



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Aurélio Wildson Teixeira de Noronha**

# **Percolação em Redes Isotropicamente Direcionadas**

Fortaleza - CE

Novembro - 2018

**Aurélio Wildson Teixeira de Noronha**

# **Percolação em Redes Isotropicamente Direcionadas**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física

Orientador: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

Co-orientador: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona

**Fortaleza - CE**

**Novembro - 2018**

**Aurélio Wildson Teixeira de Noronha**

# **Percolação em Redes Isotropicamente Direcionadas**

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física

Aprovada em 17/11/2018

## **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona  
(Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. André Auto Moreira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. César Ivan Nunes Sampaio Filho  
Instituto de Pesquisa e Estratégia Econômica do Ceará  
(IPECE)

---

Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- D32p de Noronha, Aurélio Wildson Teixeira.  
Percolação em Redes Isotropicamente Direcionadas / Aurélio Wildson Teixeira de Noronha. – 2018.  
83 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior.  
Coorientação: Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona.
1. Percolação. 2. Redes Isotropicamente Direcionadas. 3. Componentes Fortemente Conectados. 4. Caminhos Ótimos. 5. Fratura de Caminhos Ótimos. I. Título.

CDD 530

---

*Aos meus pais, Conceição ,  
Daniel e Noronha; a minha  
esposa Rosilene Dutra e ao  
meu filho Benjamim.*

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior, Prof. Dr. Humberto de Andrade Carmona e Prof. André Auto Moreira pela orientação acadêmica, pela confiança dada pelo trabalho durante o curso de Doutorado.

A coordenação da pós-graduação em Física pelo apoio e manutenção da infra-estrutura necessária para realização do trabalho.

Aos colegas do grupo de Sistemas Complexos que compartilhei uma amizade sadia e colaborativa ao longo desses quatro anos que são eles: Leandro Filho, César Menezes, Rilder Pires, Erneson Oliveira, Calebe Alves, Rubens Oliveira, João Paulo, Emanuel Fontelles, Israel Nascimento, Marciel Gomes, Jonathan Sales e Kaique Billotta.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o modelo de percolação em redes com ligações direcionadas preenchidas aleatoriamente em um estado intermediário entre o modelo de percolação padrão e o modelo de percolação direcionada. Em específico, estudamos o caso isotrópico, no qual as ligações direcionadas são conectadas em um sentido ou em sentido oposto com a mesma probabilidade. Nós derivamos resultados exatos para a probabilidade crítica de percolação isotropicamente direcionada para a rede honeycomb e a rede triangular que seguem a condição crítica  $p_2 + p_1/2 = p_c$ , onde  $p_c$  é fração crítica de percolação clássica para as respectivas redes,  $p_1$  é a probabilidade de ter uma ligação direcionada e  $p_2$  é a probabilidade de ter uma ligação não direcionada em que essas redes chamamos de redes de ligações mistas. Nós identificamos os expoentes críticos universais de agregados fortemente conectados, incluindo a dimensão fractal, para redes planares e cúbicas. Estes expoentes críticos são diferentes da percolação clássica e da percolação direcionada. Em outras perspectiva, partindo de redes quadradas de ligações mistas, estudamos o problema de caminhos ótimos e a fratura de caminhos ótimos. Encontramos que os expoentes críticos de caminhos ótimos são os mesmos de redes com ligações não direcionadas. No entanto, os expoentes da fratura de caminhos ótimos são diferentes para as redes não direcionadas e redes de ligações mistas.

**Palavras-chave:** Percolação. Redes Isotropicamente Direcionadas. Componentes Fortemente Conectados. Caminhos Ótimos.

# Abstract

We investigate percolation on a randomly directed lattice, an intermediate between standard percolation and directed percolation models, focusing on the isotropic case in which bonds on opposite directions occur with the same probability. We derive exact results for the percolation threshold on honeycomb and triangular lattices, and present a conjecture for the value the percolation-threshold for in any lattice as given for  $p_2 + p_1/2 = p_c$ , where  $p_c$  is standard critical percolation,  $p_1$  is the probability of the lattice have a directed link and  $p_2$  is the probability of the lattice have a undirected link that we call mixed-link lattices. We also identify presumably universal critical exponents, including a fractal dimension, associated with the strongly-connected components both for planar and cubic lattices. These critical exponents are different from those associated either with standard percolation or with directed percolation. In another perspective, begin mixed-link square lattices, we study the optimal paths and optimal crack paths in the lattices with directed links and undirected links and we found that optimal path critical exponents are the same for both standard percolation and isotropically directed lattices. However, the critical exponents from optimal path cracks are completely different in both lattice types and energy landscape disordered.

**Keywords:** Percolation. Isotropically Directed Lattice. Strongly Connected Components. Optimal Paths.

# Lista de Figuras

- 1 Exemplo de uma rede simples com ligações não direcionada. . . . . p. 20
- 2 Exemplo de uma rede de ligações direcionadas. . . . . p. 22
- 3 Amostra de três agregados de sítios fortemente conectados (SCC) que são  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{6\}$ . Considere um sítio  $i$ , por exemplo, o sítio 3 na rede de ligações direcionadas ilustrada. O conjunto de sítios que podem alcançar 3 é definido como o agregado *in-component*. O conjunto de sítios que são acessíveis a partir do sítio 3 é definido como o agregado *out-component* e a interseção do conjunto *in-component* e *out-component* é denominado de agregado fortemente conectado do sítio 3. Com esta definição é possível repartir uma rede sem ambiguidade entre os agregados. No SCC  $\{1,2,3,4\}$ , o caminho de 2 até 3 é composto pela ligação (2,3) e o caminho de 3 até 2 é composto pelas ligações (3,4) e (4,2). . . p. 25
- 4 Rede quadrada de tamanho  $L = 8$  com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (azul + preto), GOUT (vermelho + preto) e GSCC(preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT. . . . . p. 25
- 5 Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  com tamanhos diferentes de  $L$  para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f). p. 29
- 6 Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . p. 30
- 7 Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . . p. 30

- 8 Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . . p. 30
- 9 *Finite size scaling* para a média do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  para diferente tamanhos  $L$  - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f). . . . . p. 31
- 10 Amostra de três agregados de sítios fortemente conectados (SCC) que são  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{6\}$ . Considere um sítio  $i$ , por exemplo, o sítio 3 na rede de ligações direcionadas ilustrada. O conjunto de sítios que podem alcançar 3 é definido como o agregado *in-component*. O conjunto de sítios que são acessíveis a partir do sítio 3 é definido como o agregado *out-component* e a interseção do conjunto *in-component* e *out-component* é denominado de agregado fortemente conectado do sítio 3. Com esta definição é possível repartir uma rede sem ambiguidade entre os agregados. No SCC  $\{1,2,3,4\}$ , o caminho de 2 até 3 é composto pela ligação (2,3) e o caminho de 3 até 2 é composto pelas ligações (3,4) e (4,2). . . p. 33
- 11 Rede quadrada de tamanho  $L = 8$  com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (azul + preto), GOUT (vermelho + preto) e GSCC(preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT. . . . . p. 33
- 12 Ilustração de um grafo para a transformação estrela-triângulo. As ligações de linha contínua tem probabilidade  $q_0, q_1$  e  $q_2$  e as ligações de linha pontilhada possuem probabilidade  $p_0, p_1$  e  $p_2$  de existirem. . . . . p. 34
- 13 Diagrama de fases para a percolação mista e isotropicamente direcionada.  $p_c$  é a fração crítica de percolação clássica para a rede honeycomb, quadrada ou triangular. A primeira parametrização consiste em preencher as ligações com frações  $p_1$  e  $p_2$  seguindo aproximadamente o contorno de cor azul. A segunda parametrização percorre todo o eixo  $p_1$  e segue até  $p_2$  pela contorno de cor vermelho. . . . . p. 37

14	Rede quadrada de tamanho $L = 8$ (a) e $L = 128$ (b) com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (sítios de cor azul e preto), GOUT (sítios de cor vermelho + preto) e GSCC(sítios de cor preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT. . . . .	p. 40
15	Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da probabilidade de ocupação $p$ com tamanhos diferentes de $L$ para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f).	p. 42
16	Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ como função do tamanho linear da rede $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . .	p. 43
17	Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função do tamanho linear da rede $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . .	p. 43
18	Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . .	p. 43
19	<i>Finite size scaling</i> para a média do maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da probabilidade de ocupação $p$ para diferente tamanhos $L$ - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f). . . . .	p. 44
20	Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da probabilidade de ocupação $p$ com tamanhos diferentes de $L$ para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f).	p. 46
21	Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ como função do tamanho linear da rede $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . .	p. 47

22	Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função do tamanho linear da rede $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . .	p. 47
23	Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear $L$ no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c). . . . .	p. 47
24	<i>Finite size scaling</i> para a média do maior agregado fortemente conectado $\langle S \rangle$ e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da probabilidade de ocupação $p$ para diferente tamanhos $L$ - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f). . . . .	p. 48
25	Expoente de Fisher $\tau$ obtido da distribuição de probabilidade dos componentes fortemente conectados para uma rede quadrada $L = 4096$ no ponto crítico de percolação. . . . .	p. 49
26	A média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC) $\langle S \rangle$ (a) e o segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da fração de ligações $p$ são mostrados para os tamanhos $L = \{16, 32, 64, 128\}$ . p. 50	
27	Média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC) $\langle S \rangle$ e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função do tamanho linear da rede $L$ no ponto crítico de percolação da rede cúbica. A linha de cor vermelho é a média de $\langle S \rangle$ obtido com o expoente $\beta/\nu$ da percolação clássica de ligações. . . . .	p. 51
28	<i>Finite Size Scaling</i> para da média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC) $\langle S \rangle$ (a) e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado $\langle S^2 \rangle$ como função da fração de ligações $p$ são mostrados para os tamanhos $L = \{16, 32, 64, 128\}$ . . . . .	p. 51

- 29 Dimensão fractal para o GSCC e GOUT. Estes resultados são para uma rede quadrada onde todos os vizinhos estão conectados por uma ligação direcionada. Esta condição corresponde para um estado crítico quando  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . Enquanto a dimensão fractal de GOUT é compatível com a da percolação clássica de ligações, a dimensão fractal do GSCC tem inclinação diferente. . . . . p. 52
- 30 Exemplo de execução do Algoritmo Dijkstra. O sítio origem é o sítio mais a esquerda (destino). Os sítios brancos são o *queue*, os sítios pretos são o conjunto *S* - visitados e retirados do *queue* e o sítio de cor cinza é o sítio visitado na iteração. No procedimento de busca, o Algoritmo de Dijkstra armazena em cada sítio o peso do caminho desde o sítio origem *s* até o sítio relaxado *v*. Inicialmente, a lista de sítios visitados está vazia *S* e, conseqüentemente, a lista de sítios a visitar *Q* compreende todos os sítios de *G*. Em (a), a primeira iteração, o sítio *s* verifica o peso de seus vizinhos *u* e *x*, logo, os pesos de *u* e *x* são definidos e *s* é inserido em *S*. Em (b), na segunda iteração e iniciando com o sítio *x*, de menor peso, os sítios *u* e *y* são examinados e os pesos em *u* e *y* são recalculados. Em (d), na quarta iteração, o sítio *u* tem seu peso alterado, pois o caminho  $p = \{s, x, u\}$  tem o menor valor comparado ao valor armazenado na segunda iteração (b). . . . . p. 58
- 31 fratura de caminhos ótimos numa rede de  $512 \times 512$  sítios. (a) Sítios bloqueados em regime de desordem fraca ( $\beta = 0,002$ ). (b) Sítios bloqueados em regime de desordem intermediária ( $\beta = 6$ ). Linha de cor azul é a fratura de caminhos ótimos, Linhas de cor vermelho são os caminhos adjacentes - *dangling ends* e Linhas de cor cinza são os agregados de sítios isolados . . . . . p. 60
- 32 Ilustração de uma rede quadrada  $L=6$  com  $p = 1$  para a fratura de caminhos ótimos. O sítio O é a origem e o sítio D é o destino. Os sítios de cor vermelho foram removidos através do OPC. Os sítios de cor cinza foram visitados e não removidos. . . . . p. 62
- 33 Ilustração de uma rede quadrada de tamanho linear  $L = 3$  completamente preenchida de ligações não direcionadas  $p_2 = 1$  (a) e uma rede completamente preenchida de ligações direcionadas  $p_1 = 1$  (b). . . . . p. 63

34	Ilustração de uma rede quadrada $L = 6$ com $p = 1$ para a fratura de caminhos ótimos. Os sítios de cor azul representam um par de origem (O) e de destino (D) na rede. As ligações de cor vermelha representam as ligações bloqueadas pelo modelo de fratura de caminhos ótimos. As ligações e sítios de cor cinza representam os outros elementos que foram visitados e não foram removidos. . . . .	p. 63
35	Quatro amostras de fraturas de caminhos ótimos para redes de tamanho linear $L = 128$ cujas frações de ligações direcionadas são (a) $p_2 = 0$ , (b) $p_2 = 0,3$ , (c) $p_2 = 0,7$ e (d) $p_2 = 1,0$ no regime de desordem forte de pesos. . . . .	p. 65
36	Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas ( $M_{OPC}$ ) em função do tamanho linear da rede ( $L$ ). A rede está totalmente preenchida de ligações não direcionadas $p_2 = 1$ . O expoente é o mesmo para as redes não direcionadas de Andrade <i>et al</i> [1]. . . . .	p. 66
37	Dimensão fractal ( $d_f$ ) como uma função da fração de ligações não direcionadas $p_2$ . . . . .	p. 66
38	Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas $M$ em função do tamanho linear da rede $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . . . . .	p. 67
39	Gráfico log-log da massa $M$ do caminho ótimo em função do tamanho linear da rede $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . . . . .	p. 67
40	Exemplos de fraturas de caminhos ótimos para redes de tamanho linear $L = 128$ com frações de ligações direcionadas para valores (a) $p_2 = 0$ , (b) $p_2 = 0,3$ , (c) $p_2 = 0,7$ e (d) $p_2 = 1,0$ no regime de desordem fraca. As falhas de cor laranja e preto foram produzidas pelo OPC no regime de desordem fraca. As falhas de cor preta são as mesmas no regime de desordem forte. . . . .	p. 68
41	Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas $M$ como função do tamanho linear da rede $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações não direcionadas $p_2 = 1$ . O expoente é o mesmo para as redes não direcionadas de Andrade <i>et al</i> [1]. . . . .	p. 69

42	Dimensão Fractal $d_f$ como uma função da fração de ligações não direcionadas $p_2$ no regime de desordem fraca de pesos. . . . .	p. 69
43	Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas $M$ como função do tamanho linear da rede $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações isotropicamente direcionadas $p_1 = 1$ . A rede está sobre a linha crítica $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . . . . .	p. 70
44	Gráfico log-log da massa $M$ do caminho mais curto em função do tamanho linear da rede quadrada $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . . . . .	p. 71
45	Rede de ruas para a cidade de Boston. As ligações direcionadas são coloridas em vermelho e as ligações não direcionadas são coloridas em cinza. A fração de ligações direcionadas é $p_1 = 0,37$ . Os dados de ruas e esquinas da cidade de Boston são obtidas no  OpenStreetMap contributors BY-SA. . . . .	p. 72
46	Distribuição de pesos $\varepsilon$ para dois horários de regimes de trânsito congestionado (18h) - linha de cor vermelho - e trânsito livre (4h) - linha de cor verde - para um dia da semana típico. A unidade de medida de $\varepsilon$ é s/m o inverso de velocidade. . . . .	p. 73
47	Ilustração da extensão do modelo de fratura de caminhos ótimos para a redes de ruas da cidade de Boston. A caixa em cor preto representa a região de interesse da cidade de Boston. O comprimento $l$ é a distância euclidiana entre o ponto de origem (O) e de destino (D). O caminho de cor azul é o caminho que tem a menor soma de pesos $\varepsilon$ e a rua que possui o maior peso é removida (bloqueio de cor vermelho). . . . .	p. 74

48 Comprimento médio em metros das ruas bloqueadas em Boston como função do raio  $l$  entre o par OD dos quatro experimentos no horário das 18h. O experimento 1 ( $\circ$ ) consistiu em manter a estrutura original da rede da cidade ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 2 ( $\square$ ) consistiu em tornar aleatório o sentido das ruas direcionadas das ruas de sentido único ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 3 ( $\triangle$ ) consistiu em trocar ruas não direcionadas (sentido duplo) em ruas direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ) e o experimento 4 ( $\diamond$ ) consistiu em mudar tornar toda a rede em ligações direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ). . . . . p. 75

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 18
<b>2</b>	<b>Teoria de Redes</b>	p. 20
2.1	Matemática de Redes . . . . .	p. 20
2.1.1	Matriz de Adjacência . . . . .	p. 21
2.1.2	Redes Direcionadas . . . . .	p. 21
2.1.3	Grau de um Sítio . . . . .	p. 22
2.2	Caminhos e Distâncias . . . . .	p. 24
2.3	Agregado Fortemente Conectado . . . . .	p. 24
<b>3</b>	<b>Percolação em Redes de Ligações Direcionadas</b>	p. 26
3.1	Percolação Clássica . . . . .	p. 26
3.1.1	Simulações em redes bidimensionais . . . . .	p. 28
3.2	Percolação em Redes Mistas . . . . .	p. 32
3.2.1	Agregado Fortemente Conectado . . . . .	p. 32
3.2.2	Reta Crítica em Redes Mistas . . . . .	p. 34
3.3	Modelos . . . . .	p. 37
3.4	Resultados . . . . .	p. 40
3.4.1	Primeira Parametrização em redes bidimensionais . . . . .	p. 40
3.4.2	Segunda Parametrização em redes bidimensionais . . . . .	p. 45
3.4.3	Percolação de Ligações Direcionadas em Rede Cúbica Simples . . . . .	p. 50
3.4.4	Estrutura do GSCC, do GOUT e relações entre a Percolação Clássica de Ligações . . . . .	p. 52

3.4.5	Relação Entre os Expoentes Críticos . . . . .	p. 53
<b>4</b>	<b>Fraturas de Caminhos Ótimos em Redes Regulares</b>	p. 55
4.1	Busca do Caminho Ótimo . . . . .	p. 55
4.1.1	Distribuição Hiperbólica de Pesos em uma Rede . . . . .	p. 56
4.1.2	Algoritmo de Dijkstra . . . . .	p. 57
4.2	Propriedades de Caminhos Ótimos em Regime de Desordem de Pesos .	p. 58
4.3	Fraturas de Caminhos Ótimos . . . . .	p. 60
4.4	Modelo . . . . .	p. 62
4.5	Resultados . . . . .	p. 64
4.5.1	Regime de Desordem Forte . . . . .	p. 64
4.5.2	Regime de Desordem Fraca . . . . .	p. 68
4.6	Fratura de Caminhos Ótimos Na Cidade de Boston . . . . .	p. 72
<b>5</b>	<b>Considerações e Perspectivas</b>	p. 76
	<b>Referências</b>	p. 78

# 1 Introdução

A teoria de percolação é uma das técnicas mais utilizadas na Física Estatística e possui muitas aplicações que são estendidas em teoria de redes complexas [2, 3]. A teoria pode ser usada para determinar transições de fases de agregados de sítios percolantes em sistemas físicos de tráfego de veículos [4, 5, 6], propagação de tendências sociais [7], ataque de redes de internet [8, 9], detecção de padrões climáticos [10, 11, 12, 13] e espalhamento de doenças [14].

A percolação pode ser estudada através do agregamento de sítios, de ligações ou ambos. O agregamento de sítios (uma representação grosseira de partículas) tem uma aplicabilidade grande em várias áreas da Física [2, 15, 16]. Tratando-se do agregamento de ligações, o trabalho pioneiro de Broadbent e Hammersley [17] criou a teoria de percolação de ligações. Quanto à classe de universalidade, a percolação de ligações pode ser classificada em três tipos: percolação clássica, percolação direcionada e o caso transitório entre os dois regimes - a percolação de ligações com direções aleatórias. A percolação de ligações direcionadas com sentidos aleatórios em regime transitório foi estudada por Redner em três trabalhos [18, 19, 20] no modelo de resistor-diodo-isolantes.

Quando um conjunto de ligações e sítios está conectado formando um agregado, este pode ser classificado em três tipos: o tipo *in-component*, o *out-component* e o agregado fortemente conectado SCC [21, 22]. Para compreender a diferença entre eles, escolha um sítio  $u$  qualquer em uma rede  $G$ : o agregado *out-component* é formado pelo conjunto de sítios ligados que podem ser acessados partindo de  $u$ , o agregado *in-component* é formado pelo conjunto de sítios que podem acessar o sítio genérico  $u$ . A interseção entre os agregados *in-component* e *out-component* é denominado de agregado de sítios fortemente conectados - *strongly connected components* - SCC.

Uma rede isotropicamente direcionada é composta por um conjunto de sítios em que cada ligação direcionada inserida tem a mesma probabilidade de se conectar com um sentido contrário. Este caso de percolação pode ser importante para a compreensão de

vários sistemas físicos. Por exemplo, compreender interações não simétricas em redes direcionadas aleatoriamente [23], compreensão do conceito de controlabilidade [24] e observabilidade [25], identificando ruas críticas em redes de tráfego em cidades [6].

Este trabalho tem o objetivo de entender o comportamento de agregados fortemente conectados em redes planares e cúbicas através da teoria de percolação e determinar os expoentes críticos e a dimensão fractal. O SCC em redes isotropicamente direcionadas - quando uma ligação em um sentido tem a mesma probabilidade de ser conectado no sentido contrário - exibe um novo conjunto de expoentes críticos e de dimensão fractal que não estão na classe universalidade de percolação de ligações clássica ou na percolação direcionada, embora a fração de ligações crítica  $p_c$  seja a mesma da percolação clássica de ligações. Uma rede quadrada que contém uma probabilidade de ter ligações direcionadas  $p_1$ , ligações não direcionadas  $p_2$  e de não ter ligações  $p_0$  apresentam os mesmos expoentes críticos quando obedecem a reta crítica  $p_2 + p_1/2 = p_c$ , onde  $p_c = 1/2$  é a fração crítica de ocupação da rede quadrada. As redes que permitem as frações  $(p_0, p_1, p_2)$  serão denominadas de redes de ligações mistas (RLM).

Outras propriedades que foram estudadas em redes de ligações mistas foram os caminhos ótimos e a fratura de caminhos ótimos. Para isso, valores de energia (pesos) foram gerados obedecendo uma distribuição de lei de potência em regime de desordem forte e fraca ajustados por um parâmetro  $\beta$  como realizado em Andrade *et al* [1, 26, 27] e inseridos em cada ligação das redes isotropicamente direcionadas. Simulações foram realizadas e os caminhos ótimos e as fraturas de caminhos ótimos (OPC) foram determinadas. O OPC foi desenvolvido por Andrade *et al* [1] e consiste em um modelo iterativo de fraturas de Caminhos Ótimos onde sítios ou ligações são removidos até que nenhum caminho atravesse a rede.

Esta tese está organizada da seguinte forma: os conceitos elementares de redes são descritas no Capítulo 2, a teoria de percolação em redes isotropicamente direcionadas é apresentada no Capítulo 3, as propriedades de caminhos ótimos e de fraturas de caminhos ótimos no regime de desordem forte e desordem fraca de pesos são apresentados no Capítulo 4, e as conclusões e perspectivas são apresentadas no Capítulo 5.

## 2 Teoria de Redes

Aqui são apresentados os conceitos fundamentais para a compreensão das propriedades de redes regulares de ligações e sítios.

### 2.1 Matemática de Redes

Uma rede, ou um grafo, é uma coleção de sítios e de ligações, também chamados de vértices e links, e de atores e de vínculos em Sociologia [16].

Neste trabalho, a notação utilizada para o número de sítios de uma rede é  $n$  e o número de ligações é  $m$ . Uma rede pode conter mais de uma ligação para o mesmo par de sítios, sendo esta situação denominada de *multiedge* e quando há uma ligação no mesmo sítio, essa configuração é denominada de *self-edges* ou *self-loop*.

Redes que não contêm *multiedges* ou *self-loops* são denominadas como redes simples, veja a Figura 1. No caso contrário, a rede é definida por um multi-grafos.

