mathbb{R} definido assim:

$$\mathbb{R}(\omega)(\eta) = \mathbf{R}(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta), \quad (6)$$

onde π_1, π_2 são projeções em cada fator de um espaço produto.

Os núcleos dos operadores \mathbb{T}_t e \mathbb{S}_t são:

$$\mathbf{T}_t = \Phi([t, 0] \times M) \quad \mathbf{S}_t = \Phi([t, 0] \times \partial M)$$

onde $\Phi : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow M \times M$ é o gráfico reverso do fluxo, isto é, $\Phi(t, x) = (\varphi_t(x), x)$.

Via um processo bastante laborioso (chamado de resolução do fluxo por D.

Cibotaru em CIBOTARU (2017)) dar para mostrar que os fechos dos suportes dos núcleos $\mathbf{T}_t = \Phi([t, 0] \times M)$ $\mathbf{S}_t = \Phi([t, 0] \times \partial M)$ são imagens via aplicações diferenciáveis de variedades compactas com cantos $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\tilde{\mathbf{S}}$ de dimensões $n + 1$ e n respectivamente. Além disso, a corrente \mathbf{T} tem medida Hausdorff $n+1$ dimensional finita o que implica em

$$\mathbf{T} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{T}_t \text{ e } \mathbf{S} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{S}_t$$

existem em norma massa (i.e. \mathbf{T} e \mathbf{S} são correntes de massa finita). Isso implica na existência do limite em norma flat das correntes da relação (5):

$$d\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}.$$

Lembremos que um fluxo φ_t do campo gradiente negativo é chamado de f -tame se em torno de cada ponto crítico $p \in \text{Cr}(f)$ existe um sistema de coordenadas (u, v) tal que a métrica seja flat e $f(u, v) = f(p) + \frac{1}{2}(|u|^2 - |v|^2)$. Como consequência disso, o fluxo do campo gradiente negativo é da forma $\varphi_t(u, v) = (e^{-t}u, e^tv)$.

Para analisar os $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{P}^{r/a}(\omega)$ a ideia é olhar $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{P}_t^{r/a}$. Uma vez mostrado que os limites existem, queremos descrever o resultado final de \mathbf{P} e é isso que o próximo resultado diz.

Antes precisamos introduzir as correntes abaixo. Para $p \in \text{Cr}_k^s(f)$ definimos

$$[\tilde{U}_p] = [U_p] - \sum_{q \in \text{Cr}_k^u(f)} \bar{n}(p, q) \cdot [U_q], \quad q \preceq p.$$

O símbolo $\bar{n}(p, q)$ é o valor com sinal das trajetórias entre p e q que estão no bordo. Note que o suporte dessa corrente está contido em

$$\overline{U_p \cup \left(\bigcup_{q \in \text{Cr}^u(f)} U_q \right)}.$$

Teorema 1 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo de dimensão m . Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale com condição tame em uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo e campo gradiente tangente ao bordo, então vale a seguinte igualdade de núcleos:*

$$d\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P} \tag{7}$$

em $M \times M$. O núcleo \mathbf{P} que satisfaz as restrições

$$\mathbf{P}^{r/a} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [\tilde{S}_p] \times [U_p] \tag{8}$$

em $M \times M$.

Os operadores associados aos kernels $\mathbf{P}^{r/a}$ admitem descrição explícita em função das correntes $[\tilde{U}_p]$.

Corolário 1 *Nas mesmas condições que no Teorema anterior, os operadores que correspondem aos núcleos $\mathbf{P}^{r/a}$ são os seguintes:*

$$\mathbb{P}^r(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p], \quad (9)$$

$$\mathbb{P}^a(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) [U_p]. \quad (10)$$

Além disso, vale a igualdade

$$\begin{aligned} d \circ \mathbb{T}^{r/a}(\omega) + (-1)^* \mathbb{T}^{r/a} \circ d(\omega) &= d \left(\int_{[t,0] \times M} \varphi^* \omega \right) + (1)^* \int_{[t,0] \times M} \varphi^* d\omega \\ &= \mathbb{I}(\omega) - \mathbb{P}^{r/a}(\omega) \end{aligned}$$

A imagem dos operadores limite $\mathbb{P}^{r/a}$ serão denotadas por

$$\text{Im } \mathbb{P}^r = \mathcal{U}_k^r := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[U_p] \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} \mathbb{R}[\tilde{U}_p], \quad (11)$$

$$\text{Im } \mathbb{P}^a = \mathcal{U}_k^a := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[U_p] \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} \mathbb{R}[U_p]. \quad (12)$$

As restrições ao codomínio $\mathbb{P}^r : \Omega_D^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}^r$ e $\mathbb{P}^a : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}^a$ satisfazem as igualdades $d \circ \mathbb{P}^{r/a} = \mathbb{P}^{r/a} \circ d$. E mais, $\mathcal{U}^{r/a}$ são invariantes pela diferencial d . Isto significa que o bordo das correntes \tilde{U}_p são combinações de variedades instáveis.

Teorema 2 *As aplicações lineares $\tilde{\mathbb{P}}^r : \Omega_D^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}^r$ e $\tilde{\mathbb{P}}^a : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}^a$ induzem os isomorfismos*

$$\tilde{\mathbb{P}}_*^r : \underbrace{H^k(\Omega_D^*(M))}_{\simeq H_{\text{dR}}^k(M, \partial M)} \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*^r) \quad \tilde{\mathbb{P}}_*^a : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*^a).$$

Os complexos (\mathcal{U}_*^r, d) e (\mathcal{U}_*^a, d) são de fato iguais aos complexos de Kronheimer e Mrowka pela associação de cada gerador \tilde{U}_p ao ponto crítico p e observando que o operador de bordo d pode ser descrito como um operador que conta trajetórias entre pontos críticos de índices consecutivos, da mesma forma que os operadores de contagem

$\hat{\partial}, \check{\partial}$ foram definidos mais cedo. Note que o complexo \mathcal{U}^r é gerado somente pelos correntes \tilde{U}_p com p ou interior ou estável da mesma forma que o complexo \check{C} . Uma observacao similar vale para o outro caso. Assim

$$H_k(\check{C}) = H_k(\mathcal{U}_*^r) \quad H_k(\hat{C}) = H_k(\mathcal{U}_*^a).$$

Corolário 2 *O fluxo do campo gradiente induz isomorfismos:*

- a) $H_{\text{dR}}^k(M, \partial M) \simeq H_{m-k}(\hat{C}, \mathbb{R});$
- b) $H_{\text{dR}}^k(M) \simeq H_{m-k}(\check{C}, \mathbb{R}).$

Até agora todos os isomorfismos são obtidos no contexto dos coeficientes reais. Para obter resultados com coeficientes inteiros as formas diferenciais serão substituídas por cadeias suaves. No caso, o complexo de formas será substituído pelo complexo de cadeias suaves e o pullback do fluxo será substituído pelo pushforward.

Considerem

$$C_k^{\uparrow}(M, \mathbb{Z}) = \oplus \mathbb{Z}\{\sigma : \Delta^k \rightarrow M \mid \sigma \text{ é suave}, \sigma|_{\Delta^F} \uparrow S_p\},$$

$$C_k^{\uparrow}(M \setminus \partial M, \mathbb{Z}) = C_k^{\uparrow}(M, \mathbb{Z}) \cap \{\sigma \in C_k(M, \mathbb{Z}) \mid \sigma(\Delta^k) \cap \partial M = \emptyset\},$$

onde Δ^F são as faces de Δ^k e

$$C_k^{\uparrow}(M, \partial M, \mathbb{Z}) = C_k^{\uparrow}(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{k-1}^{\uparrow}(\partial M, \mathbb{Z})$$

o mapping cone da inclusão canônica $C_k^{\uparrow}(\partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_k^{\uparrow}(M, \mathbb{Z})$. Repare que $C_k^{\uparrow}(M, \mathbb{Z})$ e $C_k^{\uparrow}(M, \partial M, \mathbb{Z})$ são subcomplexos de correntes de $\mathcal{D}'_k(M)$ e $\mathcal{D}'_k(M, \partial M)$. Técnicas clássica de topologia algébrica mostram que o complexo formado por $C_k^{\uparrow}(M \setminus \partial M, \mathbb{Z})$ calcula a homologia absoluta $H_k(M)$ e $C_k^{\uparrow}(M, \partial M, \mathbb{Z})$ calcula a homologia relativa de $H_k(C_k^{\uparrow}(M, \partial M, \mathbb{Z})) = H_k(M, \partial M)$. Defina os operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^{\uparrow, a} : C_k^{\uparrow}(M \setminus \partial M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{I}_k(M) \\ \sigma &\longmapsto \varphi_{-t}^*(\sigma) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\eta \longmapsto \int_{\sigma} \varphi_{-t}^* \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^{\uparrow, r} : C_k^{\uparrow}(M, \partial M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{I}_k(M \setminus \partial M) \\ (\sigma, \sigma') &\longmapsto (\varphi_{-t}^{\circ})^*(\sigma, \sigma') : \Omega_{\text{cpt}}^k(M^{\circ}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\eta \longmapsto \int_{\sigma} \varphi_{-t}^{\circ *}\eta \end{aligned}$$

onde $\varphi_t^{\circ} = \varphi_t|_{M^{\circ}}$ e $\mathcal{I}_k(\cdot)$ representam correntes integrais no sentido de FEDERER (2014).

Os núcleos dos operadores $\mathbb{P}_t^{\uparrow, r/a}$ continuam os mesmos e são obtidos a partir

da fórmula 6. Para calcular os limites de $\lim \mathbb{P}_t^{\mathfrak{h},a/r}(\sigma)$, quando t tende ao infinito, é fundamental a seguinte relação:

$$\mathbb{P}_t^{\mathfrak{h}}(\sigma)(\eta) = \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta). \quad (13)$$

Note que o lado direito precisa uma interpretação, desde que $\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta$ não é uma forma suave. Daremos detalhes disso na subseção 4.1. Uma vez analisado o caso sem fronteira, para o caso com fronteira as contas funcionam da mesma forma. Os limites dos operadores $\mathbb{P}_t^{r/a}$ converge na norma flat e satisfazem as fórmulas de homotopia

$$\mathbb{T}^{\mathfrak{h},a/r} \circ d + d \circ \mathbb{T}^{\mathfrak{h},a/r} = \mathbb{I} - \mathbb{P}^{\mathfrak{h},a/r}$$

e as expressões de $\mathbb{P}^{\mathfrak{h},a/r}$ são

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\mathfrak{h},a}(\sigma) &= \sum_{p \in Cr^0(f)} (S_p \cdot \sigma)[U_p] + \sum_{p \in Cr^s(f)} (S_p \cdot \sigma)[\tilde{U}_p]; \\ \mathbb{P}^{\mathfrak{h},r}(\sigma, \sigma')(\eta) &= \sum_{p \in Cr^0(f)} (S_p \cdot \sigma)[U_p] + \sum_{p \in Cr^u(f)} (\tilde{S}_p \cdot \sigma)[U_p]. \end{aligned}$$

Repare que nas expressões dos limites aparecem a interseção das variedades estáveis com símplice, ou seja, $S_p \cdot \sigma$. Isso faz sentido devido a condição de transversalidade da definição de σ .

Definimos os complexos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\mathbb{Z},a} &:= \bigoplus_{p^0 \in Cr^0(f)} \mathbb{Z}[U_p] + \bigoplus_{p^s \in Cr^s(f)} \mathbb{Z}[\tilde{U}_{p^s}] = \text{Im } \mathbb{P}^{\mathfrak{h},a} \\ \mathcal{U}^{\mathbb{Z},r} &:= \bigoplus_{p^0 \in Cr^0(f)} \mathbb{Z}[U_p] + \bigoplus_{p^u \in Cr^u(f)} \mathbb{Z}[U_{p^u}] = \text{Im } \mathbb{P}^{\mathfrak{h},r}. \end{aligned}$$

Os pares $(\mathcal{U}^{\mathbb{Z},a/r}, d)$ são subcomplexos dos complexos das correntes integrais.

Além disso,

Teorema 3 *As aplicações*

$$\tilde{\mathbb{P}}^{\mathfrak{h},a} : C_k^{\mathfrak{h}}(M \setminus \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z},a} \quad \tilde{\mathbb{P}}^{\mathfrak{h},r} : C_k^{\mathfrak{h}}(M, \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{U}^{\mathbb{Z},r}$$

induzem os isomorfismos

$$\tilde{\mathbb{P}}^{\mathfrak{h},a} : H_k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\mathcal{U}^{\mathbb{Z},a}) \quad \tilde{\mathbb{P}}^{\mathfrak{h},r} : H_k(M, \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\mathcal{U}^{\mathbb{Z},r})$$

É razoável se questionar sobre a existência do outro limite, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^{r/a}(\omega)$. Fa-

zendo a modificação no grading da definição de correntes é suficiente calcular o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^{r/a}(\omega)$. Nesse caso estamos invertendo a orientação do fluxo, ou seja, alterando o sentido das variedades estáveis e instáveis que passam a ser instáveis e estáveis respectivamente.

De resto, tudo funciona da mesma forma: os limites $\mathbb{P}^{r/a} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^{r/a}$ existem e são

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^r(\omega) &= \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [\tilde{S}_p], \\ \mathbb{P}^a(\omega) &= \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} \left(\int_{\tilde{U}_p} \omega \right) \cdot [S_p]. \end{aligned}$$

onde

$$[\tilde{S}_p] = [S_p] - \sum_{q \in \text{Cr}_k^s(f)} \bar{n}(p, q) \cdot [S_q] \quad p \preceq q.$$

Note que, para $p \in \text{Cr}_k^u(f)$, o suporte da corrente $[\tilde{S}_p]$ está contido no fecho de

$$S_p \cup \left(\bigcup_{q \in \text{Cr}_k^s(f)} S_q \right).$$

Note que estamos usando as seguintes notações:

$$\mathbb{P} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{P}_t \quad \mathbb{P} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t.$$

A imagem de $\mathbb{P}^{r/a}$ são subconjuntos de

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k^r &:= \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[S_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} \mathbb{R}[\tilde{S}_p], \\ \mathcal{S}_k^a &:= \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[S_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} \mathbb{R}[S_p]. \end{aligned}$$

Os pares $(\mathcal{S}_k^{r/a}, d^{r/a})$ são subcomplexos de $(\mathcal{D}^k(M), d^{r/a})$.

Teorema 4 *As aplicações $\tilde{\mathbb{P}}^{r/a}$ induzem isomorfismos*

$$\tilde{\mathbb{P}}^r : H_{\text{dR}}^k(M, \partial M) \rightarrow H^k(S^{r,*})$$

$$\tilde{\mathbb{P}}^a : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H^k(S^{a,*}).$$

onde $\tilde{\mathbb{P}}^{r/a} := \text{Im } \mathbb{P}^{r/a}$. Além disso, os isomorfismos $\tilde{\mathbb{P}}^{r/a}$, $\tilde{\mathbb{P}}^{r/a}$ dão uma nova formulação

da dualidade de Lefschetz:

$$H^k(\mathcal{S}^{r/a,*}) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^{r/a}).$$

Suponha agora que M é uma variedade Riemanniana compacta e orientada de dimensão m sem bordo e N é uma hipersuperfície, compacta mergulhada em M tal que $M \setminus N$ é uma variedade sem bordo e a normal da hipersuperfície é compatível com a orientação de M e N . Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com campo gradiente tangente a uma hipersuperfície N , vamos classificar os pontos críticos ao longo da hipersuperfície da mesma maneira que no caso com bordo, quer dizer pontos estáveis e pontos instáveis, dependendo se a normal da orientação é autovetor para autovalor positivo ou negativo de $\text{Hess } f$ no ponto e o representaremos por $\text{Cr}^{N,s}(f)$ e $\text{Cr}^{N,u}(f)$, respectivamente. Para os pontos críticos que estão em $M \setminus N$ escreveremos $\text{Cr}^{M \setminus N}(f)$. Repare que uma função deste tipo não é Morse-Smale, pois a condição de transversalidade não é satisfeita.

Nessa situação descrita acima não tem-se como pedir universalmente transversalidade de $U_p \cap S_q$ dentro da variedade M , porque há casos quando tanto U_p quanto S_q estão contidos dentro da hipersuperfície, isto é, quando p e q e estável. Quando isso acontece faz sentido pedir somente a transversalidade dentro de N .

Nessas condições prosseguimos para definir operadores como antes: os operadores

$$\mathbb{P}_t^M := \mathbb{P}_t : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M) \quad \mathbb{P}_t^N : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M \setminus N)$$

onde $\mathbb{P}_t = \varphi_t^* \omega$ e $\mathbb{P}_t^N = \tilde{\varphi}_t := \varphi_t|_{M \setminus N}$ possuem limites e satisfazem as equações

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P} \quad d \circ \mathbb{T}^N + (-1)^* \mathbb{T}^N \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}^N,$$

para os operadores de homotopia \mathbb{T} , \mathbb{T}^N com grau $+1$.

Teorema 5 *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta orientada sem bordo e N uma hipersuperfície mergulhada em M tal que $M \setminus N$ é uma variedade. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de Morse-Smale na hipersuperfície N , valem as equações:*

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P} \quad d\mathbf{T}^N = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}^N \quad (14)$$

em $M \times M$ e $M \setminus N \times M \setminus N$, respectivamente. As correntes \mathbf{T} , \mathbf{T}^N possuem volume finito, $\mathbf{\Delta}$ é a diagonal e

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] \quad (15)$$

$$\mathbf{P}^N = \sum_{p \in \text{Cr}^{M \setminus N}(f)} [S_p] \times [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^{N,u}(f)} [S_p] \times [U_p]. \quad (16)$$

Consequentemente, se $\omega \in \Omega^k(M)$ valem as igualdades

$$\mathbb{P}(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p]; \quad (17)$$

$$\mathbb{P}^N(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^{M \setminus N}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^{N, u}(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) \cdot [U_p]. \quad (18)$$

Além disso, existe dois operadores \mathbb{T} , \mathbb{T}^N de grau +1 tal que

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P} \quad d \circ \mathbb{T}^N + (-1)^* \mathbb{T}^N \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}^N.$$

As correntes \tilde{U}_p e \tilde{S}_p do Teorema acima são definidas no mesmo espírito do caso com fronteira. Os subgrupos

$$\mathcal{U}_k^M = \mathcal{U}_k := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k(f)} \mathbb{R} [\tilde{U}_p];$$

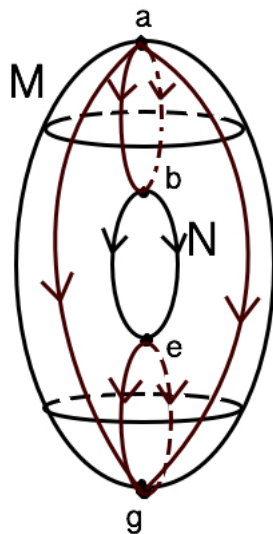
$$\mathcal{U}_k^N := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^{M \setminus N}(f)} \mathbb{R} [U_p] \quad \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^{N, u}(f)} \mathbb{R} [U_p]$$

são as imagens dos operadores \mathbb{P} , \mathbb{P}^N . Desta maneira, como anteriormente, podemos considerar as restrições de \mathbb{P} , \mathbb{P}^N aos codomínios por \mathcal{U} , \mathcal{U}^N .

Teorema 6 *As aplicações \mathbb{P} , \mathbb{P}^N induzem os isomorfismos com coeficientes reais*

$$\mathbb{P}_* : H^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}) \quad \mathbb{P}_*^N : H^k(M \setminus N) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}^N).$$

Uma consequência do Teorema acima é a possibilidade de calcular a homologia de certas variedades com a condição de transversalidade fraca. Por exemplo, seja M o toro em pé e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura, conforme a figura abaixo.



Note que f não é Morse-Smale, pois os pontos críticos b, e possuem índices igual a 1 e existem duas trajetórias que os ligam. O círculo menor N que contém o ponto b e o ponto e é uma hipersuperfície de dimensão 1, seu campo gradiente é tangente a N e contém as linhas de fluxo que ligam esses pontos críticos. Dessa maneira, b é um ponto crítico estável a N , o ponto e é crítico instável a N e a corrente $[\tilde{U}_b]$ é por definição

$$[\tilde{U}_b] = [U_b] + n(b, e) \cdot [U_e].$$

Assim, obtemos os complexos

$$\mathcal{U}_2 = \mathbb{R}[U_a] \quad \mathcal{U}_1 = \mathbb{R}[\tilde{U}_b] + \mathbb{R}[U_e] \quad \mathcal{U}_0 = \mathbb{R}[U_g].$$

Dessa maneira, identificando $\mathbb{R}[U_p]$ com $\langle p \rangle$ escrevemos os complexos abaixo:

$$0 \rightarrow \langle a \rangle \xrightarrow{d_2} \langle b, e \rangle \xrightarrow{d_1} \langle g \rangle \rightarrow 0 \quad (19)$$

As diferenciais desses complexos são iguais a zero, veja o Exemplo 18. Portanto, calculando a homologia do complexo de correntes (\mathcal{U}_*, d) e usando o Teorema acima temos:

$$H^{2-k}(M) = H_k(\mathcal{U}_*) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 2 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

O aparato técnico para desenvolvimento dos resultados desta tese foram fortemente influenciado pelas técnicas desenvolvidas por HARVEY and LAWSON JR (2001), LATSCHEV (2000) e CIBOTARU (2016).

A função ser Morse-Smale garante a existência de uma resolução para o gráfico

$$T = \{(x, \varphi_s(x)) \mid 0 \leq s \leq t\} \subset M \times M.$$

Grosseiramente falando, por meio de um processo indutivo, podemos obter uma variedade com cantos compacta da mesma dimensão, isto é, $n + 1$, que se projeta no fecho de T . Esse processo faz T possuir medida Hausdorff $n + 1$ dimensional finita.

No cálculo $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^{r/a}(\omega)$, os elementos envolvidos são formas diferenciais e o contexto torna-se bastante natural. Nas correntes $\mathbf{P}_t^{\hat{n}, a/r}$, não temos a mesma coisa: elas são obtidas pelo push-forward de simplices $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ pelo gráfico de fluxos e o seu limite existem por causa da continuidade da interseção de $\pi_1^* \sigma$ e $\hat{\Gamma}$, ou seja, $\pi_1^* \sigma \wedge \hat{\Gamma}$. Detalhes são encontrados na Subseção 4.3.

A variedade $\mathcal{M}(p, q) := U_p \cap S_q$ pode ser vista como linhas de fluxos que ligam p a q . Como a condição padrão de transversalidade não acontece no bordo existem trajetórias ligadas por dois pontos críticos de mesmo índice, isto é, existe $p \in \text{Cr}_k^s(f)$ e $q \in \text{Cr}_k^u(f)$ com $p \preceq q$. Nessa situação $\mathcal{M}(p, q)$ está totalmente contida no bordo e a transversalidade não pode ser vista com respeito a inteira variedade. Sua dimensão é dada pela sentença

$$\dim \mathcal{M}(p, q) = \begin{cases} \lambda_p - \lambda_q + 1 & p \in \text{Cr}_k^s(f) \text{ e } q \in \text{Cr}_k^u(f) \text{ com } p \preceq q. \\ \lambda_p - \lambda_q & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Por fim, observe que para esses pontos críticos de bordo, podemos interpretar as variedades instáveis de duas formas: relativa a variedade ou ao bordo. Nessa situação as variedades instáveis possuem a mesma dimensão o que justifica a corrente \tilde{U}_p .

O contexto topológico dos resultados do Harvey e Lawson é a dualidade de Poincaré. É natural esperar que por trás dos nossos resultados há uma manifestação da Dualidade de Lefschetz e isso nos guiou para achar os complexos de formas e posteriormente os complexos de cadeias suaves a ser corridas pelo fluxo.

Uma necessidade nas provas que fizemos foi obter dualidades de Lefschetz nas versões não-compactas que de fato faltam na literatura. No contexto deRham, elas tomam a forma seguinte. Considera os pairings:

$$B : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \times \Omega^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{B} : \Omega^k(N, \partial N) \times \Omega_{\text{cpt}}^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidos por

$$((\omega, \eta), \gamma) \xrightarrow{B, \tilde{B}} \int_N \omega \wedge \gamma + \int_{\partial N} \eta \wedge \iota^* \gamma.$$

Estes pairings são não-degenerados. Isso decorre do fato que o quase-isomorfismo

$$\begin{aligned} \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N) &\hookrightarrow \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \\ \omega &\longmapsto (\omega, 0) \end{aligned}$$

transforma o pairing B na dualidade de Poincaré no complemento do bordo e o outro pairing B' é uma encarnação diferente da Dualidade de Poincaré para o caso não compacto.

Em particular, obtemos os isomorfismos

$$H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D(\cdot)) \simeq H_{m-k}(\mathcal{E}'_*(\cdot)) \quad H^k(\cdot) \simeq H^{m-k}(\Omega_{D,\text{cpt}}^*(\cdot))^*. \quad (20)$$

enquanto

$$H_{\text{cpt}}^k(\cdot) \simeq H^{m-k}(\Omega_D(\cdot))^* \quad H^k(\Omega_D(\cdot)) \simeq H_{m-k}(\mathcal{D}'_*(\cdot)). \quad (21)$$

Ao longo da tese trabalhamos com diversos espaços de formas e correntes. Em especial, com as formas $\Omega^*(M)$, $\Omega^*(\partial M)$, $\Omega^*(M, \partial M)$, $\Omega_D^*(M)$ e $\Omega_{\text{cpt}}^*(M, \partial M)$ e seus duais. Podemos inserir dois novos espaços de formas:

$$\Omega_I^*(M \setminus \partial M) := \{\omega \in \Omega^*(M \setminus \partial M) \mid \overline{\text{spt } \omega}^{M^1} \cap \partial M = \emptyset\};$$

$$\Omega_{II}^*(M \setminus \partial M) := \{\omega \in \Omega^*(M \setminus \partial M) \mid \overline{\text{spt } \omega}^M \text{ é compacta em } M\}$$

seus espaços duais serão representados por

$$\mathcal{E}\mathcal{D}'_{I,*}(M \setminus \partial M) := \{T \in \mathcal{D}'_*(M \setminus \partial M) \mid \overline{\text{spt } T}^M \text{ é compacto em } M\};$$

$$\mathcal{E}\mathcal{D}'_{II,*}(M \setminus \partial M) := \{T \in \mathcal{D}'_*(M \setminus \partial M) \mid \overline{\text{spt } T}^M \cap \partial M = \emptyset\}.$$

Se M for uma variedade compacta, então $\Omega_I^*(M \setminus \partial M) = \Omega_{\text{cpt}}^*(M \setminus \partial M)$, $\Omega_{II}^*(M \setminus \partial M) = \Omega^*(M \setminus \partial M)$ e a aplicação bilinear

$$\Omega_I^k(M \setminus \partial M) \times \Omega_{II}^{n-k}(M \setminus \partial M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \eta) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

é não-degenerada. Para o caso não compacto, ainda permanece verdadeiro esse fenômeno. Isso acontece, pois as aplicações de extensão

$$\Omega_I^*(M \setminus \partial M) \hookrightarrow \Omega_D^*(M, \partial M)$$

e de restrição

$$\Omega_{\text{cpt}}^*(M) \rightarrow \Omega_{II}^*(M \setminus \partial M)$$

são quase-isomorfismos, transformando o pairing do tipo $\Omega_I^k(M \setminus \partial M) \times \Omega_{II}^{n-k}(M \setminus \partial M)$ no

¹ \overline{A}^M é o fecho de A em M .

pairing $\Omega_D^k(M) \times \Omega_{\text{cpt}}^{n-k}(M)$ e este último já provamos anteriormente que é não degenerado.

Projetos: Mudando um pouco os objetos, considere o par (M, N) onde M é uma variedade e $N \subset M$ uma subespaço fechado tal que $M \setminus N$ é induzido com um atlas de uma variedade. A variedade N pode ser hostil e cheio de singularidade. No mesmo espírito que $\Omega_{I/II}^k(M \setminus \partial M)$ podemos definir dois espaços de formas mais gerais:

$$\Omega_I^*(M \setminus N) := \{\omega \in \Omega^*(M \setminus N) \mid \overline{\text{spt } \omega^M} \cap \partial M = \emptyset\};$$

$$\Omega_{II}^*(M \setminus N) := \{\omega \in \Omega^*(M \setminus N) \mid \overline{\text{spt } \omega^M} \text{ é compacta em } M\}.$$

A mesma pergunta pode ser feita para este caso: o pairing

$$\Omega_I^k(M \setminus N) \times \Omega_{II}^{n-k}(M \setminus N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, \eta) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

é não degenerado? Por exemplo, se $N = \emptyset$ e M for compacta caímos na Dualidade de Poincaré. A mesma coisa acontece quando $N = \partial M$ e temos a Dualidade de Lefschetz. Um projeto que pode ser desenvolvido é estudar em quais casos o pairing acima é não-degenerado.

Muitas funções que surgem naturalmente não são de Morse. Em particular, existem funções que os conjuntos críticos são uniões disjuntas e finita de subvariedades conexas como por exemplo a função altura no toro deitado: seus conjuntos críticos são dois círculos. Funções desse tipo são chamadas de Funções Morse-Bott e foram introduzidos nos meados dos anos 50 devido a BOTT (1954). Outra linha de estudos seria trabalhar com funções Morse-Bott, usando as mesmas ideias que LATSCHEV (2000) para buscar deformações entre espaços de formas e complexos que calculem a homologia Morse-Bott. Um complexo de Morse-Witten para funções de Morse-Bott foi construído por Banyaga e Hurtubise e temos a esperança que possamos resgatar a construção dele no contexto de correntes.

2 CORRENTES E COMPLEXOS EM VARIEDADES SEM BORDO

O objetivo desse capítulo consiste em dar uma demonstração alternativa ao resultado principal encontrado em HARVEY and LAWSON JR (2001) para o caso com coeficientes reais. Contudo, antes iremos fazer um breve comentário sobre a Teoria de Morse para variedades sem fronteira. Maiores informações podem ser encontradas em MILNOR (2016) ou em BANYAGA and HURTUBISE (2013).

2.1 Teoria de Morse para Variedades sem Bordo e Homologia

Em todo o desenvolvimento desta Subseção, adotaremos M como sendo uma variedade Riemanniana compacta orientada de dimensão m e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave.

O conjunto de todos os pontos de M tal que a diferencial de f em p é nula é denotada por $\text{Cr}(f)$, isto é,

$$\text{Cr}(f) = \{p \in M \mid df_p = 0\}.$$

Se $p \in M$ dizemos que p é ponto crítico. Por sua vez, o conjunto $\text{Cr}(f)$ é chamado de conjuntos dos pontos críticos.

Para cada $p \in M$ a métrica Riemanniana $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ estabelece um isomorfismo entre o espaço tangente $T_p M$ e seu dual $T_p M^*$. Isso permite definir o operador linear $\nabla : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(M)$ que a cada função real f de classe C^∞ associa o único campo de vetores $\nabla f \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que

$$g_p(\nabla f(p), v) = \langle \nabla f(p); v \rangle_p = df_p(v)$$

para todo $x \in M$ e todo $v \in T_p M$.

Definição 1 *O campo ∇f é chamado de campo gradiente de f (com respeito a métrica g .)*

Note que

- O gradiente de f é igual a zero no ponto p se, e somente se, p é um ponto crítico;
- Se p não é ponto crítico, então $df_p(-\nabla f) = -\|\nabla f\|^2 < 0$.

Seja $\varphi_t : M \rightarrow M$ o fluxo gerado pelo campo gradiente negativo $V = -\nabla f$. Por definição, para $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = -V(\varphi_t(x)).$$

Nesse caso, o fluxo φ_t decresce ao longo das linhas de fluxos. Com efeito, denotando γ_x como sendo a linha de fluxo do campo gradiente (curva integral) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\gamma_x(t)) &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t(x)) \\ &= df_{\varphi_t(x)} \circ \frac{d}{dt}\varphi_t(x) \\ &= df_{\varphi_t(x)}(-\nabla f(\varphi_t(x))) \\ &= -\|(\nabla f)(\varphi_t(x))\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Observação 1 Poderíamos considerar o fluxo do campo gradiente. As mudanças em suma acontecem nas linhas do fluxo de φ_t que passam a crescer nessa situação.

Observação 2 Embora HARVEY and LAWSON JR (2001) tenham trabalhados com a convenção do fluxo com o gradiente positivo, iremos adotar o gradiente negativo, pois essa é a condição mais usada classicamente na teoria de Morse, inclusive por Kronheimer e Mrowka.

Se $p \in M$ é um ponto crítico, de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, então existe uma forma bilinear

$$\text{Hess}_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

definida como segue: para quaisquer vetores $V, W \in T_p M$ escolha extensões \tilde{V}, \tilde{W} em um aberto de p e defina

$$\begin{aligned} \text{Hess}_p f(V, W) &= (\tilde{V} \cdot (\tilde{W} \cdot f))(p) \\ &= V_p \cdot (\tilde{W} \cdot f) \end{aligned} \tag{22}$$

A expressão acima independe das extensões dos vetores V e W . De forma alternativa, podemos ver a hessiana como uma aplicação $\text{Hess } f : T_p M \rightarrow T_p M$ definida por

$$\text{Hess } f(V) = \nabla_V(\nabla f), \quad V \in T_p M, \tag{23}$$

onde ∇f é o gradiente de f . Em coordenadas, a Hessiana é dada pela derivada segunda da expressão de f na imagem da p .

Definição 2 Seja p um ponto crítico da função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Se a Hessiana $\text{Hess } f : T_p M \rightarrow T_p M$ for uma forma bilinear não degenerada dizemos que p é não degenerado.

b) O índice do ponto crítico p é dimensão máxima do subespaço onde a restrição da Hessiana é negativa definida e vamos denotar esse índice por λ_p .

Observação 3 O conjunto $\text{Cr}_k(f)$ será denotado pelo pontos críticos de índice k , isto é,

$$\text{Cr}_k(f) := \{p \in \text{Cr}(f) \mid \lambda_p = k\}.$$

A aplicação Hessiana quando é não degenerada no ponto crítico p permite o split

$$T_p M = T_p^s M \oplus T_p^u M$$

onde $\text{Hess } f|_{T_p^s M}$ é positiva definida e $\text{Hess } f|_{T_p^u M}$ é negativa definida.

Definição 3 Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma função de Morse se todos os seus pontos críticos forem não degenerados.

Os pontos críticos não degenerados não se acumulam, isto é, não são isolados. Em particular, supondo que M é compacta seus pontos críticos são finitos.

O comportamento local de uma função em um ponto crítico não-degenerado é completamente determinado, a menos de difeomorfismos, pelo chamado Lema de Morse.

Lema 1 (Lema de Morse) Seja M uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Se $p \in M$ é um ponto crítico não-degenerado de f , denotando λ_p seu índice em p , existe uma vizinhança U de p e uma carta suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, centrada em 0 tal que se $\phi(x) = (x_1, \dots, x_m)$ para $x \in U$, então

$$(f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = f(p) + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-\lambda_p}^2 - x_{m-\lambda_p+1}^2 - x_{m-\lambda_p+2}^2 - \dots - x_m^2. \quad (24)$$

Observação 4 Por simplicidade, vamos escrever a função da equação (24) por

$$f(u, v) = f(p) + \frac{1}{2}|u|^2 - \frac{1}{2}|v|^2,$$

onde $u = (u_1, \dots, u_{m-\lambda_p})$ e $v = (v_{m-\lambda_p+1}, \dots, v_m)$.

Seja $\gamma_x : (a, b) \rightarrow M$ dada por $\gamma_x(t) = \varphi_t(x)$ a linha de fluxo do campo gradiente. A compacidade de M garante que as linhas de fluxos γ_x estão definidas para todo tempo. Com argumentos sequenciais podemos verificar que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt} f(\gamma_x(t)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} -\|(\nabla f)(\varphi_t(x))\|^2 = 0.$$

Isso significa que as linhas de fluxos do campo gradiente começam e terminam em pon-

tos críticos, isto é, dado $x \in M$ temos que os limites $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_x(t)$ existem, e são pontos críticos de f . Supondo que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_x(t) = p$ em $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_x(t) = q$ vamos escrever $q \prec p$ ou $p \succ q$.

Definição 4 Dado o ponto crítico $p \in \text{Cr}(f)$ podemos associar as variedades estáveis e instáveis do fluxo definidas por

$$S_p = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = p\}$$

e

$$U_p = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = p\}.$$

As variedades estáveis S_p e U_p são subvariedades mergulhadas de M (não necessariamente fechadas) com $\dim U_p = \dim T_p^u M = \lambda_p$ e $\dim S_p = \dim T_p^s M = m - \lambda_p$. Para $p \in \text{Cr}(f)$ a variedade instável U_p é tangente em p ao subespaço linear $T_p^u M$. Além disso, U_p é contrátil e assim induz uma orientação em $T_p^u M$. Fixamos uma orientação para todas as variedades instáveis U_p e induzimos uma orientação em S_p pela convenção $T_p S_p + T_p U_p = T_p M$.

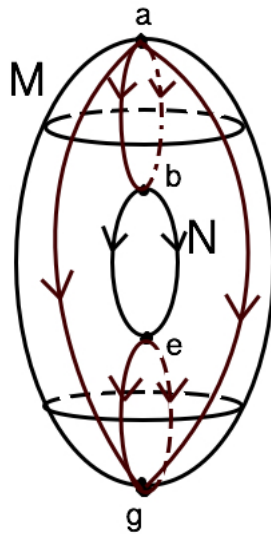
Definição 5 Uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita satisfazer a condição de transversalidade de Morse-Smale se as variedades instáveis e estáveis são transversais, isto é, $U_p \pitchfork S_q$ para todo $p, q \in \text{Cr}(f)$. Nesse caso dizemos que a função é Morse-Smale.

Argumentos de transversalidades garantem que:

Proposição 1 Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Morse-Smale e $p, q \in \text{Cr}(f)$ são pontos críticos tal que $U_p \cap S_q \neq \emptyset$, então $U_p \cap S_q$ é uma subvariedade mergulhada em M com dimensão igual a $\lambda_q - \lambda_p$.

Em particular, se a interseção $U_p \cap S_q \neq \emptyset$, então $U_p \cap S_q$ contém pelo menos uma linha de fluxo que vai de p até q . Como a linha de fluxo do campo gradiente tem dimensão igual a 1 segue que $\lambda_p > \lambda_q$. Isto significa que numa função de Morse-Smale não existe linha de fluxo entre pontos do mesmo índice. Outro fato importante é: se $\lambda_q = \lambda_p - 1$, a compacidade de M garante que a interseção $U_p \cap S_q$ é formada por uma quantidade finita de linhas de fluxos. Veja a Observação 5

Exemplo 1 A função altura no toro T^2 verticalmente sobre o plano $z = 0$ em \mathbb{R}^3 não é uma função Morse-Smale, pois existem duas trajetórias (do campo gradiente negativo) que parte do ponto crítico b para o ponto crítico c e seus índices são iguais a 1.



Vamos agora, utilizando o fluxo do campo gradiente negativo associar um complexo de cadeia $(C_k(f), \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a função Morse-Smale $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o qual é chamado o complexo de Morse-Witten para f .

Como mencionado anteriormente, dois pontos críticos $p, q \in Cr(f)$ tais que $U_p \cap S_q \neq \emptyset$ e $\lambda_p - \lambda_q = 1$ a transversalidade garante que $U_p \cap S_q$ são linhas de fluxos do campo gradiente negativo. Vamos agora orientar esse espaço: para $x \in U_p \cap S_q$ considerando a sequência exata

$$0 \longrightarrow T_x(U_p \cap S_q) \xrightarrow{i} T_x U_p \xrightarrow{\pi} N_x S_q \longrightarrow 0, \quad (25)$$

seja $\{w_1, \dots, w_{k-1}\} \subset T_x U_p$ com a propriedade que suas imagens $\{\pi(w_1), \dots, \pi(w_{k-1})\}$ é uma base orientada em $N_x S_q$ e $\{v_1\}$ é uma base de $T_x(U_p \cap S_q)$. Então, declaramos que $\{v_1\}$ é uma base orientada de $U_p \cap S_q$ se

$$i(v_1), w_1, \dots, w_{k-1}$$

é uma base orientada de $T_x U_p$. O espaço das trajetórias não parametrizadas $(U_p \cap S_q)/\mathbb{R}$ é uma variedade compacta de dimensão 0 e consiste de um número finito de elementos (que são a quantidade das linhas de fluxos que vão de p até q). Cada fluxo pode ser associado ao sinal 1 ou -1 usando a orientação do fluxo gradiente.

Consideremos o conjunto $C_*(f)$ dado por

$$C_*(f) = \left(\bigoplus_{p \in Cr(f)} \mathbb{Z} \cdot p \right) \otimes A,$$

onde A é \mathbb{R} ou \mathbb{Z} . Dados $p, q \in Cr(f)$ com $\lambda_q = k$ e $\lambda_p = k - 1$, defina o operador

$$\partial_k : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$$

$$\partial_k(q) = \sum_{p \in C_{k-1}(f)} n(q,p)p$$

onde $n(p, q)$ é a soma algébrica dos sinais das linhas de fluxos.

Observação 5 Como p e q da forma acima tem índices consecutivos, o valor $n(p, q)$ é finito. Isso acontece por causa da igualdade:

$$\overline{M(p, q)} = M(p, q) \cup \{p, q\}.$$

Note que $M(p, q) \cup \{p, q\} \subset M$ é fechado e não existe ponto crítico entre p e q . Assim, $M(q, p) \cup \{p, q\} \subset M$ é compacto. Além disso, as linhas de fluxos que liga p a q formam uma cobertura aberta de $M(p, q)$ que pode ser estendida para uma cobertura aberta de $M(p, q) \cup \{p, q\}$ tomando a união de linha de fluxo com pequenos conjuntos abertos em torno de p e q . Como toda cobertura aberta num conjunto compacto tem subcobertura finita o número de linhas de fluxos que ligam p a q é finito.

Teorema 7 O Complexo de Morse-Witten calcula a homologia da variedade com coeficiente inteiros, isto é,

$$H_k(M, A) = H_k(C_*(f), \partial_*).$$

Demonstração: Veja SCHWARZ (1993) ou BANYAGA and HURTUBISE (2013). ■

A homologia do complexo de Morse-Witten independe da escolha das orientações da variedade estáveis e instáveis. Uma mudança na escolha das orientações afeta somente o sinal do operador de bordo.

2.2 Pullback de Fluxos Morse-Smale e Correntes em Variedades sem Bordo

Nesta subseção vamos considerar M uma variedade Riemanniana, orientada e compacta de dimensão m e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse.

Considerando $\varphi_t : M \rightarrow M$ como sendo o fluxo gradiente negativo da função f estamos interessado em estudar quais condições o limite abaixo existe:

$$\omega_{\pm\infty} := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_t^* \omega.$$

A escolha de calcular esse limite é feita com um olhar para o caso com fronteira. Por este motivo exibiremos uma outra demonstração conforme pode ser vista no Teorema 10.

Inicialmente calcularemos o limite quando $t \rightarrow -\infty$ enquanto o outro limite $t \rightarrow \infty$ será encontrado no Apêndice.

Sendo mais preciso, devemos calcular em quais condições o operador

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M) \\ \omega &\longmapsto \varphi_t^* \omega \end{aligned} \quad (26)$$

possui limite $\mathbb{P} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{P}_t$. Para isso, vamos utilizar Teoria das correntes para dar um significado fraco a esse limite.

