



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

JOSÉ GERSON CORDEIRO

**NATUREZA MULTIFRACTAL DA ATIVIDADE MAGNÉTICA EM ESTRELAS TIPO
SOLAR OBSERVADAS PELA MISSÃO KEPLER**

FORTALEZA

2018

JOSÉ GERSON CORDEIRO

NATUREZA MULTIFRACTAL DA ATIVIDADE MAGNÉTICA EM ESTRELAS TIPO
SOLAR OBSERVADAS PELA MISSÃO KEPLER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

FORTALEZA
2018

JOSÉ GERSON CORDEIRO

NATUREZA MULTIFRACTAL DA ATIVIDADE MAGNÉTICA EM ESTRELAS TIPO
SOLAR OBSERVADAS PELA MISSÃO KEPLER

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Afrânio de Araújo Coelho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p Cordeiro, José Gerson.
NATUREZA MULTIFRACTAL DA ATIVIDADE MAGNÉTICA EM ESTRELAS TIPO SOLAR
OBSERVADAS PELA MISSÃO KEPLER / José Gerson Cordeiro. – Fortaleza, 2018.
67.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2018.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

1. Rotação estelar. 2. Atividade magnética. 3. Asterosismologia. 4. Missão Kepler. I. Título.

CDD:000.0

"Existem muitas hipóteses na ciência que são erradas. Isso é perfeitamente correto; elas são a abertura para descobrir o que é certo. A ciência é um processo auto-corretivo. Para serem aceitas, novas ideias devem sobreviver aos mais rigorosos padrões de evidência e escrutínio."

CARL SAGAN

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a minha família, em especial aos meus pais por todo apoio durante esses anos.
- Agradeço também meu orientador Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas pela imensa contribuição para realização deste trabalho.
- Aos meus eternos professores e amigos Pablo, George, Elissandro, Nizomar, João Claudio e Henrique.
- Aos meus grandes amigos Giselli, Daniel, Felipe, Ejackson, Israel, Maciel e Francigleison.
- À Universidade Federal do Ceará (UFC) e à agência de Fomento CAPES.

RESUMO

No presente trabalho nós investigamos a natureza multifractal em séries temporais de estrelas observadas pela missão Kepler, para uma amostra de 651 estrelas que apresentam algum quarter com baixa atividade magnética, usando o Multifractal Detrending Moving Average (MFDMA), que permite detectar sinais de multifractalidade em séries temporais não-estacionárias. Usamos diferentes índices multifractais baseados sobre o perfil geométrico do espectro de multifractalidade, para estimar possíveis correlações entre características da fase inativa da estrela e os referidos índices. Do ponto de vista multifractal, como o expoente de Hurst extraído do espectro multifractal, está relacionado às assinaturas de longo-termo na série temporal, é esperado que ele consiga separar a amostra em duas populações, uma na fase ativa e outra na inativa. Na literatura tem sido mostrado que o expoente de Hurst tem uma forte ligação com o período de rotação e, portanto, ele pode ser também usado para estabelecer algum tipo de calibração adequada para estimar período de rotação de estrelas que não apresentam modulação rotacional. Como resultado, nossa pesquisa apresenta um desfecho sem precedentes e abre um novo caminho para estimar período de rotação para estrelas com atividade magnética fraca. No entanto, nossos resultados alertam que uma calibração que possa nos oferecer o período de rotação de estrelas inativas é possível somente quando temos uma amostra que comporte ao menos um ciclo magnético.

Palavras-chave: Rotação estelar. Atividade magnética. Asterosismologia. Missão Kepler.

ABSTRACT

In the present work we investigate the multifractal nature in time series of stars observed by the Kepler mission, for a sample of 651 stars that exhibit some quarter with low magnetic activity, using the Multifractal Detrending Moving Average (MFDMA), which allow detecting signals of multifractality in non-stationary time series. Used different multifractal indices based on the geometric profile of the spectrum of multifractality, to estimate possible correlations between inactive phase characteristics of the star and the referred indices. From the multifractal point of view, as the Hurst exponent, extracted from the multifractal spectrum, is related to the long-term signatures in the time series, it is expected that it will be able to separate the sample into two populations, active phase and inactive phase. In the literature, it has been shown that the Hurst exponent has a strong connection with the rotation period, therefore, it can also be used to establish some kind of adequate calibration to estimate the period of rotation of stars that do not exhibit rotational modulation. As a result, our research presents an unprecedented outcome and opens a new way for estimating rotation period for stars with weak magnetic activity. Nevertheless, our results warn that a calibration that can give us the period of rotation of inactive stars is possible only when we have a sample that carries at least one magnetic cycle.

Keywords: Stellar rotation. Magnetic activity. Asteroseismology. Kepler mission.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados da análise geométrica do espectro multifractal e alguns parâmetros estelares.	39
Tabela 2 – Amostra dos resultados da análise geométrica do espectro multifractal e alguns parâmetros estelares.	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Velocidade de rotação projetada ($v \sin i$), onde i é o ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visada.	18
Figura 2 – Esquema mostrando como a modulação rotacional nas curvas de luz das estrelas do tipo solar diminui de acordo com sua idade.	22
Figura 3 – O gráfico mostra que de acordo com o valor de y , é possível mudar a estrutura da série temporal. É fácil verificar que para $y=0$, nós temos o ruído gaussiano e na medida que esse expoente cresce, uma assinatura mais complexa é encontrada.	26
Figura 4 – : Figura esquemática dos descritores do espectro multifractal com o uso de linguagem geométrica.	30
Figura 5 – Representação artística do telescópio Kepler.	36
Figura 6 – Curva de luz para KIC003438815Q03 (Quarter03 inativo). A figura do topo apresenta flutuações de origem instrumental. Para eliminar esse efeito, aplicamos um ajuste polinomial de sexta-ordem que remove essa tendência e gera a figura abaixo. Nessa figura está em destaque os flares que são os picos em destaque.	38
Figura 7 – Curva de luz para KIC001027740Q03 (Quarter03 ativo). A figura do topo apresenta flutuações de origem instrumental. Para eliminar esse efeito, aplicamos um ajuste polinomial de sexta-ordem que remove essa tendência e gera a figura abaixo.	39
Figura 8 – Descrição detalhada dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC003438815 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série temporal original; VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontrada no capítulo sobre análise multifractal.	43

Figura 9 – Descrição detalhada dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC 010328898 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série temporal original; VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontra no capítulo sobre análise multi- fractal.	44
Figura 10 –Descrição dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC 009203379 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série tem- poral original; em VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontra no capítulo sobre análise multifractal.	44
Figura 11 –Comportamento de escala e relações entre os expoentes para série temporal origi- nal KIC 010328898 (quarter03 inativo).	45
Figura 12 –Comportamento de escala e relações entre os expoentes para série temporal origi- nal KIC 009203379 (quarter03 inativo).	45
Figura 13 –Resultado da aplicação do MFDMA após a aplicação do método Shuffling nas séries temporais correspondentes a KIC010328898Q03 (inativo) e KIC009203379Q03 (inativo).	46
Figura 14 –Resultados da aplicação do MFDMA após a aplicação da phase randomiza- tion nas séries temporais correspondentes a KIC010328898Q03 (inativo) e KIC009203379Q03 (inativo).	47
Figura 15 –Relação entre as diversidades laterais e o grau de multifractalidade. A linha em azul mostra a tendência da diversidade lateral direita enquanto que a linha em verde mostra a tendên- cia da diversidade lateral esquerda.	48
Figura 16 –: Gráfico 3D de projeções nos planos dos índices multifractais.	48
Figura 17 –Correlação entre o expoente de Hurst e o período de rotação para a amostra de 100 estrelas com períodos de rotação que vão desde de estrelas de baixa a alta rotação como indicado na legenda da figura. A amostra de estrelas com período solar foi refinada para um intervalo de densidade entre mais ou menos 0,1 da densidade solar. A reta presente na figura é resultado de uma regressão linear onde a inclinação da reta é 0,084+/-0,03.	49
Figura 18 –Histograma dos expoentes de Hurst para as amostras segregadas pelo parâmetro de assimetria.	50

Figura 19 –Histograma do grau de multifractalidade $\Delta\alpha$ para as amostras segregadas pelo parâmetro de assimetria.	51
Figura 20 –Distribuição cumulativa do expoente de Hurst global H obtido via análise multifractal. As amostras estão separadas em diferentes cores.	53
Figura 21 –Relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação considerando a amostra original sem filtros. A curva em cinza é a relação encontrado por (FREITAS et al., 2013). As amostras foram analisadas quarter a quarter e a barra de erro do expoente Hurst é obtida pelo desvio padrão da distribuição de valores de H para cada quarter.	54
Figura 22 –Relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação considerando a amostra depois de um filtro low-pass. A curva em cinza é a relação encontrado por (FREITAS et al., 2013). Da mesma forma, as amostras foram analisadas quarter a quarter e a barra de erro do expoente H é obtida pelo desvio padrão da distribuição de valores de H para cada quarter.	55
Figura 23 –Relação entre o expoente de Hurst da amostra original e o expoente H considerando a amostra depois de um processo de randomização da fase da transformada de Fourier.	56
Figura 24 –Gráfico tipo BoxPlot mostrando	57
Figura 25 –Gráfico tipo <i>Box Plot</i> para a amostra original mostrando o comportamento do expoente de Hurst para os diferentes processos de filtragem de dados como indicados na Seção 4.2. A sequência dos processos de filtragem foi escolhida de tal forma que evidenciasse a redução do efeito da modulação rotacional à medida que vamos em direção do HPF (<i>high pass filter</i>).	58
Figura 26 –Gráfico tipo <i>Box Plot</i> para a amostra sub-solar.	59
Figura 27 –Gráfico tipo <i>Box Plot</i> para a amostra super-solar.	59

LISTA DE SIGLAS

R/S	Análise de Alcance Reescalado
FA	Análise de Flutuação
DFA	Detrended Fluctuations Analysis
DMA	Detrending Moving Average
MF-DMA	Detrending Moving Average for Multifractals
MF-DFA	Multifractal Detrended Fluctuations Analysis
LIGO	Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVOS DESTE TRABALHO	15
1.1.1	Objetivo Geral	15
1.1.2	Objetivos Específicos	15
1.2	Plano de Trabalho	15
2	UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ROTAÇÃO ESTELAR	17
2.1	Atividade magnética estelar	20
3	ANALISE MULTIFRACTAL	24
3.1	SÉRIES TEMPORAIS NO CONTEXTO ASTROFÍSICO	24
3.1.1	Ruído Astrofísico	25
3.2	Metodologia	32
4	DADOS OBSERVACIONAIS	35
4.1	A Missão Kepler	35
4.2	Descrição da Amostra selecionada	36
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
5.1	Comportamento do expoente de Hurst para um amplo espectro de período de rotação	52
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A - ÍNDICES MULTIFRACTAIS A, $\Delta\alpha$, $\Delta F_L(\alpha)$, $\Delta F_R(\alpha)$ E H PARA O QUARTER 03 DE TODAS AS ESTRELAS ATIVAS	68

1 INTRODUÇÃO

A rotação é uma propriedade universal, manifestando-se em estruturas desde a escala atômica como o elétron até o próprio Universo. Nas estrelas, a rotação consiste do movimento angular do corpo em torno de seu eixo, sendo um observável de grande importância para o estudo dos corpos celestes. Na verdade, a velocidade de rotação fornece pistas importantes sobre a natureza íntima das estrelas, principalmente, sobre sua formação e evolução. A rotação é um fenômeno que acompanha toda a história evolutiva da estrela, desde a redistribuição do momento angular na formação da protoestrela até o estágio final de sua vida (FREITAS, 2009). No entanto, ela também pode sofrer influência de diversos mecanismos, dentre eles, a dragagem de momento angular pela presença de planetas que diminui a rotação das estrelas ou mesmo por sua composição química.

Um dos processos para medir rotação vem da contagem de manchas que surgem na fotosfera das estrelas, onde seu movimento pelo disco estelar é o indicativo que a estrela está girando. Esse foi o procedimento adotado por Galileu e que serve de base para a fotometria moderna até hoje, funciona bem para o Sol, para estrelas distantes as manchas estelares não podem ser mapeadas oticamente, então o que se faz é medir a variação do brilho na sua curva de luz causados pelas regiões ativas enquanto giram. Estrelas jovens e rápidas com grandes regiões ativas nos revelam uma significativa mudança de brilho, o que permite medir com relativa facilidade sua rotação. Para estrelas mais evoluídas onde tais regiões ativas são escassas e sua rotação é mais lenta, a capacidade instrumental é insuficiente para medição do giro estelar.

Existem algumas técnicas importantes para a determinação da velocidade rotacional, os primeiros a proporem um procedimento para tal medição foram (SMITH; GRAY, 1976), consiste numa técnica de alta resolução baseada na análise do perfil das raias fotosféricas observadas, onde a partir da análise de Fourier é determinada a velocidade de rotação. No espectrômetro CORAVEL desenvolvido por um grupo franco-suíço outra técnica é utilizada (BARANE; MAYOR; PONCET, 1979), esse instrumento realiza uma correlação cruzada entre o espectro estelar que está sendo observado e uma lâmina de vidro coberta por uma fina camada de cromo colocada no plano focal do espectrógrafo, onde é gravado o espectro contendo cerca de 1500 linhas, (GRIFFIN, 1968).

Nosso trabalho é um novo mergulho nessa grande área da Astrofísica inaugurado por Galileu Galilei há mais de quatro séculos. A grande novidade e expertise no presente estudo é estender nossa capacidade de medir rotação, em particular, o período de rotação de estrelas que se encontram em baixa atividade magnética usando dados de fotometria de alta resolução proveniente da missão espacial Kepler (BORUCKI et al., 2010a). No próximo capítulo vamos

olhar mais de perto o que mais de 400 anos de estudos sobre rotação tem revelado sobre a atividade magnética das estrelas.

1.1 OBJETIVOS DESTE TRABALHO

1.1.1 Objetivo Geral

Nosso trabalho tem como objetivo principal estabelecer um procedimento de calibração adequada para estimar período de rotação de estrelas que estão em baixa atividade magnética.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Correlacionar grandezas geométricas extraídas do espectro multifractal e os parâmetros estelares associados de nossa base observacional;
- Diagnosticar o nível de atividade magnética das estrelas em função dos quarters;
- Investigar a relação dos parâmetros decorrentes da análise multifractal com fenômenos característicos da atividade magnética;
- Comparar o comportamento do expoente de Hurst para estrelas com assinatura de modulação rotacional e estrelas com baixa ou nenhuma atividade magnética mensurada pela fotometria Kepler.
- Buscamos também estimar possíveis correlações entre características da fase inativa da estrela usando diferentes índices multifractais, baseados sobre o perfil geométrico do espectro de multifractalidade.

1.2 Plano de Trabalho

- No capítulo 1, falamos da rotação num contexto mais amplo com a intenção de apresentá-la como uma propriedade universal enfatizando a importância do seu estudo no contexto da astrofísica estelar;
- No capítulo 2, discutimos com maiores detalhes a rotação no contexto astrofísico apontando os principais trabalhos que tratam da perda de momento angular com a idade e, dedicamos uma seção para a atividade magnética estelar, fazendo uma contextualização histórica dos trabalhos que contribuíram para esse campo de pesquisa;
- No capítulo 3, apresentamos o algoritmo que utilizamos para o tratamento multifractal em séries temporais e apresentamos nossa metodologia de trabalho;

- No capítulo 4, apresentamos nossa amostra de trabalho, discutimos sua completeza e detalhamos os passos que nos levaram a referida amostra;
- Nos capítulos 5 e 6, apresentamos nossos resultados, conclusões e perspectivas.

2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ROTAÇÃO ESTELAR

A rotação estelar consiste no movimento angular da estrela em torno de um eixo imaginário que passa pelo seu centro, ou em sistemas compostos, em torno do centro de massa. O estudo da rotação estelar teve início quando manchas solares foram observadas pela primeira vez através de um telescópio refrator, as medições do movimento dessas manchas em todo disco solar foram feitas originalmente por Johannes Fabrícus (1587-1616), Galileu Galilei (1564-1642), Thomas Harriot (1560-1621) e Chistopher Scheiner (1573-1650) (CAVALCANTE, 2017). Desde então, embora tenha havido um longo período de escassez, a rotação estelar tornou-se tema de grande relevância na astrofísica, dando origem a diversos estudos.

A reinauguração do tema no contexto astrofísico se deu em 1850 quando de forma independente Richard Carrington (1826-1875) e Gustav Spörer (1822-1895), mostraram que o período de rotação do Sol variava com a latitude, ou seja, a camada externa visível do Sol não girava como um corpo rígido, esse fenômeno é o que se conhece hoje como rotação diferencial (HIREMATH, 2001).

A Figura 1 ilustra as velocidades rotacionais verdadeira (v) e projetada ($v \sin i$), (ABNEY, 1877) sugeriu que a velocidade equatorial ($v \sin i$) como também é conhecida, poderia ser medida através das linhas espectrais (efeito Doppler) uma descrição detalhada para a determinação de $v \sin i$ pode ser encontrada em (OLIVEIRA, 2015).

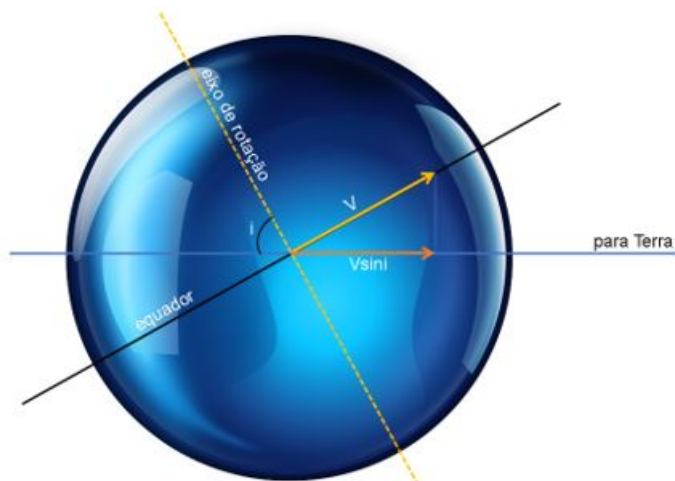
Struve (STRUVE, 1945) propôs que os eixos de rotação estelar são distribuídos de forma aleatória, essa importante propriedade inspirou (CHANDRASEKHAR; MÜNCH, 1950) que sugeriram duas equações integrais para descrever a distribuição de velocidades rotacionais verdadeiras e projetadas:

$$f(x = v) = -\frac{\pi}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial x} x \int_x^\infty \frac{\phi(y) dy}{y^2 (y^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2.1)$$

$$\phi(y = v \sin i) = y \int_y^\infty \frac{f(x) dx}{x (x^2 - y^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

A Equação 2.1 permite obter a verdadeira velocidade rotacional e é a solução da equação 2.2 conhecida como equação de Abel, esta por sua vez dá a velocidade rotacional projetada ou velocidade rotacional equatorial. A velocidade verdadeira v pode ser obtida via método da fotometria, que consiste em se determinar a variação da emissão de luz (frequência), devido a não homogeneidade da superfície da estrela (manchas estelares).

Figura 1 – Velocidade de rotação projetada ($v \sin i$), onde i é o ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visada.



Fonte: (SOBRINHO, 2015).

Daqui para a frente, sempre que falarmos de velocidade de rotação subentende-se que se trata da velocidade de rotação projetada ou equatorial. Em caso, onde essa denominação não é válida iremos explicitar.

Skumanich (SKUMANICH, 1972) relacionou a atividade magnética de uma estrela para uma dada rotação com a profundidade da envoltória convectiva. Além disso, o autor introduziu o conceito de freio magnético (magnetic braking, em inglês), onde o torque provocado pelo campo magnético das estrelas funciona como uma co-rotação que se opõe ao movimento de rotação da estrela, reduzindo a velocidade das estrelas em torno do seu eixo e, portanto, provocando uma perda de momento angular. Pouco tempo depois, Huang (HUANG, 1965) ao analisar a rotação de estrelas da sequência principal atentou que essa perda de momento angular fosse talvez devido à presença de planetas. Ele usou um fator de freio para construir as distribuições de probabilidade da velocidade de rotação sob o efeito da dragagem rotacional que os planetas geram.

Em seu trabalho seminal, (SKUMANICH, 1972) mostrou que estrelas de diferentes aglomerados e o Sol, apresentam um comportamento similar tanto do ponto de vista rotacional quanto de atividade cromosférica e abundância de lítio como uma função da idade. Concluiu que, em ambos os casos existe um decaimento que segue uma simples lei de potência do inverso da raiz quadrado do tempo. Neste contexto, (SKUMANICH, 1972) mostra que rotação e atividade magnética estão intimamente ligadas e, portanto, uma relação rotação-atividade-idade é possível.

Mais tarde, (KAWALER, 1988) inspirado pelos trabalhos de (MESTEL, 1984) e (MESTEL; SPRUIT, 1987), propõe uma parametrização para descrever a taxa de perda do momento angular, mostrando que essa taxa é proporcional a $\Omega^{(1+4aN/3)}$; onde Ω é a velocidade angular, a é o expoente da teoria do dínamo e N denota a topologia do campo magnético.