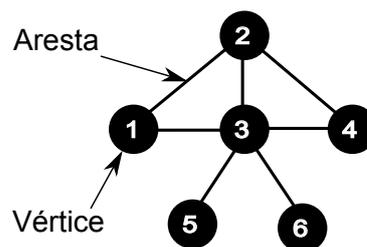


Figura 1: Exemplo de uma rede simples com ligações não direcionada.

Um tipo de rede simples é denominado de rede em grade – *lattice network*, neste tipo de rede, os sítios estão localizados em pontos no plano e as ligações se limitam aos primeiros vizinhos. Neste trabalho, redes em grades serão utilizadas na realização dos experimentos numéricos com frações de ligações direcionadas.

### 2.1.1 Matriz de Adjacência

A matriz de adjacência é uma forma de representar matematicamente qualquer tipo de rede.

Considere uma rede  $G$  não direcionada com  $n$  sítios definida com números inteiros de  $(1, \dots, n)$  valores, a atribuição de nome é exclusiva a cada sítio, e uma coleção de ligações  $(i, j)$  entre os sítios  $i$  e  $j$ . Por exemplo, a Figura 1 apresenta uma rede de 6 sítios e 12 ligações. A lista de ligações é  $(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3), (3,6)$  e  $(6,3)$ .

A matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  de uma rede  $G$  é descrita pela equação,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists (i, j) : A_{i,j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $i$  e  $j$  são os sítios de  $G$ . Os pesos de uma rede podem ser representados pela matriz de pesos e dada por,

$$W_{ij} = \begin{cases} w_{i,j}, & \text{se } \exists (i, j) : W_{i,j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

Por exemplo, a matriz de adjacência da Figura 1 é definida pela matriz de pesos unitários,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

Observe que os elementos da diagonal de  $\mathbf{A}$  são zeros e que não há valores maiores que 1, assim, configurando uma rede simples. Na rede não direcionada, quando uma ligação  $(i, j)$  é criada, dois elementos na matriz de adjacência recebem valor um,  $A_{i,j} = A_{j,i} = 1$ .

### 2.1.2 Redes Direcionadas

Uma rede de ligações direcionadas contém apenas uma ligação direcionada entre um par de sítios  $(i, j)$ . Se entre dois sítios  $i$  e  $j$  existem duas ligações com sentidos contrários, então é dito que entre os sítios  $i$  e  $j$  existe uma ligação bi-direcionada (não direcionada).

A matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  de uma rede direcionada  $G$  é representado por,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists (i \rightarrow j) : A_{i,j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $i$  e  $j$  são os sítios de uma rede  $G$ .

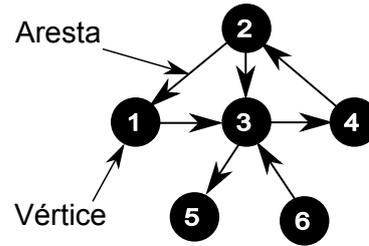


Figura 2: Exemplo de uma rede de ligações direcionadas.

Por exemplo, a matriz de adjacência de pesos unitários da Figura 2 é definida por,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

Percebe-se uma diferença entre as matrizes 2.3 e 2.5: a matriz de adjacência da Figura 2 não é simétrica, enquanto a matriz de adjacência da rede apresentada na figura 1 é simétrica.

### 2.1.3 Grau de um Sítio

O grau (*degree*) de um sítio é o número de ligações que se conectam a ele. Em uma rede não direcionada, o grau do sítio  $i$ , denominado  $k_i$ , é definido por,

$$k_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad (2.6)$$

onde  $n$  é o número de sítios e  $A_{ij}$  é a matriz de adjacência da rede  $G_u$ .

Uma rede não direcionada (*undirected*) contém entre dois sítios  $i$  e  $j$  duas terminações em cada ligação. O número de ligações ( $m$ ) de  $G$  é definido pela soma dos graus dos i-

ésimos sítios  $k_i$ , logo, o número de ligações é dado por,

$$2m = \sum_{i=1}^n k_i, \quad (2.7)$$

e usando a equação 2.6 em 2.7, é obtida a equação,

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (2.8)$$

O grau médio ( $c$ ) de  $G$  é

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i, \quad (2.9)$$

e usando a definição da equação 2.7, o Grau Médio é

$$c = \frac{2m}{n}, \quad (2.10)$$

Para uma rede direcionada  $G_d$ , o grau de um sítio pode ser classificado em dois tipos: grau de entrada  $k_i^{in}$  e grau de saída  $k_j^{out}$ . O grau de entrada é a soma de todas as ligações que convergem a um sítio  $i$ , enquanto o grau de saída é a soma de todas as ligações que divergem de um sítio  $i$ .

O grau de entrada de um sítio  $i$  é

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \quad (2.11)$$

e o grau de saída de um sítio  $j$  é

$$k_j^{out} = \sum_{i=1}^n A_{ij}, \quad (2.12)$$

O número de ligações de  $G$  é

$$m = \sum_{i=1}^n k_i^{in} = \sum_{j=1}^n k_j^{out} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (2.13)$$

O grau médio de  $G_d$  é

$$c_{in} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i^{in} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j^{out} = c_{out}, \quad (2.14)$$

onde, por uma equação mais simples, o grau médio de um sítio numa rede direcionada é

$$c = \frac{m}{n} \quad (2.15)$$

O grau médio de uma rede com ligações não direcionadas (equação 2.10) é o dobro do grau médio de uma rede direcionada (equação 2.15) devido ao preenchimento das duas pontas do sítio (*in* e *out*) quando uma ligação é conectada na rede não direcionada, pois, a ligação não direcionada tem o mesmo significado de duas ligações de sentido contrário.

## 2.2 Caminhos e Distâncias

Em Física, caminhos e distâncias têm um papel importante em determinar as interações e definir propriedades de sistemas físicos.

Um caminho (*path*) é uma sequência de ligações que conectam dois sítios de uma rede e a distância de um caminho, denominado de comprimento de caminho (*path length*) é a soma de todas os pesos do caminho dado por,

$$\Pi = \sum_{path} w_{ij}, \quad (2.16)$$

onde  $w_{ij}$  é o peso de uma ligação ( $i, j$ ).

## 2.3 Agregado Fortemente Conectado

A presença de ligações direcionadas com probabilidade  $p_1$  em redes torna necessário usar um conceito de agregado de sítios diferente da percolação clássica - o agregado fortemente conectado - *Strongly Connected Component* (SCC) [28]. O agregado é fortemente conectado  $S$ , devido a presença de ligações direcionadas, quaisquer dois sítios ( $u, v$ ) contidos em  $S$  possuem no mínimo dois caminhos distintos entre  $u$  e  $v$ .

O maior SCC de uma rede é definido como agregado gigante fortemente conectado - Giant-Strongly Connected Component (GSCC) [22].

Existem dois conceitos de agregados de sítios conectantes em redes de ligações direcionadas. O primeiro é conhecido como *Weakly Connected Component* (WCC) - agregado de sítios fracamente conectados e *Strongly Connected Component* - agregado de sítios fortemente conectados. No primeiro tipo, um sítio do WCC é acessível por um outro sítio que esteja contido no WCC, entretanto, nem todos são acessíveis a partir dele. Complementar

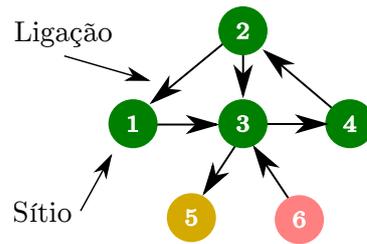


Figura 3: Amostra de três agregados de sítios fortemente conectados (SCC) que são  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{6\}$ . Considere um sítio  $i$ , por exemplo, o sítio 3 na rede de ligações direcionadas ilustrada. O conjunto de sítios que podem alcançar 3 é definido como o agregado *in-component*. O conjunto de sítios que são acessíveis a partir do sítio 3 é definido como o agregado *out-component* e a interseção do conjunto *in-component* e *out-component* é denominado de agregado fortemente conectado do sítio 3. Com esta definição é possível repartir uma rede sem ambiguidade entre os agregados. No SCC  $\{1,2,3,4\}$ , o caminho de 2 até 3 é composto pela ligação (2,3) e o caminho de 3 até 2 é composto pelas ligações (3,4) e (4,2).

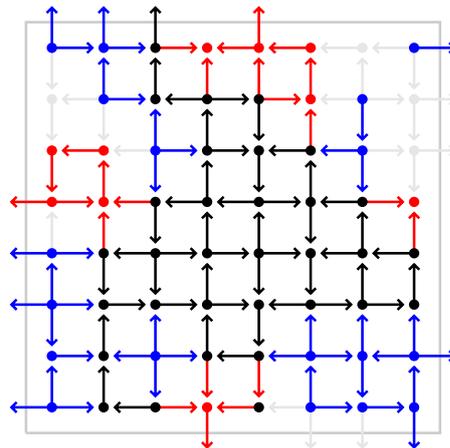


Figura 4: Rede quadrada de tamanho  $L = 8$  com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (azul + preto), GOUT (vermelho + preto) e GSCC (preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT.

ao SCC, um par de sítios que estejam contidos em um SCC são acessíveis mutuamente por pelo menos um caminho.

Observe que no caso de uma rede que contenha apenas ligações não direcionadas, a definição de componente conectado da percolação clássica de ligações tem equivalência ao agregado fortemente conectado.

## 3 Percolação em Redes de Ligações Direcionadas

### 3.1 Percolação Clássica

A teoria da percolação é um dos modelos mais simples que apresenta uma transição de fase. O modelo tem uma construção simples e descrita a seguir. Considere uma rede de  $n$  sítios e com uma capacidade de  $m$  ligações. Para cada par de sítios  $i$  e  $j$ , existe uma probabilidade  $p$  de existir uma ligação não direcionada  $(i, j)$ . A partir do agregado de ligações ou sítios formados, as propriedades desses agregados podem determinar como ocorrem as transições de fases e definir as classes de universalidades desses sistemas.

A compreensão da teoria da percolação facilita o entendimento de muitos outros sistemas físicos que exibem transições de fase [2, 15, 29]. Sobretudo, o conceito de fractais também está relacionado com a teoria da percolação e se apresenta em muitas partes da natureza. O conhecimento sobre percolação, fractais e *scaling* é importante em muitas áreas das ciências e suas aplicações, como por exemplo, escoamento em meios porosos [30], condutividade elétrica em materiais [31] e transições de fases em redes complexas [32, 33, 34, 21].

A percolação clássica pode ser de dois tipos: percolação de sítios e percolação de ligações. O modelo de percolação tem como variável fundamental a fração de ocupação  $p$ . Uma transição de fase ocorre quando a fração de ocupação  $p = p_c$ . Abaixo desse ponto, todos os agregados ocupam uma fração desprezível da rede [2]. No ponto crítico, em  $p_c$ , outros expoentes críticos podem ser determinados como descrito a seguir.

O parâmetro de ordem da transição do agregado gigante é definido por,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle S \rangle}{L^d} \approx (p - p_c)^\beta, \quad (3.1)$$

onde  $d$  é a dimensionalidade da rede e  $\beta$  é o expoente crítico para o parâmetro de ordem que depende apenas da dimensionalidade para  $d < 6$  [35].

Para verificar a independência dos efeitos de tamanho finito dos experimentos numéricos, o *finite size scaling* para o parâmetro de ordem é dado por

$$\frac{\langle S \rangle}{L^d} \approx L^{-\beta/\nu} f_1 [(p - p_c)^{1/\nu}], \quad (3.2)$$

onde  $\nu$  é o expoente crítico do comprimento de correlação  $\xi \approx |p - p_c|^{-1/\nu}$  que depende da dimensionalidade e  $f_1(x)$  é uma função de escala. No ponto crítico, temos que o parâmetro de ordem obedece a equação

$$\frac{\langle S \rangle}{L^d} \approx L^{-\beta/\nu} \quad (3.3)$$

O segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado é definido por,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle S^2 \rangle = \left\langle \sum_n S_n^2 - S_{max}^2 \right\rangle \approx (p - p_c)^{-\gamma}, \quad (3.4)$$

onde o somatório  $\sum_n (S_n^2) - S_{max}^2$  é sobre todos os agregados  $n$ . Isso é,  $\langle S^2 \rangle$  é a média do quadrado do tamanho de todos os agregados finitos, já que maior agregado  $S_{max}$  é subtraído explicitamente. O segundo momento está associado com a suscetibilidade no modelo de Ising e  $\gamma$  é o expoente crítico do segundo momento, que depende apenas da dimensionalidade.

O *finite size scaling* para o segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado é dado por

$$\langle S^2 \rangle \approx L^{\gamma/\nu} f_2 [(p - p_c)^{1/\nu}], \quad (3.5)$$

onde  $f_2$  é uma outra função de escala. No ponto crítico de percolação, o segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado obedece,

$$\langle S^2 \rangle \approx L^{\gamma/\nu}. \quad (3.6)$$

No ponto crítico de percolação, o tamanho do agregado gigante escala com o tamanho linear da rede com o expoente da dimensão fractal, dado por,

$$S \approx L^{d_f}, \quad (3.7)$$

onde  $d_f$  é a sua dimensão fractal.

Finalmente, os expoentes  $\tau$  e  $\sigma$  para a distribuição de tamanhos de agregados  $p(S)$

são definidos segundo,

$$p(S) \approx S^{-\tau} f_3 [(p - p_c) S^\sigma], \quad (3.8)$$

onde  $f_3$  é outra função de escala e no ponto crítico de percolação, temos que,

$$p(S) \approx S^{-\tau}. \quad (3.9)$$

No ponto crítico de percolação, muitos sistemas obedecem as relações de hiper-escala dados por,

$$d_f = d + \frac{\beta}{\nu}, \quad (3.10)$$

onde  $d_f$  é a dimensão fractal,  $\beta$  é o expoente crítico do parâmetro de ordem e  $\nu$  é o expoente crítico do comprimento de correlação. O expoente crítico de Fisher é

$$\tau = \frac{d}{d_f} + 1, \quad (3.11)$$

### 3.1.1 Simulações em redes bidimensionais

Inicialmente, simulações de percolação clássica foram realizados para checar o comportamento do agregado gigante fortemente conectado (GSCC) para redes com ligações não direcionadas ( $p_2 = 1$ ). Espera-se que o GSCC deverá ter a mesma estrutura de um agregado gigante da percolação clássica e os expoentes críticos devem ter o mesmo valor.

Os resultados do tamanho médio do agregado gigante conectado  $\langle S \rangle$  e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  em função de  $p$  são apresentados na figura 5 para a rede honeycomb, quadrada e triangular. Em todas as redes, o agregado gigante conectado tem o mesmo ponto crítico de percolação.

Os expoentes críticos para  $\langle S \rangle$  e para  $\langle S^2 \rangle$  foram determinados no ponto crítico de percolação,  $\beta/\nu = 0,10$  e  $\gamma/\nu = 1,79$  confirmam os valores encontrados em trabalhos relacionados [2] como apresentados nas figuras 6 e 7. Por último a dimensão fractal do tamanho médio do agregado gigante conectado é apresentado na figura 8. Na figura 9, o colapso do tamanho médio do agregado gigante conectado  $\langle S \rangle$  e do segundo momento  $\langle S^2 \rangle$  foi obtido usando os expoentes críticos e que as curvas passam pelo ponto crítico  $p_c$ .

Figura 5: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  com tamanhos diferentes de  $L$  para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f).

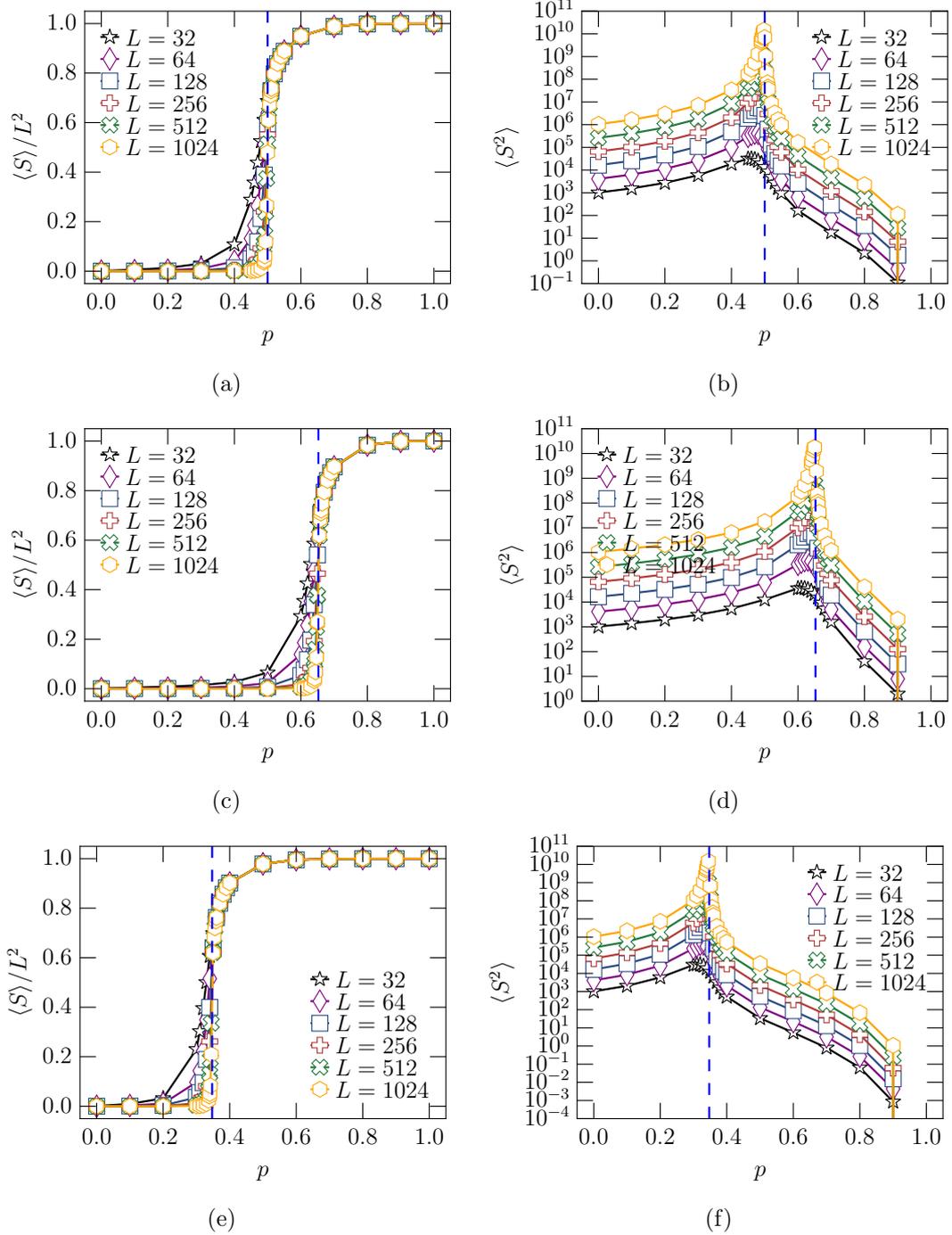


Figura 6: Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

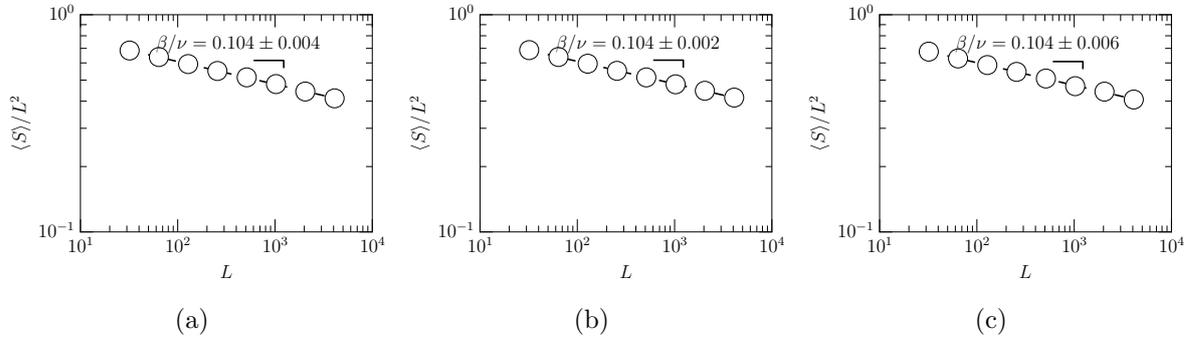


Figura 7: Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

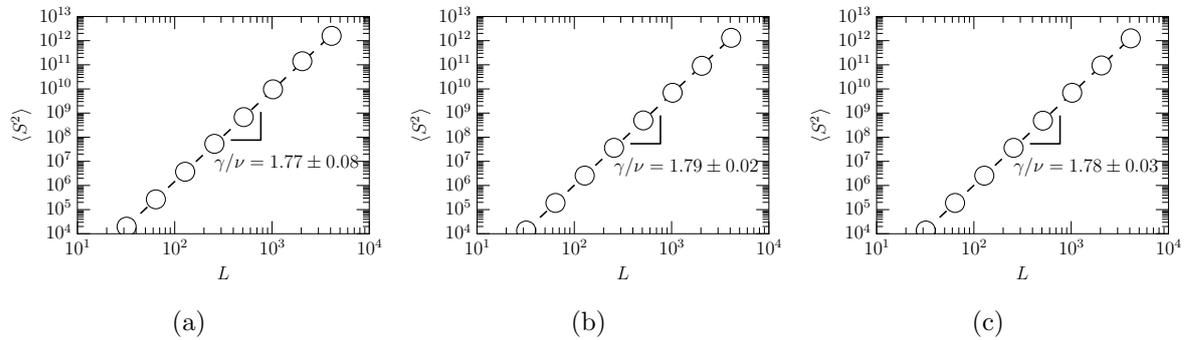


Figura 8: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

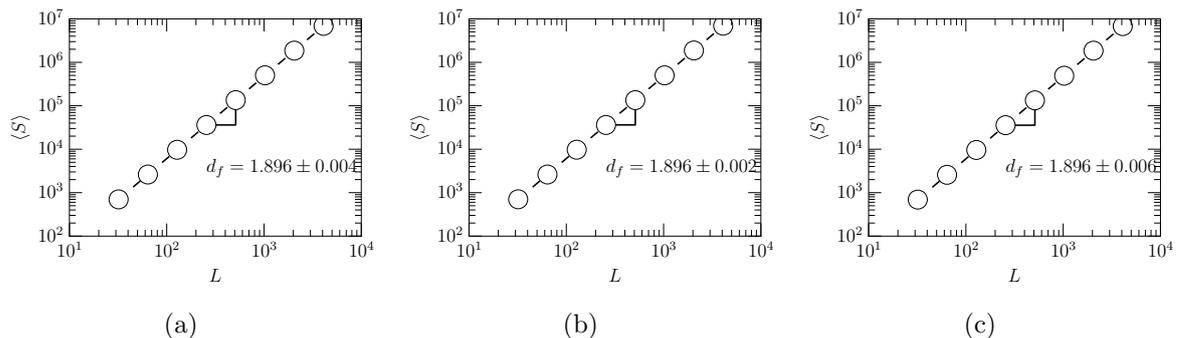
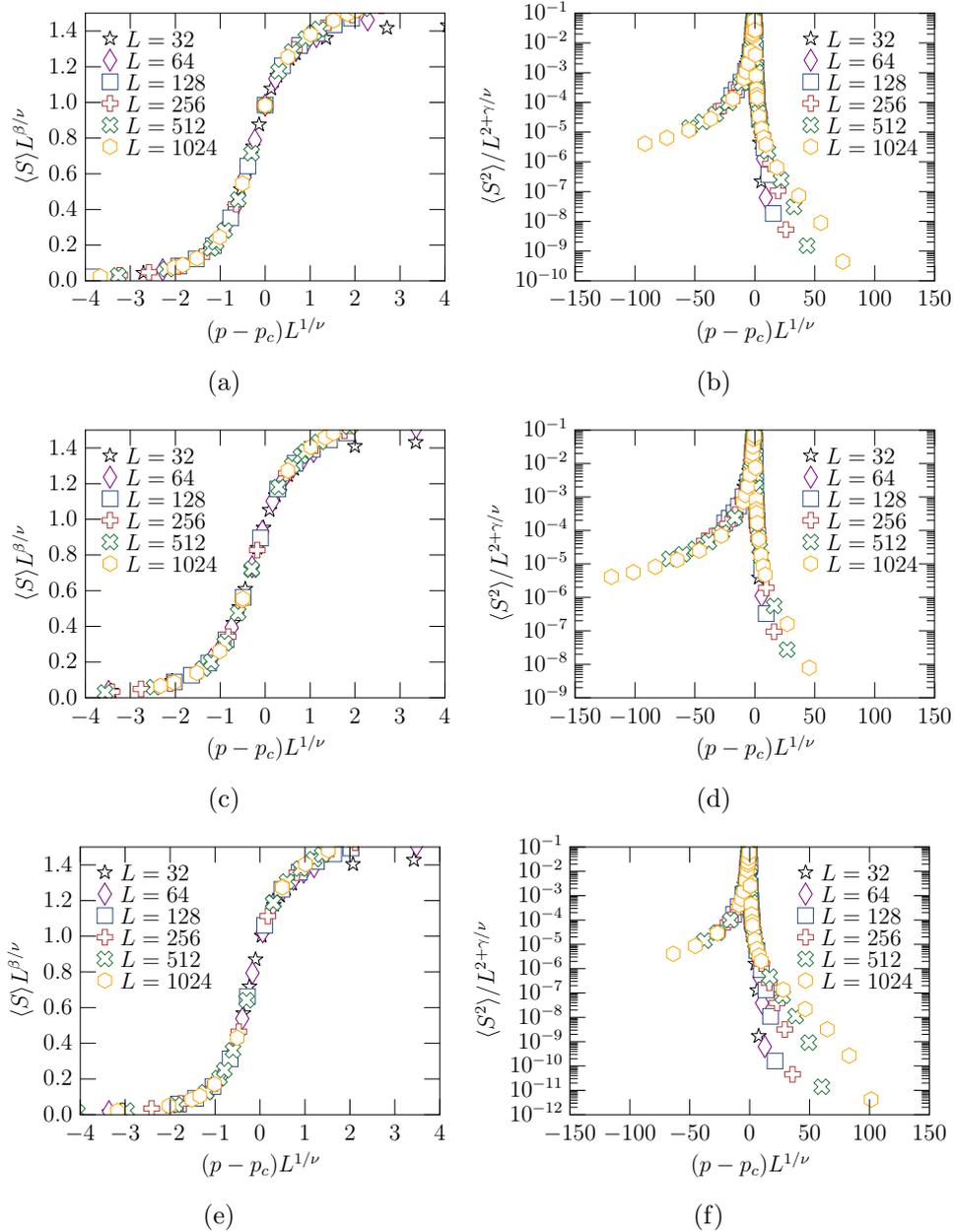


Figura 9: *Finite size scaling* para a média do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  para diferente tamanhos  $L$  - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f).



