



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA GOMES

**TEORIA DA GRAVIDADE ESCALAR GEOMÉTRICA INTERPRETADA SOB A
PERSPECTIVA DO MODELO DE DIMENSÕES EXTRAS**

FORTALEZA

2018

FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA GOMES

TEORIA DA GRAVIDADE ESCALAR GEOMÉTRICA INTERPRETADA SOB A
PERSPECTIVA DO MODELO DE DIMENSÕES EXTRAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landin de Carvalho.

Coorientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

FORTALEZA
2018

FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA GOMES

TEORIA DA GRAVIDADE ESCALAR GEOMÉTRICA INTERPRETADA SOB A
PERSPECTIVA DO MODELO DE DIMENSÕES EXTRAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 17/08/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Presidente)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

A000p GOMES, F. O. S. .
TEORIA DA GRAVIDADE ESCALAR GEOMÉTRICA INTERPRETADA SOB A PERSPEC-
TIVA DO MODELO DE DIMENSÕES EXTRAS / FERNANDO OLIVEIRA DA SILVA GOMES. –
Fortaleza, 2018.
46.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2018.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landin de Carvalho.

1. Gravidade. 2. Campo escalar. 3. Dimensões extras. 4. Relatividade geral. 5. Gravidade escalar. I. Título.

CDD:000.0

À minha mãe, Celina
e à minha esposa, Aline

AGRADECIMENTOS

Ao grupo de estudantes do CREU, que sempre me ajudaram nas muitas vezes que precisei, e sempre davam um jeito de descontrair e me levar a boas gargalhadas, mesmo nos períodos mais tensos.

Aos membros da banca deste trabalho, por todo o esforço envolvido e pelo favor de aceitarem compô-la.

Por fim, a todos os professores da UFC que pude conhecer, por todos os ensinamentos que me passaram.

RESUMO

Esta dissertação consiste em uma revisão de alguns aspectos da Teoria da Relatividade Geral e da Teoria Clássica de Campos, com o intuito de formar uma base para um aprofundamento em um artigo de um grupo de pesquisadores do ICRA - CBPF que apresenta uma teoria alternativa para a gravitação. Nesta teoria, a gravitação é tomada como um efeito geométrico, assim como na Relatividade Geral, porém a curvatura do espaço-tempo é caracterizada como uma função de um campo escalar. Em outras palavras, apenas um grau de liberdade é necessário para descrever a gravitação, e não dez como na Relatividade Geral. Após o estudo desse trabalho, é mostrado como essa teoria pode ser interpretada de uma forma nova e ainda não explorada por seus autores: como se representasse uma superfície quadridimensional embebida em um espaço-tempo de cinco dimensões, abrindo margem para o estudo dessa teoria no modelo de Branas.

Palavras-chave: Gravidade. Campo escalar. Dimensões extras. Relatividade geral. Gravidade escalar.

ABSTRACT

This thesis consists in a review of some aspects of the General Theory of Relativity and of the Classical Field Theory, in order to study a paper from a group of researchers from ICRA - CBPF which presents an alternative theory of gravity. In this theory, gravity is a geometric effect, like in General Relativity, but the curvature of spacetime is characterized by a function of a scalar field. In other words, the gravity would have only one degree of freedom, instead of ten as in General Relativity. After this study, it is shown how the geometric scalar theory of gravity can be interpreted in a new and not yet explored way: as a representation of a four-dimensional surface imbedded in a five-dimensional spacetime, allowing the study of the geometric scalar gravity in the brane world model.

Keywords: Gravity. Scalar field. Extra dimensions. General relativity. Scalar gravity.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CAMPO ESCALAR REAL RELATIVÍSTICO	12
2.1	Notação covariante e tensores	12
2.2	Campo escalar real	14
2.2.1	Tensor energia-momento	15
2.2.2	Interação do campo escalar com partículas	16
2.3	Gravidade como campo escalar	17
3	RELATIVIDADE GERAL	20
3.1	Princípio da Equivalência	20
3.2	Espaços curvos: tensor métrico e derivada covariante	21
3.2.1	Espaço tangente e referencial localmente inercial	22
3.2.2	Geodésicas e símbolos de Christoffel	22
3.2.3	Derivada covariante	24
3.2.4	Integrais de volume em espaços curvos	25
3.2.5	Transporte paralelo e derivada direcional	26
3.2.6	Tensor de curvatura de Riemann	27
3.3	Limite Newtoniano	29
3.4	Desvio de geodésicas	30
3.5	Equações de campo de Einstein	31
4	TEORIA ESCALAR E GEOMÉTRICA DA GRAVIDADE	34
4.1	Teoria não linear do campo escalar	34
4.2	Limite Newtoniano	39
4.3	Campo estáico e esfericamente simétrico	39
4.4	Interpretação em cinco dimensões	42
5	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Restrita revelou que a estrutura tridimensional do espaço, rígida e separada do tempo, e sobre a qual a Mecânica Newtoniana foi construída, não corresponde à realidade. A radiação eletromagnética viaja no vácuo à velocidade de aproximadamente $3 \times 10^8 m/s$, e, como foi demonstrado no experimento de Michelson e Morley, essa velocidade aparentemente não muda, não importando o sistema de referência (WEINBERG, 1972).

Albert Einstein postulou que a velocidade da luz no vácuo é de fato uma constante independente da posição e do movimento do observador, e, conseqüentemente, que esta é a velocidade máxima que qualquer partícula pode possuir. Assim, as transformações de Galileu tiveram que dar lugar às transformações de Lorentz, e o espaço e o tempo passaram a ser vistos como partes de um espaço quadridimensional, o *espaço-tempo*, que é flexível e capaz de se moldar para permitir que a luz possua uma velocidade independente do referencial adotado (RINDLER, 2006).

Com tamanha mudança de paradigma, a Dinâmica precisou ser revisitada e alterada para se adequar ao espaço-tempo flexível. Dentre outros resultados, talvez o mais importante seja a expressão $E = mc^2$ que revelou a equivalência entre massa e energia. Uma vez que o eletromagnetismo já é invariante por transformações de Lorentz, este se adequou perfeitamente ao modelo de quatro dimensões (o campo elétrico escalar e o magnético vetorial são representados em um único vetor de quatro dimensões) e se tornou uma teoria muito mais concisa e elegante do que é quando analisada classicamente, perfeitamente descrita por um campo vetorial em 4-D (PADMANABHAN, 2014). Além disso, a o estudo da Mecânica Quântica no espaço de Minkowski levou ao surgimento da Teoria Quântica de Campos, uma das teorias mais sólidas e abrangentes dos tempos modernos (CARROLL, 2004).

Contudo, a Relatividade Restrita ainda não levava em conta a Gravitação, pois era necessário modificar a Gravitação Universal de Newton para que esta se tornasse invariante sob transformações de Lorentz. Não tardou para que surgissem as primeiras tentativas de desenvolver um modelo que descrevesse a gravidade como um campo escalar relativístico, uma generalização da teoria Newtoniana para o espaço de Minkowski (NOVELLO et al., 2013).

Porém, a Gravitação clássica possui uma peculiaridade: a massa inercial é igual à massa gravitacional. O mesmo não ocorre com o campo eletromagnético, onde carga elétrica é diferente da massa inercial dos elétrons e prótons. Essa peculiaridade levou Einstein a desenvolver o Princípio da Equivalência, segundo o qual os efeitos de um campo gravitacional são completamente equivalentes (não apenas matematicamente) aos de um referencial acelerado apropriado (WEINBERG, 1972). Um dos efeitos decorrentes desse princípio é que a radiação

eletromagnética também é afetada por campos gravitacionais, mesmo sendo não-massiva (PADMANABHAN, 2014).

Diante disso as teorias gravitacionais baseadas em campos escalares perderam força, pois não existem quantidades escalares capazes de fornecer informação suficiente para descrever um campo tão complexo. O traço do tensor energia-momento é o escalar mais completo para este fim (NOVELLO et al., 2013), mas uma teoria baseada nele entra em desacordo com o Princípio da Equivalência, pois não é capaz de prever uma interação entre um campo cujo tensor energia-momento tem traço nulo (como o campo eletromagnético) e o campo gravitacional. Isso equivale a dizer que fótons não seriam afetados por um campo gravitacional e, portanto, teorias assim não podem corresponder a realidade (CARROLL, 2004).

Foi Albert Einstein que desenvolveu uma nova teoria para a gravitação, a teoria da Relatividade Geral. Nesta, a gravidade é um efeito geométrico, uma curvatura no espaço-tempo e corpos “presos” gravitacionalmente estão apenas percorrendo versões curvilíneas de linhas retas. A causa da curvatura é o tensor energia-momento do sistema, um objeto muito mais complexo que um campo escalar. Contudo a Relatividade Geral ainda é uma teoria incompleta, o maior dos mistérios que ela não é capaz de solucionar é a natureza da singularidade presente em buracos negros, nem o que acontece com partículas que a alcançam (PADMANABHAN, 2014).

Na busca pela solução dos problemas da Relatividade Geral, pesquisadores tentam desenvolver um meio que unifique-a com a Teoria Quântica de Campos e, conseqüentemente, inclua efeitos gravitacionais no Modelo Padrão. Porém, executar essa tarefa tem sido um dos maiores (se não o maior) desafios dos físicos teóricos. Quando tenta-se unir as leis dessas duas teorias e efetivamente quantizar a gravitação, as duas teorias parecem ser completamente incompatíveis (WESSON, 2010).

A Relatividade Geral pode ser dividida em duas partes, a primeira que diz como partículas se movem em uma dada curvatura e a segunda que diz como matéria e energia provocam a curvatura no espaço-tempo. Não há problema em transferir a primeira parte para a Mecânica Quântica, ou seja, desenvolver uma Teoria Quântica de Campos em um espaço-tempo com curvatura fixada a priori. Desse estudo que foram obtidos resultados importantes, como a radiação Hawking por exemplo. A unificação que os pesquisadores procuram é com a segunda parte da Relatividade, ou seja, quantizar a dinâmica entre a curvatura e o tensor energia-momento (CARROLL, 2004).

Em uma das primeiras tentativa de unificação, o trabalho de Kaluza (KALUZA, 1921), que mais tarde foi complementado por Klein (KLEIN, 1926), desenvolve um modelo de cinco dimensões. A ideia era descrever uma relatividade geral em cinco dimensões e a partir dela obter a Relatividade Geral de Einstein e o Eletromagnetismo. A geometria do espaço-

tempo seria composta pelo espaço-tempo 4-D de Einstein e por um espaço circular de 1-D. Essa dimensão extra foi postulada como compacta para justificar sua aparente inexistência. Dessa forma o modelo de Kalusa-Kein unificou a gravitação e o eletromagnetismo, mas não dava para extrair nenhuma física nova desse modelo. (ZHANG, 2015)

Apesar disso, modelos com dimensões extras continuam sendo estudados na tentativa de se obter a solução dos problemas existentes. Um dos modelos mais recentes, o modelo de Randall-Sundrum, também lança mão do uso de cinco dimensões para resolver o problema da Hierarquia, a discrepância entre as escalas de energia da interação eletrofraca e da gravitacional (RANDALL; SUNDRUM, 1999a).