Este mesmo autor simplificou a relação do dínamo assumindo que o campo magnético total é proporcional à taxa de rotação para alguma potência, denotada por $B_0 \propto \Omega^a$ onde a varia entre 1 e 2 para o domínio não saturado e 0 para o domínio saturado. Tal simplificação foi necessária para contornar o problema da dependência com os parâmetros a e N , da perda de momento angular devido ao vento estelar magnético. Conforme demonstrado por (CHABOYER; DEMARQUE; PINSONNEAULT, 1994) o parâmetro N exibe uma faixa variando de 0 a 2, onde 0 representa a geometria do campo de dipolo e 2 um campo radial, esses autores mostraram ainda que a perda de momento angular de estrelas de alta rotação não pode ser descrita pela relação de Kawaler e que os campos magnéticos a altas taxas de rotação devem saturar, seguindo a forma $dJ/dt \propto \Omega$, conforme também mostraram os estudos subsequentes de (REINERS; MOHANTY, 2012).

Além disso, estudos de (MATT; PUDRITZ, 2005) e (MATT; PUDRITZ, 2008a) e (MATT; PUDRITZ, 2008b) exploraram o papel dos ventos estelares para os torques de *spin-up* e *spin-down* que se espera que surjam a partir da interação magnética entre uma estrela de pré-sequência principal e seu disco de acreção, demonstrando que, se as taxas de saída de massa estelar forem substancialmente maiores do que a taxa solar, os ventos estelares podem carregar ordens de magnitude de momento angular maior do que pode ser transferido para o disco (FREITAS; MEDEIROS J, 2013). Em termos de parametrização, existe duas formas parametrizadas conhecidas como relações modificadas de Kawaler:

$$\frac{dJ}{dt} = -K_W \Omega \omega_{sat}^{4aN/3} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{2-N} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-N/3} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-14}} \right)^{1-2N/3} \quad (2.3)$$

para $\Omega \geq \omega_{sat}$

$$\frac{dJ}{dt} = -K_W \Omega^{1+4aN/3} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{2-N} \times \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-N/3} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-14}} \right)^{1-2N/3} \quad (2.4)$$

para $\Omega < \omega_{sat}$.

Aqui ω_{sat} é a velocidade angular limite para além da qual ocorre saturação, juntamente com a constante de calibração K_w , o raio R , a massa M e a taxa de perda de massa \dot{M} dados em unidades $10^{-14} M_\odot \text{yr}^{-1}$ respectivamente, completa o conjunto de parâmetros usados por (CHABOYER; DEMARQUE; PINSONNEAULT, 1994). Esse limite de saturação é um importante ingrediente para modelos teóricos de evolução do momento angular estelar, como aponta os estudos de (KRISHNAMURTHI; PINSONNEAULT; TERNDRUP, 1997) e (SILLS et al., 2000), estes autores sugerem que o limite de saturação depende da massa estelar e é inversamente proporcional à escala de tempo global de reversão convectiva, que está relacionada

ao número de Rossby, um indicador da força da atividade magnética do dínamo. Em contraste, (REINERS; MOHANTY, 2012) argumentam que ω_{sat} não depende da massa. Para (PIZZOLATO et al., 2003) o fenômeno de saturação também é baseado em índices magnéticos e seu nível pode ser inferido, como sugerem os argumentos de evolução do momento angular, que não requerem um número de Rossby para nenhum dos dois regimes. Estes autores argumentam que o nível de emissão de raios-X a partir de estrelas saturadas depende apenas da luminosidade bolométrica, enquanto que para as estrelas não saturadas, o nível de emissão depende apenas do período de rotação. Isso implica um ω_{sat} com dependência direta da massa (KRISHNAMURTHI; PINSONNEAULT; TERNDRUP, 1997).

Mais recentemente (FREITAS; MEDEIROS J, 2013), usando a parametrização de (CHABOYER; DEMARQUE; PINSONNEAULT, 1994), analisaram o comportamento da relação rotação-idade para estrelas simples do tipo espectral F e G extraídas do catálogo de (NORDSTRÖM et al., 2004) à luz da mecânica estatística não extensiva de (TSALLIS, 1988). Nesse trabalho, os autores encontraram que a evolução da rotação dessas estrelas segregadas por intervalo de massa segue uma lei de potência geral dada por $v \propto t^{(1/(1-q))}$, onde o parâmetro q é definido como $1 + 4aN/3$ os parâmetros a e N são o expoente da teoria do dínamo estelar e a topologia do campo magnético, respectivamente, usados para caracterizar o nível de freio magnético para uma dada distribuição de estrelas. Para exemplo, se $a = 3/2$ e $N = 1$, nós recuperamos o expoente de Skumanich ($q = 3$).

Os autores concluíram que o expoente de decaimento é uma função da massa e, portanto, o expoente de Skumanich é o valor apenas para um específico intervalo de massa, onde estrelas mais massivas apresentam valores do expoente q menores do que para estrelas de baixa massa. Por fim, os autores enfatizam que no caso especial de $q \rightarrow 1$, o campo magnético das estrelas torna-se saturado. No cenário da mecânica estatística não-extensiva esse último valor corresponde ao equilíbrio termodinâmico.

Tais estudos propiciaram uma descrição estatística das distribuições de $v \sin i$ para diferentes tipos espectrais, mostrando que o mecanismo de desaceleração que é uma função da idade da estrela e tem um comportamento que muda de perfil com o tipo espectral (FREITAS, 2006). Diante destes resultados, a rotação estelar propicia um entendimento amplo de toda a vida da estrela, desde sua formação, como evoluiu e ainda como vai evoluir até sua morte.

2.1 Atividade magnética estelar

Diversas técnicas de observação têm nos mostrado que o magnetismo é um fenômeno presente em todo o cosmo, a origem do magnetismo e seu mecanismo regenerador são temas de grande interesse no campo da astrofísica estelar, uma vez que, diante dessas observações é possível teorizar sobre o papel desempenhado pelos campos magnéticos na evolução do universo.

O magnetismo estelar teve sua existência comprovada pela primeira vez com (HALE, 1908), quando observou o alargamento das linhas (efeito Zeeman) no espectro das manchas solares, essa importante descoberta deu início a uma corrida para se estabelecer uma teoria que descrevesse o magnetismo em corpos de escalas astronômicas como o Sol e a Terra.

Um questionamento importante que serviu como norte para construção das teorias modernas que explicam o magnetismo estelar, era se tais campos magnéticos estavam em evolução com o universo, no sentido de que já deveriam ter se extinguido ou caminhando para extinção ou ainda se podiam se regenerar. Um primeiro esforço para entender a origem do campo magnético da Terra e do Sol foi realizado por Lamor em 1919. Ele propôs que corpos numa escala astronômica, como o Sol, podem ter campos magnéticos causados por um processo de dínamo auto excitado (NELSON; MEDEIROS, 2012).

Várias hipóteses foram levantadas na tentativa de se compreender os mecanismos geradores de campo magnético nas estrelas. Uma primeira explicação, que recebe o nome de teoria da magnetização fóssil, afirma que um “campo criador” gerado na formação da estrela é o responsável pelo campo magnético atualmente existente. Essa hipótese, no entanto, contrasta com a fase de contração, onde a estrela torna-se completamente convectiva, descoberta por (HAYASHI, 1961). Nessa fase, o emaranhamento das linhas de força devido a turbulência na zona convectiva faria o campo tender a zero com relativa rapidez. Outra hipótese foi proposta por Biermann em 1950, conhecida como pilha de Biermann essa teoria afirma que a pressão parcial do gás de elétrons em uma estrela em rotação atua com uma bateria, conduzindo a corrente elétrica que mantém um campo magnético em torno de um eixo de rotação (DUARTE, 2012). Tal teoria aponta para um processo auto sustentável, onde as correntes criadas nos interiores estelares gerariam os campos magnéticos e estes por sua vez, criariam novas correntes completando assim o ciclo. Alguns questionamentos são postos, quanto a criação dessas correntes no interior das estrelas e se o ciclo mencionado seria permanente ou por quanto tempo permaneceria em atividade.

A teoria de maior destaque na tentativa de explicar o magnetismo estelar é a teoria do dínamo, esta teoria recebeu várias contribuições até os recentes modelos teóricos para o dínamo solar proposto por (GUERRERO; PINO, 2008). Neste contexto a rotação tem papel fundamental, pois a geração e manutenção dos campos magnéticos se dá a partir da indução de correntes elétricas, que aparecem devido ao movimento das partículas carregadas do fluido, no interior estelar. Uma descrição detalhada dos mecanismos responsáveis pelo magnetismo estelar encontra-se na tese de (FREITAS, 2009).

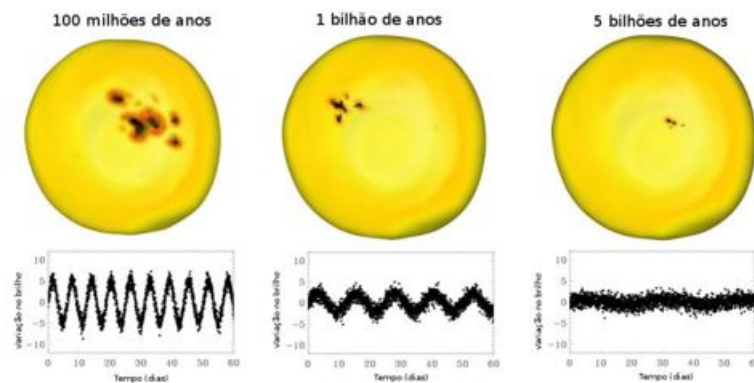
Os estudos sobre atividade magnética estelar tiveram início por volta de 1960, quando Onin Wilson começou a monitorar linhas de emissão de Ca II H e K (Ca HK) de uma amostra de 139 estrelas do tipo solar no Observatório de Mount Wilson. Este estudo evidenciou que

o número de manchas em algumas estrelas também pode variar em ciclos como acontece no Sol e mostrou que estrelas de diferentes tipos em termos do tipo espectral ou idade podem apresentar ciclos de longa variação nas suas linhas de emissão de Ca II H K, análogo ao do Sol, (BALIUNAS et al., 1995).

A atividade magnética estelar compreende uma gama de fenômenos que ocasionam a variação de fluxo luminoso na estrela. As manchas estelares presentes em regiões ativas de intenso campo magnético, fáculas que são manchas mais luminosas e flares, explosões que ocorrem na superfície da estrela liberando uma enorme quantidade de energia, são exemplos de fenômenos que acarretam variação no brilho da estrela. Dentre esses observáveis da superfície estelar as manchas merecem especial destaque pois são fortes indicativos visuais de campos magnéticos, seu monitoramento ao longo de um tempo considerável permite observar o ciclo magnético estelar, como é o caso do ciclo solar de 11 anos.

Já fizemos menção que a taxa de rotação estelar está intimamente ligada à atividade magnética e também com a idade da estrela, Skumanich (SKUMANICH, 1972) propôs essa relação ao mostrar que a emissão de Ca II H e K diminui com a idade da estrela, assim como sua rotação. A Figura 2 mostra essa relação através das curvas de luz. Uma curva de luz é um gráfico onde são representadas as variações do brilho em função do tempo.

Figura 2 – Esquema mostrando como a modulação rotacional nas curvas de luz das estrelas do tipo solar diminui de acordo com sua idade.



Fonte:ASTRO WATCH.Disponível em

<<http://amazingnotes.com/2011/06/05/howastronomer-calculate-the-age-of-a-star>>. Acessado em 11 jun 2018

Para estrelas ativas, ou seja, que apresentam um considerável número de manchas, as curvas são marcadas por uma forte modulação rotacional, enquanto aquelas sem manchas quase não apresentam a variação no brilho.

Kron (KRON, 1947) ao observar quatro RS CVn binárias eclipsantes evidenciou as primeiras manchas estelares de que se tem registro, ele percebeu a existência de uma significativa variabilidade no brilho, diferente das curvas típicas destes sistemas. O astrônomo Douglas Hall formulou em 1972 um modelo baseado na presença de manchas estelares para explicar

a modulação rotacional nas curvas de luz das estrelas RS CVn, no qual as manchas aparecem entrando e saindo do disco da estrela, similar ao fenômeno que acontece no Sol (HALL, 1972).

A atividade magnética estelar acarreta uma série de observáveis como os citados acima que em muitos casos só podem ser estudados a partir da curva de luz, de forma que a interpretação deste sinal é de fundamental importância para entendermos os processos físicos que ocorrem nas estrelas e outros fenômenos como período de rotação, presença de manchas etc. Este sinal pode ser decomposto em um número de frequências, o que permite determinar os componentes periódicos dos dados que podem estar relacionados às propriedades físicas do sistema, como rotação, fenômenos dinâmicos em sua superfície (tais como manchas escuras) ou mesmo a presença de trânsitos planetários (CASTRILLÓN, 2010).

3 ANALISE MULTIFRACTAL

3.1 SÉRIES TEMPORAIS NO CONTEXTO ASTROFÍSICO

Séries temporais no contexto astrofísico é um campo de pesquisa que se propõe investigar fenômenos de variabilidade em diferentes ambientes estelares, dependendo da massa e estágio evolutivo. Em termos históricos, o nascimento deste campo de estudo remota as observações realizadas por Tycho Brahe no tocante a precisão das posições planetárias e, aos modelos de Johannes Kepler para entender a origem desses fenômenos. A variabilidade estelar surge de três evidências básicas, a primeira delas vem da observação da superfície, a dinâmica das manchas produz variações periódicas no brilho da estrela. Para essa variação, nos referimos a medida da rotação superficial da Estrela. Para o Sol, a velocidade de rotação é extremamente pequena da ordem de 2 km/s, no entanto, esse efeito pode ser dramático quando levamos em conta objetos que emitem forte jatos de partículas devido à altas taxas de rotação, como ocorrem em pulsares e buracos negros. Uma segunda evidência vem da observação dos planetas do sistema solar, suas luas e outros objetos que se movem em órbitas periódicas. Tais movimentos orbitais causam variações periódicas no desvio Doppler da luz devido aos eclipses provocados pela passagem desses objetos pelo disco solar. Por fim, uma terceira evidência, embora menos evidente, está ligada às variações intrínsecas que ocorrem na luminosidade devido às pulsações, explosões através dos flares, ejeções de massa e acreção de poeira e gás oriundos do ambiente circumestelar (FEIGELSON; BADU, 2012)

Em termos gerais, existe uma ampla e muito ramificada árvore de variabilidade que pode ser subdividida em categorias intrínsecas e extrínsecas, que por sua vez, podem ser divididas em uma vasta cadeia de fenômenos de diferentes campos da astrofísica: do entendimento da composição interna das estrelas, detecção de sistemas extrassolares à estrutura de galáxias e detecção de matéria invisível (LOPES et al., 2015).

Um importante componente responsável pela variabilidade em uma série temporal astrofísica são as variações periódicas produzidas pelo comportamento orbital, rotacional ou de pulsação que se manifestam em frequências típicas da ordem poucos milihertz até gigahertz. A grande maioria dessas variações são inferidas através do estudo asterosismológico do Sol, a única fonte estelar na qual temos as diferentes variabilidades em todas as escalas de tempo.

Além da componente periódica, existe outra componente que se refere ao ruído, também conhecida na literatura científica como ruído astrofísico. Essa componente estocástica está presente em uma série temporal de diferentes formas, mas no geral podem ser classificadas como componentes que apresentam ou não correlações no tempo. Na grande maioria dos

trabalhos encontrados na literatura astrofísica, o ruído é tratado como processo Markoviano (Gaussiano). No entanto, essa aproximação somente é válida quando a janela de observação é muito maior do que tempo da variabilidade na qual se queira investigar, ou se os fenômenos são relativamente suaves. Fenômenos explosivos produzem uma cadeia de variações temporais que desafiam essa simples classificação.

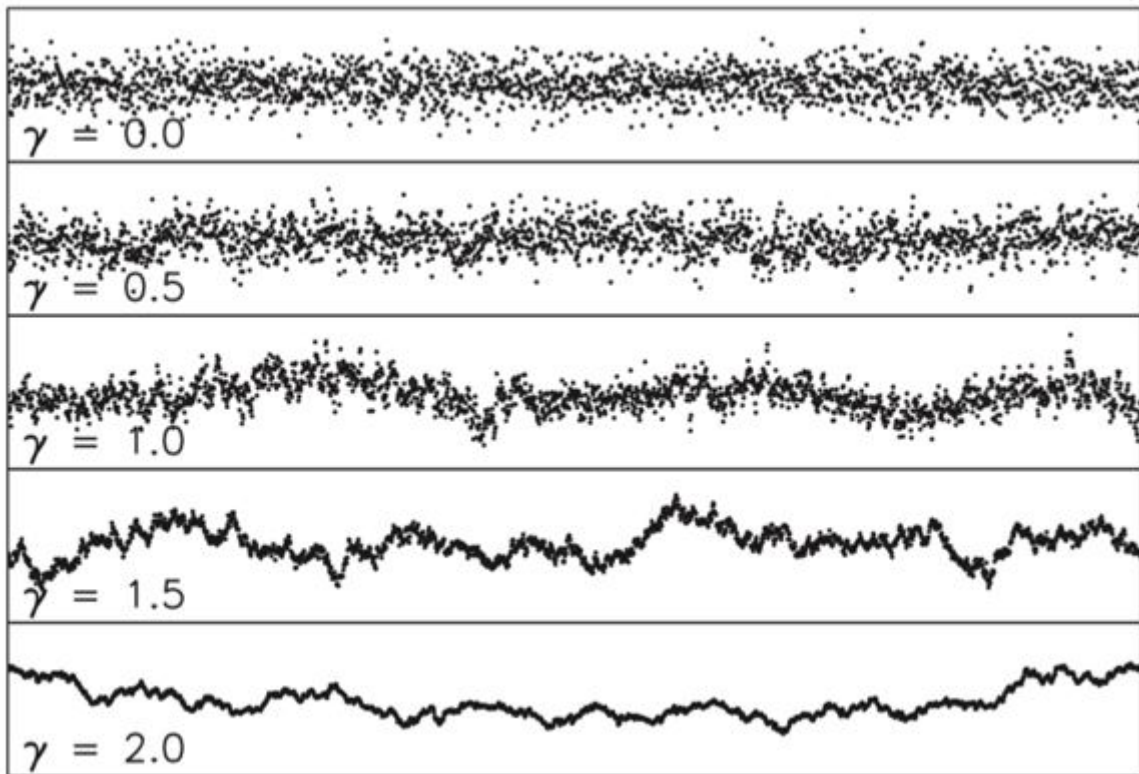
A dificuldade na análise de diferentes mecanismos que geram ruído pode ser substancialmente aumentada, uma vez que as séries temporais estudadas podem ser multivariadas, ou seja, o fenômeno é simultaneamente observado em diferentes faixas de comprimento de onda: das ondas de rádio aos raios gama.

3.1.1 Ruído Astrofísico

Atividade magnética e granulação estelar compõem os extremos do espectro do que é bem-conhecido como ruído astrofísico. Essas categorias de ruído que aparecem nas baixas frequências quando aplicamos a transformada de Fourier do sinal é a maior fonte de ruído quando falamos de velocidade radial e, atualmente, ganham um olhar especial quando tratamos de séries temporais com trânsito planetário (AIGRAIN; FAVATA; GILMORE, 2004). Ainda hoje, ruído astrofísico é analisado por uma simples análise de Fourier aproximando-o por processo gaussiano estacionário ou markoviano.

Processos aleatórios produzem vários tipos de ruídos, que no geral são do tipo $1/f^y$, onde f representa a frequência e y denota o espectro de cores do ruído. Como exemplos, os ruídos, branco (processo de Wiener), pink, flicker ou ruído $1/f$, browniano ou vermelho, ou ruído preto (ASCHWANDEN; FREELAND, 2012) são diagnosticados pelo perfil e, todos estão conectados por uma lei de potência como uma função da frequência. O ruído flicker, como é mais conhecido na astrofísica, corresponde ao índice da lei de potência igual à 1. Em séries temporais astrofísica, o ruído tipo flicker tem sido estudado extensivamente para diferenciar o ruído de fótons do sinal significativo proveniente dos flares solares, variáveis cataclísmicas, estrelas de nêutron, pulsares e candidatos a buracos negros (ASCHWANDEN; FREELAND, 2012). No entanto, essa classe de ruído $1/f$ caracteriza apenas os sinais homogêneos. Esse tipo de sinal é denominado de homogêneo, pois as propriedades em larga escala (por exemplo, o sinal inteiro) são preservadas em pequenas escalas (nível do ruído). Nesse sentido, apenas um simples índice (como, por exemplo, o expoente de Hurst) representa o comportamento global das flutuações (FREITAS et al., 2013).

Figura 3 – O gráfico mostra que de acordo com o valor de γ , é possível mudar a estrutura da série temporal. É fácil verificar que para $\gamma=0$, nós temos o ruído gaussiano e na medida que esse expoente cresce, uma assinatura mais complexa é encontrada.