Os expoentes obtidos nas simulações de percolação clássica de ligações em redes bi-dimensionais mostram que o maior agregado fortemente conectado tem o mesmo ponto crítico de percolação clássica e é consistente com os valores dos expoentes na literatura [2]. Aplicando (não apresentados aqui) pequenas perturbações ( $\delta$ ) em  $p_c \pm \delta$  é possível verificar o valor correto de  $p_c$ .

## 3.2 Percolação em Redes Mistas

Nesta seção, as redes simuladas possuem ligações direcionadas, além das ligações não direcionadas e de vacâncias como na percolação clássica. Portanto, podem ter um estado misto com vacâncias de probabilidade  $p_0$ , com ligações direcionadas de probabilidade  $p_1$  e com ligações não direcionadas de probabilidade  $p_2$ . A cada rede simulada, a relação  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$  é preservada e cada ligação direcionada é inserida na rede com probabilidade  $p_+ = p_- = p_1/2$  de ter um sentido ou outro, garantindo a isotropia nas direções da rede.

O modelo de percolação utiliza o mecanismo descrito a seguir. Inicialmente a rede consiste de  $n \gg 1$  sítios e nenhuma ligação. O modelo de preenchimento de ligações é iterativo e uma ligação direcionada  $(i, j)$  é adicionada entre dois sítios  $i$  e  $j$  ou entre  $j$  e  $i$ . No caso não direcionado, a informação pode percorrer os dois sentidos entre os sítios de  $i$  e  $j$ . As redes possuem condições periódicas de contorno e as ligações das bordas comunicam os sítios do outro lado da rede.

Um dos primeiros trabalhos que tratam de redes com ligações direcionadas foi inicialmente proposto por Broadbent e Hammersley [17] que introduzem a percolação de ligações. Redner *et al* [18, 19, 20] apresentou expoentes novos quando ligações direcionadas estão presentes numa rede de ligações.

Percolação em redes de ligações direcionadas com direção preferencial foi estudada por Inui *et al* [36] e teoria de renormalização de grupos foi aplicada para compreensão e definição de classe de universalidade por Janssen *et al* (2000) [37] e Stenull *et al* (2001) [38]. Em um trabalho de Zhou *et al* (2012) [39] o mesmo problema foi estudado em uma rede cúbica com ligações direcionadas com sentido preferencial.

### 3.2.1 Agregado Fortemente Conectado

Como apresentado na seção 2.3, a presença de ligações direcionadas com probabilidade  $p_1$  em redes torna necessário usar o conceito de agregado fortemente conectado - *Strongly Connected Component* (SCC) [28]. O agregado fortemente conectado  $S$  é um caso geral do agregado conectado de ligações não direcionadas e quaisquer dois sítios  $(u, v)$  contidos em  $S$  possuem no mínimo dois caminhos distintos entre  $u$  e  $v$ .

O maior SCC de uma rede é definido como agregado gigante fortemente conectado - Giant-Strongly Connected Component (GSCC) [22].

Dorogotsev [22] determinou expoentes críticos do agregado gigante fortemente conect-

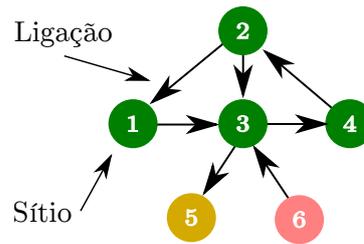


Figura 10: Amostra de três agregados de sítios fortemente conectados (SCC) que são  $\{1,2,3,4\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{6\}$ . Considere um sítio  $i$ , por exemplo, o sítio 3 na rede de ligações direcionadas ilustrada. O conjunto de sítios que podem alcançar 3 é definido como o agregado *in-component*. O conjunto de sítios que são acessíveis a partir do sítio 3 é definido como o agregado *out-component* e a interseção do conjunto *in-component* e *out-component* é denominado de agregado fortemente conectado do sítio 3. Com esta definição é possível repartir uma rede sem ambiguidade entre os agregados. No SCC  $\{1,2,3,4\}$ , o caminho de 2 até 3 é composto pela ligação (2,3) e o caminho de 3 até 2 é composto pelas ligações (3,4) e (4,2).

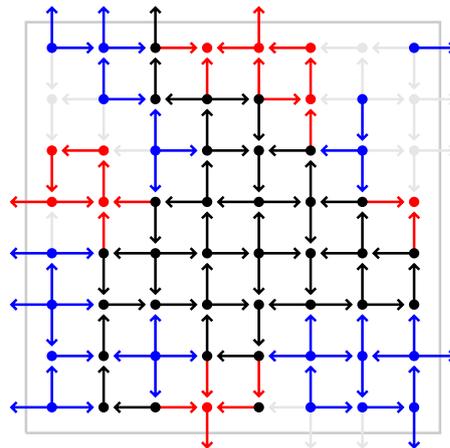


Figura 11: Rede quadrada de tamanho  $L = 8$  com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (azul + preto), GOUT (vermelho + preto) e GSCC (preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT.

tado (GSCC), agregado gigante *in-component* (GIN) e agregado gigante *out-component* (GOUT) em redes *World Wide Web* (WWW). Newman *et al.* (2001) [21] apresentaram resultados de GOUT em redes correlacionadas e Boguná, M e Serrano M. A. [40] determinaram equações para a fração crítica e tamanhos de GSCC, GIN e GOUT para redes não correlacionadas e ambas as redes são de livre escala.

### 3.2.2 Reta Crítica em Redes Mistas

Redner [18, 19] determinou a reta crítica para uma rede com uma fração de ligações direcionadas  $p_1$  e fração de ligações não direcionada  $p_2$  na rede quadrada, dada por,

$$p_2 + \frac{p_1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Através de um diagrama com  $p_1$  e  $p_2$  nos eixos, a linha crítica da equação 3.12 limita a transição de agregados finitos para agregado gigante de sítios fortemente conectados para a rede quadrada de ligações.

Uma equação da linha crítica para uma rede triangular e uma rede honeycomb podem ser obtidas através da transformação estrela-triângulo. Essa transformação é a composta de um grafo planar como ilustra a figura 12.

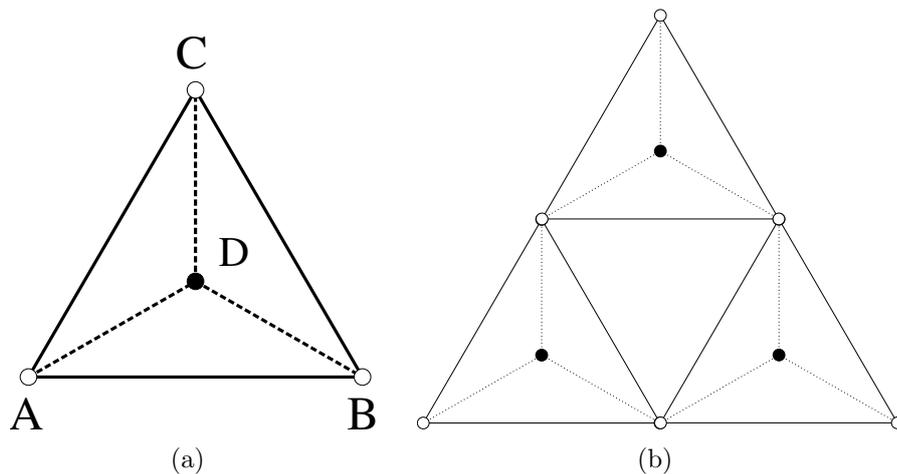


Figura 12: Ilustração de um grafo para a transformação estrela-triângulo. As ligações de linha contínua tem probabilidade  $q_0, q_1$  e  $q_2$  e as ligações de linha pontilhada possuem probabilidade  $p_0, p_1$  e  $p_2$  de existirem.

A estrela  $ABC$  com coordenação três, centrada em  $D$ , representa uma célula da rede honeycomb. Entre qualquer par na estrela,  $p_0$  é a probabilidade de ser uma vacância,  $p_1$  é a probabilidade de ser uma ligação direcionada e  $p_2$  é a probabilidade de ser uma ligação não direcionada.

O triângulo  $ABC$  representa uma rede triangular de coordenação 6 cujas probabilidades são:  $q_0$  é a probabilidade de ser uma vacância,  $q_1$  é a probabilidade de ser uma ligação direcionada e  $q_2$  é a probabilidade de ser uma ligação não direcionada.

A enumeração de todas as configurações possíveis na estrela para que o sítio  $A$  se

conecte apenas a  $B$  é dado por,

$$P_{AB} = \left(\frac{p_1}{2}\right) p_2^2 + 2 \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 p_2 + \left(\frac{p_1}{2}\right)^3 + p_0 p_2^2 + 2p_0 \left(\frac{p_1}{2}\right) p_2 + p_0^2 \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 \quad (3.13)$$

onde  $P_{AB} = P_{AC}$  por simetria.

A probabilidade de que o sítio  $A$  se conecte a  $B$  e  $C$  simultaneamente é

$$P_{ABC} = p_2^3 + 3 \left(\frac{p_1}{2}\right) p_2^2 + 3 \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 p_2 + \left(\frac{p_1}{2}\right)^3, \quad (3.14)$$

onde  $p_0$  é a probabilidade de não existir uma ligação (vacância),  $p_1$  é a probabilidade de ter uma ligação direcionada; devido a isotropia de cada direção, a probabilidade de escolher uma direção e de ser direcionada é  $p_1/2$ ; e  $p_2$  é a probabilidade de ter uma ligação que possa ser percorrida nas duas direções, isso é, existe uma ligação bi-direcionadas (não direcionada).

A probabilidade de que  $A$  não se conecte a  $B$  e nem a  $C$  é dado por

$$P_{null} = \left(\frac{p_1}{2}\right) p_2^2 + 5 \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 p_2 + 5 \left(\frac{p_1}{2}\right)^3 + p_0 p_2^2 + 8p_0 \left(\frac{p_1}{2}\right) p_2 + 10p_0 \left(\frac{p_1}{2}\right)^2 + 3p_0^2 \left(\frac{p_1}{2}\right) + p_0^3, \quad (3.15)$$

No triângulo, a probabilidade de que um sítio  $A$  se conecte ao sítio  $B$  ou  $C$  é dado por

$$Q_{AB} = \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 q_2 + \left(\frac{q_1}{2}\right)^3 + 2q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right) q_2 + 2q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + q_0^2 q_2 + q_0^2 \left(\frac{q_1}{2}\right), \quad (3.16)$$

Devido a isotropia de cada direção, a probabilidade de escolher uma direção e de ser direcionada é  $q_1/2$ ; e  $q_2$  é a probabilidade de ter uma ligação que possa ser percorrida nas duas direções, isso é, existe uma ligação bi-direcionada (não direcionada).

A probabilidade de que o sítio  $A$  se conecte ao sítio  $B$  e  $C$  mutuamente é dada por

$$Q_{ABC} = q_2^3 + 6 \left(\frac{q_1}{2}\right) q_2^2 + 9 \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 q_2 + 4 \left(\frac{q_1}{2}\right)^3 + 3q_0 q_2^2 + 6q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right) q_2 + 3q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right)^2, \quad (3.17)$$

A probabilidade de que o sítio  $A$  não se conecte ao sítio  $B$  e nem ao sítio  $C$  é dado por

$$Q_{null} = \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 q_2 + 2 \left(\frac{q_1}{2}\right)^3 + 2q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right) q_2 + 5q_0 \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + q_0^2 q_2 + 4q_0^2 \left(\frac{q_1}{2}\right) + q_0^2, \quad (3.18)$$

No ponto crítico, como as redes estão no mesmo espaço topológico, as probabilidades dos conjuntos conectados devem ser iguais,  $P_{null} = Q_{null}$ ,  $P_{AB} = Q_{AC}$  e  $P_{ABC} = Q_{ACC}$  e a completude deve se manter verdadeira  $p_0 + p_1 + p_2 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$ . Essas equações podem ser resolvidas considerando as condições acima, logo,

$$p_2 + \frac{1}{2}p_1 = 1 - \text{sen} \left( \frac{\pi}{18} \right) = p_c^{\text{honeycomb}} \quad (3.19)$$

e

$$q_2 + \frac{1}{2}q_1 = \text{sen} \left( \frac{\pi}{18} \right) = p_c^{\text{triangular}}, \quad (3.20)$$

em que  $p_c^{\text{honeycomb}}$  é o ponto crítico da rede honeycomb e  $p_c^{\text{triangular}}$  é o ponto crítico da rede triangular.

### 3.3 Modelos

As redes mistas foram construídas através de duas parametrizações, tal que a probabilidade de ter uma ligação direcionada  $p_1$  e a probabilidade de ter uma ligação não direcionada  $p_2$  seja parametrizada pela probabilidade de ocupação  $p$ . As duas parametrizações usadas nos experimentos seguem caminhos distintos para ocupação das frações  $p_1$  e  $p_2$  e cruzam a linha crítica de percolação, como é apresentado na figura 13.

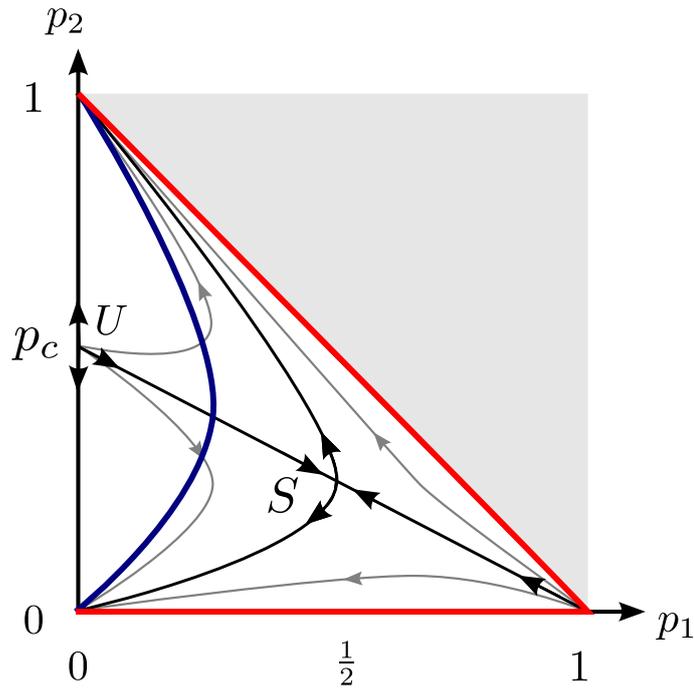


Figura 13: Diagrama de fases para a percolação mista e isotropicamente direcionada.  $p_c$  é a fração crítica de percolação clássica para a rede honeycomb, quadrada ou triangular. A primeira parametrização consiste em preencher as ligações com frações  $p_1$  e  $p_2$  seguindo aproximadamente o contorno de cor azul. A segunda parametrização percorre todo o eixo  $p_1$  e segue até  $p_2$  pelo contorno de cor vermelho.

#### Primeira Parametrização

As probabilidades de ter ligações direcionadas, não direcionadas e probabilidade de não ter ligações é dado pelo conjunto de equações.

$$p_2 = p^2, \quad (3.21)$$

$$p_1 = 2p(1 - p) \quad (3.22)$$

$$p_0 = (1 - p)^2. \quad (3.23)$$

As simulações da primeira parametrização tem as redes construídas com  $p_2 = p^2$  sendo a probabilidade de ter uma ligação não direcionada,  $p_1 = 2p(1 - p)$  a probabilidade de ter uma ligação direcionada e  $p_0 = (1 - p)^2$  a probabilidade de ter uma vacância entre um par de sítios, onde  $p$  é a chance de um sítio  $i$  ter uma ligação com seu vizinho.

### Segunda Parametrização

O segundo experimento consiste em adicionar ligações direcionadas e não direcionadas seguindo as equações a seguir,

$$p_0 = \max(0, 1 - 2p), \quad (3.24)$$

$$p_1 = 2 \min(p, 1 - p) e \quad (3.25)$$

$$p_2 = \max(0, 2p - 1). \quad (3.26)$$

onde  $p$  é a probabilidade de ocupar um par de sítios.

A rede inicia com sítios sem ligações (vacâncias) e na medida que  $p$  aumenta, ligações direcionadas (de sentido aleatório) são inseridas até que em  $p = 1/2$  todos os sítios estejam preenchidos com no mínimo uma ligação direcionada ( $p_1 = 1$ ), em sequência, o valor de  $p$  continua aumentando e as ligações duplas são formadas preenchendo as ligações direcionadas até que em  $p = 1$  a rede esteja completamente preenchida com ligações não direcionadas  $p_2 = 1$ .

Nos experimentos numéricos bidimensionais, no ponto crítico, o número de amostras inicia com  $n_{samples} = 39400$  para uma rede  $L = 32$  e é dividida por 2 até  $n_{samples} = 150$  amostras para uma rede de tamanho  $L = 8192$ . Para simulações de  $p \neq p_c$ , o número de amostras para o tamanho  $L = 32$  é 8192,  $L = 64$  é 4096,  $L = 128$  é 2048,  $L = 256$  é 1024 e  $L = 1024$  é 512.

Nos experimentos tridimensionais, no ponto crítico  $p_c \approx 0,2488$  [12, 41], o número de amostras para o tamanho  $L = 16$  é 9600,  $L = 32$  é 8192,  $L = 64$  é 4096,  $L = 128$  é 2048. O número de amostras é 1000 para cada tamanho  $L$  quando para  $p \neq p_c$ . Os experimentos foram realizados com uma rede cúbica simples. Para este experimento, a primeira parametrização foi utilizada. Os resultados dos experimentos de percolação dos GSCC são apresentados na sequência a seguir.

O algoritmo 1 ilustra o procedimento de preenchimento de ligações.

---

**Algorithm 1** Regra de adição de ligações entre dois sítios para o segundo experimento.

---

```

p ← [0, 1]
lattice ← [honeycomb, square, triangular]
para link ∈ G faça
    link ← 0
fim para
para link ∈ G faça
    x ← randomUniformReal
    se x < 2p então
        w ← randomUniformReal
        se w < 1/2 então
            link(u, v) ← 1
            y ← randomUniformReal
            se y + 1 < 2p então
                link(v, u) ← 1
            fim se
        senão
            link(v, u) ← 1
            z ← randomUniformReal
            se z + 1 < 2p então
                link(u, v) ← 1
            fim se
        fim se
    fim se
fim para

```

---

## 3.4 Resultados

### 3.4.1 Primeira Parametrização em redes bidimensionais

Em cada rede gerada nos experimentos, o GSCC foi determinado usando o algoritmo de Tarjan [42]. A figura 14 apresenta ilustrações de duas redes com o GSCC, GIN e o GOUT.

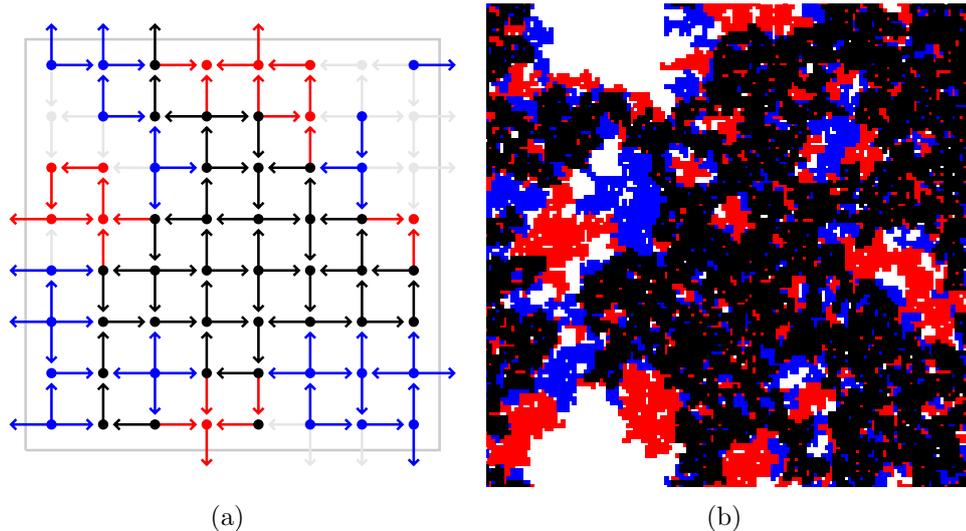


Figura 14: Rede quadrada de tamanho  $L = 8$  (a) e  $L = 128$  (b) com condição de contorno periódica com o conjunto GIN (sítios de cor azul e preto), GOUT (sítios de cor vermelho + preto) e GSCC (sítios de cor preto) que é a interseção dos conjuntos GIN e GOUT.

As simulações da primeira parametrização têm as redes construídas com  $p_2 = p^2$  sendo a probabilidade de ter uma ligação não direcionada,  $p_1 = 2p(1 - p)$  a probabilidade de ter uma ligação direcionada e  $p_0 = (1 - p)^2$  a probabilidade de ter uma vacância entre um par de sítios, onde  $p$  é a chance de existir de um sítio  $i$  ter uma ligação com seu vizinho.

Os resultados do tamanho médio do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  em função de  $p$  são apresentados na figura 15 para a percolação de ligações direcionadas isotrópicas. Para a rede honeycomb, quadrada e triangular, o ponto crítico de percolação também ocorre quando  $p_2 + p_1/2 = p_c$ , onde  $p_c$  é o ponto crítico da percolação clássica em cada rede. As redes nesta configuração possuem uma fração mista de ligações devido ao procedimento de geração das malhas, a fração de ligações direcionadas, a fração de ligações não direcionadas e a fração de vacâncias mantém a relação  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ .

Os expoentes críticos obtidos para  $\langle S \rangle$  e para  $\langle S^2 \rangle$  no ponto crítico de percolação da

rede quadrada são  $\beta_{scc}/\nu_{scc} \simeq 0,196$  e  $\gamma_{scc}/\nu_{scc} \simeq 1,60$  como apresentam as figuras 16 e 17 e os valores são iguais dentro da barra de erro para as redes triangular e honeycomb. Na percolação clássica, esses expoentes possuem os valores  $\beta/\nu \approx 0,10$  e  $\gamma/\nu \approx 1,79$ . A dimensão fractal do tamanho médio do agregado gigante conectado é apresentado na figura 18 e o valor encontrado é  $d_{scc} \simeq 1,801$ , diferente da percolação clássica que é dado por  $d_f \approx 1,89$ .

Usando os expoentes  $\beta_{scc}/\nu_{scc}$  e  $\gamma_{scc}/\nu_{scc}$  ajustados nos experimentos da primeira parametrização, o colapso do tamanho médio do agregado gigante fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  é apresentado na figura 19. Mostrando que o comportamento do agregado gigante fortemente conectado (GSCC) é invariante de escala no limite termodinâmico.

O expoente  $\nu$  entre a percolação clássica de ligações não direcionadas e a percolação isotrópica de ligações direcionadas tem o mesmo valor [43]. Os resultados não são mostrados aqui, mas partindo de uma rede hierárquica e construindo o conjunto de equações de renormalização de uma célula superior é possível mostrar que o expoente  $\nu_{scc}$  é o mesmo para a percolação clássica. Usando o  $\nu$  para obter os expoentes  $\beta_{scc}$  e  $\gamma_{scc}$ , é possível observar que  $\beta_{scc}$  e  $\gamma_{scc}$  são um tipo diferente dos tipos de percolação conhecidos, a saber da percolação clássica de ligações não direcionadas e da percolação direcionadas como foi apresentado por Redner *et al* [18, 19, 20].

Figura 15: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  com tamanhos diferentes de  $L$  para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f).

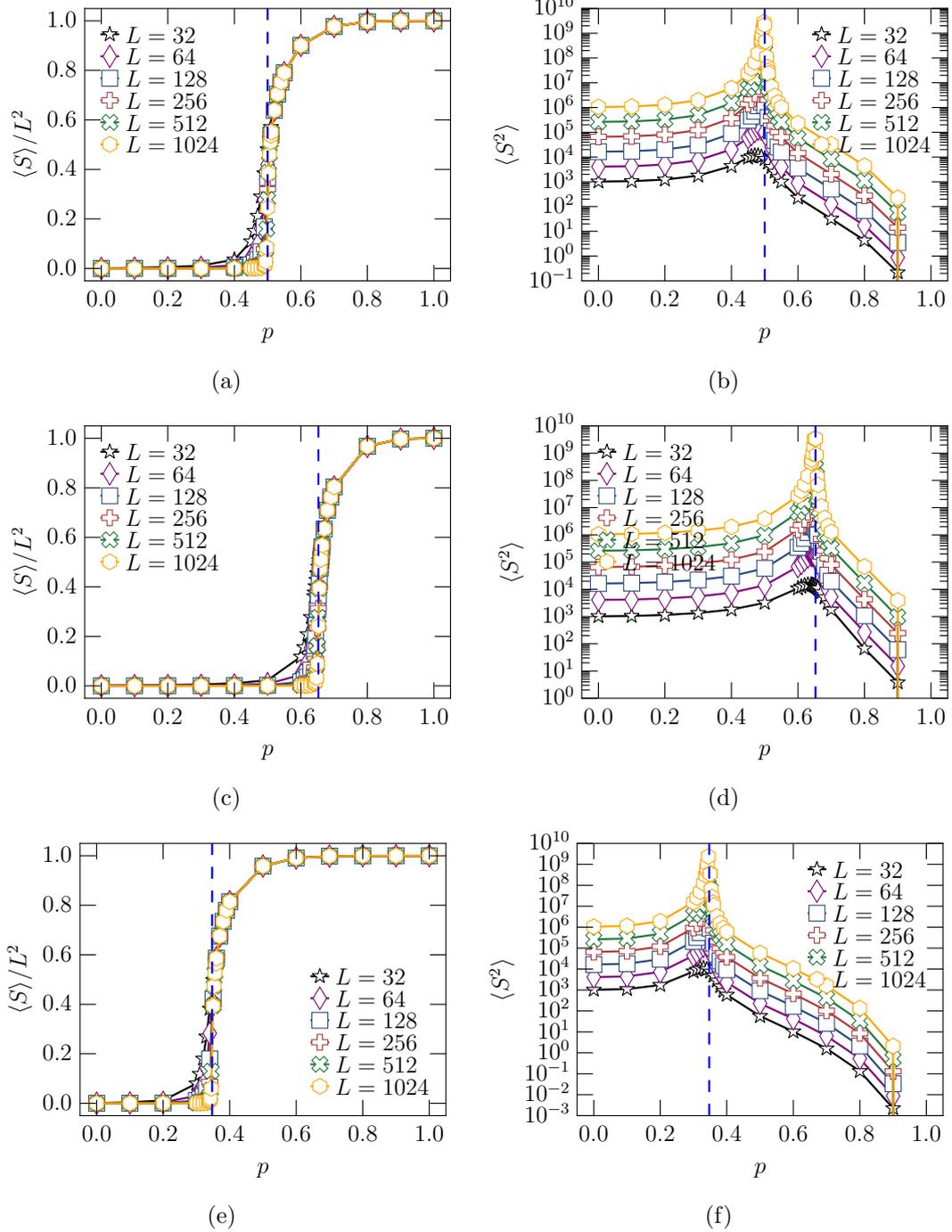


Figura 16: Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

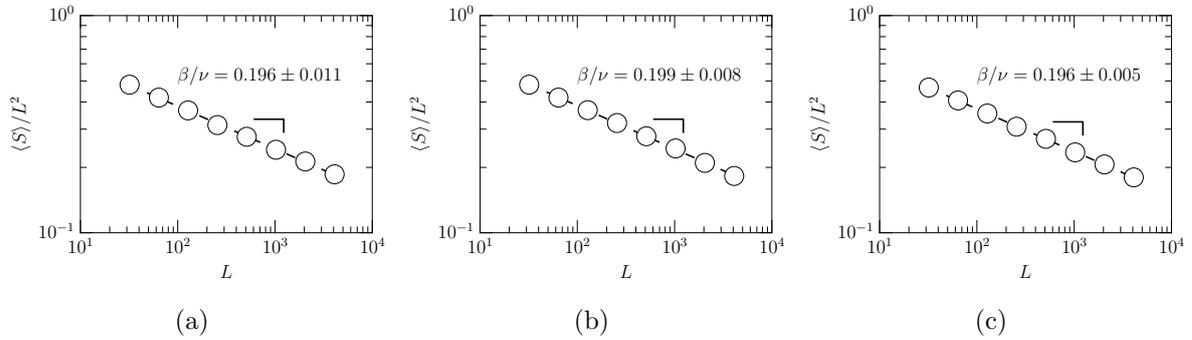


Figura 17: Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

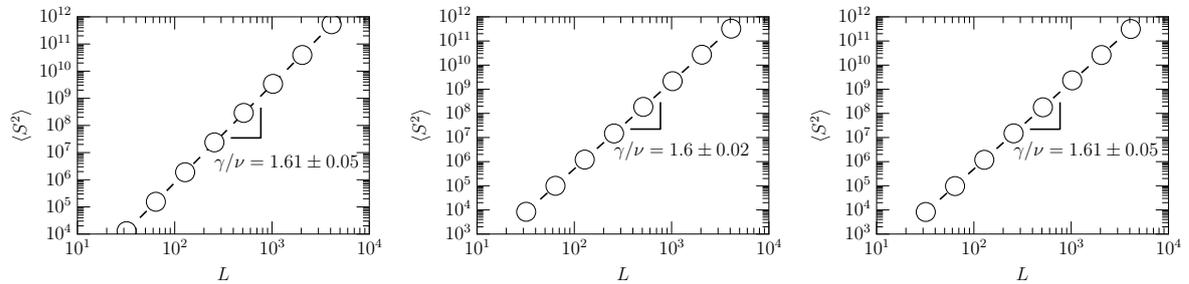


Figura 18: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

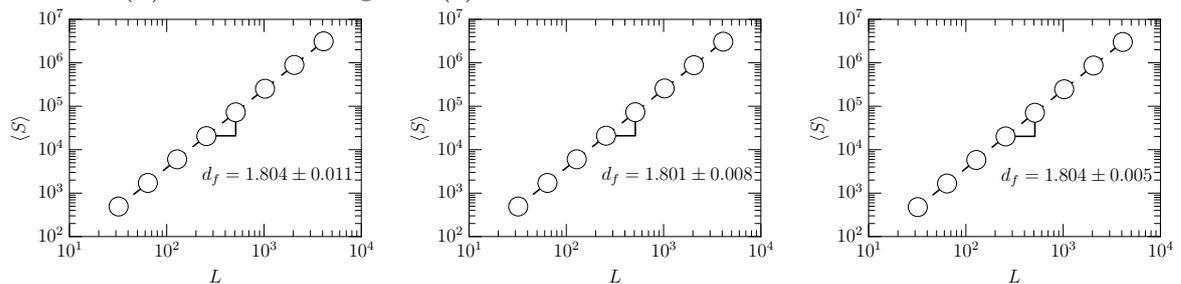
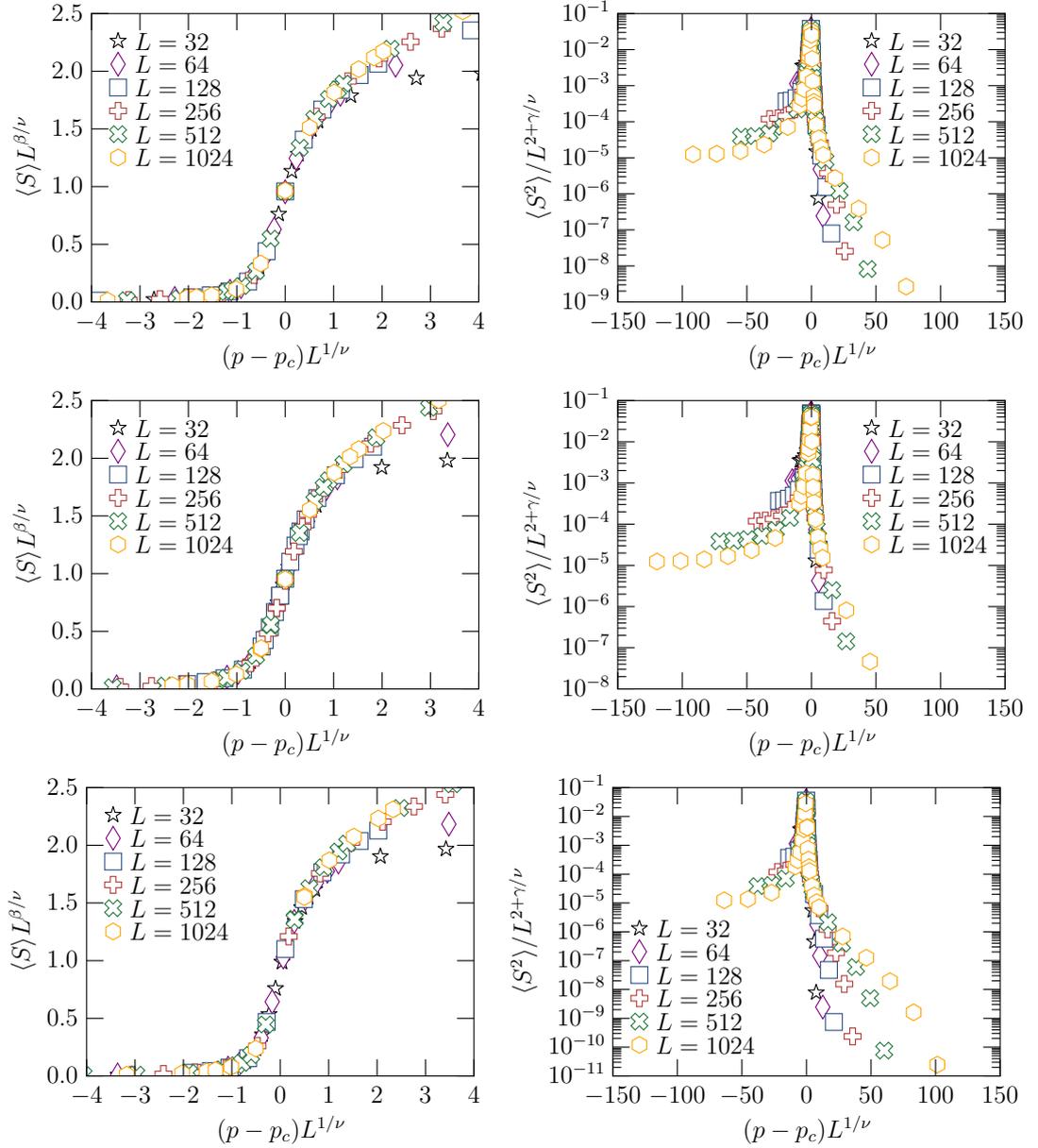


Figura 19: *Finite size scaling* para a média do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  para diferente tamanhos  $L$  - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f).



### 3.4.2 Segunda Parametrização em redes bidimensionais

Diferente dos resultados apresentados na seção 3.4.1, na segunda parametrização há uma ordem de preenchimento das ligações. A rede inicia com sítios sem ligações (vacâncias) e na medida que  $p$  aumenta, ligações direcionadas (de sentido aleatório) são inseridas até que em  $p = 1/2$  todos os sítios estejam preenchidos com no mínimo uma ligação direcionada ( $p_1 = 1$ ), em sequência, o valor de  $p$  continua aumentando e as ligações duplas são formadas preenchendo as ligações direcionadas até que em  $p = 1$  a rede esteja completamente preenchida com ligações não direcionadas  $p_2 = 1$ .

Os resultados do tamanho médio do maior agregado conectado  $\langle S \rangle$  e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  em função de  $p$  são apresentados na figura 20 para a percolação de ligações direcionadas isotrópicas. Para a rede quadrada, o ponto crítico de percolação também ocorre quando  $p_c = 1/2$ . Os expoentes críticos  $\beta_{scc}/\nu_{scc}$ ,  $\gamma_{scc}/\nu_{scc}$  e  $d_{scc}$  em  $p = 1/2$  possuem os mesmos valores dos expoentes da primeira parametrização considerando a barra de erro e os mesmos valores para as redes triangular e honeycomb.

Os expoentes,  $\beta_{scc}/\nu_{scc} \approx 0,198$ ,  $\gamma_{scc}/\nu_{scc} \approx 1,63$  e  $d_{scc} \approx 1,802$  determinados pelo ajuste não linear dos dados satisfazem as relações de hiper-escala para fenômenos críticos no ponto crítico de transição. A primeira equação é dada por  $\tau_{scc} = d/d_{scc} + 1 = 2,1098$ , a segunda equação é dada por  $d_{scc} = d - \beta_{scc}/\nu_{scc} = 1,802$  e a terceira equação é dada por  $\gamma_{scc}/\nu_{scc} + 2\beta_{scc}/\nu_{scc} = d \rightarrow 1,63 + 2 \times 0,198 = 2,02$ .

Figura 20: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  com tamanhos diferentes de  $L$  para a rede quadrada em (a) e (b), honeycomb em (c) e (d) e triangular em (e) e (f).

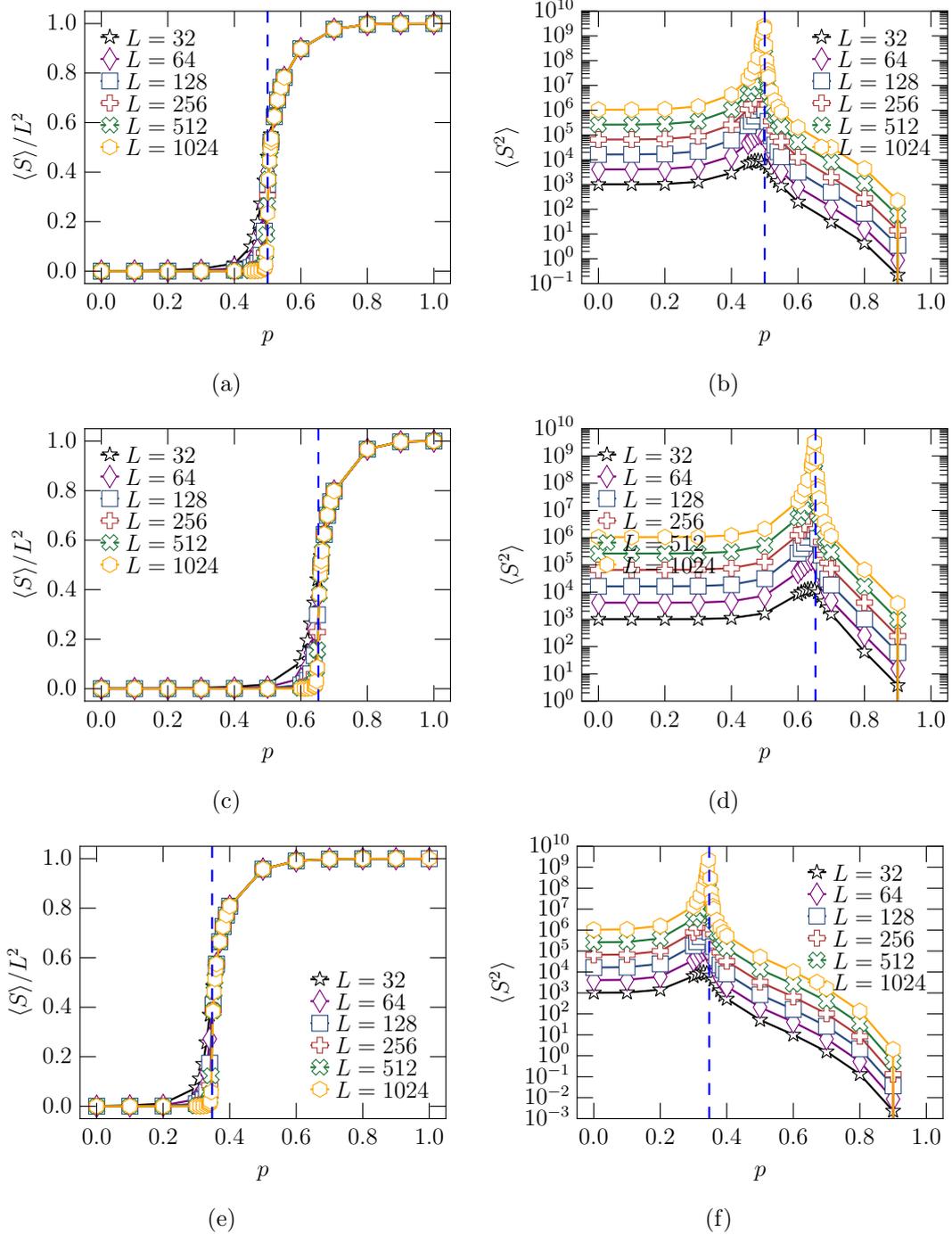


Figura 21: Média do tamanho de maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

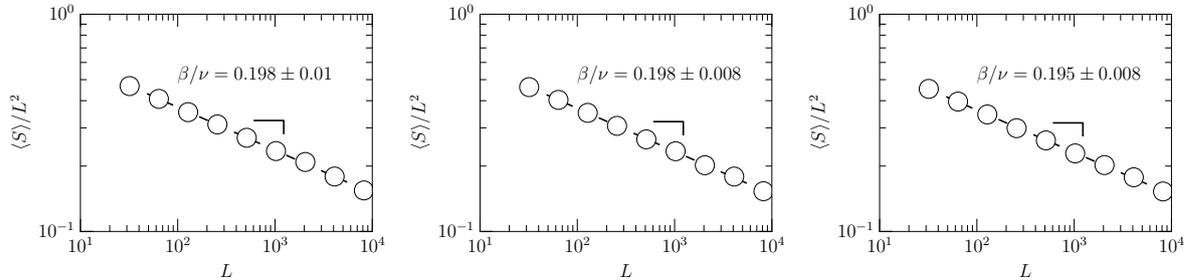


Figura 22: Média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

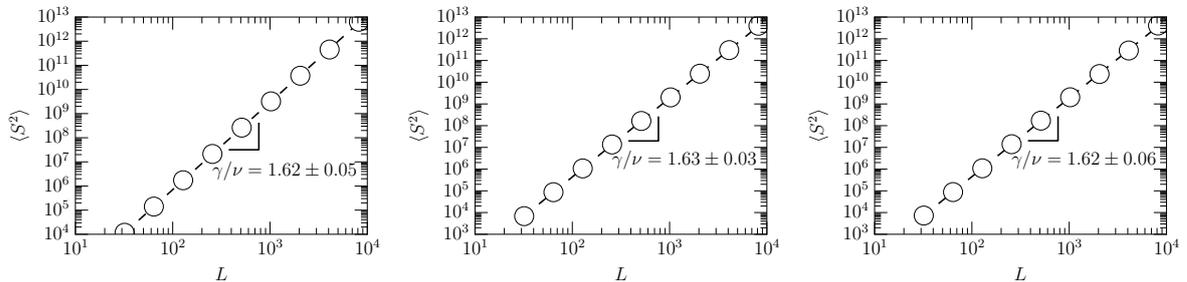


Figura 23: Média do tamanho do maior agregado fortemente conectado como função do tamanho linear  $L$  no ponto crítico de percolação para a rede honeycomb (a), a rede quadrada (b) e a rede triangular (c).

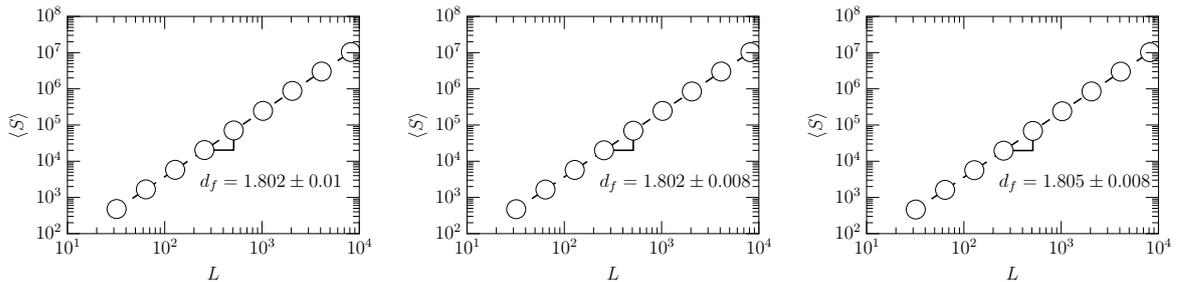


Figura 24: *Finite size scaling* para a média do maior agregado fortemente conectado  $\langle S \rangle$  e a média do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da probabilidade de ocupação  $p$  para diferente tamanhos  $L$  - rede quadrada em (a) e (b), rede honeycomb em (c) e (d) e rede triangular em (e) e (f).