A teoria que recebe atenção nesta dissertação é a da Gravidade Escalar e Geométrica, desenvolvida por um grupo de pesquisadores do ICRA-CBPF (NOVELLO et al., 2013). Nesta teoria, a gravidade é um efeito geométrico, assim como na Relatividade Geral, e a curvatura do espaço-tempo é totalmente determinada por funções de um campo escalar ϕ . Como preparação para o estudo desta teoria, são revisitados alguns dos principais aspectos das teorias que servem como base para esta formulação: a Teoria Clássica de Campos Escalares e a Relatividade Geral. Então, são demonstrados os cálculos e os principais resultados já conhecidos que a teoria consegue replicar, bem como as principais escolhas que seus autores tiveram que fazer. Por fim, é feito um breve estudo de uma interpretação alternativa desta teoria, ainda não explorada, onde o campo ϕ é tomado como uma dimensão extra e o espaço-tempo curvo de quatro dimensões passa a ser equivalente a uma hiper-superfície embebida em um espaço de cinco dimensões.

2 CAMPO ESCALAR REAL RELATIVÍSTICO

2.1 Notação covariante e tensores

A notação utilizada nessa dissertação é semelhante à usada por Rindler (RINDLER, 2006). Os índices gregos, como μ e ν , denotam as componentes de um vetor no espaço-tempo, assumindo valores entre 0 e 3. Índices latinos, como i e j , denotam as componentes de um vetor no espaço tridimensional convencional, assumindo valores entre 1 e 3. O quadrivetor posição, por exemplo, é comumente representado da seguinte forma:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (2.1)$$

Quando, em um termo de uma expressão, o mesmo índice aparecer tanto sobrescrito e subscrito, a convenção de soma de Einstein determina que esse termo é na verdade um somatório. Por exemplo, o produto escalar entre dois vetores, A e B , pode ser representado da forma por $A^i B_i$. Pela convenção de soma subentende-se que:

$$A^i B_i = \sum_{i=1}^3 A^i B_i. \quad (2.2)$$

Índices repetidos dessa forma são chamados de “mudos”. Índices “não-mudos”, entretanto, são os que realmente carregam informações em equações tensoriais. Escalares e vetores são casos especiais de tensores, de ordem zero e um, respectivamente, mas tensores mais gerais podem possuir qualquer número de índices, e tal número define sua ordem. Um exemplo de tensor de segunda ordem é o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ usado para o cálculo de produtos internos de quadrivetores e o intervalo espaço-temporal no espaço de Minkowski. Este tensor pode ser representado por uma matriz quadrada diagonal $\{-1, 1, 1, 1\}$ e, usando-o juntamente com a convenção de soma, o cálculo de ds^2 assume uma forma compacta:

$$ds^2 = -x^0 x^0 + x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (2.3)$$

Contudo, nem todo objeto com índices é um tensor, tampouco índices sobrescritos são equivalentes à índices subscritos. O que define e diferencia esses objetos são as formas com as quais seus componentes se transformam quando mudamos o sistema de coordenadas (PADMANABHAN, 2014). Suponha uma mudança de um sistema X para um Y . Vetores cujo índice é sobrescrito, chamados de vetores *contravariantes*, se transformam da seguinte forma:

$$V'^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (2.4)$$

onde V' é um quadrivetor descrito no sistema Y e V é o mesmo vetor descrito no sistema X . Vetores cujo índice é subscripto são chamados de *covariantes*, são objetos diferentes dos contravariantes e, conseqüentemente, se transformam de forma diferente:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} V_\nu. \quad (2.5)$$

Um tensor pode ser covariante, contravariante ou misto (covariante em alguns índices e contravariante em outros). A forma com a qual um tensor se transforma depende de como seus índices estão dispostos. Por exemplo, um tensor de segunda ordem pode seguir uma das seguintes regras de transformação:

$$\begin{aligned} T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\lambda} T^{\rho\lambda} \\ T'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} T_{\rho\lambda} \\ T'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} T^\rho{}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dessa lei de transformação vem a propriedade mais importante de um tensor: se todas as componentes de um tensor são nulas em um dado sistema de coordenadas, então o tensor é nulo em qualquer sistemas de coordenadas.

Para entender equações tensoriais, é necessário conhecer as operações definidas na álgebra tensorial. Sobre tensores podem ser realizadas quatro operações: soma, produto externo, contração e permutação de índices (RINDLER, 2006). A soma de dois tensores do mesmo tipo (mesmos índices contravariantes e covariantes) é definida como:

$$C^{i\dots j\dots} = A^{i\dots j\dots} + B^{i\dots j\dots} \quad (2.7)$$

onde cada componente de C é a soma dos componentes de A e B correspondentes. O produto externo de dois tensores gera um terceiro tensor cujas componentes são definidas por:

$$C^{ikl}{}_{jm} = A^i{}_j B^{kl}{}_m. \quad (2.8)$$

A contração é uma operação que só pode ser executada em tensores mistos, obtida pela substituição de um índice contravariante e um covariante por um par de índices mudos, gerando outro tensor com ordem menor:

$$A^{ij}{}_{kl} \rightarrow A^{ih}{}_{hl} = B^i{}_l. \quad (2.9)$$

A permutação de índices consiste em reordenar os índices de um tensor, o que pode revelar uma simetrias e/ou revelar a equações tensoriais.

2.2 Campo escalar real

Na busca por um modelo capaz de descrever o campo gravitacional, o modelo do campo escalar real merece ser estudado. Dado que a teoria da gravitação de Newton pode ser descrita através de um campo escalar, pode parecer natural que esta seja a teoria mais adequada (PADMANABHAN, 2014).

Para obter uma descrição que seja invariante de Lorentz partimos do Princípio da Mínima Ação. Como o objetivo é entender como o campo se comporta, o estudo da ação do próprio campo se faz necessário. Ou seja, o campo escalar deve ser tratado como entidade dinâmica, com suas próprias características físicas (como energia, momento e momento angular).

A ação de um campo compatível com a Relatividade Especial não pode ser definida como na Mecânica Clássica. O espaço e o tempo não são absolutos nem distintos na Relatividade Especial, a integração sobre uma coordenada temporal usada na mecânica clássica deve ser generalizada para uma sobre uma região do espaço-tempo. A densidade Lagrangiana do campo (que deste ponto em diante será chamada apenas de Lagrangiana), ao invés de depender apenas do próprio campo e de sua derivada temporal, passa a depender também de suas derivadas espaciais (CARROLL, 2004). A ação de um campo escalar é então dada por:

$$A = \int d^4x L(\partial_\mu \phi, \phi). \quad (2.10)$$

A variação da ação devido a uma variação no campo ϕ é dada por:

$$\delta A = \int d^4x \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \int d^4x \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi. \quad (2.11)$$

Uma vez que $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta \phi)$, pode-se manipular a primeira integral para que apareça uma derivada total:

$$\delta A = \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] + \int d^4x \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi. \quad (2.12)$$

De forma análoga à mecânica clássica, consideramos que a variação do campo $\delta \phi$ é nula nos limites de integração, fazendo com que o primeiro termo seja identicamente nulo. Temos então, pelo princípio da mínima ação:

$$\delta A = \int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0 \quad (2.13)$$

o que, uma vez que $\delta \phi$ não pode ser nulo em todo o espaço-tempo, resulta em:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \Pi^\mu(\phi), \quad (2.14)$$

que é a equação de movimento do campo escalar. De forma análoga à Mecânica Clássica, Π^μ representa o momento canônico do campo ϕ .

2.2.1 Tensor energia-momento

Tendo definido o momento canônico, o próximo passo é definir o Tensor Energia-Momento do campo escalar. Na mecânica clássica a energia de um sistema é

$$E = p \frac{dq}{dt} - L \quad (2.15)$$

que pode ser generalizada para a Teoria de Campos, substituindo as grandezas clássicas por suas equivalentes relativísticas (PADMANABHAN, 2014):

$$T^\mu{}_\nu = - [\Pi^\mu (\partial_\nu \phi) - \delta^\mu{}_\nu L], \quad (2.16)$$

onde $\delta^\mu{}_\nu$ é uma delta de Kronecker. O termo T^0_0 é idêntico, em estrutura, à energia na Mecânica Clássica e por isso chamamos $T^{00} = \eta^{00} T^0_0 = \Pi^0 (\partial_0 \phi) - L$ de Densidade de Energia. É fácil ver que $T^\mu{}_\nu$ é conservado:

$$\partial_\mu (T^\mu{}_\nu) = \left(-\partial_\mu \Pi^\mu + \frac{\partial L}{\partial \phi} \right) \partial_\nu \phi = 0. \quad (2.17)$$

Além disso, integrando essa lei de conservação sob um volume de quatro dimensões e usando o teorema de Gauss, obtém-se o quadri-momento do campo P^ν , que não varia com o tempo:

$$\int d^4x \partial_\mu T^{\mu\nu} = \int_{t=const} d^3x T^{0\nu} \equiv P^{0\nu}. \quad (2.18)$$

Contudo, para Lagrangianas mais gerais, o tensor Energia-Momento calculado dessa forma pode não ser simétrico e é preferível que esse tensor seja simétrico por dois motivos: o primeiro é que, como veremos mais adiante, nas equações de Einstein da Relatividade Geral:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{-8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

o tensor métrico e o tensor de Ricci são simétricos, o que obriga $T_{\mu\nu}$ a também ser. O segundo motivo é a conservação do momento angular, mas demonstrar esta relação foge do escopo desta dissertação¹. Para resolver o problema da simetria de $T^{\mu\nu}$, aproveitamos sua conservação para redefini-lo como:

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_l S^{\mu\nu l}, \quad (2.20)$$

onde $S^{\mu\nu l} = -S^{\mu l \nu}$, o que mantém a conservação de $T'^{\mu\nu}$, já que $\partial_\nu \partial_l S^{\mu\nu l} = 0$ devido à antisimetria de S em ν e l . Além disso, a definição do quadri-momento para $T'^{\mu\nu}$ muda apenas pelo

¹Uma explicação detalhada pode ser encontrada em: (RYDER, 1996) p. 89.

termo:

$$\int d^3x \partial_l S^{\mu\nu l} = \int d^2x \sigma_{\mu\nu} S^{\mu\nu l}, \quad (2.21)$$

onde a integral do lado direito é sobre a superfície que envolve todo o espaço, ou seja, localizada no infinito espacial, o que a torna nula. Assim, vemos que uma alteração do tipo $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_l S^{\mu\nu l}$, $S^{\mu\nu l} = -S^{\mu l \nu}$ também não altera o quadri-momento do campo escalar, o que significa que sempre podemos escolher um tensor $S^{\mu\nu l}$ que torne $T^{\mu\nu}$ simétrico (PADMANABHAN, 2014).