O espaço das correntes será considerado $\mathcal{D}'_k(M) = (\Omega^k_{\text{cpt}}(M))^*$. Desta maneira, o espaço das formas suaves de grau k pode ser visto como um subconjunto do espaços das correntes de grau $m - k$, isto é, temos uma imersão $\Omega^k(M) \hookrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ que associa $\omega \in \Omega^k(M)$ a corrente $[\omega] \in \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ definida por

$$[\omega](\eta) \equiv \int_M \omega \wedge \eta, \quad \forall \eta \in \Omega^{m-k}(M). \quad (27)$$

Repare que o operador \mathbb{P}_t aplicado na forma ω é a corrente $[\varphi_t^* \omega]$ dada por

$$[\varphi_t^* \omega](\eta) = \int_M \varphi_t^* \omega \wedge \eta.$$

O operador da equação (26) no tempo $t = 0$ será denotado por $\mathbb{P}_0 := \mathbb{I} = \Delta$. Ademais, o operador \mathbb{I} é um isomorfismo. Com efeito, pelo Teorema de Rham (LEE (2010)) temos que o pairing

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) \times \Omega^{m-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega; \eta) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

é não-degenerado. Assim,

$$H^k(M) \simeq H^{m-k}(M)^* \simeq H_{m-k}(\underbrace{\mathcal{D}'_*(M)}_{(\Omega^*(M))^*}), \quad (28)$$

Em relação aos operadores \mathbb{P} e \mathbb{I} , existe uma família de operadores $\mathbb{T}_t : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k+1}(M)$ que satisfaz a fórmula

$$d \circ \mathbb{T}_t + (-1)^* \mathbb{T}_t \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}_t. \quad (29)$$

A expressão explícita do operador \mathbb{T}_t é

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_t : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k+1}(M) \\ \omega &\longmapsto \mathbb{T}_t(\omega) : \Omega^{m-k+1}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ & &\eta &\longmapsto \int_{[t,0] \times M} \varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta \end{aligned} \quad (30)$$

onde $p_2 : [t, 0] \times M \rightarrow M$ é a projeção na segunda coordenada.

Conforme veremos na próxima seção, o operador \mathbf{T}_t está intimamente relacionado com a família de variedades:

$$T_t = \{(s, \varphi_s(x), x); t \leq s \leq 0 \text{ e } x \in M\} \subset \mathbb{R} \times M \times M. \quad (31)$$

Obviamente, T_t é compacta com bordo. Suas componentes de bordo estão nos tempos $s = t < 0$ e $s = 0$.

Como M é uma variedade orientada, considere a orientação do bordo de T_t como sendo

$$\partial T_t = \{0\} \times \Delta - \{t\} \times \hat{\Gamma}_{\varphi_t},$$

onde $\hat{\Gamma}_{\varphi_t}$ representa o gráfico reverso da aplicação fluxo.

Defina a corrente

$$\mathbf{T}_t = (\text{pr})_*(T_t). \quad (32)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{pr} : \mathbb{R} \times M \times M &\longrightarrow M \times M \\ (t, p, q) &\longmapsto (p, q) \end{aligned}$$

é a projeção. Por definição, a diferencial d comuta com $(\text{pr})_*$, isto é, $d(\text{pr})_*(T_t) = (\text{pr})_*(\partial T_t)$. O bordo da equação (32) é

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_t &= (\text{pr})_*(\{0\} \times \Delta - \{t\} \times \Gamma_{\varphi_{-t}}) \\ &= (\text{pr})_*(\{0\} \times \Delta) - (\text{pr})_*(\{t\} \times \Gamma_{\varphi_t}) \\ &= \Delta - \hat{\Gamma}_{\varphi_t}. \end{aligned}$$

A corrente T_t poderia ser definida equivalentemente como sendo

$$\mathbf{T}_t = \Phi_*([t, 0] \times M), \quad (33)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \times M \\ (s, x) &\longmapsto (\varphi_s(x), x) \end{aligned} \quad (34)$$

Observação 6 *O fluxo do campo gradiente negativo na variedade compacta M é completo. Portanto, φ_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Desta maneira, se $y = \varphi_t(x)$ para $t < 0$, então vale a igualdade*

$$(\varphi_t(x), x) = (y, \varphi_{-t}(y))$$

e se $y = \varphi_{-t}(x)$ para $t > 0$, temos

$$(\varphi_{-t}(x), x) = (y, \varphi_t(y)).$$

2.3 Existência e Cálculo do Limite

Para que possamos calcular o limite da corrente \mathbf{P}_t e encontrar sua expressão, precisaremos construir uma resolução. Essa construção é um processo técnico onde mapeamos as trajetórias em uma vizinhança de cada ponto crítico. Por esse motivo vamos supor que localmente a métrica seja flat. Dessa maneira, segue a definição abaixo.

Definição 6 *O fluxo φ_t do campo gradiente negativo é chamado de f -tame se em torno de cada ponto crítico $p \in \text{Cr}(f)$ existe um sistema de coordenadas (u, v) tal que a métrica seja flat e o fluxo é da forma $\varphi_t(u, v) = (e^{-t}u, e^tv)$.*

Suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Morse-Smale numa variedade Riemanniana, compacta e orientável de dimensão m . Dado $p \in \text{Cr}_k(f)$, a condição f -tame se faz essencial para construir uma resolução das variedades estáveis (ou instáveis) de f no ponto p do fluxo do campo gradiente negativo. Essa Resolução é uma variedade compacta e com cantos de dimensão $m - k$ (ou k) que se projeta no fecho das variedades estáveis (ou instáveis) e que possui medida Hausdorff $m - k$ (ou k) dimensional finita. Como consequência dessa resolução obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 8 *Se f é Morse-Smale com campo gradiente tangente ao bordo e fluxo f -tame, pode-se verificar que:*

1. $\bar{U}_p = \bigcup_{q \prec p} U_q$ $\bar{S}_p = \bigcup_{p \prec q} S_q$;
2. U_p e S_p tem volume finito.

Demonstração: Detalhes no Apêndice de CIBOTARU (2016) ■

Teorema 9 *O gráfico reverso do fluxo*

$$\begin{aligned} T &= \{(\varphi_t(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), -\infty < t \leq 0\} \\ &= \{(y, \varphi_{-t}(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), -\infty < t \leq 0\} \\ &= \{(\varphi_{-t}(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), 0 \leq t < \infty\} \\ &= \{(y, \varphi_t(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), 0 \leq t < \infty\} \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- a) \bar{T} tem medida \mathcal{H}^{n+1} -finita;
- b) $\bar{T} \setminus T \subset \Delta \cup_{p \in \text{Cr}(f)} (\bar{S}_p \times \bar{U}_p)$;
- c) A corrente representada por T é de massa finita com a orientação dada pela convenção do fluxo gradiente negativo.

Demonstração: O item a) decorre do Teorema 3.25 em CIBOTARU (2016) e da Seção

14 em HARVEY and LAWSON JR (2001), o item b) é consequência da descrição explícita da compactificação do espaços moduli trajetórias e o item c) é consequência imediata do item a). ■

O próximo Teorema é o resultado principal dessa seção, mas antes precisamos inserir a notação:

$$\tilde{U}_p = \bigcup_{q \prec p} U_q = \{x \in M \mid x \prec p\}.$$

Observação 7 Note que \tilde{U}_p é formado pelas trajetórias (simples ou quebradas) que se ligam a p . Nesse situação em especial, caso sem fronteira, temos que $\tilde{U}_p = \overline{U}_p$. De forma análoga, podemos considerar

$$\tilde{S}_p = \bigcup_{p \prec q} S_q = \{x \in M \mid p \prec x\}$$

e portanto, vale a igualdade $\tilde{S}_p = \overline{S}_p$.

Para o próximo resultado e seus corolários vamos desconsiderar as orientações, pois iremos dedicar um capítulo em especial para o mesmo.

Teorema 10 Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale em uma variedade Riemanniana, compacta com dimensão igual a m com fluxo do gradiente negativo satisfazendo a condição f -tame. Então existe uma equação de correntes integrais

$$d\mathbf{T} = \mathbf{P} - \Delta \tag{35}$$

em $M \times M$, onde T é uma subvariedade mergulhada em $M \times M$ com medida Hausdorff $(m+1)$ -dimensional finita, $\Delta \subset M \times M$ é a diagonal e

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in Cr(f)} [S_p] \times [U_p]. \tag{36}$$

Demonstração: Considere a subvariedade mergulhada

$$T = \{(\varphi_t(x), x) \mid x \notin Cr(f), -\infty < t \leq 0\}$$

em $M \times M$. A Observação 6 permite identificar T como

$$T = \{(x, \varphi_t(x)) \mid x \notin Cr(f), 0 \leq t < \infty\}$$

A demonstração dada por HARVEY and LAWSON JR (2001) tem como parte

principal encontrar a equação $d\mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{\Delta}$ numa vizinhança de (p, p) com $p \in \text{Cr}(f)$. Para o caso com fronteira infelizmente essa técnica não é suficiente. Vamos dar uma nova demonstração que será o alicerce para o caso com fronteira.

Se p é um ponto crítico de f com índice m , então a medida Hausdorff de dimensional m de \tilde{U}_p é finita, ou seja, $\mathcal{H}^m(\tilde{U}_p) < \infty$. Caso p não seja ponto de máximo a medida Hausdorff m dimensional é nula, isto é, $\mathcal{H}^m(\tilde{U}_p) = 0$. Como o conjunto dos pontos críticos de f é finito, o subconjunto

$$\Sigma := \left\{ \bigcup_{p \in \text{Cr}(f)} \{p\} \times \tilde{U}_p \mid p \text{ não é ponto máximo} \right\}$$

de $M \times M$ é fechado e possui medida Hausdorff m dimensional igual a zero.

Vamos dividir os pontos de Σ^c em 3 tipos:

- I. $\{(p, q) \mid p \text{ é ponto crítico não maximal, } q \notin \tilde{U}_p\}$;
- II. $\{(p, q) \mid p \text{ é ponto regular, } q \in M\}$;
- III. $\{(p, q) \mid p \text{ é ponto crítico máximo, } q \in M\}$.

Por sua vez, esses pontos dão origem a uma cobertura de Σ^c como segue:

- a) vizinhanças $D \subset \Sigma^c$ com $(p, q) \in D$ onde p é um ponto crítico não maximal, $q \notin \tilde{U}_p$ e $D \cap \text{spt } T = \emptyset$. Essas vizinhanças existem pelo seguinte motivo: o suporte de correntes, por definição, é fechado e se $(p, q) \in \text{spt } T$ então $(p, q) \in \tilde{S}_{p'} \times \tilde{U}_{p'}$ onde $p' \in \text{Cr}(f)$. Isso implicaria que $q \in \tilde{U}_p$ o que não pode acontecer;
- b) abertos $B \times M$, onde B é uma vizinhança que contém apenas pontos regulares tal que $f(B) \subset (c_1, c_2)$ onde c_1 e c_2 são valor críticos consecutivos;
- c) abertos $B \times M$ onde B é um aberto de ponto de máximo contido na vizinhança tame.

Iremos mostrar que T fornece a equação de correntes

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] \quad (37)$$

em cada aberto do **tipo a), b), c)**. Como $\Sigma \subset M \times M$ é um conjunto fechado e possui medida Hausdorff m dimensional igual a zero e as correntes são flat, o Teorema de suporte do Federer (Teorema 25) aplicado a corrente

$$d\mathbf{T} - \mathbf{\Delta} + \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p],$$

cujos suporte está contido em Σ , implica que

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p]$$

em $M \times M$.

Note que para os abertos do tipo a) temos que $D \cap \text{spt } \mathbf{P} = \emptyset$ e $D \cap \text{spt } \mathbf{\Delta} = \emptyset$. Por outro lado, a igualdade

$$\left(\sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] \right) \Big|_D = 0$$

vale trivialmente. Isso mostra que as equações 35 e 36 valem no aberto D .

Para demonstrar a identidade

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p]$$

para abertos de tipo b) e c) a ideia é olhar com atenção os detalhes da construção do Cibotaru no que diz respeito a resolução da variedade T .

Vamos repetir em breve os principais passos dessa construção. A ideia principal é a construção de uma variedade com cantos \widetilde{W} de dimensão $m + 1$ munida com uma "projeção" $\sigma : \widetilde{W} \rightarrow B \times M$ que é própria e tal que

- 1) a imagem de sigma contém o fecho do T ;
- 2) σ é um difeomorfismo de uma parte aberta densa de \widetilde{W} para uma parte aberta densa de T .

Segue dessas propriedades que $T|_{B \times M} = \sigma_* \widetilde{W}$. Podemos assim calcular $dT|_{B \times M}$ utilizando o fato bem conhecido que d comuta com push-forward. Por isso que é importante identificar a fronteira de codimensão 1 de \widetilde{W} .

A construção de \widetilde{W} é feita por indução começando com a diagonal em $B \times M$. Temos duas situações a analisar correspondendo as abertos de tipo b) ou c). No caso dos abertos de tipo b) a diagonal não toca nos pontos críticos e basicamente a construção do Cibotaru pode ser repetida aqui. No caso de abertos de tipo c) precisamos de uma alteração para realizar o primeiro passo da construção de \widetilde{W} , já que esse tipo de situação comporta um outro tipo de análise em Cibotaru. Nas duas situações esclarecemos quem é a fronteira de codimensão 1 do \widetilde{W} .

Para a conveniência do leitor repetimos agora os passos dessa construção. O seguinte Teorema contém informações mais detalhada sobre \widetilde{W} .

Teorema 11 *Seja B um aberto do tipo b). Então*

$$T_B = \{(x, \varphi_t(x)) \mid x \in B, 0 \leq t < \infty\}$$

admite uma resolução $\pi : I \times W \rightarrow B \times M$ tal que

- a) I é um intervalo compacto;
- b) W e $I \times W$ são variedades com cantos;
- c) π é uma aplicação própria;
- d) $\text{Im } \pi = \overline{T}_B$;
- e) $\pi|_{\text{int}(I \times W)}$ é um difeomorfismo sobre um conjunto aberto e denso.

Não pretendemos dar uma demonstração completa desse resultado, já que ele é o caso particular do Apêndice em CIBOTARU (2016), mas é importante entender a estrutura da demonstração, pois nela envolve um processo indutivo laborioso. Para entendermos melhor como funciona a identificação da fronteira de codimensão 1 em $I \times W$ vamos olhar para os detalhes do passo de indução. Isso permitiria finalizar o **Passo 2**) da demonstração.

A construção da aplicação π acontece por meio de um processo iterativo onde a transversalidade é importante.

Para abertos do **tipo b**), vamos discutir o primeiro passo da resolução.

Defina a função

$$\begin{aligned} \tilde{f} : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(y) \end{aligned}$$

onde f é a função de Morse original.

O fluxo gradiente de \tilde{f} tem como variedades críticas as variedades $M \times \{p\}$ onde $p \in \text{Cr}(f)$, a variedade estável é $M \times S_p$ e a variedade instável é $M \times U_p$.

Nosso interesse é fazer correr

$$\Delta(B) \subset B \times B \subset B \times M$$

via o fluxo gradiente da \tilde{f} para obter \overline{T}_B . Como os difeomorfismos do fluxo deixam a primeira variável fixa, segue que existe

$$\sigma : B \rightarrow B \times M$$

suave tal que

- $\sigma(B) \subset \tilde{f}^{-1}(d)$ para um d regular;
- $\sigma(b) = (b, \varphi_{t(b)}(b))$ para algum $t(b) \geq 0$.

A maneira de obter $\sigma(b)$ é deixar correr (b, b) no sentido do fluxo até intersectar $\tilde{f}^{-1}(d)$.

Nada interessante acontece até encontrar o primeiro nível crítico. Utilizando novamente os difeomorfismos do fluxo e diminuindo eventualmente B podemos supor que a imagem de σ está contido em $B \times B_1$ onde B_1 é uma vizinhança tame de um ponto crítico p tal que $f(p) = c$ e $d > c$ (lembramos que utilizamos o fluxo do campo gradiente

negativo).

Seja $d = c + \delta$ com δ pequeno e $\tilde{\varphi}_t(x) = (x, \varphi_t(x))$ o fluxo do gradiente negativo da função \tilde{f} . Na primeira fase da resolução é produzida uma variedade com cantos $[c - \delta, c + \delta] \times W_1$ de dimensão $m + 1$ que se projeta sobre o fecho de

$$\tilde{\varphi}([0, \infty) \times \sigma(B)) \cap \tilde{f}^{-1}([c - \delta, c + \delta])$$

onde δ é escolhido de forma que existe apenas um nível crítico no intervalo $[c - \delta, c + \delta]$.

A "projeção"

$$\hat{\sigma}^1 : [c - \delta, c + \delta] \tilde{\times} W_1 \rightarrow B \times B_1$$

dessa resolução tem a propriedade que $\hat{\sigma}_{c+\delta}^1$ é o blow-up orientado de $(\hat{\sigma}^1)^{-1}(B \times S_p)$ dentro de B . O fato que σ intersecta $B \times S_p$ transversalmente é consequência da propriedade Smale do fluxo.

Mais ainda, $\hat{\sigma}_{c-\delta}^1$ tem a propriedade de ser transversal a todos $B \times S_q$ para q crítico com

$$f(q) < f(p).$$

Agora, o fluxo do campo gradiente negativo pode ser usado para estender $\hat{\sigma}^1$ a uma aplicação $[c_1 + \delta, c + \delta] \tilde{\times} W \rightarrow B \times M$ onde c_1 é o próximo nível crítico na direção no fluxo (evidentemente $c_1 < c$).

A transversalidade é preservado pelos difeomorfismos do fluxo e desde que

$$\hat{\sigma}_{c_1+\delta}^1 \pitchfork B \times S_q$$

o processo anterior pode ser repetido, isto é, existe uma aplicação

$$\hat{\sigma}^2 : [c_1 - \delta_1, c_1 + \delta] \times W_2 \rightarrow B \times M$$

que se projeta no fecho de

$$\tilde{\varphi}([0, \infty) \times \hat{\sigma}_{c_1+\delta}^1(W_1)) \cap \tilde{f}^{-1}([c_1 - \delta_1, c_1 + \delta])$$

onde W_2 é o blow-up de $(\hat{\sigma}_{c_1+\delta}^1)^{-1}(B \times S_q)$ dentro de W_1 .

O intervalo que aparece em no domínio da aplicação π do Teorema 11 é da forma $I = [\min f, d]$, e $I \tilde{\times} W$ é uma variedade com cantos obtido por uma sucessão de Blow-ups.

De fato, na notação introduzida mais cedo $W = W_k$ onde W_k é o último Blow-up necessário. Como o número de pontos críticos é finito, esse processo acaba.

Olhemos agora com detalhes para o passo indutivo da construção da resolução.

Como todos os passos, de fato, repetem as mesmas ideias, é instrutivo olhar para a construção de W_1 .

Vamos supor que o nível crítico é 0. Lembramos que $\sigma : B \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\delta) \cap B \times B_1$.

O modelo bi-dimensional de um fluxo tame serve de inspiração para as aplicações posteriores. Cada elemento do conjunto

$$H_{-\delta, \delta} := \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 0, s \geq 0, rs = 1, -\delta \leq \frac{1}{2}(r^2 - s^2) \leq \delta\}$$

pode ser associado de forma bijetiva com o valor $t = \frac{1}{2}(r^2 - s^2) \in [-\delta, \delta]$. O espaço $H_{-\delta, \delta}$ pode ser visto como um pedaço de uma hipérbole em \mathbb{R}^2 situada no primeiro quadrante entre os níveis de energia $-\delta$ e δ . Como adotamos o fluxo do campo gradiente negativo iremos considerar a orientação do intervalo $[-\delta, \delta]$ como sendo a negativa, isto é, vamos considerar o início do intervalo δ percorrendo os valores reais até chegar em $-\delta$.

Seja a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : H_{-\delta, \delta} \times [0, \varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ (t, q) &\longmapsto \left(\sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} + t}, \sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} - t} \right). \end{aligned}$$

A imagem $(\text{Im } \psi_q)_{q \in [0, \varepsilon]}$, quando varia o valor q , nos dar uma família de curvas que pode ser interpretada como a deformação contínua da hipérbole $xy = \varepsilon$ para a trajetória quebrada $xy = 0$, ou seja, projetamos as hipérbolas sobre a união dos eixos

$$\{r = 0, 0 \leq s \leq \sqrt{2\delta}\} \cup \{s = 0, 0 \leq r \leq \sqrt{2\delta}\}.$$

Observe que, denotando $(x, y) := \psi(t, q)$ temos

$$xy = q \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(r^2 - s^2).$$

A aplicação ψ não é diferenciável em $(0, 0)$. Podemos resolver o problema da diferenciabilidade neste ponto mudando a estrutura suave do produto $H_{-\delta, \delta} \times [0, \varepsilon]$ introduzindo cantos o que torna a aplicação ψ suave. Com efeito, como ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem com inversa

$$\psi^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x^2 - y^2), xy \right)$$

a estrutura de cantos é dado pelo atlas maximal induzido pela a (única) carta ψ . Denotaremos essa estrutura suave por $H_{-\delta, \delta} \times_{\psi} [0, \varepsilon]$.

O que fizemos com uma única trajetória quebrada, desejamos fazer com uma família dessas trajetórias quebradas. Vamos escolher coordenadas tame. Nessas coorde-

nadas

$$\tilde{f}(b, \underbrace{x_1, \dots, x_l}_x, \underbrace{y_1, \dots, y_r}_y) = f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^l x_i^2 - \sum_{j=1}^r y_j^2 \right),$$

onde $l + r = m$. O fluxo de $-\nabla \tilde{f}$ é a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times B \times \mathbb{R}^m \rightarrow B \times \mathbb{R}^m$ dada por $\tilde{\varphi}(t, b, x, y) = (b, e^{-t}x, e^ty)$.

Seja

$$B \times V = B \times \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_l)}_x, \underbrace{(y_1, \dots, y_r)}_y \in \mathbb{R}^m; -\delta \leq f(x, y) \leq \delta, |x| \cdot |y| \leq \varepsilon \right\}$$

uma vizinhança da variedade crítica $B \times \{x = y = 0\} \subset B \times \mathbb{R}^m$ e seja

$$V_0 = \{(x, y) \mid |x| \cdot |y| = 0\} \cap V$$

como sendo a união das variedades estáveis e instáveis.

Se $\tilde{V} := H_{-\delta, \delta} \times \mathbb{S}^{l-1} \times [0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{r-1}$ considere \times' como sendo a operação $B \times' \tilde{V} := H_{-\delta, \delta} \times B \times \mathbb{S}^{l-1} \times [0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{r-1}$. A aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : B \times' \tilde{V} &\longrightarrow B \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^r \\ (t, b, v, q, w) &\longmapsto \left(b, v \sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} + t}, w \sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} - t} \right) \end{aligned}$$

satisfaz as propriedades:

- i) $\text{Im } \Psi = B \times V$;
- ii) $\text{Im } (\Psi|_{q=0}) = B \times V_0$;
- iii) $\Psi|_{q \neq 0}$ é um difeomorfismo sobre $(B \times' V) \setminus (B \times V_0)$;
- iv) Para b, v e w fixados, a aplicação $\Psi(\cdot, b, r, \cdot, s)$ leva esses pontos para uma certa hipérbole indexada por q que está no nível de energia t .

As propriedades acima torna Ψ em uma espécie de blow-up de $B \times V$ ao longo de $B \times V_0$. A restrição $\Psi|_{q=0}$ pode ser considerada como uma projeção de $|x| \cdot |y| = 1$ (situada entre os níveis $-\delta$ e δ) sobre os eixos $|x| \cdot |y| = 0$.

O fluxo $\tilde{\varphi}(t, b, x, y) = (b, e^{-t}x, e^ty)$ tem a seguinte relação (para b fixo) com a curva $t \mapsto \Psi(t, q, b, v, w)$: ela é uma reparametrização da trajetória conservando os valores de energia. Se $q \neq 0$ esta trajetória é simples e se $q = 0$ ela é a união das variedades instáveis e estáveis.

Escrevendo $\tilde{V}_t \subset \tilde{V}$ para fixar a primeira coordenada igual a t , em $H_{-\delta, \delta}$, temos que

$$\Psi(B \times' \tilde{V}_t) \subset \tilde{f}^{-1}(t).$$

O conjunto $B \times B_\delta$, onde

$$B_\delta := \{(x, 0); |x|^2 = 2\delta\} \subset \mathbb{R}^l \times \{0\}$$

é a interseção da variedade estável $B \times S_p$ com o nível $\tilde{f}^{-1}(\delta)$.

Observação 8 *Seja $V_\delta := V \cap f^{-1}(\delta)$.*

1. $\Psi|_{t=\delta}: B \times' \tilde{V}_\delta \rightarrow B \times V_\delta$ é um blow-up de $B \times B_\delta$ dentro de $B \times V_\delta \subset \tilde{f}^{-1}(\delta)$.
2. $\Psi^{-1}(B \times B_\delta) = \{(\delta, 0)\} \times B \times \mathbb{S}^{l-1} \times \mathbb{S}^{r-1}$ é o fibrado esférico normal a $B \times B_\delta$.

Agora que descrevemos o modelo local em torno da variedade crítica, vamos discutir o primeiro passo da resolução.

Voltamos para $\sigma : B \rightarrow B \times B_1 \simeq B \times \mathbb{R}^m$. Note que pela transversalidade $\sigma \pitchfork B \times S_p$, a pré-imagem $\sigma^{-1}(B \times S_p) = \Delta^{-1}(B \times S_p) = S_p \cap B$ é uma subvariedade de B com codimensão igual a codimensão de $B \times S_p$. De fato, $(B \times S_p) \cap \tilde{f}^{-1}(\delta)$ é fechada e então $\sigma^{-1}(B \times S_p)$ é fechado em B . Considere a aplicação $\text{Bl} : \text{Bl}_{S_p \cap B} B \rightarrow B$ onde $\text{Bl}_{S_p \cap B} B$ é o blow-up de $S_p \cap B$ dentro de B .

Observação 9 *Por definição*

$$\text{Bl}_{S_p \cap B} B = B \setminus (S_p \cap B) \sqcup [0, 1) \times S(\nu(S_p \cap B)) / \sim^{\text{exp}}$$

onde $S(\nu(S_p \cap B))$ é o fibrado esférico normal e exp é a exponencial definida em $[0, 1) \times S(\nu(S_p \cap B))$ sobre B . Observe que a exponencial satisfaz as propriedades abaixo

- (i) $\text{exp}|_{(0,1) \times S(\nu(S_p \cap B))}$ é difeomorfismo sobre $U \setminus (S_p \cap B)$, onde U é uma vizinhança tubular de $S_p \cap B$;
- (ii) $\text{exp}(0, \cdot) : S(\nu(S_p \cap B)) \rightarrow S_p \cap B$.

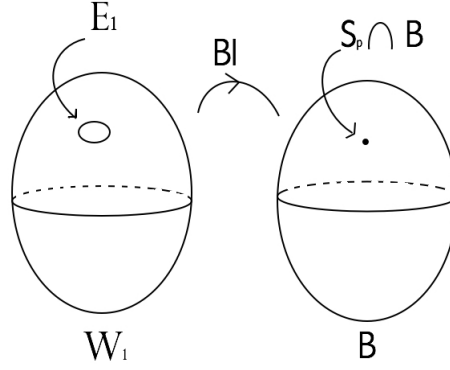
Essa relação de equivalência \sim^{exp} funciona da seguinte forma: $p \sim^{\text{exp}} (t, q, v)$ se, e somente se, $\text{exp}(t, q, v) = p$. Dessa maneira o Blow-up é construído colocando junto a inclusão $B \setminus (S_p \cap B) \hookrightarrow B$ com a exponencial exp .

É fácil verificar que a projeção Bl é própria.

Definamos o conjunto

$$\mathbb{E}_1 := \text{Bl}^{-1}(S_p \cap B) := S(\nu(S_p \cap B))$$

que chamaremos divisor de exceção.



Existe um levantamento $\tilde{\sigma}_\delta : W_1 \rightarrow B \times' \tilde{V}_\delta$ de σ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 W_1 = \text{Bl}_{S_p \cap B} B & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\delta} & B \times' \tilde{V}_\delta \\
 \text{Bl} \downarrow & & \downarrow \Psi_\delta \\
 B & \xrightarrow{\sigma} & B \times V_\delta \subset \tilde{f}^{-1}(\delta)
 \end{array} \quad (38)$$

Esse levantamento funciona da seguinte forma: em $W_1 \setminus \mathbb{E}_1$ é definido pela igualdade $\tilde{\sigma}_\delta = (\Psi_{\delta, q \neq 0}^{-1}) \circ \sigma \circ \text{Bl}$ e ao longo do divisor de exceção \mathbb{E}_1 ela é a composição do isomorfismo $d\sigma : \nu(S_p \cap B) \rightarrow \sigma^* \nu(B \times S_p)$ restrito a $S(\nu(S_p \cap B))$ com a projeção radial $\nu(B \times S_p) \setminus \{0\} \rightarrow S(\nu(B \times S_p))$ para obter uma aplicação de $S(\nu(S_p \cap B))$ para $S(\nu(B \times S_p))$. Da forma que se é construída, $\tilde{\sigma}_\delta$ aplica o divisor de exceção \mathbb{E}_1 (que é o novo bordo) para o divisor de exceção $B \times \tilde{V}_\delta \cap \{q = 0\}$.

O diagrama acima permite estender a aplicação $\tilde{\sigma}_\delta$ definindo $\tilde{\sigma} : [-\delta, \delta] \times W_1 \rightarrow B \times' \tilde{V}$ como sendo $\tilde{\sigma}(t, \tilde{w}) := (t, \tilde{\sigma}_\delta(\tilde{w}))$. Note que $\tilde{\sigma}$ não é suave no ponto $(0, \tilde{w})$ onde $\tilde{w} \in \text{Bl}^{-1}(S_p \cap B)$, mas podemos refinar uma estrutura em $[-\delta, \delta] \times W_1$ introduzindo cantos no ponto onde a função não é diferenciável. A aplicação que nos interessa é

$$\hat{\sigma}^1 := \Psi \circ \tilde{\sigma} : [-\delta, \delta] \times W_1 \rightarrow B \times f^{-1}([-\delta, \delta]),$$

pois é o passo inicial da construção e encerramos o **Passo 1)** para abertos do **tipo b)**.

Vamos agora encontrar a fronteira de codimensão 1 que aparecem no primeiro passo da construção, isto é, analisemos a restrição $\hat{\sigma}^1|_{\partial((-\delta, \delta) \times W_1)}$. Note que vamos considerar o intervalo $(-\delta, \delta)$ ao invés de $[-\delta, \delta]$, pois a fronteira de

$$\partial((-\delta, \delta) \times W_1) = (-\delta, \delta) \times \partial W_1 = (-\delta, \delta) \times \mathbb{E}_1$$

o que facilita na hora de usar o Teorema de Stokes.

A construção garante que para $\tilde{w} \in W_1$, a aplicação $\hat{\sigma}^1$, mapeia a curva $\alpha_{\tilde{w}}(t) := (t, \tilde{w})$ numa trajetória quebrada do campo gradiente negativo de \tilde{f} . Dessa forma, se $\tilde{w} \notin \mathbb{E}_1$ então a trajetória é simples (determinada por $\sigma(\text{Bl}(\tilde{w}))$) e caso $\tilde{w} \in \mathbb{E}_1$ então a

trajetória é quebrada.

Agora veremos o que acontece com a restrição

$$\hat{\sigma}^1|_{(-\delta, \delta) \times \mathbb{E}_1}.$$

Dado $\tilde{w} \in \mathbb{E}_1$ então $\tilde{\sigma}(t, \tilde{w}) \in B \times' \tilde{V} \cap \{q = 0\}$ o que implica em $\hat{\sigma}(t, \tilde{w}) = \Psi \circ \tilde{\sigma}(t, \tilde{w}) = \Psi(t, \tilde{\sigma}_\delta(\tilde{w})) \in B \times V_0$. Primeiramente, observe que \mathbb{E}_1 pode ser interpretado como o bordo de \tilde{W}_1 e para $\tilde{w} \in \mathbb{E}_1$ temos que $\Psi \circ \tilde{\sigma}$ aplica a curva $\alpha_{\tilde{w}}(t) = (t, \tilde{w})$ para uma única trajetória quebrada do campo gradiente negativo de \tilde{f} .

E mais, supondo sem perda de generalidade que todos os elementos de B se liga pelo fluxo ao ponto crítico p , a imagem da restrição de $\Psi \circ \tilde{\sigma}$ ao conjunto $(-\delta, 0] \times \mathbb{E}_1$ é

$$\Psi \circ \tilde{\sigma}((-\delta, 0] \times \mathbb{E}_1) = (S_p \cap B) \times (U_p \cap f^{-1}((-\delta, 0])).$$

Na verdade a restrição $\Psi \circ \tilde{\sigma} : (-\delta, 0) \times \mathbb{E}_1 \rightarrow f^{-1}(-\delta, 0)$ é um difeomorfismo entre $(S_p \cap B) \times (U_p \cap f^{-1}((-\delta, 0)))$. Vamos analisar $\Psi \circ \tilde{\sigma}|_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1} : [0, \delta] \times \mathbb{E}_1 \rightarrow (S_p \cap B) \times (S_p \cap V_0)$. Para isso, é necessário entender como funciona os pontos no bordo de \tilde{W}_1 . Supondo sem perda de generalidade que B é uma vizinhança contida na aberto tame do ponto crítico, o ponto $(t, (m, v)) \in \mathbb{E}_1$ onde $t \in [0, \delta]$ e $\|v\| = 1$ é mapeado, via a restrição $\Psi \circ \tilde{\sigma}|_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1}$, em $(m, \varphi_{t(m)}(m)) \in S_p \times S_p$.

Afirmção 1 *Supondo que p não é ponto de mínimo, a corrente gerada por $\Psi \circ \tilde{\sigma}|_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1}$ tem medida Hausdorff m dimensional nula.*

Esse afirmação deve ser dividida em duas etapas: Se p não é ponto de mínimo, analisemos quando $\dim S_p < m - 1$ e $\dim S_p = m - 1$. Dado $\alpha \in \Omega_{\text{cpt}}^m(B \times f^{-1}((-\delta, \delta)))$ temos que

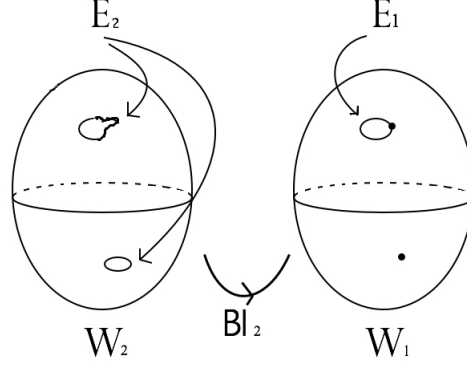
- a) Se $\dim S_p < m - 1$ a dimensão da imagem da aplicação $\Psi \circ \tilde{\sigma}$ é igual a $\dim S_p + 1$, isto é, $\dim \text{Im } \Psi \circ \tilde{\sigma}|_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1} = \dim S_p + 1$. Assim, a corrente de grau m associado a $\Psi \circ \tilde{\sigma}|_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1}$ é a corrente nula, pois dada qualquer forma de grau m temos

$$\int_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1} \hat{\sigma}^{1*} \alpha = 0$$

- b) Suponha agora que $\dim S_p = m - 1$. Nesse caso, o fibrado esférico normal é composto por duas componentes: $\{\pm 1\} \times (S_p \cap B)$. A construção do Blow-up garante que a orientação dessas duas componentes são opostas. Dessa maneira,

$$\int_{[0, \delta] \times \mathbb{E}_1} \hat{\sigma}^{1*} \alpha = \int_{[0, \delta] \times \{1\} \times (S_p \cap B)} \hat{\sigma}^{1*} \alpha + \int_{[0, \delta] \times \{-1\} \times (S_p \cap B)} \hat{\sigma}^{1*} \alpha = 0$$

O processo iterativo garante que a existência da aplicação $\pi : [\min f, \delta] \times W_{k_0} \rightarrow B \times f^{-1}([\min f, \delta])$ onde W_{k_0} é o resultados de vários blow-ups e satisfaz as condições do Teorema 11. Em particular, $\text{Im } \pi|_{[\min f, 0] \times \mathbb{E}_{k_0}} = (S_p \cap B) \times (\tilde{U}_p \cap f^{-1}([\min f, 0]))$ onde \mathbb{E}_{k_0} é o blow-up excepcional de W_{k_0} . Note que o divisor excepcional \mathbb{E}_i de cada Blow-up W_i inseri uma nova fronteira de codimensão 1.



Portanto, se B for um aberto regular e $p \in \text{Cr}_k(f)$ tal que $p \prec x \in B$, isto é, existe uma trajetória que se inicia em B e termina em p , então para toda forma $\alpha \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(B \times M)$ com suporte contido em $B \times f^{-1}([\min f, \delta])$ temos

$$\begin{aligned}
 d[\mathbf{T}_B](\alpha) &= [\mathbf{T}_B](d\alpha) = [\pi_*([\min f, \delta] \times \text{int}(W_{k_0}))](d(\alpha)) \\
 &= [([\min f, \delta] \times \text{int}(W_{k_0}))](\pi^*d\alpha) \\
 &= [[\min f, \delta] \times W_{k_0}](d\pi^*\alpha) \\
 &= [\{\delta\} \times W_{k_0}](\pi^*\alpha) - [[\min f, \delta] \times \partial W_{k_0}](\pi^*\alpha)
 \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade que se $x \in B$ então $p \prec x$, ou seja, todos os valores regulares de B "correm" para p .

$$\begin{aligned}
 d[\mathbf{T}_B](\alpha) &= [\{\delta\} \times W_{k_0}](\pi^*\alpha) - [[\min f, \delta] \times \partial W_{k_0}](\pi^*\alpha) \\
 &= [\{\delta\} \times W_{k_0}](\pi^*\alpha) - [[\min f, 0] \times \mathbb{E}_1](\pi^*\alpha) \\
 &= \Delta(B) - [(S_p \cap B) \times (U_p \cap f^{-1}([\min f, 0]))](\alpha).
 \end{aligned}$$

Observação 10 Quando $\dim S_p = m$, isto é, quando p é um ponto de mínimo não fazemos nenhum Blow-up de vizinhança regular. Sendo assim, considere a aplicação $\rho : [0, \infty) \times B \rightarrow B \times M$ dada por $\rho(t, m) = (m, e^{-t}m)$. Note que a imagem de ρ é

$T|_{B \times M}$. A aplicação $\rho^1 : [0, 1] \times B \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ dada por $\rho^1(s, m) = (m, sm)$ onde $s = e^{-t}$ satisfaz

- a) $\rho^1(0, m) = (m, 0) \in (S_p \cap B) \times \{p\}$;
- b) $\rho^1(1, m) = (m, m) \in (\Delta \cap B)$;
- c) $\text{Im } \rho^1 = \overline{\text{Im } \rho}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 d[\mathbf{T}_B](\alpha) &= [\mathbf{T}_B](d\alpha) \\
 &= \int_{[0,1] \times B} \rho^{1*} d\alpha = \int_{\partial([0,1] \times B)} \rho^{1*} \alpha \\
 &= \int_{\{1\} \times B} \rho^{1*} \alpha - \int_{\{0\} \times B} \rho^{1*} \alpha \\
 &= (\Delta(B) - S_p \times \{p\}) \alpha.
 \end{aligned}$$

Para abertos do **tipo c**), o fluxo do campo gradiente negativo da função f é $\varphi_t(x) = e^t x$ e o gráfico de T pode ser parametrizado pela aplicação

$$\begin{aligned}
 \theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\
 (t, x) &\longmapsto (x, e^t x)
 \end{aligned}$$

Denotando $P = \{(s, t) \mid s \in [0, t]\} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a aplicação

$$\begin{aligned}
 \theta^1 : P \times \mathbb{S}^{m-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\
 (s, t, v) &\longmapsto (sv, tv)
 \end{aligned} \tag{39}$$

é o primeiro passo para a resolução, pois satisfaz as seguintes propriedades

- a) sua imagem é o fecho da imagem de θ , isto é, $\text{Im } \theta^1 = \overline{\text{Im } \theta}$;
- b) para $s \neq 0$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, isto é, um cone triangular sem a origem;
- c) fixando t em (s, t, v) a imagem de $\tilde{\theta}$ aterriza em um conjunto de nível (a saber $-\frac{1}{2}t^2$);
- d) $\theta^1(0, t, v) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n$ e $\theta^1(t, t, v) \in \Delta \cap \text{Im } \theta$.

Como a fronteira de $P \times Ss^m$ são as componentes $s = 0$ e $s = t$ temos que

$$\begin{aligned}
 d[\mathbf{T}_B](\alpha) &= [\mathbf{T}_B](d\alpha) \\
 &= \int_{P \times \mathbb{S}^m} \theta^{1*} d\alpha = \int_{\partial(P \times \mathbb{S}^m)} \theta^{1*} \alpha \\
 &= \int_{\{s=t\}} \theta^{1*} \alpha - \int_{\{s=0\}} \theta^{1*} \alpha \\
 &= (\Delta - \{p\} \times U_p)(\alpha)
 \end{aligned}$$

Próximo passo seria continuar o processo para um nível regular numa vizinhança do próximo ponto crítico e repetir os argumentos acima. No final conseguimos uma aplicação no mesmo espírito do Teorema 11. O resto sai de forma idêntica ao que foi feito nos abertos do **tipo b**).

Portanto, em qualquer caso, no aberto Σ^c temos a corrente

$$d\mathbf{T} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] - \Delta.$$

Assim,

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] \text{ em } \Sigma^c.$$

Logo,

$$\text{spt} \left\{ \mathbf{P} - \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] \right\} \subset \Sigma.$$

Pelo Teorema de suporte do Federer segue o desejado. ■

Observação 11 *Todo o trabalho de separar $M \times M$ em conjuntos do tipo Σ , **a**), **b**) e **c**) se deve ao fato de não ter resolução local explícita do fluxo da diagonal ao redor de pontos críticos não maximais. De fato, a existência de uma tal resolução mesmo quando ela for somente Lipschitz teria pelo menos dois efeitos imediatos: Volume de T finito e simplificaria muito encontrar a expressão da corrente \mathbf{P} .*

2.4 Homotopia entre Complexo de Rham e Complexo de Morse com Coeficientes Reais em Variedades sem Bordo

Uma vez garantido a existência do limite e encontrada uma expressão para ele, vamos construir uma homotopia que vai relacionar a expressão do limite e o complexo

de Morse. Antes devemos estabelecer uma relação entre os operador \mathbb{P}_t e a corrente $\mathbf{P}_t(\omega) := [\varphi_t^* \omega]$. Utilizando o Kernel de Schwartz, podemos associar de forma biunívoca operadores a correntes e vice-versa. Isso permite calcular o limite num "sentido fraco".

Teorema 12 (Kernel Schwartz) *Sejam M e N variedades suaves com ou sem bordo. Existe uma correspondência biúnívoca entre $\mathbb{K} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_i(N)$ e $\mathbf{K} \in \mathcal{D}'_{k+i}(M \times N)$ dada pela fórmula*

$$\mathbb{K}(\omega)(\eta) = \mathbf{K}(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta). \quad (40)$$

onde π_1 e π_2 são projeções de $M \times N$ em M e N respectivamente.

Exemplo 2 *Pelo o que foi visto acima, o operador \mathbb{P}_t se associa, via equação (40), ao kernel $\mathbf{P}_t = [\Gamma_{\varphi_t}]$. De fato, como $[\Gamma_{\varphi_t}]$ é imagem da aplicação 34 temos*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta) &= [\Gamma_{\varphi_t}](\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta) \\ &= \int_{\{t\} \times M} (\Phi^* \pi_1^* \omega \wedge \Phi^* \pi_2^* \eta) \\ &= \int_M \varphi_t^* \omega \wedge p_2^* \eta \\ &= \mathbb{P}_t(\omega)(\eta) \end{aligned}$$

Computações semelhantes mostram que o operador \mathbb{T}_t está associado a corrente $\mathbf{T}_t = \Phi([t, 0] \times M)$.