Fonte: (CARTER; WINN, 2009).

Existem diversas técnicas de análise fractal e multifractal em séries temporais (não-) estacionárias. As séries temporais podem ser classificadas estatisticamente de acordo com os conceitos de autossimilaridade e autoafinidade descritos em (FEDER, 1988), esses conceitos são comumente associados à fractalidade e multifractalidade, respectivamente. Ao analisarmos uma série temporal fazendo uso de um expoente, descrevemos o comportamento da série segundo uma lei de escala, a série é dita fractal se esse comportamento puder ser descrito com apenas um valor para esse expoente (geralmente o expoente de Hurst), noutras palavras, as propriedades de escala são as mesmas em diferentes regiões de diferentes tamanhos da série. Quando são vários os expoentes que a caracterizam, ou seja, quando o comportamento de escala difere para diferentes regiões da série, ela é dita multifractal. Um compêndio acerca do assunto pode ser encontrado na tese de doutoramento de (NEPOMUCENO, 2016), aqui nos limitaremos à descrição do método MFDMA como apresentado em (GU; ZHOU, 2010). Para citar algumas dessas técnicas destacamos:

- Análise de flutuação – FA

Este método foi proposto por (PENG et al., 1992), baseado na teoria da caminhada

aleatória, com o objetivo de investigar correlações de longo alcance em sequências de nucleotídeos de DNA.

- Análise de alcance reescalado – R/S

Baseado na existência de correlação de longo prazo nos índices pluviométricos, o engenheiro hídrico e físico Harold Edwin Hurst propõe que a construção de novos reservatórios deveria levar em consideração a análise da série histórica. A análise de várias séries temporais advindas da taxa de vazão de rios, índices pluviométricos e crescimento de árvores, fez com que Hurst percebesse que não havia concordância entre a teoria que dispunha e os dados coletados. Pois, se os fenômenos ocorressem de forma aleatória, ou seja, sem correlação de longo alcance, a razão entre o alcance da série (R) e seu desvio padrão (S), procedimento hoje conhecido como Análise R/S, deveria seguir uma lei de potência no tempo de análise com expoente igual a 1/2. Este resultado fora obtido a partir da teoria do Movimento Browniano por (FELLER, 1951). Porém, os dados apresentavam um expoente em torno de 0,72 indicando haver uma correlação de persistência. A incompatibilidade entre teoria e dados ficou conhecido como o Fenômeno de Hurst. (NEPOMUCENO, 2016).

- Método – DFA

Proposto originalmente (PENG et al., 1994) para estudo de sequências de DNA, esse método consiste na análise do comportamento de escala da raiz quadrática média da distância entre o sinal e a tendência local.

- Método – DMA

(ALESSIO et al., 2002) e posteriormente (CARBONE; CASTELLI; STANLEY, 2004), propõem este método de análise inspirados na ideia de média móvel introduzida por (VANDEWALLE; AUSLOOS, 1998). O que o difere do método DFA é apenas no processo de identificação e remoção das tendências.

- Método MF-DFA

Esse método proposto por (KANTELHARDT et al., 2002) é uma generalização para o método DFA, consiste em tornar possível a análise de flutuação destendenciada em séries que apresentam comportamento multifractal, ou seja, análise de flutuação destendenciada para multifractais (Multifractal detrended fluctuations analysis, MF-DFA em inglês).

- Método MF-DMA

O método MFDMA é uma generalização do método DMA empregado para a análise de séries temporais não estacionárias e fractais que tem como principal funcionalidade identificar e remover tendências da série temporal, o MFDMA permite tal análise em séries multifractais e vem sendo aplicado em sistemas de diversas áreas, tais como análise de medidas de temperatura global, taxas de câmbio do dólar americano, amostra de estrelas do telescópio espacial CoRoT e processamento de imagens com textura (NEPOMUCENO, 2016). Mais recentemente (NEPOMUCENO, 2016)) investigou a natureza fractal e multifractal da variação temporal da deformação relativa (strain) medida pelos detectores do Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (LIGO) (ABBOTT et al., 2016), usando as recentes observações da onda gravitacional GW150914 produzida pelo sistema de buracos negros binários coalescentes. O algoritmo para (detrending moving average for multifractals- MFDMA) apresentado em (GU; ZHOU, 2010) segue os seguintes passos: Primeiro calcula-se o perfil da série temporal considerada $x(t)$ definida ao longo do tempo $t = 1, \dots, N$ a partir da qual pode-se construir uma soma cumulativa dada por:

$$Y(t) = \sum_{i=t}^t x(i) - \langle x \rangle, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

O passo seguinte consiste em calcular a média móvel em uma janela móvel de tamanho igual ao fator de escala s , de tal modo que este tamanho compreenda entre 10 e $N/10$ dados da amostra total.

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{s} \sum_{k=-\lfloor (s-1)\theta \rfloor}^{\lceil (s-1)(1-\theta) \rceil} Y(t-k) \quad (3.2)$$

onde $\lceil (x) \rceil$ é o menor número inteiro não menor que o argumento (x) e $\lfloor (x) \rfloor$ é o maior inteiro não maior que o argumento (x) , θ é o parâmetro de posição com um intervalo entre zero e um, que descreve o atraso entre a função média móvel e as séries temporais originais e define o modo que esta média móvel é calculada. Dado o valor do parâmetro de posição a tendência da série deve ser retirada, isso é feito usando uma relação para a série residual dada por

$$\varepsilon(i) = Y(i) - \tilde{Y}(i) \quad (3.3)$$

a condição $(s - \lceil (s-1)\theta \rceil) \leq N - \lfloor (s-1)\theta \rfloor$ deve ser satisfeita e a série residual deve ser dividida em $N_s = \lceil N/s - 1 \rceil$ segmentos não sobrepostos de igual tamanho s , onde cada segmento pode ser expresso por $\varepsilon_v = \varepsilon(l+i)$, com $1 \leq i \leq s$ e $l = (v-1)s$. De forma que é possível agora calcular a função de flutuação no segmento v de tamanho s dada por

$$F_v = \left\{ \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \varepsilon_v^2(i) \right\}^{1/2} \quad (3.4)$$

dessa forma, para valores de $q \neq 0$ uma função de flutuação global de q -ésima ordem é o momento estatístico (por exemplo para $q = 2$, é a variância) e pode ser expressa por

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} F_v^q(s) \right\}^{1/q} \quad (3.5)$$

para $q = 0$ a função de flutuação global é

$$\ln[F_0(s)] = \frac{1}{N_s} \sum_{v=1}^{N_s} \ln[F_v(s)] \quad (3.6)$$

assim, o comportamento de escala da função de flutuação global $F_q(s)$ deve ser investigando propondo diversos valores para a escala s , seguindo uma lei de potência do tipo

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (3.7)$$

onde $h(q)$ é o expoente generalizado de Hurst. Conhecendo-se $h(q)$, o expoente da escala multifractal ou expoente de Renyi pode ser calculado da seguinte forma:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (3.8)$$

Por fim, através de uma transformada de Legendre podemos obter o expoente de Hölder:

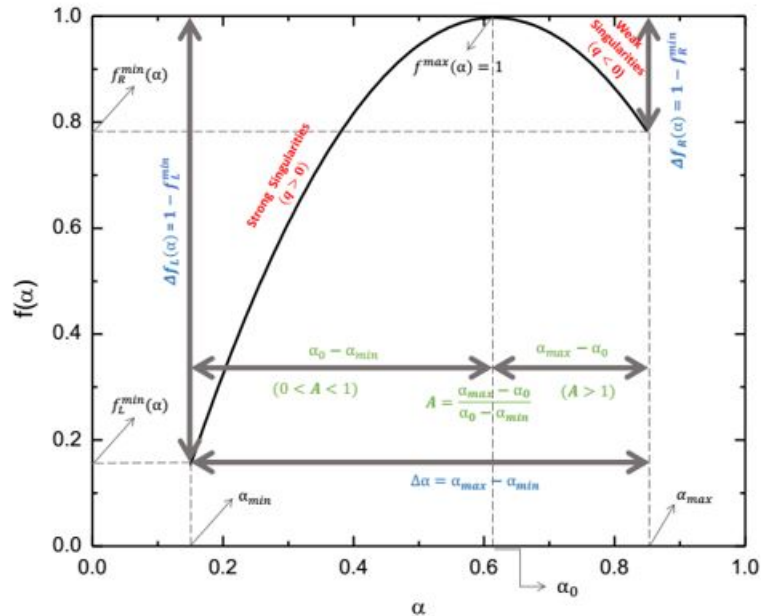
$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (3.9)$$

e o espectro multifractal:

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \quad (3.10)$$

Alguns tipos de parâmetros de escala podem ser usados para parametrizar a estrutura multifractal da série temporal, na Figura 4 apresentamos um espectro multifractal típico de uma série temporal com a forma parabólica inversa e, listamos quatro parâmetros identificados do espectro $f(\alpha)$ por (FREITAS et al., 2017).

Figura 4 – : Figura esquemática dos descritores do espectro multifractal com o uso de linguagem geométrica.



Fonte: (DE FREITAS et al., 2017).

- Grau de assimetria (A)

Este índice também chamado de assimetria na forma do espectro $f(\alpha)$ é expresso por

$$A = \frac{\alpha_{max} - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_{min}} \quad (3.11)$$

onde α_0 é o valor de α quando $f(\alpha)$ for máximo. O valor deste índice A indica uma das três formas: assimetria à direita ($A > 1$), assimetria à esquerda ($0 < A < 1$) ou simétrica ($A = 1$). O ponto final esquerdo α_{min} e o ponto final direito α_{max} representam as flutuações máximas e mínimas do expoente da singularidade, respectivamente.

- Grau de multifractalidade ($\Delta\alpha$)

Este índice representa a amplitude:

$$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (3.12)$$

um valor baixo de $\Delta\alpha$ indica que a série temporal está próxima do fractal, enquanto que o comportamento multifractal é maior quando $\Delta\alpha$ aumenta (FREITAS et al., 2017).

- Parâmetros de singularidade $\Delta f_L, \Delta f_R$ e C

Os parâmetros $\Delta f_L(\alpha)$ e $\Delta f_R(\alpha)$ caracterizam a amplitude, que é definida como a diferença entre os valores máximo ($f^{max}(\alpha) = 1$) e mínimo do espectro de singularidade, onde o ponto

final esquerdo é denotado por $f_L^{min}(\alpha)$ e o ponto final direito por $f_R^{min}(\alpha)$. A razão entre $\Delta f_L(\alpha)$ e $\Delta f_R(\alpha)$ é dada por C , da seguinte forma:

$$C = \frac{\Delta f_L(\alpha)}{\Delta f_R(\alpha)}(\alpha) = \frac{1 - f_L^{min}(\alpha)}{1 - f_R^{max}(\alpha)} \quad (3.13)$$

onde o índice C pode ser interpretado como uma medida direta da profundidade da cauda do espectro $f(\alpha)$. Se $C < 1$, o lado esquerdo é menos profundo, enquanto se $C > 1$, este lado é mais profundo, e se $C = 1$, as profundidades das caudas são as mesmas em ambos os lados. Uma longa cauda esquerda implica que as singularidades são mais fortes, enquanto uma longa cauda direita indica que as singularidades são mais fracas (IHLEN, 2012).

- O expoente de Hurst (H)

Existem vários métodos usados para estimar o expoente de Hurst, tal expoente fornece informações sobre regularidade, aleatoriedade, efeitos de longo alcance ou memória nas séries temporais, no contexto multifractal, o expoente de Hurst H pode ser obtido do espectro multifractal através do expoente de Hurst generalizado de segunda ordem $h(q = 2)$ ou seja, pelo momento estatístico de segunda ordem (variância ou desvio padrão) utilizando a equação 3.8. $H = 1/2$ denota movimento browniano, isto é, flutuações passadas e futuras não são correlacionadas conforme descreve de (FREITAS et al., 2013). No entanto, se $H > 1/2$, as flutuações estão ligadas ao nível de persistência devido à dependência de longo alcance, ou seja, um aumento nos valores provavelmente será seguido por outro aumento no curto prazo, e uma diminuição nos valores provavelmente será seguida por outro decréscimo no curto prazo. Já para $H < 1/2$, as flutuações tendem a não continuar na mesma direção, mas, em vez disso, voltam a si mesmas, o que resulta em uma série temporal menos suave (HAMPSON; MALLEEN, 2011).

O segundo passo de nossa análise é encontrar qual a fonte de multifractalidade presente nas séries temporais. Como mencionado em (NEPOMUCENO, 2016), existem dois tipos de fonte que podem ser responsáveis pela multifractalidade. São elas:

- I Presença de correlações de longo alcance, geralmente associadas a comportamentos periódicos na série analisada;
- II Alargamento de cauda da função de distribuição de probabilidades, geralmente associada a presença de não linearidades na série temporal.

Para o primeiro caso, nós procederemos com o embaralhamento da série temporal, denotada na literatura Shuffling. Esse procedimento destrói a memória associada a efeitos de longo alcance e assinatura de periodicidade presente na série temporal. Para o outro caso, nós fazemos a transformada de Fourier da série e randomizamos a fase, mas preservamos a

identidade periódica (se houver). Na literatura, esse procedimento é conhecido como phase randomization ou Surrogate. Em particular, se a fonte de multifractalidade for devido à memória, ao reaplicarmos o método de análise multifractal, o pico do espectro de multifractalidade da série temporal é deslocado para $\alpha = 0,5$ ($h(q) = 0,5$) fazendo $\Delta\alpha \rightarrow 0$ que corresponde ao movimento Browniano e o comportamento na série será monofractal. Por outro lado, se a fonte de multifractalidade for devido a alargamento de cauda da função de distribuição de probabilidades, o espectro permanece com o mesmo α para f_{max} , mas as caudas do lado esquerdo e direito do espectro multifractal são reduzidas ao ponto que $\Delta\alpha$ tende para zero e, portanto, apresentando um perfil monofractal. Vale ressaltar que a análise pode apresentar outros comportamentos, tais como, as duas fontes coexistem ou nenhuma das duas são identificadas.

3.2 Metodologia

Nós escrevemos diferentes códigos em MATLAB®2017 para computar as equações que descrevem o algoritmo MFDMA, assim como, os códigos que geram as séries temporais para os dois métodos de busca da origem da multifractalidade, como descrito nos dois últimos parágrafos.

Inicialmente, faremos uma sólida análise para uma definição criteriosa das diferentes características da base de dados do Kepler. As séries temporais do Kepler não se restringem apenas a estrelas da sequência principal. Elas abrangem desde estrelas tipo solar em diferentes estágios evolutivos, assim como Seyferts do tipo 1 e 2, AGN, quasares, blazares, binárias e gigantes. Deste modo, é necessária uma análise criteriosa para que nossa amostra não apresente algum viés. Além disso, as fontes são observadas em diferentes cadências LC e CC, como mencionado na Seção A missão Kepler no próximo capítulo. Deste modo, a metodologia seguirá os seguintes procedimentos:

a) Processo de limpeza das séries temporais

Mesmo as séries temporais do Kepler serem de alta resolução fotométrica, alguns problemas de ordem instrumental e da dinâmica orbital geram efeitos que podem ser confundidos com fenômenos astrofísicos. Desde modo, corrigir e/ou controlar esses eventos indesejáveis é primordial para a análise dos resultados. De acordo com Kepler Instrument Handbook, segue abaixo uma lista dos principais eventos associados à operação do satélite e tendências sistemáticas que contaminam a série temporal que iremos eliminar ou reduzir:

- Variações do foco do telescópio provocadas pelas flutuações térmicas;
- Pointing offsets;
- Aberrações da velocidade diferencial;

- Perda de “luz” provocadas pelo tempo de exposição em um determinado alvo;
- Contaminação por fontes vizinhas;

b) Processos de interpolação para séries temporais não igualmente espaçadas

Diferentemente das séries temporais igualmente espaçadas onde podemos aplicar com mais confiança técnicas tradicionais como o periodograma de Fourier, séries com dados catalogados em intervalos de tempo aleatório apresentam gaps que prejudicam a sua análise tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. Para séries com essa característica iremos adotar os procedimentos propostos por (FEIGELSON; BADU, 2012). Em síntese:

- No domínio do tempo: Função de correlação discreta e função de estrutura de Kolmogorov;
- No domínio espectral: Periodograma *Lomb-scargle* modificado e periodogramas de não-Fourier (especificamente utilizaremos o periodograma generalizado que inicialmente realiza um processo de pre-branqueamento da série temporal).

c) Processos de filtragem dos dados

Basicamente, nessa parte iremos separar vários tipos de contribuições presentes na série temporal. Assim, usaremos as seguintes ferramentas para diagnosticar de maneira mais robusta as fontes de multifractalidade:

- Filtros de *low-pass* (passa-baixa) e *high-pass* (passa-alta): Um filtro passa-baixa é um filtro que impede a passagem de sinais abaixo de uma certa frequência de corte e atenua os sinais acima dessa frequência. Ao remover essas frequências, o filtro cria um efeito de suavização. Ou seja, o filtro produz mudanças lentas nos valores de saída para facilitar a visualização de tendências e o aumento da relação sinal-ruído com mínimo de degradação do sinal. Em síntese, suavizar para reduzir a variação de flutuações de curto prazo através do filtro de passa-baixa, enquanto o exame de resíduos após ajustar um modelo de regressão para reduzir as tendências de longo prazo é através de um filtro passa-alta.
- *Surrogate data*: esse processo nos revela as fontes multifractais presentes nas séries temporais. Ele consiste de duas etapas: i) *shuffling*, que preserva as distribuições dos incrementos, mas destrói as correlações temporais, isto é, retira a memória do sistema; ii) *phase randomization*, que preserva as amplitudes da transformada de Fourier, mas randomiza a fase de Fourier, isto é, elimina a não-linearidade mantendo somente as propriedades lineares da série temporal original

- d) Classificação das séries temporais

Com base nos procedimentos descrito acima, nós teremos um material de qualidade para efetivamente classificar as séries temporais. Deste modo, a classificação das séries temporais do satélite Kepler será dada partindo dos efeitos produzidos por duas grandes categorias:

- Fenômenos com estruturas de *short-term* (curta-duração). Onde estão presentes as diferentes categorias do ruído astrofísico (com e sem memória);
- Fenômenos com tendências de *long-term* (longo-termo). Onde encontramos os fenômenos de natureza (quase) periódica com assinatura semi-senoidal.

Como um exemplo, para estrelas do tipo solar, o sinal estelar varia em diferentes escalas de tempo. Em ordem crescente de escala de tempo, temos as perturbações devido as oscilações em diferentes modos de vibração do envelope externo e o fenômeno de granulação devido ao fluxo convectivo que geram o ruído astrofísico. Além disso, temos os fenômenos associados à assinatura determinística do sinal, tais como, a modulação devido às manchas ou a passagem de um planeta pelo disco estelar.

4 DADOS OBSERVACIONAIS

4.1 A Missão Kepler

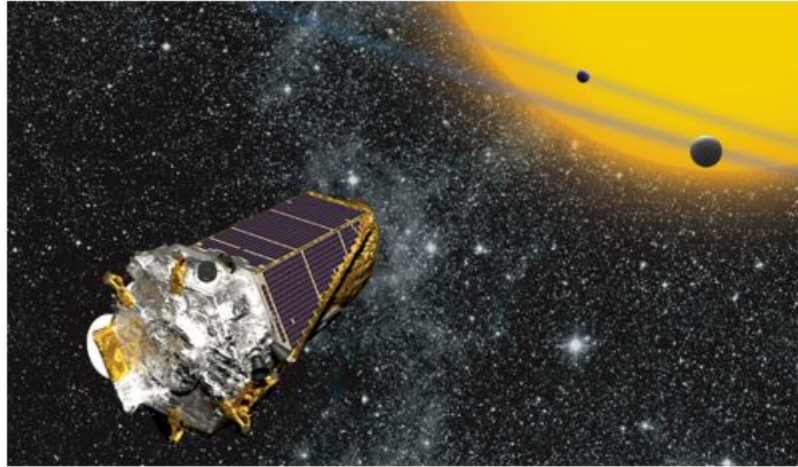
A missão Kepler foi designada para determinar a frequência de planetas tipo Terra na zona de habitabilidade para estrelas tipo solar (anãs do tipo espectral F,G,K e M) usando o método de trânsito para detectar exoplanetas. O Kepler é designado como uma câmera Schmidt com uma abertura primária de 0,95 metros observando no ótico (cf. Kepler Instrument Handbook KSCI-19033). O plano focal consiste de 43 câmeras de CCD de 2000X1024 pixels produzindo uma imagem de 3,98 arcsec por pixel. O sinal em cada pixel sobre o CCD é medido em um intervalo conhecido por tempo de integração ou frame que consiste de 0,520 segundos. O Kepler gera dois tipos de dados: um de longa cadência (LC) e outro de curta cadência (CC). Os dados de LC são integrados por 270 frames (29,430 minutos), enquanto os de CC são integrados sobre 9 frames (0,981 minutos).