2.2.2 Interação do campo escalar com partículas

Também é útil estudar a interação de campos com partículas, nesse caso a Ação assume a forma

$$A = \int d\tau L(x^\mu, u^\mu), \quad (2.22)$$

onde L deve conter um termo de interação com o campo escalar e um termo representando a energia própria da partícula. A Lagrangiana mais simples para tal descrição seria $L = -mc^2 - \lambda\phi(x)$ (PADMANABHAN, 2014) que nos leva a:

$$A = - \int d\tau [mc^2 + \lambda\phi(x)] = - \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} [mc^2 + \lambda\phi(x)], \quad (2.23)$$

que, para pequenas velocidades, se torna a ação de uma partícula sob um potencial $V = \lambda\phi(x)$ definida na mecânica clássica a menos de uma constante irrelevante e termos com ordem $1/c^2$:

$$A \approx - \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) (mc^2 + V) \approx \int dt \left(\frac{mv^2}{2} - V\right),$$

o que valida a escolha dessa Lagrangiana. Variando a coordenada x e usando o princípio da mínima ação, temos

$$\delta A = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta (mc^2 + \lambda\phi) d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (mc^2 + \lambda\phi) \delta(d\tau). \quad (2.24)$$

A primeira integração é de simples resolução, $A_1 = \int d\tau \lambda \partial_\mu \phi \delta x^\mu$, mas a segunda é um pouco mais complexa, uma vez que $\delta(d\tau)$ não é trivial:

$$\delta d\tau = \delta(\sqrt{-dx^\mu dx_\mu}) = -\frac{dx_\mu}{d\tau} d\delta x^\mu \equiv -U_\mu d\delta x^\mu, \quad (2.25)$$

onde usamos que $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$. Aplicando esses resultados na ação:

$$\delta A = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \lambda \partial_\mu \phi \delta x^\mu + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (mc^2 + \lambda\phi) U^\mu d\delta x_\mu,$$

onde é possível efetuar uma integração por partes no segundo termo e unir toda a expressão em uma única integral:

$$\delta A = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{d}{d\tau} (mc^2 U_\mu + \lambda \phi U_\mu) + \lambda \partial_\mu \phi \right] \delta x^\mu. \quad (2.26)$$

Uma vez que a variação da ação deve ser nula, o integrando da equação (2.26) é nulo, e a equação de movimento para a partícula pode ser obtida:

$$\frac{d}{d\tau} U^\mu = -\lambda U^\mu \frac{U^\nu \partial_\nu \phi}{mc^2 + \lambda \phi} - \frac{\lambda \partial^\mu \phi}{mc^2 + \lambda \phi}.$$

Como no caso clássico das forças gravitacional e eletrostática, a equação mostra uma relação quase direta entre a aceleração de uma partícula e o gradiente do campo escalar que atua sobre ela. Contudo, a relação com a velocidade e com o próprio campo tornam essa equação significativamente mais complexa.

2.3 Gravidade como campo escalar

Em posse dos principais aspectos da dinâmica do campo escalar, o próximo passo é verificar se essa teoria é adequada para descrever um campo gravitacional. Seguindo o desenvolvimento já presente na literatura (PADMANABHAN, 2014), o princípio básico é que essa descrição deve se reduzir à teoria gravitacional de Newton descrita pelo potencial gravitacional, satisfazendo a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi_N = 4\pi G \rho, \quad (2.27)$$

no limite não relativístico. Além disso, esta descrição deve ser invariante de Lorentz, levar a uma força sempre atrativa e levar a equações de movimento que não dependem das massas dos corpos afetados. A invariância de Lorentz pode ser facilmente obtida trocando o operador Laplaciano pelo d'Alembertiano

$$\square \phi = \frac{-1}{c^2} \partial_0^2 \phi + \partial_1^2 \phi + \partial_2^2 \phi + \partial_3^2 \phi = 4\pi G \rho m. \quad (2.28)$$

No limite de pequenas velocidades, $c \rightarrow \infty$, e a equação acima se torna equivalente à equação de Poisson. A equação de movimento de uma partícula em um campo gravitacional escalar deve ser do tipo

$$\frac{d}{d\tau} U^\mu = -\lambda U^\mu \frac{U^\nu \partial_\nu \phi}{mc^2 + \lambda \phi} - \frac{\lambda \partial^\mu \phi}{mc^2 + \lambda \phi}, \quad (2.29)$$

porém, deve obedecer a condição de ser independente da massa da partícula. Logo, a constante

de acoplamento λ deve ser proporcional à massa. Colocando mc^2 em evidência:

$$\frac{d}{d\tau}U^\mu = \frac{-\lambda/mc^2}{1 + \lambda\phi/mc^2}(U^\mu U^\nu \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi), \quad (2.30)$$

substituindo λ por lm , onde l é uma constante, e posteriormente redefinindo $l\phi = \Phi$, obtém-se uma equação de movimento independente da massa

$$\frac{d}{d\tau}U^\mu = \frac{-1}{1 + \Phi/c^2}(U^\mu U^\nu \partial_\nu (\Phi/c^2) + \partial^\mu (\Phi/c^2)), \quad (2.31)$$

da qual é possível determinar a ação, em que a massa aparece apenas como um fator de escala, para a partícula:

$$A = -mc^2 \int d\tau(1 + \Phi/c^2). \quad (2.32)$$

O próximo passo é verificar as equações do campo escalar. A Lagrangiana mais simples possível para tal análise é $L = -(1/2)\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V\phi$ onde V é a constante de acoplamento que representa a interação de sistemas com o campo. Reescrevendo-a em termos de Φ e fazendo uma escolha apropriada para a constante l :

$$L = -(1/2l^2)\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V\phi \equiv \frac{-1}{8\pi Gc} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \rho\Phi/., \quad (2.33)$$

obtendo assim a equação de d'Alembert (2.28) desejada .

Essa descrição funciona quando se trata de sistemas clássicos de partículas com massa, porém, no contexto da Relatividade Restrita, massa e energia são equivalentes. É necessário que a teoria gravitacional relativística leve em conta toda a forma de energia e momento dos sistemas que interagem com o campo, não só sua massa. A melhor quantidade escalar para esse fim, como sugerido pelo próprio Einstein (NOVELLO et al., 2013), é o traço do tensor Energia-Momento do sistema. Assim, a lagrangiana assume a forma:

$$L = \frac{-1}{8\pi Gc} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - T\Phi/c, \quad (2.34)$$

que, substituindo em (2.27) e usando o princípio da mínima ação, nos leva à $\square\phi_N = 4\pi GT$. Contudo, essa descrição não descreve a gravitação corretamente, uma vez que no eletromagnetismo o traço do tensor Energia-Momento é nulo. Ou seja, seguindo essa descrição, o eletromagnetismo não seria afetado por um campo gravitacional, o que contraria a evidência observacional de que campos gravitacionais afetam o caminho de ondas eletromagnéticas.

Diante das teorias atualmente consolidadas e das evidências até então coletadas, a conclusão lógica é que o campo gravitacional não pode ser descrito como um campo escalar de dinâmica linear. Contudo ainda é possível extrair um resultado interessante da análise aqui desenvolvida. Olhando novamente eq (2.32), podemos reinterpretá-la como se o campo afetasse

a métrica de Minkowski:

$$A = -mc^2 \int d\tau(1 + \Phi/c^2) = -mc^2 \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}(1 + \Phi/c^2)^2 dx^\mu dx^\nu}.$$

Definindo $(1 + \Phi/c^2)\eta_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$, que pode ser interpretado como o tensor métrico de um espaço curvo, a ação assume a forma

$$A = -mc^2 \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu},$$

resultado fornece uma indicação de que a gravidade pode estar associada à um efeito geométrico em espaços curvos.

3 RELATIVIDADE GERAL

A teoria da Relatividade Geral de Einstein explica o fenômeno gravitacional de uma forma diferente da usada por Newton. Ao invés de uma força da natureza, similar à eletromagnética, a Relatividade Geral trata a gravidade como um efeito da curvatura no espaço-tempo e tal curvatura é provocada pela presença de um corpo massivo.

3.1 Princípio da Equivalência

Na Mecânica Newtoniana a força gravitacional com a qual um corpo é atraído por outro depende linearmente de sua massa. Uma vez que a força resultante sobre um objeto varia linearmente com sua massa, a aceleração gravitacional independe da massa do corpo atraído. Algo similar ocorre quando estudamos o movimento de objetos em um referencial uniformemente acelerado: partículas sobre as quais a força resultante é nula possuem um movimento acelerado, com aceleração fixa e independente de suas massas. Matematicamente, em um referencial que se move com aceleração \vec{g} , a Segunda Lei de Newton assume a forma:

$$\vec{F} - m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (3.1)$$

De imediato se vê a semelhança entre a correção na Segunda Lei de Newton (comumente chamada de força fictícia) e a expressão local para a força gravitacional. Na Mecânica Newtoniana tal semelhança é tratada apenas como uma coincidência. Porém, na Relatividade Geral, essa semelhança é tratada como princípio fundamental e ajuda a entender a verdadeira natureza da gravidade. Este é o Princípio da Equivalência, que pode ser descrito da seguinte forma: os efeitos da atração gravitacional são, localmente, indistinguíveis daqueles produzidos por uma escolha adequada de um referencial uniformemente acelerado (CARROLL, 2004).

A primeira mudança que se obtém partindo desse princípio é como determinar se um referencial é localmente inercial: os referenciais inerciais são aqueles nos quais não é observada nenhuma aceleração gravitacional, como o de um corpo em queda livre.

Um experimento de pensamento mostra como essa equivalência é natural e simples: suponha dois elevadores com uma pessoa dentro de cada, um está em queda livre na Terra e o outro parado no vácuo interestelar, longe demais de qualquer corpo massivo para que a interação gravitacional seja imperceptível. Se as duas pessoas tirarem um objeto qualquer do bolso e o “deixarem cair”, os objetos ficarão parados em relação ao interior do elevador. Em outras palavras, qualquer experimento mecânico realizado dentro de um dos elevadores terá o mesmo resultado no outro. Dessa forma, o Princípio da equivalência nos permite definir o que

é um *Referencial Inercial Local*, mais simples e natural que o referencial inercial absoluto da mecânica Newtoniana (WEINBERG, 1972).

No entanto, o Princípio da equivalência não pode ser assumido de forma global: o elevador em queda livre está acelerado em relação ao elevador que está no vácuo interestelar. Além disso a aceleração gravitacional é radial, atrai objetos em direção ao centro de massa do atrator e não em uma única direção independente da posição do objeto, e seu módulo varia com a distância do atrator (PADMANABHAN, 2014).

3.2 Espaços curvos: tensor métrico e derivada covariante

A Teoria da Relatividade Geral assume que o espaço-tempo é maleável e se curva na presença de corpos massivos, como estrelas e planetas. Tal curvatura é responsável pela trajetória que é percorrida por corpos gravitacionalmente ligados (RINDLER, 2006). Por isso, o estudo de espaços curvos se faz necessário.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é o tensor que determina como distâncias são calculadas em espaços vetoriais de acordo com o sistema de coordenadas utilizado. No espaço \mathbb{R}^3 e usando coordenadas cartesianas, distâncias são calculadas da forma $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, o que significa que o tensor métrico é simplesmente uma matriz identidade 3×3 representada por δ^i_j , enquanto que para o \mathbb{R}^2 em coordenadas polares $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, o que significa que o tensor métrico é da forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

nesse caso. O tensor métrico não é sempre diagonal e geralmente é dependente da posição em que é calculado, mas sempre será simétrico uma vez que $dx^i dx^j$ é igual à $dx^j dx^i$. Outra propriedade importante do tensor métrico é que ele é inversível, sua inversa é dada por $g^{\mu\nu}$ e satisfaz a relação $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ (CARROLL, 2004). Naturalmente, podemos obter a forma contravariante de um vetor covariante, ou o contrário, através do tensor métrico:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (3.2)$$

Através do tensor métrico podemos definir se um espaço é intrinsecamente plano ou curvo, sem recorrer a visualização daquele espaço como embebido em um espaço de dimensão maior. Basicamente, se a métrica de um espaço tiver a forma de uma matriz identidade, ou se puder assumir essa forma através de uma transformação de coordenadas, então este espaço é plano (PADMANABHAN, 2014). O exemplo usado acima, do espaço \mathbb{R}^2 descrito por coordenadas polares, é um caso de espaço plano descrito por uma métrica curva, pois através da

transformação

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta, \quad (3.3)$$

obtemos $ds^2 = dx^2 + dy^2$, garantindo que o espaço R^2 é plano.

Se não for possível transformar a métrica em uma identidade, então o espaço é intrinsecamente curvo (RINDLER, 2006). Esse é o caso, por exemplo, da superfície de uma esfera. Não existe sistema de coordenadas no qual distâncias calculadas em uma superfície esférica sejam da forma $ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$. Uma forma prática de se analisar a curvatura de uma superfície esférica é tentar formar uma a partir de uma folha de papel: sem amassar a folha é impossível. O mesmo não acontece quando se tenta formar um cilindro, o que indica que a curvatura cilíndrica é apenas extrínseca.