Exemplo 3 *Seja $p \in \text{Cr}_k(f)$ um ponto crítico de índice k da função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como na seção anterior. A corrente $\mathbf{P} = [S_p] \times [U_p] \in \mathcal{D}'_m(M \times M)$ está associada ao operador*

$$\mathbb{P}(\omega) = \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [U_p]$$

para toda forma $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M)$. Com efeito, considerando $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^{m-k}(M)$ temos que

$$\int_{S_p \times U_p} \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta = \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot \left(\int_{U_p} \eta \right).$$

Veremos agora o Kernel que será responsável pela a homotopia do complexo de Rham e Morse.

Proposição 2 *Suponha que o operador $\mathbb{K} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k+1}(N)$ tem Kernel $K \in$*

$\mathcal{D}'_{m-k+1}(M \times N)$ então o operador

$$d \circ \mathbb{K} + (-1)^* \mathbb{K} \circ d$$

tem Kernel $d\mathbf{K}$.

Demonstração: Sai da igualdade

$$\begin{aligned} d\mathbf{K}(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta) &= \mathbf{K}(d(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta)) \\ &= \mathbf{K}(\pi_1^*(d\omega) \wedge \pi_2^* \omega) + (-1)^{|\omega|} \mathbf{K}(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* d\eta) \\ &= \mathbb{K}(d\omega)(\eta) + (-1)^* d(\mathbb{K}(\omega))(\eta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A relação operadores/kernels podem ser organizados na tabela abaixo:

Operadores	kernels	(41)
\mathbb{P}_t	\mathbf{P}_t	
\mathbb{K}	\mathbf{K}	
$d \circ \mathbb{K} + (-1)^* \mathbb{K} \circ d$	$d\mathbf{K}$	

Resumindo os fatos escritos acima, o operador \mathbb{P}_t satisfaz a fórmula de homotopia

$$d \circ \mathbb{T}_t + (-1)^* \mathbb{T}_t \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}_t$$

que pode ser associada, via kernel de Schwarz, a corrente

$$d\mathbf{T}_t = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}_t.$$

Com a condição de volume finito é possível calcular o limite quando $t \rightarrow -\infty$. Isto significa que existem correntes

$$\mathbf{T} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{T}_t \quad \text{e} \quad \mathbf{P} := \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{P}_t$$

satisfazendo

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}.$$

Consequentemente a equação de homotopia possui o limite:

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}.$$

O Exemplo 3 garante que a corrente

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p]$$

se associa ao operador

$$\mathbb{P}(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) [U_p]$$

para toda forma $\omega \in \Omega^k(M)$ onde $0 \leq k \leq m$.

Como consequência temos:

Teorema 13 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com fluxo gradiente negativo φ_t Morse-Smale com condição f -tame. Então para toda forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, $0 \leq k \leq m$, vale*

$$\mathbb{P}(\omega) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} r_p(\omega) [U_p],$$

onde o número $r_p(\omega)$ é chamado de resíduo de ω em p que é definido por

$$r_p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\omega| \neq m - \lambda_p \\ \int_{U_p} \omega & \text{se } |\omega| = m - \lambda_p \end{cases}$$

Além disso, o operador \mathbb{T} é definido por

$$\mathbb{T}(\omega) = \int_{[-\infty, 0]} \varphi^* \omega$$

tal que

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}. \quad (42)$$

Observação 12 (Propriedades da \mathbb{P}) *A aplicação \mathbb{P} satisfaz as propriedades abaixo:*

1. *A diferencial d comuta com \mathbb{P} . Isso pode ser verificado pela equação 42;*
2. *A imagem de $\mathbb{P} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ é*

$$\text{Im } \mathbb{P} = \bigoplus_{p \in \text{Cr}(f)} \mathbb{R} \cdot [U_p] =: \mathcal{U}_*.$$

De fato, para cada $p \in \text{Cr}(f)$ basta construir uma forma suave $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que

$\text{spt } \omega \subset S_p \cap \mathcal{O}_p$, onde \mathcal{O}_p é uma vizinhança de p , e

$$\int_{S_p} \omega = 1;$$

3. O item 1. e 2. implicam \mathcal{U}_* é invariante pela diferencial.

2.5 Isomorfismo com Coeficientes Reais da Homologia do Complexo de Correntes com o Complexo de Morse - Caso sem Bordo

Esta subseção é reservada para verificar o isomorfismo

$$H_{\text{dR}}^k(M) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*, \mathbb{R}) \simeq H_{m-k}^{\text{Morse}}(M, \mathbb{R}). \quad (43)$$

O primeiro isomorfismo da equação 43 sai do Teorema abaixo.

Teorema 14 *A aplicação*

$$\tilde{\mathbb{P}} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}$$

definida por \mathbb{P} induz o isomorfismo

$$\tilde{\mathbb{P}}_* : H^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*).$$

Demonstração: Da fórmula

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}$$

segue que

$$\mathbb{I}_* = \mathbb{P}_* : H^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{D}'_*(M)).$$

Pela equação (28) temos que \mathbb{I}_* é um isomorfismo e assim \mathbb{P}_* também é um isomorfismo.

Além disso,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(M) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}} & \mathcal{U}_{m-k} \\ & \searrow \mathbb{P} & \downarrow i \\ & & \mathcal{D}'_{m-k}(M) \end{array}$$

o diagrama acima comuta, ou seja, $\mathbb{P} = i \circ \tilde{\mathbb{P}}$ e portanto $\mathbb{P}_* = i_* \circ \tilde{\mathbb{P}}_*$, o que implica que $\tilde{\mathbb{P}}_*$ é injetiva, pois

$$\tilde{\mathbb{P}}_*[\omega_1] = \tilde{\mathbb{P}}_*[\omega_2] \Rightarrow i \left(\tilde{\mathbb{P}}_*[\omega_1] \right) = i \left(\tilde{\mathbb{P}}_*[\omega_2] \right) \Rightarrow \mathbb{P}_*[\omega_1] = \mathbb{P}_*[\omega_2]$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_*[\omega_1] = \mathbb{I}_*[\omega_2] \Rightarrow [\omega_1] = [\omega_2].$$

Vamos mostrar agora que $\tilde{\mathbb{P}}$ é sobrejetora, isto é, dado $U \in \mathcal{U}_{m-k}$ com $dU = 0$, existe $\gamma \in \Omega^{m-k}(M)$ com $d\omega = 0$, tal que $\mathbb{P}(\omega) = U$.

Dado p e q dois pontos críticos de índice $m - k$ temos que

- i) $\overline{U}_p \cap \partial S_q = \emptyset$;
- ii) $\overline{U}_p \cap \overline{S}_q = \emptyset$ se $p \neq q$;
- iii) $\overline{U}_p \cap \overline{S}_p = \{p\}$.

Escrevendo

$$U = \sum_{p \in \text{Cr}_{m-k}(f)} n_p [U_p],$$

existe uma vizinhança N que contém o suporte da corrente U , isto é, $N \supset \text{spt } U$ e satisfaz a condição

$$N \cap \partial S_q = \emptyset \quad \forall q \in \text{Cr}_{m-k}(f).$$

Pelo Teorema de Rham, existe uma forma suave $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N)$ com $d\omega = 0$ e $\gamma \in \mathcal{E}'_{m-k+1}(N)$ tal que

$$\omega - U = d\gamma.$$

Para cada $q \in \text{Cr}_{m-k}(f)$ temos que $S_q \cap N$ é uma subvariedade fechada de dimensão k . Seja uma família de formas de Thom $\{\tau_q^\epsilon\}$ suaves e fechadas em N tal que

$$\tau_q^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} S_q \text{ em } \mathcal{E}'_{m-k}(N).$$

Denotando o colchete (\cdot, \cdot) como sendo a interseção das correntes flat temos que

$$(\omega - U, S_q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\omega - U, \tau_q^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d\gamma(\tau_q^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(d\tau_q^\epsilon) = 0.$$

Agora iremos calcular os resíduos do operador \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} S_q \cdot \omega &= (U, S_q) \\ &= \left(\sum_{p \in \text{Cr}(f)} n_p U_p, S_q \right) \\ &= n_p \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega) &= \sum_{p \in \text{Cr}(f)} r_p(\omega)[U_p] \\ &= n_p[U_p] \\ &= U. \blacksquare\end{aligned}$$

O próximo resultado servirá para identificar o subcomplexo (\mathcal{U}_*, d) de $(\mathcal{D}'_*(M), d)$ com o complexo que calcula a Homologia de Morse, ou seja, vamos mostrar que

$$H_k(\mathcal{U}_*, d) \simeq H_k^{\text{Morse}}(M, \mathbb{R}).$$

Isso se dar pelo fato que a variedade não compacta U_p tem resoluções, isto é, existe uma variedade compacta com cantos \widehat{U}_p e uma aplicação $R : \widehat{U}_p \rightarrow M$ tal que a imagem de R é $\text{Im } R = \widetilde{U}_p = \overline{U}_p$ e $R|_{\text{int } \widehat{U}_p}$ é um difeomorfismo sobre algum subconjunto aberto e denso.

Teorema 15 (Latschev) *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale com fluxo do campo gradiente negativo f -tame. Se $p \in \text{Cr}(f)$, então existe uma variedade compacta com cantos \widehat{U}_p e uma aplicação suave*

$$R : \widehat{U}_p \rightarrow M$$

tal que

- i) $R : \text{int } \widehat{U}_p \rightarrow U_p$ é um difeomorfismo sobre algum subconjunto aberto e denso da imagem;
- ii) $\text{Im } R = \widetilde{U}_p = \overline{U}_p$.

Demonstração: Vamos descrever de forma sucinta o processo usado por Lastchev. Esse método consiste em fazer Blow-up das esferas estáveis dos pontos críticos para fazer o fluxo fluir sem paradas. Primeiramente organize os pontos críticos de ordem decrescente a partir do níveis de energia, isto é, p_0, p_1, p_2, \dots com

$$f(p_0) > f(p_1) > f(p_2) > \dots$$

Isso é possível, veja MILNOR (2016). Suponha, sem perda de generalidade, que o ponto crítico p_0 esteja no nível zero.

Supondo que $\delta_0 < 0$ é um valor regular suficientemente próximo de $f(p_0) = c_0 = 0$, existe uma aplicação sobrejetiva $[\delta_0, 0] \times W_1 \rightarrow f^{-1}([\delta_0, 0]) \cap U_p$ onde

$$W_1 := U_p^{\delta_0} = U_p \cap f^{-1}(\varepsilon_0)$$

e que preserva nível de energia. A variedade $[\delta_0, 0] \times W_1$ é o primeiro passo da resolução de U_p .

Denotando $S_{p_1} \cap W_1 := Q_1$ considere \widetilde{W}_1 como sendo o blow-up de Q_1 dentro de W_1 . O segundo passo da construção é a aplicação

$$R_2 : [c_1 + \delta_1, \delta_0] \times \widetilde{W}_1 \rightarrow f^{-1}([c_1 + \delta_1, \delta_0])$$

onde $c_1 = f(p_1) < 0$ e $\delta_1 < 0$ tal que $c_1 + \delta_1$ é um valor regular maior que $c_2 = f(p_2)$. Fixando δ_0 temos a igualdade $R_2(\delta_0) = i \circ \text{Bl}$ onde $i : W_1 \hookrightarrow f^{-1}(\delta_0)$ é a inclusão. Além disso, R_2 leva trajetórias $t \mapsto (t, \tilde{w})$ para trajetórias do campo gradiente negativo (preservando nível de energia) da seguinte maneira: se \tilde{w} está no interior de \widetilde{W}_1 então a trajetória é simples e não passam por p_1 e se $\tilde{w} \in \partial\widetilde{W}_1$ leva em trajetórias quebradas que passam por p_1 . E mais, a propriedade Smale do fluxo garante que $R_2(c_1 + \delta_1)$ é completamente transversal a S_{p_i} com $i \geq 2$. O processo se repete ao considerar $W_2 = \widetilde{W}_1$ e $\widetilde{W}_2 := \text{Bl}_{Q_2} W_2$, onde $Q_2 = R_2^{-1}(c_1 + \delta_1)(S_{p_3})$. No final, como os pontos críticos estão numa quantidade finita, obtemos a aplicação $R : \widehat{U}_p := [\min f, 0] \times \widetilde{W}_{k_0} \rightarrow f^{-1}([\min f, 0])$. ■

Corolário 3 *O volume de uma variedade instável (estável) do fluxo gradiente negativo de f com condição f -tame é finito.*

Demonstração: Basta observar que

$$\int_{U_p} \omega = \int_{R(\text{int } \widehat{U}_p)} \omega = \int_{\text{int } \widehat{U}_p} R^* \omega = \int_{\widehat{U}_p} R^* \omega < \infty.$$

O Teorema 15 pode ser elaborado para as variedades estáveis, isto é, existe uma variedade com cantos \widehat{S}_p que se projeta sobre M com imagem igual $\widetilde{S}_p = \overline{S}_p$ e sua restrição ao interior é um difeomorfismo sobre algum aberto denso da imagem. Por fim, de forma análoga ao que foi feito para as variedades instáveis podemos mostrar que o volume de S_p é finito. ■

Teorema 16 (Harvey-Lawson) *A aplicação que leva a base do complexo correncial de Morse U_p na base do complexo clássico de Morse p , via*

$$U_p \longrightarrow p$$

induz uma identificação dos complexos, isto é, a derivada correncial corresponde a derivada dada pela contagem de trajetórias.

Demonstração: Vamos continuar com a notação do Teorema 15 que utilizamos para construir a resolução de U_p incluindo uma hipótese adicional: Existe apenas uma único

$q \in \text{Cr}_{k-1}(f)$ tal que $q \prec p$.

Portanto, para $\alpha \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(M)$ temos

$$\begin{aligned} d[U_p](\omega) &= [U_p](d\omega) \\ &= R_* \left(\left[\text{int } \widehat{U}_p \right] \right) (d\omega) = \left[\text{int } \widehat{U}_p \right] (R^*d\omega) = \left[\widehat{U}_p \right] (dR^*\omega) \\ &= \left[\partial \widehat{U}_p \right] R^*\omega \end{aligned}$$

Nesta última igualdade, vamos integrar o pullback da R sobre $\partial \widehat{U}_p$. A variedade com cantos \widehat{U}_p é da forma $[\min f, 0] \times \widetilde{W}_{k_0}$. Como

$$\partial \widehat{U}_p = (\{0\} \times \widetilde{W}_{k_0}) \cup (\{\min f\} \times \widetilde{W}_{k_0}) \cup ([\min f, 0] \times \partial \widetilde{W}_{k_0}),$$

a integração do pullback da Resolução ao longo de $\partial \widehat{U}_p$ é a soma ao longo dessas três componentes. Por construção $R(\min f, \cdot) = p_{\min}$ e $R(0, \cdot) = p$. Agora analisemos $R|_{[\min f, 0] \times \partial \widetilde{W}_{k_0}}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que q é o único ponto crítico com índice $\lambda_p - 1$. A resolução leva trajetórias $\alpha(t) = (t, \widetilde{w})$ da variedade \widehat{U}_p em trajetória do campo gradiente negativo. E mais, dado $(t, \widetilde{w}) \in [\min f, 0] \times \partial \widetilde{W}_1$

- se $t \in [c_1, 0]$ então $R(\cdot, \widetilde{w})$ parametriza as curvas $U_p \cap S_q$;
- se $t \in [\min f, c_1]$ então $R(t, \widetilde{w})$ pertence a uma trajetórias quebrada de \overline{U}_p que se quebra em q .

Além disso, observe que

$$\int_{[c_1, 0] \times \partial \widetilde{W}_1} R^*\omega = 0,$$

pois $\text{Im } R|_{[c_1, 0] \times \partial \widetilde{W}_1} = U_p \cap S_q$ e $\dim U_p \cap S_q = 1$.

Usando o mesmo argumento do parágrafo acima temos que

$$\int_{[\min f, c_2] \times \partial \widetilde{W}_1} R^*\omega = 0$$

onde $c_2 = f(q)$.

Pelo o que foi comentado na Subseção 2.1, a quantidade de linhas de fluxos que ligam p e q (denotada por Γ_{pq}) é finita. Portanto as linhas de fluxo $\alpha(t) = (t, \widetilde{w})$ que ligam $\{0\} \times \partial \widetilde{W}_{k_0}$ a $\{c_1\} \times \partial \widetilde{W}_{k_0}$ (denotada por $\Gamma_{\alpha(0)\alpha(c_1)}$) também são finitas. Conseqüentemente, a interseção de $\Gamma_{\alpha(0)\alpha(c_1)}$ com U_p^a é uma coleção finita de pontos:

$\Gamma_{\alpha(0)\alpha(c_1)} \cap U_p^a = \{w_1^0, \dots, w_l^0\}$. Então

$$\begin{aligned} [[\min f, 0] \times \partial\widetilde{W}_{k_0}](R^*\omega) &= [(c_2, c_1) \times \partial\widetilde{W}_{k_0}](R^*\omega) = [(c_2, c_1) \times \mathbb{E}_1](R^*\omega) \\ &= R_*([c_2, c_1] \times \mathbb{E}_1)(\omega) = \sum_{i=1}^l \operatorname{sgn}(w_i^0)[U_q](\omega) \end{aligned}$$

onde $\operatorname{sgn}(w_i^0)$ é o sinal ± 1 que vem na integração. No capítulo 5 será explicado que esse sinal será o valor $n(p, q)$ como feito em 2.1.

No caso geral,

$$\begin{aligned} d[U_p](\omega) &= [\partial\widehat{U}_p](R^*\omega) = [[c_2, c_1] \times \mathbb{E}_1](R^*\omega) \\ &= \sum_{\lambda_q=\lambda_p-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_{pq}} n_\gamma(p, q) \int_{U_q} \omega = \sum_{\lambda_q=\lambda_p-1} \sum_{\gamma \in \Gamma_{pq}} n_\gamma(p, q)[U_q](\omega) \\ &= \sum_{\lambda_q=\lambda_p-1} n(p, q)[U_q](\omega). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 CORRENTES E COMPLEXOS DE MORSES PARA VARIEDADES COM BORDO

Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos na seção anterior para variedades com fronteira e com topologia finita. Iniciaremos comentando as principais mudanças que a Teoria de Morse sofre. Os pontos críticos que estão no bordo acarretam modificações nas variedades estáveis e instáveis por causa do vetor normal que aponta para fora. Grande parte da próxima Subseção é baseada no KRONHEIMER and MROWKA (2007).

3.1 Teoria de Morse para Variedades com Bordo e a Homologia Absoluta e Relativa

Em todo o desenvolvimento desta Subseção, adotaremos M como sendo uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo de dimensão m e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com campo gradiente tangente ao bordo ∂M .

O conjunto dos pontos críticos ainda continua sendo representado por $\text{Cr}(f)$, mas como a variedade tem bordo podemos dividir esse conjunto como

$$\text{Cr}(f) = \text{Cr}^0(f) \cup \text{Cr}(\partial f) \quad (44)$$

onde $\text{Cr}^0(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f que estão no interior, enquanto $\text{Cr}(\partial f)$ é o conjunto dos pontos críticos de bordo e $\partial f := f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$. Note que ∂f é uma função de Morse.

Para pontos críticos do bordo $p \in \partial M$, a hessiana de f no ponto p é invariante pelo bordo, isto é,

$$\text{Hess}_p(T_p\partial M) \subset T_p\partial M. \quad (45)$$

Com efeito, se $V \in T_p\partial M$ e N é um vetor ao bordo a expressão abaixo no ponto p

$$V_p \langle (\nabla f)_p, N_p \rangle = \langle \nabla_{V_p} (\nabla f)_p, N_p \rangle + \langle (\nabla f)_p, \nabla_{V_p} N_p \rangle$$

implica que

$$\langle \nabla_{V_p} (\nabla f)_p, N_p \rangle = 0.$$

Além disso, o vetor normal η no ponto crítico de bordo $p \in \text{Cr}(\partial f)$ é um autovetor de $\text{Hess}_p f$. Dessa maneira, o autovalor associado a η é não nulo e é ponto central para distinguir pontos críticos de bordo.

Definição 7 *Os pontos críticos de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse se dividem em*

$$\text{Cr}(\partial f) = \text{Cr}^u(f) \cup \text{Cr}^s(f), \quad (46)$$

onde $\text{Cr}^u(f)$ são chamados de pontos críticos instáveis (e nesse caso o vetor normal η é um autovetor de $\text{Hess}_p f$ pertencente a $T_p^u M$) e $\text{Cr}^s(f)$ são os pontos críticos estáveis (e nesse caso o vetor normal η é um autovetor de $\text{Hess}_p f$ pertencente a $T_p^s M$).

Observação 13 Usando a equação (45), para $p \in \text{Cr}^s(f)$ temos o split da forma

$$T_p M = T_p \partial M \oplus [\eta], \quad \eta \in T_p^s M.$$

Reciprocamente, se $p \in \text{Cr}^u(f)$ temos o split

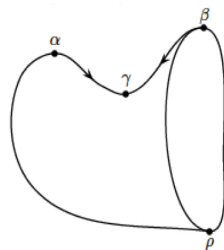
$$T_p M = T_p \partial M \oplus [\eta], \quad \eta \in T_p^u M.$$

As variedades estáveis e instáveis de pontos críticos do bordo se comportam de maneira interessante. Se $p \in \partial M$ é um ponto estável, então $S_p \subset M$ é uma variedade com bordo e seu bordo é $\partial S_p = S_p \cap \partial M$ enquanto U_p encontra-se em ∂M . Já para ponto instável de bordo, a variedade S_p está contida no bordo ∂M e a variedade U_p tem bordo com $\partial U_p = U_p \cap \partial M$. Desta maneira, para pontos críticos instáveis, a dimensão das variedades instáveis podem ser vistas de duas maneiras, pois podemos ver como uma variedade que contém pontos do interior ou como uma variedade que está totalmente contida no bordo e nesses casos seus índices se diferem por 1. Vendo $T_p \partial M$ como um subespaço de $T_p M$, como $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse podemos interpretar a hessiana sob dois pontos de vista: $\text{Hess}_p f : T_p M \rightarrow T_p M$ e $\text{Hess}_p f|_{T_p \partial M} : T_p \partial M \rightarrow T_p \partial M$. Sendo assim, faz sentido denotar

$$\lambda_p^\partial = \text{índice de } f|_{\partial M}.$$

Desse modo, como o índice de um ponto crítico $p \in \text{Cr}(\partial f)$ é a dimensão de $T_p^u M$, no caso em que $p \in \text{Cr}^s(f)$, como $U_p \subset \partial M$, temos $\lambda_p = \lambda_p^\partial$ e se $p \in \text{Cr}^u(f)$ então $\lambda_p = \lambda_p^\partial + 1$.

Exemplo 4 Esse exemplo pode ser encontrado na dissertação de Mestrado SILVA (2010). Seja M a variedade suave com bordo desenhada abaixo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função menos altura. Seus pontos críticos são $\alpha \in \text{Cr}_2(f)$, $\beta \in \text{Cr}_2^u(f)$, $\gamma \in \text{Cr}_1(f)$ e $\rho \in \text{Cr}_0^s(f)$.



Dessa forma, a dimensão de U_β é $\dim U_\beta = 2$ e a dimensão de $U_\beta \cap \partial M$ é $\dim U_\beta \cap \partial M = 1$.

Assim, em relação ao bordo o índice de β é 1.

Definição 8 Se para todo $p, q \in \text{Cr}^0(f)$ as variedades S_p e U_q são transversais, dizemos que f é Morse-Smale no interior.

Quando $p \in \text{Cr}^s(f)$ e $q \in \text{Cr}^u(f)$ a subvariedade $\mathcal{M}(p, q) = U_q \cap S_p \subset \partial M$ está inteiramente contida no bordo e a condição Morse-Smale no bordo não vale da mesma forma que no interior. Na verdade o que podemos esperar é que no máximo a interseção seja transversal em ∂M , assim

$$T_x U_p + T_x S_q = T_x \partial M.$$

Este caso é chamado de bordo-obstruído.

Definição 9 Dizemos que f é Morse-Smale se

$$\mathcal{M}(p, q) := U_p \cap S_q$$

for transversal a M , exceto no caso em que temos $p \in \text{Cr}^s(f)$ e $q \in \text{Cr}^u(f)$, onde vale a condição de bordo-obstruído.

Note que $\mathcal{M}(p, q)$ é uma variedade com ou sem bordo. Caso ela tenha bordo, então $\mathcal{M}(p, q)$ intersecta o interior e o bordo de M .

No caso de bordo-obstruído, como a transversalidade é com respeito ao bordo, temos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(p, q) &= \dim U_p + \dim S_p - \dim \partial M \\ &= \lambda_p + (m - \lambda_q) - (m - 1) \\ &= \lambda_p - \lambda_q + 1 \end{aligned}$$

Logo a dimensão de $\mathcal{M}(p, q)$ é dada pela sentença

$$\dim \mathcal{M}(p, q) = \begin{cases} \lambda_p - \lambda_q + 1 & \text{se é bordo-obstruído} \\ \lambda_p - \lambda_q & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Se $p \in \text{Cr}_k^s(f)$ e $q \in \text{Cr}_k^u(f)$ são pontos do caso de bordo obstruído vamos denotar $q \preceq p$ para representar a linha fluxo que ligam os pontos críticos.

Podemos de forma alternativa considerar $\mathcal{M}(p, q)$ como sendo uma família de trajetórias do fluxo. Isso faz o conjunto $\mathcal{M}(p, q)$ ser visto de duas maneiras: como um subconjunto de M ou como uma família de trajetórias entre os pontos p e q . O fluxo φ_t é uma ação livre em $\mathcal{M}(p, q)$ e seu quociente é Hausdorff: $\check{\mathcal{M}}(p, q) := \mathcal{M}(p, q)/\mathbb{R}$ será chamada de trajetórias não-parametrizadas. Uma trajetória quebrada não-parametrizada

que liga os pontos críticos p a q consistem de uma $(n + 1)$ -upla de pontos críticos $p = p_0, p_1, \dots, p_n = q$ com índices decrescentes ao longo do fluxo e de uma trajetória não-parametrizada $\check{x}_i \in \check{\mathcal{M}}(p_{i-1}, p_i)$ que é a i -ésima componente da trajetória quebrada.

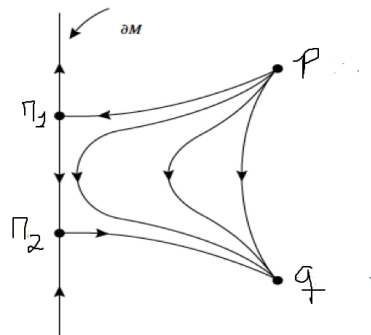
Definição 10 Se $p, q \in \text{Cr}(f)$, o espaço das trajetórias estritamente quebradas não parametrizadas será denotado como sendo o conjunto $\check{\mathcal{M}}^+(p, q)$.

Em $\check{\mathcal{M}}^+(p, q)$ duas coisas mudam:

1. A primeira mudança notada é que nem sempre trajetórias estritamente quebradas são limites de pontos de uma sequência de trajetórias não quebradas. Suponha, por exemplo, que $p \in \text{Cr}^0(f)$, $r \in \text{Cr}^s(f)$ e $q \in \text{Cr}^u(f)$, então a trajetória quebrada $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ tem duas componentes que vai de p para q via r . Esta trajetória quebrada não é limite de trajetórias não-quebradas, pois não existe trajetória de p até q (a variedade estável de q está contida no bordo, enquanto a variedade estável em p está no interior).
2. A segunda mudança é que, no caso que $\lambda_p - \lambda_q = 2$ não pode haver trajetórias quebradas de p até q com mais de duas componentes.

Lema 2 Suponha que $p, q \in \text{Cr}^0(f)$ com $\lambda_p = k$ e $\lambda_q = k - 2$. Então trajetórias quebradas em $\check{\mathcal{M}}^+(p, q)$ tem

- a) duas componentes: $(\check{x}_1, \check{x}_2) \in \check{\mathcal{M}}(p, r) \times \check{\mathcal{M}}(r, q)$, onde $r \in \text{Cr}^0(f)$ com $\lambda_r = k - 1$.
- b) três componentes: $(\check{x}_1, \check{x}_2, \check{x}_3) \in \check{\mathcal{M}}(p, r_1) \times \check{\mathcal{M}}(r_1, r_2) \times \check{\mathcal{M}}(r_2, q)$, onde $r_1 \in \text{Cr}^s(f)$ e $r_2 \in \text{Cr}^u(f)$ com $\lambda_{r_1} = \lambda_{r_2} = k - 1$ e os espaços de trajetórias $\check{\mathcal{M}}(r_1, r_2)$ é de bordo-obstruído.



Demonstração: Veja KRONHEIMER and MROWKA (2007). ■

Uma consequência imediata é a seguinte:

Proposição 3 Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Smale numa variedade compacta com bordo de dimensão m . Se p e q são pontos críticos da f , então $\mathcal{M}(p, q) \neq 0$ implica em $\lambda_p \geq \lambda_q$, isto é, os índices dos pontos críticos são decrescente ao longo das linhas de fluxos.

A Resolução das variedades estáveis em instáveis nos fornecem as seguintes

informações:

$$1. \overline{U}_p = \bigcup_{q \preceq p} U_q$$

$$2. \overline{S}_p = \bigcup_{p \preceq q} S_q$$

Assim como no caso sem fronteira, desejamos orientar o espaço $\mathcal{M}(p, q)$.

- a) **Caso bordo-não-obstruído:** Funciona da mesma forma que no caso sem fronteira.
- b) **Caso de bordo-obstruído:** para este caso temos um trabalho extra para orientar esse espaço graças a falta de transversalidade que acontece no bordo de M . Na sequência da equação (25) a aplicação π não é sobrejetiva, pois $q \in \text{Cr}^u(f)$ e assim o vetor normal ao bordo em q não está na imagem de π . Considerando a sequência exata

$$0 \rightarrow T_x \mathcal{M}(p, q) \xrightarrow{i} T_x U_p \xrightarrow{\pi} N_x S_q \xrightarrow{q} \mathbb{R} \rightarrow 0, \quad (47)$$

onde o último \mathbb{R} é a imagem do vetor normal ao bordo de M em x , podemos escolher uma base orientada $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_j, \overline{w}_{j+1} = \eta$ de $N_x S_q$, tal que os primeiros j vetores são imagem da π dos vetores w_1, \dots, w_j e $q(\eta) = 1$. Então, como antes, se declara v_1, \dots, v_d de $T_x \mathcal{M}(p, q)$ como sendo uma base orientada se

$$i(v_1), \dots, i(v_d), w_1, \dots, w_j$$

é uma base orientada de $T_x U_p$.

Para orientar as variedades instáveis no bordo, se $p \in \text{Cr}(\partial f)$ defina

$$T_p^\partial U_p = T_p U_p \cap T_p \partial M.$$

Desta maneira, se $p \in \text{Cr}^s(f)$ então $T_p U_p = T_p^\partial U_p$ e sua orientação é escolhida como antes. Caso $p \in \text{Cr}^u(f)$ vamos adotar, para orientar $T_p^\partial U_p$, a convenção do vetor normal que aponta para fora.

Para definir os complexos de Morse no bordo precisamos ignorar as trajetórias que vão para o interior de M . O complexo \overline{C}_* de M definido como soma direta

$$\overline{C}_k = C_k^s \oplus C_{k+1}^u$$

permite interpretar o operador de bordo como uma matriz 2 de forma sugestiva

$$\overline{\partial} = \begin{bmatrix} \overline{\partial}_s^s & \overline{\partial}_u^s \\ \overline{\partial}_s^u & \overline{\partial}_u^u \end{bmatrix}$$

onde as entradas desta matriz são os operadores

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_s^s &: C_k^s \longrightarrow C_{k-1}^s; \\ \overline{\partial}_u^s &: C_k^s \longrightarrow C_k^u; \\ \overline{\partial}_s^u &: C_{k+1}^u \longrightarrow C_{k-1}^s; \\ \overline{\partial}_u^u &: C_k^u \longrightarrow C_{k-1}^u.\end{aligned}$$

Esses operadores tem definições bem sugestivas. Por exemplo, o operador $\overline{\partial}_s^u$ conta as trajetórias de bordo entre pontos críticos de índice consecutivos quando vistos em relação ao bordo. Por isso a diferença de índice na aplicação $C_{k+1}^u \rightarrow C_{k-1}^s$.

Exemplo 5 Ainda no exemplo 4 temos que $\overline{C}_2 = 0$, $\overline{C}_1 = A \cdot \beta$ e $\overline{C}_0 = A \cdot \rho$.

Considere os três grupos graduados:

$$C_k^0 = \left(\bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{Z} \cdot p \right) \otimes A, \quad C_k^s = \left(\bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} \mathbb{Z} \cdot p \right) \otimes A, \quad C_k^u = \left(\bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} \mathbb{Z} \cdot p \right) \otimes A \quad (48)$$

onde A é \mathbb{Z} ou \mathbb{R} e $\text{Cr}_k^0(f)$, $\text{Cr}_k^s(f)$, $\text{Cr}_k^u(f)$ são, respectivamente, pontos críticos do interior, estáveis e instáveis com índices iguais a k .

Exemplo 6 Do exemplo 4 temos os seguintes grupos:

$$\begin{array}{lll} C_2^0 = A \cdot \alpha & C_1^0 = A \cdot \gamma & C_0^0 = 0 \\ C_2^u = A \cdot \beta & C_1^u = 0 & C_0^u = 0 \\ C_2^s = 0 & C_1^s = 0 & C_0^s = A \cdot \rho \end{array}$$

Os operadores de bordos que contam as trajetórias do interior é definido como sendo

$$\begin{aligned}\partial_{\ast}^{\ast} &: C_k^{\ast} \longrightarrow C_{k-1}^{\ast} \\ p &\longmapsto \partial_{\ast}^{\ast} p = \sum_{q \in \text{Cr}_{k-1}^{\ast}(f)} n(p, q) q\end{aligned}$$

onde \ast como sendo \circ ou u e \star como sendo \circ ou s .

Observação 14 Note que existe uma diferença entre as aplicações ∂_s^u e $\overline{\partial}_s^u$:

- 1) $\overline{\partial}_s^u : C_k^u \rightarrow C_k^s$ é definido pela contagem de trajetórias isoladas em ∂M ;
- 2) $\partial_s^u : C_k^u \rightarrow C_{k-1}^s$ conta trajetórias isoladas no interior de M .

Considere as somas diretas: $\check{C}_k = C_k^0 \oplus C_k^s$, $\hat{C} = C_k^0 \oplus C_k^u$, e os respectivos, operadores de bordo

$$\check{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_0^0 & -\partial_0^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^0 & \bar{\partial}_s^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix} \quad \hat{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_0^0 & \partial_0^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^0 & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Observação 15 *Os operadores que fazem parte das matrizes que envolvem as definições de $\bar{\partial}$, $\check{\partial}$ e $\hat{\partial}$ dependem da dimensão dos espaços envolvidos. O operador $\bar{\partial}_u^s$ considera as trajetórias contidas no bordo de M que liga pontos com índices iguais e a composição $\partial_s^u \bar{\partial}_u^s$ considera as trajetórias com índices com diferença igual a 1. Por esse motivo conseguimos fazer a composição $\partial_s^u \bar{\partial}_u^s$ na definição de um operador entre os grupos $\text{Cr}_k^s(f)$ e $\text{Cr}_{k-1}^s(f)$.*

Exemplo 7 *Considerando a variedade M do Exemplo 4 temos os seguintes grupos:*

$$\begin{array}{lll} \check{C}_2 = A \cdot \alpha \oplus 0 & \check{C}_1 = A \cdot \gamma \oplus 0 & \check{C}_0 = 0 \oplus A \cdot \rho \\ \hat{C}_2 = A \cdot \alpha \oplus A \cdot \beta & \hat{C}_1 = A \cdot \gamma \oplus 0 & \hat{C}_0 = 0 \oplus 0 \end{array}$$

Nosso alvo, entre outros, será dar uma outra prova para o seguinte Teorema.

Teorema 17 *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta, com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com campo gradiente tangente a bordo. Os operadores da equação (49) tem quadrado igual a zero. Além disso, os complexos $(\check{C}_*, \check{\partial})$ e $(\hat{C}_*, \hat{\partial})$ calculam respectivamente, homologia absoluta e a relativa, ou seja,*

- a) $H_k(\check{C}_*, \check{\partial}) = H_k(M, A)$;
- b) $H_k(\hat{C}_*, \hat{\partial}) = H_k(M, \partial M, A)$.

Exemplo 8 *Usando os Exemplos 5 e 7, as homologias $H_*(\partial M, A)$, $H_*(M, A)$ e $H_*(M, \partial M, A)$ são*

$$H_k(\partial M, A) = H_k(\bar{C}) = \begin{cases} 0, & k = 2 \\ A, & k = 1 \\ A, & k = 0 \end{cases}$$

$$H_k(M, A) = H_k(\check{C}) = \begin{cases} 0, & k = 2 \\ 0, & k = 1 \\ A, & k = 0 \end{cases} \quad H_k(M, \partial M, A) = H_k(\hat{C}) = \begin{cases} A, & k = 2 \\ 0, & k = 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

3.2 Existência e Cálculo dos Limites no Caso com Bordo

Nesta subseção, vamos assumir que M é uma variedade Riemanniana, compacta orientada com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Morse-Smale com campo gradiente tangente ao bordo. Da mesma maneira que no caso sem fronteira, a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ será o fluxo do campo gradiente negativo.

Anteriormente, usamos um operador de homotopia para deformar o espaço das formas diferenciais $\Omega^k(M)$ em correntes de $\mathcal{D}'_{m-k}(M)$. Agora, as variedades possui bordo e vamos impor certas condições sobre o espaço das formas e o espaço das correntes para conseguirmos resgatar informações topológicas.

Definição 11 *Seja N uma variedade com bordo orientada de dimensão n . O espaço das formas que se anulam no bordo de N é o conjunto*

$$\Omega_D^k(N) = \{\omega \in \Omega^k(N) \mid \omega|_{\partial N} = 0\}. \quad (50)$$

As formas com suporte compacto que se anulam no bordo é denotado por $\Omega_{D,\text{cpt}}^k(N)$, ou seja,

$$\Omega_{D,\text{cpt}}^k = \Omega_D^k(M) \cap \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \text{spt } \omega \text{ é compacto}\} \quad (51)$$

O ponto de partida será calcular o limite quando $t \rightarrow -\infty$ dos operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^r : \Omega_D^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M) \\ \omega &\longmapsto \varphi_t^*(\omega) \end{aligned} ; \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^a : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M^\circ) \\ \omega &\longmapsto \varphi_t^{\circ*}(\omega) \end{aligned} . \quad (53)$$

onde $\varphi_t^\circ := \varphi_t|_{M^\circ}$. Para isso, devemos primeiramente calcular o limite de

$$\mathbb{P}_t(\omega) = [\varphi_t^*\omega].$$

O operador \mathbb{P}_t satisfaz a fórmula

$$\mathbb{T}_t \circ d + (-1)^* d \circ \mathbb{T}_t + \mathbb{S}_t = \Delta - \mathbb{P}_t \quad (54)$$

onde \mathbb{T}_t é definido como em 30 e $\mathbb{S}_t = \mathbb{T}_t|_{\Omega^k(\partial M)}$. Observe que a fórmula acima, não é uma homotopia entre \mathbb{P} e Δ , pois temos o fator \mathbb{S}_t que é definido na fronteira. A verificação dessa igualdade é feita usando Stokes. Com efeito, se $p_2 : [t, 0] \times \partial M \rightarrow \partial M$ é a projeção

no segundo fator temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_0^*(\omega)(\eta) - \varphi_t^*(\omega)(\eta) &= \int_M \varphi_0^* \omega \wedge \eta - \int_M \varphi_t^* \omega \wedge \eta \\
&= \int_{\partial([t,0] \times M)} \varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta + \int_{[t,0] \times \partial M} \varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta \\
&= \int_{[t,0] \times M} d(\varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta) + \int_{[t,0] \times \partial M} \varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta \\
&= \int_{[t,0] \times M} d\varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta + (-1)^{|\omega|} \int_{[t,0] \times M} \varphi^* \omega \wedge dp_2^* \eta \\
&\quad + \int_{[t,0] \times \partial M} \varphi^* \omega \wedge p_2^* \eta \\
&= \mathbb{T}_t(d\omega)(\eta) + (-1)^* d \circ \mathbb{T}_t(\omega)(\eta) + \mathbb{S}_t(\omega)(\eta).
\end{aligned}$$

Os operadores \mathbb{P}_t , \mathbb{T}_t estão associados aos mesmos kernels do caso sem fronteira. A corrente associada ao operador \mathbb{S}_t é $\Phi([t, 0] \times \partial M)$. E mais, se $\omega \in \Omega_D^k(M)$ e $\eta \in \Omega^{m-k}(M)$ então a equação 54 se transforma em

$$\mathbb{T}_t^r(d\omega)(\eta) + (-1)^* d \circ \mathbb{T}_t^r(\omega)(\eta) = \mathbb{I}(\omega)(\eta) - \mathbb{P}_t^r(\omega)(\eta)$$

onde $\mathbb{T}^r = \mathbb{T}|_{\Omega_D^k(M)}$ e se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^{m-k}(M^\circ)$ temos que

$$\mathbb{T}_t^a(d\omega)(\eta) + (-1)^* d \circ \mathbb{T}_t^a(\omega)(\eta) = \mathbb{I}(\omega)(\eta) - \mathbb{P}_t^a(\omega)(\eta)$$

onde \mathbb{T}^a é o operador associado a corrente $\mathbf{T}^a = \mathbf{T}|_{M \times M^\circ}$.

Além disso,

$$d\mathbf{T}_t + \mathbf{S}_t = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}_t. \quad (55)$$

é a corrente associada a equação de operadores em 54.

Queremos garantir a existência do limite da equação 55, isto é,

$$d\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P} \quad (56)$$

com também encontrar uma expressão para a corrente $\mathbb{P}^{r/a}$. No caso sem bordo, vimos que o limite, a nível de correntes, pode escrito como combinações lineares das variedades instáveis. No caso com fronteira, iremos ver que a mesma coisa acontece com uma pequena diferença.

Lembremos que,

$$\tilde{U}_p = \bigcup_{q \prec p} U_q = \{x \in M \mid x \prec p\}.$$

Isto significa que \tilde{U}_p é formado pela união de U_p com as variedades instáveis que formam trajetórias quebradas que se ligam a p . No caso de bordo obstruído, as variedades instáveis tem um comportamento atípico: elas possuem as mesmas dimensões. Por esse motivo, se p é um ponto crítico de índice k , a parte de dimensão k de \tilde{U}_p é constituído por

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_p, & \text{se } p \in \text{Cr}^0(f) \cup \text{Cr}^u(f); \\ U_p \cup \left(\bigcup_{q \in \text{Cr}_k^u(f)} U_q \right), & \text{se } \mathcal{M}^\partial(p, q) \neq \emptyset. \end{array} \right. \quad (57)$$

Da mesma forma que no caso sem bordo iremos ignorar as orientações, pois dedicamos uma seção para seus esclarecimentos.

Teorema 18 *Sejam M uma variedade Riemanniana, compacta, orientada com bordo de dimensão m , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Morse-Smale com campo gradiente tangente ao bordo e fluxo φ_t do campo gradiente negativo com condição f -tame. O gráfico reverso*

$$\begin{aligned} T &= \{(\varphi_t(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), -\infty < t \leq 0\} \\ &= \{(y, \varphi_{-t}(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), -\infty < t \leq 0\} \\ &= \{(\varphi_{-t}(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), 0 \leq t < \infty\} \\ &= \{(y, \varphi_t(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), 0 \leq t < \infty\} \end{aligned} \quad (58)$$

em $M \times M$ satisfaz a equação 56 onde

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] \quad (59)$$

onde

$$[\tilde{U}_p] = [U_p] - \sum \bar{n}(p, q) \cdot [U_q]$$

é uma corrente com suporte contido em 57 e $\bar{n}(p, q)$ é definido como na Subseção 3.1.