Recentemente, a missão Kepler K2 veio expandir as observações do programa Kepler, no entanto devido a um problema instrumental essa expansão está limitada a observações no plano elíptico. A missão K2 irá realizar uma série de campanhas de longa-cadência para coletar dados para a comunidade astrofísica, essa série de missões irá propiciar uma maior compreensão dos processos de formação de planetas, estrelas jovens, atividade estelar, evolução estelar e ciência extragaláctica. Em junho 2014, K2 tornou-se plenamente operacional, a precisão fotométrica é equivalente a do Kepler, com um desempenho fotométrico previsto de 50 ppm (razão sinal/ruído de 6,5 horas para uma estrela G de magnitude 12), a missão K2 oferece observações simultâneas de muitos objetos com uma precisão da ordem de magnitude melhor do que é viável a partir do solo.

Os aproximados de 80 dias de campanhas de observação propostos permitem uma pesquisa única no campo da exoplanetologia, na qual preenche as lacunas de duração e sensibilidade entre as missões Kepler e Tess (Transiting Exoplanet Survey Satellite), e oferece identificação de parâmetros do exoplaneta necessária por espectroscopia de transmissão JWST (James Webb Space Telescope). A missão Kepler foi projetada pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) especificamente para a busca por exoplanetas em uma região da Via Láctea denotada Constelação de Lira ((KOCH et al., 2010)). Essa missão foi iniciada em 2009 e até maio de 2018 confirmou 2339 exoplanetas (<https://archive.stsci.edu/kepler/>). Para a realização dessa busca, a missão Kepler conta com um telescópio com um espelho primário de 1,4 metros de diâmetro e orbita não em torno da Terra, mas em torno do Sol, esse tipo de órbita possui a vantagem de que a Terra nunca cobre o campo de visão do telescópio, evitando

assim dados não igualmente espaçados na fotometria, além de mantê-lo, claro, longe da poluição luminosa dos grandes centros urbanos que poderiam contaminar os dados observados.

Figura 5 – Representação artística do telescópio Kepler.



Fonte: NASA Ames/W Stenzel.

Todos esses dados podem ser encontrados no site oficial da NASA dedicado ao projeto Kepler (<http://kepler.nasa.gov/>). A Figura 5 apresenta uma ilustração artística do telescópio Kepler.

4.2 Descrição da Amostra selecionada

A missão Kepler realizou 17 séries observacionais de ~ 90 dias, cada uma delas nomeada por Quarters, composta por cadência longa (amostragem de dados a cada 29,4 min (JENKINS et al., 2010)) e curta cadência (amostragem a cada 59 seg) observações (CLEVE et al., 2010). Discussões detalhadas do arquivo público podem ser encontradas em muitas publicações da equipe Kepler, por exemplo, (BORUCKI et al., 2010), (BATALHA et al., 2010), (KOCH et al., 2010) e (BASRI et al., 2010). Quanto ao formato de dados, o arquivo Kepler fornece dados de fotometria de abertura simples (processados usando um tratamento padrão que remove apenas artefatos espaciais mais relevantes) e dados de Pré-Search Data Conditioning (PDC) que são processados usando um tratamento refinado baseado no pipeline Kepler (JENKINS et al., 2010), que remove mais efeitos térmicos e cinemáticos decorrentes da operação de espaçonaves (CLEVE; CALDWELL, 2009).

Baseado em uma amostra de trabalho e procedimento adotado por (REINHOLD; REINERS; BASRI, 2013), construímos nossas curvas de luz usando apenas dados de cadência longa do terceiro trimestre (Q03). Os dados do terceiro trimestre foram tratados como em (BÁNYAI et al., 2013) e (MEDEIROS et al., 2013). Como as curvas de luz PDC são, em geral, séries de boa qualidade, apenas uma pequena quantidade de tratamento manual foi necessária, artefatos e tendências instrumentais para apenas 13 estrelas da amostra completa

foram removidos. Além disso, a inspeção visual de toda a amostra resultou na retirada de 20 estrelas da amostra solar, devido a maiores efeitos sistemáticos.

Com base nos procedimentos acima, nossa amostra de trabalho final consistiu de 651 estrelas do tipo solar com propriedades físicas semelhantes ao do Sol, definidos por T_{eff} entre 5579 e 5979 K, $\log g$ entre 3,94 e 4,94 dex e períodos de rotação entre 24 e 34 dias. Em nossa amostra, 130 estrelas apresentaram assinaturas de rotação diferencial, medidas por (REINHOLD; REINERS; BASRI, 2013). O intervalo de tempo para a seleção acima foi baseado nos resultados de (LANZA et al., 2003), para os quais os períodos rotacionais do Sol estão entre 24,5 dias (equador) e 33,5 dias (polos), valores de períodos rotacionais estimados usando uma função de autocorrelação foram retirados de (REINHOLD; REINERS; BASRI, 2013), temperatura e gravidade foram obtidas de (PINSONNEAULT et al., 2012) (temperatura corrigida do SDSS e gravidade da superfície da CCI). Essas restrições foram escolhidas para que nossos resultados não apresentassem inconsistências devido à massa, temperatura ou gravidade efetiva.

As análises multifractais (como explicado no capítulo anterior) refletem padrões detalhados de como diferentes níveis de variabilidade interagem, dominam ou sombream, bem como o comportamento geral. Assim, definimos um compromisso entre as necessidades tamanho da amostra e a precisão das medidas rotacionais. Esse equilíbrio nos leva à presente amostra.

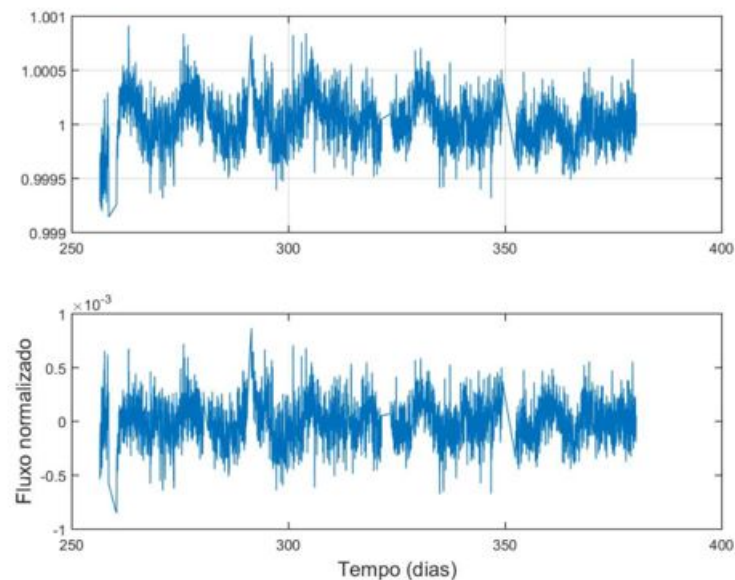
Nós dividimos a referida amostra em dois grupos: estrelas cuja análise multifractal apresentou assimetria esquerda, ou seja, $0 < A < 1$ e aquelas que apresentaram assimetria direita $A > 1$. Ao longo da nossa pesquisa verificamos que os perfis das caudas esquerda e direita separam nossa amostra em duas distintas populações. Aquela que apresenta uma cauda esquerda mais profunda está associada às curvas de luz que a fase inativa é dominante, enquanto que a cauda direita mais profunda está relacionada ao efeito da modulação rotacional. É importante lembrar que as fases intituladas “ativa” e “inativas” se referem à taxa de sinal/ruído (SR) da curva. Nós estabelecemos que SR elevados estão associados aos efeitos da modulação e para SR muito pequeno o ruído astrofísico (um ruído de origem física) domina a estrutura da curva de luz. Essa discussão será mais aprofundada no próximo capítulo.

Como já foi observado por (FREITAS et al., 2017), existem alguns indicadores multifractais que podem estar relacionados ao período de rotação. Como a amostra descrita acima está restrita a uma faixa pequena de período em torno dos valores solares, nós selecionamos uma outra amostra, seguindo os mesmos critérios de temperatura e gravidade solar, para facilitar uma possível correlação entre os indicadores multifractais e os parâmetros estelares. Deste modo, nós também selecionamos uma amostra de 100 estrelas, dentre elas, 29 estrelas com período de rotação abaixo do valor solar, 45 estrelas com rotação solar e 26 com período de rotação acima do valor do Sol que é em média 27,04 dias (ver Figura 17). Não incluímos todas as 651 estrelas mencionadas anteriormente devido à forte densidade de ponto nessa região que

estatisticamente iria prejudicar a análise via regressão linear. Para esse fim, nós segregamos a subamostra de estrelas com período solar por meio da densidade, estabelecendo a densidade solar de $1,41 \pm 0,1 g/cm^3$ como o intervalo de referência. Em síntese, essa amostra será usada para calibrar os parâmetros multifractais que apresentam forte correlação com o período de rotação.

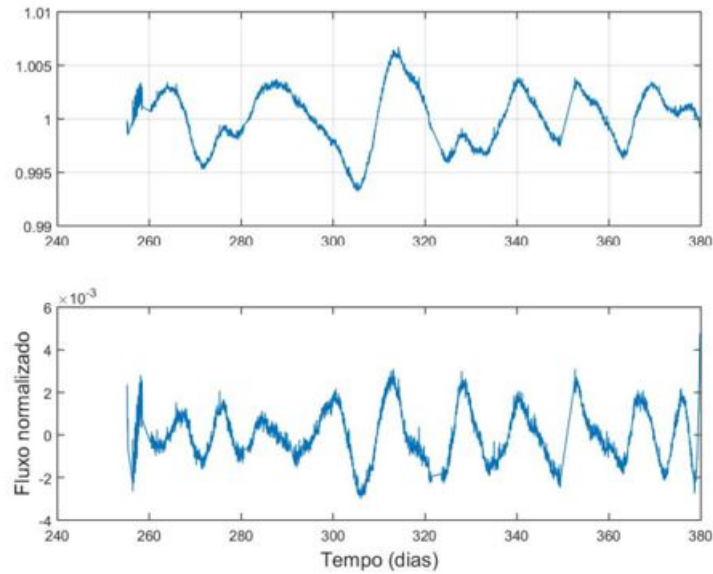
Essas amostras serão úteis para realizar um estudo sem precedente sobre características da atividade magnética em diferentes escalas, desde efeitos da ordem de horas, como é caso do ruído de cintilação (*flicker noise*), até o ciclo de atividade magnética, passado por eventuais explosões de flares e dinâmica de manchas na fotosfera. Nós detalharemos melhor essa calibração no próximo capítulo.

Figura 6 – Curva de luz para KIC003438815Q03 (Quarter03 inativo). A figura do topo apresenta flutuações de origem instrumental. Para eliminar esse efeito, aplicamos um ajuste polinomial de sexta-ordem que remove essa tendência e gera a figura abaixo. Nessa figura está em destaque os flares que são os picos em destaque.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 7 – Curva de luz para KIC001027740Q03 (Quarter03 ativo). A figura do topo apresenta flutuações de origem instrumental. Para eliminar esse efeito, aplicamos um ajuste polinomial de sexta-ordem que remove essa tendência e gera a figura abaixo.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Tabela 1 logo abaixo, apresenta os resultados da análise geométrica do espectro multifractal para os índices A , $\Delta\alpha$, $\Delta f_L(\alpha)$, $\Delta f_R(\alpha)$ e H para quarter 03 de todas as estrelas com assimetria esquerda da amostra. Os parâmetros estelares T_{eff} (K), $\log g$ (cm/s²), M (M_{\odot}) e Prot (dias) também estão presentes.

Uma amostra da tabela com os índices multifractais das estrelas que apresentaram assimetria lateral direita se encontra no apêndice A. Figuras que ilustram as relações entre esses parâmetros estão no apêndice B.

Tabela 1 – Resultados da análise geométrica do espectro multifractal e alguns parâmetros estelares.

KIC	A	$\Delta\alpha$	$\Delta f_L(\alpha)$	$\Delta f_R(\alpha)$	H	T_{eff} (K)	$\log g$ (cm/s ²)	M (M_{\odot})	Prot (dias)
1432022	0,47	0,40	0,54	0,18	0,75	5483	4,77	0,96	24,63
2452505	0,82	0,34	0,27	0,28	0,80	5458	4,55	0,95	25,65
2975849	0,75	0,45	0,46	0,35	0,69	5444	4,91	0,95	25,88
3438815	0,56	0,27	0,28	0,21	0,76	5535	4,12	0,97	28,61
3453619	0,36	0,16	0,24	0,18	0,85	5441	4,44	0,95	27,88
3540780	0,07	0,18	0,37	0,07	0,72	5383	4,90	0,93	26,70
3935496	0,69	0,30	0,30	0,18	0,72	5383	4,52	0,93	27,48
4274367	0,88	0,23	0,23	0,22	0,72	5415	4,75	0,94	28,49
4457722	0,74	0,41	0,41	0,32	0,73	5480	4,76	0,96	25,03
4477753	0,70	0,33	0,42	0,31	0,80	5595	4,44	0,99	24,58
4543879	0,49	0,32	0,47	0,22	0,69	5501	4,14	0,97	24,16
4741260	0,10	0,10	0,33	0,04	0,75	5497	4,71	0,96	31,78
4752155	0,17	0,15	0,43	0,01	0,78	5596	4,22	0,99	27,18

4752284	0,77	0,29	0,29	0,28	0,80	5575	4,64	0,98	29,42
4757871	0,51	0,26	0,26	0,25	0,81	5367	4,55	0,93	30,12
4759349	0,25	0,42	0,63	0,17	0,69	5457	4,57	0,95	31,69
4761142	0,96	0,99	0,71	0,62	0,60	5456	4,45	0,95	24,86
4838860	0,29	0,24	0,00	0,17	0,85	5533	4,54	0,97	33,41
4851356	0,67	0,30	0,25	0,29	0,77	5577	4,44	0,99	27,14
4920474	0,05	0,07	0,00	0,07	0,80	5373	4,72	0,93	27,21
4928225	0,80	0,38	0,35	0,33	0,69	5451	4,49	0,95	30,26
4930364	0,11	0,13	0,00	0,13	0,75	5429	4,56	0,95	30,08
5006502	0,64	0,49	0,55	0,33	0,73	5530	4,55	0,97	29,29
5198141	0,01	0,11	0,31	0,06	0,76	5513	4,44	0,97	29,24
5201089	0,02	0,12	0,38	0,12	0,81	5439	4,39	0,95	28,16
5257265	0,94	0,27	0,22	0,21	0,76	5489	4,41	0,96	24,20
5263998	0,93	0,70	0,53	0,49	0,75	5550	4,36	0,98	25,37
5525733	0,86	0,34	0,28	0,34	0,76	5434	4,55	0,95	24,20
5530623	0,53	0,54	0,52	0,26	0,80	5702	4,59	1,02	24,06
5685446	0,73	0,09	0,00	0,03	0,72	5532	4,27	0,97	33,47
5707706	0,74	0,40	0,32	0,37	0,75	5444	4,85	0,95	26,94
5978312	0,70	0,33	0,38	0,29	0,71	5416	4,34	0,94	27,02
6048648	0,71	0,17	0,24	0,24	0,67	5485	4,73	0,96	25,46
6142317	0,90	0,24	0,18	0,24	0,85	5487	4,52	0,96	27,72
6197974	0,92	0,43	0,35	0,36	0,75	5622	4,53	1,00	30,47
6205045	0,63	0,21	0,31	0,31	0,79	5536	4,51	0,97	30,68
6356556	0,32	0,37	0,45	0,19	0,74	5648	4,47	1,00	24,10
6358701	0,67	0,25	0,21	0,22	0,77	5675	4,83	1,01	24,84
6363603	0,17	0,22	0,35	0,06	0,66	5440	4,83	0,95	26,83
6526330	0,03	0,28	0,00	0,30	0,78	5626	4,71	1,00	25,56
6608590	0,96	0,47	0,39	0,37	0,73	5590	4,04	0,99	24,53
6955484	0,65	0,51	0,62	0,52	0,77	5484	4,63	0,96	26,06
6960242	0,68	0,39	0,34	0,30	0,74	5336	4,36	0,92	24,93
7106335	0,91	0,35	0,36	0,31	0,79	5529	4,60	0,97	25,41
7185607	0,83	0,86	0,80	0,65	0,58	5519	4,05	0,97	27,76
7284385	0,64	0,51	0,49	0,38	0,86	5623	4,56	1,00	26,35
7351854	0,71	0,20	0,00	0,03	0,96	5378	4,61	0,93	28,91
7459381	0,60	0,21	0,31	0,12	0,79	5411	4,26	0,94	26,19
7518861	0,21	0,29	0,39	0,27	0,767	5519	4,28	0,97	24,00
7522723	0,62	0,18	0,22	0,23	0,74	5549	4,51	0,98	26,97
7769268	0,77	0,32	0,41	0,24	0,71	5529	4,25	0,97	24,35
7904317	0,16	0,07	0,00	0,07	0,81	5620	4,42	1,00	25,80
7953983	0,72	0,59	0,55	0,42	0,64	5521	4,44	0,97	24,06
8013694	0,71	0,28	0,20	0,14	0,69	5501	4,58	0,97	26,17
8328688	0,50	0,10	0,24	0,22	0,79	5500	4,40	0,96	24,01
8351772	0,89	0,51	0,44	0,37	0,74	5415	4,75	0,94	26,76
8364359	0,68	0,45	0,42	0,23	0,76	5643	4,60	1,00	24,53
8378549	0,52	0,25	0,31	0,16	0,75	5685	4,31	1,02	26,91
8493268	0,46	0,33	0,41	0,19	0,68	5422	4,50	0,94	27,27
8555291	0,02	0,11	0,00	0,14	0,75	5429	4,69	0,95	28,72

8618052	0,41	0,31	0,39	0,24	0,80	5375	4,56	0,93	24,33
8682111	0,04	0,13	0,00	0,16	0,82	5653	4,63	1,01	33,08
8718439	0,92	0,30	0,28	0,31	0,77	5480	4,43	0,96	25,77
8824937	0,32	0,48	0,61	0,36	0,63	5441	4,82	0,95	29,03
8962193	0,05	0,15	0,31	0,08	0,74	5383	4,72	0,93	27,49
9033022	0,60	0,19	0,34	0,22	0,66	5594	4,65	0,99	24,09
9137580	0,95	0,37	0,37	0,34	0,67	5530	4,41	0,97	32,23
9141582	0,94	0,44	0,32	0,43	0,77	5504	4,55	0,97	24,56
9142489	0,71	0,27	0,37	0,29	0,71	5650	4,72	1,01	25,20
9201790	0,88	0,39	0,41	0,43	0,75	5503	4,48	0,97	26,06
9203379	0,85	0,39	0,32	0,25	0,69	5608	4,22	0,99	32,59
9226624	0,89	0,31	0,28	0,42	0,74	5451	4,80	0,95	24,66
9327014	0,15	0,12	0,29	0,30	0,78	5657	4,32	1,01	27,63
9367979	0,56	0,26	0,33	0,25	0,79	5441	4,63	0,95	24,90
9411735	0,66	0,26	0,24	0,21	0,78	5435	4,84	0,95	28,06
9451248	0,02	0,15	0,36	0,09	0,81	5433	4,50	0,95	33,02
9601379	0,75	0,42	0,35	0,27	0,69	5420	4,48	0,94	26,71
9650445	0,59	0,46	0,59	0,28	0,66	5425	4,67	0,94	30,33
9653654	0,55	0,46	0,59	0,28	0,58	5602	4,56	0,99	29,54
9657969	0,81	0,33	0,29	0,22	0,76	5478	4,75	0,96	26,54
9702040	0,60	0,38	0,38	0,27	0,72	5508	4,58	0,97	28,53
9725697	0,69	0,29	0,29	0,31	0,74	5629	4,39	1,00	28,25
9761029	0,45	0,22	0,32	0,14	0,62	5438	4,72	0,95	29,82
9836337	0,67	0,43	0,38	0,24	0,70	5537	4,42	0,97	27,55
9880497	0,07	0,22	0,49	0,10	0,71	5521	4,56	0,97	28,26
9905599	0,20	0,24	0,40	0,05	0,74	5476	4,57	0,96	27,61
9967449	0,71	0,27	0,25	0,50	0,88	5527	4,48	0,97	30,14
9967804	0,52	0,25	0,34	0,17	0,68	5636	4,36	1,00	26,50
10154991	0,53	0,38	0,40	0,24	0,73	5556	4,56	0,98	26,90
10155784	0,88	0,31	0,33	0,31	0,78	5650	4,65	1,01	32,06
10192060	0,01	0,15	0,35	0,09	0,92	5409	4,41	0,94	27,86
10279177	0,89	0,56	0,57	0,46	0,69	5499	4,70	0,96	25,11
10281318	0,70	0,48	0,44	0,26	0,74	5568	4,77	0,98	31,08
10281465	0,99	0,37	0,30	0,35	0,76	5597	4,50	0,99	26,28
10284812	0,91	0,27	0,20	0,21	0,78	5391	4,67	0,94	29,40
10397453	0,98	0,50	0,44	0,51	0,74	5572	4,76	0,98	24,35
10398586	0,00	0,10	0,31	0,10	0,70	5658	4,63	1,01	26,24
10418513	0,68	0,20	0,23	0,20	0,70	5487	4,66	0,96	28,87
10597759	0,78	0,36	0,43	0,32	0,69	5527	4,55	0,97	24,49
10667595	0,89	0,47	0,35	0,33	0,73	5512	4,57	0,97	24,99
10753573	0,50	0,29	0,29	0,16	0,77	5498	4,71	0,96	25,63
10785271	0,01	0,17	0,48	0,06	0,78	5620	4,51	1,00	24,61
10794405	0,18	0,18	0,23	0,06	0,85	5479	4,52	0,96	24,32
10862542	0,23	0,17	0,30	0,13	0,73	5629	4,37	1,00	31,39
10863638	0,03	0,20	0,41	0,12	0,77	5574	4,35	0,98	26,05