Obviamente, testar várias transformações de coordenadas até encontrar uma que reduz a métrica à uma δ^i_j não é uma estratégia viável para determinar se um espaço é curvo ou não. Enquanto uma folha de papel basta para determinar se superfícies bidimensionais são planas ou curvas, fazer o mesmo para espaços com três ou mais dimensões não é possível. Além disso, não somos capazes de visualizar curvaturas em tais espaços. Para conseguir definir se um dado espaço é ou não curvo é necessário o estudo de alguns conceitos da álgebra tensorial em espaços curvos.

3.2.1 Espaço tangente e referencial localmente inercial

Mesmo que um espaço seja curvo é possível tratá-lo como aproximadamente plano na vizinhança de um ponto, que pode ser tomado como a origem. A este espaço é dado o nome de *espaço tangente* e ele é plano o suficiente para que a derivada primeira da métrica seja considerada nula quando calculada na origem, mas o mesmo não pode ser feito com as derivadas segundas: apenas em espaços realmente planos é que as segundas derivadas dos componentes da métrica serão nulas (RINDLER, 2006). No espaço-tempo, o espaço tangente à um determinado evento é equivalente ao referencial inercial local onde este evento é à origem.

3.2.2 Geodésicas e símbolos de Christoffel

A menor distância entre dois pontos em um espaço plano é uma linha reta, porém essa noção é ambígua em espaços curvos. O equivalente à uma linha reta do espaço curvo é o que chamamos de *geodésica*, e se trata do caminho que uma partícula percorreria se movendo sempre em frente, como o movimento de um carro com volante travado perfeitamente para frente, tornando-o incapaz de fazer curvas (PADMANABHAN, 2014). Geodésicas geralmente não são o caminho com menor distância entre dois pontos.

Uma forma de encontrar uma geodésica entre dois pontos é usar o princípio da

mínima ação para uma partícula livre de interações no espaço-tempo, da mesma forma que na Relatividade Restrita, mas trocando a métrica de Minkowski por uma métrica genérica $g_{\mu\nu}$ (CARROLL, 2004). Dessa forma:

$$A = -m \int_a^b d\tau = -m \int_a^b \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Calculando a variação dessa ação:

$$\delta A = -m \int_a^b \delta(\sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}) = -m \int_a^b \frac{\partial_\rho(-g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu}{2d\tau} \delta x^\rho + m \int_a^b \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu)}{d\tau},$$

onde pode-se usar $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$, obtendo:

$$\delta A = \frac{-m}{2} \int_a^b \partial_\rho(-g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\rho d\tau + m \int_a^b g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} d(\delta x^\nu).$$

Usando $dx^\mu/d\tau = U^\mu$ além de uma integração por partes na segunda integral afim de tornar todo o integrando proporcional $\delta(x^\mu)$ (o que gera um termo extra que é nulo por ser proporcional à $\delta(x^\mu)$) e calculado diretamente nos pontos a e b), chega-se à

$$\delta A = \frac{-m}{2} \int_a^b \partial_\rho(-g_{\mu\nu}) U^\mu U^\nu \delta x^\rho d\tau - m \int_a^b \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\rho} U^\mu) \delta x^\rho d\tau.$$

Efetuada a derivada na segunda integral e unindo toda a expressão em um mesmo integrando:

$$\delta A = \frac{-m}{2} \int_a^b \left[\partial_\rho(-g_{\mu\nu}) U^\mu U^\nu + 2 \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\rho}) U^\mu + 2 \frac{d}{d\tau} (U^\mu) g_{\mu\rho} \right] \delta x^\rho d\tau,$$

é possível encontrar a equação de movimento quando exigimos que $\delta A = 0$:

$$\frac{d}{d\tau} (U^\lambda) = -g^{\lambda\rho} \left[\partial_\rho(-g_{\mu\nu}) \frac{U^\mu U^\nu}{2} + \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\rho}) U^\mu \right],$$

onde, usando a regra da cadeia $d/d\tau = (dx^\mu/d\tau)(d/dx^\mu) = U^\mu (d/dx^\mu)$, obtêm-se:

$$\frac{d}{d\tau} (U^\lambda) = \frac{-g^{\lambda\rho}}{2} [\partial_\rho(-g_{\mu\nu}) + \partial_\nu(g_{\mu\rho}) + \partial_\mu(g_{\nu\rho})] U^\mu U^\nu.$$

Define-se, então, a *conexão* ou o *símbolo de Christoffel*:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} [\partial_\rho(-g_{\mu\nu}) + \partial_\nu(g_{\mu\rho}) + \partial_\mu(g_{\nu\rho})]. \quad (3.4)$$

A equação de movimento de uma partícula livre em um espaço curvo, chamada de *equação da geodésica*, pode então ser escrita como (PADMANABHAN, 2014)

$$\frac{d}{d\tau} (U^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.5)$$

O símbolo de Christoffel não é um tensor, pois é construído a partir de derivadas

da métrica e estas podem ou não ser nulas dependendo da escolha do sistema de coordenadas, porém a equação da geodésica é covariante uma vez que descreve uma curva. Pode-se dizer que o símbolo de Christoffel representa uma “correção” na trajetória de uma partícula livre devido à forma com a qual as coordenadas se alteram de ponto à ponto, seja por serem coordenadas curvilíneas ou por se tratar de um espaço realmente curvo.

3.2.3 Derivada covariante

Nesse contexto a derivação com relação à coordenadas deve ser revisada, pois mesmo que um tensor não varie intrinsecamente de um evento a outro, ele ainda pode sofrer variações devido à mudanças nos eixos de coordenadas. É necessário generalizar a derivada convencional, fazendo-a levar em conta de que formas os eixos variam de evento à evento (CARROLL, 2004). Se usarmos $d/d\tau = (dX^\mu/d\tau)(d/dx^\mu) = U^\mu(d/dx^\mu)$ na eq. (3.5) teremos

$$U^\mu \partial_\mu(U^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = U^\mu [\partial_\mu(U^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\nu] = U^\mu \nabla_\mu U^\lambda = 0, \quad (3.6)$$

definindo assim, uma vez que se trata de uma equação covariante e U^μ é um tensor, um novo tensor

$$\nabla_\mu U^\lambda = \partial_\mu(U^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\nu, \quad (3.7)$$

que é a derivada covariante do vetor U^λ , uma “correção” na derivada parcial que leva em consideração variações na métrica. Como escalares são covariantes, a derivada covariante deve se reduzir à derivada convencional quando aplicada em escalares, e isso pode ser usado para obter uma expressão para a derivada covariante de um vetor covariante:

$$\nabla_\mu(U^\lambda U_\lambda) = U^\lambda \nabla_\mu(U_\lambda) + U_\lambda [\partial_\mu(U^\lambda) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\nu] = \partial_\mu(U^\lambda U_\lambda).$$

Isolando o termo $U^\lambda \nabla_\mu(U_\lambda)$ e usando a regra do produto em $\partial_\mu(U^\lambda U_\lambda)$:

$$U^\lambda \nabla_\mu(U_\lambda) = U^\lambda \partial_\mu(U_\lambda) - U_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} U^\nu,$$

uma vez que o único índice não mudo é μ , trocar λ e ν de lugar no segundo termo da expressão acima não provoca alteração significativa e permite fatorar U^λ para obter

$$\nabla_\mu U_\lambda = \partial_\mu(U_\lambda) - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} U_\nu. \quad (3.8)$$

Para tensores de ordem maior, a forma da derivada covariante pode ser obtida tratando o tensor como produto externo de dois ou mais vetores:

$$\nabla_\mu T^\rho_\lambda = \partial_\mu T^\rho_\lambda - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^\rho_\nu + \Gamma^\rho_{\mu\nu} T^\nu_\lambda. \quad (3.9)$$

Um outro resultado importante é a derivada covariante do tensor métrico:

$$\nabla_{\mu}U_{\lambda} = \nabla_{\mu}(g_{\rho\lambda}U^{\rho}) = g_{\rho\lambda}\nabla_{\mu}U^{\rho} + \nabla_{\mu}(g_{\rho\lambda})U^{\rho}$$

mas $g_{\mu\nu}\nabla_{\rho}U^{\mu} = \nabla_{\rho}U_{\nu}$. Logo a expressão acima só pode ser verdade se

$$\nabla_{\mu}g_{\rho\lambda} = 0, \quad (3.10)$$

o que significa que a derivada covariante do tensor métrico é sempre nula.

3.2.4 Integrais de volume em espaços curvos

A curvatura do espaço-tempo também afeta a integração volumétrica, pois o elemento de volume d^4x não é covariante:

$$d^4x' = Jd^4x, \quad (3.11)$$

onde J é determinante a matriz Jacobiana, que não é covariante (basta comparar o elemento de volume em coordenadas cartesianas com o de coordenadas esféricas). Isto significa que o elemento de volume deve ser alterado para que seja condizente com a Relatividade Geral. Ao realizarmos uma troca no sistema de coordenadas, o tensor métrico se transforma da forma

$$g'_{\mu\nu} = (\partial x^{\rho}/\partial y^{\mu})(\partial x^{\lambda}/\partial y^{\nu})g'_{\rho\lambda}, \quad (3.12)$$

que é uma expressão matricial e, portanto, é possível tomar o determinante em ambos os lados da igualdade para obter

$$g' = \frac{1}{J^2}g, \quad (3.13)$$

onde, extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, chega-se em

$$\sqrt{g'} = \frac{1}{J}\sqrt{g}. \quad (3.14)$$

A partir desse resultado é fácil obter uma fórmula covariante para o elemento de volume:

$$\sqrt{g'}d^4x' = d^4x\sqrt{g}.$$

Contudo, as métricas de interesse na Relatividade Geral são *Lorentzianas* (CARROLL, 2004), o que leva a um determinante da métrica sempre negativo. A equação acima deve ser alterada para

$$\sqrt{-g'}d^4x' = d^4x\sqrt{-g}, \quad (3.15)$$

impedindo assim a aparição de um integrando complexo. A fim de calcular corretamente integrais de volumes no futuro, vale usar o resultado $\ln(\det M) = Tr(\ln M)$ (PADMANABHAN,

2014), onde M é uma matriz. Substituindo M por $g_{\mu\nu}$ e variando a coordenada x obtêm-se

$$\partial_\rho(\ln g)\delta X^\rho = \partial_\rho(\text{Tr} \ln g_{\mu\nu})\delta X^\rho = \text{Tr}(\partial_\rho \ln g_{\mu\nu})\delta X^\rho,$$

levando à

$$\frac{1}{g}\partial_\rho g = \text{Tr}(g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

$$\partial_\rho g = g g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\partial_\rho g^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

que permite obter uma expressão para $\partial_\mu\sqrt{-g}$:

$$\partial_\rho\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_\rho(-g) = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Outro resultado importante vem de (3.16) ao dividir ambos lados da equação por dois:

$$\frac{1}{2g}\partial_\rho g = \partial_\rho \ln \sqrt{g} = g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

que, comparando com a definição do símbolo de Christoffel eq. (3.4), permite ver que

$$\partial_\rho \ln \sqrt{g} = \Gamma^{\nu}_{\rho\nu}. \quad (3.20)$$

É possível ainda contrair um símbolo de Christoffel com a métrica e obter

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta}\partial_\beta \ln \sqrt{g} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\nu\beta}, \quad (3.21)$$

que, devido à eq. (3.17), pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta}\partial_\beta \ln \sqrt{g} - \partial_\beta g^{\alpha\beta}. \quad (3.22)$$

Efetuada a derivação da raiz quadrada na expressão acima, o resultado é

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}), \quad (3.23)$$

e sua relevância ficará clara mais adiante.