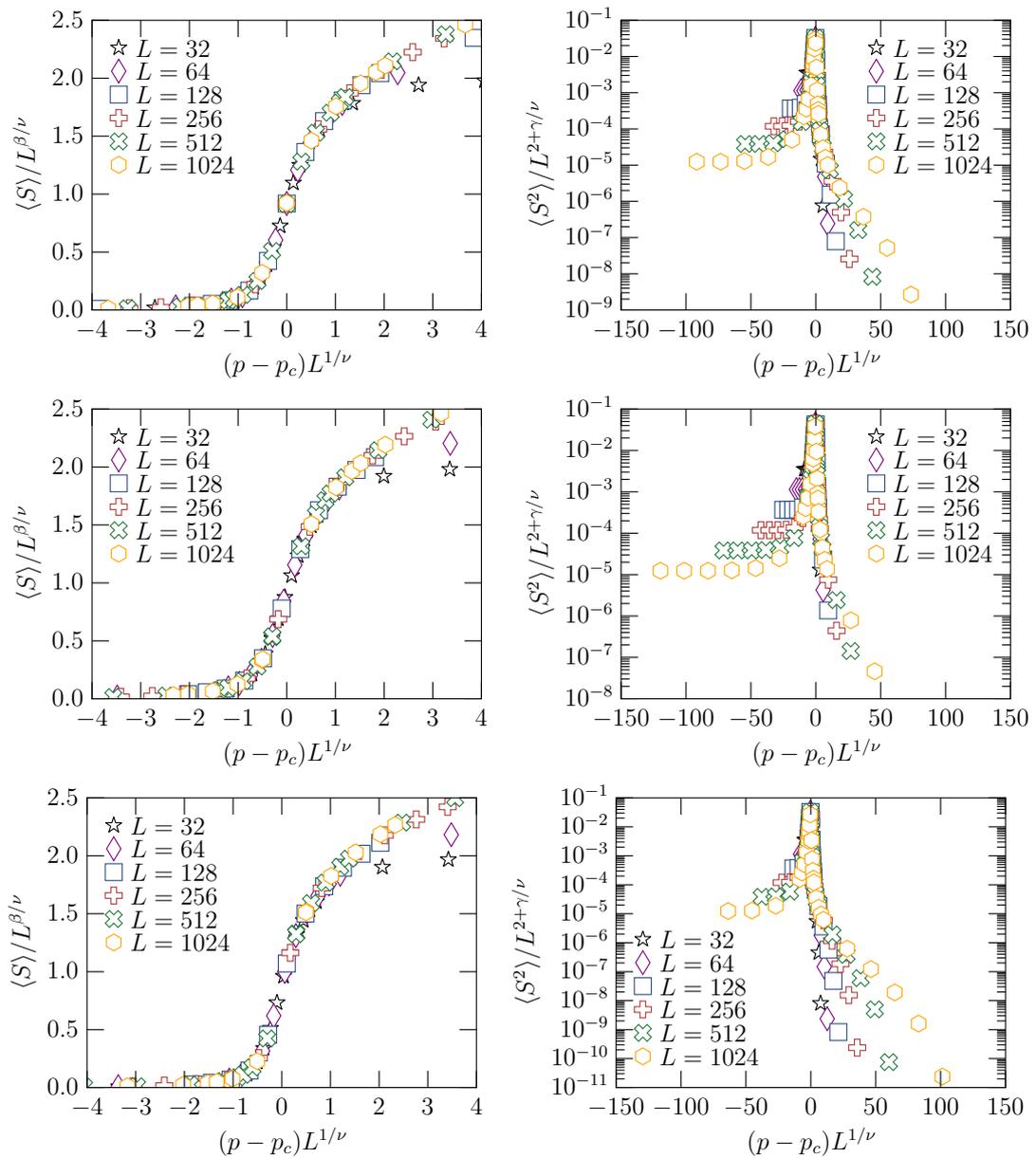
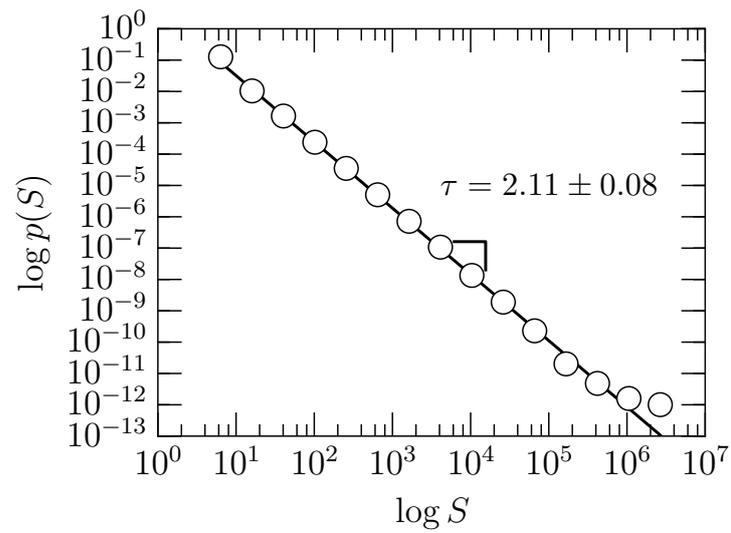


Figura 25: Expoente de Fisher  $\tau$  obtido da distribuição de probabilidade dos componentes fortemente conectados para uma rede quadrada  $L = 4096$  no ponto crítico de percolação.



### 3.4.3 Percolação de Ligações Direcionadas em Rede Cúbica Simples

As propriedades e os expoentes críticos do maior agregado fortemente conectado foram estudados usando uma rede cúbica simples. O modelo de construção da rede considera a primeira parametrização.

Como sugerem os resultados bidimensionais, a fração crítica de percolação do GSCC na rede cúbica de ligações isotropicamente direcionadas obedece a mesma equação da linha crítica  $p_2 + p_1/2 = p_c^{cubic}$ , onde o valor de  $p_c^{cubic}$  para a rede cúbica na rede de percolação clássica que é  $p_c^{cubic} \approx 0,24881$  [12, 41] e são mostrados na figura 26. O argumento para que a mesma reta crítica seja válida é devido à conjectura de Leath-Alexandrowicz [44, 45] que os agregados de sítios de uma rede cúbica têm uma distribuição semelhante ao da rede bidimensional.

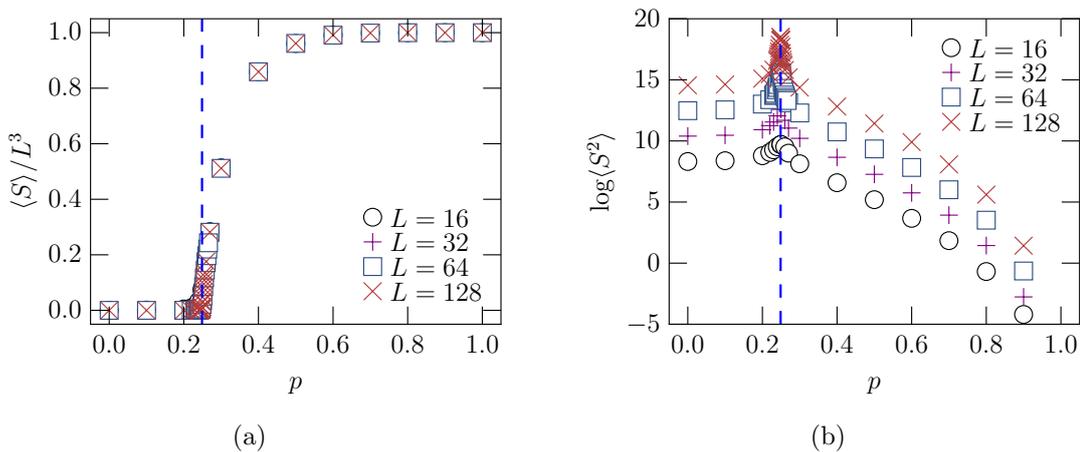


Figura 26: A média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC)  $\langle S \rangle$  (a) e o segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da fração de ligações  $p$  são mostrados para os tamanhos  $L = \{16, 32, 64, 128\}$ .

Os expoentes críticos foram determinados para o primeiro e segundo momentos e sugerem também que a rede de percolação de ligações isotrópicas de direção possuem outra classe de universalidade como apresenta a figura 27.

Os expoentes,  $\beta_{scc}/\nu_{scc} \approx 0,86$ ,  $\gamma_{scc}/\nu_{scc} \approx 4,2$  e  $d_{scc} \approx 2,14$  determinados pelo ajuste não linear dos dados satisfazem as relações de hiper-escala para fenômenos críticos no ponto crítico de transição. A primeira equação é dada por  $\tau_{scc} = d/d_{scc} + 1 = 2,40$ , a segunda equação é dada por  $d_{scc} = d - \beta_{scc}/\nu_{scc} = 2,14$ .

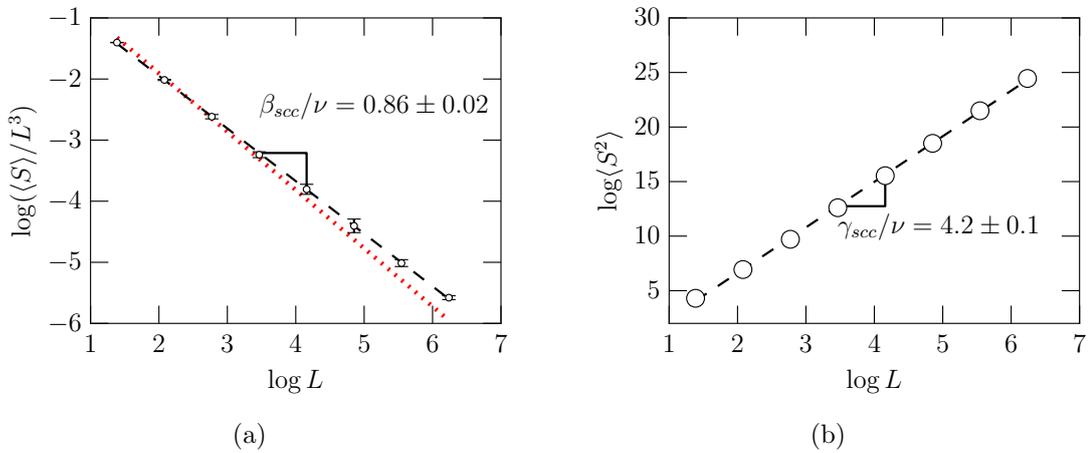


Figura 27: Média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC)  $\langle S \rangle$  e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função do tamanho linear da rede  $L$  no ponto crítico de percolação da rede cúbica. A linha de cor vermelho é a média de  $\langle S \rangle$  obtido com o expoente  $\beta/\nu$  da percolação clássica de ligações.

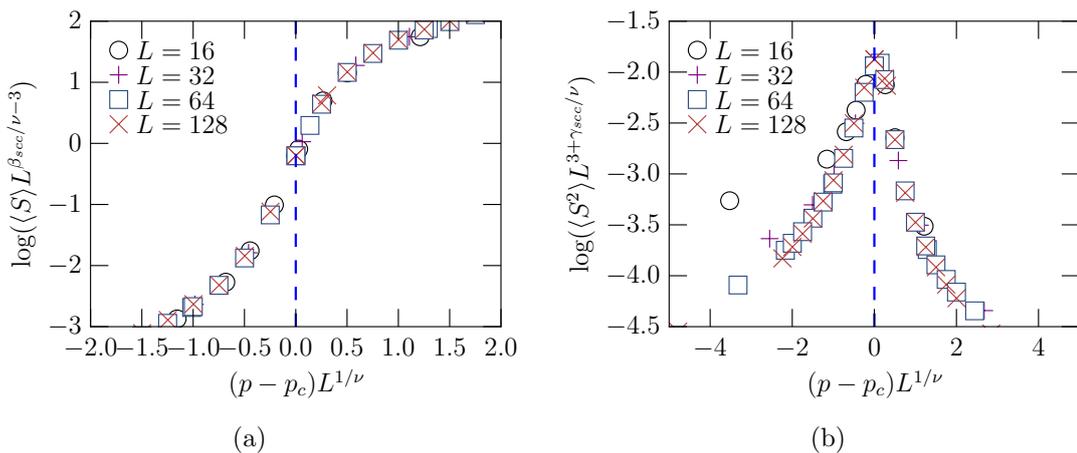


Figura 28: *Finite Size Scaling* para da média do tamanho do componente fortemente conectado (SCC)  $\langle S \rangle$  (a) e do segundo momento da distribuição de tamanhos de agregados, excluindo o agregado gigante fortemente conectado  $\langle S^2 \rangle$  como função da fração de ligações  $p$  são mostrados para os tamanhos  $L = \{16, 32, 64, 128\}$ .

### 3.4.4 Estrutura do GSCC, do GOUT e relações entre a Percolação Clássica de Ligações

Uma questão fundamental é se um agregado de sítios fortemente conectado (GSCC) para uma rede que permite ligações direcionadas e não direcionadas com probabilidades  $(p_1, p_2)$  tem uma estrutura semelhante de um agregado de sítios conectados no limite de uma rede que contenha apenas ligações não direcionadas  $p_2 \rightarrow 1$ .

Um agregado de sítios alcançáveis (GOUT) é o conjunto de todos os sítios que possuem pelo menos um caminho cuja origem está em um GSCC [22]. Por outro lado, um agregado de sítios que atingem um GSCC tem pelo menos um caminho que chega no GSCC e é conhecido por GIN. A figura 10 apresenta um exemplo de existência de um GIN, um GSCC e um GOUT em uma rede simples.

A dimensão fractal para um agregado GOUT e para um GSCC de uma rede quadrada com ligações direcionadas  $p_2 + p_1/2 = 1/2$  é apresentada na Figura 29. A dimensão fractal do GIN tem o mesmo valor que o GOUT. A dimensão fractal do GOUT tem o mesmo valor da dimensão fractal do agregado gigante conectado para a percolação clássica de ligações [2], como esperado, e a dimensão fractal do GSCC é  $d_{scc} = 1,802 \pm 0,005$ , como apresenta a figura 29.

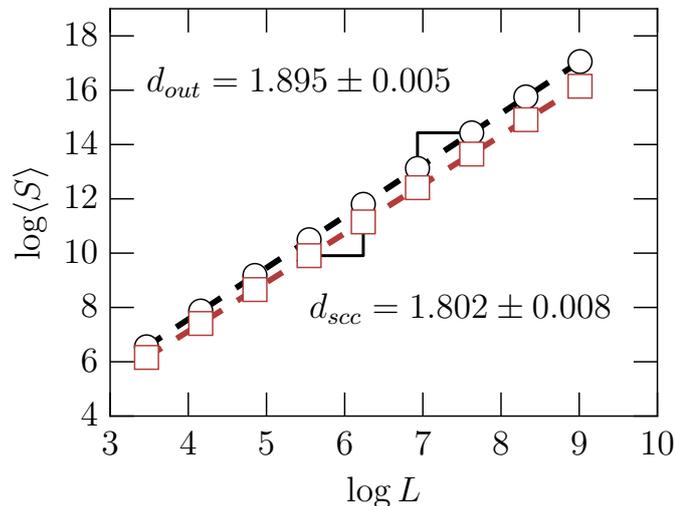


Figura 29: Dimensão fractal para o GSCC e GOUT. Estes resultados são para uma rede quadrada onde todos os vizinhos estão conectados por uma ligação direcionada. Esta condição corresponde para um estado crítico quando  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ . Enquanto a dimensão fractal de GOUT é compatível com a da percolação clássica de ligações, a dimensão fractal do GSCC tem inclinação diferente.

### 3.4.5 Relação Entre os Expoentes Críticos

Um agregado GOUT ou um GIN é um conjunto de sítios que garante pelo menos um caminho entre quaisquer par de sítios. No estado crítico de ligações de uma rede  $p_2 + p_1/2 = 1/2$  e no limite de  $p_1 \rightarrow 0$ , o conjunto de sítios do  $\text{GSCC} = \text{GOUT} = \text{GIN}$  e compreenderá a definição de componentes conectados de uma rede que possui apenas ligações não direcionadas  $p_2$  e vacâncias  $p_0$ . Portanto, na fração crítica de percolação de ligações direcionadas isotropicamente  $(p_0, p_1, p_2)$ , o agregado de sítios fortemente conectado tem dimensão fractal diferente do agregado de sítios conectados  $(p_0, 0, p_2)$ .

A tabela 1 resume os expoentes críticos obtidos para o agregado de sítios fortemente conectados GSCC para redes  $2D$  (honeycomb, quadrada e triangular e  $3D$  (cúbica simples). Para obter os expoentes, o valor de  $\nu$  para a rede bidimensional é  $\nu = 4/3$  e para a rede tridimensional é  $\nu \approx 0,876$  [46].

Lattice	$\beta_{scc}$	$\gamma_{scc}$	$d_{scc}$
Triangular ( $2D$ )	0,264(8)	2,15(7)	1,804(5)
Quadrada ( $2D$ )	0,261(5)	2,13(3)	1,801(8)
Hexagonal ( $2D$ )	0,27(1)	2,15(7)	1,80(1)
Cúbica Simples ( $3D$ )	0,98(2)	1,3(1)	2,13(1)

Tabela 1: Valores dos expoentes críticos do GSCC para as redes honeycomb, quadrada, triangular e cúbica simples no caso em que cada ligação é ocupada com probabilidade  $p$ . Números em parêntesis indicam o erro estimado no último dígito.

Lattice	$\beta_{scc}$	$\gamma_{scc}$	$d_{scc}$	$\tau_{scc}$
Triangular	0,26(1)	2,16(8)	1,805(8)	2,07(9)
Square	0,26(1)	2,17(4)	1,802(8)	2,11(8)
Hexagonal	0,27(1)	2,16(7)	1,80(1)	2,12(8)

Tabela 2: Valores dos expoentes críticos do GSCC para as redes honeycomb, quadrada, triangular e cúbica simples para a segunda parametrização.

A função de correlação define a probabilidade de que dois sítios separados por uma distância  $r$  estão no mesmo agregado [47, 29]. Na fração crítica, essa função obedece,

$$g(r) \sim r^{-2\beta/\nu}, \quad (3.27)$$

onde  $r$  é a distância de separação entre os dois sítios.

Seja  $g_{in}(r)$  a função de correlação do agregado *in-component* e  $g_{out}(r)$  a função de correlação do agregado *out-component*. Dado que um caminho seja encontrado em uma direção, e que o outro no sentido contrário seja encontrado e que sejam eventos não correlacionados. Qualquer fratura desse caminho não interromperá globalmente a rede.

Portanto, no caso da percolação isotrópica, a função de correlação  $g_{scc}$  determina a probabilidade de dois sítios pertencerem ao mesmo GSCC a uma distância  $r$  dado por,

$$g_{scc}(r) = g_{out}(r) \times g_{in}(r). \quad (3.28)$$

Como os agregados *in* e *out* estão na mesma classe de universalidade da percolação clássica [39], considerando-se eventos não correlacionados, o valor de  $\beta_{scc}$  deverá ser duas vezes o valor de  $\beta$  ( $\beta_{scc} = 2\beta$ ) da percolação clássica. Caso contrário, esse eventos possuem correlações, e espera-se que  $\beta_{scc}/2$  seja menor que o expoente  $\beta$  da percolação clássica. Em nossa extensão, na percolação clássica, um *cutting-bond* [48] é uma ligação que se removida resulta numa perda de conexão do agregado com uma parte interna. No caso da percolação direcionada, um *cutting-bond* interrompe a conexão do agregado em uma direção apenas e no caso de rompimento em duas direções esta ligação é denominada de *double cutting bond*. A presença de um *double cutting bond* pode indicar correlações entre caminhos dos agregados *in-component* e *out-component* já que essa ligação é essencial. Observe que o mesmo evento de remover ou inserir este *cutting bond* pode determinar a presença de um caminho que permite percorrer todo o agregado em ambas as direções.

Na percolação clássica a densidade de *cutting bonds* decai como  $L^{1/\nu-d}$  [48]. Considerando que cada *cutting bond* é um evento independente, a densidade destes *double cutting bonds* deverá ser o quadrado da densidade dos *cutting bonds* da percolação clássica  $L^{2/\nu-2d}$ .

Assim, a densidade decai mais rapidamente seguindo a dimensão do sistema  $L^{-d}$ , no limite de redes com tamanho linear  $L$  grande, Nesse caso, o número de *double cutting bonds* tenderá a zero rapidamente, indicando que nenhuma correlação pode ser detectável.

No caso de simulações  $2D$ , esta conjectura  $\beta_{scc} = 2\beta$  é válida dentro da barra de erro. Observe que  $\beta_{scc} = 0,27 \pm 0,01 \approx 2 \times 5/36 = 0,2777$ . No caso das simuações  $3D$ , observe que  $\beta_{scc} = 0,76 \pm 0,08$  é menor que  $2 \times \beta = 2 \times 0,418 \pm 0,001$  [46]. No entanto, esse desvio ainda está dentro das barras de erro e também pode surgir de efeitos de tamanho finito.

## 4 Fraturas de Caminhos Ótimos em Redes Regulares

Este capítulo apresenta resultados das propriedades de fraturas de caminhos ótimos em redes isotropicamente direcionadas  $(p_1, p_2) \rightarrow (1, 0)$  até o limite da percolação clássica  $(p_1, p_2) \rightarrow (0, 1)$  em que vacâncias não são permitidas  $p_0 = 0$ . A construção da rede segue o mesmo procedimento do algoritmo 1 da segunda parametrização apresentado no Capítulo 3. Antes de apresentar os resultados das simulações, a busca de caminhos mais curtos, as propriedades de caminhos ótimos e de fratura de caminhos ótimos são visitadas no regime clássico da percolação de ligações.

### 4.1 Busca do Caminho Ótimo

No cotidiano, quando você vai para sua casa ou seu local de trabalho, mentalmente, você planeja uma rota que minimize seu tempo de viagem ou a distância que deve percorrer. Talvez, o tempo não seja importante, a escolha seja apenas o caminho mais curto, mesmo que tenha que enfrentar congestionamentos.

Vários fatores podem determinar a busca do caminho mais curto para atingir seu destino. Esses fatores podem ser definidos como o custo da viagem: tempo, distância, velocidade controlada, etc. Se você deseja chegar com o menor tempo possível, o tempo é a variável que deve ser minimizada, embora isso não garanta, a menor distância.

Um dos problemas centrais em Teoria de Redes é a busca do caminho mais curto. O problema do caminho ótimo (*shortest-path problem*) consiste em criar algoritmos eficientes que determinem o caminho mais curto entre dois sítios em redes com pesos (custo).

Seja  $G_d$  uma rede direcionada com  $n$  sítios e  $m$  ligações. Seja  $w(i, j)$  o peso entre os sítios  $i$  e  $j$ . O peso, ou a energia, acumulado no caminho  $\Pi = \{w_0, w_1, \dots, w_k\}$  é a soma de todos os pesos das  $m_k$  ligações que pertencem a este caminho.

Os pesos das ligações podem ser interpretados de maneiras diferentes. Por exemplo, para determinar o caminho mais curto entre dois sítios de referência em uma cidade é necessário definir qual variável representa o peso de cada ligação. Se o tempo é a variável que deve ser minimizada, logo, o tempo será o peso usado na busca do caminho mais curto: se, por outro lado, é desejada a menor distância (geodésica), a distância será o peso utilizado na busca. Os pesos em redes podem ter valores negativos e positivos. Neste trabalho, os pesos das ligações obedecem uma distribuição hiperbólica como será descrito na seção 4.1.1.

Existem alguns algoritmos que encontram caminhos curtos, são eles: o algoritmo de Dijkstra, de Bellman-Ford, A\*, de Floyd-Warshall, de Johnson e o de Viterbi [28]. Em especial, o algoritmo de Bellman-Ford pode encontrar o caminho ótimo usando pesos de valores negativos. O algoritmo de Dijkstra [28] será utilizado neste trabalho para determinar os caminhos ótimos na rede quadrada. A seção 4.1.2 apresenta conceitualmente o algoritmo de Dijkstra.

#### 4.1.1 Distribuição Hiperbólica de Pesos em uma Rede

O peso de uma ligação foi definido na equação 2.1 e tem seu significado associado à matriz de adjacência. A distribuição de valores de pesos de uma rede desempenha um papel importante na caracterização de redes reais e algumas delas tem sua distribuição de pesos na forma de lei de potência como visto em Barrat *et al* (2004) [49].

O peso atribuído a cada ligação obedece a uma distribuição de valores na forma de uma lei de potência. Este procedimento é o mesmo realizado no trabalho de Oliveira *et al* [1][27].

Seja  $G_d$  uma rede quadrada de ligações direcionadas com  $n$  sítios. O número de sítios  $n$  é dado por  $L \times L$ , onde  $L$  é tamanho linear rede quadrada. A distribuição de pesos é tal que, ao se escolher uma ligação na rede, a probabilidade dela ter energia  $\epsilon$  é dada por,

$$P(\epsilon) = \frac{C}{\epsilon}, \quad (4.1)$$

onde  $C$  é uma constante de normalização da distribuição e a equação tem uma forma hiperbólica.

É necessário normalizar a Equação 4.1 definindo o valor máximo do peso  $\epsilon_{max} = 1$ . A normalização depende, apenas, do valor mínimo do peso para a distribuição. Integrando a Equação 4.1,

$$\int_{\epsilon_{min}}^{\epsilon_{max}=1} P(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_{min}}^1 \frac{C}{\epsilon} d\epsilon_i = -C \ln \epsilon_{min} = 1 \quad (4.2)$$

definindo  $C = \frac{1}{\beta_D}$ , a probabilidade é dada por,

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon \beta_D}, \quad (4.3)$$

onde  $\beta_D = -\ln \epsilon_{min}$ .