Demonstração: Detalhes e notações serão esclarecidos no Apêndice. A demonstração segue no mesmo espírito do Teorema 10. Como a variedade agora possui fronteira a diferença consiste no fato que temos um novo tipo de aberto (abertos relativos) da cobertura de $M \times M$.

Faremos os detalhes que sofrem alterações. Consideremos \tilde{f} como no Teorema 10. O conjunto Σ sofrerá uma pequena modificação (mas sua medida Hausdorff m dimensional continua sendo igual a zero):

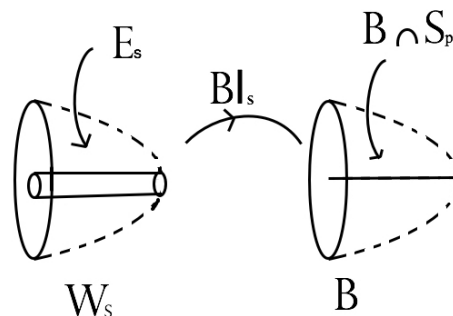
$$\Sigma := \left\{ \bigcup_{p \in \text{Cr}(f)} \{p\} \times \tilde{U}_p \mid p \text{ não é ponto máximo} \right\};$$

Dessa maneira, vamos analisar as situações: o aberto B que intersecta a fronteira é uma vizinhança do

- i) ponto regular (que não contém nenhum ponto crítico);
- ii) ponto crítico maximal.

Para o **caso i)** suponha que $\sigma^{s/u} : B \rightarrow B \times f^{-1}(\delta^{s/u})$ é a diagonal corrida, B é um aberto contido numa vizinhança tame onde todos os pontos de B vão pelo fluxo para o ponto crítico $p \in \text{Cr}^{s/u}(f)$ e o número $\delta^{s/u}$ é um valor regular próximo de p . Note que a restrição de σ a fronteira é $\sigma|_{\partial B} : \partial B \rightarrow \partial B \times \partial f^{-1}(\delta^{s/u})$, pois o fluxo é invariante em ∂M . Falaremos agora da construção local da resolução de T . Por causa da condição de transversalidade no bordo fazemos um tipo de blow-up de acordo com a classificação do ponto crítico. Mais informações sobre as propriedades de $\sigma^{s/u}$ e como funciona o Blow-ups nas vizinhanças de cada tipo de ponto crítico podem ser encontradas no Apêndice.

- a) Caso $p \in \text{Cr}^s(f)$ então a variedade estável $S(F^s) = B \times S_p$ é uma variedade crítica. Lembrando que S_p é uma variedade com bordo, e seu bordo é $\partial S_p = S_p \cap \partial M$, o produto $B \times M$ é uma variedade com cantos e um estrato de codimensão 1 é $B \times \partial S_p$. Se B é um aberto relativo do bordo então um outro estrato de codimensão 1 é $\partial B \times M$. A condição de transversalidade garante que $(\sigma^s)^{-1}(B \times (S_p \cap f^{-1}(\delta^s))) = S_p \cap B$ e $(\sigma^s)^{-1}(B \times (S_p \cap \partial f^{-1}(\delta^s))) = S_p \cap \partial B$ é uma subvariedade com bordo e assim podemos tomar o blow-up de B ao longo de $S_p \cap B$, isto é, $W_s = \text{Bl}_{S_p \cap B} B$.



De forma similar ao caso sem bordo, podemos construir um levantamento $\tilde{\sigma}^s$ que faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} W_s & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{\delta^s}^s} & B \times' \tilde{V}_\delta \\ \text{Bl}_s \downarrow & & \downarrow \Psi_{\delta^s} \\ B & \xrightarrow{\sigma^s} & B \times f^{-1}(\delta^s) \end{array} \quad (60)$$

O levantamento $\tilde{\sigma}$ é definido da seguinte maneira: tal que $\tilde{\sigma}_\delta^s|_{W_s \setminus \mathbb{E}_s} = \Psi_{\delta^s}^{-1} \circ \sigma^s \circ \text{Bl}_s$ e $\sigma|_{\mathbb{E}_s}$ é a composição do isomorfismo $d\sigma|_{S_+(\nu(S_p \cap B))}$ com a projeção radial $\nu(B \times S_p) \setminus \{0\} \rightarrow S_+(\nu(B \times f^{-1}(\delta^s)))$. Existe um outro divisor excepcional que vamos definir por $\mathbb{E}_s^\partial := \text{Bl}^{-1}(\partial B \cap S_p)$. A restrição $\tilde{\sigma}_s : \mathbb{E}^\partial \rightarrow B \times' \tilde{V}_\delta$ como sendo a composição $d\sigma$ restrito a $S(\nu(S_p \cap \partial B))$ com a projeção radial $\nu(B \times \partial f^{-1}(\delta^s)) \setminus \{0\} \rightarrow S(\nu(B \times \partial f^{-1}(\delta^s)))$.

A aplicação que nos interessa é

$$\hat{\sigma}^s := \Psi \circ \tilde{\sigma}^s : [-\delta^s, \delta^s] \times W_s \rightarrow B \times f^{-1}([-\delta^s, \delta^s]),$$

onde $\tilde{\sigma}^s(t, w) = (t, \tilde{\sigma}_\delta^s(w))$. A construção garante que $\text{Im } \hat{\sigma}^s = T|_{B \times f^{-1}([-\delta^s, \delta^s])}$, a restrição de $\hat{\sigma}^s$ ao interior é um difeomorfismo sobre a imagem e se $F' = B \times \{p'\}$ onde p' é outro ponto crítico que vai abaixo do fluxo, a aplicação $\hat{\sigma}_{-\delta^s}^s$ é transversal a $S(F')$. Os dois divisores de exceção $\mathbb{E}_s = \text{Bl}^{-1}(S_p \cap B)$ e $\mathbb{E}_s^\partial = \text{Bl}^{-1}(S_p \cap \partial B)$ vão parametrizar as trajetórias que se quebram em p . Mais explicitamente, se $w \in \mathbb{E}_s$ então $\hat{\sigma}_w^s(t)$ está no interior quando $t \in (0, \delta]$ e $\hat{\sigma}_w^s(t)$ está contida no bordo para $t \in [-\delta, 0]$, enquanto, se $w \in \mathbb{E}_s^\partial$ a curva $\hat{\sigma}_w^s(t)$ está contida no bordo para todo $t \in [-\delta, \delta]$.

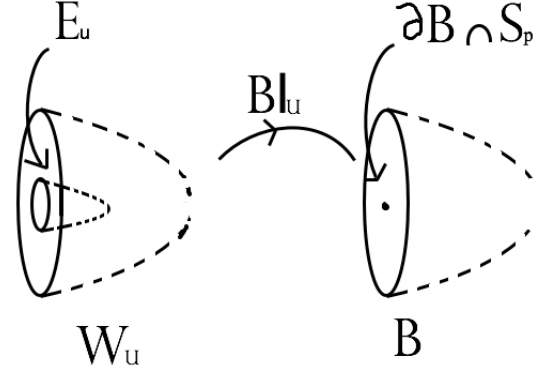
Além disso, a imagem das restrições de $\hat{\sigma}^s$ aos conjuntos $[0, \delta^s] \times \mathbb{E}_s$ e $[0, \delta^s] \times \mathbb{E}_s^\partial$ possuem medida Hausdorff m -dimensional igual a zero e as restrições $\hat{\sigma}^s|_{(-\delta^s, 0) \times \mathbb{E}_s}$ e $\hat{\sigma}^s|_{(-\delta^s, 0) \times \mathbb{E}_s^\partial}$ são difeomorfismos sobre as imagens

$$\text{Im } \hat{\sigma}^s|_{(-\delta^s, 0) \times \mathbb{E}_s} = (S_p \cap B) \times (U_p \cap f^{-1}(-\delta^s, 0)) \quad (61)$$

$$\text{Im } \hat{\sigma}^s|_{(-\delta^s, 0) \times \mathbb{E}_s^\partial} = (S_p \cap \partial B) \times (U_p \cap f^{-1}(-\delta^s, 0)). \quad (62)$$

Note que a variedade estável na equação 61 possui bordo está contida no aberto relativo do bordo, enquanto a variedade instável está inteiramente contida no bordo. Já na equação 62 temos que tanto a variedade estável e instável estão inteiramente contida no bordo.

b) Caso $p \in \text{Cr}^u(f)$ sabemos que a variedade estável S_p está contida no bordo. Por esse motivo, vamos considerar B um aberto relativo ao bordo. A diagonal corrida $\sigma^u : B \rightarrow B \times B \times f^{-1}(\delta^u)$ é transversal a $S(F^u) = B \times S_p \subset B \times \partial M$ e por isso fazemos o blow-up de B ao longo de $(\sigma^u)^{-1}(S(F^u)) = S_p \cap \partial B$. No apêndice explicaremos melhor como é feito esse Blow-up.



O levantamento da aplicação σ^u é construído como no caso acima e vamos denotar ele por $\tilde{\sigma}_\delta^u$. Por construção, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} W_u & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_\delta^u} & B \times' \tilde{V}_{\delta^u} \\ \text{Bl}_u \downarrow & & \downarrow \Psi_{\delta^u} \\ B & \xrightarrow{\sigma} & B \times f^{-1}(\delta^u) \end{array} \quad (63)$$

Note que como $p \in \text{Cr}^u(f)$ então $S_p \subset \partial M$. Assim, o divisor excepcional de W_u é $\mathbb{E}_u = \text{Bl}_u^{-1}(S_p \cap \partial B)$ e aplicação que fornece a resolução local de T é construída da mesma maneira que anteriormente: $\hat{\sigma}^u := \Psi \circ \tilde{\sigma}^u : [-\delta^u, \delta^u] \times W_u \rightarrow B \times f^{-1}([-\delta^u, \delta^u])$.

Comentaremos as principais propriedades de $\hat{\sigma}^u$:

- No nível $-\delta^u$ temos a transversalidade com as variedades estáveis, isto é, $\hat{\sigma}^u_{-\delta^u} \pitchfork S_q$ onde q vem abaixo de p pelo fluxo;
- Se $w \in W_u \setminus \mathbb{E}_u$ então $\hat{\sigma}_w^u(t)$ é uma trajetória simples para $t \in [-\delta, \delta]$, enquanto $\hat{\sigma}_w^u(t)$ é uma trajetória quebrada em p caso $w \in \mathbb{E}_u$;
- Se $w \in \text{Bl}_u^{-1}(\partial B)$ então $\hat{\sigma}_w^u(t)$ representa uma trajetória inteiramente contida na fronteira;
- A medida Hausdorff m -dimensional da imagem das restrições $\text{Im } \hat{\sigma}^u|_{[0, \delta^u] \times \mathbb{E}_u}$ e $\text{Im } \hat{\sigma}^u|_{[0, \delta^u] \times \mathbb{E}_u^c}$ são iguais a zero;
- A imagem das restrições $\hat{\sigma}^u|_{[-\delta^u, 0) \times \mathbb{E}_u}$ e $\hat{\sigma}^u|_{[-\delta^u, 0) \times \mathbb{E}_u^c}$ são difeomorfismos sobre $(S_p \cap \partial B) \times (U_p \cap f^{-1}[-\delta^u, 0))$ e $(S_p \cap \partial B) \times (U_p \cap f^{-1}[-\delta^u, 0) \cap \partial M)$.

Uma vez encerrada o primeiro passo do **caso i**), vamos para o caso **caso ii**), isto é, na situação em que B é um aberto relativo ao bordo que contém o ponto crítico de máximo $p \in \text{Cr}(\partial f)$. Note que p é ponto crítico instável e uma resolução local numa vizinhança de B é a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : P \times \mathbb{S}_-^{m-1} &\longrightarrow \mathbb{H}^m \times \mathbb{H}^m \\ (s, t, v) &\longmapsto (sv, tv) \end{aligned}$$

onde $P = \{(s, t) \mid s \in [0, t]\} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Repare que numa vizinhança B do ponto de máximo, o gráfico de T em $B \times B$ pode ser parametrizado pela aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \\ (t, x) &\longmapsto (x, e^t x) \end{aligned}$$

Além disso,

- a) A imagem de $\tilde{\theta}$ é o gráfico local de T , ou seja, $\text{Im } \tilde{\theta} = \overline{\text{Im } \theta}$;
- b) Se $v \in \mathbb{S}_-^{m-1}$ então $\tilde{\theta}(0, t, v) \in \{0\} \times \mathbb{R}^m$ e $\tilde{\theta}(t, t, v) \in \Delta \cap B$.
- c) Se $v \in \mathbb{S}^{m-2}$ então a imagem de $\tilde{\theta}$ parametriza a parte da variedade instável que está na fronteira de M . E mais, $\tilde{\theta}(0, t, v) \in \{0\} \times \mathbb{H}^m$ e $\tilde{\theta}(t, t, v) \in \Delta \cap \partial B$.

Esses abertos B do caso i) e ii) são o pontapé inicial para a construção da resolução local numa cobertura de $M \times M$. Comentaremos agora como funciona o processo indutivo para o caso de Bordo obstruído e em seguida para os outros tipos de pontos críticos. Para esse momento, vamos considerar $p = p_1$ e p_2 pontos críticos estável e instável, respectivamente.

A carta tame ao redor de um ponto crítico estável na fronteira que vamos considerar será do tipo

$$\mathbb{R}_-^{m-k} \times \mathbb{R}^k$$

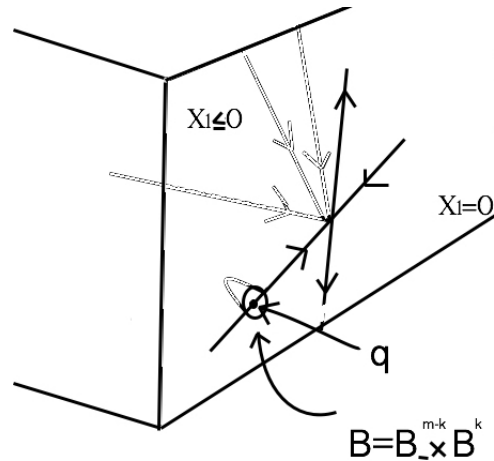
onde

$$\mathbb{R}_-^p := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_1 \leq 0\}$$

Vamos escolher B , vizinhança do ponto regular $q \in S_p$, como sendo da forma

$$B^{m-k} \times B^k$$

com $B^{m-k} \subset \mathbb{R}_-^{m-k}$ uma bola centrada no ponto $q \in \mathbb{R}^{m-k}$ ($q_1 \neq 0$) de raio menor do que $d(q, 0) - \delta$.



O ponto regular q pode ser escolhido no interior de M ou na fronteira ∂M . Se estiver em ∂M então consideremos a semi-bola B^{m-k} . O processo de construção da resolução é a mesma nessa situação.

Começamos com algumas observações

- (a) Se B é totalmente contido no interior então a aplicação

$$\hat{\sigma}_{-\delta}^s : \{-\delta\} \times \text{Bl}_{B \cap S_p}(B) \rightarrow B \times f^{-1}(-\delta)$$

tem a propriedade que leva $\partial \text{Bl}_{B \cap S_p}(B)$ para $B \cap S_p \times (U_p \cap f^{-1}(-\delta)) \subset B \cap S_p \times \partial M \cap f^{-1}(-\delta)$;

Por outro lado $\hat{\sigma}_{-\delta}^s$ restrita $\text{Bl}_{B \cap S_p}(B) \setminus \partial \text{Bl}_{B \cap S_p}(B)$ não toca em pontos de $B \times \partial M$. Conseqüentemente $(\hat{\sigma}_{-\delta}^s)^{-1}(B \times S_{p_2} \cap f^{-1}(-\delta))$ é um conjunto completamente contido em $\partial \text{Bl}_{B \cap S_p}(B)$. De fato, pela transversalidade (restrita a fronteira - um dos casos discutidos) esse conjunto tem que ter codimensão k em $\partial \text{Bl}_{B \cap S_p}(B)$ sendo que a variedade $S_{p_2} \cap f^{-1}(-\delta)$ tem dimensão $m - k - 1$ em $f^{-1}(-\delta)$.

Agora, como $\hat{\sigma}_{-\delta}^s$ restrito a $\partial \text{Bl}_{B \cap S_p}(B)$ é um difeomorfismo sobre $B \cap S_p \times U_p^{-\delta}$ temos que

$$(\hat{\sigma}_{-\delta}^s)^{-1}(B \times S_{p_2}^{-\delta}) = B \cap S_p \times \{q_1, \dots, q_l\}$$

onde $\{q_1, \dots, q_l\} = U_p^{-\delta} \cap S_{p_1}^{-\delta}$. Sabemos que tem somente um número finito de trajetórias ligando p_1 a p_2 .

Com outras palavras para construir o próximo passo da resolução precisamos fazer o blow-up do conjunto

$$(\emptyset, B^{m-k} \times \{q_1, \dots, q_l\})$$

dentro do par

$$(\text{Bl}_{S_p \cap B}(B), \partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)) = (B^{m-k} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}, B^{m-k} \times \mathbb{S}^{k-1}).$$

Vamos descrever esse blow-up no Apêndice.

- (b) No caso quando B tem fronteira $\partial B \subset \partial M$ podemos tomar $B = B_-^{m-k}(q) \times B^k$ onde $q \in \{0\} \times \mathbb{R}^{m-k}$ é um ponto regular e $B_-^{m-k}(q)$ é uma semi-bola centrada na origem em \mathbb{R}^{m-k} .

Então $\text{Bl}_{S_p \cap B} B$ vai ser uma variedade com cantos e sua expressão é

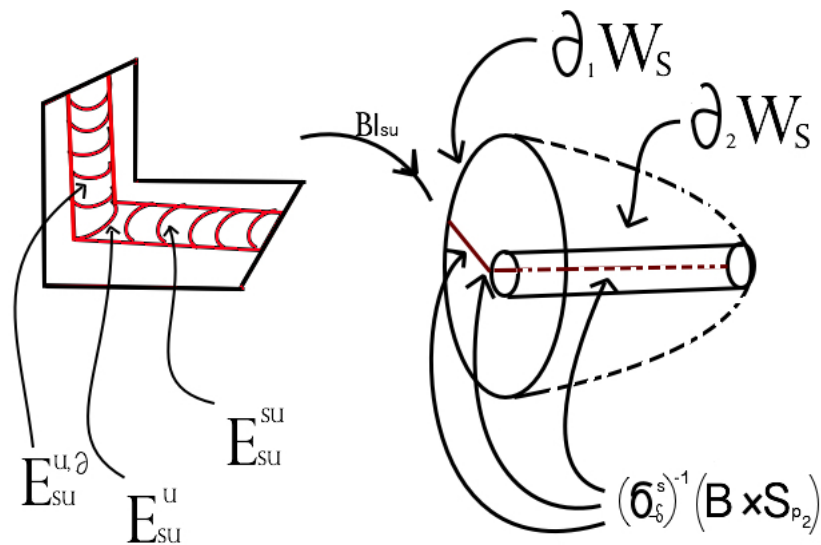
$$B_-^{m-k}(q) \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$$

com fronteira destacada

$$\mathbb{S}^{m-k-1}(q) \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$$

A aplicação $\sigma_{-\delta}^s$ (que age no nível $-\delta$) vai levar os pontos da inteira fronteira de novo em $S_p \cap B \times U_p^{-\delta}$. Vai levar os pontos da fronteira difeomorficamente para $S_p \cap \partial B \times U_p^{-\delta}$.

É preciso entender nesse caso que a pré-imagem $\sigma_{-\delta}^s{}^{-1}(B \times S_{p_2})$ contém pontos não somente na fronteira destacada, mas também pontos em $B_-^{m-k}(q) \times \{\rho = 0\} \times \mathbb{S}^{k-1}$ e o blow-up que tem que ser feito é o blow-up de uma subvariedade contida em duas faces da variedade com cantos $B_-^{m-k}(q) \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$. Lembramos que é um blow-up referente a inteira variedade $B_-^{m-k}(q) \times [0, \epsilon) \times S^{k-1}$.



A Imagem acima retrata como se comporta o blow-up numa Vizinhança de \mathbb{E}_{su}^{su}

É importante entender a estrutura do blow-up de $W_s := \text{Bl}_{B \cap S_{p_1}} B$ ao longo da pré-imagem $\hat{\sigma}_{-\delta}^s{}^{-1}(B \times S_{p_2})$. Lembremos que estamos olhando para p_1 estável e p_2 instável ligado a p_1 via trajetórias com os índices dos dois pontos iguais.

Na situação que estamos querendo analisar é mais completo considerar B sendo uma variedade com fronteira, i.e. uma vizinhança de um ponto regular q na fronteira ∂M que fica no S_{p_1} . A situação de B sendo vizinhança de um ponto regular q no interior está no S_{p_1} é tratada similarmente.

Então consideramos $\hat{\sigma}_{-\delta} : W_s \rightarrow B \times f^{-1}(-\delta)$ onde $-\delta$ é um nível regular abaixo do p_1 . A variedade W_s é uma variedade com cantos que tem duas fronteiras de codimensão 1.

- (i) Uma fronteira que é difeomorfa no interior dela, via a aplicação do blow-up $W_s \rightarrow B$ com $\partial B \setminus \partial S_{p_1}$; denotamos essa fronteira por $\partial_1 W_s$
- (ii) Uma fronteira que se projeta via a mesma aplicação sobre pontos de S_{p_1} que estão no interior de B . Denotamos essa fronteira por $\partial_2 W_s$.

A interseção das duas fronteiras se projeta sobre $\partial B \cap \partial S_{p_1}$ via a aplicação do blow-up.

É bastante fácil ver que $\hat{\sigma}_{-\delta}(B \times S_{p_2})$ vai ter pontos somente nessas duas fronteiras, quer dizer não tem pontos no interior do W_s . De fato a transversalidade de $\sigma_{-\delta}$ com $B \times S_{p_2}$ vale somente dentro de cada uma das duas fronteiras.

Os pontos de $\hat{\sigma}_{-\delta}(B \times S_{p_2}) \cap \partial_1 W_s$ que não estão no divisor excepcional de $\text{Bl}_{S_p \cap B} B$ correspondem a pontos de B que irão correr para p_2 , com outras palavras os pontos de $\hat{\sigma}_{-\delta}(B \times S_{p_2}) \cap \partial_1 W_s$ são os pontos do fecho de $\text{Bl}^{-1}(B \setminus S_{p_1} \cap S_{p_2})$.

Vamos lembrar agora que $\hat{\sigma}_{-\delta}$ leva o divisor excepcional do blow-up de $\text{Bl}_{S_p \cap B} B$ (que é ele mesmo uma variedade com fronteira de dimensão $m - 1$, $m = \dim M$) para $B \cap S_{p_1} \times U_{p_1}^{-\delta}$. Então claramente

$$\hat{\sigma}_{-\delta}^{-1}(B \times S_{p_2}) \cap \partial_2 W_s = \hat{\sigma}_{-\delta}(B \cap S_{p_1} \times \{q_1, \dots, q_l\}) \cap \partial_2 W_s$$

onde $\{q_1, \dots, q_l\} = S_{p_2} \cap U_{p_1}^{-\delta}$.

O blow-up dentro do W_s dessas duas subvariedades das duas fronteiras distintas de W_s é especial. Vamos chamar de W_{su} o resultado desse segundo blow-up. A parte da fronteira de codimensão 1 de W_{su} que se projeta sobre

$$\hat{\sigma}_{-\delta}^{-1}(B \times S_{p_2}) \cap \partial_1 W_s$$

é responsável na construção da resolução da diagonal corrida pelo $B \cap S_{p_2} \times U_{p_2}$, ou seja quando considerado no intervalo de energia adequado essa fronteira de codimensão 1 se projeta sobre $B \cap S_{p_2} \times U_{p_2}$. Ao mesmo tempo a outra fronteira de codimensão 1 de W_{su} que se projeta sobre

$$\hat{\sigma}_{-\delta}(B \times S_{p_2}) \cap \partial_2 W_{su}$$

é responsável na resolução para

$$B \cap S_{p_1} \times n_\gamma(p_1, p_2)U_{p_2}$$

onde $n_\gamma(p_1, p_2)$ é uma função contagem de trajetórias $\gamma \in \Gamma_{p_1, p_2}$ que associa o sinal ± 1 a cada curva que passa por q_i .

Fica claro agora que não importa se B tem fronteira ou não tem. O que nos

interessa não é ligado a fronteira de B mas sim ao divisor excepcional de $\text{Bl}_{B \cap S_{p_1}} B$. Então é mais fácil raciocinar no que segue começando com B sem fronteira, i.e. B é vizinhança de um ponto q interior. O pedaço $B \cap S_{p_2} \times U_{p_2}$ não aparece mais na resolução da diagonal porque $B \cap S_{p_2} = \emptyset$.

O segundo blow-up que gera W_{su} nessa situação não é mais um blow-up especial. Na Subseção 5 vamos explicitar os sinais ao descrever W_{su} dentro da carta tame de p_1 para determinar as orientações da fronteira de codimensão 1 de W_{su} que se projeta sobre $\hat{\sigma}_{-\delta}^{-1}(B \times S_{p_2})$.

O processo garante a existência de uma aplicação $\hat{\sigma}^{su} : [c_2 - \delta_2, 0] \times W_{su} \rightarrow f^{-1}([c_2 - \delta_2, 0])$ onde $c_2 = f(p_2)$, $\delta_2 > 0$ é um valor pequeno e $\text{Im } \hat{\sigma}^{su}$ é localmente o fecho de T . O bordo da corrente $\bar{\mathbf{T}}$ produz as correntes \mathbf{P} e \mathbf{R} tais que

$$\text{spt } \mathbf{P} \subset (M \times M) \setminus (\partial M \times \partial M)$$

$$\text{spt } \mathbf{R} \subset \partial M \times \partial M$$

e a expressão local para \mathbf{P} é

$$\begin{aligned} & [S_{p_1} \cap B] \times [U_{p_1} \cap f^{-1}([c_2, 0])] + [S_{p_1} \cap B] \times n_\gamma(p_1, p_2) \cdot [U_{p_2} \cap f^{-1}([c_2 - \delta_2, c_2])] = \\ & = [S_{p_1} \cap B] \times \left[\tilde{U}_{p_1} \cap f^{-1}([c_2 - \delta_2, 0]) \right] \end{aligned}$$

onde $\left[\tilde{U}_{p_1} \right] = [U_{p_1}] + n(p_1, p_2) \cdot [U_{p_2}]$.

Outra situação a considerar é quando p_1 for um ponto crítico instável ou do interior que está no nível zero. Podemos supor que B está contido na vizinhança tame desse ponto. Se $p \in \text{Cr}^0(f)$, então B é disjunta da fronteira, $W_0 = \text{Bl}_{S_p \cap B} B$ é uma variedade com fronteira e a aplicação

$$\sigma_{-\delta}^0 : \{-\delta\} \times \text{Bl}_{B \cap S_p} B \rightarrow B \times f^{-1}(-\delta),$$

é transversal a S_{p_2} , onde p_2 é um pontos críticos abaixo de p . Caso que p_2 seja um ponto no interior que vem logo após p_1 , o processo é idêntico ao caso sem fronteira descrito na Seção anterior. Sendo assim, suponha que p_2 é um ponto crítico estável. A fronteira ∂W_0 que se projeta em

$$(\hat{\sigma}_{-\delta}^0)^{-1}(B \times S_{p_2}) \cap \partial W_0$$

é responsável na resolução por

$$S_p \cap B \times U_{p_2}$$

e ela não aparece na integração. Suponha agora que $p_1 \in \text{Cr}^u(f)$. O aberto B é relativo ao bordo, o blow-up agora é $W_u = \text{Bl}_{S_{p_1} \cap B} B$ e o resto sai quase da mesma maneira, pois o

próximo blow-up a considerar vai depender do tipo do próximo ponto crítico p_2 , que pode ser do interior, estável ou instável. Mais informações sobre esse blow-up é encontrado na Subseção 6.3.

Independente do tipo de ponto crítico $p_1 \in \text{Cr}^0(f)$ ou $p_1 \in \text{Cr}^u(f)$ que vamos considerar, a resolução local da fronteira de \mathbf{T} produz a corrente

$$[S_{p_1}] \times [U_{p_1}].$$

Note que aparece somente parcelas desse tipo, pois se $\lambda_{p_1} = k$, a medida Hausdorff k -dimensional de U_{p_2} quando $\lambda_{p_2} = k - 1$ é igual a zero, o que produz a corrente $[U_{p_2}]$ nula.

Portanto, para qualquer tipo de aberto B , temos que

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] \quad \text{em } \Sigma^c.$$

Logo,

$$\text{spt} \left\{ \mathbf{P} - \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] \right\} \subset \Sigma.$$

e o resto sai de forma idêntica ao caso sem fronteira. ■

Observação 16 *Note que para encontrar a expressão de \mathbf{P}*

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p]$$

usamos o gráfico do fluxo φ_t , isto é, $(x, \varphi_t(x))$, quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se usarmos o gráfico reverso $(\varphi_t(x), x)$ quando $t \rightarrow -\infty$ vamos obter a corrente

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [\tilde{S}_p] \times [U_p],$$

onde \tilde{S}_p , é definido como sendo

$$\tilde{S}_p = \bigcup_{p \prec q} S_q = \{x \in M \mid p \prec x\}$$

e a corrente

$$[\tilde{S}_q] = [S_q] - \sum_{q \in \text{Cr}_k^u(f)} \bar{n}(p, q)[S_p]$$

com $q \preceq p$.

3.3 Isomorfismo com Coeficientes Reais da Homologia do Complexo de Correntes com o Complexo de Morse - Caso com Bordo

Lembremos que estamos interessados nos limites das restrições do operador \mathbb{P} as formas que se anulam no bordo ou ao fluxo φ_t restrito ao interior. Dessa forma, a equação 56 se transforma em

$$d\mathbf{T}^r = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}^r \quad (64)$$

quando consideramos no primeiro fato de $M \times M$ as formas $\Omega_D^k(M)$. Por sua vez, ao restringir o fluxo ao interior no segundo fator de $M \times M$, ou equivalentemente, considerando a restrição da equação 56 a $M \times M^\circ$ obtemos

$$d\mathbf{T}^a = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}^a. \quad (65)$$

A passagem do limite $\mathbf{P} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_t$ para a corrente $\mathbb{P} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ acontece pelo Kernel de Schwarz e sua expressão é

$$\mathbb{P}(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p] = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) \cdot [U_p]$$

A expressão das restrições $\mathbb{P}^{r/a}$ do operador $\mathbb{P} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M)$, podem ser simplificada. De fato,

- i) Como o domínio de \mathbb{P}^r são formas que se anulam na origem, para pontos crítico instável $p^u \in \text{Cr}^u(f)$, as variedades estáveis estão inteiramente contida no bordo da variedade e portanto se $\omega \in \Omega_D^k(M)$

$$\int_{S_{p^u}} \omega = 0,$$

para todo $p^u \in \text{Cr}^u_{m-k}(f)$. Desta forma, a expressão de \mathbb{P}^r é

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^r(\omega) &= \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) [\tilde{U}_p] \\ &= \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) [\tilde{U}_p]. \end{aligned}$$

- ii) No caso do operador \mathbb{P}^a , como o fluxo é restrito ao interior, o contradomínio são correntes definida no interior e que possui suporte compacto (veja o Apêndice).

Assim, se $\zeta \in \Omega_{\text{cpt}}^{m-k}(M^\circ)$ então

$$[U_{p^s}](\zeta) = 0.$$

Isso faz com que a imagem do operador \mathbb{P}^a seja combinações das correntes $[U_{p^0}]$ e $[U_{p^u}]$ com $p^0 \in \text{Cr}_{m-k}^0(f)$ e $p^u \in \text{Cr}_{m-k}^u(f)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^a(\omega) &= \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) [U_p] \\ &= \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) [U_p]. \end{aligned}$$

Organizando todas as informações temos

Teorema 19 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Smale numa variedade Riemanniana, compacta com bordo de dimensão m e com campo gradiente tangente ao bordo. Se o fluxo φ_t do campo gradiente negativo tiver volume finito e for f -tame, então para toda forma diferencial $\omega \in \Omega_D^k(M)$, $0 \leq k \leq m$, temos o operador*

$$\mathbb{P}^r(\omega) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} r_p^0(\omega) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} r_p^s(\omega) \cdot [\tilde{U}_p], \quad (66)$$

onde

$$r_p^0(\omega) = \int_{S_p} \omega, \quad \text{se } p \in \text{Cr}^0(f) \quad r_p^s(\omega) = \int_{S_p} \omega, \quad \text{se } p \in \text{Cr}^s(f) \quad (67)$$

Se $\omega \in \Omega^k(M)$, $0 \leq k \leq m$, o operador

$$\mathbb{P}^a(\omega) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^{\circ*} \omega = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} r_p^0(\omega) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} r_p^u(\omega) \cdot [U_p], \quad (68)$$

onde

$$r_p^u(\omega) = \int_{\tilde{S}_p} \omega, \quad \text{se } p \in \text{Cr}^u(f) \quad (69)$$

Além disso, os operadores $\mathbb{T}^{r/a}$ tem grau $+1$ com valores nas correntes flat satisfazendo as igualdades

$$d \circ \mathbb{T}^{r/a} + (-1)^* \mathbb{T}^{r/a} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}^{r/a} \quad (70)$$

Observação 17 *Com respeito aos operadores $\mathbb{P}^{r/a}$ destacamos*

1. A fórmula 70 implica que os operadores $\mathbb{P}^{r/a}$ comutam com a diferencial, ou seja,

$$\mathbb{P}^{r/a} \circ d = d \circ \mathbb{P}^{r/a}.$$

2. A imagem dos operadores $\mathbb{P}^{r/a}$ são

$$\text{Im } \mathbb{P}^r = \mathcal{U}_k^r := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R} \cdot [U_p] \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} \mathbb{R} \cdot [\tilde{U}_p], \quad (71)$$

$$\text{Im } \mathbb{P}^a = \mathcal{U}_k^a := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R} \cdot [U_p] \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} \mathbb{R} \cdot [U_p], \quad (72)$$

onde $\text{Cr}_k^0(f)$, $\text{Cr}_k^s(f)$ e $\text{Cr}_k^u(f)$ são, respectivamente, os conjuntos de pontos críticos interiores, estáveis e instáveis de índice igual a k . A priori temos que apenas as inclusões $\text{Im } \mathbb{P}^{r/a} \subset \mathcal{U}_k^{r/a}$. A inclusão oposta $\mathcal{U}_k^r \subset \mathbb{P}^r$ segue de forma similar ao caso sem fronteira. Para a inclusão $\mathcal{U}_k^a \subset \mathbb{P}^a$, note que no caso de bordo obstruído existem trajetórias que ligam pontos críticos de mesmo índice, mas isso não afeta a essência, pois

$$\int_{\tilde{S}_p} \cdot = \int_{S_p} \cdot + \bar{n}(p, q) \int_{S_q} \cdot$$

onde $q \in \text{Cr}^s(f)$ e $p \prec q$. Portanto com o mesmo argumento conseguimos construir uma forma suave com suporte contido numa vizinhança desse ponto que não intersecta nenhuma variedade estável de um outro ponto crítico de mesmo índice.

3. Os dois item acima nos dá um subcomplexo $i : (\mathcal{U}_*^{r/a}, d) \subset (\mathcal{D}'_*(M), d)$.

Teorema 20 As restrições ao codomínio de $\mathcal{U}_{m-k}^{r/a}$ nos $\mathbb{P}^{r/a}$ induzem isomorfismos

$$\tilde{\mathbb{P}}_*^r : \underbrace{H^k(\Omega_D(M))}_{\simeq H^k(M, \partial M)} \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*^r) \quad (73)$$

$$\tilde{\mathbb{P}}_*^a : H^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*^a). \quad (74)$$

Demonstração: A injetividade das aplicações $\tilde{\mathbb{P}}_*^{r/a}$ decorre dos diagramas comutarem

$$\begin{array}{ccc} \Omega_D^k(M) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}^r} & \mathcal{U}_{m-k}^r \\ & \searrow \mathbb{P}^r & \downarrow i \\ & & \mathcal{D}'_{m-k}(M) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega_a^k(M) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}^a} & \mathcal{U}_{m-k}^a \\ & \searrow \mathbb{P}^a & \downarrow i \\ & & \mathcal{D}'_{m-k}(M^\circ) \end{array}$$

Para a sobrejetividade, faremos por etapas as demonstrações. Primeiramente vamos mostrar que dado $U \in \mathcal{U}_{m-k}^r$ com $dU = 0$ existe $\omega \in \Omega_D^k(M)$ com $d\omega = 0$ tal que $\mathbb{P}^r(\omega) = U$.

Podemos escrever U como

$$U = \sum_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} n_p [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} m_p [\tilde{U}_p].$$

Desta maneira, vamos analisar separadamente as correntes $[U_p]$ se $p \in \text{Cr}_k(f)$ e $[\tilde{U}_{p^s}]$, para $p \in \text{Cr}_k^s(f)$.

Observe que se $p \in \text{Cr}^0(f)$ então $U_p \cap \partial S_q \neq \emptyset$ para todo $q \in \text{Cr}_k(f)$. Agora se $p \in \text{Cr}^s(f)$ então

ii) Para $q \in \text{Cr}_k^0(f) \cup \text{Cr}_k^s(f)$ temos $\overline{U_p} \cap \partial S_q = \emptyset$;

ii) Caso $q \in \text{Cr}_k^u(f)$ tal que $q \not\leq p$ então $\overline{U_p} \cap \partial S_q = \emptyset$.

Assim, para $q \in \text{Cr}(f)$ nas condições acima existe um aberto N com $N \supset S_q$ tal que

$$N \cap \partial S_q = \emptyset$$

e

$$N \supset \text{spt } U.$$

Como $U \in \mathcal{E}'_{m-k}(N)$ é uma corrente com suporte compacto, pelo Teorema de dualidade de Lefschetz para o caso não compacto, Corolário 112, temos que $H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D(N)) \simeq H^{m-k}(N)^* \simeq H_{m-k}(\mathcal{E}'(N))$ e portanto existem uma forma $\omega \in \Omega_{D,\text{cpt}}^k(M)$ fechada e uma corrente $\sigma \in \mathcal{E}'_{m-k+1}(N)$ com suporte compacto em N tal que

$$\omega - U = d\sigma.$$

Usando interseção de correntes, os mesmos argumentos do Teorema 13 mostram que

$$(\omega - U, S_q) = 0$$

o que implica em

$$\int_{S_q} \omega = (U, S_q) = \begin{cases} n_q, & \text{se } q \in \text{Cr}^0(f) \\ m_q, & \text{se } q \in \text{Cr}^s(f) \end{cases}$$

e portanto $\mathbb{P}^r(\omega) = U$.

Escrevendo

$$U = \sum_{p \in \text{Cr}_{m-k}^0(f)} n_p [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}_{m-k}^u(f)} m_p [U_p],$$

existe uma outra vizinhança que, ainda denotaremos por N e da mesma forma que anteriormente, contém o suporte da corrente U e satisfaz a condição

$$N \cap \partial S_q = \emptyset \quad \forall q \in \text{Cr}_k(f).$$

Note que $U \in H^{m-k}(\Omega_D(N))^*$. Pelo Corolário 114 vale o isomorfismo $H_{\text{cpt}}^k(N) \simeq H^{m-k}(\Omega_D(N))^*$ e assim existe $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N)$ com $d\omega = 0$ e $\sigma \in \mathcal{E}'_{m-k+1}(N)$ uma corrente flat com suporte compacto tal que

$$\omega - U = d\sigma.$$

Mais uma vez, utilizando interseção de correntes flat vemos que $(\omega - U, S_q) = 0$ e portanto ω é a forma que satisfaz a igualdade $\mathbb{P}^a(\omega) = U$. ■

De forma alternativa, podemos escrever a parte de dimensão $\lambda_p = k$ de \tilde{U}_p como

A expressão do limite $\mathbb{P}^{r/a}$ faz com que os complexos $(\mathcal{U}^{r/a}, d)$ possam ser naturalmente identificados com os complexos $(\check{C} = C_k^0 \oplus C_k^s, \check{\partial})$ e $(\hat{C} = C_k^0 \oplus C_k^u, \hat{\partial})$, onde $\check{\partial}$ e $\hat{\partial}$ são definidos na equação (49). Isso acontece, pois, como visto na subseção 3.1, esses operadores são descritos por meio das contagens de trajetórias (quebradas ou não) entre pontos críticos com índices consecutivos.

Antes de Enunciarmos o Teorema Principal dessa Subseção, vamos definir uma aplicação que associa um número inteiro as trajetórias entre dois pontos críticos. Dados $p, q \in \text{Cr}(f)$ com índices consecutivos, denotaremos $\Gamma_{p,q}$ como sendo o conjunto das trajetórias que ligam p a q . Na situação descrita acima, note que $\#\Gamma_{p,q} < \infty$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} n_\gamma : \text{Cr}(f) \times \text{Cr}(f) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (p, q) &\longmapsto n_\gamma(p, q) \end{aligned}$$

onde $n_\gamma(p, q)$ é a soma alternada de valores ± 1 atribuídos a cada curva $\gamma \in \Gamma_{p,q}$. Quando não existir trajetórias que ligam p e q o valor de $n_\gamma(p, q)$ é zero.

Teorema 21 *Os complexos $(\mathcal{U}^{r/a}, d)$ podem ser naturalmente identificados com os complexos $(\check{C} = C_k^0 \oplus C_k^s, \check{\partial})$ e $(\hat{C} = C_k^0 \oplus C_k^u, \hat{\partial})$, onde $\check{\partial}$ e $\hat{\partial}$ são definidos na equação (49). Consequentemente, valem os isomorfismos*

$$a) \ H_{m-k}(M) \simeq H^k(M, \partial M) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^r) \simeq H_{m-k}(\check{C}_*);$$

$$b) \ H_{m-k}(M, \partial M) \simeq H^k(M) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^a) \simeq H_{m-k}(\hat{C}_*).$$

Demonstração: Os primeiros isomorfismos

$$H_{m-k}(M) \simeq H^k(M, \partial M) \qquad H_{m-k}(M, \partial M) \simeq H^k(M)$$

vem pela Dualidade de Lefschetz, enquanto os isomorfismos

$$H^k(M, \partial M) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^r) \qquad H^k(M) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^a)$$

vem dos operadores $\mathbb{P}^{r/a}$. Para provar o terceiro isomorfismo dos itens *a*) e *b*), isto é,

$$H_{m-k}(\mathcal{U}_*^r) \simeq H_{m-k}(\check{C}_*) \quad H_{m-k}(\mathcal{U}_*^a) \simeq H_{m-k}(\hat{C}_*),$$

iremos agora identificar as diferenciais dos complexos de correntes $(\mathcal{U}_*^{r/a}, d)$ com os operadores de bordo dos complexos (\check{C}_*, ∂) e (\hat{C}_*, ∂) . Vamos primeiros mostrar o isomorfismo da letra *b*) e para isso construiremos a resolução das variedades instáveis nos pontos críticos instáveis e do interior.

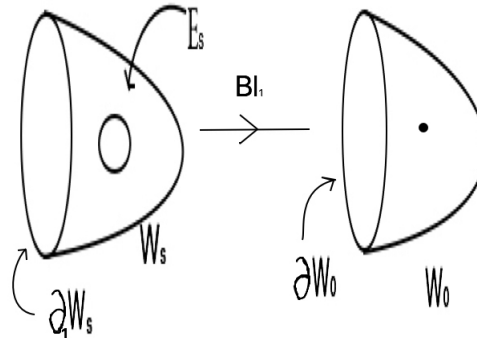
Começaremos provando o item *b*), isto é, faremos primeiro a resolução das variedades instáveis em pontos críticos instáveis e depois em pontos críticos do interior, pois a imagem do operador \mathbb{P}^a é combinação linear de U_p para $p \in \text{Cr}^0(f) \cup \text{Cr}^u(f)$. Em seguida, vamos comparar os operadores de bordo dos complexos (\mathcal{U}_*^a, d) com $(\hat{C}, \hat{\partial})$.