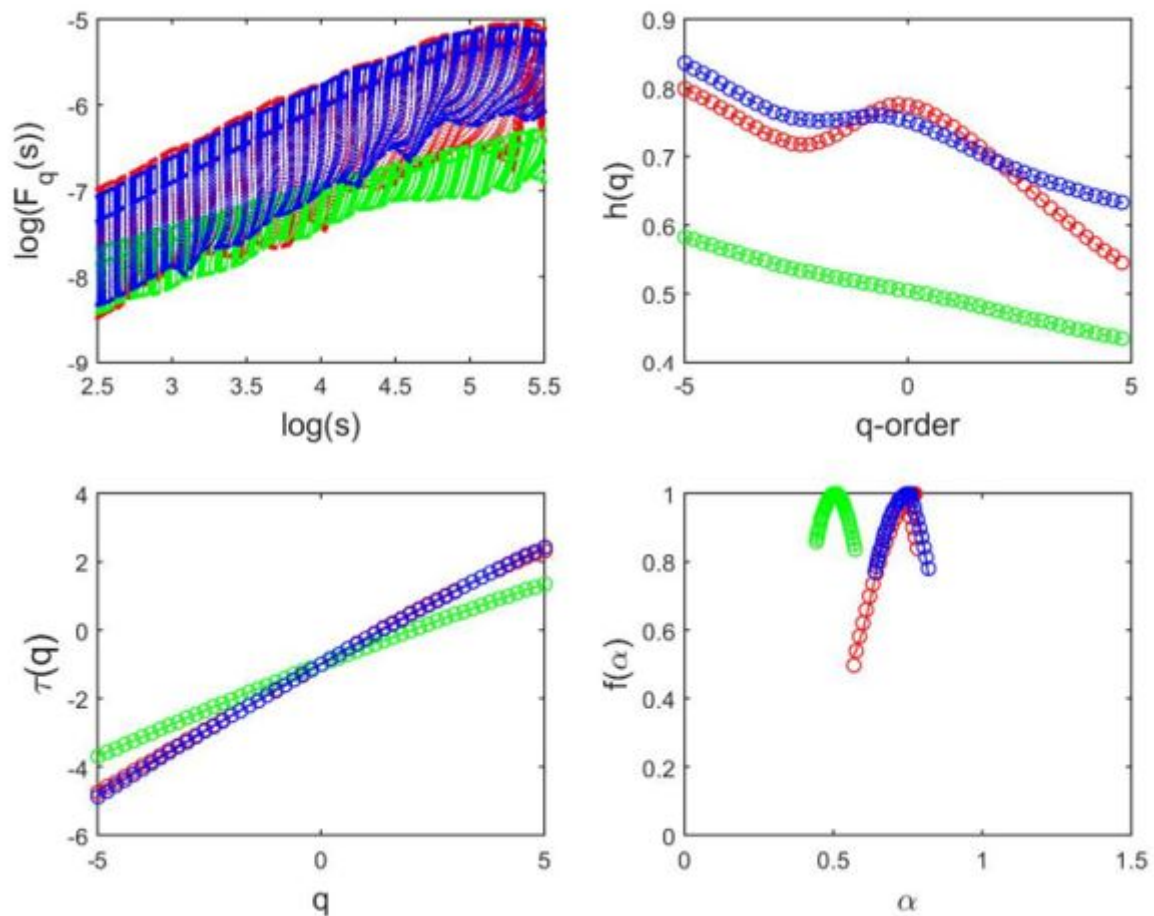
10876483	0,11	0,07	0,24	0,02	0,71	5439	4,63	0,95	25,29
10904082	0,50	0,23	0,27	0,19	0,76	5422	4,36	0,94	25,00
10972623	0,84	0,39	0,22	0,27	0,77	5608	4,48	0,99	26,42
11069435	0,55	0,33	0,38	0,14	0,80	5585	4,55	0,99	28,92
11084847	0,87	0,18	0,21	0,22	0,81	5399	4,71	0,94	25,65
11092105	0,70	0,76	0,78	0,41	0,70	5428	4,52	0,95	25,81
11125856	0,33	0,20	0,00	0,09	0,75	5369	4,53	0,93	29,27
11134641	0,34	0,22	0,31	0,04	0,71	5545	4,63	0,98	26,64
11145398	0,90	0,48	0,40	0,42	0,87	5606	4,29	0,99	24,69
11297610	0,78	0,22	0,20	0,17	0,74	5444	4,87	0,95	30,17
11401162	0,07	0,25	0,00	0,18	0,86	5788	4,65	1,04	25,06
11413690	0,67	0,48	0,43	0,26	0,69	5626	4,77	1,00	24,24
11455532	0,01	0,14	0,00	0,17	0,84	5415	4,47	0,94	27,08
11570683	0,57	0,34	0,37	0,22	0,78	5385	4,54	0,93	24,55
11607439	0,90	0,18	0,08	0,17	0,82	5626	4,31	1,00	29,03
11662834	0,10	0,14	0,36	0,08	0,80	5533	4,61	0,97	32,15
11719274	0,97	0,38	0,25	0,27	0,73	5484	4,59	0,96	25,12
11755056	0,85	0,29	0,38	0,31	0,84	5594	4,50	0,99	28,33
11775609	0,01	0,10	0,28	0,09	0,77	5444	4,48	0,95	26,63
11819448	0,79	0,44	0,37	0,21	0,70	5446	4,66	0,95	26,63
11918114	0,35	0,26	0,42	0,24	0,70	5484	4,75	0,96	25,09
11924290	0,43	0,26	0,27	0,15	0,81	5400	4,53	0,94	26,07
11954016	0,76	0,20	0,15	0,16	0,74	5569	4,55	0,98	24,29
12018520	0,98	0,27	0,23	0,21	0,81	5498	4,59	0,96	32,34
12206923	0,50	0,22	0,23	0,11	0,75	5504	4,65	0,97	26,04
12208637	0,46	0,16	0,22	0,28	0,81	5478	4,67	0,96	27,10
12215811	0,95	0,47	0,29	0,30	0,80	5363	4,57	0,93	30,35
12400712	0,39	0,23	0,26	0,13	0,75	5537	4,59	0,97	25,74

Fonte: Elaborada pelo autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

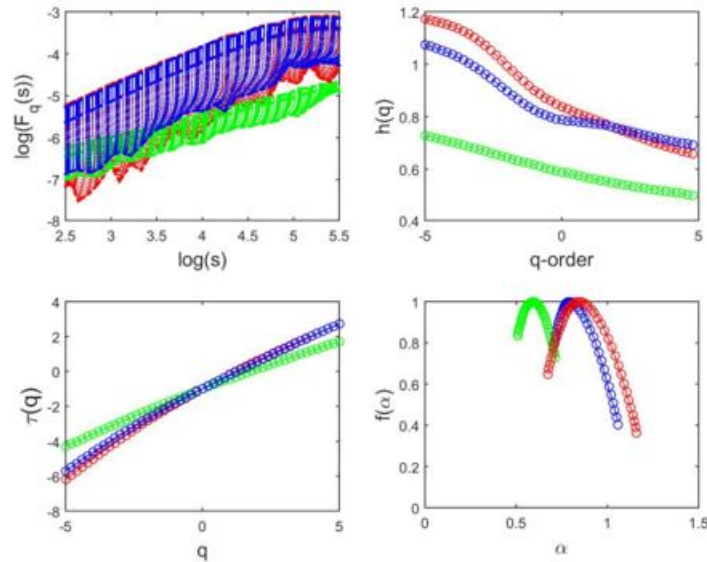
Em primeiro lugar, nós calculamos todos os parâmetros multifractais seguindo o procedimento apontado no capítulo sobre a análise Multifractal. Em seguida, para um maior detalhamento separamos o resultado da aplicação do método MFDMA para a série original e os resultados para o espectro multifractal das séries shuffled e randomizadas. Uma descrição gráfica dessa análise é encontrada na Figura 8, Figura 9 e Figura 10 abaixo, onde o espectro multifractal é o principal resultado na qual derivamos os seis índices destacados na Tabela 1.

Figura 8 – Descrição detalhada dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC003438815 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série temporal original; VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontra no capítulo sobre análise multifractal.



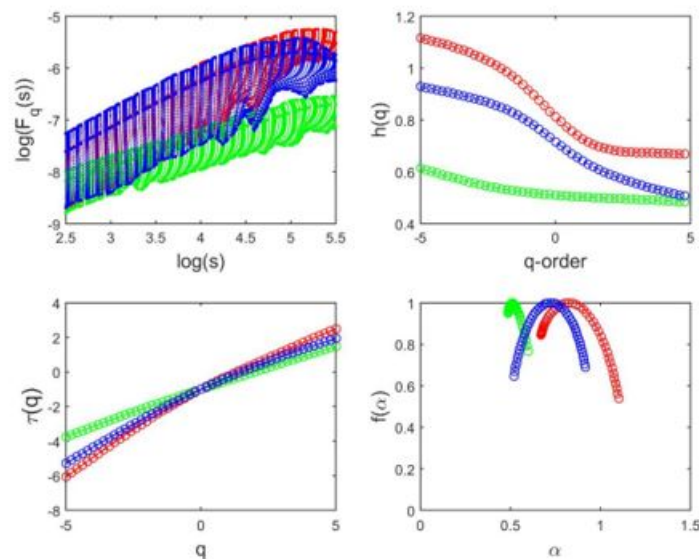
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 9 – Descrição detalhada dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC 010328898 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série temporal original; VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontra no capítulo sobre análise multifractal.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 10 – Descrição dos passos apontados no capítulo sobre análise multifractal para a estrela KIC 009203379 (quarter03 inativo). Nessa figura encontram-se em: VERMELHO – a série temporal original; em VERDE – a série temporal shuffled e, AZUL – a série temporal onde a fase da transformada de Fourier é randomizada. Uma descrição mais completa do procedimento adotado para gerar as séries em verde e azul pode ser encontra no capítulo sobre análise multifractal.

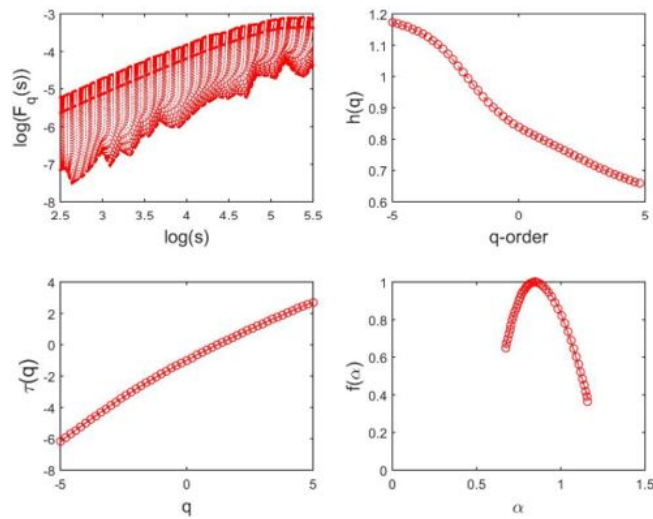


Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Figura 11 e a Figura 12, apresentam a série original da Figura 9 e Figura 10 respectivamente, os painéis do canto superior esquerdo mostram o comportamento de escala

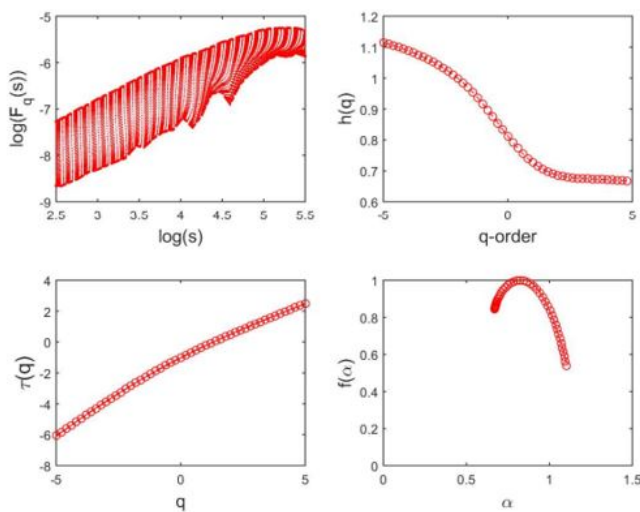
da função de flutuação média, vale lembrar a relação entre a função de flutuação média e o fator de escala do método MFDMA dada por: $F_q(s) \approx s^h(q)$ Equação 3.7. As inclinações nas curvas mostram que H apresenta valor distinto para diferentes valores do fator de escala, para um comportamento fractal da série se esperaria apenas um valor para o expoente de Hurst. Essa dependência da função de flutuação com o expoente de escala aponta para um comportamento multifractal da série.

Figura 11 – Comportamento de escala e relações entre os expoentes para série temporal original KIC 010328898 (quarter03 inativo).



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 12 – Comportamento de escala e relações entre os expoentes para série temporal original KIC 009203379 (quarter03 inativo).



Fonte: Elaborada pelo Autor.

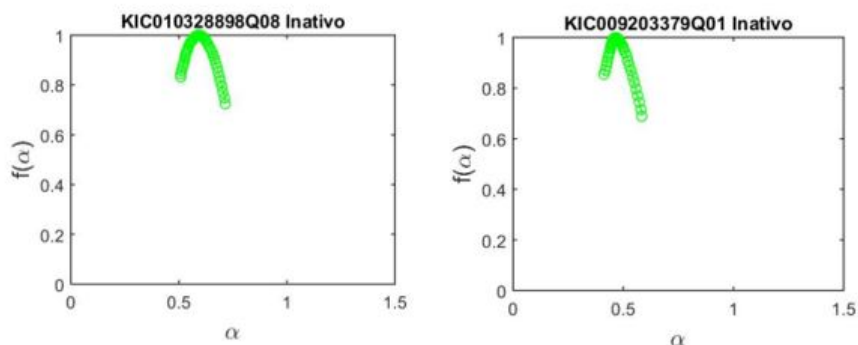
No canto superior direito apresentamos a relação entre o fator de escala e os valores de q . A independência do expoente de Hurst com os valores de q para um comportamento fractal da série retornaria uma reta no gráfico mostrado nas figuras. No entanto, vemos uma forte dependência de H com os valores de q , o que evidencia mais uma vez o comportamento multifractal da série.

O expoente de escala multifractal de Renyi $\tau(q)$ apresentado no capítulo de análise multifractal guarda relação com o expoente de Hurst generalizado conforme mostra a Equação 3.8 que recordamos aqui: $\tau(q) = qh(q) - 1$. De forma que, espera-se para um comportamento multifractal uma dependência de $\tau(q)$ com os valores de q , as curvas nos painéis dos cantos inferiores esquerdos mostram tal dependência, no caso particular de séries fractais ($q = 2$) esses expoentes apresentariam uma relação de proporcionalidade, que seria indicado como uma reta no gráfico.

Nos painéis dos cantos inferiores direitos apresentamos a relação entre o expoente de Hölder $\alpha(q)$ e o espectro de singularidade $f(\alpha)$ descritos conforme as Equações 3.9 e 3.10, os gráficos apresentados nas figuras mostram uma faixa de valores para $\alpha(q)$, esse é mais um indicativo de comportamento multifractal, visto que para uma série fractal ($q = 2$) teríamos apenas um valor para esse expoente. Considerando os valores máximos e mínimos de $\alpha(q)$ temos um parâmetro importante na descrição do comportamento multifractal da série, é o grau de multifractalidade $\Delta\alpha$ dado pela Equação 3.12.

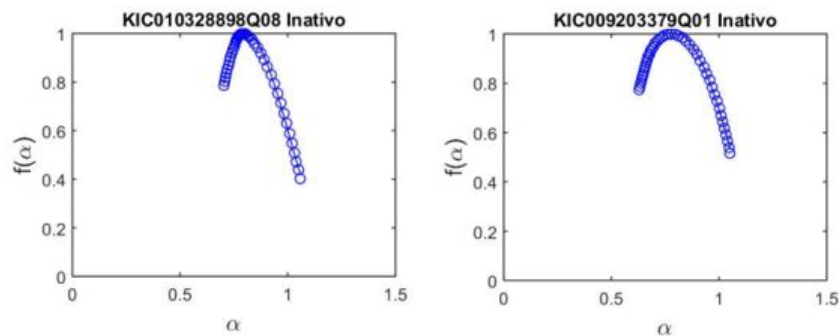
Nossos resultados mostram que todas as séries temporais apresentam assinatura multifractal. A Figura 8, a Figura 9 e a Figura 10 apresentam além da série original em vermelho, a série shuffled em verde e a série randomizada em azul, dada a importância do espectro multifractal na análise do comportamento multifractal, separamos (Figura 13 e Figura 14) a série shuffled e a série randomizada no painel inferior direito da Figura 9 e da Figura 10 para identificarmos e compreendermos a fonte responsável por tal comportamento multifractal.

Figura 13 – Resultado da aplicação do MFDMA após a aplicação do método Shuffling nas séries temporais correspondentes a KIC010328898Q03 (inativo) e KIC009203379Q03 (inativo).



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 14 – Resultados da aplicação do MFDMA após a aplicação da phase randomization nas séries temporais correspondentes a KIC010328898Q03 (inativo) e KIC009203379Q03 (inativo).



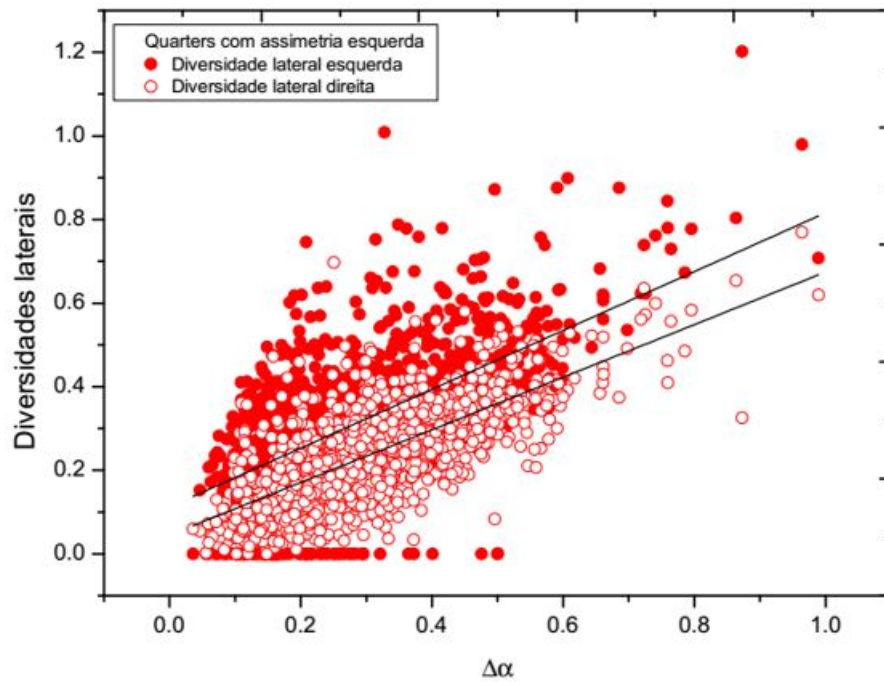
Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Figura 13 e a Figura 14 ilustram os resultados da aplicação do método MFDMA para as séries temporais shuffled e randomizadas respectivamente. Podemos ver na Figura 13 uma faixa de valores para α ou seja, um grau multifractalidade, indicando que após a reaplicação do método MFDMA na série shuffled ainda persiste embora diminuída, a presença de multifractalidade, de modo que, não apenas a presença de correlações de longo alcance associadas a comportamentos periódicos, mas também alargamento de cauda da função de distribuição de probabilidades, geralmente associada a presença de não linearidades na série temporal devem ser responsáveis pela multifractalidade das séries analisadas neste trabalho. A Figura 14 que ilustra o espectro multifractal após a aplicação da phase randomization nas séries, vemos de acordo com as análises anteriores a nítida presença de multifractalidade indicando não linearidades nas séries temporais.