3.2.5 Transporte paralelo e derivada direcional

A derivada covariante é a operação que determina a mudança geral de um tensor quando variada a posição na qual é calculado. Em particular, ditará de que forma um vetor muda de direção e/ou módulo quando efetuado sobre ele um *transporte paralelo* ao longo de uma determinada curva (PADMANABHAN, 2014). Por transporte paralelo entende-se transportar um vetor mantendo-o sempre paralelo à si mesmo. Em um espaço plano, onde coordenadas

cartesianas podem ser assumidas globalmente, o transporte paralelo de um vetor se resume à “mover” o vetor mantendo suas componentes paralelas aos eixos de coordenadas (CARROLL, 2004).

Como não é possível assumir coordenadas globais em espaços curvos, é necessário generalizar o conceito de transporte paralelo através da derivada covariante. Considere uma curva parametrizada por $X(\lambda)$. Define-se a *derivada direcional* com relação à essa curva como sendo

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} = \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \nabla_{\nu} V^{\mu} = \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dV^{\mu}}{dx^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \equiv \frac{dV^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}. \quad (3.24)$$

Em espaços curvos, a derivada direcional de um vetor com relação a determinada curva deve ser nula ao executarmos um transporte paralelo ao longo desta mesma curva, o que nos leva à equação do transporte paralelo (PADMANABHAN, 2014)

$$\frac{dV^{\mu}}{d\lambda} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} V^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}. \quad (3.25)$$

O transporte paralelo também pode ser usado para definir uma geodésica, pois o vetor tangente à uma curva geodésica t^{μ} se mantém tangente quando transportado paralelamente ao longo dela (CARROLL, 2004). Para verificar isso, basta realizar a substituição

$$V^{\mu} = t^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}, \quad (3.26)$$

e considerar o parâmetro λ como sendo o tempo próprio τ e recuperamos a equação da geodésica.

3.2.6 Tensor de curvatura de Riemann

Contudo, transportar paralelamente um vetor de um ponto a outro ainda não é suficiente para distinguir um espaço genuinamente curvo de um espaço plano descrito por coordenadas curvilíneas. É necessário realizar o transporte paralelo em torno de um pequeno “loop”, trazendo o vetor de volta ao ponto inicial depois de percorrer uma curva infinitesimal fechada (o que equivale à transportar um vetor de um ponto inicial até um final por dois caminhos diferentes). Se o vetor final for o mesmo que o inicial então o espaço é plano, caso contrário o espaço é intrinsecamente curvo (RINDLER, 2006).

Matematicamente, esse processo é o mesmo que calcular $\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\alpha} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} V^{\alpha}$, caso o resultado seja nulo o espaço é plano, caso contrário é curvo (PADMANABHAN, 2014). Como a derivada covariante de um tensor é um tensor, se $\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\alpha} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} V^{\alpha}$ for zero em um sistema de coordenadas significa que também é zero em qualquer outro sistema. Calculando

esta diferença explicitamente:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V^{\alpha}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}V^{\alpha}=\nabla_{\mu}[\partial_{\nu}(V^{\alpha})+\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}V^{\lambda}]-\nabla_{\nu}[\partial_{\mu}(V^{\alpha})+\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}V^{\lambda}] \quad (3.27)$$

onde os termos do lado direito da equação são

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}[\partial_{\nu}(V^{\alpha})+\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}V^{\lambda}] &= \partial_{\mu}\partial_{\nu}V^{\alpha}+\partial_{\mu}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}V^{\lambda})+\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\partial_{\nu}V^{\lambda}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}V^{\lambda}; \\ \nabla_{\nu}[\partial_{\mu}(V^{\alpha})+\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}V^{\lambda}] &= \partial_{\nu}\partial_{\mu}V^{\alpha}+\partial_{\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}V^{\lambda})+\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\partial_{\mu}V^{\lambda}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}V^{\lambda}. \end{aligned}$$

Resolvendo a derivada do produto no segundo termo e então efetuando a subtração, surge uma forma explicita para o tensor

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}=\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}, \quad (3.28)$$

que é o *tensor de curvatura de Riemann* (PADMANABHAN, 2014). Também é possível representar este tensor de uma forma completamente covariante

$$g_{\lambda\alpha}R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}=R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (3.29)$$

É imediato que o tensor de Riemann é antissimétrico em μ e ν , pode-se mostrar que o mesmo é verdade para os índices α e β através de $g_{\mu\nu}$, uma vez que a derivada covariante da métrica é sempre nula

$$0=\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}g_{\alpha\beta}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}=R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}g_{\alpha\lambda}+R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu}g_{\beta\lambda}=R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (3.30)$$

A partir do tensor de Riemann podemos obter o *tensor de Ricci* através da contração de índices. Devido as simetrias do tensor de Riemann, a única contração possível é em α e μ (ou em β e ν , o que acaba sendo completamente equivalente devido as simetrias de do tensor de Riemann)

$$g^{\mu\alpha}R_{\alpha\beta\mu\nu}=R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu}=R_{\beta\nu}. \quad (3.31)$$

Contraindo o tensor de Ricci obtemos o *escalar de Ricci* ou *escalar de curvatura*

$$g^{\beta\nu}R_{\beta\nu}=R. \quad (3.32)$$

A partir do tensor de Ricci e do escalar de Ricci é possível construir o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.33)$$

que possui um papel crucial na Teoria da Relatividade Geral, como descrito na sessão 3.5.

3.3 Limite Newtoniano

Qualquer teoria gravitacional deve reproduzir os resultados da Gravitação Newtoniana quando tomados os devidos limites. Estes limites são estaticidade e baixa intensidade do campo gravitacional, além de um limite sobre a velocidade das partículas teste, que deve ser baixa o suficiente para que qualquer efeito relativístico seja desprezível. Consideramos um campo gravitacional de baixa intensidade, ou campo fraco, quando sua ordem de grandeza é próxima daquela do campo gravitacional terrestre ou solar, sendo perfeitamente descritos pela Gravitação Newtoniana. Nessa aproximação, podemos considerar que a métrica do espaço-tempo é essencialmente plana (Minkowski), porém com uma pequena deformação (PADMANABHAN, 2014)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.34)$$

No limite de pequenas velocidades, a componente zero da quadrivelocidade é muito maior que as outras componentes, ou seja:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \approx (c, 0, 0, 0).$$

Substituindo isso na equação da geodésica (3.5), temos

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (3.35)$$

Pela definição do Símbolo de Christoffel, eq. (3.4), e levando em conta o limite de campo estático, $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, temos

$$\Gamma^\lambda_{00} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} [\partial_\rho(-g_{00}) + \partial_0(g_{0\rho}) + \partial_0(g_{0\rho})] = -\frac{g^{\lambda\rho}}{2} \partial_\rho(g_{00}).$$

Substituindo esse resultado na eq (3.35) temos

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \partial^\lambda g_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} \partial^\lambda h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2. \quad (3.36)$$

Dessa equação é possível extrair varios resultados interessantes. Primeiro, a única componente de h que é relevante é h_{00} , todas as outras podem ser consideradas nulas. Segundo, como h_{00} é estático, a componente zero da equação acima é $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0$, o que significa que $\frac{dx^0}{d\tau}$ é uma constante. Terceiro, analisando as componentes espaciais da equação, obtêm-se a relação

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \partial^i h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2,$$

que pode ser refinada através da regra da cadeia:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2,$$

para cancelar o fator $\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$ e obter

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \partial^i h_{00}. \quad (3.37)$$

Mas, na gravitação Newtoniana, $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \Phi$, onde Φ é o campo escalar gravitacional Newtoniano, então:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}. \quad (3.38)$$

Assim, fica estabelecida de que forma a Relatividade Geral é reduzida à gravitação clássica nos limites adequados, ou seja, qual é a métrica que gera a equação de movimento Newtoniana.

3.4 Desvio de geodésicas

Talvez o segundo resultado mais importante da Relatividade Geral, perdendo apenas para as equações de campo, o desvio de geodésicas explica como duas partículas próximas em queda livre tendem a se aproximar. Pela gravitação Newtoniana corpos são atraídos radialmente, o que significa que dois objetos próximos e em queda livre teriam velocidades com componentes horizontais, muito menores que as componentes verticais, que fariam os objetos se aproximarem durante a queda.

Suponha duas partículas à mesma altura e em queda livre. A separação das trajetórias dessas partículas, obedecendo a mecânica Newtoniana, pode ser descrita pelo vetor

$$\vec{S} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial V} \quad (3.39)$$

onde V é a direção da reta que liga as duas partículas. A aceleração entre duas trajetórias é dada por

$$\frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{d\vec{x}}{dt^2},$$

que, pela Segunda Lei de Newton, equivale à:

$$-\frac{\partial}{\partial V} (\partial^\mu \phi) = -S^\nu \partial_\nu \partial^\mu \phi \quad (3.40)$$

Analisando o mesmo problema pela Relatividade Geral, a taxa de variação do vetor separação ao longo da geodésica é dada pela derivada direcional. A “aceleração” deste vetor é

definida por $U^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu S^\rho) \equiv D_\tau^2 S^\rho$ onde U^μ é o vetor tangente à geodésica. Uma vez que

$$U^\nu \nabla_\nu S^\rho = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial V} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho S^\lambda U^\nu$$

e sabendo que

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial x^\rho}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \frac{dx^\rho}{d\tau},$$

é fácil ver que

$$U^\nu \nabla_\nu S^\rho = S^\nu \nabla_\nu U^\rho, \quad (3.41)$$

e, portanto, $U^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu S^\rho) = U^\mu \nabla_\mu (S^\nu \nabla_\nu U^\rho)$. Lançando mão desta igualdade, obtêm-se

$$D_\tau^2 S^\rho = U^\mu \nabla_\mu (S^\nu \nabla_\nu U^\rho) = U^\mu S^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\rho + (S^\mu \nabla_\mu U^\nu) \nabla_\nu U^\rho,$$

que é equivalente à

$$D_\tau^2 S^\rho = U^\mu S^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\rho + S^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu U^\rho) - S^\mu U^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\rho,$$

onde, pela equação da geodésica (3.5), o segundo termo é nulo. Ou seja

$$D_\tau^2 S^\rho = U^\mu S^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\rho - S^\mu U^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu U^\rho = R^\rho_{\lambda\mu\nu} U^\mu S^\nu U^\lambda. \quad (3.42)$$

Esta é a *equação do desvio de geodésicas*.

No limite Newtoniano $\tau \approx t$, o que leva à

$$D_\tau^2 S^\rho \approx \frac{d^2 S^\rho}{dt^2}; \quad U^\mu \nabla_\mu (U^\nu \nabla_\nu S^\rho) \approx \frac{d^2 S^\rho}{dt^2}; \quad U^\mu \approx (1, 0, 0, 0). \quad (3.43)$$

A partir desse resultado é possível comparar a expressão clássica e a relativística para obter:

$$\partial_\nu \partial^\rho \phi = R^\rho_{0\nu 0}, \quad (3.44)$$

uma relação direta entre o tensor de curvatura e o campo gravitacional Newtoniano.

3.5 Equações de campo de Einstein

O resultado mais importante da Relatividade Geral são as equações de campo, através delas fica determinado como um corpo massivo afeta o espaço-tempo a sua volta. O objetivo é, como sempre, obter uma expressão que se reduza a equação de Poisson para o campo gravitacional Newtoniano nos limites adequados.