Suponha que $p_1 \in \text{Cr}_k^u(f)$ está no nível 0. Para $\delta_1 > 0$ pequeno denote $U_{p_1}^{-\delta_1}$ como sendo a variedade com bordo $U_{p_1}^{\delta_1} := U_{p_1}^u \cap f^{-1}(-\delta_1)$. Considere agora a projeção natural

$$R^1 : [-\delta_1, 0] \times U_{p_1}^{-\delta_1} \longrightarrow f^{-1}([-\delta_1, 0]) \cap U_{p_1}$$

induzida pelo fluxo da seguinte forma: um par $(t, v) \in [-\delta_1, 0] \times U_{p_1}^{-\delta_1}$ é projetado para um ponto sobre a trajetória que está no nível de energia t determinada pela direção v . Suponha que $p_2^s \in \text{Cr}_{k-1}^s(f)$ é o próximo ponto crítico que vem pelo fluxo. A variedade estável $S_{p_2^s}$ possui fronteira, mas $U_{p_1}^{-\delta_1} \cap \partial S_{p_2^s} = \emptyset$, isto é, $U_{p_1}^{-\delta_1} \cap S_{p_2^s}$ intersecta apenas o interior (numa quantidade finita de pontos no nível $f^{-1}(-\delta_1)$). De fato, se existisse uma trajetória no bordo (que é uma variedade sem bordo), então existiria trajetórias entres dois pontos críticos de índices iguais.

Denotando por $W_0 := U_{p_1}^{-\delta_1}$, a inclusão $R_{-\delta_1}^1 = \iota : W_0 \hookrightarrow f^{-1}(-\delta_1)$ e W_s o Blow-up de W_0 ao longo de $\iota^{-1}(S_{p_2^s}) = S_{p_2^s} \cap W_0$.



Note que o divisor excepcional

$$\mathbb{E}_s := S\nu(S_{p_2^s} \cap W_0) = \text{Bl}_1^{-1}(S_{p_2^s} \cap W_0)$$

e a pré-imagem

$$\text{Bl}_1^{-1}(\partial W_0) := \partial_1 W_s$$

é uma subvariedade de W_s com codimensão 1.

Seja $\delta_2 > 0$ tal que $f^{-1}(c_2^s - \delta_2)$ intersecta a vizinhança tame de p_2^s e $f(c_2^s) = p_2^s$, então existe uma aplicação (o qual será dado mais detalhes sobre sua construção no Apêndice)

$$R^2 : [c_2^s - \delta_2, 0] \times W_s \rightarrow f^{-1}([c_2^s - \delta_2, 0])$$

tal que

1. $\text{Im } R^2 = \overline{U_{p_1^u}} \cap f^{-1}([c_2^s - \delta_2, 0])$;
2. $\text{Im } R^2|_{[c_2^s, 0] \times \mathbb{E}_s} = \overline{\mathcal{M}(p_1^u, p_2^s)}$ e $\text{Im } R^2|_{[c_2^s - \delta_2, c_2^s] \times \mathbb{E}_s} = \overline{U_{p_2^s}} \cap f^{-1}([c_2^s - \delta_2, c_2^s])$;
3. $\text{Im } R^2|_{[c_2^s - \delta_2, 0] \times \partial_1 W_{su}} = U_{p_1^u} \cap f^{-1}([c_2^s - \delta_2, 0]) \cap \partial M$;
4. $R^2 : (c_2^s - \delta_2, c_2^s) \times \mathbb{E}_s \rightarrow f^{-1}((c_2^s - \delta_2, c_2^s))$ é um difeomorfismo sobre $U_{p_2^s} \cap f^{-1}((c_2^s - \delta_2, c_2^s))$.

O divisor excepcional \mathbb{E}_s que se projeta em $S_{p_2^s \cap W_0}$ é responsável pelas trajetórias que se quebram em p_2^s . Mais precisamente, se $w \in W_s^\circ$ então a trajetória $R_w^1(t)$ não se quebra em p_2^s e está contida no interior quando $t \in [c_2^s - \delta_2, 0)$ e se $w \in \partial_1 W_s$ a trajetória $R_w^2(t)$ está na fronteira de M e também não se quebra em p_2^s para todo $t \in [c_2^s - \delta_2, 0]$.

Suponha agora que $p_3^u \in \text{Cr}_{k-1}^u(f)$ é o próximo crítico que vem abaixo de p_2^s pelo fluxo, isto é, p_2^s e p_3^u são pontos críticos na situação de bordo obstruído. A construção da aplicação R^2 garante que $R_{c_2^s - \delta_2}^2 \pitchfork S_{p_3^u}$.

A construção da resolução continua considerando agora

$$W_{su} = \text{Bl}_2 Q_s W_s,$$

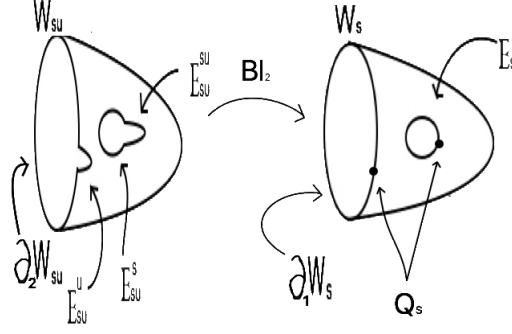
onde $Q_s = R_{c_2^s - \delta_2}^1{}^{-1}(S_{p_3^u} \cap f^{-1}(c_2^s - \delta_2))$. O divisor excepcional de W_{su} será denotada

$$\mathbb{E}_{su} := S\nu(Q_s) = \text{Bl}_2^{-1}(Q_s).$$

E mais, existe uma aplicação

$$R^3 : [c_3^u - \delta_3, 0] \times W_{su} \rightarrow f^{-1}([c_3^u - \delta_3, 0])$$

que se projeta em $\overline{U_{p_1^u}} \cap f^{-1}([c_3^u - \delta_3, 0])$, onde $c_3^u = f(p_3^u)$ e $\delta_3 > 0$ com $f^{-1}(c_3^u - \delta_3)$ intersectando uma vizinhança tame de p_3^u . Note que como a pré-imagem de Q_s via $R_{c_2^s - \delta_2}^2$ intersectam as duas fronteiras \mathbb{E}_s e $\partial_1 W_s$, o processo de Blow-up garante que a \mathbb{E}_{su} se projeta sobre \mathbb{E}_s e $\partial_1 W_s$.



Como a imagem acima sugere, podemos dividir \mathbb{E}_{su} em três partes disjuntas:

$$\mathbb{E}_{su}^{su} := \text{Bl}_2^{-1}(\mathbb{E}_s \cap \underbrace{R_{c_2^s - \delta_2}^2(S_{p_3^u})}_{Q_s}) \quad \mathbb{E}_{su}^u := \text{Bl}_2^{-1}(\partial_1 W_s \cap Q_s) \quad \mathbb{E}_{su}^s := \text{Bl}_2^{-1}(\mathbb{E}_s \setminus Q_s)$$

os quais serão responsáveis pelas trajetórias que se quebram via R^3 em dois pontos críticos: no ponto crítico instável p_3^u e no ponto crítico estável p_2^s , respectivamente. Note que \mathbb{E}_{su}^{su} , \mathbb{E}_{su}^s e \mathbb{E}_{su}^u possuem dimensão $m - 1$. Uma outra subvariedade com codimensão 1 em W_{su} será

$$\partial_2 W_{su} := \text{Bl}_2^{-1}(\partial_1 W_s \setminus Q_s).$$

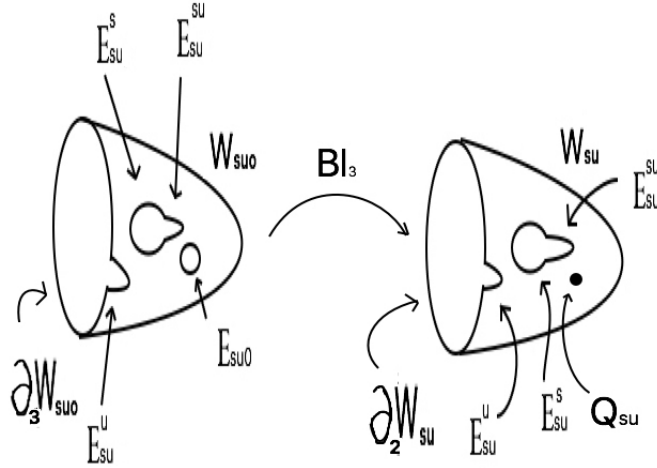
Assim,

1. $\text{Im } R^3|_{[c_2^s, 0] \times \mathbb{E}_{su}^s} = \overline{\mathcal{M}(p_1^u, p_2^s)}$ $\text{Im } R^3|_{[c_3^u, c_2^s] \times \mathbb{E}_{su}^u} = \overline{\mathcal{M}^\partial(p_2^s, p_3^u)}$ $\text{Im } R^3|_{[c_3^u - \delta_3, c_2^s] \times \mathbb{E}_{su}^{su}} = U_{p_3^u} \cap f^{-1}([c_3^u - \delta_3, c_2^s]);$
2. $\text{Im } R^3|_{[c_3^u - \delta_3, 0] \times \partial_2 W_{su}} = U_{p_1^u} \cap f^{-1}([c_3^u - \delta_3, 0]) \cap \partial M \subset \partial M;$
3. $R^3 : (c_3^u - \delta_3, c_3^u) \times \mathbb{E}_{su}^{su} \rightarrow f^{-1}((c_3^u - \delta_3, c_3^u))$ é um difeomorfismo sobre $U_{p_3^u} \cap f^{-1}((c_3^u - \delta_3, c_3^u))$.

Por fim, seja $p_4 \in \text{Cr}_{k-1}^\circ(f)$ o próximo ponto crítico que vai pelo fluxo. A construção garante a transversalidade de $R_{c_3^u - \delta_3}^3$ com S_{p_4} e seguindo o processo iterativo, o próximo Blow-up será

$$W_{su0} := \text{Bl}_3|_{Q_{su}} W_{su}$$

onde $Q_{su} = R_{c_3^u - \delta_3}^3(S_{p_4})$ e $\mathbb{E}_{su0} := S\nu(Q_s)$ é uma nova fronteira que é adicionada no interior de W_{su} .



As subvariedades de dimensão 1 de W_{su0} são \mathbb{E}_{su0} , \mathbb{E}_{su}^s , \mathbb{E}_{su}^u , \mathbb{E}_{su}^{su} e $\partial_3 W_{su0} := \text{Bl}_3^{-1}(\partial_2 W_{su})$.

A nova projeção será

$$R^4 : [c_4 - \delta_4, 0] \times W_{su0} \rightarrow f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])$$

onde $\text{Im } R^4 = \overline{U_{p_1^u}} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])$ e R^4 restrito ao interior é um difeomorfismo sobre um aberto e denso da imagem. Além disso, a restrição $R^4 : (c_4 - \delta_4, c_4) \times \mathbb{E}_{su0} \rightarrow f^{-1}((c_4 - \delta_4, c_4))$ é um difeomorfismo sobre $U_{p_4} \cap f^{-1}((c_4 - \delta_4, c_4))$ e $R^4 : (c_4, 0) \times \mathbb{E}_{su0} \rightarrow \mathcal{M}(p_1^u, p_4^0)$.

O processo pode ser continuado até o ponto de mínimo obtendo a aplicação $R : [c_{\min}, 0] \times W \rightarrow f^{-1}([c_{\min}, 0])$ tal que c_{\min} é o valor de mínimo e W é o resultado dos sucessivos blow-ups. A imagem de R é $\overline{U_{p_1^u}}$ e a restrição de R ao interior é um difeomorfismo sobre um aberto denso da imagem.

O próximo passo agora é encontrar o bordo da corrente $U_{p_1^u}$ e para isso é necessário analisar as subvariedades de codimensão 1 em $[c_{\min}, 0] \times W$ e usar o Teorema de Stokes em $[c_{\min}, 0] \times W$. Com intuito de não sobrecarregar a notação iremos supor que $\text{Cr}_{k-1}(f) = \{p_2^s, p_3^u, p_4\}$ e nos restringir a encontrar o bordo da $U_p \cap f^{-1}[c_4 + \delta_3, 0]$, pois caso contrário teríamos que introduzir na notação novos pontos críticos e novas possibilidades de trajetórias tornando a expressão da integração maior e confusa. Por esse motivo, usaremos a aplicação $R^4 : [c_4 - \delta_3, 0] \times W_{su0} \rightarrow f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])$ no lugar da aplicação R .

Essa alteração de R para R^4 deve ser naturalmente acompanhada de uma mudança na forma suave que vamos considerar na integração. A troca será feita mediante a seguinte motivação: como $R_{c_{\min}}(W) = \{p_{\min}\}$ temos

$$\int_{\{c_{\min}\} \times \partial W} R^* \eta = 0.$$

Por isso, vamos supor que η é uma forma no interior com suporte compacto tal que

$$\int_{\{c_4 - \delta_4\} \times W_{su_0}} R^{4*} \eta = 0. \quad (75)$$

Faremos agora duas observações:

- Como as variedades instáveis de pontos críticos com índice menor que $k-1$ possuem medida Hausdorff $k-1$ dimensional igual a zero, a diferencial de $[U_{p_1^u}]$ é dada em função das variedades instáveis dos pontos críticos de $\text{Cr}_{k-1}(f)$;
- Dado $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(M^\circ)$ temos que

$$[\tilde{U}_{p_2^s}](\omega) = [U_{p_2^s}](\omega) + n_\gamma(p, q)[U_{p_3^u}](\omega) = n_\gamma(p, q)[U_{p_3^u}](\omega)$$

pois $\text{spt } \omega \cap \partial M = \emptyset$.

Partiremos agora para o cálculo da diferencial de $U_{p_1^u}$ em $f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])(\eta)$. Se $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(M^\circ)$ que satisfaz a equação 75, então

$$\begin{aligned} d[U_{p_1^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])(\eta) &= \int_{R^4((c_4 - \delta_4, 0) \times W_{su_0}^\circ)} d\eta = \int_{(c_4 - \delta_4, 0) \times W_{su_0}^\circ} dR^{4*} \eta \\ &= \int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times W_{su_0}} dR^{4*} \eta = \int_{\partial([c_4 - \delta_4, 0] \times W_{su_0})} R^{4*} \eta \\ &= \int_{\{c_4 - \delta_4\} \times W_{su_0}} R^{4*} \eta - \int_{\{0\} \times W_{su_0}} R^{4*} \eta + \\ &\quad - \int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times \partial W_{su_0}} R^{4*} \eta \\ &= - \int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times \partial W_{su_0}} R^{4*} \eta \end{aligned}$$

Portanto é suficiente analisar a integral

$$\int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times \partial W_{su_0}} R^{4*} \eta.$$

Note que a subvariedade $\partial_3 W_{su_0}$ possui codimensão 1 e

$$\int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times \partial_3 W_{su_0}} R^{4*} \eta = 0,$$

pois $\text{spt } \eta \cap \partial M = \emptyset$ e $R^4([c_4 - \delta_4, 0] \times \partial_3 W_{su0}) \subset \partial M$. Outro pedaço que dar zero é a integral

$$\int_{R^4((c_4 - \delta_4, c_2^s) \times \mathbb{E}_{su}^s)} \eta,$$

pois a restrição de R^4 a $(c_4 - \delta_4, c_2^s) \times \mathbb{E}_{su}^s$ se projeta em $U_{p_2^s} \subset \partial M$.

Os pedaços de codimensão 1 de W_{su0} são compostas pelos pedaços \mathbb{E}_{su}^s , \mathbb{E}_{su}^u , \mathbb{E}_{su}^{su} e \mathbb{E}_{su0} . Escreveremos agora os pedaços que não se anulam

$$\begin{aligned} \int_{[c_4 - \delta_4, 0] \times \partial W_{su0}} R^{4*} \eta &= \int_{[c_4 - \delta_4, c_4] \times \mathbb{E}_{su0}} R^{4*} \eta + \int_{[c_4 - \delta_4, c_3^u] \times E_{su}^u} R^{4*} \eta + \\ &\quad + \int_{[c_4 - \delta_4, c_2^s] \times \mathbb{E}_{su}^{su}} R^{4*} \eta \\ &= \int_{R^4((c_4 - \delta_4, c_4) \times \mathbb{E}_{su0})} \eta + \int_{R^4((c_4 - \delta_4, c_3^u) \times \mathbb{E}_{su}^u)} \eta \\ &\quad + \int_{[c_4 - \delta_4, c_2^s] \times E_{su}^{su}} R^{4*} \eta \\ &= n_\gamma(p_1^u, p_4) \cdot [U_{p_4} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_4])](\eta) \\ &\quad + n_\gamma(p_1^u, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_3^u])](\eta) \\ &\quad + \int_{[c_4 - \delta_4, c_2^s] \times E_{su}^{su}} R^{4*} \eta \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \int_{[c_4 - \delta_4, c_2^s] \times E_{su}^{su}} R^{4*} \eta &= \int_{[c_4 - \delta_4, c_3^u] \times E_{su}^{su}} R^{4*} \eta + \underbrace{\int_{[c_3^u, c_2^s] \times E_{su}^{su}} R^{4*} \eta}_{=0} \\ &= \int_{R^4((c_4 - \delta_4, c_3^u) \times E_{su}^{su})} \eta \\ &= n_\gamma(p_1^u, p_2^s) \cdot n_\gamma(p_2^s, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u}](\eta) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
d[U_{p_1^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])](\eta) &= n_\gamma(p_1^u, p_4) \cdot [U_{p_4} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_4])](\eta) \\
&\quad + n_\gamma(p_1^u, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_3^u])](\eta) \\
&\quad + n_\gamma(p_1^u, p_2^s) \cdot n_\gamma(p_2^s, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u}](\eta)
\end{aligned}$$

Na Subseção 5 vamos discutir as orientações e provar que

$$n_\gamma(p, q) = \begin{cases} -n(p, q), & \text{se } p, q \in \text{Cr}^0(f) \cup \text{Cr}^s(f) \\ n(p, q), & \text{se } q \in \text{Cr}^u(f) \end{cases}. \quad (76)$$

$$\begin{aligned}
d[U_{p_1^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, 0])](\eta) &= n(p_1^u, p_4) \cdot [U_{p_4} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_4])](\eta) \\
&\quad - n(p_1^u, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u} \cap f^{-1}([c_4 - \delta_4, c_3^u])](\eta) \\
&\quad - n(p_1^u, p_2^s) \cdot n_\gamma(p_2^s, p_3^u) \cdot [U_{p_3^u}](\eta)
\end{aligned}$$

De forma geral, ou seja, considerando R em vez de R^4 e as várias possibilidades de trajetórias entre pontos críticos temos

$$d[U_{p^u}](\eta) = \left(\partial_0^u[U_{q^0}] + (-\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u)[U_{q^u}] \right) (\eta).$$

De maneira similar, fazendo o mesmo processo para os pontos críticos do interior, temos que

$$d[U_{p^0}](\eta) = \left(\partial_0^0[U_{q^0}] - \bar{\partial}_u^s \partial_s^0[U_{q^u}] \right) (\eta).$$

Isso mostra que a diferencial do complexo (\mathcal{U}_*^a, d) é isomorfo ao operador de bordo do complexo (\hat{C}, ∂) o que prova o item *b*). A lembrar o operador \hat{C} é definido pela matriz

$$\hat{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_0^0 & \partial_0^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^0 & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix}.$$

Para a prova do item *a*) segue fazendo o mesmo processo que acima. Em essência o que vai mudar é que vamos utilizar o mesmo tipo de Blow-up usado no Teorema 18. ■

4 COEFICIENTES INTEIROS

Nas subseções 2.5 e 3.3 foram encontrados isomorfismo para coeficientes reais. Considerando o push-forward de símplices transversais as variedades estáveis iremos encontrar o limite quando $t \rightarrow \infty$ e vamos conseguir os mesmos isomorfismos para coeficientes inteiros. Daremos detalhes a seguir.

4.1 Coeficientes Inteiros para Variedades sem Bordo

Nesta subseção vamos considerar M como sendo uma variedade Riemanniana, orientada, compacta de dimensão m .

Seja $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ uma símplice suave. Iremos (sob algumas hipóteses) calcular o limite quando $t \rightarrow -\infty$ de φ_{-t}^* definido por

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t})^*([\sigma])(\eta) &= (\varphi_t)_*([\sigma])(\eta) = [\sigma](\varphi_t^*\eta) \\ &= \int_{\Delta^k} \sigma^* \varphi_t^* \eta \\ &= \int_{\Delta^k} (\varphi_t \circ \sigma)^* \eta \end{aligned} \tag{77}$$

Argumentos de transversalidade permitem substituir o conjunto

$$C_k(M, \mathbb{Z}) := \{\text{módulo livre sobre } \mathbb{Z} \text{ dos } k - \text{simplexos singulares}\},$$

pelos símplices que são transversais as variedades estáveis no seguinte sentido: se $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ é uma símplices suave e $p \in \text{Cr}(f)$ então σ e $\sigma|_{\partial\Delta}$ é transversal a S_p . Este conjunto será denotado por $C_k^{\text{th}}(M, \mathbb{Z})$. Note que a homologia do complexo $(C_k^{\text{th}}(M, \mathbb{Z}), \partial)$ é isomorfa a homologia de M , isto é,

$$H_k^{\text{th}}(M, \mathbb{Z}) \simeq H_k(M, \mathbb{Z}).$$

Definamos o operador com imagem contida nas correntes integrais por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^{\text{th}} : C_k^{\text{th}}(M) &\longrightarrow \mathcal{I}_k(M) \\ \sigma &\longmapsto \varphi_{-t}^*(\sigma) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\eta \longmapsto (\varphi_t)_*([\sigma])(\eta) \end{aligned} \tag{78}$$

Estudaremos condições de transversalidades que relaciona símplices e variedades estáveis.

Proposição 4 *Se σ for transversal a S_p então σ é transversal ao fluxo φ_t .*

Demonstração: Como $S_p \pitchfork \sigma$ por definição de transversalidade temos

$$d\sigma_s(T_s\Delta^k) + T_{\sigma(s)}S_p = T_{\sigma(s)}M.$$

Dado $q \in S_p \cap \sigma(\Delta^k)$ existe $s \in \Delta^k$ tal que $\sigma(s) = q$ e $r \in M$ tal que $q = \varphi_t(r)$. Por definição,

$$\begin{aligned} T_qM &= d\sigma_s(T_s\Delta^k) + T_qS_p \\ &= d\sigma_s(T_s\Delta^k) + T_{\varphi_t(r)}S_p \\ &\subset d\sigma_s(T_s\Delta^k) + d(\varphi_t)_r(T_rM). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A corrente $[\hat{\Gamma}_{\varphi_t}]$ onde

$$\hat{\Gamma}_{\varphi_t} := \text{gráfico reverso do fluxo } \varphi_t$$

é o kernel do operador $\mathbb{P}_t^\#$. Para ver isso, basta verificar a igualdade

$$\mathbb{P}_t^\#(\sigma)(\eta) = [\hat{\Gamma}_{\varphi_t}] (\pi_1^*\sigma \wedge \pi_2^*\eta), \quad (79)$$

mas antes precisamos definir o que significa a corrente $\pi_1^*\sigma$.

Definindo

$$\begin{aligned} A &= \{(s, m, n) \in \Delta^k \times M \times M \mid \sigma(s) = \pi_1(m, n) = m\} \\ &= \{(s, \sigma(s), n) \mid s \in \Delta^k, n \in M\} \\ &= \Gamma_\sigma \times M \end{aligned}$$

considere o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{P_1} & \Delta^k \\ \downarrow P_2 & & \downarrow \sigma \\ M \times M & \xrightarrow{\pi_1} & M \end{array}$$

onde $P_1 : A \rightarrow \Delta^k$; $P_1(s, m, n) = s$ e $P_2 : A \rightarrow M \times M$; $P_2(s, m, n) = (m, n)$. A corrente $\pi_1^*\sigma$ será definida como sendo

$$\pi_1^*\sigma := P_{2*}[A].$$

Por abuso de notação, em alguns momentos vamos considerar $\pi_1^*\sigma$ como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_1^*\sigma : \quad A &\longrightarrow M \times M \\ (s, \sigma(s), n) &\longmapsto (\sigma(s), n) \end{aligned}$$

A igualdade do lado direito da expressão (79) pode ser vista da seguinte forma

$$\left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] (\pi_1^*\sigma \wedge \pi_2^*\eta) = (\pi_1^*\sigma \wedge \hat{\Gamma}_{\varphi_t})(\pi_2^*\eta). \quad (80)$$

Proposição 5 *São equivalentes*

$$\sigma \pitchfork \varphi_t \Leftrightarrow \pi_1^*\sigma \pitchfork \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$$

Demonstração: Suponha inicialmente que $\sigma \pitchfork \varphi_t$. Assim, dado $q \in M$ com $\varphi_t(r) = q = \sigma(s)$, onde $s \in \Delta^k$ temos que

$$d\sigma_s(T_s\Delta^k) + d(\varphi_t)_r(T_rM) = T_qM. \quad (81)$$

Vamos mostrar que $\pi_1^*\sigma \pitchfork \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$. Com efeito, dado $n \in M$ com $(\varphi_t(n), n) = (\sigma(s), n)$ provaremos que

$$d\pi_1^*\sigma_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)}A) + T_{(\varphi_t(n), n)}\hat{\Gamma}_{\varphi_t} = T_{\varphi_t(n)}M \times T_nM \quad (82)$$

Temos que a diferencial da aplicação $\pi_1^*\sigma$ é

$$d\pi_1^*\sigma : T_{(s, \sigma(s))}\Gamma_\sigma \times T_nM \rightarrow T_{\sigma(s)}M \times T_nM$$

e sua matriz é

$$d(\pi_1^*\sigma)_{(s, \sigma(s), n)} = \begin{bmatrix} d\sigma_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$d(\pi_1^*\sigma)_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)}A) = d\sigma_s(T_p\Delta^k) \times T_nM.$$

Ademais, dado $v \in T_{\underbrace{(\varphi_t(n), n)}_{=\sigma(s)}}\hat{\Gamma}_{\varphi_t}$ existe $u \in T_nM$ tal que

$$v = (d(\varphi_t)_r u, u).$$

Para mostrar a equação (82) resta provar que vale a inclusão \supset , ou seja,

$$d\pi_1^*\sigma_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)}A) + T_{(\varphi_t(n), n)}\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \supset T_{\varphi_t(n)}M \times T_nM$$

▷: Dado $(w_1, w_2) \in T_{\varphi_t(n)} \times T_n M$ pela transversalidade de $\varphi \pitchfork \varphi_t$ existe x_1 e x_2 tal que

$$w_1 = d\sigma_s(x_1) + (d\varphi_t)_n(x_2).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= (w_1, 0) + (0, w_2) \\ &= (w_1, 0) + (0, w_2 - x_2 + x_2) \\ &= (d\sigma_s(x_1) + (d\varphi_t)_n(x_2), 0) + (0, w_2 - x_2 + x_2) \\ &= \underbrace{(d\sigma_s(x_1), w_2 - x_2)}_{\in d\sigma_s(T_s\Delta^k) \times T_n M} + \underbrace{((d\varphi_t)_n(x_2), x_2)}_{\in T_{(\varphi_t(n), n)}\hat{\Gamma}_{\varphi_t}} \end{aligned}$$

Logo

$$d\pi_1^* \sigma_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)} A) + T_{(\varphi_t(n), n)} \hat{\Gamma}_{\varphi_t} = T_{\varphi_t(n)} M \times T_n M$$

Reciprocamente, supondo que $\pi_1^* \sigma \pitchfork \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$ vamos mostrar que $\sigma \pitchfork \varphi_t$.

Por hipótese, temos que

$$d\pi_1^* \sigma_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)} A) + T_{(\varphi_t(n), n)} \hat{\Gamma}_{\varphi_t} = T_{\varphi_t(n)} \times T_n M \quad (83)$$

Para mostrar que

$$T_q M = d\sigma_s(T_s \Delta^k) + d(\varphi_t)_n(T_n M)$$

mostremos a inclusão \supset .

▷: Dado $\omega_1 \in T_{\varphi_t(n)} M$, para qualquer w_2 com

$$(w_1, w_2) \in T_{\varphi_t(n)} M \times T_n M$$

como (83) pode ser escrito

$$T_{\varphi_t(n)} M \times T_n M = d\sigma_s(T_s \Delta^k) \times T_n M + T_{(\varphi_t(n), n)} \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$$

existe $x_1 \in T_s \Delta^k$, $z \in T_n M$ e $x_2 \in T_n M$ tal que

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= (d\sigma_s(x_1), z) + (d(\varphi_t)_n(x_2), x_2) \\ &= (d\sigma_s(x_1) + d(\varphi_t)_n(x_2), z + x_2). \end{aligned}$$

Logo $\sigma \pitchfork \varphi_t$. ■

Para calcular o limite do operador $\mathbb{P}_t^{\hat{\Gamma}}$ precisamos verificar a igualdade

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) &= \left(\pi_1^* \sigma \wedge \hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right) (\pi_2^* \eta) \\ &= \mathbb{P}_t^{\hat{\Gamma}}(\sigma)(\eta) \end{aligned}$$

Observação 18 *Para a primeira igualdade fazer sentido, precisamos usar interseção de correntes e por isso é essencial que aconteça*

$$\pi_1^* \sigma \pitchfork \hat{\Gamma}_{\varphi_t}.$$

Por definição a expressão $\pi_1^* \sigma \wedge \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$ é $(\pi_1^* \sigma) \left((\pi_1^* \sigma)^{-1} \left(\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right) \right)$. Assim,

$$\begin{aligned} (\pi_1^* \sigma)^{-1} \left(\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right) &= \{(s, \sigma(s), n) \mid (\pi_1^* \sigma)(s, \sigma(s), n) = (\sigma(s), n) \in \hat{\Gamma}_{\varphi_t}\} \\ &= \{(s, \sigma(s), n) \mid (\sigma(s), n) = (\varphi_t(n), n), n \in M, s \in \Delta^k\} \\ &= \{(s, \sigma(s), \underbrace{\varphi_{-t} \circ \sigma(s)}_x) \mid s \in \Delta^k\} \\ &:= B_\sigma^t \\ &\subset \Delta^k \times M \times M \end{aligned}$$

e

$$(\pi_1^* \sigma) \left((\pi_1^* \sigma)^{-1} \left(\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right) \right) = \{(\sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s))) \mid s \in \Delta^k\}.$$

Considerando

$$P_2 : B_\sigma^t := \{(s, \sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s))) \mid s \in \Delta^k\} \longrightarrow M \times M$$

$$(s, \sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s))) \longmapsto (\sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s)))$$

e

$$c_t : \Delta^k \longrightarrow \Delta^k \times M \times M$$

$$s \longmapsto (s, \sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s)))$$

temos que

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) &= \int_{P_2(B_\sigma^t)} \pi_2^* \eta \\
&= \int_{B_\sigma^t} P_2^* \pi_2^* \eta \\
&= \int_{\Delta^k} c_t^* P_2^* \pi_2^* \eta \\
&= \mathbb{P}_t^\natural(\sigma)(\eta)
\end{aligned} \tag{84}$$

Sabemos que a corrente associada ao limite do operador \mathbb{P}_t^\natural é

$$\mathbf{P}^\natural = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p],$$

ou seja,

$$\sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [U_p] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) = \mathbb{P}^\natural(\sigma)(\eta). \tag{85}$$

Note que

$$\begin{aligned}
[S_p] \times [U_p] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) &= (\pi_1^* \sigma \wedge (S_p \times U_p))(\pi_2^* \eta) \\
&= (\pi_1^* \sigma)_* [(\pi_1^* \sigma)^{-1}(S_p \times U_p)] (\pi_2^* \eta),
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
(\pi_1^* \sigma)^{-1}(S_p \times U_p) &= \{(s, \sigma(s), n) \in A \mid (\pi_2^* \sigma)^{-1}(s, \sigma(s), n) = (\sigma(s), n) \in S_p \times U_p\} \\
&= \Delta^k \times (\sigma(\Delta^k) \cap S_p) \times U_p \\
&= \Gamma_{\sigma|_{\sigma^{-1}(S_p)}} \times U_p
\end{aligned}$$

o que implica que

$$(\pi_1^* \sigma)_* [(\pi_1^* \sigma)^{-1}(S_p \times U_p)] = (\sigma \cdot S_p) \times U_p$$

onde $\sigma \cdot S_p$ é o número de interseção da símplice σ com S_p .

Observação 19 Como σ é transversal as variedades estáveis e $\dim \Delta^k + \dim S_p = \dim M$ temos que $\sigma^{-1}(S_p)$ possui um número finito de pontos, cada um dos quais com um número

de orientação ± 1 induzido pela orientação de M .

Portanto,

$$\mathbf{P}^{\natural}(\sigma) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} (\sigma \cdot S_p) \times U_p.$$

Proposição 6 *Temos que*

$$\pi_1^* \sigma \natural \mathbf{P}^{\natural} \Leftrightarrow \sigma \natural S_p$$

Demonstração: Suponha que $\pi_1^* \sigma \natural \mathbf{P}^{\natural}$, ou seja,

$$T_{\varphi_t(n)}M \times T_nM = d\pi_1^* \sigma_{(s, \sigma(s), n)}(T_{(s, \sigma(s), n)}A) + T_{(\varphi_t(n), n)}(S_p \times U_p). \quad (86)$$

Vamos mostrar que

$$d\sigma_s(T_s\Delta^k) + T_qS_p = T_qM$$

onde $q \in S_p \cap \sigma(\Delta^k)$.

Como (86) pode ser escrito como

$$T_{\varphi_t(n)}M \times T_nM = d\sigma_s(T_s\Delta^k) \times T_nM + T_{\varphi_t(n)}S_p \times T_nU_p$$

temos

$$T_{\varphi_t(n)}M \times T_nM = (d\sigma_s(T_s\Delta^k) + T_{\varphi_t(n)}S_p) \times T_nM \quad (87)$$

Reciprocamente, se $\sigma \natural S_p$ é claro que vale (87). ■

Note que o operador

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{T}_t^{\natural} : \mathbb{C}_k^{\natural}(M) & \longrightarrow & \mathcal{I}_k(M) \\ \sigma & \longmapsto & \mathbb{T}_t^{\natural}(\sigma) : \Omega_{\text{cpt}}^k(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \eta \longmapsto \int_{[0, t] \times \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\sigma} : [0, t] \times \Delta^k & \longrightarrow & [0, t] \times M \\ (r, s) & \longmapsto & (r, \sigma(s)) \end{array}$$

satisfaz

$$\mathbb{T}_t^{\natural} \circ \partial + d \circ \mathbb{T}_t^{\natural} = \mathbb{P}_t^{\natural} - \mathbb{I}.$$

Com efeito, lembrando que

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ F_{i,k}$$

onde $F_{i,p} : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ é a aplicação de face (veja SPAINNER (1994)) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_t^\natural \circ (\partial\sigma)(\eta) + d \circ \mathbb{T}_t^\natural(\sigma)(\eta) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{[0,t] \times \Delta^{k-1}} \tilde{F}_{i,k}^* \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta + \int_{[0,t] \times \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* d\eta \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \int_{[0,t] \times \partial_i \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta + \int_{\{t\} \times \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta + \\ &\quad - \int_{\{0\} \times \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta - \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_{[0,t] \times \partial_i \Delta^k} \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta \\ &= \int_{\Delta^k} i_t^* \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta - \int_{\Delta^k} i_0^* \tilde{\sigma}^* \varphi^* \eta \\ &= \int_{\Delta^k} \sigma^* \varphi_t^* \eta - \int_{\Delta^k} \sigma^* \varphi_0^* \eta \\ &= \mathbb{P}_t^\natural(\sigma)(\eta) - \Delta(\sigma)(\eta) \end{aligned}$$

onde $\tilde{F}_{i,k} : \mathbb{R} \times \Delta^{k-1} \rightarrow \mathbb{R} \times \Delta^k$ dada por $\tilde{F}_{i,k}(t, s) = (t, F_{i,k}(s))$ e $i_t(x) = (t, x)$.

Observação 20 *Note que*

$$\begin{aligned} (\pi_1^* \sigma)^{-1}(\Phi([0, t] \times M)) &= \{(s, \sigma(s), n) \mid (\sigma(s), n) = (\varphi(r, x), x)\} \\ &= \{(s, \sigma(s), n) \mid n = x = \varphi_{-r}(\sigma(s)) = \varphi(-r, \sigma(s)) = \varphi(\tilde{\sigma}(-r, s))\} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi([0, t] \times M)(\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) &= (\pi_1^* \wedge \Phi([0, t] \times M))(\pi_2^* \eta) \\ &= (\pi_1^* \sigma)_* [(\pi_1^* \sigma)^{-1}(\Phi([0, t] \times M))] (\pi_2^* \eta) \\ &= \mathbb{T}_t^\natural(\sigma)(\eta) \end{aligned}$$

4.2 Isomorfismo com Coeficientes inteiros- Caso sem Bordo

Lembremos que

$$d \circ \mathbb{P}_t^\natural = \mathbb{P}_t^\natural \circ \partial.$$

Pela continuidade do operador de bordo, temos que

$$d \circ \mathbb{P}^{\natural} = \mathbb{P}^{\natural} \circ \partial.$$

Pelos mesmos argumentos da seção anterior temos o operador $\mathbb{P}^{\natural} : C_k^{\natural}(M) \rightarrow \mathcal{I}_k(M)$ onde

$$\mathbb{P}^{\natural}(\sigma) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} (S_p \cdot \sigma)[U_p]$$

Denotemos

$$\tilde{\mathbb{P}}^{\natural} : C_k^{\natural}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{U}_k^{\mathbb{Z}}$$

como sendo a restrição ao codomínio. Assim, a imagem desse operador é denotada por

$$\text{Im } \tilde{\mathbb{P}}^{\natural} = U_f^{\mathbb{Z}, k} = \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k(f)} \mathbb{Z}[U_p]. \quad (88)$$

Como $d \circ \mathbb{P} = \mathbb{P} \circ \partial$ temos que \mathbb{P} induz uma aplicação

$$\tilde{\mathbb{P}}_*^{\natural} : H_k(C_*^{\natural}(M, \mathbb{Z})) \simeq H_k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\mathcal{U}_*^{\mathbb{Z}}). \quad (89)$$

Teorema 22 *O par $(\mathcal{U}_*^{\mathbb{Z}}, d)$ é um subcomplexo de (\mathcal{U}_*, d) . Além disso, para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que*

$$H_k(C_*^{\natural}(M, \mathbb{Z})) \simeq H_k(\mathcal{U}_*^{\mathbb{Z}}).$$

Demonstração: Mostremos a injetividade e sobrejetividade de $\tilde{\mathbb{P}}_*^{\natural}$.

a) A inclusão $\mathbb{I}^M : C_*(M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{I}_*(M)$ induz o isomorfismo a nível de homologia

$$\mathbb{I}_*^M : H_k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\mathcal{I}_*(M)).$$

A injetividade sai da comutatividade do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} C_k^{\natural}(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}^{\natural}} & \mathcal{U}_k^{\mathbb{Z}} \\ & \searrow \mathbb{I}^M & \downarrow i \\ & & \mathcal{I}_k(M) \end{array}$$

b) Sobrejetividade: Dado $U \in \mathcal{U}_k^{\mathbb{Z}}$ com $dU = 0$ existe um elemento em $\sigma \in C_*^{\natural}(M)$ com $\partial\sigma = 0$ tal que $\tilde{\mathbb{P}}^{\natural}(\sigma) = U$.

De fato, seja N uma vizinhança do suporte de U tal que $N \supset \text{spt } U$ e $N \cap \partial S_q = \emptyset$ para todo $q \in \text{Cr}(f)$.

Sabemos que

$$H_k(N, \mathbb{Z}) \stackrel{\mathbb{I}_*^N}{\simeq} H_k(\mathcal{I}_*(N)).$$

Como $U \in H_k(\mathcal{I}(N))$ existe $\sigma \in H_k(N, \mathbb{Z})$ e $\gamma \in \mathcal{I}_{k+1}(N)$ tal que

$$\sigma - U = d\gamma.$$

Podemos supor (usando um argumento de transversalidade) que σ é uma cadeia transversal as variedades estáveis. O resto sai igual a demonstração do Teorema 14 substituindo a forma ω pela símplice σ . ■

4.3 Isomorfismos com Coeficientes Inteiros - Caso com Bordo

Com a mesma notação usada na Subsecção 4.1 será adicionada a hipótese de M ser variedade com fronteira.

Definindo o conjunto

$$C_{D,k}^{\natural}(M, \mathbb{Z}) = \{\sigma : \Delta^k \rightarrow M \mid \sigma(\Delta^k) \cap \partial M = \emptyset, \sigma, \sigma|_{\Delta^F} \pitchfork S_p, \forall p \in \text{Cr}(f)\},$$

onde Δ^F são as faces de Δ^k , temos que:

$$H_k(C_{D,k}^{\natural}(M, \mathbb{Z})) = H_k(C_k^{\natural}(M \setminus \partial M, \mathbb{Z})) = H_k(M \setminus \partial M, \mathbb{Z}) = H(M, \mathbb{Z}).$$

Agora, escrevendo

$$C_*^{\natural}(M, \partial M, \mathbb{Z}) := C_*^{\natural}(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{* - 1}^{\natural}(\partial M, \mathbb{Z})$$

como sendo o mapping cone para $i_* : C_*^{\natural}(\partial M) \rightarrow C_*^{\natural}(M)$ com operador de bordo

$$C_k^{\natural}(M, \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{k-1}^{\natural}(M, \partial M, \mathbb{Z}), \quad (\sigma, \sigma') \mapsto (\partial\sigma - i_*\sigma', -\partial\sigma'),$$

sua homologia é igual a homologia relativa da variedade, ou seja,

$$H_k(C_k^{\natural}(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{k-1}^{\natural}(\partial M, \mathbb{Z})) \simeq H_k(M, \partial M, \mathbb{Z}).$$

Esses dois conjuntos serão utilizados para definir os operadores

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^{\natural, a} : C_{D,k}^{\natural}(M) &\longrightarrow \mathcal{I}_k(M) \\ \sigma &\longmapsto \varphi_{-t}^*(\sigma) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\eta \longmapsto (\varphi_t)_*(\sigma)(\eta) \end{aligned} \quad (90)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^{\mathring{h},r} : C_k^{\mathring{h}}(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{k-1}^{\mathring{h}}(\partial M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{I}_k(M^\circ) \\ (\sigma, \sigma') &\longmapsto \varphi_{-t}^\circ * (\sigma, \sigma') : \Omega_{\text{cpt}}^k(M^\circ) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\eta \longmapsto (\varphi_t^\circ)_*(\sigma)(\eta) \end{aligned} \quad (91)$$

onde $\mathcal{I}_*(\cdot)$ são as correntes integrais e $(\varphi_t)_*(\sigma)(\eta) = [\sigma](\varphi_t^*\eta)$.

As Proposições 4, 5 e 6 ainda continuam válida para esse contexto. Além disso, as correntes associadas aos operadores $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},a}$ e $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},r}$ são $[\hat{\Gamma}_{\varphi_t}]$ e $[\hat{\Gamma}_{\varphi_t^\circ}]$.