A Figura 15 elaborada usando dados de todas as estrelas em estudo corrobora essa análise, mostrando que as duas fontes são quase que igualmente responsáveis pela multifractalidade. É possível perceber através das linhas de tendência uma leve vantagem da diversidade lateral direita para o aumento do grau de multifractalidade, evidenciando que as séries temporais apresentam flutuações locais de maior magnitude em escalas maiores, mas também a forte presença da diversidade lateral esquerda indica que flutuações locais de grande magnitude em pequenas escalas estão presentes.

Verificamos também que, para a amostra de estrelas identificadas com inativas, existem quarters onde uma assinatura tipo modulação rotacional aparece, como pode ser visto no quarter 03 da estrela KIC003438815. Esse comportamento nas curva de luz tem como origem os flares, cujo efeito sobre a determinação dos índices multifractais merece um estudo mais cauteloso, seria necessário primeiramente remover os pontos espúrios. como os flares são pontos isolados, seria necessário o calculo do desvio padrão da série temporal e se estabelecer para quantos sigmas haveria o corte. Isso parece simples, mas para um procedimento automático pode

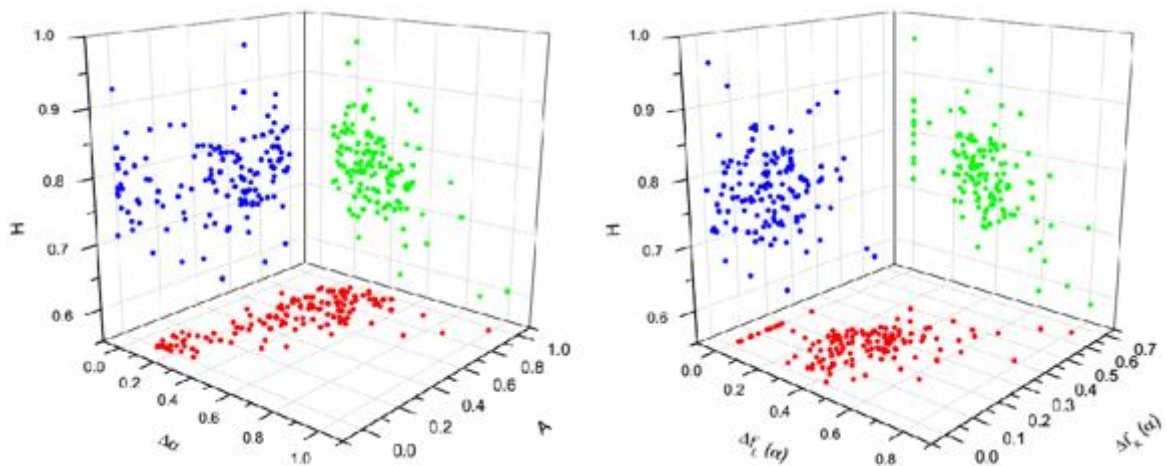
Figura 15 – Relação entre as diversidades laterais e o grau de multifractalidade. A linha em azul mostra a tendência da diversidade lateral direita enquanto que a linha em verde mostra a tendência da diversidade lateral esquerda.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

dependem de outros ajustes, como tamanho dos pequenos flares e quantidade de flares presentes na série.

Figura 16 – : Gráfico 3D de projeções nos planos dos índices multifractais.



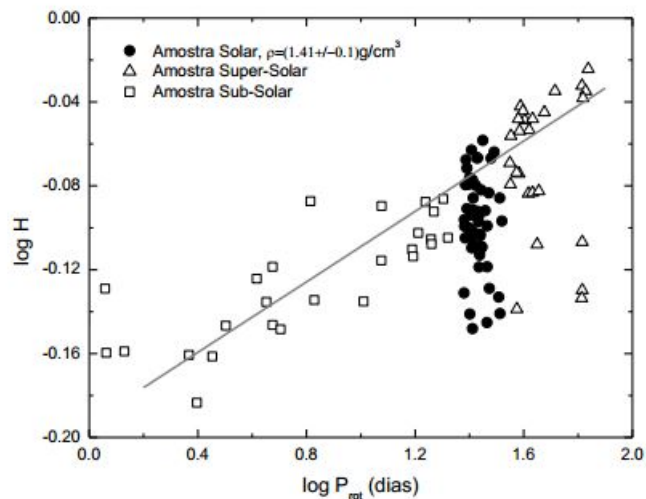
Fonte: Elaborada pelo Autor.

Apresentamos na Figura 16 as possíveis correlações entre os índices multifractais das estrelas listadas na Tabela 1. Essa tabela sumariza apenas os índices para o quarter 03 e, como podemos observar, para algumas estrelas a relação entre o expoente de Hurst e as diversidades laterais apresenta valores discrepantes em relação aos outros. Com isso, poderemos olhar com maiores detalhes as correlações investigadas.

Na busca de estabelecer uma calibração geral que possa determinar o período de rotação para estrelas com fraca ou nenhuma atividade, nós usamos uma amostra de 100 estrelas com assinatura de modulação rotacional bem definida para entender como o expoente de Hurst para estrelas ativas se comporta, o tratamento dessa amostra seguiu os mesmos critérios descritos anteriormente para tratar nossos dados observacionais.

Como mostrado na Figura 17 existe uma clara tendência linear entre o expoente de Hurst e o período de rotação em escala logarítmica. Procedemos com uma regressão linear e encontramos a seguinte relação: $\log H = -(0,193 \pm 0,05) + (0,084 \pm 0,03) \log(P_{rot})$. Como isso, pretendemos entender certos detalhes sobre a atividade magnética estelar em escalas de tempo menores que o período de rotação e que ainda devem existir mesmos quando a estrela se encontra em baixa atividade.

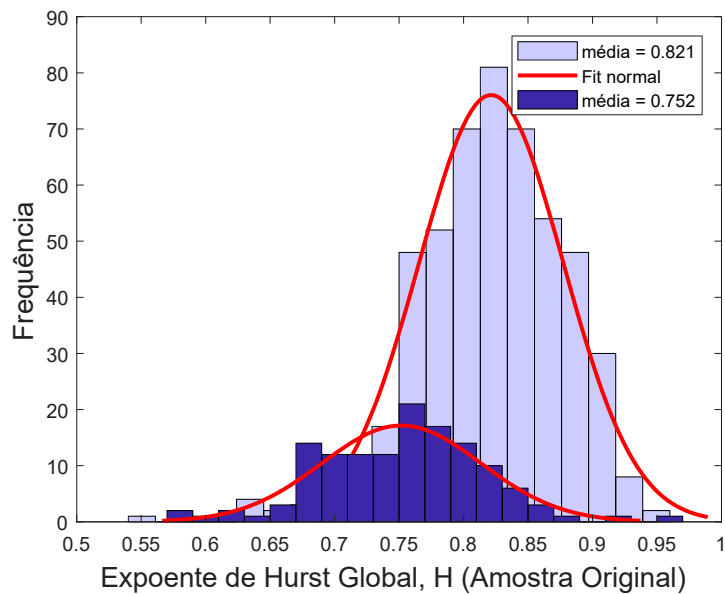
Figura 17 – Correlação entre o expoente de Hurst e o período de rotação para a amostra de 100 estrelas com períodos de rotação que vão desde de estrelas de baixa a alta rotação como indicado na legenda da figura. A amostra de estrelas com período solar foi refinada para um intervalo de densidade entre mais ou menos 0,1 da densidade solar. A reta presente na figura é resultado de uma regressão linear onde a inclinação da reta é $0,084 \pm 0,03$.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Figura 18 mostra o perfil do histograma das estrelas que são definidas na presente dissertação como "ativa" e "inativa". A atividade ou a inatividade foi definida seguindo critério de que o espectro multifractal das estrelas que se encontram na fase ativa apresentam uma longa cauda direita e uma cauda esquerda curta. De tal forma que o parâmetro de assimetria

Figura 18 – Histograma dos expoentes de Hurst para as amostras segregadas pelo parâmetro de assimetria.



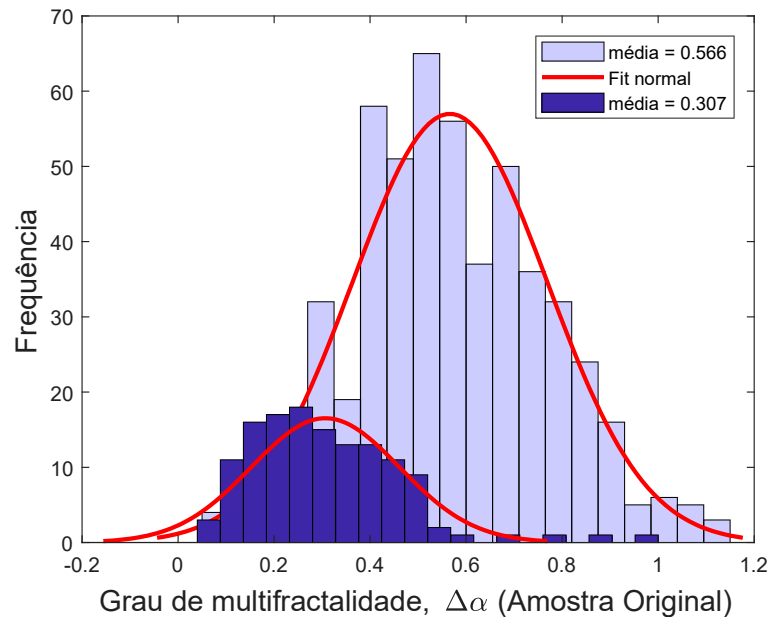
A é maior do que a unidade. O caso inverso se refere às estrelas que se encontram na fase inativa. Verificamos por inspeção visual que a grande maioria das estrelas apresentam quarters com a mistura dessas fases ou apenas na fase ativa. Isso gera uma incompleta nos nossos resultados, visto que, a melhor forma era encontrar uma janela temporal mais longa para a fase inativa. A principal justificativa para isso vem do fato de que como se tratam de estrelas com propriedades solares similares, o ciclo magnético delas é esperado ser de aproximadamente 10 anos. Com uma janela de observação de aproximadamente 4 anos não é possível observar um ciclo completo e, portanto, os regimes de inatividade encontrados na nossa amostra são apenas flutuações. No entanto, nossos resultados indicam que mesmo diante de uma condição não ideal, é possível observar essa tendência e, em tese, a conclusão de que estrelas na fase inativa tendem a valores de H menor é respeitada. Em síntese, nós podemos melhorar a definição de estrela "inativa" como sendo aquelas estrelas que apresentam em sua série temporal alguma parcela sem sinal de modulação. Verificamos que aquelas estrelas com pelo menos $1/2$ da série com essa característica, pode ser considerado como "fortemente" inativa.

O histograma em azul denota as estrelas com $A \leq 1$ e o cinza representa as estrelas com $A > 1$. De acordo com a Figure 16, H e A não apresentam uma correlação significativa. No entanto, o presente histograma revela que existe uma preferência de valores de $A \leq 1$ alocarem expoentes de Hurst menores do que aqueles encontrados no regime de $A > 1$. Essa observação pode ser evidenciada pelos valores médios de H incluídos na legenda. Também é mostrado um ajuste normal, onde pode ser mostrado que o valor médio entre os histogramas são deslocados

de $\pm 0,1$. Os valores típicos dos erros de H são de $\sim 0,03$. Deste modo, somente em 3σ esse resultado pode ser descartado.

Essa dissertação tem como objetivo central investigar a atividade magnética de estrelas do campo Kepler à luz da multifractalidade. Foi mostrado em seções anteriores que os indicadores mais eficientes para entender a estrutura hierárquica de uma série temporal são o expoente de Hurst e o parâmetro de assimetria. No entanto, verificamos que as distribuições do grau de multifractalidade para as amostras ativa e inativa são diferentes.

Figura 19 – Histograma do grau de multifractalidade $\Delta\alpha$ para as amostras segregadas pelo parâmetro de assimetria.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

O histograma em azul denota as estrelas com $A \leq 1$ e o cinza representa as estrelas com $A > 1$. De acordo com a Figure 16, $\Delta\alpha$ e A não apresentam uma correlação significativa. No entanto, o presente histograma revela que existe uma preferência de valores de $A \leq 1$ alocarem valores de $\Delta\alpha$ menores do que aqueles encontrados no regime de $A > 1$. Essa observação pode ser evidenciada pelos valores médios de $\Delta\alpha$ incluídos na legenda. Também é mostrado um ajuste normal, onde pode ser mostrado que o valor médio entre os histogramas são deslocados de $\pm 0,3$. Os valores típicos dos erros de $\Delta\alpha$ são de $\sim 0,1$. Deste modo, somente em 3σ esse resultado pode ser descartado.

A Figura 19 revela que a amostra de estrelas ativas apresenta uma distribuição do grau de multifractalidade ($\Delta\alpha$) mais rica do que a distribuição para as estrelas dita inativas. Essa figura é muito importante pois ela reforça a ideia de que estrelas com baixa atividade devido às manchas estelares reduz a cauda direita do espectro multifractal. Mas outro ponto nos chamou atenção, verificamos que essa situação também afeta a cauda esquerda, deixando ela com uma

profundidade menor que a esperada. O somatório dessas condições é refletida na Figura 19. Finalmente, podemos sugerir que estrelas ativas são mais complexas multifractalmente do que as inativas.

Se efetivamente essas propriedades forem confirmadas e o comportamento do expoente de Hurst se estender para estrelas inativas, estamos criando um procedimento eficiente e automático para encontrar período de rotação de estrelas que, a priori, não seriam possíveis de serem encontrados via fotometria. Isso abre um novo campo de possibilidades na busca de informações mais relevantes sobre a atividade magnética estelar, permitindo-nos correlacionar com maior clareza fenômenos típicos como flares, fáculas e manchas, objetos de nosso estudo, com a evolução da rotação estelar.

Como uma última observação, diante da forte correlação entre o expoente de Hurst e o período de rotação observada por (FREITAS et al., 2013), nós podemos, como a nossa amostra para diferentes intervalos de período, testar a relação desses autores que segue a equação:

$$P_{rot} = P_{rot}^0 \exp\left(\frac{H - H_0}{\sigma}\right), \quad (5.1)$$

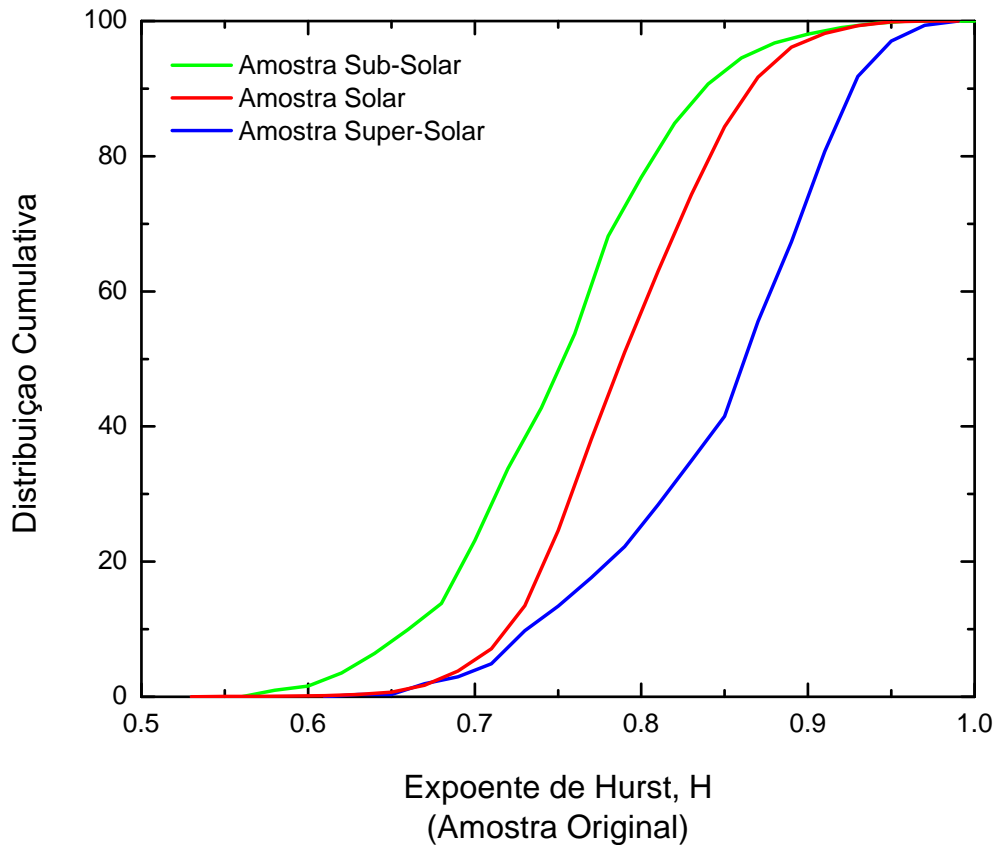
onde o período inicial $P_{rot}^0 = 0,383 \pm 0,002$ dias, o expoente de Hurst para o P_{rot}^0 é $H_0 = 0,619 \pm 0,045$ e $\sigma = 0,068 \pm 0,014$. Os autores acima citados encontraram uma correlação com $R^2 = 0,78$ e conjecturaram que o expoente de Hurst pode ser um poderoso classificador de modulação rotacional. Impulsionados por essa conjectura, resolvemos revisitar esse problema, mas com outra vertente. Essa vertente está baseada nos resultados que obtivemos aqui, principalmente aquele que indica as possíveis fontes de multifractalidade. Deste modo, na próxima seção iremos examinar de perto como a estrutura "topológica" da série temporal pode melhorar nossa interpretação acerca da relação 5.1 mencionada logo acima.

5.1 Comportamento do expoente de Hurst para um amplo espectro de período de rotação

Como último banco de resultados, foi investigado a já consolidada relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação estelar. Para isso, resolvemos verificar se existe alguma diferença entre as distribuições cumulativas para as amostras sub, super-solar e solar. A Figura 20 mostra a distribuição dessas amostras considerando os mesmos critérios para a construção dos histogramas presentes na Figura 18. Desta forma, está claro que os perfis das distribuições são distintos e seguem uma hierarquia, períodos maiores apresentam expoentes de Hurst também maiores, enquanto os menores apresentam os menores H . Esse procedimento é muito importante para treinar máquina (*Machine Learning*), ou seja, dada uma grande amostra, um simples código com custo computacional "muito barato" pode ajudar a identificar padrões

gerais entre as séries temporais.

Figura 20 – Distribuição cumulativa do expoente de Hurst global H obtido via análise multifractal. As amostras estão separadas em diferentes cores.

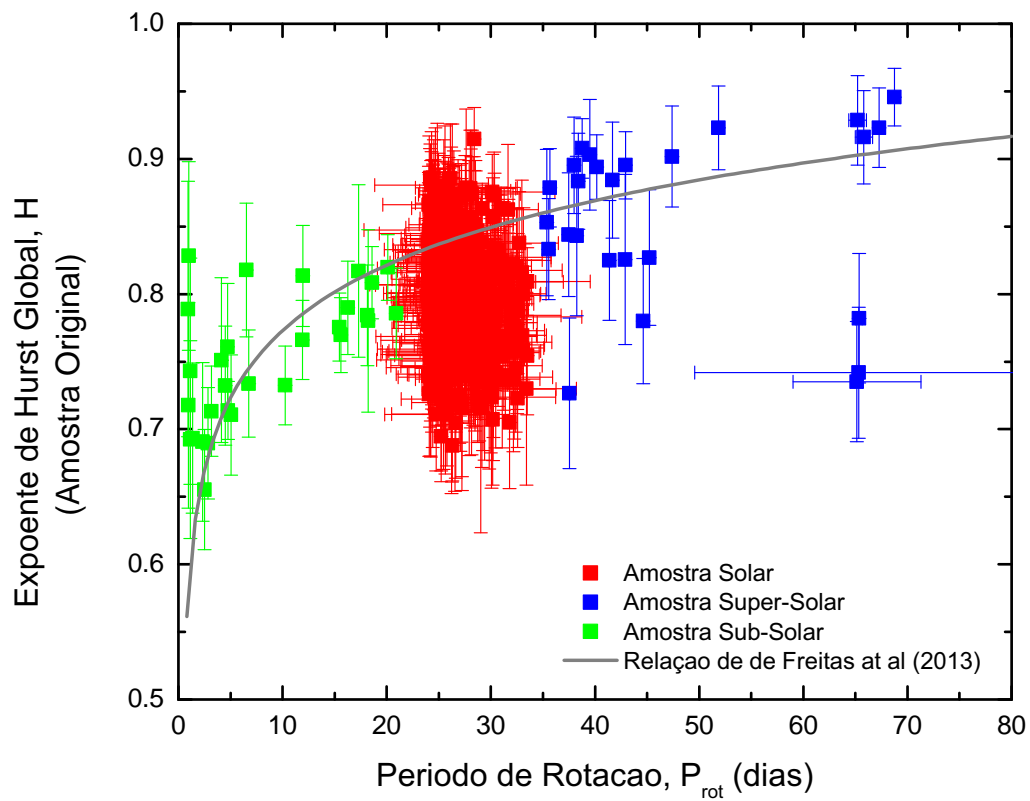


Para verificarmos se esse comportamento na distribuição de H é refletido na relação de (FREITAS et al., 2013), usamos os mesmos parâmetros estimados pelos autores e fizemos um ajuste não-linear seguindo o algoritmo de Levenberg-Marquardt¹

Como pode ser visto na Figura 21, a curva cinza ($R^2 = 0,78$) tem bom ajuste com os dados. Existem alguns blocos de dados que são significativamente distintos, mas há uma explicação plausível sobre isso. Na referida figura, encontramos uma grande dispersão de valores de H para a estreita faixa do período solar. Mostramos na Figura 17 que a dispersão horizontal foi reduzida considerando apenas estrelas com densidade média solar, no entanto, a dispersão vertical devido ao espalhamento dos valores H não foram mostrados. Verificamos abaixo que uma possível origem para parte dessa dispersão são as flutuações de baixa-frequência. A Figura 21 foi gerada usando as amostras originais sem qualquer filtragem, exceto possíveis tendências de longo-termo que na sua maioria são retiradas pelo ajuste de um polinômio de quarta ordem.