Como já visto na eq. (3.35), a equação da geodésica assume, no limite de pequenas velocidades, a forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{x^\mu}{d\tau} \frac{x^\nu}{d\tau} \approx \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{00} = 0, \quad (3.45)$$

Que pode ser comparada com a equação clássica $\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\phi_N$ para obter a expressão

$$\nabla\phi_N = \Gamma^\lambda{}_{00}$$

que pode ser usada na equação de Poisson, levando à:

$$\partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{00} = 4\pi G\rho. \quad (3.46)$$

Uma vez que esta não é uma equação tensorial, logo, não covariante, não é possível extrair nada útil diretamente dela. Porém, pela definição do tensor de Ricci, eq. (3.31)

$$R_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{00} - \partial_0\Gamma^\alpha{}_{\alpha 0} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\rho}\Gamma^\rho{}_{00} - \Gamma^\alpha{}_{0\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha 0}, \quad (3.47)$$

que, na aproximação de campos estáticos $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, leva à

$$R_{00} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{00}, \quad (3.48)$$

uma vez que os termos com produtos de Γ s são desprezíveis na aproximação de campos fracos. Ou seja, a expressão $\partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{00} = 4\pi G\rho$ é na verdade $R_{00} = 4\pi G\rho$ depois de consideradas as diversas aproximações. Sem essas aproximações, o lado esquerdo da equação (3.48) seria $R_{\mu\nu}$, mas o lado direito seria ainda uma incógnita (RINDLER, 2006). Vamos antes considerar regiões sem corpos massivos para obter as *equações de Einstein para o vácuo*:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.49)$$

Dentre as soluções para essas equações está inclusa a propagação de ondas gravitacionais (PADMANABHAN, 2014), recentemente detectadas pela primeira vez.

Para regiões com corpos massivos, é necessário generalizar ρ , substituindo-o por um tensor de segunda ordem. Uma vez que massa é equivalente a energia pela Relatividade Restrita, parece imediato que o tensor Energia-Momento seja o substituto ideal (RINDLER, 2006). Dessa forma:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

Porém, como já visto na sessão (2.3), o tensor Energia-Momento é conservado, mas $\partial_\mu R^{\mu\nu}$ não pode ser sempre nulo, pois fixar isso aumentaria em quatro o número de condições, totalizando quatorze ao levarmos em conta as condições estabelecidas pela eq. (3.50), e só haveriam dez funções incógnitas $g^{\mu\nu}$, tornando este um sistema sem solução.

Contudo, há um outro tensor relacionado à curvatura que é conservado e simétrico,

o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$. Em função dele, as equações de Einstein assumem a forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{-8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}. \quad (3.51)$$

A constante que multiplica o tensor energia momento é obtida a partir do limite Newtoniano. Esta é a equação que define a Relatividade Geral, a partir dela é possível encontrar o comportamento de sistemas regidos pela interação gravitacional (PADMANABHAN, 2014).

4 TEORIA ESCALAR E GEOMÉTRICA DA GRAVIDADE

Descrever a gravidade como um campo escalar real mostrou-se não ser possível devido a três principais problemas: a constante de acoplamento de um sistema com o campo é o traço do tensor Energia-Momento, o que resulta em ondas eletromagnéticas não sendo afetadas por campos gravitacionais; a métrica de Minkowski ser utilizada nas equações, não indicando qualquer curvatura do espaço-tempo; a existência de referenciais preferenciais, comuns a qualquer teoria baseada na Relatividade Restrita, o que vai contra o Princípio da Equivalência.

Uma vez que a teoria da Relatividade Geral conseguiu resolver problemas que a gravitação Newtoniana não pôde, e ainda fazer previsões que foram posteriormente confirmadas, nenhuma teoria para a gravitação pode ignorar a Relatividade Geral. Com isso em mente, um grupo de pesquisadores do ICRA-CBPF desenvolveu uma teoria que descreve a gravidade através de um campo escalar que afeta a métrica, sem acoplar diretamente com outros sistemas, provocando curvatura no espaço-tempo e evitando os três problemas citados acima (NOVELLO et al., 2013). Esta teoria foi batizada de gravidade geométrica e escalar, ou *geometric scalar gravity* em inglês (GSG deste ponto em diante).

4.1 Teoria não linear do campo escalar

A forma da Lagrangiana já investigada foi a mais simples, projetada para gerar equações lineares para o campo escalar. Porém, como visto, tais equações falham em descrever a gravitação, o que leva à investigação de Lagrangianas mais complexas. Uma possibilidade é uma Lagrangiana em que o termo potencial aparece multiplicando o termo cinético:

$$L = V(\phi)\omega, \quad (4.1)$$

onde $\omega \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. Para $v = 1/2$, $L(\phi, \partial_\mu \phi)$ se reduz à Lagrangiana do campo escalar livre e não massivo de Klein-Gordon. Vale notar que está sendo usada a equação para o espaço-tempo plano, curvaturas ainda não estão sendo levadas em conta. A partir dessa Lagrangiana (4.1), podemos calcular as equações de campo e obter

$$2V(\phi)\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + V'(\phi)\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0, \quad (4.2)$$

onde $V' = dV/d\phi$. Dividindo toda a expressão por $2V$, multiplicando e dividindo por $\sqrt{-\eta}$ e reposicionando alguns fatores, sem alterar a expressão mais do que visualmente, é possível chegar à:

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu [\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] + \frac{V'}{2V} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0. \quad (4.3)$$

Essa forma da equação de movimento do campo é útil para ilustrar a semelhança desta com a equação do campo escalar livre e não-massivo em espaços curvos:

$$\begin{aligned}\square\phi &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi = 0 \\ \square\phi &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}]\partial_\nu\phi = 0,\end{aligned}$$

onde a eq. (3.23) foi usada. Unindo estes dois termos pela regra do produto:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0, \quad (4.4)$$

obtêm-se uma equação cujo lado esquerdo é idêntico ao primeiro termo da eq. (4.3). Essa semelhança motiva a seguinte pergunta: existe alguma métrica que torne a eq. (4.3) e a eq. (4.4) equivalentes? A resposta é sim. É possível (NOVELLO; GOULART, 2011) introduzir uma métrica contravariante de forma binomial

$$q^{\mu\nu} = \alpha\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi, \quad (4.5)$$

com $\alpha = \alpha(\phi)$ e $\beta = \beta(\phi)$, cuja inversa resulta em (4.3) quando usada em (4.4), estabelecendo, sem o uso de aproximações como o limite Newtoniano, uma relação direta entre uma equação de movimento no espaço plano (ainda que oriunda de uma Lagrangiana não linear) e uma equação de movimento no espaço curvo. O objetivo é, agora, calcular $q_{\nu\rho}$ e descobrir as formas das funções α e β . Assumindo que $q_{\nu\rho}$ é da forma

$$\frac{1}{\alpha}\eta_{\nu\rho} + \gamma h_{\nu\rho},$$

onde $\gamma h_{\nu\rho}$ é um tensor genérico cuja forma exata pode ser obtida através da relação $q^{\mu\nu}q_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$:

$$\left(\alpha\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\right)\left(\frac{1}{\alpha}\eta_{\nu\rho} + \gamma h_{\nu\rho}\right) = \delta_\rho^\mu, \quad (4.6)$$

efetuando o produto, obtêm-se

$$\delta_\rho^\mu + \alpha\eta^{\mu\nu}\gamma h_{\nu\rho} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\partial^\nu\phi\frac{1}{\alpha}\eta_{\nu\rho} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\gamma h_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu, \quad (4.7)$$

que equivale à

$$\alpha\eta^{\mu\nu}\gamma h_{\nu\rho} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\frac{1}{\alpha}\eta_{\nu\rho} + \frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\partial^\nu\phi\gamma h_{\nu\rho} = 0. \quad (4.8)$$

Dividindo toda a expressão por α e agrupando os termos com $h_{\nu\rho}$:

$$\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega\alpha}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\right)\gamma h_{\nu\rho} = -\frac{\beta}{\omega}\partial^\mu\partial^\nu\phi\frac{1}{\alpha^2}\eta_{\nu\rho}, \quad (4.9)$$

e então multiplicando toda a expressão por $\eta_{\mu\nu}$, chega-se à uma forma aproximada de $\gamma h_{\nu\rho}$:

$$\gamma h_{\nu\rho} = -\eta_{\mu\nu} \frac{\beta}{\alpha^2 \omega} \frac{\partial^\mu \phi \partial_\rho \phi}{\eta_{\mu\nu} \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega \alpha} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right)}, \quad (4.10)$$

o que equivale à

$$\gamma h_{\nu\rho} = -\frac{\beta}{\alpha \omega} \frac{\partial_\nu \phi \partial_\rho \phi}{(4\alpha + \beta)}. \quad (4.11)$$

No entanto, ao usar essa forma para $\gamma h_{\nu\rho}$ em $q_{\nu\rho}$ a relação $q_{\mu\nu} q^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ não é totalmente satisfeita:

$$\begin{aligned} \left(\alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \left(\frac{1}{\alpha} \eta_{\nu\rho} - \frac{\beta}{\alpha \omega} \frac{\partial_\nu \phi \partial_\rho \phi}{(4\alpha + \beta)} \right) &= \delta_\rho^\mu \\ \left(\frac{3\beta}{\omega} \right) \frac{\partial^\mu \phi \partial_\rho \phi}{(4\alpha + \beta)} &= 0, \end{aligned}$$

o que, claramente, só pode ser verdade se $\beta = 0$, o que não é interessante. Contudo é fácil ver nessa expressão que $q_{\mu\nu}$ fica corretamente definido se tiver a forma

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)\omega} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.12)$$

O próximo passo é encontrar α e β que tornem a eq. (4.3) igual à eq. (4.4), sendo necessário calcular o determinante e a forma do operador de Laplace-Beltrami referentes à métrica $q_{\mu\nu}$. O determinante de $q_{\mu\nu}$ é:

$$q = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_{0\mu} q_{1\nu} q_{2\rho} q_{3\lambda}. \quad (4.13)$$

Como cada elemento de $q_{\mu\nu}$ possui um termo de segunda ordem nas derivadas do campo, $-\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)\omega} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$, o produto de quatro elementos quaisquer de $q_{\mu\nu}$ produzirá termos de oitava ordem nas derivadas dos campos

$$\frac{\beta^4}{\alpha^4 (\alpha + \beta)^4 \omega^4} \partial_0 \phi \partial_0 \phi \partial_1 \phi \partial_1 \phi \partial_2 \phi \partial_2 \phi \partial_3 \phi \partial_3 \phi,$$

que se cancelam, uma vez que $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ dá sinais positivos à metade desses termos e sinais negativos à outra metade. Apenas ε^{0123} multiplica termos com ordem zero e dois nas derivadas dos campos, $-\alpha^{-4}$ e

$$\alpha^{-3} \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)\omega} (-\partial_0 \phi \partial_0 \phi + \partial_1 \phi \partial_1 \phi + \partial_2 \phi \partial_2 \phi + \partial_3 \phi \partial_3 \phi) = \alpha^{-3} \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)\omega} \omega,$$

respectivamente.