Pelos mesmos argumentos da Subseção 4.1 podemos encontrar os limites de $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},a}$ e $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},r}$. A diferença consistem nos seus resíduos:

- O domínio do operador $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},a}$ é formado por símplices que não intersecta o bordo. Isso implica que a interseção $\sigma \cdot S_{p^u} = 0$ para todo ponto crítico $p^u \in \text{Cr}^u(f)$;
- O fluxo do operador $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},r}$ é restrito ao interior e portanto a imagem de $\mathbb{P}_t^{\mathring{h},r}$ são as correntes integrais no interior de M . Assim, dado um pontos crítico estável $p^s \in \text{Cr}_k^s(f)$ temos que $[U_{p^s}](\eta) = 0$ para toda forma $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M^\circ)$.

Diante disso, podemos escrever seus limites como sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\mathring{h},a}(\sigma) &= \sum_{p^0 \in \text{Cr}^0(f)} (S_{p^0} \cdot \sigma)[U_{p^0}] + \sum_{p^s \in \text{Cr}^s(f)} (S_{p^s} \cdot \sigma)[\tilde{U}_{p^s}] \\ \mathbb{P}^{\mathring{h},r}(\sigma, \sigma') &= \sum_{p^0 \in \text{Cr}^0(f)} (S_{p^0} \cdot \sigma)[U_{p^0}] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} (\tilde{S}_p \cdot \sigma)[U_p]. \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{U}^{\mathbb{Z},a} := \bigoplus_{p^0 \in \text{Cr}^0(f)} \mathbb{Z}[U_{p^0}] + \bigoplus_{p^s \in \text{Cr}^s(f)} \mathbb{Z}[\tilde{U}_{p^s}] = \text{Im } \mathbb{P}^{\mathring{h},a}; \quad (92)$$

$$\mathcal{U}^{\mathbb{Z},r} = \bigoplus_{p^0 \in \text{Cr}^0(f)} \mathbb{Z}[U_{p^0}] + \bigoplus_{p^u \in \text{Cr}^u(f)} \mathbb{Z}[U_{p^u}] = \text{Im } \tilde{\mathbb{P}}^{\mathring{h},r}. \quad (93)$$

Teorema 23 *As diferenciais d são invariante por $U_*^{\mathbb{Z},a/r}$. Além disso, temos os isomorfismos*

$$H_k(U_*^{\mathbb{Z},a}, d) \simeq H_k(M, \mathbb{Z}) \quad H_k(U_*^{\mathbb{Z},r}, d) \simeq H_k(M, \partial M, \mathbb{Z}).$$

Demonstração:

- O operador $\tilde{\mathbb{P}}_*^{\mathring{h},a}$ é um isomorfismo:
 - Por FEDERER (2014), a inclusão $\mathbb{I}^M : C_k^{\mathring{h}}(M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{I}_k(M)$ induz o isomorfismo a nível de homologia

$$\mathbb{I}_*^M : H_k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(\mathcal{I}_*(M)).$$

A injetividade sai do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_{D,k}^{\text{rh}}(M) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}^{\text{rh},a}} & \mathcal{U}_k^{I,\mathbb{Z}} \\ & \searrow \mathbb{I}^M & \downarrow i \\ & & \mathcal{I}_k(M) \end{array}$$

- b) Sobrejetividade: Queremos provar que dado $U \in \mathcal{U}_k^{\mathbb{Z},a}$ com $dU = 0$ existe um elemento em $\sigma \in C_k^{\text{rh}}(M, \mathbb{Z})$ com $\partial\sigma = 0$ tal que $\tilde{\mathbb{P}}^{\text{rh},a}(\sigma) = U$.

Observe que

$$\tilde{U}_p \cap \partial S_q = \emptyset$$

para todo $q \in \text{Cr}_k^0(f) \cap \text{Cr}_k^s(f)$ e $q \in \text{Cr}_k^u(f)$ com $q \not\leq p^s$.

Seja N uma vizinhança do suporte de U tal que $N \supset \text{spt } U$ e $N \cap \partial S_q = \emptyset$ para todo $q \in \text{Cr}^0(f) \cup \text{Cr}_k^s(f)$ e para todo $q \in \text{Cr}_k^u(f)$ com $q \not\leq p^s$.

Sabemos que

$$H_k(N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathbb{I}_*^N} H_k(\mathcal{I}(N)).$$

Como $U \in H_k(\mathcal{I}(N))$ existe $\sigma \in H_k(N, \mathbb{Z})$ e γ corrente flat com suporte compacto tal que

$$\sigma - U = d\gamma.$$

Podemos supor (usando um argumento de transversalidade) que σ é uma cadeia transversal as variedades estáveis e o resto sai como na prova do Teorema 22.

- ii) Provemos agora que $\tilde{\mathbb{P}}_*^{\text{rh},r}$ é um isomorfismo.

- a) Injetividade: Por FEDERER (2014) sabemos que a inclusão

$$\mathbb{I}^{M,\partial M} = \mathbb{I}^M \oplus \mathbb{I}^{\partial M} : C_k^{\text{rh}}(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{k-1}^{\text{rh}}(\partial M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{I}_k(M) \oplus \mathcal{I}_{k-1}(\partial M)$$

induz o isomorfismo

$$\mathbb{I}_*^{M,\partial M} : H_k(M, \partial M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_k(\mathcal{I}_*(M, \partial M)).$$

Se $U = \sum_i a_i U_{p_i} \in \mathcal{U}_k^{\mathbb{Z},r} \subset \mathcal{I}_*(M^\circ)$ é uma corrente fechada podemos associar um par de correntes (\check{U}, S) em $\mathcal{I}_*(M) \oplus \mathcal{I}_{* - 1}(\partial M)$ satisfazendo as igualdades: $\partial S = 0$ e $i_* S = \partial \check{U}$. Note que essa condição significa que o par (\check{U}, S) é fechado. Pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} C_k(M, \mathbb{Z}) \oplus C_{k-1}(\partial M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{P}}^{\text{rh},r}} & \mathcal{U}_k^{II,\mathbb{Z}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{I}_k(M^\circ) \\ & \searrow \mathbb{I}^{M,\partial M} & & \swarrow & \\ & & \mathcal{I}_k(M) \oplus \mathcal{I}_{k-1}(\partial M) & & \end{array}$$

Como $\mathbb{I}_*^{M, \partial M} : H_k(M, \partial M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_k(\mathcal{I}(M, \partial M))$ é injetiva, temos que $\mathbb{P}^{\natural, r}$ é injetiva.

- b) Sobrejetividade: Se $p^0 \in \text{Cr}_k^0(f)$ e $p^u \in \text{Cr}_k^u(f)$ temos que $U_{p^0} \cap \partial S_q = \emptyset$ e $U_{p^u} \cap \partial S_q = \emptyset$, para todo $q \in \text{Cr}_k(f)$.

Escrevendo

$$U = \sum_{p_i \in \text{Cr}_k^0(f)} a_i [U_{p_i}] + \sum_{p_i \in \text{Cr}_k^u(f)} b_i [U_{p_i}], \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}$$

existe uma vizinhança N que, da mesma forma que anteriormente, contém o suporte da corrente U e satisfaz a condição

$$N \cap \partial S_q = \emptyset \quad \forall q \in \text{Cr}_k(f).$$

Note que podemos ver a corrente U como uma corrente integral no interior de N , isto é, $U \in \mathcal{I}_*(N^\circ)$. Denotando por \tilde{U} a extensão para $\mathcal{I}_*(N)$ da corrente U (conforme mencionamos acima) associamos $U \in H_k(\mathcal{I}_*(N^\circ)) \mapsto (\tilde{U}, S) \in H_k(\mathcal{I}_*(N, \partial N))$ com $i_* S = \partial \tilde{U}$.

Pelo isomorfismo

$$H_k(N, \partial N) \simeq H_k(\mathcal{I}_*(N, \partial N))$$

existe $\sigma \in H_{k+1}(N, \partial N)$ tal que

$$\sigma - U = d\gamma,$$

onde γ é uma corrente flat com suporte compacto.

Seguindo os mesmos passos que usamos no operador $\mathbb{P}^{\natural, a}$ temos o desejado. ■

4.4 Continuidade

Existe um ponto delicado, que embora não tenha sido esclarecido em HARVEY and LAWSON JR (2001) deve ser mostrado. Provemos a continuidade da interseção das correntes $\pi_1^* \sigma$ e $\hat{\Gamma}_{\varphi_t}$, ou seja, $\pi_1^* \sigma \wedge \hat{\Gamma}_{\varphi_t}$. Na verdade, devemos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2^{-1}(\hat{\Gamma}_{\varphi_t}) = P_2^{-1} \left(\sum_{p \in \text{Cr}(f)} S_p \times U_p \right).$$

Para isso usaremos o Teorema 4.1 em CIBOTARU (2016), porém num contexto mais particular.

Considerando a seção

$$\begin{aligned}\phi_t : \Gamma_\sigma &\longrightarrow \Gamma_\sigma \times M \\ (s, \sigma(s)) &\longmapsto (s, \sigma(s), \varphi_{-t}(\sigma(s)))\end{aligned}$$

queremos mostrar que ϕ_0 é s -normal, ou seja, ϕ_0 é transversal a $S(F)$. Com efeito, seja

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \Gamma_\sigma \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \sigma(s), n) &\longmapsto f(n)\end{aligned}$$

e $\tilde{X}(y, m) = X(m) = -\nabla f$. Note que \tilde{X} é vertical e seu fluxo é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times \Gamma_\sigma \times M &\longrightarrow \Gamma_\sigma \times M \\ (t, (s, \sigma(s)), n) &\longmapsto ((s, \sigma(s)), \varphi_{-t}(n))\end{aligned}$$

Se F é uma variedade crítica da função de Morse \tilde{f} , observe que a variedade estável $S(F)$ é

$$S(F) = \Gamma_\sigma \times S_p$$

onde $p \in \text{Cr}(f)$.

Vamos mostrar agora que $\phi_0 \pitchfork S(F)$.

Note que a imagem de ϕ_0 é

$$\text{Im } \phi_0 = \{(s, \sigma(s), \sigma(s)) \mid s \in \Delta^k\}.$$

Devemos verificar que dado $(s, \sigma(s), n) \in S(F) \cap \text{Im } \phi_0$, ou seja, para pontos da forma $(s, \sigma(s), \sigma(s)) \in S(F) \cap \text{Im } \phi_0$, temos a igualdade

$$T_{(s, \sigma(s), \sigma(s))}(\Gamma_\sigma \times M) = d\phi_{0(s, \sigma(s))}(T_{(s, \sigma(s))}\Gamma_\sigma) + T_{(s, \sigma(s), \sigma(s))}\Gamma_\sigma \times S(p).$$

Com efeito, considerando a aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : \Delta^k &\longrightarrow M \times M \\ s &\longmapsto (\sigma(s), \sigma(s))\end{aligned}$$

temos que

$$T_{(s, \sigma(s))}\Gamma_\sigma \times T_{\sigma(s)}M = \Gamma_{d\alpha_s} + \Gamma_{d\sigma_s} \times T_{\sigma(s)}S_p.$$

Desta maneira pelo Teorema 4.1 em CIBOTARU (2016) temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\Gamma_\sigma)$

existe. Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_t^\#(\sigma)(\eta) &= (\varphi_{-t})^*(\sigma)(\eta) = \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] (\pi_1^* \sigma \wedge \pi_2^* \eta) \\ &= \left(\pi_1^* \sigma \wedge \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] \right) (\pi_2^* \eta) = \pi_{2*} \left(\pi_1^* \sigma \wedge \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] \right) (\eta)\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_t^\#(\sigma) &= (\varphi_{-t})^*(\sigma) = \pi_1^* \sigma \wedge \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] \\ &= P_{2*} \left(P_2^{-1} \left(\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right) \right) = P_{2*} \left(P_2^{-1} (\phi_t (\Gamma_\sigma)) \right)\end{aligned}$$

Note também que $P_2^{-1}(S_p \times U_p) = \Gamma_\sigma|_{\sigma^{-1}(S_p)} \times U_p$ e como P_2 é um mergulho, temos que

$$P_{2*} \left(\Gamma_\sigma|_{\sigma^{-1}(S_p)} \times U_p \right) = (\sigma \cdot S_p) \times [U_p].$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2^{-1}(\phi_t(\Gamma_\sigma)) = P_2^{-1}(S_p \times U_p) = \Gamma_\sigma|_{\sigma^{-1}(S_p)} \times U_p$$

segue que a interseção entre as correntes $\pi_1^* \sigma$ e $\left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right]$ é contínua, pois

$$\left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] \rightarrow \sum_{p \in \text{Cr}(f)} (\sigma \cdot S_p) \times [U_p] \implies \pi_1^* \sigma \wedge \left[\hat{\Gamma}_{\varphi_t} \right] \rightarrow \pi_1^* \sigma \wedge \mathbf{P}^\#.$$

5 ORIENTAÇÕES

5.1 Orientação do Limite no Caso sem Bordo

Lembremos que inicialmente foi escolhida orientações para U_p , as variedades instáveis e definimos orientações sobre S_p via a regra

$$\text{or } S_p \wedge \text{or } U_p = \text{or } M$$

Se $\Gamma_{\phi_t} = \{(q, \phi_t(q))\}$, vamos mostrar que o limite de núcleos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_{\phi_t} = \sum_{p \in \text{Cr } f} S_p \times U_p$$

considerando também as orientações.

O fato que isso é verdade sai também da demonstração do Teorema Principal em HARVEY and LAWSON JR (2001), mas queremos ver que isso também aparece na resolução.

Sejam q um ponto regular e B uma vizinhança pequena ao redor do q tal que $f(q_1) > \delta > 0$ para $q_1 \in B$ e suponha que o ponto crítico $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(q) = p \in \text{Cr}_k(f)$ está no nível 0. Queremos rever o primeiro passo da resolução da diagonal $\Delta \cap B \times B = \Delta|_B$.

Denotemos por $\tilde{\Delta} \subset B \times f^{-1}(\delta)$ a variedade n -dimensional que resulta fazendo cada ponto $(b, b) \in \Delta \cap B \times B$ correr via o fluxo na segunda coordenada até o nível δ . Em outras palavras, $\tilde{\Delta}$ é o gráfico da função definida sobre B que pega um ponto b e leva ele para a interseção da linha do fluxo correspondente com $f^{-1}(\delta)$.

O primeiro passo da resolução é considerar a aplicação inclusão $\sigma : \tilde{\Delta} \hookrightarrow B \times f^{-1}(\delta)$ e fazer blow-up de $\sigma^{-1}(B \times S_p^\delta)$ dentro do $\tilde{\Delta}$, onde $S_p^\delta := f^{-1}(\delta) \cap S_p$.

Fica mais fácil entender esse Blow-up se consideramos a aplicação gráfico que mencionamos mais cedo, isto é, via o difeomorfismo

$$\alpha : B \rightarrow \tilde{\Delta}$$

A pré-imagem $\sigma^{-1}(B \times S_p^\delta)$ é difeomorfa a $\alpha(S_p \cap B)$ desde que todo ponto de $S_p \cap B$ vai passar pelo S_p^δ . Além disso α preserva a orientação onde a diagonal e a diagonal corrida $\tilde{\Delta}$ recebem a orientação canônica e a orientação induzida, respectivamente.

Agora teremos uma aplicação

$$[-\delta, \delta] \times \text{Bl}_{S_p \cap B}(B) \rightarrow B \times f^{-1}[-\delta, \delta]$$

obtida através do lifting

$$\text{Bl}_{\sigma^{-1}(B \times S_p^\delta)}(\tilde{\Delta}) \rightarrow B \times \{\delta\} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$$

Lembra-se que temos um "blow-up" dos eixos $|x| \cdot |y| = 0$ dado em coordenadas tame da forma seguinte

$$\psi : [-\delta, \delta] \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k,$$

$$(s, v, q, w) \rightarrow (v\sqrt{\sqrt{s^2 + q^2} + s}, w\sqrt{\sqrt{s^2 + q^2} - s}).$$

Repara que a primeira componente e a variedade estável enquanto a segunda e a variedade instável. Se orientamos \mathbb{S}^{m-k-1} utilizando a normal interior primeira e a orientação do intervalo $[-\delta, \delta]$ é oposta a aquela canônica a aplicação ψ preserva a orientação nos pontos onde é difeomorfismo, isto é, para $q \neq 0$. Isso se verifica facilmente em um ponto $s = 0$, $q \neq 0$.

A aplicação ψ no nível $s = \delta$ com domínio $\{\delta\} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$ representa a parte do Blow-up da esfera estável S_p^δ dentro do conjunto de nível $f^{-1}(\delta)$ na carta f -tame.

Lembramos que em geral se $\sigma : N \rightarrow P$ é uma aplicação transversal a uma subvariedade $S \subset P$ então existe um "lift"

$$\hat{\sigma} : \text{Bl}_{\sigma^{-1}(S)} N \rightarrow \text{Bl}_S(P)$$

Conseguimos dessa forma obter o lift:

$$\hat{\sigma}_\delta : \text{Bl}_{\sigma^{-1}(B \times S_p^\delta)}(\tilde{\Delta}) \rightarrow B \times \{\delta\} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$$

mencionado acima. Fazendo a composição com o difeomorfismo induzido pelo Γ_α , obtemos uma aplicação (utilizaremos a mesma notação)

$$\hat{\sigma}_\delta : \text{Bl}_{S_p \cap B}(B) \rightarrow B \times \{\delta\} \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}.$$

É importante ter uma descrição mais explícita dessa aplicação. Nos pontos interiores da variedade com fronteira $\text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ essa aplicação é

$$B \ni z \rightarrow \left(z, \delta, \frac{\sigma_1(z)}{|\sigma_1(z)|}, |\sigma_1(z)| \cdot |\sigma_2(z)|, \frac{\sigma_2(z)}{|\sigma_2(z)|} \right)$$

e a imagem é um ponto com $q = |\sigma_1(z)| \cdot |\sigma_2(z)| \neq 0$. Denotemos por $(\sigma_1(z), \sigma_2(z))$ as componentes do ponto que resulta intersectando a trajetória de z com $f^{-1}(\delta)$.

Para ver como essa aplicação se estende a $\partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ primeiro reparamos que

$$\frac{\sigma_1(z)}{|\sigma_1(z)|}$$

faz sentido para $z \in S_p \cap B$, enquanto $\frac{\sigma_2(z)}{|\sigma_2(z)|}$ não faz sentido, pois o denominador é zero.

Mas podemos mostrar que para $z_1 \in S_p \cap B$ e $u \in S(\nu S_p \cap B)$ o próximo limite existe

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma_2(\exp_{z_1}(tu))}{|\sigma_2(\exp_{z_1}(tu))|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma_2(\exp_{z_1}(tu))}{t} \cdot \frac{t}{|\sigma_2(\exp_{z_1}(tu))|} = \frac{d(\sigma_2)_{z_1}(u)}{|d(\sigma_2)_{z_1}(u)|}$$

Da transversalidade sabemos que essa última fração faz sentido.

Concluimos que $\hat{\sigma}_\delta$ tem a seguinte expressão na fronteira $\partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$

$$(z_1, u) \rightarrow (z_1, \delta, \frac{\sigma_1(z_1)}{|\sigma_1(z_1)|}, 0, \frac{d(\sigma_2)_{z_1}(u)}{|d(\sigma_2)_{z_1}(u)|})$$

Lembramos que existe uma aplicação:

$$[-\delta, \delta] \times \text{Bl}_{S_p \cap B}(B) \rightarrow B \times [-\delta, \delta] \times \mathbb{S}^{m-k-1} \times [0, \epsilon] \times \mathbb{S}^{k-1},$$

dada por $(t, w) \mapsto (t, \hat{\sigma}_\delta(w))$. Fazendo a composição com o Blow-down $id_B \times \psi$ obtemos uma aplicação

$$[-\delta, \delta] \times \text{Bl}_{S_p \cap B}(B) \rightarrow B \times f^{-1}([-\delta, \delta])$$

que restrita a $[-\delta, 0] \times \partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ tem a expressão:

$$(s, z_1, u) \rightarrow \left(z_1, 0, \sqrt{-2s} \frac{d(\sigma_2)_{z_1}(u)}{|d(\sigma_2)_{z_1}(u)|} \right) \quad (94)$$

e fora de $\{0\} \times \partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ é um difeomorfismo sobre $S_p \cap B \times U_p \cap f^{-1}([-\delta, 0])$.

Podemos supor sem perda da generalidade que B está contido na carta tame. Então $S_p = \mathbb{R}^{m-k}$ e podemos realizar $\text{Bl}_{\mathbb{R}^{m-k}} \mathbb{R}^m$ que vem com uma projeção:

$$\text{Bl} : \text{Bl}_{\mathbb{R}^{m-k}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se escolhermos $B = B^{m-k} \times B^k$, produto de bolas abertas (com B^k centrada na origem e B^{m-k} centrada num ponto q longe da origem e de raio menor do que $d(q, 0) - \delta$) então é fácil ver que de fato

$$\text{Bl}_{S_p \cap B}(B) = \text{Bl}^{-1}(B)$$

Por outro lado

$$\text{Bl}_{\mathbb{R}^{m-k}}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m-k} \times [0, \epsilon] \times \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (z, \rho, u) \rightarrow (z, \rho u).$$

E a aplicação preserva a orientação quando \mathbb{S}^{k-1} é munido da orientação canônica.

É importante enfatizar que a orientação do $[-\delta, 0) \times \partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ não é a induzido pelo produto das orientações mesmo com a convenção que o intervalo $[-\delta, 0)$ tem orientação anti-canônica. A orientação de $[-\delta, 0) \times \partial \text{Bl}_{S_p \cap B}(B)$ é a orientação como fronteira exterior de

$$[-\delta, 0) \times \text{Bl}_{S_p \cap B}(B) = [-\delta, 0) \times B^{m-k} \times [0, \epsilon)_q \times \mathbb{S}^{k-1},$$

onde o subíndice q é o nome da coordenada correspondente. Isso diz que o vetor $-\partial_q$ é o vetor normal exterior e uma base $-\partial_s, z_1, \dots, z_{m-k}, v_1, \dots, v_{k-1}$ de $[-\delta, 0) \times \mathbb{R}^{m-k} \times T_p \mathbb{S}^{k-1}$ onde $p = (1, 0, \dots, 0)$ é positivamente orientada se

$$-\partial_q, -\partial_s, z_1, \dots, z_{m-k}, v_1, \dots, v_{k-1}$$

é positivamente orientada. Lembrando que a orientação de $B^{m-k} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1}$ é dada pela base

$$z_1, \dots, z_{m-k}, \partial_q, v_1, \dots, v_{k-1}$$

onde z_1, \dots, z_{m-k} é uma base positiva \mathbb{R}^{m-k} e v_1, \dots, v_{k-1} é uma base positiva de \mathbb{S}^{k-1} (tanto \mathbb{R}^{m-k} quanto \mathbb{S}^{k-1} tem as orientações canônicas) segue que a orientação positiva de $[-\delta, 0) \times B^{m-k} \times \mathbb{S}^{k-1}$ é dada por $(-1)^{m-k}$ vezes a orientação da base

$$-\partial_s, z_1, \dots, z_{m-k}, v_1, \dots, v_{k-1}$$

onde agora z_1, \dots, z_{m-k} é, v_1, \dots, v_{k-1} são as bases positivas de \mathbb{R}^{m-k} e \mathbb{S}^{k-1} . Fica óbvio agora que a aplicação

$$[-\delta, 0) \times B^{m-k} \times \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow B^{m-k} \times \mathbb{R}^k, \quad (s, z_1, u) \rightarrow (z_1, \sqrt{-2su})$$

preserva a orientação.

5.2 O Bordo de U_p como corrente no caso Morse sem fronteira

Já é sabido que para um ponto crítico p de índice k

$$\partial U_p = \sum_{\lambda q=k-1} n_\gamma(p, q) U_q$$

onde $n_\gamma(p, q)$ é o número de trajetórias contadas com sinal que vão de p a q . Queremos entender $n_\gamma(p, q)$. Na verdade, queremos mostrar que

$$n_\gamma(p, q) = n(p, q).$$

A convenção de orientação aqui é a mesma que na seção anterior para as variedades estáveis e instáveis.

Na teoria clássica de Morse o sinal de uma trajetória γ entre p e q pode ser descrito de varias maneiras equivalentes.

Seja $\mathcal{M}(p, q) := U_p \cap S_q$.

Proposição 7 *Os sinal obtido através de cada um dos seguintes processos é o mesmo*

- (a) *comparar a orientação da variedade 1-dimensional $M(p, q)$ dada pela direção do fluxo gradiente negativo com a orientação obtida via a sequência exata*

$$0 \rightarrow T_a M(p, q) \rightarrow T_a U_p \rightarrow T_a M/T_a S_q \rightarrow 0$$

onde $a \in M(p, q)$ e a convenção é que v é vetor positivamente orientado em $T_a M(p, q)$ se $\{v, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ é uma base positiva para $T_a U_b$ dado que $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ induzem uma base positiva de $T_a M/T_a S_q$ via a projecao. (convencao do Kronheimer e Mrowka)

- (b) *comparar a orientacao sobre $T_a U_p^\delta$ induzida pelo isomorfismo natural (o lado direito é orientado):*

$$T_a U_p^\delta \rightarrow T_a M/T_a S_q$$

onde $U_p^\delta = U_p \cap f^{-1}(\delta)$ é a esfera instavel no nivel $\delta = f(a)$ e a aorientacao de $T_a U_p^\delta$ induzida pelo fluxo com a convencao

$$\text{or } (-\nabla f) \wedge \text{or } T_a U_p^\delta = \text{ori } T_a U_p$$

Demonstração: Imediato.

Seja $\sigma : U_p^\delta \rightarrow f^{-1}(\delta)$ a aplicação de inclusão. Sabemos que se W_1 é o blow-up de U_p^δ nos pontos $U_p^\delta \cap S_q$ obtivemos uma resolução local do fecho do U_p :

$$(-\delta, 0) \times W_1 \rightarrow f^{-1}((-\delta, 0))$$

Em particular $(-\delta, 0) \times \partial W_1$ fica mapeado sobre $U_q \cap f^{-1}((-\delta, 0))$ e de fato cada componente conexa de $(-\delta, 0) \times \partial W_1$ vai ser mapeada difeomorficamente sobre o mesmo conjunto. Tem uma componente conexa para cada trajetória entre p e q .

Vamos supor que so tem uma trajetória e queremos determinar o sinal desse difeomorfismo em termos das orientações naturais dos dois lados. A orientação do W_1 é aquela induzida da orientação de U_p^δ . Lembramos que sobre U_p^δ a orientação é aquela obtida de U_p via o vetor menos gradiente (primeiro). A orientação de U_q é escolhida no inicio. Queremos mostrar que o sinal do difeomorfismo é exatamente o mesmo sinal que aparece na descrição equivalente da Proposição anterior.

Para simplificar ainda mais, vamos pegar uma carta orientada $V^{k-1} \simeq \mathbb{R}^{k-1}$ ao redor do único ponto $U_p^\delta \cap S_q$ dentro de U_p^δ . Lembramos que U_p^δ é uma esfera mas a análise é feita ao redor do ponto de interseção.

Vamos trabalhar nas coordenadas tame do ponto q de índice $k-1$. Então a situação é a seguinte. Temos uma aplicação

$$\sigma : V^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k+1} \times \mathbb{R}^{k-1}$$

cuja imagem aterriza no nível δ_1 da função $f - f(q)$ (isso para lidar com níveis de energia entre $(-\delta_1, \delta_1)$ ao redor de q). Mais ainda, a aplicação σ é transversal a $\mathbb{R}^{m-k+1} \times \{0\}$ e nos supomos que $\sigma^{-1}(\mathbb{R}^{m-k+1} \times \{0\}) = 0$ e $\sigma(0) = (\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = (b, 0)$ com $b \neq 0$.

Fazendo o processo de blow-up teremos uma aplicacao (tomando $Bl_0(V^{k-1} = [0, \epsilon) \times S(V)$):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} : (-\delta, 0) \times Bl_0(V^{k-1}) &\longrightarrow (-\delta, 0) \times \mathbb{S}^{m-k} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1} \\ (s, \rho, v) &\rightarrow \left(s, \frac{\sigma_1(\rho v)}{|\sigma_1(\rho v)|}, |\sigma_1(\rho v)| |\sigma_2(\rho v)|, \frac{\sigma_2(\rho v)}{|\sigma_2(\rho v)|} \right), \quad \rho \neq 0 \\ (s, 0, v) &\longmapsto \left(s, \frac{\sigma_1(0)}{|\sigma_1(0)|}, 0, \frac{d(\sigma_2)_0(v)}{|d(\sigma_2)_0(v)|} \right), \quad \rho = 0 \end{aligned}$$

A aplicação que nos interessa é aquela obtida para $\rho = 0$ e nos leva de $(-\delta, 0) \times S(V)$ para U_q quando composta com a resolução

$$\psi : (-\delta, 0) \times \mathbb{S}^{m-k} \times [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m-k+1} \times \mathbb{R}^{k-1}$$

Essa aplicação é

$$(-\delta, 0) \times S(V) \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}, \quad (s, v) \rightarrow \left(\sqrt{-2s} \frac{d(\sigma_2)_0(v)}{|d(\sigma_2)_0(v)|} \right) \quad (95)$$

Agora a orientação de $(-\delta, 0) \times S(V)$ visto como fronteira de $(-\delta, 0) \times Bl_0(V^{k-1})$ é a orientação produto

$$or^- (-\delta, 0) \wedge or S(V)$$

onde or^- sinaliza a orientação anticanônica (sempre utilizada nos intervalos de energia), enquanto a esfera $S(V)$ é orientada canonicamente como a fronteira da bola em V via a normal exterior primeira. Isso vale porque $S(V)$ tem a orientação anti-canônica como fronteira do blow-up $Bl_0(V^{k-1})$ mas aparece mais um sinal quando temos que mudar a normal na frente de $(-\delta, 0)$.

Não é difícil ver que o sinal do difeomorfismo da relação (95) é o mesmo que

o sinal do isomorfismo linear

$$V \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}, \quad v \rightarrow d(\sigma_2)_0(v) \quad (96)$$

Sabemos que esse é um isomorfismo por causa da transversalidade de σ em 0 que se traduz pelo fato que a composicao

$$P_2 \circ d_0\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}, v \rightarrow d(\sigma_2)_0(v)$$

é um isomorfismo onde P_2 é projeção sobre a segunda componente.

Agora o isomorfismo do (96) é de fato, voltando para a notação original, o isomorfismo

$$T_a U_p^\delta \rightarrow T_a M / T_a S_q$$

que aparece na Proposição.

Concluimos que o sinal do difeomorfismo $(-\delta, 0) \times \partial \text{Bl}_{U_p^\delta \cap S_q}(U_p^\delta) \rightarrow U_q \cap f^{-1}(-\delta, 0)$ para uma trajetória so é o mesmo que o sinal da trajetória na teoria de Morse clássica.

Isso completamente identifica a função $n_\gamma(p, q)$ com a contagem das trajetórias.

5.3 Orientação das Componentes de \tilde{U}_p no Caso com Bordo e o Sinal de $\partial\tilde{U}_p$ como Corrente

Suponha que p é estável. Como o complexo gerado pelos \tilde{U}_p é invariante pela diferencial, temos que ∂U_p é uma combinação linear dos $U_q \cap \partial M$ com q ponto crítico na fronteira. E conhecemos essa combinação linear da teoria de Morse sem fronteira. Isso justifica o porque de todas as componentes de $U_q \cap \partial M$ com $q \in \text{Cr}^u(f)$ aparecerem com o coeficientes $\bar{n}(p, q)$. Lembremos que nenhum $U_q \cap \partial M$ com q instável vai aparecer no $\partial\tilde{U}_p$, pois esses vão se cancelar por causa da expressão de ∂U_q e da invariância da diferencial. Então a multiplicidade de todos os U_q para q instável será $-\bar{n}(p, q)$.

Analisemos agora as diferenciais de \tilde{U}_p . Os sinais do primeiro complexo de Kronheimer e Mrowka são explicados pelo fato que

$$\tilde{U}_p = U_p - \sum_q \bar{n}(p, q) U_q.$$

No segundo complexo tem que considerar a resolução de U_p com p instável. Então ∂U_p vai consistir de vários pedaços, um deles sendo uma combinação linear de variedades instáveis U_q com q instáveis de indice um a menos. Como a resolução de ∂U_p quando restringida a uma fronteira de codimensão 1 vai render uma resolução de $U_p \cap \partial M$ e a multiplicidade de um tal U_q será ligada a multiplicidade de $U_q \cap \partial M$ no fecho de $U_p \cap \partial M$. Assim, temos exatamente sinal oposto por uma razão análoga com o que foi feito anteriormente.

6 APÊNDICE

6.1 Correntes

Nesta Apêndice vamos desenvolver definições e resultados usados ao longo da tese. Apesar de ser muito curta e não ter demonstrações, mais informações podem se encontrar nos livros de Teoria Geométrica da Medida FEDERER (2014) ou GIAQUINTA (1997).

Uma corrente de grau k definido por Georges de Rham é uma funcional no espaço das formas diferenciais de suporte compacto. Formalmente as correntes se comportam como distribuições de Schwartz em um espaço de formas diferenciais.

Definição 12 *O conjunto de todas as k -formas suaves no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é denotado por $\Omega^k(U)$, e o seu dual será denotado por $\Omega^k(U)^* = \mathcal{E}'_k(U)$ que será chamado de k -correntes com suporte compacto. O espaço dual de $\Omega^k_{\text{cpt}}(U)$ é $\mathcal{D}'_k(U)$ que chamaremos de espaço das k -correntes, ou seja,*

$$\mathcal{D}'_k(U) = (\Omega^k_{\text{cpt}}(U))^*.$$

Uma sequência $T_i \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{R}^m)$ converge fracamente para a corrente $T \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{R}^m)$ se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i(\omega) = T(\omega), \quad \omega \in \mathcal{D}'_k(\mathbb{R}^m).$$

Nesse caso, escrevemos $T_i \rightharpoonup T$.

Seja M uma variedade com ou sem bordo de dimensão m . Podemos supor, pelo teorema do mergulho de Whitney que M é uma subvariedade de algum \mathbb{R}^m . Desta maneira, o espaço das correntes em M é definido da mesma forma que no caso de conjuntos abertos do \mathbb{R}^m .

Exemplo 9 *Seja M uma subvariedade e orientada com volume finito (ou compacta) de dimensão m e $\alpha \in \Omega^k(M)$. Definimos as correntes $[M] \in \mathcal{D}'_k(M)$ e $[\alpha] \in \mathcal{D}'_{m-k}(M)$ da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} [M] : \Omega^k_{\text{cpt}}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto [M](\omega) = \int_M \omega; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\alpha] : \Omega^{m-k}_{\text{cpt}}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto [\alpha](\beta) = \int_M \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

Se uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ é igual a zero numa vizinhança de cada ponto em um conjunto aberto, com um argumento de partição da unidade podemos provar que T é identicamente nula. Isso sugere pensar na existência de um conjunto aberto maximal em que $T = 0$. O complementar desse conjunto é chamado de suporte de T .

Desta maneira, dada uma variedade suave M (com ou sem bordo), o suporte de uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ é o conjunto

$$\begin{aligned} \text{spt } T &= \{x \in M / \forall \text{ vizinhança } \mathcal{O}_x \subset M, \exists \omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M) \text{ tal que } \text{spt } \omega \subset \mathcal{O} \text{ e } T(\omega) \neq 0 \} \\ &= M \setminus \bigcup \{V \subset M, \text{ onde } V \text{ é aberto e } \text{spt } \omega \subset V \Rightarrow T(\omega) = 0\}. \end{aligned}$$

Vamos comentar sobre homologia de espaços. Para isto, precisamos definir um operador de bordo:

$$\begin{aligned} d = d_k : \mathcal{D}'_k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{k-1}(M) \\ T &\longmapsto dT : \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad . \\ &\qquad \qquad \qquad \omega &\longmapsto T(d\omega) \end{aligned}$$

Claramente $d^2 = d \circ d = 0$.

Observação 21 A igualdade $d^2 = 0$ implica que

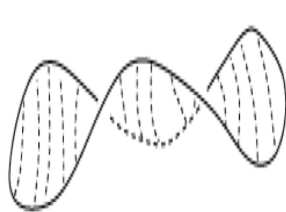
- $\text{spt } \partial T \subset \text{spt } T$;
- $T_i \rightarrow T \implies \partial T_i \rightarrow \partial T$.

Exemplo 10 Continuando com o Exemplo (9), temos que

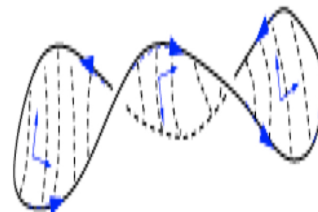
$$[d\omega](\eta) = (-1)^{k-1}[\alpha](d\eta).$$

Supondo agora que M possua bordo, a diferencial da corrente $[M] \in \mathcal{D}'_k(M)$ é

$$d[M](\omega) = [\partial M](i^*\omega).$$



Variedade M com bordo ∂M



A corrente $[M]$ mostrando a orientação de $[M]$ e $[\partial M]$

Se $T \in \mathcal{D}'_k(M)$, e $\alpha \in \Omega^l(M)$ então o produto wedge $T \wedge \omega \in \mathcal{D}'_{k+l}(M)$ é definido por:

$$(T \wedge \omega)(\eta) = T(\omega \wedge \eta). \quad (97)$$

para toda forma $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^{m-k-l}(M)$.

Sejam M e N variedades suaves com ou sem bordo e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e própria. Como a pré-imagem de f leva conjuntos compactos em compactos, faz sentido tomar o pull-back

$$f^* : \Omega_{\text{cpt}}^k(N) \rightarrow \Omega_{\text{cpt}}^k(M).$$

Dessa forma, podemos definir $f_* : \mathcal{D}'_k(M) \rightarrow \mathcal{D}'_k(N)$ como sendo

$$f_*(T)(\omega) = T(f^*\omega).$$

Como o pull-back da função f comuta com a diferencial de formas, temos que $\partial f_* T = f_* \partial T$, pois

$$\partial f_* T(\omega) = f_* T(d\omega) = T(f^* d\omega) = T(df^*\omega) = \partial T(f^*\omega) = f_* \partial T(\omega).$$

Sejam $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ e $S \in \mathcal{D}'_l(N)$. Considerando coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) em M e (y_1, \dots, y_n) em N , se $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^{k+l}(M \times N)$, é tal que

$$\omega = a_{\alpha\beta}(x, y) \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{m-k}}}_{dx^\alpha} \wedge \underbrace{dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-l}}}_{dy^\beta},$$

onde $a_{\alpha\beta} \in C_{\text{cpt}}^\infty(M \times N)$. Defini-se

$$(T \times S)(\omega) = T(S(a_{\alpha\beta}(x, y) dy^\beta) dx^\alpha).$$

Caso contrário

$$(T \times S)(\omega) = 0.$$

A corrente produto $T \times S \in \mathcal{D}'_{k+l}(M \times N)$ é definida por linearidade.

Proposição 8 *Nas condições acima, temos que*

$$\partial(T \times S)(\omega) = \partial T \times S + (-1)^n (T \times \partial S).$$

Demonstração: Veja FEDERER (2014). ■

Definição 13 *Se M é uma variedade suave orientada com ou sem bordo, a massa de*

uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ é definida por

$$M(T) = \sup\{T(\omega) \mid \omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M), \|\omega(x)\| \leq 1, \forall x \in M\}$$

onde $\|\omega(x)\| = \sup\langle \omega(x), \omega(x) \rangle^{\frac{1}{2}}$.

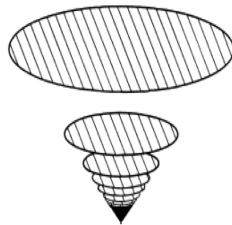
Definição 14 Uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ é dita ser retificável se existe uma família enumerável de subvariedades $\{M_k\}$ mutuamente disjuntas e orientáveis e inteiros positivos n_k tal que $\sum_{k=1}^{\infty} n_k \text{vol}(M_k) < \infty$ e

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} n_k \int_{M_k} \omega.$$

Caso T e ∂T seja retificável, dizemos que ela é integral e vamos representar pelo símbolo $\mathcal{I}_k(M)$.

Exemplo 11 O bordo de um conjunto retificável nem sempre é retificável. Por exemplo, considerando a coleção infinita enumerável de discos de raio $\frac{1}{k}$

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \{x^2 + y^2 \leq k^{-2}, z = k^{-1}\} :$$



Isto é um exemplo de uma corrente retificável que não é uma corrente integral. De fato, essa corrente tem área total finita, mas o comprimento total do bordo é infinito.

Definição 15 Uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ em M , variedade com ou sem bordo, tem massa localmente finita se para todo W conjunto aberto com fecho compacto temos

$$M_W(T) := \sup\{T(\omega) \mid \omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M), \text{spt } \omega \subset W, \|\omega(x)\| \leq 1, \forall x \in M\} < \infty.$$

Com essa definição de Massa localmente finita temos os seguinte resultado:

Teorema 24 Se $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ é uma corrente em M , variedade com ou sem bordo, é dita ser de massa localmente finita então T pode ser representada por integração.

Demonstração: Veja FEDERER (2014). ■

Se $(T_l) \in \mathcal{D}'_k(M)$ é uma sequência de correntes de massa localmente finita com $\sup_l M_W(T_l) < \infty$ para todo conjunto aberto limitado de W e $T_l \rightarrow T$, então T tem massa localmente finita em U e $M_W(T) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} M_W(T_l)$.

Definição 16 Dizemos que uma corrente $T \in \mathcal{D}'_k(M)$, com $k > 1$, é dita localmente normal se T e ∂T é representado por integração. Caso $\text{spt } T$ seja compacto, isto é, $T \in \mathcal{E}'_k(M)$ e T seja localmente normal dizemos que T é normal.

Definimos

$$\mathcal{N}(T) = \begin{cases} M(T) + M(\partial T) & \text{se } 0 < k \leq n \\ M(T) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Proposição 9 Se $\mathcal{N}(T) < \infty$, então T é localmente normal. Se T é normal então $\mathcal{N}(T) < \infty$.

Demonstração: Veja FEDERER (2014). ■

Definamos

$$\mathcal{V}_K^0(\omega) = \sup\{\|\omega(x)\|; x \in K\}$$

onde ω é uma forma M , e defina

$$\mathcal{F}_K(\omega) = \sup\{\mathcal{V}_K^0(\omega), \mathcal{V}_K^0(d\omega)\}.$$

Para cada funcional linear sobre $\mathcal{D}'_k(M)$ definamos a norma

$$\mathcal{F}_K(T) = \sup_{\substack{\omega \in \Omega_{cpt}^{m-k}(M) \\ \mathcal{F}_K(\omega) \leq 1}} |T(\omega)| = \sup_{\substack{\omega \in \Omega_{cpt}^{m-k}(M) \\ \max\{\|\omega(x)\|, \|d\omega(x)\|, x \in K\} \leq 1}} |T(\omega)|$$

Proposição 10 Se $\mathcal{F}_K(T) < \infty$, então $T \in \mathcal{D}'_k(M)$ com $\text{spt } T \subset K$.

Demonstração: FEDERER (2014). ■

Proposição 11 Se $T \in \mathcal{D}'_k(M)$, com $\text{spt } T \subset K$ com K compacto, então

$$\mathcal{F}_K(T) = \inf\{M(T - \partial S) + M(S); S \in \mathcal{D}'_{k+1}(M) \text{ e } \text{spt } S \subset K\}.$$

Além disso,

$$\mathcal{F}_K(\partial T)\mathcal{F}_K(T) \leq M(T).$$

Demonstração: Veja FEDERER (2014). ■

Para cada conjunto compacto $K \subset M$ associamos o espaço vetorial

$$\mathcal{F}_{k,K}(M) = \overline{\mathcal{N}_{k,K}}^{\mathcal{F}_K} \subset \mathcal{D}'_k(M),$$

onde

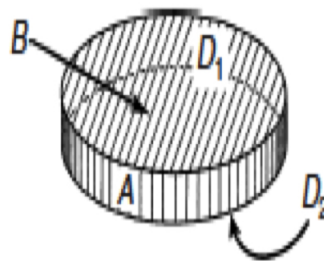
$$\mathcal{N}_{k,K} = \mathcal{N}_k(M) \cap \{T \in \mathcal{D}'_k(M); \text{spt } T \subset K\}.$$

Definição 17 O espaço $\mathcal{F}_k(M)$ definido por

$$\mathcal{F}_k(M) = \bigcup_{\substack{K \subset M \\ K \text{ é compacto}}} \mathcal{F}_{k,K}(M)$$

é chamado de espaços das correntes flat de grau k e seus elementos são chamadas de correntes flat em M .