Os pesos das ligações na rede terão valores no intervalo  $[\epsilon_{min}, 1)$  e serão distribuídos conforme a Equação 4.3. Para se estabelecer uma correspondência entre valores aleatórios  $x$  distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 1)$  e valores  $\epsilon$  distribuídos de acordo com a Equação 4.3 pode-se utilizar o método de inversão cumulativa, dado pela relação,

$$p(\epsilon) d\epsilon = p(x) dx \quad (4.4)$$

onde  $p(x) = 1$ . Integrando a Equação 4.4 em ambos os lados,

$$\int_{\exp(-\beta_D)}^{\epsilon} \frac{1}{\beta_D \epsilon} d\epsilon = \int_0^x dx \quad (4.5)$$

logo, o peso em cada ligação será

$$\epsilon = e^{\beta_D(x-1)} \quad (4.6)$$

onde  $x$  é um valor aleatório no intervalo  $[0, 1)$ .

O parâmetro  $\beta_D$  define o grau de desordem nos pesos do sistema. No limite  $\beta_D \rightarrow 0$ , a distribuição de valores de pesos é estreita e  $\epsilon_{min} \rightarrow 1$ . Neste caso, a distribuição é estreita com valores de peso em um limite de  $\delta\epsilon \rightarrow 0$ . No limite  $\beta_D \rightarrow \infty$ , a distribuição de valores é larga e  $\epsilon_{min} \rightarrow 0$ . Como consequência, a dimensão fractal do sistema é classificada como auto-similar.

### 4.1.2 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema do caminho ótimo em uma rede direcionada  $G_d$  com pesos de valores reais positivos ou nulos. O nome do algoritmo é uma referência ao cientista de computação e físico teórico de formação Edsger Wybe Dijkstra (11 de maio de 1930 – 6 de agosto de 2002) que publicou seu algoritmo em 1959 [50].

O objetivo do algoritmo é encontrar o conjunto de sítios  $S$  que formam o caminho

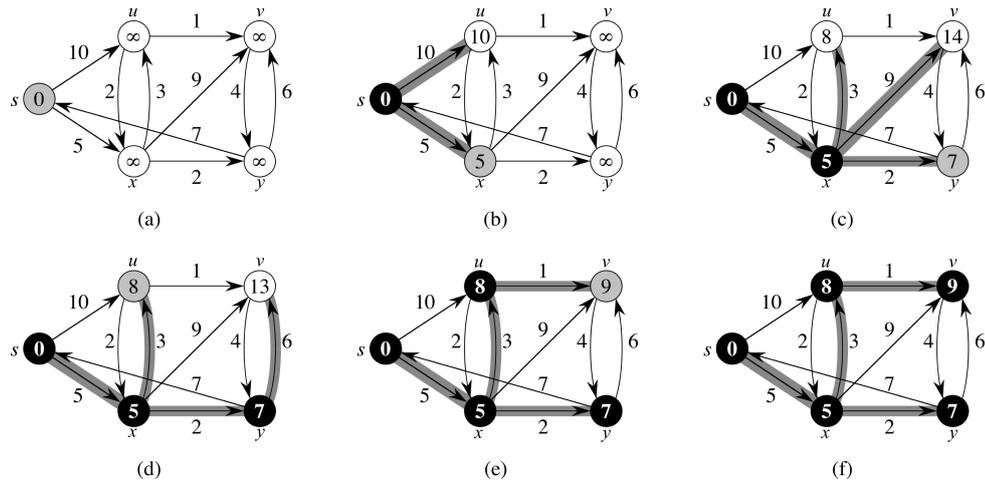


Figura 30: Exemplo de execução do Algoritmo Dijkstra. O sítio origem é o sítio mais a esquerda (destino). Os sítios brancos são o *queue*, os sítios pretos são o conjunto  $S$  - visitados e retirados do *queue* e o sítio de cor cinza é o sítio visitado na iteração. No procedimento de busca, o Algoritmo de Dijkstra armazena em cada sítio o peso do caminho desde o sítio origem  $s$  até o sítio relaxado  $v$ . Inicialmente, a lista de sítios visitados está vazia  $S$  e, conseqüentemente, a lista de sítios a visitar  $Q$  compreende todos os sítios de  $G$ . Em (a), a primeira iteração, o sítio  $s$  verifica o peso de seus vizinhos  $u$  e  $x$ , logo, os pesos de  $u$  e  $x$  são definidos e  $s$  é inserido em  $S$ . Em (b), na segunda iteração e iniciando com o sítio  $x$ , de menor peso, os sítios  $u$  e  $y$  são examinados e os pesos em  $u$  e  $y$  são recalculados. Em (d), na quarta iteração, o sítio  $u$  tem seu peso alterado, pois o caminho  $p = \{s, x, u\}$  tem o menor valor comparado ao valor armazenado na segunda iteração (b).

ótimo do sítio origem  $s$  ao sítio destino  $v$ . Logo, para todos os sítios  $v \in S$ , o peso do caminho mais curto é representado por  $w[v] = \delta(s, v)$  como é ilustrado na figura 30. Cormen *et al.* [28] sugerem um pseudocódigo do Algoritmo de Dijkstra que é utilizado nas simulações.

## 4.2 Propriedades de Caminhos Ótimos em Regime de Desordem de Pesos

As propriedades de caminhos ótimos têm sido estudadas em muitos tipos de redes, por exemplo, redes regulares, redes de livre escala etc. Mezard [51] determinou a existência de um parâmetro de ordem em *Spin-Glasses* no limite termodinâmico. Schwartz [52] relaciona a determinação de caminhos com problema do vendedor viajante, conhecido como *travelling salesman problem* (TSP) e percolação invasiva em redes quadradas [53]. Lopéz *et al* [54] mostraram que o agregado percolante em uma rede regular pode ser obtido através da determinação de caminhos ótimos.

Redes de resistores é uma aplicação comum em problemas de percolação e deter-

minação de caminhos ótimos. Strelniker *et al.* [55], em redes de resistores com decaimento exponencial, mostraram a sensibilidade desse modelo sob diferentes regimes de desordem de pesos. Em redes não regulares, por exemplo, de escala livre, com distribuição gaussiana ou de poisson de pesos, Chen *et al.* [56] mostraram que para essas distribuições há uma distinção evidente entre os regimes de desordem. No entanto, no limite de  $P(\epsilon)$  uniforme não é possível distinguir uma transição entre desordem forte ou desordem fraca de pesos.

#### Redes em Regime de Desordem Fraca de Pesos

Redes cujas ligações possuem valores  $\epsilon$  no regime de desordem fraca de pesos apresentam flutuações  $\delta\epsilon$  pequenas de pesos. Neste limite, o valor médio do caminho ótimo escala com expoente  $d_f = 1$  [57].

A dimensão fractal de caminhos mais curtos no regime de desordem fraca de pesos pertence a classe de universalidade de redes direcionadas de polímeros. Schwartz *et al.* [52] realizaram experimentos numéricos de caminhos ótimos com redes direcionadas e redes não direcionadas considerando uma distribuição uniforme de pesos  $p(\epsilon) = \text{constante}$ , e encontraram que redes não direcionadas estão na classe de universalidade de percolação direcionada de polímeros.

Wu *et al.* [58] usaram redes regulares de resistores cuja resistência tem forma exponencial,  $r_{ij} = e^{ax_{ij}}$ , nos regimes de desordem alta e de desordem baixa. Em regime de desordem fraca, o caminho ótimo – caminho de corrente – escala com o expoente  $d_{opt} = 1$  na rede.

#### Redes em Regime de Desordem Forte

Redes cujas ligações possuem valores  $\epsilon$  distribuídos numa distribuição forte de pesos apresentam valores de dimensão fractal que pertencem a mesma classe de universalidade de fractais auto-similares [52, 59, 60].

Quando uma quantidade física tem um expoente cujo valor é  $d_f = 1,22$ , um conjunto de propriedades sobre este sistema pode ser inferida. Este expoente é compatível com a classe de universalidade que explica vários sistemas físicos, por exemplo, polímeros desordenados, watersheds, fratura de caminhos ótimos e percolação explosiva [26].

Porto *et al.* [60] encontraram um regime transitório de comportamento auto-similar (*self-similar*) em regime de desordem forte para um comportamento auto-afim (*self-affine*) em regime de desordem moderada. Para isso, experimentos numéricos foram realizados com restrições na distribuição de energia  $p(\log_{10} E) = \text{const}$  quando  $E_{min} \leq E \leq E_{max}$  e no caso contrário  $p(\log_{10} E) = 0$ . O valor da dimensão fractal em redes bidimensionais foi

de  $d_f = 1,22 \pm 0,02$  e para redes tridimensionais o valor determinado foi  $d_f = 1,43 \pm 0,03$ .

Lopéz *et al* [54] realizou experimentos numéricos em redes regulares e verificou que nos agregados de percolação, os caminhos mais curtos entre pares de sítios dentro do agregado pertencem a classe de universalidade de fractais auto-similares na fração crítica de ligações. Wu *et al* [58], em regime de desordem forte, verificou que o caminho ótimo, de menor potencial, escala com expoente  $d_{opt} = 1,22 \pm 0,01$  em uma rede de resistores.

### 4.3 Fraturas de Caminhos Ótimos

Considere uma rede  $G$  com  $m$  ligações e com uma distribuição de pesos  $P(\epsilon) = 1/\epsilon$ . O modelo de fratura de caminhos ótimos é definido na seguinte forma: determine o caminho mais curto que atravesse a rede de um lado ao outro e remova a ligação que contenha o maior valor  $\epsilon$  desse caminho. Repita esse procedimento até que a rede não esteja mais acessível. Quais as características que essa rede e as ligações removidas podem exibir ao final deste processo? Esse modelo de fraturas de caminhos ótimos (*Optimal Path Crack - OPC*) foi introduzido por Andrade *et al.* [1].

O objetivo do OPC consiste em construir uma falha macroscópica em paisagens aleatórias e estudar a evolução dos caminhos ótimos sob essas falhas. O OPC é definido com a união de todos os sítios removidos na rede (falhas), veja a Figura 31.

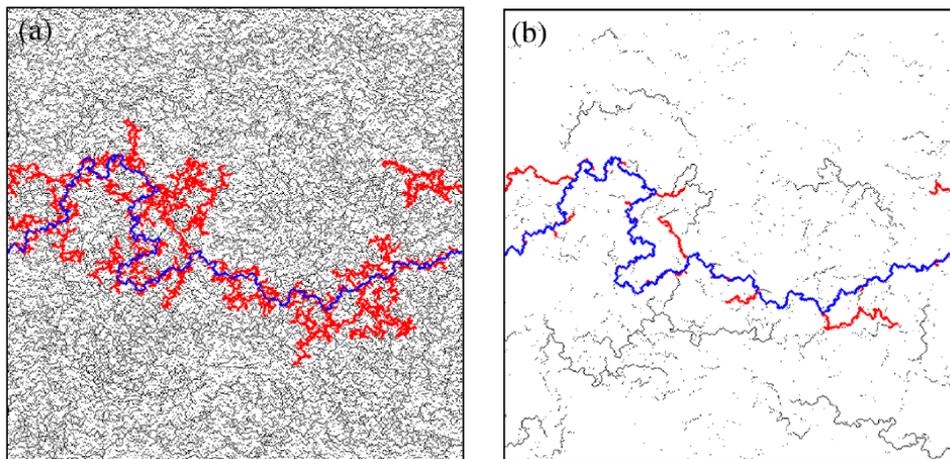


Figura 31: fratura de caminhos ótimos numa rede de  $512 \times 512$  sítios. (a) Sítios bloqueados em regime de desordem fraca ( $\beta = 0,002$ ). (b) Sítios bloqueados em regime de desordem intermediária ( $\beta = 6$ ). Linha de cor azul é a fratura de caminhos ótimos, Linhas de cor vermelho são os caminhos adjacentes - *dangling ends* e Linhas de cor cinza são os agregados de sítios isolados

Fonte: Andrade *et al.* [1]

Oliveira *et al.* [27] encontraram que as fraturas de caminhos ótimos em redes no regime de desordem forte possuem valor de dimensão fractal pertencentes à classe de universalidade de fractais auto-similares. Em redes de desordem fraca, a dimensão fractal é uma composição da fratura de caminhos ótimos (*backbone*), dos caminhos adjacentes (*dangling ends*) e dos agregados pequenos de sítios. Em redes bidimensionais no regime de desordem fraca, a dimensão fractal das fraturas tem valor  $d_f = 2,00 \pm 0,01$ , a massa de bloqueios é a soma do caminho de fratura (*backbone*), dos caminhos adjacentes *dangling ends* e dos agregados de sítios pequenos. Em desordem forte, a dimensão fractal tem comportamento auto-similar e  $d_f = 1,215 \pm 0,005$ .

O OPC foi estudado em outros trabalhos com pequenas variações. Voygt A. [61] estudou fraturas de caminhos ótimos em redes quadradas sob a representação de redes não direcionadas. No regime de desordem forte se observou que os métodos *Minmax* e de *Widest path* possuem a mesma classe de universalidade de fractais auto-similares. Ferh *et al.* [62] determinou correções de escala para a massa de fratura de caminhos ótimos, de caminho de divisória de águas - *watersheds*, e de *bridge lines*. Os autores conjecturaram que todos os três modelos possuem o mesmo valor de dimensão fractal:  $d_f = 1,2168 \pm 0,0005$  para modelos bidimensionais e  $d_f = 2,487 \pm 0,003$  para modelos tridimensionais.

O modelo de fraturas de caminhos ótimos foi testado em outras topologias de redes, por exemplo, redes do tipo Barabási-Albert. Nunes, T.C.C [63] verificou que, em redes do tipo Barabási-Albert, o modelo de fraturas de caminhos ótimos se comporta como um modelo de ataque de redes e os valores de dimensão fractal para os regimes de desordem foram: forte -  $d_f^{m=8} = 0,99$ , fraca -  $d_f^{m=8} = 1,05$  e moderada -  $d_f^{m=8} = 0,98$ .

O modelo básico para o problema de Fratura de Caminhos Ótimos usado nos trabalho de Andrade Júnior *et al* [1] e Oliveira *et al* [27] é descrito na seção seguinte.

### Modelo Geral

Seja  $G$  uma rede de  $N$  sítios distribuídos em uma rede regular com tamanho linear  $L$ .  $G$  possui condições de contorno com dois lados periódicos e outros dois lados fixos em que os caminhos partem e chegam.

Cada sítio  $i$  contém um peso  $\epsilon$  distribuídos através da equação,

$$P(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon\beta_D} \quad (4.7)$$

no intervalo  $[e^{-\beta_D}, 1)$ .

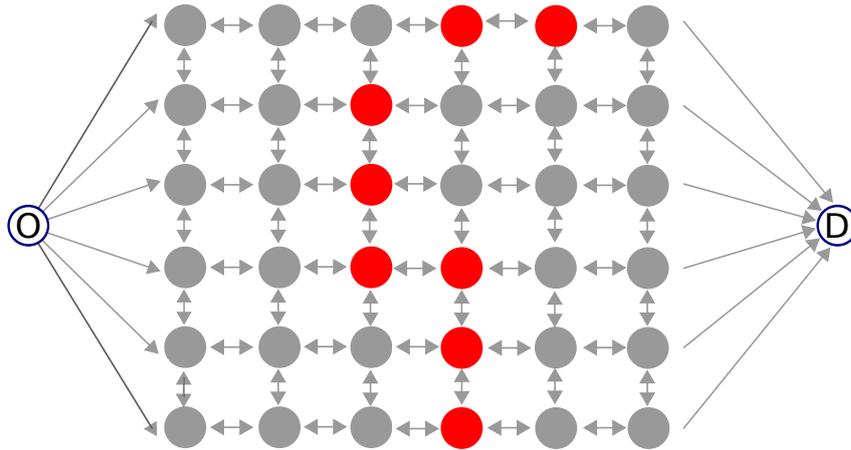


Figura 32: Ilustração de uma rede quadrada  $L=6$  com  $p = 1$  para a fratura de caminhos ótimos. O sítio O é a origem e o sítio D é o destino. Os sítios de cor vermelha foram removidos através do OPC. Os sítios de cor cinza foram visitados e não removidos.

Os procedimentos do modelo de Fraturas de Caminhos Ótimos consiste nas etapas a seguir:

1. Escolher um par de sítios como uma origem e um destino na rede  $G$ .
2. Encontrar o caminho mais curto ( $OP_n$ ) entre uma origem e um destino da rede  $G$ .
3. Remover o sítio de maior peso ( $\epsilon_i^{max}$ ) contido em  $OP_n$ .
4. Executar os passos 2 e 3 até que não existam caminhos ótimos entre a origem e o destino na rede  $G$ .

Em cada iteração da rede, os sítios de maior peso são removidos até que a rede frature, ou seja, a busca por caminhos mais curtos é realizada até que não exista um caminho ótimo qualquer. Um resultado da fraturas de caminhos ótimos é apresentado na Figura 31.

As propriedades das fraturas de caminhos ótimos são analisadas monitorando três tipos de massas: (i) o número de todos os sítios removidos ( $M_{tot}$ ) da rede, (ii) o número de sítios que forma o maior agregado ( $M_{lc}$ ) da rede e (iii) a massa do último Caminho Ótimo ( $M_{sp}$ ) que desconecta a rede  $G$ .

## 4.4 Modelo

As propriedades de fraturas de caminhos ótimos foram estudadas neste trabalho considerando a probabilidade de ligações estarem conectados bidirecionalmente (não direci-

onadas)  $p_2$  ou com ligações direcionadas  $p_1 = 1 - p_2$ . As vacâncias não foram utilizadas neste modelo. Logo, a rede será completamente não direcionada no limite  $p_2 = 1$  e isotropicamente direcionada no limite  $p_1 = 1$ .

Partindo de uma rede de  $n$  sítios preenchidas com ligações isotropicamente direcionadas  $p_1 = 1$ , as ligações direcionadas são substituídas por ligações não direcionadas aleatoriamente na rede  $G_d$  tal que a fração de ligações direcionadas obedeça a relação  $p_1 = 1 - p_2$ .

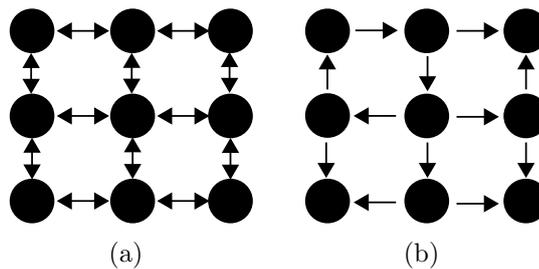


Figura 33: Ilustração de uma rede quadrada de tamanho linear  $L = 3$  completamente preenchida de ligações não direcionadas  $p_2 = 1$  (a) e uma rede completamente preenchida de ligações direcionadas  $p_1 = 1$  (b).

No modelo de fratura de caminhos ótimos [27], o bloqueio de ligações ocorre até que a rede fracture completamente. Quando a rede está fraturada não há mais nenhum caminho disponível entre o par de origem e de destino. Neste caso, a falha macroscópica da rede interrompe o tráfego de informações entre o sítio origem e o sítio destino, veja a Figura 34.

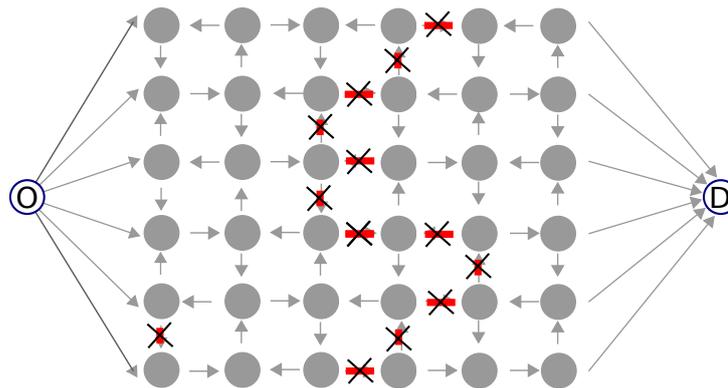


Figura 34: Ilustração de uma rede quadrada  $L = 6$  com  $p = 1$  para a fratura de caminhos ótimos. Os sítios de cor azul representam um par de origem (O) e de destino (D) na rede. As ligações de cor vermelha representam as ligações bloqueadas pelo modelo de fratura de caminhos ótimos. As ligações e sítios de cor cinza representam os outros elementos que foram visitados e não foram removidos.

Os resultados da fratura de caminhos ótimos na transição de redes isotropicamente direcionadas para redes de ligações não direcionadas são apresentados na seção a seguir.

## 4.5 Resultados

O conceito de fratura de caminhos ótimos (OPC), o modelo de distribuição de pesos nas ligações foi descrito na seção 4.3 para as redes simuladas, e está em acordo com Andrade *et al* [1]. O tamanho linear das redes regulares simuladas foram  $L = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$  e para cada tamanho foram realizadas  $10^3$  simulações de redes.

O OPC é o mesmo definido nos trabalhos de Andrade *et al* [1] e Oliveira *et al* [27]. A diferença é sutil, os pesos estão localizados nas ligações. Assim, as simulações realizadas que consideram pesos nas ligações apresentam os mesmos resultados quando a fratura é realizada em sítios. Os resultados para os regimes de desordem forte e de desordem fraca de pesos são apresentados a seguir.

### 4.5.1 Regime de Desordem Forte

A Figura 35 apresenta exemplos de falhas macroscópicas de uma rede com frações de ligações direcionadas utilizando o OPC. Quando a rede possui somente ligações direcionadas ( $p_2 = 0$ ) poucas falhas são necessárias para que a rede seja desconectada. Na medida em que ligações direcionadas são trocadas por ligações não direcionadas  $p_2 > 0$  o número de falhas aumenta e um caminho de falhas é formado.

A Figura 36 apresenta o valor médio das fraturas de caminhos ótimos como função do tamanho linear  $L$  para uma rede quadrada  $p_2 = 1$ . A dimensão fractal correspondente da figura 36 é  $d_f = 1,2207 \pm 0,0009$ . Esse resultado está de acordo com o resultado obtido por Oliveira *et al* [27] mostrando a equivalência entre os modelos.

A Figura 37 apresenta a evolução da dimensão fractal  $d_f$  partindo da rede  $p_2 = 0$  para uma rede  $p_2 = 1$ . Quando  $p_2 = 0$ , a rede está completamente preenchida de ligações isotropicamente direcionadas. Em  $p_2 = 1$ , a rede está completamente preenchida de ligações não direcionadas e a dimensão fractal converge para o valor encontrado em Fraturas de Caminhos Ótimos em sítios [27].

No regime de desordem forte, o número de ligações removidas parte de um valor quase constante (Figura 38) para um regime auto-similar (Figura 37).

Quando  $p_2 = 0$ , a rede está em uma fração crítica de ligações, como já discutido no Capítulo 3. O expoente encontrado  $d_{opt} = 1,209 \pm 0,001$  para o caminho mais curto – *shortest path* – coincide com o resultado encontrado por Lopéz *et al* [54], veja a Figura 39.