Termos de quarta e sexta ordem nas derivadas dos campos são identicamente nulos, pois a simetria de $q_{\mu\nu}$ garante cada termo desses possuirá um "gêmeo" de mesmo módulo e a

definição de $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ garante que este "gêmeo" terá o sinal oposto. Dessa forma, esses termos se anulam e o determinante de $q_{\mu\nu}$ é, então:

$$q = \det[q_{\mu\nu}] = -\alpha^{-4} + \alpha^{-3} \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} = \frac{-1}{\alpha^3(\alpha + \beta)}. \quad (4.14)$$

O operador de Laplace-Beltrami assume a forma:

$$\square\phi = \sqrt{\alpha^3(\alpha + \beta)} \partial_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^3(\alpha + \beta)}} \left(\alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \partial_\nu \phi \right]. \quad (4.15)$$

Resolvendo primeiro $\partial_\mu \sqrt{-q}$ para facilitar o cálculo:

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} \right) = -\frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}} \left\{ \frac{\partial_\mu \alpha}{\alpha} + \frac{\partial_\mu [\alpha(\alpha + \beta)]}{2\alpha(\alpha + \beta)} \right\}, \quad (4.16)$$

que, dividindo por $\sqrt{-q}$, resulta em

$$\frac{\partial_\mu \sqrt{-q}}{\sqrt{-q}} = -\frac{\partial_\mu \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_\mu [\alpha(\alpha + \beta)]}{2\alpha(\alpha + \beta)}. \quad (4.17)$$

Usando eq. (4.17) em eq. (4.15) temos

$$\begin{aligned} \square\phi &= \alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi \\ &+ \partial_\mu \alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + \partial_\mu \left(\frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \partial_\nu \phi \\ &- \left\{ \frac{\partial_\mu \alpha}{\alpha} + \frac{\partial_\mu [\alpha(\alpha + \beta)]}{2\alpha(\alpha + \beta)} \right\} \left(\alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \partial_\nu \phi, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde é fácil ver que os termos com $\partial_\mu \alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ se anulam. Usando a regra da cadeia

$$\partial_\mu \alpha = \frac{d\alpha}{d\phi} \partial_\mu \phi = \alpha' \partial_\mu \phi \quad (4.19)$$

$$\partial_\mu \beta = \frac{d\beta}{d\phi} \partial_\mu \phi = \beta' \partial_\mu \phi, \quad (4.20)$$

e a definição de ω , é possível reescrever a eq. (4.15) como:

$$\begin{aligned} \square\phi &= \alpha \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \left(\frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \partial_\nu \phi \\ &- \beta \omega \left\{ \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{d}{d\phi} [\alpha(\alpha + \beta)] \frac{1}{2\alpha(\alpha + \beta)} \right\} - \omega \frac{d}{d\phi} [\alpha(\alpha + \beta)] \frac{1}{2(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Efetuada a derivação presente no terceiro termo da eq. (4.21), obtêm-se

$$\partial_\mu \left(\frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right) \partial_\nu \phi = \beta' \omega + \frac{\beta}{\omega} [\partial_\mu \partial^\mu \phi \omega + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi] - 2 \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi.$$

Substituindo esse resultado na eq. (4.21), os termos $\frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi$ se cancelam, resulta em:

$$\square\phi = (\alpha + \beta)\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \beta' \omega - \beta \omega \left\{ \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{d}{d\phi} [\alpha(\alpha + \beta)] \frac{1}{2\alpha(\alpha + \beta)} \right\} - \omega \frac{d}{d\phi} [\alpha(\alpha + \beta)] \frac{1}{2(\alpha + \beta)}. \quad (4.22)$$

É possível obter uma forma mais concisa se definirmos $U(\phi) = \alpha(\alpha + \beta)$:

$$\square\phi = (\alpha + \beta)\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \omega \left\{ \frac{\alpha'\beta}{\alpha} - \beta' + \beta \frac{U'}{2U} + \alpha \frac{U'}{2U} \right\}. \quad (4.23)$$

Através da algebra não é possível avançar além deste ponto, porém, como o objetivo é recuperar a eq. (4.3), é possível deduzir uma relação que permita um progresso no cálculo. A escolha que melhor se adequa ao objetivo é a relação

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V, \quad (4.24)$$

levando à

$$\beta = \alpha^3 V - \alpha \quad (4.25)$$

$$\beta' = 3\alpha^2 \alpha' V + \alpha^3 V' - \alpha' \quad (4.26)$$

$$U' = 4\alpha^3 \alpha' V + \alpha^4 V'. \quad (4.27)$$

Aplicando estes resultados em (4.23) e tomando $\square\phi = 0$:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{\omega}{\alpha^3 V} \left\{ \frac{\alpha'(\alpha^3 V - \alpha)}{\alpha} - (3\alpha^2 \alpha' V + \alpha^3 V' - \alpha') + \frac{4\alpha^3 \alpha' V + \alpha^4 V'}{2\alpha} \right\} = 0 \quad (4.28)$$

onde toda a expressão foi dividida por $\alpha^3 V$. É fácil ver que quase todos os termos dentro das chaves se cancelam, sobrando apenas:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{V'}{2V} \omega = 0, \quad (4.29)$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \frac{V'}{2V} \omega = 0,$$

que é, precisamente, a eq. (4.3). Dessa forma, a equação (4.24) estabelece a condição para que haja uma equivalência entre as equações de campo no espaço-tempo plano de Minkowski e no espaço-tempo curvo de métrica $q_{\mu\nu}$.

Essa equivalência permite investigar se a métrica $q_{\mu\nu}$ tem um significado físico mais profundo: a interação gravitacional. Nesta linha de raciocínio, a interação gravitacional estaria representada pelo campo escalar ϕ que, ao invés de acoplar diretamente com outros sistemas

físicos, afetaria a métrica tornando o espaço-tempo curvo através das funções $\alpha(\phi)$, $\beta(\phi)$ e $V(\phi)$.

Vale ressaltar que essa teoria não tem o intuito de substituir a Relatividade Geral e sim de oferecer um ponto de vista alternativo, que pode ser mais fácil de se trabalhar com, dependendo da situação estudada. A GSG não partilha das falhas que outras teorias escalares da gravidade tiveram, pois o movimento dos corpos afetados gravitacionalmente segue as mesmas regras estabelecidas pela Relatividade Geral.

4.2 Limite Newtoniano

Uma das principais condições que uma teoria gravitacional tem que obedecer é a de obter os mesmos resultados esperados pela gravitação Newtoniana quando os limites clássicos são considerados. Já é conhecida a forma com a qual a Relatividade Geral se adequa aos limites clássicos e reproduz os mesmos resultados da teoria Newtoniana (sessão 3.3), o que serve como ponto de partida.

A influência de um campo gravitacional fraco e estático é perceptível apenas na componente g_{00} do tensor métrico. Aplicando isso ao tensor $q_{\mu\nu}$ obtêm-se

$$q_{00} = -\frac{1}{\alpha(\phi)} = -(1 + 2\Phi_N) \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{1 + 2\Phi_N}, \quad (4.30)$$

com $c = 1$. Vale ressaltar que o campo escalar ϕ não é igual ao campo escalar Newtoniano Φ_N : a função $\alpha(\phi)$ deve, apenas, ser reduzível à forma $\frac{1}{1 + 2\Phi_N}$ no limite de campos fracos. A partir deste ponto, os autores resolvem extrapolar o limite Newtoniano (JARDIM; LANDIM, 2015) e escolher:

$$\alpha = e^{-2\phi} \quad (4.31)$$

como forma definitiva da função α .

O próximo passo é estudar a viabilidade dessa escolha para $\alpha(\phi)$ e determinar a forma de $V(\phi)$. Para isso será estudado outro caso com soluções conhecidas, a métrica de Schwarzschild e as soluções esfericamente simétricas.

4.3 Campo estático e esfericamente simétrico

Ao estudar o caso esfericamente simétrico e estático, que é basicamente o caso das órbitas, convém usar as coordenadas esféricas. Nesse sistema de coordenadas, a métrica de Minkowski passa a ser

$$ds_M^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (4.32)$$

Para conveniência futura, é útil redefinir a coordenada radial para $R = \sqrt{\alpha}r$, com $\alpha = \alpha(r)$, ficando com

$$\begin{aligned} ds_M^2 &= -dt^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \frac{d\alpha}{dr} r + \sqrt{\alpha} \right)^2 dr^2 + \alpha r^2 d\Omega^2 \\ &= -dt^2 + \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 + \alpha r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O proximo passo é escrever a métrica relativa a $q_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas. O caso geral pode ser demasiadamente extenso, mas no limite de campos estáticos e esfericamente simétricos sua forma é simplificada:

$$ds^2 = -\frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 + \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} \frac{d\phi}{dr} \frac{d\phi}{dr} \right] dR^2 + \frac{R^2}{\alpha} d\Omega^2. \quad (4.34)$$

Usando novamente a coordenada $r = \frac{R}{\sqrt{\alpha}}$, e notando que $\omega = \frac{d\phi}{dr} \frac{d\phi}{dr}$ nesse limite:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 + \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} \right] \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 + B dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde foi definido

$$B = \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} \right] \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2. \quad (4.36)$$

Assim, o determinante do tensor métrico assume a forma

$$\det(q_{\mu\nu}) = q = -r^4 \alpha^{-1} B, \quad \sqrt{-q} = r^2 \sqrt{\frac{B}{\alpha}}, \quad (4.37)$$

além disso, uma vez que o campo varia apenas radialmente, a equação (4.4) se reduz à

$$\sqrt{-q} q^{rr} \frac{d\phi}{dr} = \Phi_0, \quad (4.38)$$

onde Φ_0 é uma constante. Usando esses resultados na eq (4.38), obtêm-se

$$r^2 \sqrt{\frac{B}{\alpha}} B^{-1} \frac{d\phi}{dr} = r^2 \sqrt{\frac{1}{\alpha B}} \frac{d\phi}{dr} = \Phi_0. \quad (4.39)$$

Assumindo que longe de uma fonte gravitacional esfericamente simétrica recupere-se o limite Newtoniano, é possível usar a equação (4.30) e definir

$$X \equiv \frac{2MG}{rc^2} = \frac{-2\Phi_N}{c^2}, \quad (4.40)$$

obtendo assim

$$\alpha = \frac{1}{1-X}, \quad \frac{d\alpha}{dr} = \frac{-1}{(1-X)^2} \frac{2GM}{c^2 r^2} = \frac{-1}{(1-X)^2} \frac{X}{r}. \quad (4.41)$$

Substituindo na equação (4.36), e definindo $Z \equiv \alpha + \beta$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\alpha}{Z} \left(\frac{1-X}{2} \frac{-1}{(1-X)^2} \frac{X}{r} r + 1 \right)^2 \\ &= \frac{\alpha}{Z} \left[1 - \frac{X}{2(1-X)} \right]^2 \\ &= \frac{\alpha}{4Z} \left(\frac{2-3X}{1-X} \right)^2. \end{aligned}$$

É possível agora somar e subtrair 1 no numerador e retomar a função α

$$B = \frac{\alpha}{4Z} [\alpha(-1 + 3\alpha^{-1})]^2 = \frac{\alpha}{4Z} (3 - \alpha)^2. \quad (4.42)$$

A partir deste ponto, baseando-se no fato de que $B \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow +\infty$, os autores ((NOVELLO et al., 2013)) lançam mão da seguinte relação

$$Z = \frac{(\alpha - 3)^2}{4}, \quad (4.43)$$

que é uma relação global, não restrita ao limite de campos fracos, o que define a forma global do potencial $V(\phi)$

$$V(\phi) = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}, \quad (4.44)$$

e, além disso, leva à $B = \alpha$, tornando a métrica (4.47)

$$ds^2 = -\frac{1}{\alpha} c^2 dt^2 + \alpha dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.45)$$

Tendo a métrica para o caso estático e esfericamente simétrico e conhecendo sua forma no limite de campos fracos, o próximo passo é determinar como a métrica depende do campo ϕ e de outras constantes da natureza. Usando $\alpha = B$ e $\alpha = e^{-2\phi}$ na equação (4.39), temos

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\phi}{dr} = e^{2\phi} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\Phi_0}{r^2}. \quad (4.46)$$

Integrando ambos os lados da igualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{2\phi} &= -\frac{\Phi_0}{r} + C \\ \phi &= \frac{1}{2} \ln \left(C - 2 \frac{\Phi_0}{r} \right), \end{aligned}$$

Através do limite Newtoniano, é fácil ver que $\Phi_0 = \frac{MG}{c^2}$ e $C = 1$. Substituindo na equação

(4.45):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.47)$$

que é a métrica de Schwarzschild, resultado já conhecido da Relatividade Geral, que descreve o caso esfericamente simétrico.