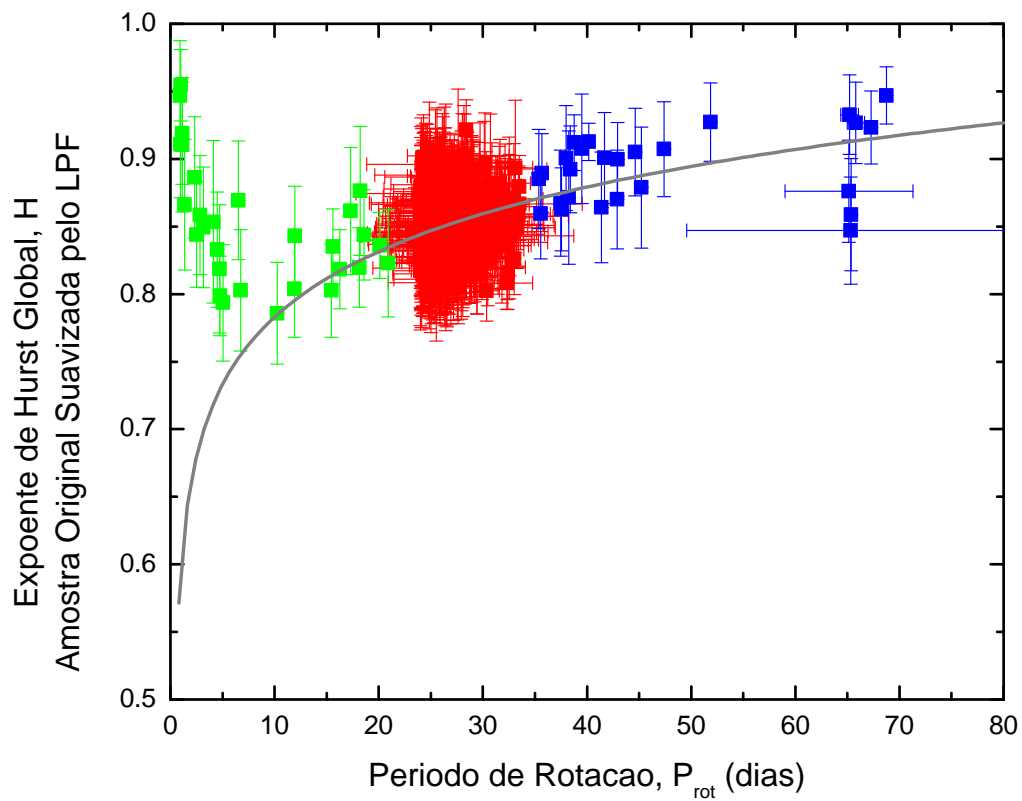
¹Para maiores esclarecimento sobre o referido algoritmo visite o link [http : //www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/3215/pdf/imm3215.pdf](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/3215/pdf/imm3215.pdf)

Figura 21 – Relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação considerando a amostra original sem filtros. A curva em cinza é a relação encontrado por (FREITAS et al., 2013). As amostras foram analisadas quarter a quarter e a barra de erro do expoente Hurst é obtida pelo desvio padrão da distribuição de valores de H para cada quarter.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 22 – Relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação considerando a amostra depois de um filtro low-pass. A curva em cinza é a relação encontrado por (FREITAS et al., 2013). Da mesma forma, as amostras foram analisadas quarter a quarter e a barra de erro do expoente H é obtida pelo desvio padrão da distribuição de valores de H para cada quarter.

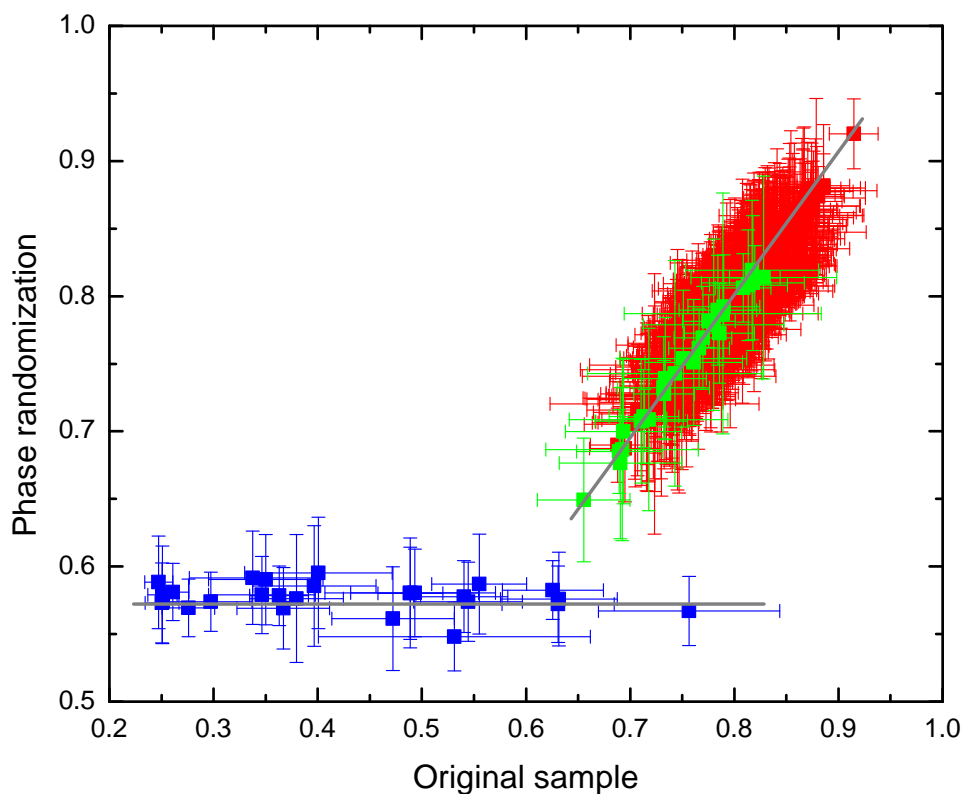


Fonte: Elaborada pelo Autor.

Na Figura 22 existem duas situações diferentes da análise quando consideramos a amostra original: i) as estrelas com rotação mais elevada deixam de obedecer a relação de (FREITAS et al., 2013) e, ii) o intervalo de valores de H para a amostra solar é reduzido. Essas duas situações são melhor esclarecidas no texto desta seção.

Como mostrado na Seção 4.2, adotamos dois processos de filtragem dos dados. Verificamos que a dispersão vertical foi reduzida quando passamos um filtro low-pass que é usado para evidenciar estruturas de curto-termo (ou curta-duração). No entanto, esse processo alterou a distribuição dos expoentes de Hurst para as estrelas com rotação elevada (estrelas verdes com período abaixo de 10 dias). Essa filtragem é, na verdade, um processo para suavizar a série temporal. Com isso o ruído é reduzido e, se existir alguma variabilidade, antes escondida pela baixa taxa sinal-ruído, ela é atenuada. A Figura 22 revela exatamente isso, quando foi retirado os efeitos de curto-prazo, as estrelas com período abaixo de 10 dias revelaram uma evidente variabilidade que, conseqüentemente, elevou o valor do expoente H . A Figura também mostra que para períodos maiores que 10 dias essa suavização não afeta significativamente os valores de H , visto que, a taxa de sinal-ruído já é elevada.

Figura 23 – Relação entre o expoente de Hurst da amostra original e o expoente H considerando a amostra depois de um processo de randomização da fase da transformada de Fourier.

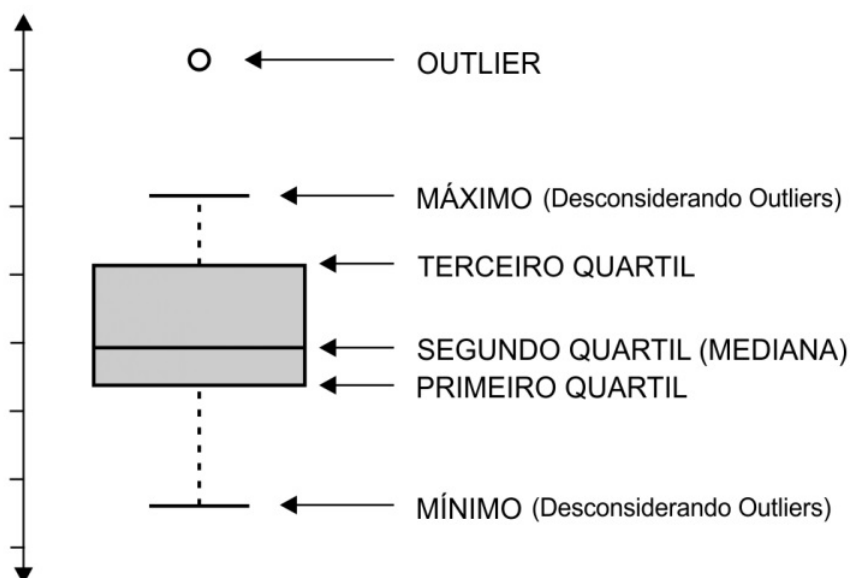


Fonte: Elaborada pelo Autor.

A Figura 23 revela que o expoente H (original) das duas amostras estão fortemente correlacionadas. Como o objetivo da randomização é eliminar os efeitos não-lineares presentes nas séries temporais, a Figura mostra que as amostras sub-solar e solar não são afetadas por esses termos. Ao contrário, o efeito de não-linearidade é mais forte na amostra super-solar.

Outra forma de investigar o comportamento da série temporal é processando o método Surrogate Data, como foi definido na Seção 4.2. Esse tipo de análise pode nos ajudar a entender a fonte de multifractalidade para cada tipo de amostra, ou seja, até que ponto uma amostra sub-solar difere multifractalmente de uma amostra super-solar? A Figura 23 foi confeccionado para explicar isso. Nesse caso, nós procuramos entender se os termos não-lineares afetam igualmente ou não cada amostra. A alta correlação entre os expoente de Hurst para as amostras sub-solar e solar revela que os termos não-lineares são desprezíveis, enquanto para a amostra super-solar, os valores de H obtidos pela randomização da fase da transformada de Fourier diferem drasticamente dos valores da amostra original. De acordo com a teoria dos Sistemas Complexos, um sistema dinâmico que apresenta características não-lineares evolui no tempo com um comportamento desequilibrado e aperiódico. Ou seja, o seu estado em um tempo futuro é extremamente dependente de seu estado atual, e pode ser mudado radicalmente a partir de pequenas mudanças no presente. Como séries temporais de estrelas com longo período reduzem mais eficientemente os efeitos devido ao ruído de fundo, o termo não-linear devido à rotação se torna mais forte.

Figura 24 – Gráfico tipo BoxPlot mostrando



Fonte: ABG CONSULTORIA E ESTATÍSTICA. Boxplot. Disponível em: www.abgconsultoria.com.br/blog/boxplot-como-interpretar/. Acessado em: 11 jun 2018.

Como em sua maioria, nossos resultados não apresentam correlações bem definidas, é mais apropriado o uso de um tipo de gráfico denotado por Box Plot. Ele é uma forma simples

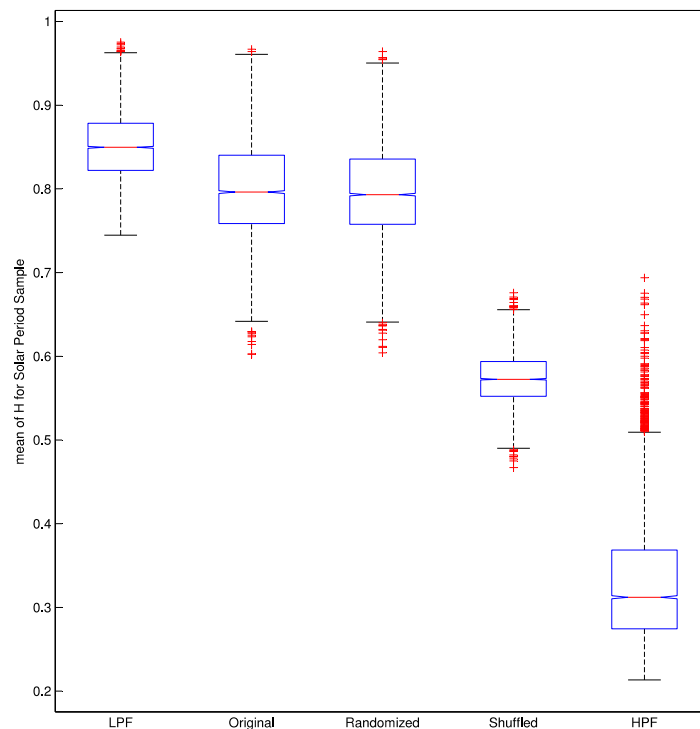
e eficaz para descrever uma ideia geral da distribuição dos nossos dados. A Figura 24 mostra como essa estatística é elucidada no gráfico. Vale ressaltar que o primeiro e terceiro quartil correspondem aos percentuais 25 e 75 respectivamente. Como um exemplo, o segundo quartil (valor da mediana) equivale ao percentual 50, indicando que 50% da amostra está acima dele e 50% está abaixo. Os valores mínimos e máximos correspondem a 5% e 95% da amostra, respectivamente. Os outliers são pontos espúrios que aparecem na amostra mas não são levados em conta na estatística. São estipulados pelo intervalo interquartílico, onde os limites inferior e superior para a sua detecção são dados pelas seguintes relações:

$$\text{Limite Inferior} = \text{Primeiro Quartil} - 1,5 * (\text{Terceiro Quartil} - \text{Primeiro Quartil})$$

$$\text{Limite Superior} = \text{Terceiro Quartil} + 1,5 * (\text{Terceiro Quartil} - \text{Primeiro Quartil})$$

Outro importante ponto na análise de um gráfico Box Plot é a assimetria da distribuição, se a distância entre a mediana e o primeiro quartil é diferente da distância entre a mediana e o terceiro quartil, temos que a distribuição do parâmetro em questão é assimétrica.

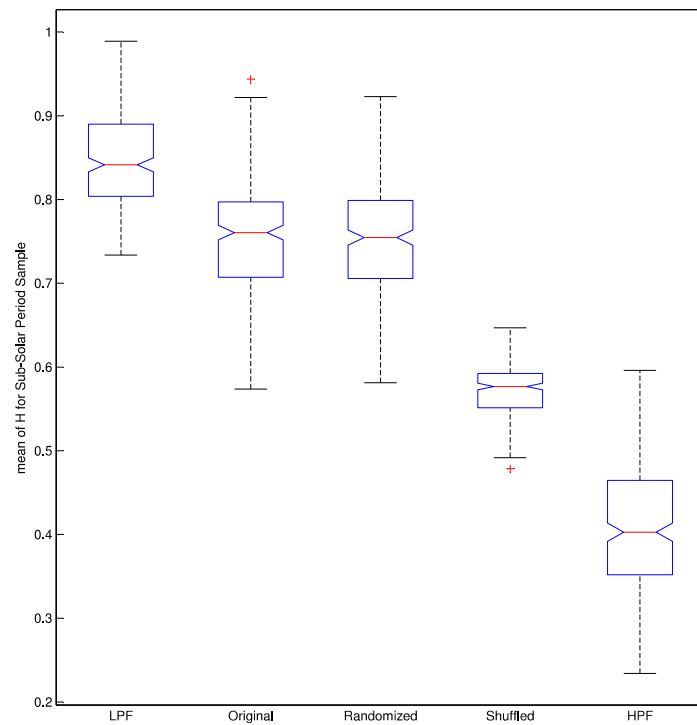
Figura 25 – Gráfico tipo *Box Plot* para a amostra original mostrando o comportamento do expoente de Hurst para os diferentes processos de filtragem de dados como indicados na Seção 4.2. A sequência dos processos de filtragem foi escolhida de tal forma que evidenciasse a redução do efeito da modulação rotacional à medida que vamos em direção do HPF (*high pass filter*).



Fonte: Elaborada pelo Autor.

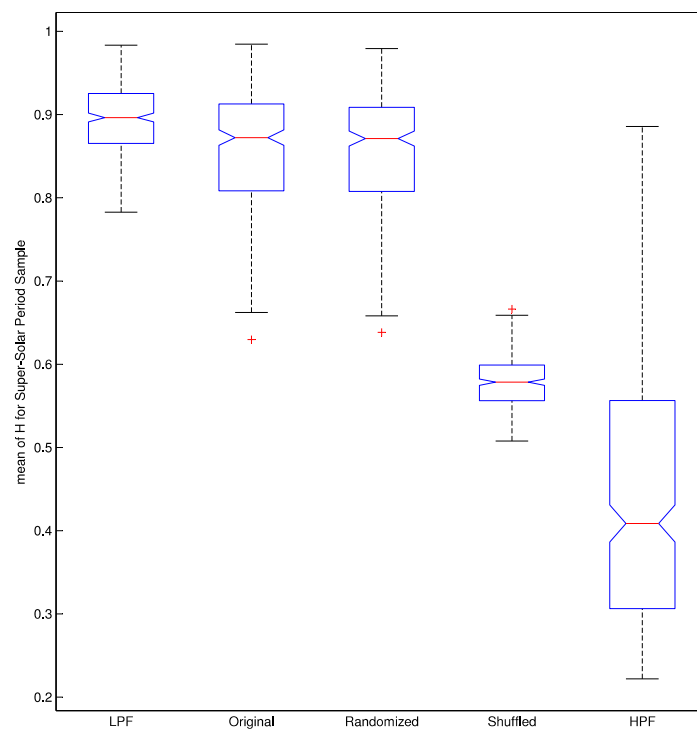
Como o Box Plot nos fornece uma inspeção visual da posição, dispersão, simetria, caudas e valores discrepantes (outliers) do conjunto de dados, nós nos concentramos no comportamento da distribuição dos valores do expoente H . Com isso, fazemos uma análise completa sobre o papel desse expoente na dinâmica da série temporal, que por sua vez, depende da

Figura 26 – Gráfico tipo *Box Plot* para a amostra sub-solar.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Figura 27 – Gráfico tipo *Box Plot* para a amostra super-solar.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

modulação rotacional.

O primeiro fator que diferencia os gráficos de *Box Plot*, indicados pelas Figuras 25, Figura 26 e Figura 27, é o excessivo número de outliers no gráfico que refere à amostra solar.

Verificamos que em função da mediana, o processo de filtragem low-pass consegue reduzir os efeitos dos curtos-termos, significando que existe um acentuado ruído de fundo. Esse efeito é mais evidente na amostra sub-solar. Isso é esperado, visto que, a variabilidade devido a modulação rotacional está misturado ao nível do ruído.

Notamos em ambos os gráficos *Box Plot* que os valores de H diminuem a medida que retiramos a contribuição da modulação rotacional. Para os Box Plots referentes a LPH, Original e Randomizado, os valores de H são semelhantes dentro da barra que descreve o primeiro e terceiro quartil. Isso não é tão evidente na amostra sub-solar, mas já comentamos esse comportamento na parágrafo anterior. No entanto, para os processos de embaralhamento (shuffling) e a filtragem de high-pass (HPF), o comportamento de H é evidentemente diferente. Nesses dois processos, nós eliminamos os efeitos de origem periódica ou quase periódica, deixando apenas o ruído de fundo. Em síntese, esse procedimento deixa a série temporal da estrela na fase inativa plena. O que estamos definindo como "fase inativa plena"? Ela se refere a fase onde não encontramos qualquer influência de uma variabilidade que eleve o expoente H . Isso mostra, como já mencionamos alguns parágrafos acima, que nas nossas séries temporais temos uma redução do expoente H nas estrelas que apresentam em seus quarters alguma sub-janela sem sinal de modulação rotacional. No entanto, os resultados encontrados no Box Plot para a filtragem HPF mostram que se houve quarters sem qualquer sinal de modulação o valor esperado para o expoente H é, em qualquer amostra, menor do que 0,5.

Outro ponto que pode ser destacado, se refere à simetria das distribuições. No geral, as distribuições geradas para os diferentes processos são aproximadamente simétricas. Esse resultado mostra que a mediana ou a média aritmética pode representar a medida de tendência central, uma vez que não são influenciadas pelos valores extremos que aparecem no primeiro e terceiro quartil.