Exemplo 12 Uma das vantagens na norma flat é que ela dá uma boa identificação de quando dois conjuntos retificáveis estão geometricamente próximos. Por exemplo, os dois discos unitários D_1 e D_2 (conforme a figura abaixo) estão suficientemente próximos na norma flat, pois sua diferença $T = D_1 - D_2$, junto com a parte lateral A , é o bordo de uma região cilíndrica B de volume pequeno. Por outro lado a norma da massa $M(D_1 - D_2) = 2\pi$.



Por fim, temos o lema abaixo:

Teorema 25 (Federer) Se $T \in \mathcal{F}_k(M)$ com $k > 0$, então

$$\mathcal{H}^k(\text{spt } T) = 0 \Rightarrow T = 0.$$

Demonstração: Veja FEDERER (2014). ■

6.2 Dualidade de Lefschetz para Variedades não Compactas

Para provar os isomorfismos do Teorema 14 utilizamos resultados de dualidades que reservamos nesta Subseção para prová-las.

Seja N uma variedade suave orientada e com bordo de dimensão n e topologia finita. Vamos calcular a homologia do complexo $(\Omega_D(M), d)$.

As seqüências

$$0 \rightarrow \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N) \xrightarrow{x} \Omega_{\text{cpt}}^k(N) \xrightarrow{y} \Omega_{\text{cpt}}^k(\partial N) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \Omega_D^k(N) \xrightarrow{x} \Omega^k(N) \xrightarrow{y} \Omega^k(\partial N) \rightarrow 0,$$

onde x é a aplicação inclusão e y é a restrição ao bordo da N são exata. Desta maneira, considerando x^* e y^* como sendo os duais de x e y , respectivamente, as seqüências

$$0 \leftarrow \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N)^* \xleftarrow{x^*} \Omega_{\text{cpt}}^k(N)^* \xleftarrow{y^*} \Omega_{\text{cpt}}^k(\partial N)^* \leftarrow 0,$$

$$0 \leftarrow \Omega_D^k(N)^* \xleftarrow{x^*} \Omega^k(N)^* \xleftarrow{y^*} \Omega^k(\partial N)^* \leftarrow 0,$$

são exatas, mas observe que

$$(\Omega_{D,\text{cpt}}^k(N))^* = \frac{\mathcal{D}'_k(N)}{\mathcal{D}'_k(\partial N)} \quad (\Omega_D^k(N))^* = \frac{\mathcal{E}'_k(N)}{\mathcal{E}'_k(\partial N)}$$

o que deixa a topologia deste espaço não muito amigável de se trabalhar.

Por esse motivo, vamos introduzir uma nova família de formas e calcular sua cohomologia. De forma geral, seja $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ uma aplicação entre cocadeias. O mapping cone, C_φ de φ é um complexo de cocadeias dados por

$$(C_\varphi)^m := A^m \oplus B^{m-1}$$

$$d_\varphi \begin{bmatrix} a^m \\ b^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_A & 0 \\ \varphi & d_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^m \\ b^{m-1} \end{bmatrix}$$

No mapping cone C_φ , a seqüência curta e exata

$$0 \rightarrow B^{m-1} \xrightarrow{f} (C_\varphi)^m \xrightarrow{g} \tilde{A}^m \rightarrow 0$$

$$b \mapsto (0, b) \quad .$$

$$(a, b) \mapsto a$$

onde \tilde{A}^{m-1} é A^{m-1} com a aplicação diferencial mudada para $-d$ induz uma seqüência

longa e exata

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{m-1}\mathcal{B} \longrightarrow H^m\mathcal{C}_\varphi \longrightarrow H^m\mathcal{A} \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^m\mathcal{B} \longrightarrow H^{m+1}\mathcal{C}_\varphi \longrightarrow H^{m+1}\mathcal{A} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Considerando o pullback $\iota^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(\partial N)$, o mapping cone C_{ι^*} dar origem as formas $\Omega^*(N, \partial N)$ e um operador diferencial d .

Definição 18 O complexo $(\Omega^k(N, \partial N), d)$ das formas relativa a N é definido por

$$\Omega^k(N, \partial N) = \Omega^k(N) \oplus \Omega^{k-1}(\partial N)$$

com diferencial

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(N, \partial N) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(N, \partial N) \\ (\omega, \gamma) &\longmapsto (-d\omega, \iota^*\omega + d\gamma) \end{aligned}$$

onde $\iota : \partial N \hookrightarrow N$ é a inclusão. As formas relativa com suporte compacto é o conjunto $\Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) = \Omega_{\text{cpt}}^k(N) \oplus \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(\partial N)$ com o mesmo operador diferencial.

Observação 22 A diferencial do espaço $\Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N)$ está bem definida, pois nesse caso a inclusão é uma aplicação própria.

A cohomologia dos complexos $(\Omega^k(N, \partial N), d)$ $(\Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N), d)$ são denotadas por

$$H^k(N, \partial N) := H^k(\Omega^*(N, \partial N), d); \quad H_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) := H^k(\Omega_{\text{cpt}}^*(N, \partial N), d)$$

Definição 19 Definamos agora os complexos $(\mathcal{E}'_k(N, \partial N), d)$, $(\mathcal{D}'_k(N, \partial N), d)$ por

$$\mathcal{D}'_k(N, \partial N) = \mathcal{D}'_k(N) \oplus \mathcal{D}'_{k-1}(\partial N) \quad \mathcal{E}'_k(N, \partial N) = \mathcal{E}'_k(N) \oplus \mathcal{E}'_{k-1}(\partial N)$$

com diferencial

$$d : \mathcal{D}'_k(N, \partial N) \longrightarrow \mathcal{D}'_{k-1}(N, \partial N) \quad d : \mathcal{E}'_k(N, \partial N) \longrightarrow \mathcal{E}'_{k-1}(N, \partial N)$$

$$d(T, S) = (i_*S - dT, dS)$$

Proposição 12 *Supondo N uma variedade (não necessariamente compacta) com bordo, as aplicações*

$$\begin{aligned} \kappa : \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N) &\longrightarrow \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) & \kappa' : \Omega_D^k(N) &\longrightarrow \Omega^k(N, \partial N) \\ \omega &\longmapsto (\omega, 0) & \omega &\longmapsto (\omega, 0) \\ \\ \sigma : \Omega_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N) &\longrightarrow \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \\ \omega &\longmapsto (\omega, 0) \end{aligned}$$

são quase isomorfismos, isto é, induzem aplicações $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\kappa}'$ e $\tilde{\sigma}$ a nível de cohomologia definidas por $\tilde{\kappa}([\omega]) = [\kappa(\omega)]$, $\tilde{\kappa}'([\omega]) = [\kappa'(\omega)]$ e $\tilde{\sigma}([\omega]) = [\sigma(\omega)]$.

Demonstração: Dado $\tilde{\kappa}([\omega]) = 0$ existe $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(N)$ e $\gamma \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-2}(\partial N)$ tal que

$$(\omega, 0) = d(\eta, \gamma) = (-d\eta, \iota^*\eta + d\gamma).$$

Usando partição da unidade, podemos estender γ para uma forma $\tilde{\gamma} \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-2}(N)$ tal que $\iota^*\tilde{\gamma} = \gamma$. Definindo a forma $\tilde{\eta} = \eta + d\tilde{\gamma} \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(N)$ temos que:

$$\begin{aligned} \iota^*\tilde{\eta} &= \iota^*\eta + \iota^*d\tilde{\gamma} & d\tilde{\eta} &= d\eta + d^2\tilde{\gamma} \\ &= \iota^*\eta + d\iota^*\tilde{\gamma} & &= d\eta \\ &= \iota^*\eta + d\gamma & &= -\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $[\omega] = 0$ com $\omega \in \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N)$.

Provemos a sobrejetividade. Seja $[(\eta, \gamma)] \in H_{\text{cpt}}^k(N, \partial N)$ queremos encontrar $[\omega] \in H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D^*(N))$ tal que $\tilde{\kappa}([\omega]) = [(\eta, \gamma)]$.

Afirmção 2 *Existe $\omega \in \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N)$ tal que:*

$$\tilde{\kappa}([\omega]) - [(\eta, \gamma)] = -d(\tilde{\gamma}, 0).$$

De fato,

$$\begin{aligned} (\eta, \gamma) - d(\tilde{\gamma}, 0) &= (\eta, \gamma) - (-d\tilde{\gamma}, \gamma) \\ &= (\eta + d\tilde{\gamma}, \gamma) \\ &= (\omega, 0) \\ &= \tilde{\kappa}([\omega]) \end{aligned}$$

onde $\omega = \eta + d\tilde{\gamma} \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N)$ e satisfaz $\iota^*\omega = 0$, ou seja, $\omega \in \Omega_{D,\text{cpt}}^k(N)$.

Substituindo o que foi feito acima para formas (sem suporte compacto) segue de forma igual o isomorfismo de κ' .

Agora vamos mostrar que σ é um quasi-isomorfismo.

Como κ é isomorfismo é suficiente provar que a aplicação

$$\begin{aligned} \mu : \Omega_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N) &\longrightarrow \Omega_{D, \text{cpt}}^k(N) \\ \omega &\longmapsto \text{ext } \omega \end{aligned}$$

onde $\text{ext } \omega$ é a extensão de ω por 0 em N induz o isomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : H_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N) &\longrightarrow H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D(N)) \\ [\omega] &\longmapsto \tilde{\mu}([\omega]) = [\mu(\omega)] = [\text{ext } \omega] \end{aligned}$$

Seja $V_{\varepsilon_1} \subset V_{\varepsilon_2}$ duas vizinhanças tubulares do bordo ∂N tal que $\overline{V_{\varepsilon_1}} \subset V_{\varepsilon_2}$. Considere a aplicação suave $\tilde{\pi} : M \rightarrow M$ tal que

- $\tilde{\pi}|_{V_{\varepsilon_1}} : V_{\varepsilon_1} \rightarrow \partial N$ é a projeção radial;
- $\tilde{\pi}|_{N \setminus V_{\varepsilon_2}} = id_{N \setminus V_{\varepsilon_2}}$;
- $\tilde{\pi}$ é homotópica a id_N .

Para mais detalhes sobre essa aplicação veja CIBOTARU (2017).

Para mostrar a sobrejetividade de $\tilde{\sigma}$ dado $\omega \in \Omega_{D, \text{cpt}}^k(N)$ com $d\omega = 0$, como $\tilde{\pi}|_{N \setminus V_{\varepsilon_2}} = id_{N \setminus V_{\varepsilon_2}}$ existe $\beta \in \Omega_{D, \text{cpt}}^{k-1}(N)$ tal que $\tilde{\pi}^*\omega - \omega = d\beta$. Como $\omega|_{\partial N} = 0$ temos que $\tilde{\pi}^*\omega|_{V_{\varepsilon_1}} = 0$ o que implica que $\tilde{\pi}^*\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N)$. Por fim, note que $\tilde{\mu}([\tilde{\pi}^*\omega]) = [\omega]$.

Para provar a injetividade, dado $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N)$ com $\tilde{\sigma}([\omega]) = [\sigma(\omega)] = 0$, então existe $\eta \in \Omega_{D, \text{cpt}}^k(N)$ tal que $d\eta = \omega$ e $\iota^*\eta = \eta|_{\partial N} = 0$.

Considerando a retração $\pi : U \rightarrow \partial N$ do teorema da vizinhança tubular, ela induz um isomorfismo

$$\pi^* : H_{\text{cpt}}^k(\partial N) \longrightarrow H_{\text{cpt } h}^k(U) \quad (98)$$

onde $H_{\text{cpt } h}^k(U)$ é a cohomologia do complexo

$$\Omega_{\text{cpt } h}^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) \mid \pi(\text{spt } \omega) \text{ é compacto}\}.$$

Isso decorre do fato que existe um operador de homotopia $K : \Omega_{\text{cpt } h}^k(U) \rightarrow \Omega_{\text{cpt } h}^{k-1}(U)$ tal que

$$Id_{\Omega_{\text{cpt } h}^k(U)} - \pi^* \circ \iota^* = (-1)^k (K \circ d - d \circ K)$$

o que faz a equação (98) ser isomorfismo com inversa $\iota^* : H_{\text{cpt } h}^k(U) \rightarrow H_{\text{cpt}}^k(\partial N)$, onde ι é a inclusão $\partial N \xrightarrow{\iota} U$. Como, $d\eta|_U = 0$ e $\iota^*\eta = \eta|_{\partial N} = 0$ pelo isomorfismo $H_{\text{cpt}}^*(\partial N) \simeq H_{\text{cpt } h}^*(U)$ existe um único $\alpha \in \Omega_{\text{cpt } h}^{k-2}(U)$ tal que $d\alpha = \eta$ em U . Considere $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ suave com suporte compacto tal que $\phi \equiv 1$ em vizinhança de ∂N e defina, $\tilde{\eta} = \eta - d(\phi\alpha) \in \Omega_{\text{cpt}}^{k-1}(N)$. Note que

- $d\tilde{\eta} = \omega$;
- $\text{spt } \tilde{\eta} \subset N \setminus \partial N$.

Logo

$$\tilde{\mu}([\omega]) = [\tilde{\mu}(\omega)] = 0 \implies [\omega] = 0. \quad \blacksquare$$

Nesta Subseção, estamos interessados em verificar que os pairing abaixo são não-degenerados

$$B : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \times \Omega^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (99)$$

e

$$\tilde{B} : \Omega^k(N, \partial N) \times \Omega_{\text{cpt}}^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (100)$$

definida por

$$((\omega, \eta), \gamma) \xrightarrow{B, \tilde{B}} \int_N \omega \wedge \gamma + \int_{\partial N} \eta \wedge \iota^* \gamma.$$

O pairing da equação 99 dar origem as aplicações contínuas e injetivas:

a)

$$\begin{aligned} B_I : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) &\longrightarrow \mathcal{E}'_{n-k}(N) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto B_I(\omega, \eta) : \Omega^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad \qquad \qquad \gamma \longmapsto B_{(\omega, \eta)}(\gamma) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B_{II} : \Omega^{n-k}(N) &\longrightarrow \mathcal{D}'_k(N, \partial N) \\ \gamma &\longmapsto B_{II}(\gamma) : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ &\qquad \qquad \qquad (\omega, \eta) \longmapsto B_{(\gamma)}(\omega, \eta) \end{aligned}$$

onde $B_{II}(\gamma)(\omega, \eta)$ se associa da seguinte maneira:

$$\left(\omega \rightarrow \int_M \omega \wedge \gamma ; \eta \rightarrow \int_{\partial M} \eta \wedge \iota^* \gamma \right).$$

Os dois operadores definidos, B_I e B_{II} , comutam com a diferencial a menos de sinal conforme abaixo

1. Se $(\omega, \eta) \in \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N)$ temos

$$B_I(d(\omega, \eta)) = (-1)^k dB_I(\omega, \eta),$$

2. Se $\gamma \in \Omega^{n-k-1}(N)$,

$$dB_{II}(\gamma) = (-1)^k B_{II}(d\gamma).$$

A primeira igualdade vale, pois

$$\begin{aligned}
 B_I(d(\omega, \eta)) &= \int_N -d\omega \wedge \gamma + \int_{\partial N} (\iota^*\omega + d\eta) \wedge \iota^*\gamma \\
 &= (-1)^k \left(\int_N \omega \wedge d\gamma + \int_{\partial N} \eta \wedge \iota^*d\gamma \right) \\
 &= (-1)^k dB_I(\omega, \eta),
 \end{aligned}$$

enquanto a segunda igualdade vem

$$\begin{cases} \int_{\partial N} \iota^*\omega \wedge \iota^*\gamma - \int_N d\omega \wedge \gamma = (-1)^k \int_N \omega \wedge d\gamma \\ \int_{\partial N} d\eta \wedge \iota^*\gamma = (-1)^k \int_{\partial N} \eta \wedge d\iota^*\gamma \end{cases} .$$

Como consequência, o pairing B desce a nível de cohomologia para

$$\begin{aligned}
 B : H_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \times H^k(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 ([(\omega, \eta)], [\gamma]) &\longmapsto B((\omega, \eta), \gamma)
 \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos, que acima, o pairing da equação 100 induz duas aplicações contínuas e injetivas

a)

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_I : \Omega^k(N, \partial N) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{n-k}(N) \\
 (\omega, \eta) &\longmapsto B_I(\omega, \eta) : \Omega^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\
 &\qquad \qquad \qquad \gamma \longmapsto B_{(\omega, \eta)}(\gamma)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{II} : \Omega_{\text{cpt}}^{n-k}(N) &\longrightarrow \mathcal{E}'_k(N, \partial N) \\
 \gamma &\longmapsto B_{II}(\gamma) : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\
 &\qquad \qquad \qquad (\omega, \eta) \longmapsto B_{(\gamma)}(\omega, \eta)
 \end{aligned}$$

onde $\tilde{B}_{II}(\gamma)(\omega, \eta)$ é dada por:

$$\left(\omega \rightarrow \int_N \omega \wedge \gamma ; \eta \rightarrow \int_{\partial N} \eta \wedge \iota^*\gamma \right) .$$

e assim \tilde{B} desce em cohomologia para

$$\begin{aligned} \tilde{B} : H^k(N, \partial N) \times H_{\text{cpt}}^k(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([(\omega, \eta)], [\gamma]) &\longmapsto \tilde{B}((\omega, \eta), \gamma) \end{aligned}$$

Provaremos que B e B' (equações 99 e 100 respectivamente) são não-degeneradas. Para isto, a Proposição 12 permite visualizar B e \tilde{B} como sendo simplesmente o pairing a nível de cohomologia das formas bilineares da aplicação

$$(\omega, \eta) \longmapsto \int_N \omega \wedge \eta$$

dos seguintes pares de espaços

$$\Omega^k(N) \times \Omega_{\text{cpt}, D}^{m-k}(N) \qquad \Omega_D^k(N) \times \Omega_{\text{cpt}}^{m-k}(N).$$

Proposição 13 *A inclusão*

$$\Omega^*(N \setminus \partial N) \hookrightarrow \Omega^*(N) \tag{101}$$

é um quasi-isomorfismo.

Demonstração: Considerando V_ε o colarinho no bordo construído a partir do vetor normal ao bordo tem-se que $N \setminus V_\varepsilon$ é homotópica a N e $N \setminus V_\varepsilon$ é um retrato por deformação de $N \setminus \partial N$ o que prova o quasi-isomorfismo da inclusão 101. ■

Agora iremos definir o que significa uma variedade ser de Lefschetz e ver, posteriormente, que as variedades com bordo se encaixam nessa definição.

Definição 20 *Uma variedade N não compacta orientada com bordo de dimensão n é dita ser variedade tipo Lefschetz se para cada $0 \leq k \leq n$ a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^N : H_{\text{cpt}}^{n-k}(N) &\longrightarrow H^k(\Omega_D^*(N))^* \\ [\omega] &\longmapsto \left\{ [\gamma] \longmapsto \int_N \omega \wedge \gamma \right\} \end{aligned} \tag{102}$$

é um isomorfismos.

Exemplo 13 *Todo conjunto aberto e convexo $U \subset \mathbb{H}^n$ tipo Lefschetz.*

De fato, suponha sem perda de generalidade que $U = \mathbb{H}^n$ e considere a sequência

exata curta

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \Omega^{k-1}(\partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{a} & \Omega^k(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b} & \tilde{\Omega}^k(\mathbb{H}^n) \rightarrow 0 \\
& & \gamma & \mapsto & (0, \gamma) & & \\
& & & & (\omega, \gamma) & \mapsto & \omega
\end{array} \tag{103}$$

Ela induz uma seqüência longa e exata

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{a_{-1}} & H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_0} & H^0(\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{\delta_0} \\
& & \xrightarrow{\delta_0} & H^0(\partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{a_0} & H^1(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_1} & H^1(\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{\delta_1} \\
& & \xrightarrow{\delta_1} & H^1(\partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{a_1} & H^2(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_2} & H^2(\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{\delta_2} \\
& & & & \dots & & & & \\
& & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & H^{n-1}(\partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{a_{n-1}} & H^n(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_n} & H^n(\mathbb{H}^n) & \rightarrow 0.
\end{array} \tag{104}$$

Lembrando que a cohomologia de um conjunto contrátil é igual a zero, temos que $H^k(\mathbb{H}^n) = H^k(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$ para todo $0 < k \leq n$ e para $k = 0$ temos $H^0(\mathbb{H}^n) = H^0(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}$. Assim, a seqüência (104) se reduz a

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{a_{-1}} & H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_0} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta_0} \\
& & \xrightarrow{\delta_0} & \mathbb{R} & \xrightarrow{a_0} & H^1(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_1} & 0 & \xrightarrow{\delta_1} \\
& & \xrightarrow{\delta_1} & 0 & \xrightarrow{a_1} & H^2(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_2} & 0 & \xrightarrow{\delta_2} \\
& & \xrightarrow{\delta_2} & 0 & \xrightarrow{a_2} & H^3(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_3} & 0 & \xrightarrow{\delta_3} \\
& & & & \dots & & & & \\
& & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & 0 & \xrightarrow{a_{n-1}} & H^n(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{b_n} & 0 & \rightarrow 0.
\end{array} \tag{105}$$

Desta maneira, a equação (105) nos diz que $H^k(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) = 0$ para $2 \leq k \leq n$. Além disso, $H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) = H^1(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n)$, o que nos dar a seqüência

$$0 \xrightarrow{a_{-1}} H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) \xrightarrow{b_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{R} \xrightarrow{a_0} H^1(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) \xrightarrow{b_1} 0 \tag{106}$$

A aplicação b_0 é injetiva e a_0 é sobrejetiva. E mais, o núcleo de δ_0 é 0. De fato, como $\delta_0 = a_0^{-1} \circ d \circ b_0^{-1} = i^*$ e $H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n)$ são os espaços das aplicações constante definida em \mathbb{H}^n que anula em $\partial\mathbb{H}^n$. Portanto, $H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n)$ são as funções identicamente nula. Assim, $\text{Im } b_0 = \ker \delta_0 = 0$ e como $\ker b_0 = 0$, segue que $H^0(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) = H^1(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) = 0$. Portanto $H^k(\mathbb{H}^n, \partial\mathbb{H}^n) = H^k(\Omega_D^*(\mathbb{H}^n)) = 0$ para todo k .

Agora, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos igualdade $H_{\text{cpt}}^k(U \times \mathbb{R}) = H_{\text{cpt}}^{k-1}(U)$. Dessa forma, para $k < n$ temos que

$$H_{\text{cpt}}^k(\mathbb{H}^n) = H_{\text{cpt}}^k(\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}) = H_{\text{cpt}}^{k-1}(\mathbb{H}^{n-1}) = \dots = H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{H}^{n-k}).$$

Se $n - k > 1$ temos que

$$H_{\text{cpt}}^k(\mathbb{H}^n) = H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{H}^{n-k}) = H_{\text{cpt}}^{-1}(\mathbb{H}^{n-k-1}) = 0$$

Se $n - k = 1$, então

$$H_{\text{cpt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n) = H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{H}^1) = H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{R}_+).$$

Nesse caso, as formas de grau zero fechadas em \mathbb{R}_+ são as funções diferenciáveis $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ suaves com diferencial igual ao zero e que se anulam fora de um intervalo $[a, b]$. Assim as formas fechadas de grau zero em \mathbb{R} são as constantes, e como o suporte é compacto, a constante 0 é a forma procurada. Portanto, $H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{R}_+) = 0$.

Por fim, se $k = n$ temos que

$$H_{\text{cpt}}^n(\mathbb{H}^n) = H_{\text{cpt}}^1(\mathbb{H}^1) = H_{\text{cpt}}^1(\mathbb{R}_+).$$

Da seqüência exata e longa (Veja SPIVAK (1970)) temos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \underbrace{H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{R})}_{=0} & \longrightarrow & \underbrace{H_{\text{cpt}}^0(\mathbb{R}_+)}_0 & \longrightarrow & \underbrace{H_{\text{cpt}}^0(\{0\})}_{=\mathbb{R}} \longrightarrow \\ & & & & & & \\ & & \underbrace{H_{\text{cpt}}^1(\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}} & \longrightarrow & H_{\text{cpt}}^1(\mathbb{R}_+) & \longrightarrow & \underbrace{H_{\text{cpt}}^1(\{0\})}_{=0} \longrightarrow 0 \end{array}$$

implicando em $H_{\text{cpt}}^1(\mathbb{R}_+) = 0$.

Caso U não seja um aberto do \mathbb{H}^n o resultado segue da dualidade de Poincaré.

Isto encerra a demonstração. \square

Dizemos que $\mathcal{N} = \{N_j\}_{j \in \Lambda}$ é uma cobertura de N do tipo Lefschetz se a interseção finita $N_{j_1, \dots, j_k} := N_{j_1} \cap \dots \cap N_{j_k}$ for uma variedade de Lefschetz, isto é, a aplicação $\mathcal{L}^{N_{j_1, \dots, j_k}}$ for um isomorfismo. Caso \mathcal{N} seja uma base para a topologia de N , dizemos que \mathcal{N} é uma base tipo Lefschetz.

Exemplo 14 Se N é uma variedade suave orientada com bordo que admite uma cobertura finita de Lefschetz então N é uma variedade de Lefschetz. Para ver isto, suponha sem perda de generalidade que $\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$ é uma cobertura de N , denote por $\text{ext}_{N_i} N$ como sendo

a extensão de N_i para N e considere as seqüências

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \Omega_D^k(N) \xrightarrow{F_1} \Omega_D^k(N_1) \oplus \Omega_D^k(N_2) \xrightarrow{G_1} \Omega_D^k(N_1 \cap N_2) \longrightarrow 0 \\
\omega &\longmapsto \left(\omega|_{N_1}, \omega|_{N_2} \right) \\
&\qquad\qquad\qquad (\omega, \eta) \longmapsto \omega|_{N_1 \cap N_2} - \eta|_{N_1 \cap N_2}
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \Omega_{\text{cpt}}^k(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{F_2} \Omega_{\text{cpt}}^k(N_1) \oplus \Omega_{\text{cpt}}^k(N_2) \xrightarrow{G_2} \Omega_{\text{cpt}}^k(N) \longrightarrow 0 \\
\omega &\longmapsto \text{ext}_{N_1 \cap N_2}^{N_1} \omega \oplus \text{ext}_{N_1 \cap N_2}^{N_2} \omega \\
&\qquad\qquad\qquad (\omega, \eta) \longmapsto \text{ext}_{N_1}^N \omega - \text{ext}_{N_2}^N \eta
\end{aligned} \tag{108}$$

para obter as seqüências exatas e longas

$$\dots \xrightarrow{G_1} H_D^{k-1}(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{\delta} H_D^k(N) \xrightarrow{F_1} H_D^k(N_1) \oplus H_D^k(N_2) \xrightarrow{G_1} H_D^k(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{\delta} \dots \tag{109}$$

e

$$\dots \xrightarrow{G_2} H_{\text{cpt}}^{k-1}(N) \xrightarrow{\Delta} H_{\text{cpt}}^k(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{F_2} H_{\text{cpt}}^k(N_1) \oplus H_{\text{cpt}}^k(N_2) \xrightarrow{G_2} H_{\text{cpt}}^k(N) \xrightarrow{\Delta} \dots \tag{110}$$

Considerando a seqüência dual da equação (109), para $k + r = n$, o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H_{\text{cpt}}^k(N_1) \oplus H_{\text{cpt}}^k(N_2) & \xrightarrow{G_2} & H_{\text{cpt}}^k(N) & \xrightarrow{\Delta} & H_{\text{cpt}}^{k+1}(N_1 \cap N_2) & \xrightarrow{F_2} & H_{\text{cpt}}^{k+1}(N_1) \oplus H_{\text{cpt}}^{k+1}(N_2) & \longrightarrow \\
& \mathcal{I}_I^{N_1} \oplus \mathcal{I}_I^{N_2} \downarrow & & \mathcal{I}_I^N \downarrow & & \mathcal{I}_I^{N_1 \cap N_2} \downarrow & & \mathcal{I}_I^{N_1} \oplus \mathcal{I}_I^{N_2} \downarrow & \\
\longrightarrow & H_D^{n-k}(N_1)^* \oplus H_D^r(N_2)^* & \xrightarrow{F_1^*} & H_D^r(N)^* & \xrightarrow{\delta^*} & H_D^{r-1}(N_1 \cap N_2)^* & \xrightarrow{G_1^*} & H_D^{r-1}(N_1)^* \oplus H_D^{r-1}(N_2)^* & \longrightarrow
\end{array}$$

é comutativo. O Lema dos Cinco garante que \mathcal{L}^N é um isomorfismo. Em geral, para uma cobertura qualquer o processo sai por indução sobre a quantidade de elementos da base.

□

Exemplo 15 Supondo agora que N possua uma base de Lefschetz então N é Lefschetz. Isso se prova usando exaustão de funções para N , isto é, uma função suave $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade que o conjunto $f^{-1}((-\infty, c])$ é compacto para todo $c \in \mathbb{R}$. É sabido que N admite uma função exaustão, veja LEE (2010).

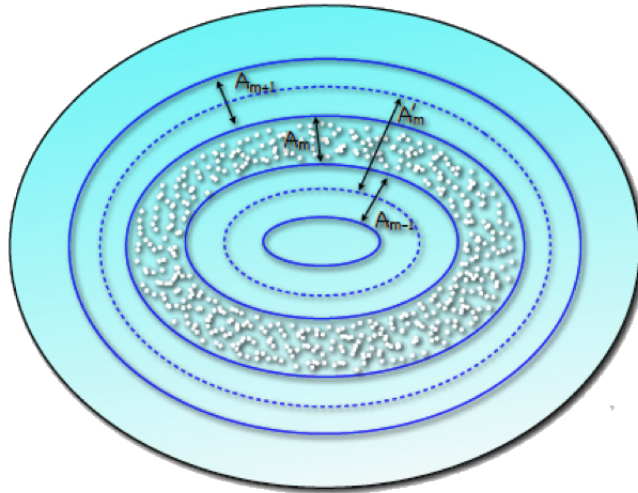
O conjunto

$$A_m := \{x \in N \mid m \leq f(x) \leq m + 1\}$$

é compacto, pois ele é fechado contido no conjunto $f^{-1}((-\infty, m+1])$ que é compacto. O conjunto definido por

$$A'_m = \left\{ x \in N \mid m - \frac{1}{2} < f(x) < m + \frac{3}{2} \right\} \supset A_m$$

é aberto e dado $x \in A_m$ existe um aberto $U_m^x \in \mathcal{N}$ tal que $U_m^x \subset A'_m$.



Note que $\{U_m^x\}$ forma uma cobertura aberta de A_m , pois

$$A_m \subset \underbrace{\bigcup_{x \in A_m} U_m^x}_{:=B} \subset A'_m.$$

Pela compacidade de A_m , ela possui uma subcobertura finita. Defina

$$B_m := \bigcup_{i=1}^{n_0} U_m^{x_i}$$

a união dessas subcoberturas finitas. Pelo Exemplo anterior temos que B_m é uma variedade de Lefschetz.

Além disso, observe $B_m \subset A'_m$ e $B_m \cap B_n \neq \emptyset$ se, e somente se, $n \in \{m-1, m, m+1\}$. Assim, as uniões disjuntas

$$M_1 = \bigcup_{m \text{ ímpar}} \overset{\circ}{B}_m, \quad M_2 = \bigcup_{m \text{ par}} \overset{\circ}{B}_m$$

são de Lefschetz (união disjunta de uma coleção enumerável de variedades de Lefschetz é uma variedade de Lefschetz). A cobertura $\mathcal{N} = \{M_1, M_2\}$ é de Lefschetz, pois o conjunto

$M_1 \cap M_2$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$M_1 \cap M_2 = \bigcup_{m,n} (B_m \cap B_n) = \left(\bigcup_{m \text{ ímpar}} (B_m \cap B_{m-1}) \right) \dot{\cup} \left(\bigcup_{m \text{ ímpar}} (B_m \cap B_{m+1}) \right) \quad (111)$$

Por sua vez, observe que

$$B_m \cap B_{m-1} = \left(\bigcup_{j=1}^p U_m^j \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^q U_{m-1}^i \right) = \left(\bigcup_{i,j} (U_m^j \cap U_{m-1}^i) \right)$$

e cada $U_m^j \cap U_{m-1}^i$ é uma variedade de Lefschetz. Isso implica que $B_m \cap B_{m-1}$ também é uma variedade de Lefschetz. Analogamente temos que $B_m \cap B_{m+1}$ é uma variedade de Lefschetz. Dessa maneira, $M_1 \cap M_2$ é uma variedade de Lefschetz e assim, \mathcal{N} é uma cobertura de Lefschetz. O resto sai do exemplo anterior. \square

Teorema 26 Toda variedade com bordo é de Lefschetz.

Demonstração: Observe que todo conjunto aberto U contido em \mathbb{H}^n ou \mathbb{R}^n tem uma cobertura de bolas que são convexas como também suas interseções. Isso implica que U é uma variedade de Lefschetz pelos Exemplos 13 e 15. Por fim, como toda variedade orientada com bordo possui uma base de cartas coordenadas difeomorfas a uma vizinhança do \mathbb{R}^n e do \mathbb{H}^n (que são variedades de Lefschetz) segue que N tem base de Lefschetz pelo Exemplo 15. \blacksquare

Teorema 27 Os pairing B e \tilde{B} definidos nas equações 99 e 100 a nível de cohomologia são não-degenerado.

Demonstração: Começemos com a seguinte afirmação:

Afirmção 3 A não-degeneracidade do pairing $B : \Omega_{\text{cpt}}^k(N, \partial N) \times \Omega^{n-k}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ equivale a não-degeneracidade do pairing da Dualidade de Poincaré.

Lembremos que a Dualidade de Poincaré aplicada a variedade $N \setminus \partial N$ diz que o pairing

$$\Omega^k(N \setminus \partial N) \times \Omega_{\text{cpt}}^{m-k}(N \setminus \partial N) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\int_{N \setminus \partial N} \omega \wedge \eta$$

é não-degenerada em cohomologia, isto é, ela desce a nível de cohomologia para a aplicação não-degenerada

$$\begin{aligned} PD : H^k(N \setminus \partial N) \times H_{\text{cpt}}^{m-k}(N \setminus \partial N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto \int_{N \setminus \partial N} \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

Pela Proposição 12 temos que σ é um quasi-isomorfismo, isto é,

$$H_{\text{cpt}}^k(N \setminus \partial N) \simeq H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D^*(N)).$$

Agora, pela Proposição 13 temos o isomorfismo

$$H^{m-k}(N) \simeq H^{m-k}(N \setminus \partial N).$$

Portanto, acabamos de provar a afirmação.

Por fim, mostremos agora que o pairing $\tilde{B} : \Omega^k(N, \partial N) \times \Omega_{\text{cpt}}^{n-k}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ é não degenerado. Note que \tilde{B} induz o isomorfismo \mathcal{L}^N definido na equação 102. Como N tem topologia tipo finita, segue que \tilde{B} é um pairing não-degenerada. ■

Corolário 4 *Os pairings B e \tilde{B} induzem os isomorfismos*

$$H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D(N)) \longrightarrow (H^{n-k}(N))^*; \quad (112)$$

$$H^{n-k}(N) \longrightarrow (H_{\text{cpt}}^k(\Omega_D(N)))^*; \quad (113)$$

$$H_{\text{cpt}}(N) \longrightarrow (H^{n-k}(\Omega_D(N)))^*; \quad (114)$$

$$H^{n-k}(\Omega_D(N)) \longrightarrow (H_{\text{cpt}}^k(N))^*. \quad (115)$$

6.3 Blow-up no Interior e no Bordo

Esta Subseção tem objetivo de tentar esclarecer e simplificar os Teoremas 10 e 18. Antes devemos fazer algumas considerações e inserir certas notações.

Seja W um espaço topológico de dimensão m . Dizemos que W é uma variedade (topológica) com cantos se para cada $p \in W$ existe uma vizinhança $U \subset W$ que é homeomorfa ao subespaço

$$\mathbb{R}_k^m := (-\infty, 0]^k \times \mathbb{R}^{m-k} \quad (116)$$

para algum $0 \leq k \leq m$. Um atlas como também uma estrutura para as variedades com cantos são definidos da mesma forma que para variedades com bordo.

Note que o modelo de fronteira será fazer $k = 1$ na equação 116, isto é,

$$\mathbb{R}_1^n = \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 \leq 0\}.$$

Estamos adotando essa definição, pois consideramos a convenção da normal que aponta para fora.

Definição 21 *Denotamos por $S^i(W)$ o estrato de codimensão i . Esse estrato é uma variedade de dimensão $m - i$. Chamamos W de tipo $j \leq n$ se $j = \max\{i \mid S^i(W) \neq \emptyset\}$.*

Exemplo 16 *Uma variedade sem cantos ou fronteira tem tipo 0. Uma variedade com fronteira tem tipo 1. O quadrado tem tipo 2. Um cubo tem tipo 3. O tipo de $W \times \mathbb{R}^k$ é o tipo de W . O tipo de $W \times \mathbb{R}_+^k$ é a soma entre o tipo do W com o número k .*

Definição 22 *Uma face de codimensão i do W é o fecho de uma componente conexa de $S^i(W)$. Vamos denotar essa face por $F^i(W)$.*

A fronteira de codimensão i , $\partial^i W$ é a reunião das faces de codimensão i . Em geral não é uma variedade com cantos, mas é uma reunião finita de variedades com cantos.

Toda face de codimensão i é uma variedade com cantos então tem um fibrado tangente bem definido.

Definição 23 *Dizemos que $P \subset W$ é uma subvariedade com cantos se*

(i) *P é variedade com cantos ;*

(ii) *para todo $b \in P$ existe uma vizinhanca aberta $U \ni b$ em W e um difeomorfismo de variedades com cantos:*

$$\varphi : (U \cap P) \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$$

tal que $\varphi((U \cap P) \times \{0\}) = U \cap P$.

O principal interesse é nas subvariedades com cantos que são próprias, i.e. a aplicação inclusão $P \hookrightarrow W$ é própria. Isto é uma outra maneira de dizer que P é fechado em W .

Observação 23 *Nota-se que essa definição implica imediatamente $S^i(P) \subset S^i(W)$. Então o tipo de P não pode ser maior do que o tipo de W .*

Como toda subvariedade com cantos é uma variedade com cantos então tem um fibrado tangente que vai ser subfibrado de $TW|_P$ e por isso vai existir um fibrado normal $\nu P := TW|_P/TP$.

Proposição 14 *Uma subvariedade com cantos própria $P \subset W$ admite uma vizinhanca tubular, i.e. existe uma vizinhanca $U \supset P$ e um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \nu P$.*

Demonstração: É para definir uma métrica Riemanniana sobre W com uma certa relação de compatibilidade com respeito as várias normais que podem ser definidas em um ponto $b \in S^i(P)$. Por exemplo, o fibrado normal de $S^i(P)$ in $S^i(W)$ tem que coincidir com o fibrado normal de P in W com respeito a essa métrica.

Começamos com $S^k(P)$ onde k é o tipo de P . Coloca uma métrica qualquer sobre a k -face $F^k(P)$ de W que contém $S^k(P)$. Tem-se que

$$TW|_{S^k(P)} \simeq TP|_{S^k(P)} + TF^k(P)|_P$$

e

$$TP|_{S^k(P)} \cap TF^k(P)|_P = TS^k(P)$$

Por isso dar para completar a uma métrica sobre $TW|_{S^k(P)}$ tal que $TP|_{S^k(P)}$ e $TF^k(P)|_P$ se encontram ortogonalmente em $TS^k(P)$. De fato tem que fazer isso para cada face que contém $S^k(P)$. Como não tem exatamente k obtém-se k condições de ortogonalidade que tem que ser tomadas em consideração para construir a métrica sobre $TW|_{S^k(P)}$.

Estende-se isso para todas as faces de W .

A condição de compatibilidade implica que a aplicação exponencial normal é bem definida sobre $D(\nu P)$ onde νP é o complemento ortogonal de TP em $TW|_P$. Lembramos que a aplicação exponencial para qualquer métrica é definida somente sobre o cone dos vetores interiores, onde um vetor é interior se é obtido como a derivada em 0 de uma curva em W . Com outras palavras, a condição de compatibilidade faz que $D(\nu P)$ sejam vetores interiores. ■

Definição 24 *Seja W uma variedade de tipo 0. Dizemos que $F : W \rightarrow P$ é transversal a B se para todo j e para todo $a \in F^{-1}(S^j(B))$ tem-se*

$$d_a F(T_a W) + T_{F(a)} S^j(B) = T_{F(a)} S^j(P).$$

Exemplo 17 *A aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty)$*

$$F(x, y) = (x, y^2)$$

é (completamente) transversal a $B := \{x = 0\}$, que é uma subvariedade com cantos de P . A pré-imagem de B é o eixo vertical em \mathbb{R}^2 e portanto uma subvariedade.

Definição 25 *Dizemos que F é (completamente) transversal a subvariedade com cantos $B \subset P$ se $F|_{S^i(W)}$ é transversal a B no sentido da definição anterior.*

Teorema 28 *Para toda aplicação $F : W \rightarrow P$ completamente transversal a B o conjunto $F^{-1}(B)$ é uma subvariedade com cantos de W .*

Demonstração: Seja $b \in B$ e seja $U \ni b$ um aberto em P . Primeiro mostramos que $F^{-1}(U \cap B)$ é subvariedade em $F^{-1}(U)$.

Repara que se $P_2 : U \cap B \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é a segunda projeção então

$$F^{-1}(U \cap B) = g^{-1}(0)$$

onde $g := P_2 \circ \varphi^{-1} \circ F$. Mais ainda, a condição de transversalidade é equivalente com o fato que nos pontos de $a \in g^{-1}(0) \cap S^i(W)$, a diferencial $d_a g : T_a S^i(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$ é sobrejetora.

Com outras palavras reduzimos a análise da situação geral para o caso particular em que $P = \mathbb{R}^k$ e B é a origem.

Aqui aplica-se a demonstração do Teorema do Apêndice em CIBOTARU (2017).

■

Falaremos agora do Blow-up de subvariedades. Relembremos como funciona no caso sem bordo. Se M for uma variedade sem bordo e P uma subvariedade de M

vamos lembrar como funciona o Blow-up de P ao longo de M . Nesse caso, por definição, o Blow-up é

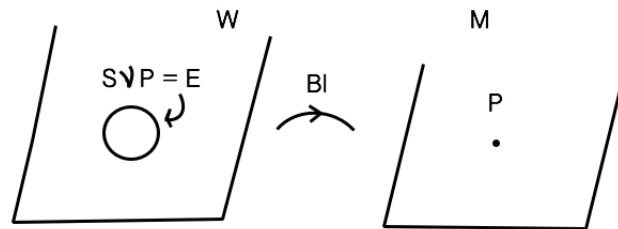
$$\text{Bl}_P W := M \setminus P \sqcup_{\text{exp}} [0, \varepsilon) \times S\nu P$$

onde $\nu P \rightarrow S$ é o fibrado normal, $S(\nu P) \rightarrow S$ é o fibrado esférico normal e $\text{exp} : [0, \varepsilon) \times S(\nu P) \rightarrow M$ é a aplicação exponencial. Observe que a exponencial satisfaz as propriedades abaixo

- (i) $\text{exp}|_{(0,1) \times S(\nu P)}$ é difeomorfismo sobre $U \setminus P$, onde U é uma vizinhança tubular de P ;
- (ii) $\text{exp}(0, \cdot) : S(\nu P) \rightarrow P$ é a menos de difeomorfismo uma projeção de fibrado.