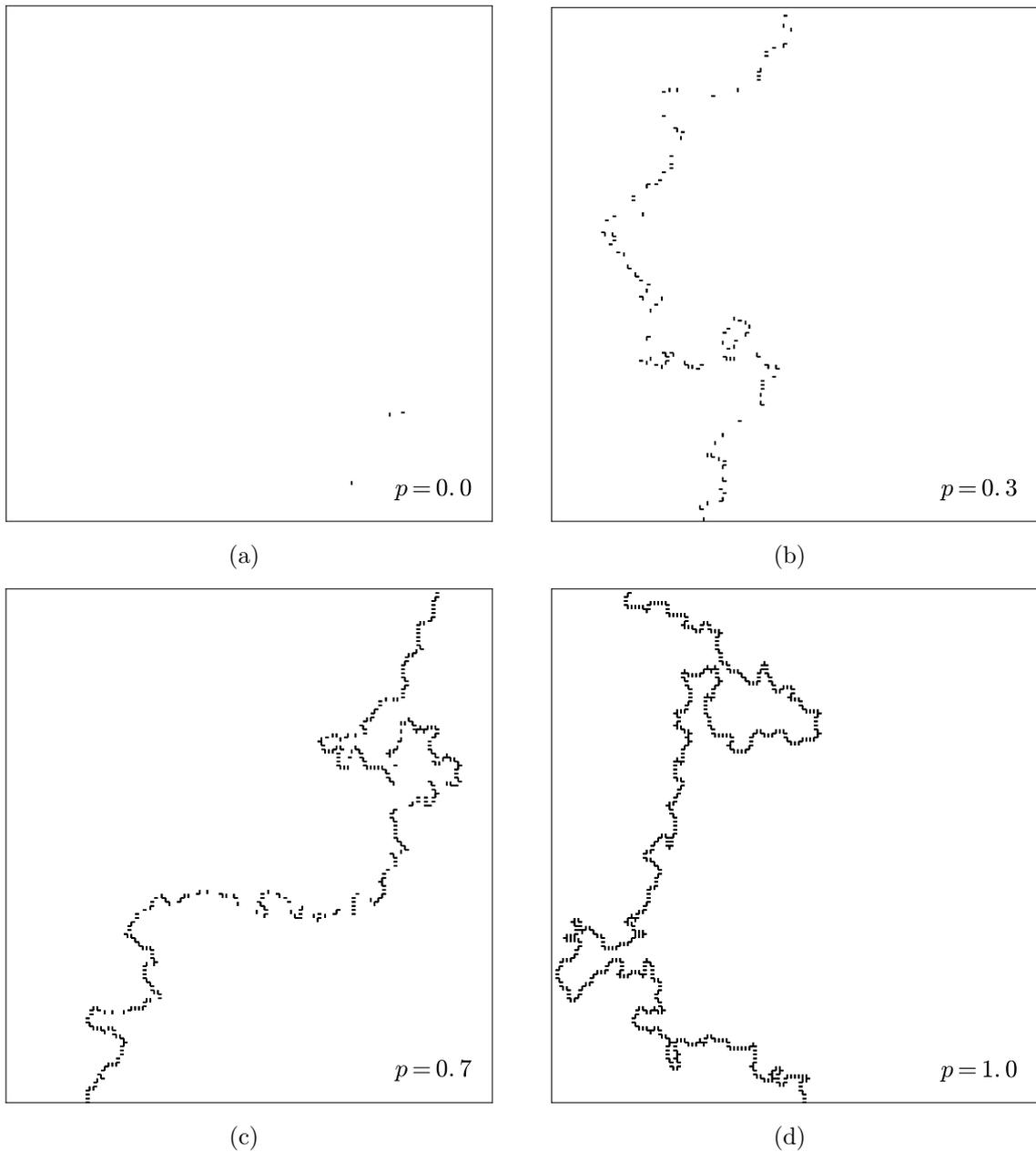


Figura 35: Quatro amostras de fraturas de caminhos ótimos para redes de tamanho linear  $L = 128$  cujas frações de ligações direcionadas são (a)  $p_2 = 0$ , (b)  $p_2 = 0,3$ , (c)  $p_2 = 0,7$  e (d)  $p_2 = 1,0$  no regime de desordem forte de pesos.

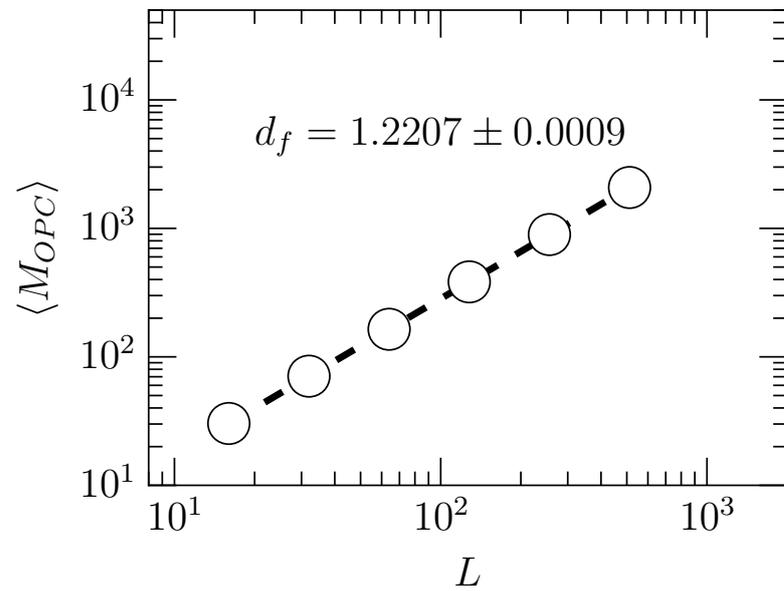


Figura 36: Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas ( $M_{OPC}$ ) em função do tamanho linear da rede ( $L$ ). A rede está totalmente preenchida de ligações não direcionadas  $p_2 = 1$ . O expoente é o mesmo para as redes não direcionadas de Andrade *et al* [1].

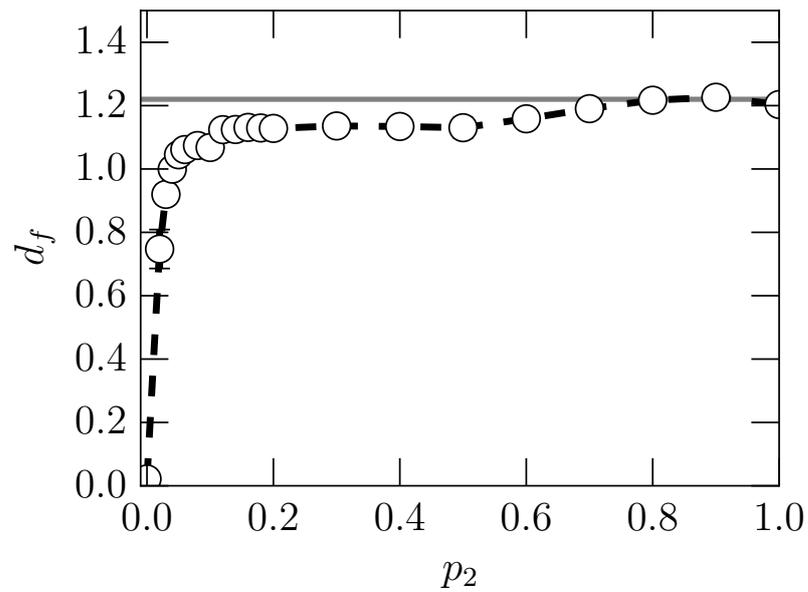


Figura 37: Dimensão fractal ( $d_f$ ) como uma função da fração de ligações não direcionadas  $p_2$ .

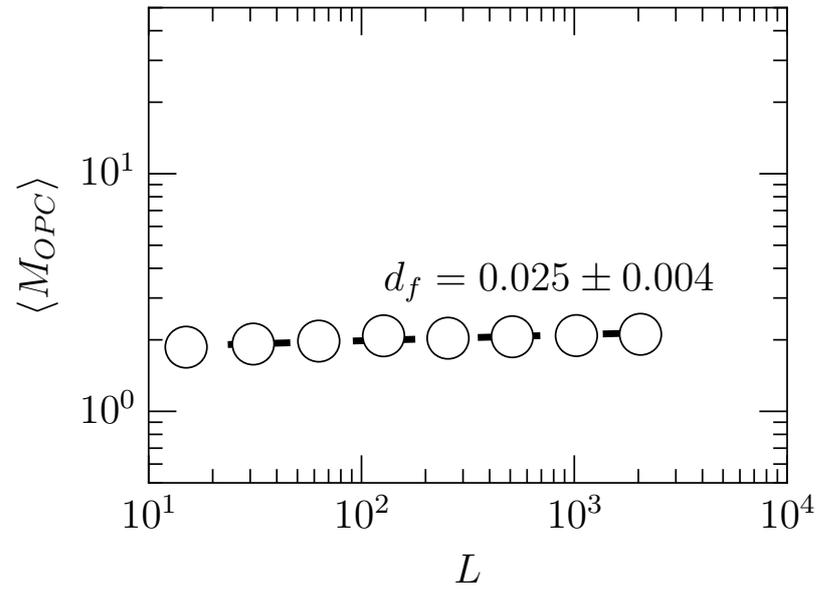


Figura 38: Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas  $M$  em função do tamanho linear da rede  $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas  $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ .

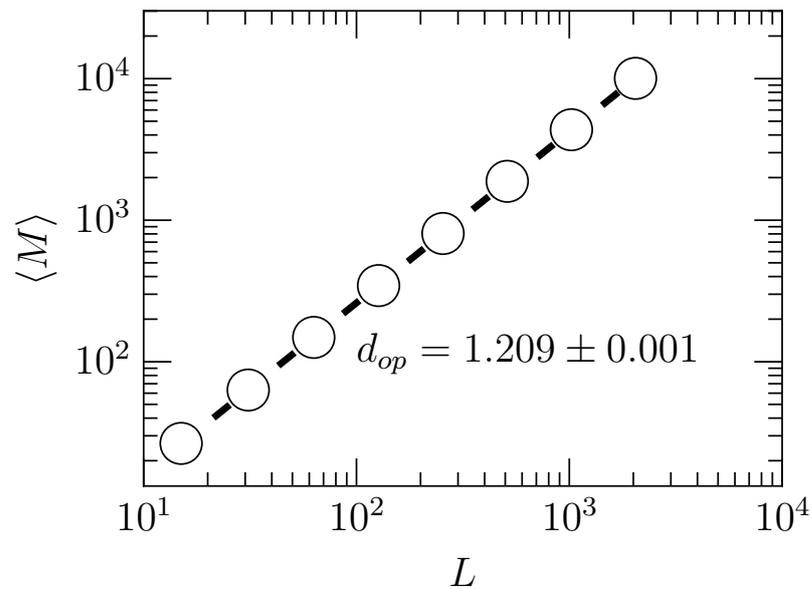


Figura 39: Gráfico log-log da massa  $M$  do caminho ótimo em função do tamanho linear da rede  $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas  $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ .

## 4.5.2 Regime de Desordem Fraca

No regime de desordem fraca de pesos, o peso  $\varepsilon$  possui flutuações pequenas e o número de ligações necessárias para fraturar a rede é muito maior que o número necessário para o regime de desordem forte. A Figura 40 apresenta quatro exemplos de fraturas de caminhos ótimos das ligações removidas para  $p_2 = 0$ ,  $p_2 = 0,3$ ,  $p_2 = 0,7$  e  $p_2 = 1,0$ . Semelhante ao que foi discutido na seção anterior, na medida que  $p_1$  (fração de ligações direcionadas isotropicamente) são substituídas por ligações não direcionadas, o número necessário para fraturar a rede é maior e pode ser observado na Figura 41.

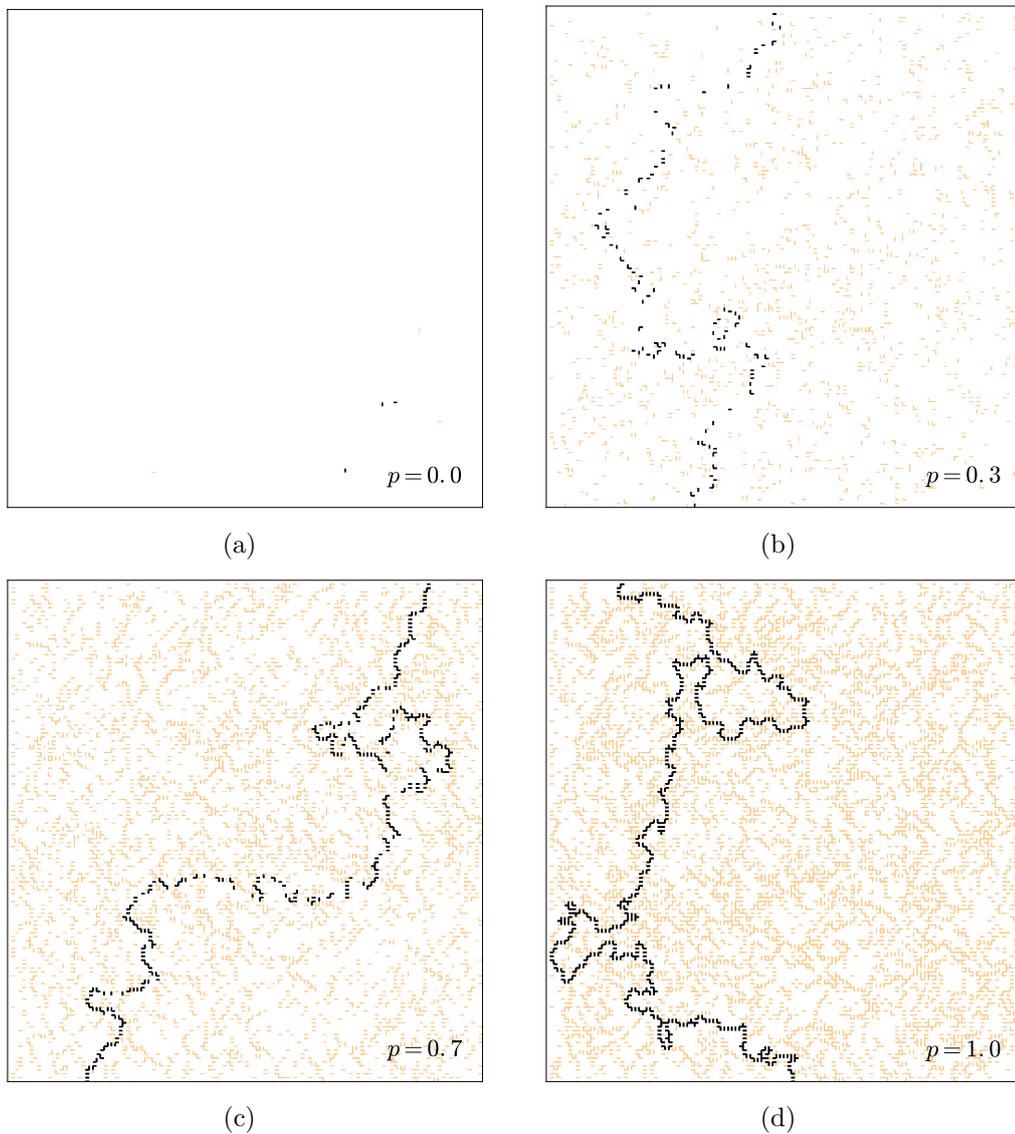


Figura 40: Exemplos de fraturas de caminhos ótimos para redes de tamanho linear  $L = 128$  com frações de ligações direcionadas para valores (a)  $p_2 = 0$ , (b)  $p_2 = 0,3$ , (c)  $p_2 = 0,7$  e (d)  $p_2 = 1,0$  no regime de desordem fraca. As falhas de cor laranja e preto foram produzidas pelo OPC no regime de desordem fraca. As falhas de cor preta são as mesmas no regime de desordem forte.

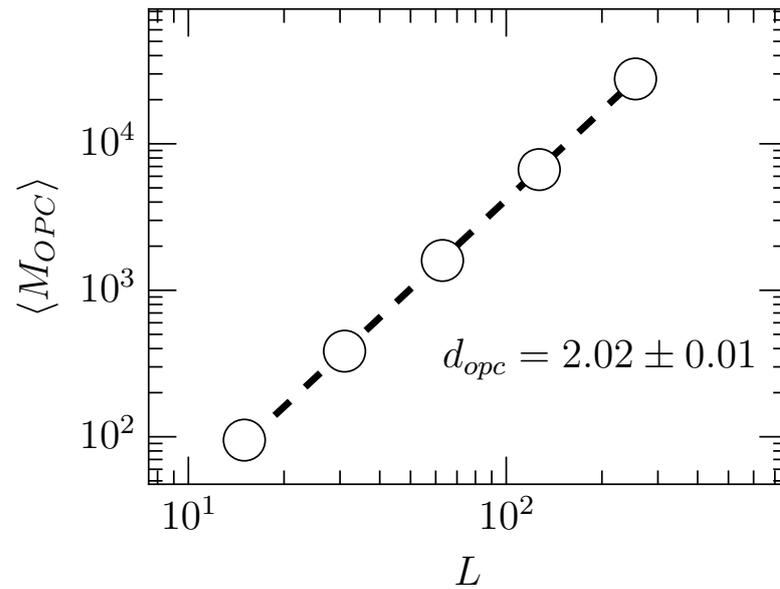


Figura 41: Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas  $M$  como função do tamanho linear da rede  $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações não direcionadas  $p_2 = 1$ . O expoente é o mesmo para as redes não direcionadas de Andrade *et al* [1].

No regime de desordem fraca, o número de ligações removidas é proporcional ao quadrado do tamanho linear  $L$ , portanto, o expoente  $d_f \simeq 2$ . Esses valores coincidem com o expoente encontrado por Andrade *et al* [1].

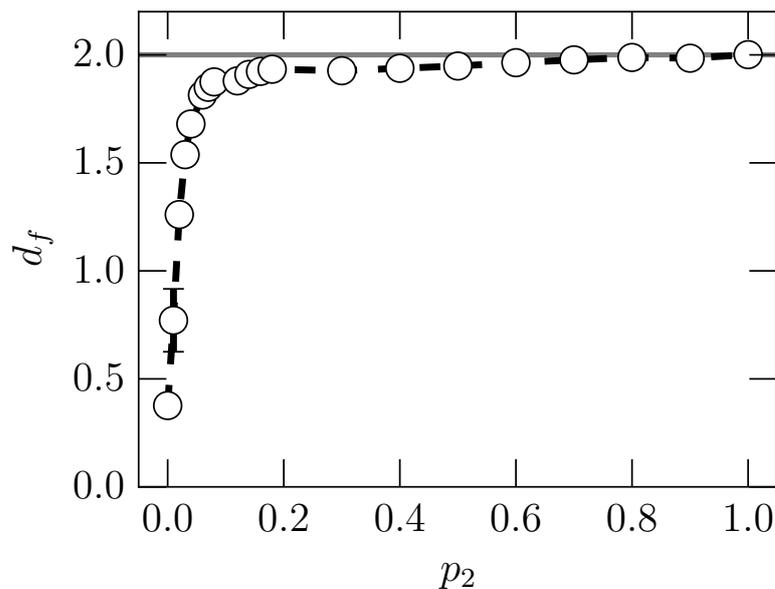


Figura 42: Dimensão Fractal  $d_f$  como uma função da fração de ligações não direcionadas  $p_2$  no regime de desordem fraca de pesos.

Quando a rede tem ligações isotropicamente direcionadas, a massa da fratura de ligações em uma rede isotropicamente direcionada, o expoente da massa fraturada é diferente de zero, veja a Figura 43.

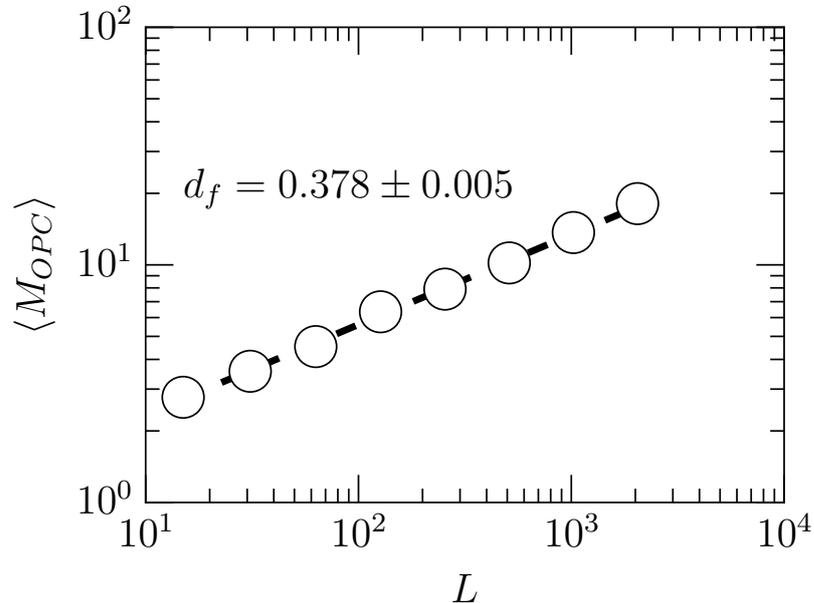


Figura 43: Gráfico log-log da dependência do número de ligações bloqueadas  $M$  como função do tamanho linear da rede  $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações isotropicamente direcionadas  $p_1 = 1$ . A rede está sobre a linha crítica  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ .

O expoente do caminho mais curto – *shortest path* – sobre o agregado percolante na rede isotropicamente direcionada  $d_{opt} = 1,133 \pm 0,001$  está em acordo com os resultados de Herrmann H.J *et al*, Grasberger *et al* e Zhou Z. *et al* [64, 65, 39] para a dimensão mínima de caminhos mais curtos em agregados percolantes, veja a Figura 44.

Em redes isotropicamente direcionadas, há uma combinação de três conjuntos de agregados percolantes: o agregado gigante *in-component* (GIN), o agregado gigante *out-component* (GOUT) e a intersecção desses dois: o agregado gigante fortemente conectado (GSCC) [22], que foi discutido na seção anterior. A dimensão fractal do GSCC é diferente da dimensão fractal do GOUT. No entanto, quando há a possibilidade de existirem caminhos que atravessem uma rede de tamanho linear  $L$ , esse caminho obrigatoriamente estará no conjunto de ligações GIN ou GOUT.

Embora existam expoentes sobre o agregado percolante de um GSCC, as propriedades de caminhos ótimos em agregados GOUT e GIN na fração crítica de ligações  $p_1 = 1$  pertencem à mesma classe de universalidade da percolação clássica de ligações na fração crítica. Sobretudo, não há correspondência para as propriedades de fraturas de caminhos ótimos na fração crítica de ligações em redes isotropicamente direcionadas cujos valores

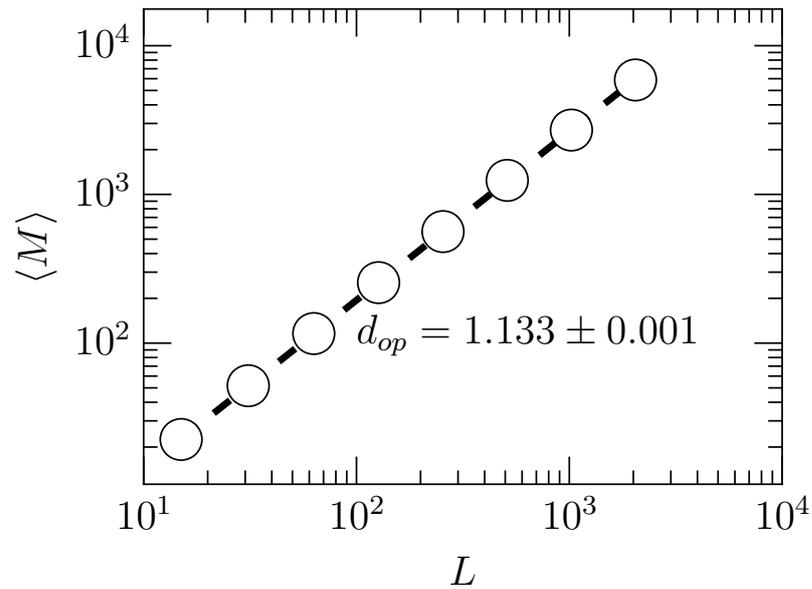


Figura 44: Gráfico log-log da massa  $M$  do caminho mais curto em função do tamanho linear da rede quadrada  $L$ . A rede está totalmente preenchida de ligações direcionadas  $p_2 = 0$ . A rede está sobre a linha crítica  $p_2 + p_1/2 = 1/2$ .

são significativamente diferentes.

Esta diferença que há dos expoentes de fraturas de caminhos ótimos entre as redes isotropicamente direcionadas e redes de ligações não direcionadas sugerem uma sensibilidade do OPC para medir a eficiência de uma rede regular de ligações ou uma rede complexa. A próxima seção apresenta o resultado da aplicação do OPC para a cidade de Boston, nos Estados Unidos, considerando a topologia real da rede e o tempo de tráfego de veículos em um dia congestionado como o peso para cada ligação.

## 4.6 Fratura de Caminhos Ótimos Na Cidade de Boston

O modelo de fraturas de caminhos ótimos pode ser aplicado para medir a robustez de redes com regime de pesos e direções nas ligações. A cidade de Boston nos Estados Unidos foi usada como uma aplicação do OPC em uma rede real.

Os dados de ruas da cidade foram obtidas do OpenStreetMap (OSM) [66]. O OSM é uma plataforma eletrônica de dados abertos que contém informações geo-referenciadas de topografia, de cidades e seus elementos. O dado recebido da plataforma OSM armazena para cada via (rua principal, rua secundária, rua terciária, via de fluxo rápido etc) um conjunto de esquinas (intersecção entre ruas) através de coordenadas  $(x_i, y_i)$  e outras propriedades de interesse variado.