Fisicamente esses resultados mostram que a atividade magnética estelar pode ser analisada em diferentes níveis. Em geral, esses níveis podem ser divididos em duas classes: sinal determinístico e sinal estotástico. Se o expoente de Hurst é uma indicador de atividade magnética como apontam (FREITAS et al.,) (2016,2017), o espectro de frequências encontradas nas séries temporais podem ser facilmente analisados pela variação desse expoente. Vimos também que o expoente H tem outros aliados nessa análise, em destaque, o grau de assimetria A e o grau de multifractalidade $\Delta\alpha$ que, por sua vez, nos ajuda na segregação das estrelas mais ativas e menos ativas, de acordo com o grau de complexidade da série temporal. Estamos certos ao pensar que uma amostra de estrelas na fase inativa é crucial para verificar essas indagações. Como exemplo, (FREITAS et al., 2013) usou a série temporal do Sol nessas duas fases e, realmente, o expoente de Hurst cai quando consideramos a fase inativa.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho descrevemos os resultados de nossa pesquisa, mostramos que a hipótese inicial é verificável se temos em mãos uma amostra de estrelas com janela temporal de longa duração que englobe ao menos um ciclo magnético. Os dados aqui usados mostraram mesmo dentro das nossas limitações observacionais que o expoente de Hurst pode ser usado em estrelas na fase inativa.

Uma segunda etapa dessa pesquisa era verificar se com apenas o expoente de Hurst é possível recuperar o período de rotação em estrelas na fase inativa. Infelizmente as pequenas janelas temporais que dispomos não foram suficientes para testar essa hipótese e, com isso, não conseguimos encontrar uma calibração apropriada para inferir período de rotação de estrelas na fase inativa em curtas janelas temporais.

Nosso trabalho mostrou que a análise multifractal via o método MFDMA é uma poderosa ferramenta estatística para investigar séries temporais astrofísicas. Com ela, nós confirmamos a relação entre o expoente de Hurst e o período de rotação de estrelas. Em paralelo, nossos resultados apontam que a distribuição do expoente de Hurst segregado pelo parâmetro de assimetria A oferece um diagnóstico promissor para estudar o perfil do período de rotação em estrelas inativas. Em linhas gerais, nossos resultados permitiram estabelecer um procedimento eficaz para medir período de rotação de estrelas em baixa atividade magnética quando a amostra que dispomos envolve ao menos um ciclo de atividade.

Para finalizar, gostaríamos de registrar que a análise multifractal conseguiu separar a amostra em diferentes populações e somado aos processos de filtragens é possível refinar ainda mais e caracterizar a amostra mais detalhadamente. Essa talvez seja a maior contribuição dessa dissertação, além de consolidar o expoente de Hurst como um poderoso classificador de variabilidade magnética.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. et al. Gw150914: The advanced ligo detectors in the era of first discoveries. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 116, n. 13, mar 2016. ISSN 0031-9007. **Physical review letters**, v. 116, n. 13, p. 131103.
- ABNEY, W. Effect of a star's rotation on its spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 37, n. 5, p. 278–279, mar 1877. ISSN 0035-8711. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 37, n. 5, p. 278–279.
- AIGRAIN, S.; FAVATA, F.; GILMORE, G. Characterising stellar micro-variability for planetary transit searches. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 414, n. 3, p. 1139–1152, jan 2004. ISSN 0004-6361.
- ALESSIO, E. et al. Second-order moving average and scaling of stochastic time series. *The European Physical Journal B - Condensed Matter*, Springer Nature, v. 27, n. 2, p. 197–200, may 2002. ISSN 1434-6028. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, v. 27, n. 2, p. 197–200.
- ASCHWANDEN, M. J.; FREELAND, S. L. Automated solar flare statistics in soft x-rays over 37 years of goes observations: the invariance of self-organized criticality during three solar cycles. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 754, n. 2, p. 112, jul 2012. ISSN 0004-637X.
- BALIUNAS, S. et al. Chromospheric variations in main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 438, p. 269, jan 1995. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 438, n. 498, p. 269–287.
- BÁNYAI, E. et al. Variability of m giant stars based on kepler photometry: general characteristics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 436, n. 2, p. 1576–1587, oct 2013. ISSN 1365-2966.
- BARANE, A.; MAYOR, M.; PONCET, J. Coravel— a new tool for radial velocity measurements. *Vistas in Astronomy*, Elsevier BV, v. 23, p. 279–316, jan 1979. ISSN 0083-6656. **Vistas in Astronomy**, v. 23, n. , p. 279–316.
- BASRI, G. et al. Photometric variability in kepler target stars. ii. an overview of amplitude, periodicity, and rotation in first quarter data. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 141, n. 1, p. 20, dec 2010. ISSN 0004-6256.
- BATALHA, N. M. et al. Selection, prioritization, and characteristics of kepler target stars. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 713, n. 2, p. L109, mar 2010. ISSN 2041-8205.
- BORUCKI, W. J. et al. Kepler planet-detection mission: introduction and first results. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 327, n. 5968, p. 977–980, mar 2010. ISSN 2041-8205.
- BORUCKI, W. J. et al. Kepler planet-detection mission: Introduction and first results. *Science*, v. 327, p. 977, fev. 2010a. **American Association for the Advancement of Science**, v. 327, n. 5968 p. 977–980. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2010Sci...327..977B>>.

CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. Analysis of clusters formed by the moving average of a long-range correlated time series. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 2, feb 2004. ISSN 1539-3755. **Physical Review E**, v. 69, n. 2, p. 026105.

CARTER, J. A.; WINN, J. N. Parameter estimation from time-series data with correlated errors: a wavelet-based method and its application to transit light curves. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 704, n. 1, p. 51, sep 2009. ISSN 0004-637X.

CASTRILLÓN, J. *Análise das curvas de luz do corot usando diferentes processos comparativos: Estimando períodos de rotação estelar*. Dissertação (Mestrado), set. 2010. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv180903662R>>.

CAVALCANTE, F. *Evolução do índice de freio magnético para estrelas do tipo solar*. 39003 p. Tese (Doutorado), ago. 2017. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015EL....11139003D>>.

CHABOYER, B.; DEMARQUE, P.; PINSONNEAULT, M. Stellar models with microscopic diffusion and rotational mixing i: Application to the sun. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 441, p. 865, mar 1994. ISSN 0004-637X. **arXiv preprint astro-ph/9408058**.

CHANDRASEKHAR, S.; MÜNCH, G. On the integral equation governing the distribution of the true and the apparent rotational velocities of stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 111, p. 142, jan 1950. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 111, n. , p. 142–156.

CLEVE, J. V.; CALDWELL, D. Kepler instrument handbook (moffett field, ca: Nasa/ames research center): Kepler observations of am stars. *KSCI-19033*, Oxford University Press (OUP), v. 414, n. 1, p. 792–800, mar 2009. ISSN 0035-8711.

CLEVE, J. V. et al. Kepler data release 4 notes. *Apj*, SPIE, v. 724, p. 1108–1119, jul 2010. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...724.1108J>>.

DUARTE, T. *Investigando o campo magnético das estrelas análogas gêmeas solares através da espectropolarimetria*. A63 p. Dissertação (Mestrado), jun. 2012. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017A%26A...602A..63B>>.

FEDER, J. *Fractals (physics of solids and liquids)*. American Physical Society (APS), 1988. v. 25. 1423-1426 p. Plenum, New york,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1970PhRvL..25.1423S>>.

FEIGELSON, E.; BADU, G. *Modern statistical methods for astronomy: with R applications*. [s.n.], 2012. Cambridge University Press,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2012msma.book.....F>>.

FELLER, W. William. the asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. 1951. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. , n. , p. 427–432.

FREITAS, D. *Formação de caudas maxwellianas no contexto da rotação estelar*. 567a p. Tese (Doutorado), fev. 2009. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018BpJ...114..567M>>.

- FREITAS, D. D. *A evolução da rotação estelar na vizinhança solar*. Dissertação (Mestrado), out. 2006. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017yCat..18370015D>>.
- FREITAS, D. D. et al. New suns in the cosmos? *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 773, n. 2, p. L18, jul 2013. ISSN 2041-8205.
- FREITAS, D. D.; MEDEIROS J, R. D. A non-extensive approach to the stellar rotational evolution—i. f-and g-type stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 433, n. 3, p. 1789–1795, jun 2013. ISSN 1365-2966. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 433, n. 3, p. 1789–1795.
- FREITAS, D. de et al. New suns in the cosmos. iv. the multifractal nature of stellar magnetic activity in kepler cool stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 843, n. 2, p. 103, jul 2017. ISSN 1538-4357.
- GRIFFIN, R. F. A photometric atlas of the spectrum of arcturus, lambda lambda 3600-8825 Å. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, IOP Publishing, v. 41, p. 631, nov 1968. ISSN 0067-0049.
- GU, G.; ZHOU, W. Detrending moving average algorithm for multifractals. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 1, jul 2010. ISSN 1539-3755. **Physical Review E**, v. 82, n. 1, p. 1–12.
- GUERRERO, G.; PINO, E. d. G. D. Turbulent magnetic pumping in a babcock-leighton solar dynamo model. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 485, n. 1, p. 267–273, apr 2008. ISSN 0004-6361.
- HALE, G. On the probable existence of a magnetic field in sun-spots. *Journal of Geophysical Research*, American Geophysical Union (AGU), v. 13, n. 4, p. 159, 1908. ISSN 0148-0227. **The astrophysical journal**, v. 28, n. , p. 315–343.
- HALL, D. Tauri-like star in the eclipsing binary rs canum venaticorum. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, IOP Publishing, v. 84, p. 323, apr 1972. ISSN 0004-6280. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 84, n. 498, p. 223–233.
- HAMPSON, K.; MALLIN, E. Multifractal nature of ocular aberration dynamics of the human eye. *Biomedical Optics Express*, The Optical Society, v. 2, n. 3, p. 464, feb 2011. ISSN 2156-7085. **Biomedical optics express**, v. 2, n. 3, p. 464–470.
- HAYASHI, C. Stellar evolution in early phases of gravitational contraction: Gravitational contraction and the decomposition of iron. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press (OUP), v. 43, n. 2, p. 319–333, feb 1961. ISSN 0033-068X. **Publications of the Astronomical Society of Japan**, v. 13, n. , p. 450–452.
- HIREMATH, K. Steady part of rotation and toroidal component of magnetic field in the solar convective envelope: Magnetic field rotation analysis. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, American Geophysical Union (AGU), v. 112, n. A6, p. n/a–n/a, jun 2001. ISSN 0148-0227. **Bulletin of the Astronomical Society of India**, v. 29, n. , p. 169–191.
- HUANG, S.-S. Rotational behavior of the main-sequence stars and its plausible consequences concerning formation of planetary systems. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 141, p. 985, apr 1965. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 141, n. , p. 985–992.

- IHLEN, E. A. F. E. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab. *Frontiers in physiology*, Frontiers, v. 3, p. 141, 2012. ISSN 1664-042X.
- JENKINS, J. M. et al. Overview of the kepler science processing pipeline. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 713, n. 2, p. L87, jul 2010.
- KANTELHARDT, J. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier BV, v. 316, n. 1-4, p. 87–114, dec 2002. ISSN 0378-4371. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 316, n. 1-4, p. 87–114.
- KAWALER, S. Angular momentum loss in low-mass stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 333, p. 236, oct 1988. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 333, n. , p. 236–247.
- KOCH, D. G. et al. Kepler mission design, realized photometric performance, and early science. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 713, n. 2, p. L79, mar 2010. ISSN 2041-8205.
- KRISHNAMURTHI, A.; PINSONNEAULT, M.; TERNDRUP, D. The angular momentum evolution of very low mass stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 534, n. 1, p. 335–347, may 1997. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 480, n. 1, p. 303–322.
- KRON, G. The probable detecting of surface spots on ar lacertae b. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, IOP Publishing, v. 59, p. 261, oct 1947. ISSN 0004-6280. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, v. 59, n. , p. 261–265.
- LANZA, A. et al. Modelling the rotational modulation of the sun as a star. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 403, n. 3, p. 1135–1149, may 2003. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2003A%26A...403.1135L>>.
- LOPES, C. F. et al. The variability behaviour of corot m-giant stars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 583, p. A122, nov 2015. ISSN 0004-6361. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015A%26A...583A.122F>>.
- MATT, S.; PUDRITZ, R. Accretion-powered stellar winds as a solution to the stellar angular momentum problem. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 632, n. 2, p. L135–L138, oct 2005. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 632, n. 2, p. 01–04.
- MATT, s.; PUDRITZ, R. Accretion-powered stellar winds. ii. numerical solutions for stellar wind torques. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 678, n. 2, p. 1109–1118, may 2008. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 678, n. 2, p. 1109–1118.
- MATT, s.; PUDRITZ, R. Accretion-powered stellar winds. iii. spin-equilibrium solutions. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 681, n. 1, p. 391–399, jul 2008. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 681, n. 1, p. 391–398.
- MEDEIROS, J. D. et al. Overview of semi-sinusoidal stellar variability with the corot satellite. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 555, p. A63, jun 2013. ISSN 0004-6361.
- MESTEL, L. . E. S. B. . L. H. **Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun**. Springer Berlin Heidelberg, v. 380, p. 515, 1984. Lecture Notes in Physics, Berlin: Springer, v. 193. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1991LNP...380..515M>>.

MESTEL, S.; SPRUIT, H. On magnetic braking of late-type stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 226, n. 1, p. 57–66, may 1987. ISSN 0035-8711. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 226, n. 1, p. 57–66.

NELSON, O.; MEDEIROS, J. D. Assim na terra como no céu: a teoria do dínamo como uma ponte entre o geomagnetismo e o magnetismo estelar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, FapUNIFESP (SciELO), v. 34, n. 4, dec 2012. ISSN 1806-1117. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 4, p. 4601.

NEPOMUCENO, M. *Naturez fractal e multifractal da onda gravitacional gw150914 detectada pelo ligo*. Tese (Doutorado), 2016. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,.

NORDSTRÖM, B. et al. The geneva-copenhagen survey of the solar neighbourhood-ages, metallicities, and kinematic properties $\approx 14\,000$ f and g dwarfs. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 418, n. 3, p. 989–1019, 2004.

OLIVEIRA, L. *Sobre o comportamento rotacional das estrelas evoluídas de classe de luminosidade IV, III, II Ib*. 2840346 p. Dissertação (Mestrado), jan. 2015. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN,. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2019IJSTQ..2540346C>>.

PENG, C.-K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 49, n. 2, p. 1685–1689, feb 1994. ISSN 1063-651X. **Physical review e**, v. 49, n. 2, p. 1685–1689. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1994PhRvE..49.1685P>>.

PENG, C.-K. et al. Long-range correlations in nucleotide sequences. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 356, n. 6365, p. 168, 1992. ISSN 0028-0836.

PINSONNEAULT, M. H. et al. A revised effective temperature scale for the kepler input catalog. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 199, n. 2, p. 30, sep 2012. ISSN 0067-0049.

PIZZOLATO, N. et al. The stellar activity-rotation relationship revisited: Dependence of saturated and non-saturated x-ray emission regimes on stellar mass for late-type dwarfs. *Astronomische Nachrichten*, Wiley, v. 337, n. 8-9, p. 827–831, sep 2003. ISSN 0004-6337. **Astronomy & Astrophysics**, v. 397, n. 1, p. 147–157.

REINERS, A.; MOHANTY, S. Radius-dependent angular momentum evolution in low-mass stars. i. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 746, n. 1, p. 43, jan 2012. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 746, n. 1, p. 01–43.

REINHOLD, T.; REINERS, A.; BASRI, G. Rotation and differential rotation of active kepler stars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 560, n. S302, p. A4, aug 2013. ISSN 1743-9213.

SILLS, A. et al. Theoretical models of the angular momentum evolution of solar-type stars: Evolution of discs around solar-type stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 414, n. 3, p. 2486–2497, apr 2000. ISSN 0035-8711. **The Astrophysical Journal**, v. 534, n. 1, p. 335–347.

SKUMANICH, A. Time scales for Ca II emission decay, rotational braking, and lithium depletion. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 171, p. 565, feb 1972. ISSN 0004-637X. **The Astrophysical Journal**, v. 171, n. , p. 565–566.

SMITH, M. A.; GRAY, D. Fourier analysis of spectral line profiles: A new tool for an old art*. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, IOP Publishing, v. 88, p. 809, dec 1976. ISSN 0004-6280. **PUBLICATIONS OF THE ASTRONOMICAL SOCIETY OF THE PACIFIC**, v. 88, n. 526, p. 01–15.

STRUVE, O. The cosmogonical significance of stellar rotation. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 106, n. 2749, p. 204–212, sep 1945. ISSN 0036-8075. **Popular Astronomy**, v. 53, n. 5, p. 201–202.

TSALLIS, C. C. Tsallis: Tsallis statistics applied to gic. *Space Weather*, American Geophysical Union (AGU), v. 15, n. 9, p. 1094–1101, sep 1988. ISSN 1542-7390. **J. Stat. Phys**, v. 52, n. , p. 479. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1986EL.....2..863S>>.

VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 58, n. 5, p. 6832–6834, nov 1998. ISSN 1063-651X. **Physical Review E**, v. 58, n. 5, p. 6832.

APÊNDICE A – ÍNDICES MULTIFRACTAIS A , $\Delta\alpha$, $\Delta f_L(\alpha)$, $\Delta f_R(\alpha)$ E H PARA O QUARTER 03 DE TODAS AS ESTRELAS ATIVAS

Tabela 2 – Amostra dos resultados da análise geométrica do espectro multifractal e alguns parâmetros estelares.

KIC	A	$\Delta\alpha$	$\Delta f_L(\alpha)$	$\Delta f_R(\alpha)$	H	Teff (K)	logg (cm/s ²)	M (M _⊙)	Prot (dias)
1027740	3,36	1,04	0,19	0,88	0,91	5751	4,13	1,03	26,70
1432469	3,49	0,85	0,17	0,92	0,81	5831	4,02	1,06	24,73
1724720	2,83	0,65	0,19	0,74	0,81	5464	4,37	0,96	24,05
1868785	1,19	0,67	0,41	0,41	0,77	5596	4,50	0,99	24,22
2303139	2,58	0,78	0,31	0,91	0,77	5433	4,65	0,95	25,37
2441864	1,98	0,48	0,13	0,50	0,86	5714	4,69	1,02	25,11
2450531	1,69	0,59	0,31	0,56	0,78	5372	4,50	0,93	25,14
2696717	3,03	0,75	0,17	0,83	0,86	5472	4,42	0,96	25,25
2831979	1,78	0,73	0,32	0,71	0,85	5529	4,36	0,97	24,38
2855272	1,50	0,49	0,27	0,47	0,85	5583	4,53	0,99	25,41
2973432	2,08	0,58	0,21	0,65	0,75	5531	4,32	0,97	24,09
3003084	1,33	0,54	0,28	0,41	0,75	5490	4,16	0,96	24,75
3100623	1,00	0,06	0,09	0,15	0,79	5514	4,28	0,97	26,07
3217178	3,48	0,78	0,28	1,00	0,83	5419	4,05	0,94	24,80
3219127	3,33	0,84	0,19	0,99	0,80	5449	4,65	0,95	27,12
3232211	1,96	0,66	0,28	0,71	0,65	5513	4,48	0,97	25,78
3336146	3,17	0,77	0,15	0,84	0,87	5566	4,14	0,98	24,06
3540789	2,63	0,69	0,30	0,77	0,89	5507	4,65	0,97	24,09
3541121	1,99	0,55	0,20	0,64	0,80	5486	4,71	0,96	28,13
3643036	1,18	0,46	0,26	0,30	0,74	5511	4,53	0,97	24,12
3646779	2,04	0,67	0,28	0,70	0,76	5358	4,71	0,93	25,65
3657830	2,35	0,10	0,07	0,17	0,54	5576	4,77	0,99	30,22
3852865	2,00	0,57	0,24	0,61	0,86	5531	4,46	0,97	26,37
3859797	1,78	0,57	0,30	0,68	0,72	5549	4,49	0,98	27,22
3861937	1,41	0,45	0,22	0,47	0,76	5433	4,58	0,95	29,36
3867901	1,11	0,31	0,21	0,31	0,75	5612	4,82	1,00	32,38
3942388	2,56	0,58	0,20	0,66	0,75	5397	4,57	0,94	26,47
3964085	1,47	0,64	0,46	0,62	0,70	5597	4,66	0,99	28,30
4038557	2,16	0,54	0,18	0,54	0,74	5389	4,46	0,94	24,22
4048325	1,45	0,51	0,28	0,50	0,83	5432	4,68	0,95	24,29
4067203	1,33	0,44	0,29	0,44	0,73	5369	4,81	0,93	24,79
4067498	3,84	0,79	0,09	0,88	0,76	5537	4,66	0,97	24,24

Fonte: Elaborada pelo autor.