Essa relação de equivalência \sim^{exp} funciona da seguinte forma: $p \sim^{\text{exp}} (t, q, v)$ se, e somente se, $\text{exp}(t, q, v) = p$. Dessa maneira o Blow-up é construído colocando junto a inclusão $M \setminus P \hookrightarrow M$ com a exponencial exp , isto é,

$$\text{Bl}(p) = \begin{cases} p, & \text{se } p \in M \setminus P; \\ \text{exp}_q(t, v), & \text{se } p = (q, t, v). \end{cases}$$



Note que o resultado final quando fazemos blow-up de P dentro de M é uma variedade com bordo e seu bordo pode ser identificado como sendo o conjunto $\mathbb{E} := \{0\} \times S(\nu P)$ o qual chamaremos divisor de exceção. Dessa maneira, cada ponto de $p \in P$ é associado a círculo esférico normal $\{0\} \times S(\nu_p P)$.

O passo inicial da construção do blow-up no caso com fronteira que foi feito na Subseção 3. Foi transformada uma variedade com bordo numa variedade com cantos. Dessa maneira, como queremos ilustrar o processo iterativo dessa construção, assumiremos que M é uma variedade com bordo e P é uma subvariedade de M . Vamos comentar agora como funciona o Blow-up de M ao longo de P nas situações abaixo

1. P é uma subvariedade contida na fronteira;
2. Suponha que P é uma subvariedade tal que $\partial P = P \cap W$.

Na primeira situação, apesar de P está totalmente contida de ∂M , devemos levar tomar em conta o efeito que o Blow-up faz no interior. Assim, vamos explicitar o

conjunto

$$W := \text{Bl}_P M = \text{Bl}_P(M, \partial M).$$

O fibrado normal de P pode ser visto em relação a M ou ao seu bordo. Consequentemente temos dois fibrados esférico normais: $S^\partial(\nu P)$ e $S(\nu P)$ que são

$$S(\nu P) = \{v \in \nu P \mid \|v\| = 1 \text{ e } \langle v, \eta \rangle \leq 0\}$$

$$S(\nu^\partial P) = \{v \in \nu P \mid \|v\| = 1 \text{ e } \langle v, \eta \rangle = 0\}$$

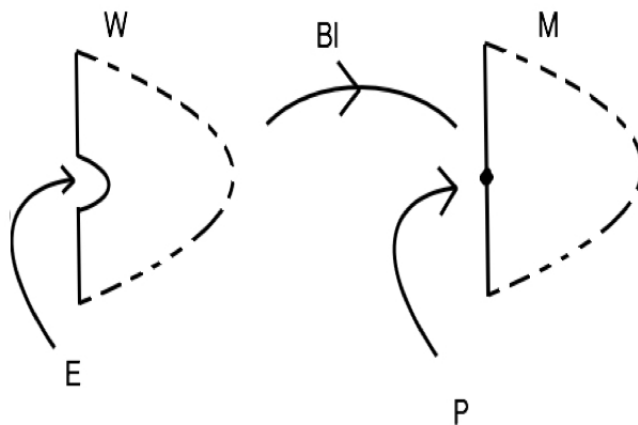
onde η é a normal exterior ao bordo.

O blow-up vem com a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Bl} : W = M \setminus P \sqcup_{\text{exp}} [0, \varepsilon) \times S(\nu P) &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto \begin{cases} p, & \text{se } p \in M \setminus P; \\ \text{exp}_q(t, v), & \text{se } p = (q, t, v). \end{cases} \end{aligned}$$

Note que o fibrado normal $\nu^\partial P$ está associado com o fibrado tangente $T\partial P$ enquanto νP se associa com o fibrado tangente TP . Por esse motivo, uma "fronteira destacada" de W é

$$\partial W = \partial M \setminus P \sqcup_{\text{exp}} [0, \varepsilon) \times S(\nu^\partial P).$$

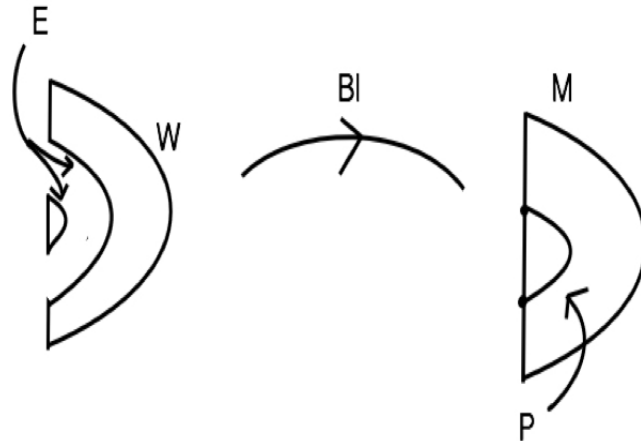


Para a segunda situação, temos dois fibrados normais que satisfaz a igualdade

$$\nu^\partial P := \nu P|_{\partial M} = \nu \partial P.$$

Uma subvariedade de codimensão 1 é

$${}''\partial W = \partial M \setminus \partial P \sqcup_{\text{exp}} [0, \varepsilon) \times S(\nu^\partial P).$$



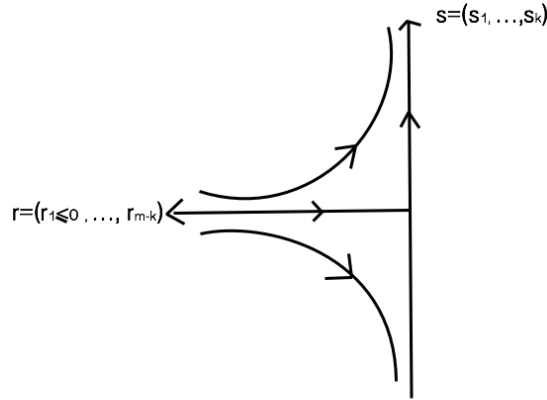
Quando a variedade possuir cantos, a explosão de subvariedades funciona da mesma maneira. O que em essência muda é que existe um tipo de blow-up que é o blow-up de uma subvariedade com cantos dentro de uma componente da fronteira de codimensão 1 de uma variedade com cantos. Uma situação análoga é a união de dois segmentos que são contidos em duas faces diferentes de um cubo e se encontram em um ponto dentro da aresta comum das faces. O blow-up dessa subvariedade da fronteira do cubo que substitui cada ponto da união dos segmentos com um semi-círculo. Isso vale também para o ponto da interseção dos segmentos. É fundamental que o blow-up é uma variedade com cantos e não algo mais complicado. Quer dizer que a família de semi-círculos é suave em todos os pontos interiores.

6.4 Coordenadas Tames dos Pontos de Bordo

Sejam M uma variedade Riemanniana compacta orientável e com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale no sentido de KRONHEIMER and MROWKA (2007). Usando a notação do Teorema 10 considere B é um aberto de M e defina $\tilde{f} : B \times \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$ por $\tilde{f}(x, y) = f(y)$. Note que \tilde{f} é Morse-Bott-Smale. E mais, se p é ponto crítico de f então $F = B \times \{p\}$ é uma variedades críticas. Considerando φ_t o fluxo do campo gradiente negativo da função f então $\tilde{\varphi}_t(x, y) = (x, \varphi_t(y))$ é o fluxo do campo gradiente negativo da \tilde{f} . Suas variedades estáveis e instáveis são da forma $S(F) = B \times S_p$ e $U(F) = B \times U_p$, respectivamente. Esboçaremos as trajetórias do campo menos gradiente da função \tilde{f} em torno dos pontos críticos de bordo. Para o que segue, consideremos o semi-espaço $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Se $p \in \text{Cr}_k^s(f)$ o modelo local para a função $f : B \times \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$f(b, \underbrace{r_1, \dots, r_{m-k}}_r, \underbrace{s_1, \dots, s_k}_s) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m-k} r_i^2 - \sum_{j=1}^k s_j^2 \right), \quad r_1 \leq 0.$$



Assumindo que o fluxo do campo gradiente negativo seja f -tame, em torno de p , podemos escrever o fluxo $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times B \times \mathbb{H}^m \rightarrow B \times \mathbb{H}^m$ como $\tilde{\varphi}(t, x, r, s) = (x, e^{-t}r, e^t s)$. Observe que o hiperplano $r_1 = 0$ é o modelo para a "fronteira" de $B \times M$ e ela contém a variedade instável.

Seja agora

$$V^s = \{(r, s) \in \mathbb{H}^{m-k} \times \mathbb{R}^k; -\delta^s \leq f(r, s) \leq \delta^s, |r| \cdot |s| \leq \varepsilon\}$$

uma vizinhança do ponto crítico estável e defina

$$V_0^s = \{|r| \cdot |s| = 0\} \cap V^s$$

como sendo a união das variedades estáveis e instáveis.

Definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi^s : \underbrace{H_{-\delta, \delta} \times [0, \varepsilon] \times B \times \mathbb{S}_-^{m-k-1} \times \mathbb{S}^{k-1}}_{:= B \times \tilde{V}^s} &\longrightarrow B \times \mathbb{H}^{m-k} \times \mathbb{R}^k \\ (t, q, b, v, w) &\longmapsto \left(b, v\sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} + t}, w\sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} - t} \right) \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $Im \Psi^s = B \times V^s$;
- ii) $Im (\Psi^s|_{q=0}) = B \times V_0^s$;
- iii) $\Psi^s|_{q \neq 0}$ é um difeomorfismo sobre $(B \times V^s) \setminus (B \times V_0^s)$;
- iv) Fixando b, v e w , a aplicação $\Psi^s(\cdot, \cdot, b, v, w)$ leva os pontos para uma certa hipérbole indexada por q e está no nível de energia t .

Observação 24 Fixando $q = 0$ obtemos uma trajetória quebrada começando no nível $\tilde{f}^{-1}(\delta) \cap V_0^s$ e termina em $\tilde{f}^{-1}(-\delta) \cap V_0^s$. O parâmetro que varia nessa curva é o valor $t \in [-\delta, \delta]$. Para valores $t > 0$ temos que $\Psi(t, 0, b, v, w) = (b, v\sqrt{2t}, 0)$ e para $t < 0$ temos

$$\Psi^s(t, 0, b, v, w) = (b, 0, w\sqrt{-2t}).$$

Escrevendo $\tilde{V}_t^s \subset \tilde{V}^s$ para fixar a primeira coordenada igual a t , em $H_{-\delta, \delta}$, obtemos a inclusão

$$\Psi^s(B \times' \tilde{V}_t^s) \subset \tilde{f}^{-1}(t).$$

A bola

$$B_{\delta^s}^s := \{(b, r, 0); |r|^2 = 2\delta^s\} \subset B \times \mathbb{H}^{m-k} \times \{0\}^k$$

é o fibrado esférico estável no conjunto de nível $f = \delta^s$ que pode ser interpretado como

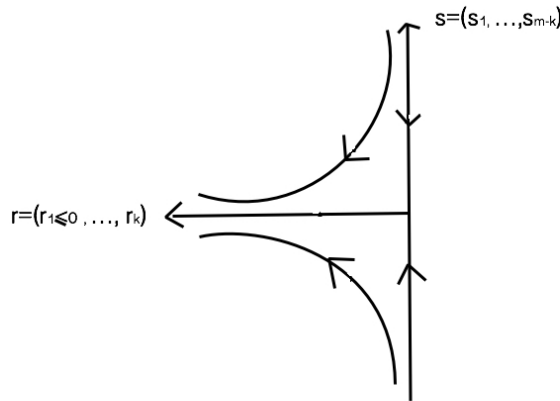
$$B_{\delta^s}^s = V_0^s \cap f^{-1}(\delta^s) \subset V_{\delta^s}^s := V^s \cap f^{-1}(\delta^s).$$

A aplicação $\Psi^s|_{t=\delta} : B \times' \tilde{V}_\delta^s \rightarrow B \times V_\delta^s$ funciona como um blow-up da subvariedade B_δ^s dentro de $B \times V_\delta^s$ e $(\Psi^s)^{-1}(B_\delta^s) = S_-(\nu B_\delta^s)$.

Observação 25 A aplicação Ψ^s não é diferenciável nos pontos $(0, 0, b, v, w) \in B \times' \tilde{V}^s$, mas podemos introduzir uma estrutura suave em $B \times' \tilde{V}^s$ tomando a estrutura de cantos de $H_{-\delta, \delta} \times_{\Psi^s} [0, \varepsilon]$ com a estrutura de $B \times \mathbb{S}_-^{m-k-1} \times \mathbb{S}^{k-1}$.

Agora, se $p \in \text{Cr}^u(f)$ como a variedade estável está inteiramente contida no bordo e o modelo local para f é

$$f(b, \underbrace{r_1, \dots, r_k}_r, \underbrace{s_1, \dots, s_{m-k}}_s) = \frac{1}{2} \left(-\sum_{i=1}^k r_i^2 + \sum_{j=1}^{m-k} s_j^2 \right), \quad r_1 \leq 0.$$



A variedade estável está contida no plano $r_1 = 0$ e o fluxo na vizinhança f -tame é $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times B \times \mathbb{H}^m \rightarrow B \times \mathbb{H}^m$ dada por $\tilde{\varphi}(t, b, r, s) = (b, e^t r, e^{-t} s)$. Definindo

$$V^u := \{(b, r, s) \in B \times \mathbb{H}^k \times \mathbb{R}^{m-k}; -\delta^u \leq \tilde{f}(b, r, s) \leq \delta^u, |r| \cdot |s| \leq \varepsilon\}$$

e

$$V_0^u = \{|r| \cdot |s| = 0\} \cap V^u$$

a aplicação Ψ^u também sofre modificações:

$$\begin{aligned} \Psi^u : B \times H_{-\delta, \delta} \times [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}_-^{k-1} \times \mathbb{S}^{m-k-1} &\longrightarrow B \times \mathbb{H}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \\ (t, q, b, r, s) &\longmapsto \left(b, r\sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} - t}, s\sqrt{\sqrt{t^2 + q^2} + t} \right) \end{aligned}$$

mas a essência das propriedades continuam as mesmas:

- i) $Im \Psi^u = B \times V^u$;
- ii) $Im (\Psi^u|_{q=0}) = B \times V_0^u$;
- iii) $\Psi^u|_{q \neq 0}$ é um difeomorfismo sobre o conjunto $(B \times V^u) \setminus (B \times V_0^u)$;
- iv) Fixando as variáveis b, v e w , a aplicação $\Psi^u(\cdot, \cdot, b, v, w)$ associa os pontos para uma certa hipérbole indexada por q no nível de energia t .

Da mesma forma que no caso estável citado acima, escrevamos $\tilde{V}_t^u \subset \tilde{V}^u$ para fixar a primeira coordenada igual a t , em $H_{-\delta, \delta}$ e portanto $\Psi^u(B \times' \tilde{V}_t^u) \subset \tilde{f}^{-1}(t)$.

A bola

$$\begin{aligned} B_{\delta^u}^u &= V_0^u \cap f^{-1}(\delta^u) \\ &\subset V_{\delta^u}^u := V^u \cap f^{-1}(\delta^u) \end{aligned}$$

é o fibrado esférico estável entre o conjunto de nível $f = \delta^u$ e a aplicação $\Psi^u|_{t=\delta} : B \times' \tilde{V}_{\delta^u}^u \rightarrow B \times V_{\delta^u}^u$ funciona como um blow-up da subvariedade $B_{\delta^u}^u$ dentro de $B \times V_{\delta^u}^u$ e $(\Psi^u)^{-1}(B_{\delta^u}^u) = S_-(\nu B_{\delta^u}^u)$.

6.5 Hipersuperfícies e Homologia de Morse

Suponha que M é uma variedade Riemanniana, compacta e orientada de dimensão m e seja N uma hipersuperfície compacta mergulhada em M tal que $M \setminus N$ é uma variedade não compacta. Vamos dotar N com uma orientação que será induzida pela orientação da variedade M .

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com campo gradiente tangente a hipersuperfície. Inspirado na construção de Kronheimer e Mrowka podemos dividir os pontos críticos de f de duas maneiras: pontos críticos de N e pontos críticos de $M \setminus N$ e representaremos por $Cr^N(f)$ e $Cr^{M \setminus N}(f)$, respectivamente.

Se $p \in Cr^N(f)$ e η_p a normal em p de N que induz a orientação em M então $\langle \nabla_X \nabla f, \eta \rangle_p = 0$ para todo $X_p \in T_p N$. Isso mostra que $Hess_p f(T_p N) \subset T_p N$. Consequentemente o vetor normal é um autovetor não-nulo da hessiana e o split $T_p M = T_p^+ M \oplus T_p^- M$ permite distinguir esses pontos críticos em dois tipos. Se o autovalor for positivo dizemos que $p \in Cr^{N,s}(f)$ e caso contrário $p \in Cr^{N,u}(f)$. Os conjuntos $Cr^{N,s}(f)$ serão chamados de estáveis a N e $Cr^{N,u}(f)$ será chamado de instável a N .

Em resumo, os pontos crítico de f possui a seguinte decomposição:

$$\text{Cr}(f) := \text{Cr}^{M \setminus N}(f) \cup \text{Cr}^{N,s}(f) \cup \text{Cr}^{N,u}(f).$$

As variedades estáveis e instáveis em N herdam propriedades semelhantes ao caso com fronteira. Se $p \in \text{Cr}^{N,s}(f)$ então U_p está totalmente contida em N , enquanto S_p são subvariedades com que intersectam M e N . Já para o caso em que $p \in \text{Cr}^{N,u}(f)$, S_p está inteiramente contidas em N e U_p possui trajetórias que saem de p e intersecta M e N . Além disso, existem $p \in \text{Cr}^{N,s}(f)$ e $q \in \text{Cr}^{N,u}(f)$ com $q \preceq p$ tais que U_p e U_q possuem a mesma dimensão. Tudo acontece no espírito da Teoria de Morse para variedades com bordo desenvolvida em KRONHEIMER and MROWKA (2007).

Um fato a ser considerado nessa construção é que f não satisfaz a condição de transversalidade Morse-Smale, pois existem trajetória que ligam pontos críticos com mesmo índice. Mais precisamente, a hipótese de transversalidade em M falha nos pontos $p \in \text{Cr}_k^{N,s}(f)$ e $q \in \text{Cr}_k^{N,u}(f)$ tais que

$$T_x U_p + T_x S_q = T_x N, \quad q \preceq p$$

para todo $x \in \mathcal{M}(p, q)$. Tal situação será chamada de caso de transversalidade Smale fraca.

Definição 26 *Nas condições acima, dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é Morse-Smale se $\mathcal{M}(p, q)$ for transversal a M , exceto para o caso em que $p \in \text{Cr}^{N,s}(f)$ e $q \in \text{Cr}^{N,u}(f)$, onde vale a condição de transversalidade Smale fraca.*

Continuando a denotar por φ_t o fluxo do campo gradiente negativo da função f , vamos calcular os limites dos operadores $\mathbb{P} = \varphi_{-t}^*$ e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t^N : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{m-k}(M \setminus N) \\ \omega &\longmapsto \int_M \tilde{\varphi}_t^* \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

onde $\tilde{\varphi}_t = \varphi_t|_{M \setminus N}$.

Vamos supor que φ_t irá satisfazer a condição da transversalidade fraca de Smale. Dessa forma, o operador $\mathbb{P}_t(\omega) = \varphi_t^*(\omega)$ é quase o mesmo tratado na Subseção 2.2 (nesse caso, temos pelo menos uma trajetória que liga pontos críticos de mesmo índice).

Observação 26 *A diferença entre os operadores \mathbb{P} e \mathbb{P}^N consiste no fluxo: em um o fluxo é definido em toda variedade, enquanto no outro o fluxo é considerado no complemento da N . Isto faz que as mudanças aconteçam no contradomínio do operador \mathbb{P} .*

A fórmula de Homotopia continua a mesma

$$d \circ \mathbb{T}_t + (-1)^* \mathbb{T}_t \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}_t$$

com

$$\mathbb{T}_t(\omega) = \int_{[t,0] \times M} \varphi^* \omega.$$

Seu kernel

$$d\mathbb{T}_t = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}_t$$

também é o mesmo.

Apesar M ser uma variedade sem bordo, a função não é Morse-Smale. Isso impossibilita aplicar diretamente os resultados de HARVEY and LAWSON JR (2001). Porém com as mesmas técnica utilizadas nas Subseções 3.2 e 3.3 os limite existe no mesmo espírito do operador \mathbb{P}^a . Portanto, ainda vale a hipótese de volume finito o que faz os limites

$$\mathbf{P} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_t, \quad \mathbf{T} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{T}_t$$

existirem na norma flat. Além disso, vale a equação

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P}$$

em $M \times M$.

De maneira similar ao que foi provado na Subseção 3.2, conseguimos o resultado abaixo:

Teorema 29 *Sejam M uma variedade Riemanniana, compacta e orientada e N uma hipersuperfície mergulhada em M tal que $M \setminus N$ seja uma variedade. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função de Morse com campo gradiente negativo tangente a N e seu fluxo φ_t satisfazendo a condição de transversalidade fraca Smale, então vale a equação:*

$$d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{P} \tag{117}$$

em $M \times M$, onde

$$\mathbf{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [S_p] \times [\tilde{U}_p] = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [\tilde{S}_p] \times [U_p]. \tag{118}$$

Consequentemente, se $\omega \in \Omega^k(M)$

$$\mathbb{P}(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [\tilde{U}_p] = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) \cdot [U_p]. \tag{119}$$

Além disso, existe o operador \mathbb{T} de grau $+1$ tal que

$$d \circ \mathbb{T} + (-1)^* \mathbb{T} \circ d = \mathbb{I} - \mathbb{P}.$$

Observação 27 A corrente $[\tilde{U}_p]$ nesse caso de hipersuperfície é definida da mesma maneira que no caso com fronteira. Por exemplo, se p e q com $q \preceq p$ são os únicos pontos críticos nas condições de transversalidade fraca, então

$$[\tilde{U}_p] = [U_p] - \bar{n}(p, q) \cdot [U_q].$$

Usando a equação 118 conseguimos encontrar a expressão do operador \mathbb{P}^N :

$$\mathbb{P}^N(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^{N,0}(f)} \left(\int_{S_p} \omega \right) \cdot [U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^{N,u}(f)} \left(\int_{\tilde{S}_p} \omega \right) \cdot [U_p], \quad (120)$$

onde $\omega \in \Omega^k(M)$. Basta considerar a restrição do fluxo φ_t a variedade $M \setminus N$.

Note que dado $p^s \in \text{Cr}^{N,s}(f)$ e qualquer forma $\eta \in \Omega_{\text{cpt}}^*(M \setminus N)$ temos que

$$[U_{p^s}](\eta) = \int_{U_{p^s}} \eta = 0.$$

Portanto,

$$[\tilde{U}_{p^s}](\eta) = [U_{p^u}](\eta)$$

onde $p^u \in \text{Cr}^{N,u}(f)$, $\lambda_{p^s} = \lambda_{p^u}$ e $p^u \preceq p^s$.

Vamos encontrar complexos de correntes que são isomorfos com a cohomologia de M e $M \setminus N$. Observe os operadores \mathbb{P} e \mathbb{P}^N comutam com a diferencial e suas imagens são subgrupos de

$$\mathcal{U}_k := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^{M \setminus N}(f)} \mathbb{R}[U_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^N(f)} \mathbb{R}[\tilde{U}_p]; \quad (121)$$

$$\mathcal{U}_k^N := \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^{M \setminus N}(f)} \mathbb{R}[U_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^{N,u}(f)} \mathbb{R}[U_p]. \quad (122)$$

Teorema 30 As aplicações

$$\mathbb{P} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k} \quad \mathbb{P}^N|_{\Omega^k(M \setminus N)} : \Omega^k(M \setminus N) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}^N$$

induzem os isomorfismos

$$\mathbb{P}_* : H^k(M) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*) \quad \mathbb{P}_*^N : H^k(M \setminus N) \rightarrow H_{m-k}(\mathcal{U}_*^N).$$

Demonstração: A mesma prova do caso sem fronteira (Teorema 14) pode ser repetida de

modo idêntico para mostrar que \mathbb{P} é um isomorfismo. Vamos provar agora que a aplicação \mathbb{P}_*^N é injetiva. Isso segue imediatamente do isomorfismo $\Omega^k(M \setminus N) \rightarrow \mathcal{D}'_*(M \setminus N)$. Com efeito, dado $\omega \in \Omega^k(M) \hookrightarrow \Omega^k(M \setminus N)$ temos que

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^N|_{\Omega(M \setminus N)})_*[\alpha] &= (\mathbb{P}^N|_{\Omega(M \setminus N)})_*[\beta] \Rightarrow i((\mathbb{P}^N|_{\Omega(M \setminus N)})_*[\alpha]) = i((\mathbb{P}^N|_{\Omega(M \setminus N)})_*[\beta]) \\ &\Rightarrow \mathbb{P}_*^N[\alpha] = \mathbb{P}_*^N[\beta] \\ &\Rightarrow \mathbb{I}_*[\alpha] = \mathbb{I}_*[\beta] \\ &\Rightarrow [\alpha] = [\beta]. \end{aligned} \tag{123}$$

Para a sobrejetividade, dado um conjunto aberto K tal que $K \supset N$ precisamos da dualidade:

$$H_{\text{cpt}}^i(K \setminus N) \simeq H_{m-i}(\mathcal{E}'_*(K \setminus N)).$$

Maiores informações pode ser encontradas em CIBOTARU (2017).

Observe que dado p e q dois pontos críticos de índice $m - k$

- i) $\overline{U}_p \cap \partial S_q = \emptyset$;
- ii) $\overline{U}_p \cap \overline{S}_q = \emptyset$ se $p \neq q$;
- iii) $\overline{U}_p \cap \overline{S}_p = \{p\}$.

Dada a corrente dado $U \in \mathcal{U}_{m-k}^N$ fechada $dU = 0$, escreva

$$U = \sum_{p \in \text{Cr}_{m-k}^0(f)} n_p[U_p] + \sum_{p \in \text{Cr}_{m-k}^u(f)} m_p[U_p].$$

Considere K como sendo uma vizinhança que contém S_q tal que

$$K \cap \partial S_q = \emptyset$$

e

$$K \supset \text{spt } U.$$

Note que $U \in H_{m-k}(\mathcal{E}'_*(K \setminus N))$. Pelo isomorfismo $H_{\text{cpt}}^k(\mathcal{E}'_*(K \setminus N)) \simeq H_{m-k}(K \setminus N)$ existem $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(K \setminus N)$ com $d\omega = 0$ e $\sigma \in \mathcal{E}'_{m-k+1}(K \setminus N)$ uma corrente flat com suporte compacto tal que

$$\omega - U = d\sigma.$$

Construindo formas de Thom (da mesma forma que no caso sem bordo) vemos que $(\omega - U, S_q) = 0$. De resto, tudo sai da mesma forma conforme o Teorema 14. ■

O Teorema acima garante que a condição de transversalidade fraca é suficiente

para calcular a homologia da variedade. Por exemplo,

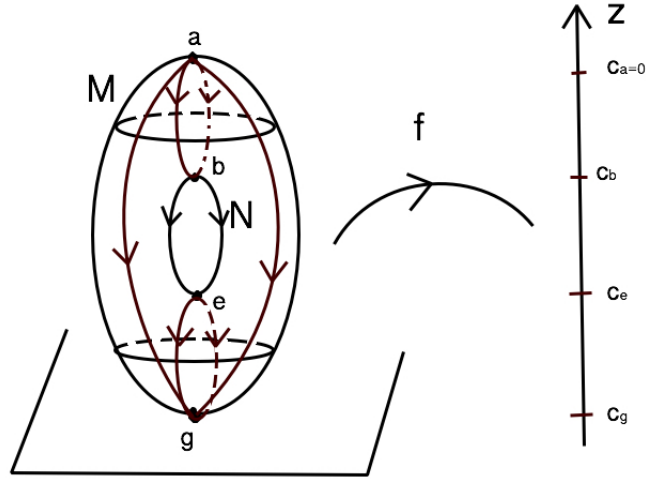
Exemplo 18 *Seja M o toro em pé (sem a perturbação) descrito no exemplo 1 e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura. Denotando por N o círculo interno por onde passa os pontos críticos b e e de índices 1 temos que $b \in \text{Cr}^{s,N}(f)$ e $e \in \text{Cr}^{u,N}(f)$.*

Para cada $k \in \{0, 1, 2\}$, temos os grupos

$$\mathcal{U}_2 = \mathbb{R}[U_a]$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathbb{R}[\tilde{U}_b] + \mathbb{R}[U_e]$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathbb{R}[U_g].$$



Para $a \in \text{Cr}_2^{M \setminus N}(f)$ podemos construir a resolução no mesmo espírito do Teorema 18. Assim, obtemos uma variedade com cantos e uma projeção $\pi : [c_e, 0] \times W \rightarrow f^{-1}([c_e, 0])$ tal que $\text{Im } \pi = \overline{U}_p$ e $\pi|_{(c_e, 0) \times W}$ é um difeomorfismo sobre $T^2 \setminus \{b, d, e\}$. Além disso, se $\eta \in \Omega^1(M)$ então

$$\begin{aligned} d_2[U_a](\eta) &= n_\gamma(a, b) \cdot [\tilde{U}_b](\eta) \\ &= n_\gamma(a, b) \cdot [U_b](\eta) + n_\gamma(a, b) \cdot n_\gamma(b, d) \cdot [U_e](\eta) \end{aligned}$$

Agora, se $\eta \in \Omega^0(M)$ temos que

$$\begin{aligned} d_1[\tilde{U}_b](\eta) &= \partial[U_b](\eta) + n_\gamma(b, e) \cdot \partial[U_e](\eta) \\ &= n_\gamma(b, e) \cdot n_\gamma(e, g) \cdot [U_g](\eta) \end{aligned}$$

e

$$d_1 [U_e] (\eta) = n_\gamma(e, g) \cdot [U_g] (\eta)$$

Para facilitar a notação, vamos identificar $\mathbb{R}[U_p]$ com $\langle p \rangle$. Assim, podemos escrever o complexo (\mathcal{U}_*, d) como:

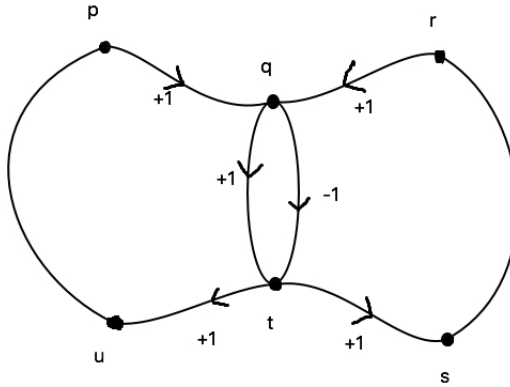
$$0 \rightarrow \langle a \rangle \xrightarrow{d_2} \langle b, e \rangle \xrightarrow{d_1} \langle g \rangle \rightarrow 0. \quad (124)$$

O cálculo dos sinais das trajetórias segue de forma similar ao caso com bordo. Como $n(a, b) = n(e, g) = 0$ (veja BANYAGA and HURTUBISE (2013)) os operadores de bordo d_1, d_2, d_2 são iguais a zero.

Portanto,

$$H^{2-k}(M) = H_k(\mathcal{U}_*) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0, 2 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Exemplo 19 Considerando M uma variedade suave difeomorfa ao \mathbb{S}^2 , como no desenho abaixo, e a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse dada pela função altura. Note que f não é Morse-Smale, pois os pontos q e t possui mesmo índice e existem trajetórias que ligam esses pontos críticos. Considerando N a hipersuperfície dada pelo círculo que passa pelos pontos q e t temos que $q \in \text{Cr}^{N,s}(f)$ e $t \in \text{Cr}^{N,u}(f)$.



Os pontos críticos acima possuem os seguintes índices: $\lambda_p = \lambda_r = 2$, $\lambda_q = \lambda_t = 1$ e $\lambda_s = \lambda_u = 0$. Para $k = 0, 1, 2$, a imagem do operador $\mathbb{P} : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{U}_{m-k}$ é gerada pelas correntes

$$\mathcal{U}_2 = \mathbb{R}[U_p] \oplus \mathbb{R}[U_r]$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathbb{R}[\tilde{U}_q] + \mathbb{R}[U_t]$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathbb{R}[U_s] \oplus \mathbb{R}[U_u]$$

Fazendo a correspondência U_p com $\langle p \rangle$ podemos escrever :

$$0 \rightarrow \langle p, r \rangle \xrightarrow{d_2} \langle q, t \rangle \xrightarrow{d_1} \langle s, u \rangle \rightarrow 0 \quad (125)$$

Note que $H_2(\mathcal{U}_*) = \ker d_2 = \langle p - r \rangle \simeq \mathbb{R}$. Além disso, $H_1(\mathcal{U}_*) = 0$, pois $\ker d_1 = \text{Im } d_2 = \langle q \rangle$. Por fim, como a imagem de d_1 é gerada por $\langle u - s, u + s \rangle \simeq \langle u - s \rangle$ temos que

$$H_0(\mathcal{U}_*) = \frac{\langle s, u \rangle}{\langle s - u \rangle} = \langle s, u \mid s = u \rangle \simeq \mathbb{R}.$$

Logo

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.6 Novos Complexos e suas Dualidade

Nessa Subseção vamos supor que M é uma variedade Riemanniana, compacta com bordo de dimensão m e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale com campo gradiente negativo tangente ao bordo.

Anteriormente, para $\omega \in \Omega^k(M)$ ou $\omega \in \Omega_{\text{cpt}}^k(M^\circ)$ calculamos o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t^* \omega \quad (\text{ou } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{-t}^* \omega).$$

Uma pergunta natural seria investigar o que acontece com o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^* \omega \quad (\text{ou } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{-t}^* \omega).$$

Nesta Subseção vamos considere o espaço da correntes com uma pequena modificação:

$$\mathcal{D}^k(M) = (\Omega^{m-k}(M))'.$$

Para $t > 0$ defina a corrente

$$\mathbb{T}_t := \Phi_*([0, t] \times M),$$

onde $\Phi(s, x) = (\varphi_s(x), x)$. Com isso, obtemos a equação

$$\partial \mathbb{T}_t - \mathbb{S}_t = \mathbb{P}_t - \Delta,$$

onde $\mathbb{S}_t := \Phi_*([0, t] \times \partial M)$.

Além disso, com as mesmas hipóteses vistas anteriormente (condição f -tame e volume finito) temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{T}_t = \mathbb{T} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{S}_t = \mathbb{S},$$

onde $\mathbb{T} = \Phi_*((0, \infty] \times M)$ e $\mathbb{S} = \Phi_*((0, \infty] \times \partial M)$. Assim, pela continuidade do operador de bordo temos que

$$\partial\mathbb{T} - \mathbb{S} = \mathbb{P} - \Delta$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t = \mathbb{P}$$

na norma flat.

Assim como no Teorema 18, para o fluxo φ_t do campo gradiente negativo com condição f -tame, a variedade

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{(\varphi_t(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), 0 \leq t < \infty\} \\ &= \{(y, \varphi_{-t}(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), 0 < t < \infty\} \\ &= \{(\varphi_{-t}(x), x) \mid x \notin \text{Cr}(f), -\infty < t \leq 0\} \\ &= \{(y, \varphi_t(y)) \mid y \notin \text{Cr}(f), \infty < t \leq 0\} \end{aligned}$$

satisfaz a equação

$$\partial\mathbb{T} - \mathbb{S} = \Delta - \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [U_p] \times [\tilde{S}_p]$$

em $M \times M$.

Dessa maneira, a expressão da corrente \mathbb{P} é

$$\mathbb{P} = \sum_{p \in \text{Cr}(f)} [U_p] \times [\tilde{S}_p].$$

Os operadores \mathbb{P}_- são

$$\mathbb{P}^r = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} [U_p] \times [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} [U_p] \times [\tilde{S}_p];$$

$$\mathbb{P}^a = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} [U_p] \times [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} [\tilde{U}_p] \times [S_p].$$

Observação 28 As correntes $[\tilde{S}_p]$ e $[\tilde{U}_p]$ são definidos no mesmo espírito das Subseções anteriores.

Em resumo,

a) Para toda forma diferencial $\omega \in \Omega_D^k(M)$, $0 \leq k \leq m$,

$$\mathbb{P}^r(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^u(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [\tilde{S}_p],$$

b) Se $\omega \in \Omega^k(M)$, $0 \leq k \leq m$,

$$\mathbb{P}^a(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t^\circ)^* \omega = \sum_{p \in \text{Cr}^0(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^s(f)} \left(\int_{\tilde{U}_p} \omega \right) \cdot [S_p]$$

Por sua vez, as fórmulas de homotopia

$$d \circ \mathbb{T}^{r/a} + (-1)^* \mathbb{T}^{r/a} \circ d = \Delta - \mathbb{P}^{r/a}. \quad (126)$$

garante a comutatividade dos operadores d e \mathbb{P} .

Usaremos agora as notações $\mathcal{S}^{k,r/a}$ para ser as imagens dos operadores $\mathbb{P}^{r/a}$ definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{r,k} &:= \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[S_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^u(f)} \mathbb{R}[\tilde{S}_p] = \text{Im } \mathbb{P}^r; \\ \mathcal{S}^{a,k} &:= \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^0(f)} \mathbb{R}[S_p] \oplus \bigoplus_{p \in \text{Cr}_k^s(f)} \mathbb{R}[S_p] = \text{Im } \mathbb{P}^a. \end{aligned}$$

As aplicações $\tilde{\mathbb{P}}^r : \Omega_D^*(M) \rightarrow \mathcal{S}^{r,*}$, $\tilde{\mathbb{P}}^a : \Omega^*(M) \rightarrow \mathcal{S}^{a,*}$ garantem que os pares $(\mathcal{S}^{*,r/a}, d)$ são subcomplexos de $(\mathcal{D}^*(M), d)$, pois $\mathbb{P}^{r/a}$ comuta com a diferencial, o que permite descer a nível de cohomologia para as aplicações

$$\tilde{\mathbb{P}}^r : H^k(\Omega_D^k(M)) \rightarrow H^k(\mathcal{S}^{r,*}) \quad \tilde{\mathbb{P}}^a : H^k(\Omega^k(M)) \rightarrow H^k(\mathcal{S}^{a,*}).$$

Observação 29 *A noção de corrente que usamos nas subseções anteriores foi a definição clássica: o dual das formas com suporte compacto. Na situação dessa Subseção, estamos alterando o grating do espaços das corrente. Isto gera uma mudanças na diferencial, pois ela aumenta o grau da corrente. Isto justifica o motivo de consideramos a Cohomologia dos complexos $(\mathcal{S}^{*,r/a}, d)$.*

Os mesmos argumentos do Teorema (20) prova o seguinte:

Teorema 31 *As aplicações $\tilde{\mathbb{P}}^{r/a}$ induzem isomorfismos*

$$\tilde{\mathbb{P}}^r : H^k(M, \partial M) \rightarrow H^k(\mathcal{S}^{r,*})$$

$$\tilde{\mathbb{P}}^a : H^k(M) \rightarrow H^k(\mathcal{S}^{a,*}).$$

Usando os Teoremas 20 e 31 temos as dualidades:

$$H^k(\mathcal{S}^{r/a,*}) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^{r/a}).$$

Na situação das hipersuperfícies (Subseção 6.5) o limite do operador \mathbb{P}_t^N quando $t \rightarrow \infty$ pode ser desenvolvido da mesma maneira que acima. A saber, se $\omega \in \Omega_D(M)$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^M(\omega) = \mathbb{P}^M(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^N(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p]$$

e se $\omega \in \Omega^k(M)$ o limite pode ser escrito como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_t^N(\omega) = \mathbb{P}^N(\omega) = \sum_{p \in \text{Cr}^{N,0}(f)} \left(\int_{U_p} \omega \right) \cdot [S_p] + \sum_{p \in \text{Cr}^{N,s}(f)} \left(\int_{\tilde{U}_p} \omega \right) \cdot [S_p], \quad (127)$$

onde \tilde{U}_p e \tilde{S}_p são definidos de maneira análoga (lembre que M não tem fronteira e o campo gradiente é tangente a hipersuperfície N). E mais, temos a dualidade

$$H^k(\mathcal{S}^{N,*}) \simeq H_{m-k}(\mathcal{U}_*^N).$$

7 CONCLUSÃO

Nesta Tese concluímos que os resultados obtidos por HARVEY and LAWSON JR (2001) podem ser estendidos para variedades com bordo e que possuem fluxo gradiente tangente ao bordo para resgatar determinadas dualidades. Isto é, dada uma variedade Riemanniana compacta com bordo, uma função Morse-Smale como em KRONHEIMER and MROWKA (2007) e uma métrica plana numa vizinhança dos pontos críticos, conseguimos os isomorfismos com coeficientes reais: $H^k(M) \simeq H_{m-k}(M, \partial M)$ e $H^k(M, \partial M) \simeq H_{m-k}(M)$ e conseqüentemente podemos concluir que $H_k(\hat{C}) \simeq H_k(M, \partial M)$ e $H_k(\check{C}) \simeq H_k(M)$. Para isso, se fez necessário "correr" certas formas suaves que podem ser vistas como correntes obtendo dois tipos de operadores que à nível de cohomologia são responsáveis pelas dualidades acima. Também conseguimos refinar os resultados para coeficientes inteiros, só que nesse caso vamos fazer push-forward de simplices de suaves. Por fim, também concluímos que numa hipersuperfície mergulhada numa variedade Riemanniana compacta sem bordo e uma função suave que satisfaz a condição de Morse-Smale fraca conseguimos resgatar a mesma dualidade abordada em HARVEY and LAWSON JR (2001).

REFERÊNCIAS

- BANYAGA, A.; HURTUBISE, D. **Lectures on Morse homology**. Dordrecht, Springer Science & Business Media, 2013.
- BOTT, R. **Nondegenerate critical manifolds**. *Annals of Mathematics*, p. 248–261, 1954.
- CIBOTARU, D. **Vertical Morse-Bott-Smale Flows and Characteristic Forms**. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 65, n. 4, p. 1089–1135, 2016.
- CIBOTARU, D. **Chern-Gauss-Bonnet and Lefschetz Duality from a currential point of view**, 2017. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1507.07014.pdf>>. Acesso em: 24 de julho de 2017.
- FEDERER, H. **Geometric measure theory**. Berlim, Springer, 2014.
- GIAQUINTA, M. **Cartesian Currents in the Calculus of Variations**. *Journées équations aux dérivées partielles*, p. 1–8, 1997.
- HARVEY, F. R.; LAWSON JR, H. B. **Finite volume flows and Morse theory**. *Annals of Mathematics*, v. 153, n. 1, p. 1–25, 2001.
- KRONHEIMER, P.; MROWKA, T. **Monopoles and three-manifolds**. Cambridge University Press, 2007.
- LATSCHEV, J. **Gradient flows of Morse-Bott functions**. *Mathematische Annalen*, v. 318, n. 4, p. 731–759, 2000.
- LEE, J. **Introduction to topological manifolds**. New York, Springer Science & Business Media, 2010.
- MILNOR, J. **Morse Theory**. New Jersey, Princeton university press, 2016.
- SCHWARZ, M. **Morse homology**. *Progress in Mathematics*. Citeseer, 1993.
- SILVA, A. V. **Homologia de Morse para variedades com bordo**. 2010. 75 f. Dissertação (Pós-Graduação e Matemática e Computação Científica)- Centro de Ciência Física e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- SPAINNER, E. H. **Algebraic topology**. New York, Springer Science & Business Media, 1994.
- SPIVAK, M. D. **A comprehensive introduction to differential geometry**. Boston,

Publish or perish, 1970.