Os dados de coordenadas dos pontos obtidos do OSM são convertidos em sítios e o link entre dois sítios define uma ligação (trecho da rua) na rede da cidade de Boston e o conjunto de sítios e ligações definem a rede da cidade de Boston. A Figura 45 ilustra a região da cidade de Boston utilizada na aplicação.

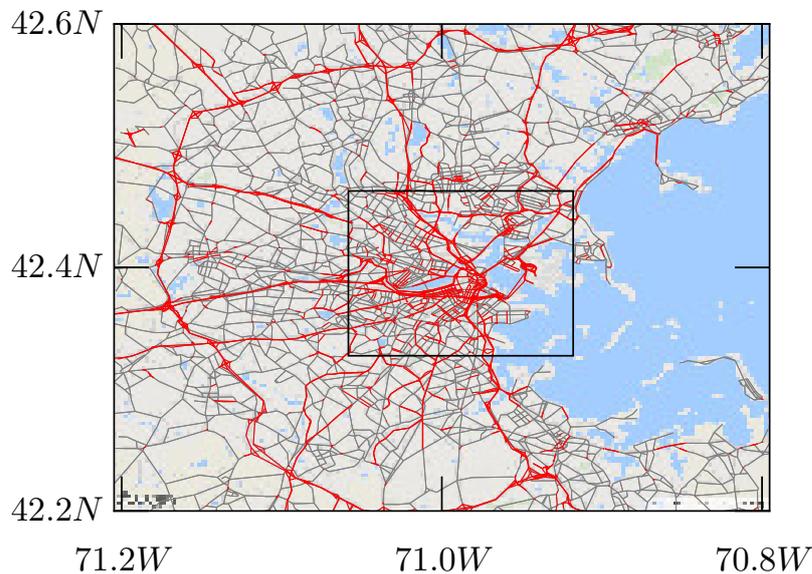


Figura 45: Rede de ruas para a cidade de Boston. As ligações direcionadas são coloridas em vermelho e as ligações não direcionadas são coloridas em cinza. A fração de ligações direcionadas é  $p_1 = 0,37$ . Os dados de ruas e esquinas da cidade de Boston são obtidas no OpenStreetMap contributors BY-SA.

A conversão dos dados do OSM para uma rede de sítios e ligações preserva as propriedades de sentido de cada ligação entre os sítios da cidade. Por exemplo, uma rua que possui sentido duplo é representada por uma ligação não direcionada, pois permite tráfego

de informação nos dois sentidos, uma rua de sentido único é representada por uma ligação direcionada e uma via de fluxo rápido corresponde a um par de ligações direcionadas em sentidos opostos desconectados.

O peso  $\varepsilon_k$  de cada ligação da cidade de Boston é dado por,

$$\varepsilon_k = \frac{t_k}{l_k}, \quad (4.8)$$

onde  $t_k$  é o tempo necessário para atravessar a rua (cruzamento entre duas ruas no mapa) e  $l_k$  é o comprimento da rua.

O tempo  $t_k$  de tráfego e o comprimento  $l_k$  da rua de cada ligação foi obtido do aplicativo do Google Maps [67]. O Google disponibiliza um conjunto de *Application Programming Interface* (API) que pode enviar dados conforme a requisição do usuário. O API utilizado é o Directions API que consiste em determinar rotas entre um ponto de origem e um ponto de destino em uma cidade. Para cada rota determinada pelo API, um caminho é indicado e suas respectivas etapas para completar a rota selecionada. Para cada rua do caminho obtido há um conjunto de informações, dentre elas, o tempo de viagem da rua  $t_k$  e o seu comprimento  $l_k$ . A Figura 46 apresenta a distribuição de pesos obtidos dos dados do tempo de viagem e do comprimento de rua para a cidade de Boston.

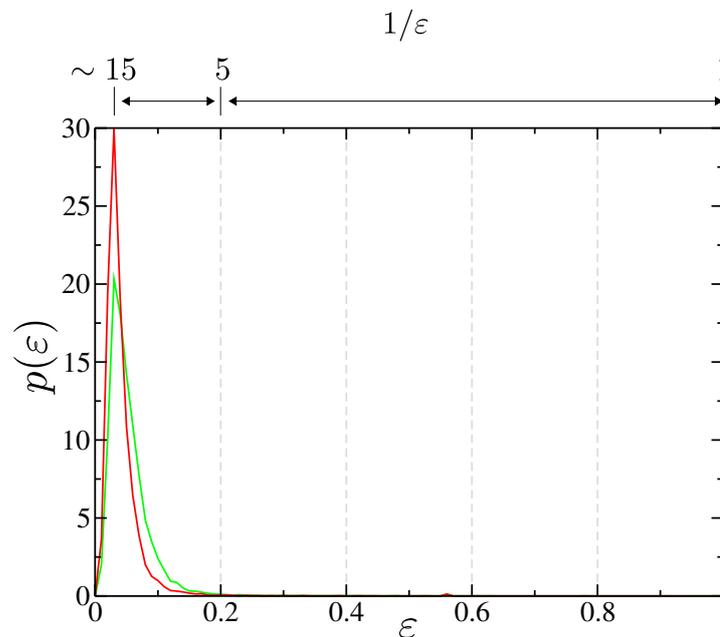


Figura 46: Distribuição de pesos  $\varepsilon$  para dois horários de regimes de trânsito congestionado (18h) - linha de cor vermelho - e trânsito livre (4h) - linha de cor verde - para um dia da semana típico. A unidade de medida de  $\varepsilon$  é s/m o inverso de velocidade.

Os resultados apresentados na Seção 4.5 mostram que, no limite de desordem de pesos, a dimensão fractal da fratura acumulada na rede muda significativamente quando os parâmetros da desordem de pesos e da fração ocupada por ligações direcionadas. Para compreender a importância do OPC para medir a robustez da rede da cidade de Boston, três modificações artificiais na rede da cidade de Boston foram implementadas. O experimento 1 consistiu em manter a estrutura original da rede da cidade ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 2 consistiu em tornar aleatório o sentido das ruas direcionadas das ruas de sentido único ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 3 consistiu em trocar ruas não direcionadas (sentido duplo) em ruas direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ) e o experimento 4 consistiu em tornar toda a rede em ligações direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ).

A fratura de caminhos ótimos foi realizada utilizando os passos a seguir: 1º) uma distância fixa de comprimento ( $l$ ) é escolhida, 2º) um sítio origem (O) é escolhido aleatoriamente no distrito financeiro de Boston - quadrado interno ilustrado na Figura 45, 3º) um sítio destino (D) é escolhido aleatoriamente com distância  $l + \delta l$ , 4º) o primeiro caminho mais curto  $\min(path)$  entre o par OD é escolhido, 5º) a ligação que contém o maior valor de peso  $\varepsilon_{max}$  no  $path$  é removido do caminho, os passos 4 e 5 são repetidos até que nenhum caminho entre o par OD exista, observe a figura 47

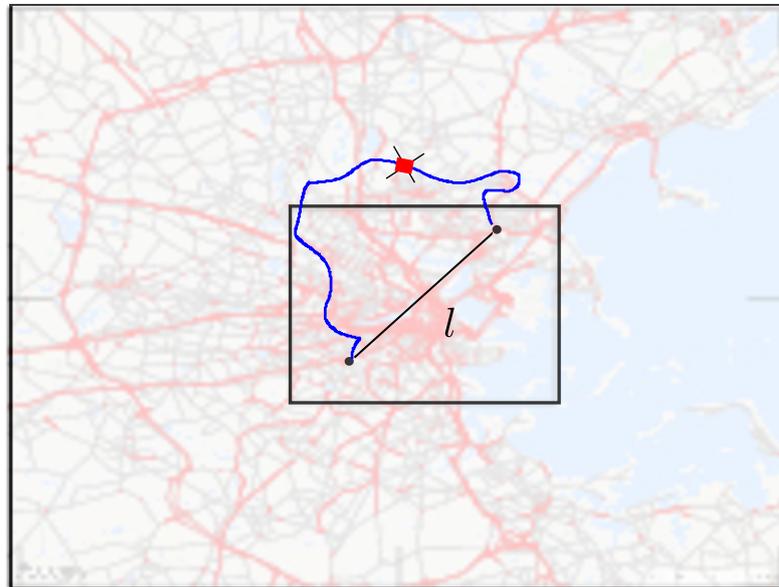


Figura 47: Ilustração da extensão do modelo de fratura de caminhos ótimos para a redes de ruas da cidade de Boston. A caixa em cor preto representa a região de interesse da cidade de Boston. O comprimento  $l$  é a distância euclidiana entre o ponto de origem (O) e de destino (D). O caminho de cor azul é o caminho que tem a menor soma de pesos  $\varepsilon$  e a rua que possui o maior peso é removida (bloqueio de cor vermelho).

A massa média da fratura dos quatro experimentos é apresentado na Figura 48. A

fratura média dos experimentos apresenta que a configuração padrão (experimento 1) de ruas da cidade de Boston tem melhor robustez quando comparada aos outros experimentos 2, 3 e 4. Embora não seja possível estimar a dimensão fractal no experimento 1, no limite de  $p_1 \rightarrow 1$ , os experimentos 3 e 4 mostram que o comprimento médio de fraturas é aproximadamente constante para qualquer distância  $l$  e estão em acordo com o resultado do OPC para regime de desordem forte de pesos no limite  $p_1 \rightarrow 1$ .

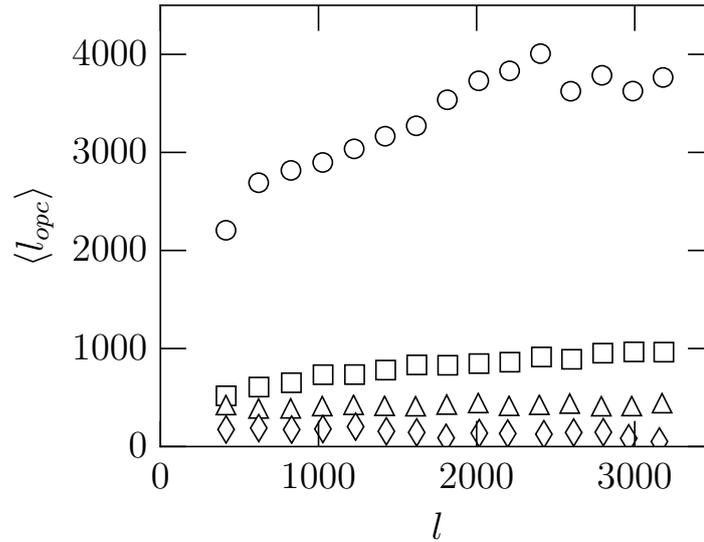


Figura 48: Comprimento médio em metros das ruas bloqueadas em Boston como função do raio  $l$  entre o par OD dos quatro experimentos no horário das 18h. O experimento 1 (○) consistiu em manter a estrutura original da rede da cidade ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 2 (□) consistiu em tornar aleatório o sentido das ruas direcionadas das ruas de sentido único ( $p_1 = 0,37$ ), o experimento 3 (△) consistiu em trocar ruas não direcionadas (sentido duplo) em ruas direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ) e o experimento 4 (◇) consistiu em mudar toda a rede em ligações direcionadas aleatórias ( $p_1 = 1$ ).

## 5 Considerações e Perspectivas

Redes regulares (planares ou cúbicas) isotropicamente direcionadas foram estudadas e encontramos que essas redes exibem o surgimento de agregado de ligações conhecidos como agregados gigantes fortemente conectados (GSCC), agregados gigantes *in-components* (GIN) e agregados gigantes *out-components* (GOUT). O objetivo do trabalho consistiu em determinar os expoentes críticos de GSCC na fração crítica de percolação e de localizar a classe de universalidade em que estão presentes os GSCC e de determinar os expoentes de caminhos ótimos e de fraturas de caminhos ótimos destas redes na fração crítica de percolação.

Determinou-se que a reta crítica de percolação de um GSCC em redes é dada por  $\frac{p_1}{2} + p_2 = p_c$ , onde  $p_c$  é o ponto crítico de percolação de um agregado gigante para a percolação clássica. Verifica-se que os expoentes  $\beta_{scc}, \gamma_{scc}$  e  $d_{scc}$  são diferentes da percolação clássica e sugerem que o GSCC é diferente do GOUT e do GIN, embora, tenham o mesmo ponto crítico de percolação. Os resultados encontrados são equivalentes quando as simulações da primeira e segunda parametrização são comparadas. Os expoentes encontrados satisfazem as relações de hiper-escala para as redes planares  $2D$  e a rede cúbica  $3D$ .

Verificamos que os expoentes encontrados para o caminho mais curto nas redes isotropicamente direcionadas são os mesmos valores que encontrados na percolação clássica de ligações, que são  $d_{min} \approx 1,205$  para a desordem forte de pesos e  $d_{min} \approx 1,13$  para a desordem fraca de pesos.

No entanto, os expoentes de fratura de caminhos ótimos para redes isotropicamente direcionadas não são os mesmos para as redes de ligações não direcionadas usadas na percolação clássica de ligações. Para o regime de desordem forte de pesos a fratura tem valor quase constante em redes isotrópica de ligações  $d_{opc} \rightarrow 0$  e no limite de ligações não direcionadas  $d_{opc} = 1,22$ , em concordância com Andrade *et al* [1]. No regime de desordem fraca de pesos, a fratura de caminhos ótimos escala com expoente  $d_{opc} = 0,38$  para redes isotrópicas de ligações e  $d_{opc} = 2$  para rede de ligações não direcionadas.

Com esta potencial sensibilidade do OPC quanto aos parâmetros de fração de ligações direcionadas e de desordem de pesos em rede de sítios e ligações, o modelo de fratura de caminhos ótimos foi aplicado na rede de ruas da cidade de Boston no Estados Unidos. Os dados de ruas foram obtidos do OpenStreetMap e os dados de tempo de tráfego e de comprimento de rua foram obtidos do *Directions* API do Google. Considerando quatro configurações de ruas da cidade de Boston, a primeira - o mapa real - e as outras três mudando-se o regime de frações de ligações direcionadas, verificamos que o valor médio de bloqueios da cidade é constante quando  $p_1 = 1$  isotropicamente direcionadas e que a configuração original da cidade é a que possui maior valor, assim, é possível atribuir uma quantidade de fraturas necessárias para tornar a rede não transitável.

Embora a teoria de percolação seja muito estudada em redes de ligações não direcionais, no plano de redes direcionadas, a formação de agregados gigantes fortemente conectados (GSCC) ainda podem gerar resultados e possíveis aplicações em sistemas físicos ainda não bem entendidos - principalmente no caso da percolação isotrópica de ligações - dada a natureza não peculiar de como esses agregados podem ser conectados e de como caminhos podem ser formados dentro deles.

Este trabalho tem como perspectiva resolver exatamente a dimensão fractal do GSCC em redes hierárquicas para os trabalhos anteriores de Redner [18, 19, 20] que foram concentrados apenas no domínio de GOUT e verificar em dimensões maiores que  $d = 6$  [35], os expoentes críticos não são função da dimensionalidade.

# Referências

- [1] ANDRADE, J. S. et al. Fracturing the optimal paths. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 103, n. 22, p. 225503–, nov. 2009.
- [2] STAUFFER D.; AHARONY, A. *Introduction to Percolation Theory*. [S.l.]: CRC Press, 1994.
- [3] RADICCHI, F. Percolation in real interdependent networks. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 11, p. 597–, jun. 2015.
- [4] WU, Z. et al. Transport in weighted networks: Partition into superhighways and roads. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, n. 14, p. 148702–, abr. 2006.
- [5] WANG, F. et al. Percolation properties in a traffic model. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 112, n. 3, p. 38001–, 2015. ISSN 0295-5075.
- [6] LI, D. et al. Percolation transition in dynamical traffic network with evolving critical bottlenecks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 112, n. 3, p. 669–672, jan. 2015.
- [7] ZHU, Y.-X. et al. Influence of reciprocal links in social networks. *PLOS ONE*, Public Library of Science, v. 9, n. 7, p. 1–8, 07 2014.
- [8] COHEN, R. et al. Breakdown of the internet under intentional attack. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 3682–3685, Apr 2001.
- [9] ROHDEN, M. et al. Cascading failures in ac electricity grids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 94, p. 032209, Sep 2016.
- [10] YAMASAKI, K.; GOZOLCHIANI, A.; HAVLIN, S. Climate networks around the globe are significantly affected by el niño. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, n. 22, p. 228501–, jun. 2008.
- [11] GUEZ, O. et al. Climate network structure evolves with north atlantic oscillation phases. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 98, n. 3, p. 38006–, 2012. ISSN 0295-5075.
- [12] WANG, J. et al. Bond and site percolation in three dimensions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 87, p. 052107, May 2013.
- [13] GOZOLCHIANI, A.; HAVLIN, S.; YAMASAKI, K. Emergence of el nino as an autonomous component in the climate network. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 107, n. 14, p. 148501–, set. 2011.
- [14] PARSHANI, R.; CARMI, S.; HAVLIN, S. Epidemic threshold for the susceptible-infectious-susceptible model on random networks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 258701, Jun 2010.

- [15] BUNDE, A.; HAVLIN, S. *Fractals and Disordered Systems*. [S.l.]: Springer, 1991.
- [16] NEWMAN, M. *Networks: An Introduction*. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2010. ISBN 0199206651,9780199206650.
- [17] BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes: I. crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 53, n. 3, p. 629–641, 1957.
- [18] REDNER, S. Percolation and conduction in a random resistor-diode network. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 14, n. 9, p. L349, 1981.
- [19] REDNER, S. Conductivity of random resistor-diode networks. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 25, p. 5646–5655, May 1982.
- [20] REDNER, S.; MUELLER, P. R. Conductivity of a random directed-diode network near the percolation threshold. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 26, p. 5293–5295, Nov 1982.
- [21] NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 64, p. 026118, Jul 2001.
- [22] DOROGOVTSSEV, S. N.; MENDES, J. F. F.; SAMUKHIN, A. N. Giant strongly connected component of directed networks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 64, p. 025101, Jul 2001.
- [23] LIMA, F. W. S. Analysing and controlling the tax evasion dynamics via majority-vote model. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 246, n. 1, p. 012033, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/246/i=1/a=012033>>.
- [24] LIU, Y.-Y.; BARABÁSI, A.-L. Control principles of complex systems. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 88, p. 035006, Sep 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.035006>>.
- [25] SANTOLINI, M.; BARABÁSI, A.-L. Predicting perturbation patterns from the topology of biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, 2018. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<http://www.pnas.org/content/early/2018/06/19/1720589115>>.
- [26] ANDRADE, J. S. et al. Ubiquitous fractal dimension of optimal paths. *Computing in Science Engineering*, v. 13, n. 1, p. 74–81, Jan 2011. ISSN 1521-9615.
- [27] OLIVEIRA, E. A. et al. Optimal-path cracks in correlated and uncorrelated lattices. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 83, n. 4, p. 046113–, abr. 2011.
- [28] CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. *Introduction to Algorithms*. [S.l.]: MIT Press, 1990. 997 p.
- [29] CHRISTENSEN, N. R. M. K. *COMPLEXITY AND CRITICALITY*. [S.l.]: Imperial College Press, 2005. (Imperial College Press Advanced Physics Texts, 1).

- [30] CHANDLER, R. et al. Capillary displacement and percolation in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 119, p. 249–267, 1982.
- [31] VIGOLO, B. et al. An experimental approach to the percolation of sticky nanotubes. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 309, n. 5736, p. 920–923, 2005. ISSN 0036-8075.
- [32] DERÉNYI, I.; PALLA, G.; VICSEK, T. Clique percolation in random networks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 94, p. 160202, Apr 2005.
- [33] SOLOMONOFF, R.; RAPOPORT, A. Connectivity of random nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1951.
- [34] ERDOS, P.; RENYI, A. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, v. 5, p. 17–61, 1960.
- [35] ESSAM, J. W. Percolation theory. *Reports on Progress in Physics*, v. 43, n. 7, p. 833–912, 10 1980. 1980.
- [36] INUI, N. et al. Critical behavior of a random diode network. *Phys. Rev. E*, v. 59, p. 6513, 1999.
- [37] Hans-Karl Janssen and Olaf Stenull. Random resistor-diode networks and the crossover from isotropic to directed percolation. *Phys. Rev. E*, v. 62, p. 3173, 2000.
- [38] STENULL, O.; JANSSEN, H.-K. Nonlinear random resistor diode networks and fractal dimensions of directed percolation clusters. *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 016135, 2001.
- [39] ZHOU, Z. et al. Shortest-path fractal dimension for percolation in two and three dimensions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, p. 061101, Dec 2012.
- [40] BOGUNA, M.; SERRANO, M. A. Generalized percolation in random directed networks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 72, p. 016106, Jul 2005.
- [41] LORENZ, C. D.; ZIFF, R. M. Precise determination of the bond percolation thresholds and finite-size scaling corrections for the sc, fcc, and bcc lattices. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 57, p. 230–236, Jan 1998.
- [42] TARJAN, R. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM Journal on Computing*, v. 1, n. 2, p. 146–160, 1972.
- [43] LEVINSHTEIN, M. E. et al. The relation between the critical exponents of percolation theory. *Sov. Phys. JETP*, v. 42, n. 1, p. 197–200, 1975.
- [44] LEATH, P. L. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 14, p. 5046–5055, Dec 1976.
- [45] ALEXANDROWICZ, Z. Critically branched chains and percolation clusters. *Physics Letters A*, v. 80, n. 4, p. 284 – 286, 1980. ISSN 0375-9601.
- [46] BALLESTEROS, H. G. et al. Scaling corrections: site percolation and ising model in three dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 1, p. 1, 1999.

- [47] FISHER, M. E. The renormalization group in the theory of critical behavior. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 46, p. 597–616, Oct 1974.
- [48] CONIGLIO, A. Cluster structure near the percolation threshold. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 15, n. 12, p. 3829, 1982.
- [49] BARRAT, A. et al. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 101, n. 11, p. 3747–3752, 2004.
- [50] DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, v. 1, p. 269–271, 1959.
- [51] MEZARD, M. et al. Nature of the spin-glass phase. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 52, p. 1156–1159, Mar 1984.
- [52] SCHWARTZ, N. et al. Optimal path in weak and strong disorder. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 266, n. 1-4, p. 317–321, 1999. ISSN 0378-4371.
- [53] PORTO, M. et al. Optimal path in strong disorder and shortest path in invasion percolation with trapping. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 4060–4062, Nov 1997.
- [54] LOPEZ, E. et al. Possible connection between the optimal path and flow in percolation clusters. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 72, p. 056131, Nov 2005.
- [55] STRELNIKER, Y. M. et al. Resistance distribution in the hopping percolation model. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 72, p. 016121, Jul 2005.
- [56] CHEN, Y. et al. Universal behavior of optimal paths in weighted networks with general disorder. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, p. 068702, Feb 2006.
- [57] TRUS, B. L.; HAVLIN, S.; STAUFFER, D. Distribution of first-passage times for diffusion at the percolation threshold. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 20, n. 18, p. 6627, 1987.
- [58] WU, Z. et al. Current flow in random resistor networks: The role of percolation in weak and strong disorder. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 71, p. 045101, Apr 2005.
- [59] CIEPLAK, M. et al. Optimal paths and universality. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 28, n. 20, p. 5693, 1995.
- [60] PORTO, M. et al. Optimal paths in disordered media: Scaling of the crossover from self-similar to self-affine behavior. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 60, n. 3, p. R2448–R2451, set. 1999.
- [61] VOIGT, A. *Fracturing of Optimal Paths in a Random Lattice*. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, 2011.
- [62] FEHR, E. et al. Corrections to scaling for watersheds, optimal path cracks, and bridge lines. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, n. 1, p. 011117–, jul. 2012.

- [63] NUNES, T. C. C. Fratura de caminhos otimos na rede de barabasi-albert. 2012.
- [64] HERRMANN, H. J.; STANLEY, H. E. The fractal dimension of the minimum path in two- and three-dimensional percolation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 21, n. 17, p. L829, 1988.
- [65] GRASSBERGER, P. Spreading and backbone dimensions of 2d percolation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 25, n. 21, p. 5475, 1992.
- [66] CONTRIBUTORS, O. *Planet dump retrieved from <https://planet.osm.org>*. 2017. <https://www.openstreetmap.org>.
- [67] GOOGLE. *API Direction Google*. [S.l.], 2017.