Pesquisadores continuam explorando diversos aspectos da gravitação sob a perspectiva GSG, como por exemplo casos além da simetria esférica (MOSCHELLA; NOVELLO, 2017), a cosmologia (JARDIM; LANDIM, 2015), (BITTENCOURT et al., 2014) e ondas gravitacionais (TONIATO; NOVELLO, 2016). Mas não essa dissertação não se aprofunda nesses tópicos nesta dissertação, ao invés disso estabelece uma conexão da GSG com o modelo de mundo de branas.

4.4 Interpretação em cinco dimensões

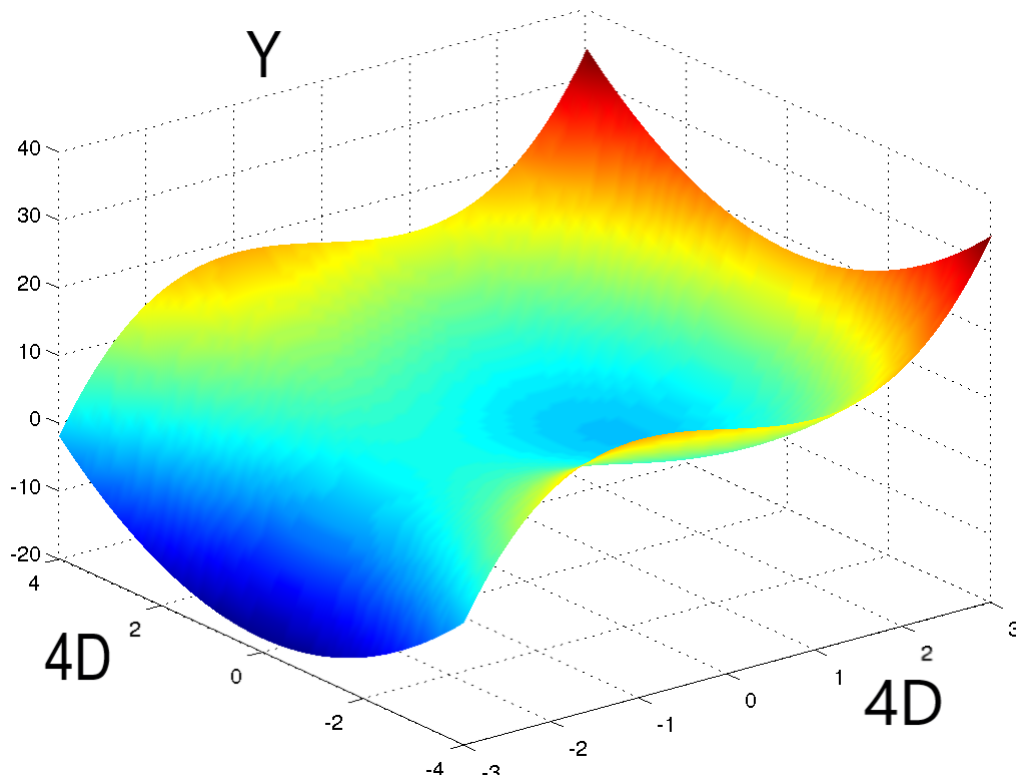
A ideia de que o espaço-tempo pode ter mais do que quatro dimensões e de que curvaturas nesse hiper-espaço podem ser a origem da interação gravitacional foi, e ainda é, bastante estudada. Apesar de ainda não haver qualquer evidência experimental da existência de outras dimensões, muitos acreditam que estas surgirão a qualquer momento no CERN ou em outro acelerador de partículas. Diversos modelos que surgiram com o passar do anos lançam mão desse postulado, como o de Kaluza-Klein que lança mão de uma dimensão extra compacta (ZHANG, 2015) e Randall-Sundrum, que postula a existência de uma dimensão que pode ser até infinita (nesse caso, o espaço-tempo seria uma hiper-superfície 4-D), mas confina os campos, além do gravitacional, ao espaço-tempo 4-D. Dessa forma, a escala de energia gravitacional é mais baixa por que se espalha por todo espaço 5-D. (RANDALL; SUNDRUM, 1999b).

Uma outra possibilidade é o estudo de uma teoria escalar da gravidade, como a de Nordström, anterior à Relatividade Geral, em um modelo de 5-D (RAVNDAL, 2004). Tal análise pode ser feita também com a GSG. Em cinco dimensões, é possível utilizar uma métrica da forma

$$ds^2 = e^{A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{B(y)} dy^2, \quad (4.48)$$

onde y é a dimensão extra. Esta métrica em particular já foi utilizada em estudos recentes, incluindo um sobre dilatons (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001). É possível encontrar uma nova interpretação para a GSG ao descrever matematicamente uma superfície de quatro dimensões embebida neste espaço. Uma superfície embebida pode ser obtida quando retiramos um grau de liberdade referênte à uma das variáveis espaciais, seja mantendo-a fixa ou tornando-

Figura 1 – Hipersuperfície embebida



Representação gráfica de uma superfície embebida genérica. Neste modelo, a base do gráfico representa as quatro dimensões do espaço-tempo e a dimensão extra está representada pelo eixo vertical.

a uma função das outras variáveis. Tomando $y \equiv \phi(x^\mu)$, segue que

$$dy = \partial_\mu \phi dx^\mu$$

$$dy^2 = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi dx^\mu dx^\nu.$$

Aplicando essas transformações na equação (4.48)

$$ds^2 = e^{\bar{A}(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\bar{B}(\phi)} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = [e^{\bar{A}(\phi)} \eta_{\mu\nu} + e^{\bar{B}(\phi)} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a *métrica induzida* da superfície, válida para os cálculos feitos na superfície definida por $\phi(x^\mu)$. A semelhança entre a equação (4.12) e a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ é notável, basta definir

$$e^{\bar{A}(\phi)} = \frac{1}{\alpha} \quad e \quad e^{\bar{B}(\phi)} = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)\omega}, \quad (4.49)$$

que recuperamos a métrica $q_{\mu\nu}$. Dessa forma fica estabelecida uma conexão entre a GSG e o modelo de dimensões extras, ainda não considerada pelos autores da GSG ou por outros pesquisadores. A interpretação aqui sugerida é que a métrica $q_{\mu\nu}$ é na verdade a métrica induzida

de uma hipersuperfície de quatro dimensões embebida em um espaço de cinco dimensões.

Uma vez que a GSG pode ser obtida do princípio da ação (NOVELLO et al., 2013), podemos nos basear em trabalhos anteriores (KEHAGIAS; TAMVAKIS, 2001) e sugerir a seguinte ação para a gravitação.

$$S = \int \sqrt{-g} [R(\phi) + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] + L(\phi, \psi), \quad (4.50)$$

onde $L(\phi, \psi)$ representaria as lagrangeanas de outros sistemas, e o acoplamento seria dado pela derivada covariante. Conexões, tensor de Ricci e escalar de Ricci seriam calculados com base na métrica induzida de quatro dimensões. Esses cálculos são demasiadamente extensos, e por isso não serão feitos. O mais adequado é usar uma ferramenta computacional para se obter esses resultados.

Contudo, não será feita nesta dissertação um estudo detalhado desta proposta, nem uma investigação de sua viabilidade. O intuito foi de apenas apresentar uma alternativa além das que já estão sendo exploradas.

5 CONCLUSÃO

Apesar da Relatividade Geral descrever a gravitação com maestria, ainda existem limites que ela não cruza. O Big-Bang, a expansão acelerada do universo e os buracos negros são fenômenos ainda sem uma explicação completa, e uma união entre a Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos pode ser a chave para que estes fenômenos sejam completamente compreendidos. Na busca de uma teoria que resolva este problema, o que não tem se mostrado uma tarefa fácil, novas formulações para a gravitação são estudadas em todo o mundo. A hipótese de que existem dimensões extras é a base de alguns dos mais importantes modelos, porém a tais dimensões ainda não foram detectadas.

Nessa dissertação foram estudados alguns dos principais aspectos da Relatividade Geral e de campos escalares relativísticos com o objetivo de analisar uma teoria gravitacional alternativa, a GSG. Nesta, a gravidade é descrita por um campo escalar que afeta a métrica, curvando-a e causando os efeitos descritos pela Relatividade Geral. Foi demonstrado como os dois principais *ansatz* dos autores são necessários para que a teoria reproduza os resultados conhecidos nos casos em que o limite Newtoniano e a simetria esférica são levados em conta. Apesar de recente, a GSG demonstra ter muito potencial e vem sendo estudada com afinco por alguns dos pesquisadores citados neste trabalho.

Por fim, foi mostrada uma nova forma de interpretar esta teoria, estabelecendo uma conexão entre a GSG e o modelo de cinco dimensões para a gravitação, além de uma sugestão de como essa conexão pode ser explorada a partir do princípio da ação. Tal conexão pode ser apenas uma coincidência ou pode representar algo mais importante e ser uma pista na direção certa. Apenas se continuarmos estudando poderemos descobrir.

REFERÊNCIAS

- BITTENCOURT, E. et al. Cosmology in geometric scalar gravity. *Phys. Rev.*, D90, n. 12, p. 123540, 2014.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. [s.n.], 2004. ISBN 0805387323, 9780805387322. Disponível em: <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/books/www?cl=QC6:C37:2004>.
- JARDIM, I. C.; LANDIM, R. R. About the cosmological constant in geometric scalar theory of gravity. 2015.
- KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce. *Phys. Lett.*, B504, p. 38–46, 2001.
- KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, 1926. [,76(1926)].
- MOSCHELLA, U.; NOVELLO, M. Geometric scalar theory of gravity beyond spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D95, n. 8, p. 084017, 2017.
- NOVELLO, M. et al. Geometric scalar theory of gravity. *JCAP*, v. 1306, p. 014, 2013. [Erratum: JCAP1401,E01(2014)].
- NOVELLO, M.; GOULART, E. Beyond Analog Gravity: The Case of Exceptional Dynamics. *Class. Quant. Grav.*, v. 28, p. 145022, 2011.
- PADMANABHAN, T. *Gravitation: Foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2014. ISBN 9787301227879. Disponível em: <http://www.cambridge.org/9780521882231>.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- RAVNDAL, F. Scalar gravitation and extra dimensions. *Comment. Phys. Math. Soc. Sci. Fenn.*, v. 166, p. 151–163, 2004.
- RINDLER, W. *Relativity: Special, general, and cosmological*. [S.l.: s.n.], 2006.
- RYDER, L. H. *QUANTUM FIELD THEORY*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144, 9781139632393, 9780521237642.
- TONIATO, J. D.; NOVELLO, M. Gravitational waves in geometric scalar gravity. 2016.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 0471925675, 9780471925675. Disponível em: <http://www-spines.fnal.gov/spines/find/books/www?cl=QC6.W431>.

WESSON, P. S. The Scalar Field Of 5D Gravity And The Higgs Field Of 4D Particle Physics: A Possible Connection. 2010.

ZHANG, T. The 5D Fully-Covariant Theory of Gravitation and Its Astrophysical Applications. *Galaxies*, v. 3, n. 1, p. 18–51, 2015.