UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

STEVE UCHÔA PASSOS

APRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

FORTALEZA

2018

STEVE UCHÔA PASSOS

APRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P323a Passos, Steve Uchôa.

Apresentações e aplicações dos números complexos / Steve Uchôa Passos. – 2018.

63 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Números Complexos. I. Título.

CDD 510

STEVE UCHÔA PASSOS

APRESENTAÇÕES E APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 20/07/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, a todos os meus colegas professores e àqueles que contribuíram para que o trabalho fosse possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, autor e consumador da minha fé, que me resgatou e me deu nova vida. Agradeço também a minha esposa, companheira fiel que está sempre ao meu lado me dando força nos momentos difíceis e se alegrando comigo nas conquistas. Agradeço a minha mãe, pois certamente sem sua luta e amor por mim, eu não estaria aqui hoje.

Quero agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, por todo os ensinamentos e grande apoio durante todo o curso. Agradeço também a CAPES pelo incentivo financeiro, por acreditar no ensino público e pelo investimento na capacitação dos profissionais da educação.

RESUMO

A matemática sempre foi desafiadora. Desde os primórdios da ciência, vários pensadores e estudiosos ocupavam grande parte de seu tempo resolvendo problemas matemáticos. Quanto mais repostas obtinham, mais iam atrás de novas perguntas. Essa curiosidade trouxe grandes descobertas e, consequentemente, muitas mudanças que repercutiram em toda a história. Dentre os vários assuntos que tornam a matemática fascinante, nesse trabalho iremos nos ocupar em estudar os números complexos e algumas de suas aplicações. Veremos a definição, as operações e suas propriedades, as representações e o uso dos complexos para solucionar problemas. O conhecimento prévio do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e suas operações como corpo, a representação gráfica de $\mathbb{R}^2$, as operações entre matrizes, o comportamento das funções trigonométricas e as ferramentas do cálculo, formam o mínimo necessário para o entendimento completo dessa dissertação.

Palavras-chave: Números complexos. Fórmula de Cardano. Trigonometria. Equações algébricas. Fórmula de Moivre. Vestibular. Equações diferenciais.

ABSTRACT

Mathematics has always been challenging. From the beginnings of science, many thinkers and scholars have spent much of their time solving mathematical problems. The more answers they got, the more they went after new questions. This curiosity brought great discoveries and, consequently, many changes that reverberated throughout history. Among the various subjects that make mathematics fascinating, in this work we will be concerned with studying the complex numbers and some of their applications. We will see the definition, the operations and their properties, the representations and the use of the complexes to solve problems. The prior knowledge of the set of real numbers R and its operations as a body, the graphical representation of R^2, the operations between matrices, the behavior of the trigonometric functions and the calculation tools, form the minimum necessary for the complete understanding of this dissertation.

Keywords: Complex numbers. Formula of Cardano. Trigonometry. Algebraic equations. Moivre's formula. Entrance exam. Differential equations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

Arctg	Arco tangente
Cos	Cosseno
Sen	Seno
Tg	Tangente

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
Z	Conjunto dos números inteiros
θ	Teta (letra do alfabeto grego)
ρ	Rô (letra do alfabeto grego)
ω	Ômega (letra do alfabeto grego)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Resolver equações sempre fez parte da vida de qualquer matemático, ou até mesmo, dos que gostam de matemática. Seja qual for o nível: fundamental, médio ou superior, as equações estarão sempre presentes. É altamente empolgante e gratificante dedicar tempo na resolução de uma equação e, ao final, verificar que o resultado está correto.

Acontece que solucionar uma equação nem sempre é tarefa fácil. Equações do 1° grau são simples. Não podemos falar o mesmo das equações do 2° grau tendo o conjunto dos números reais como conjunto universo. Tomando, por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$, vemos que ela não tem solução. Não há nenhum número real em que o seu quadrado seja igual a -1. O que fazer então?

Durante o século XVI, mais especificamente na Itália, havia uma disputa entre dois matemáticos: Girolamo Cardano e Nicoló Fontana. O primeiro nasceu em 1501 e faleceu em 1576. Cardano teve uma vida marcada pelos extremos. Era um tremendo cientista, ao mesmo tempo que era invejoso, traidor e violento. Deu uma imensa contribuição para o estudo das probabilidades através do seu livro *Liber de Ludo Aleae*.

O segundo, Nicoló Fontana, ficou mais conhecido como Tartaglia. Isto se deve ao fato de que, quando criança, Nicoló foi gravemente ferido por golpes de sabre. Esse acidente trouxe uma profunda cicatriz na boca que causou um defeito permanente em sua fala. O nome Tartaglia significa gago. Nicoló publicou diversa obras e despontava como um dos principais matemáticos da época.

Um matemático chamado Scipione del Ferro, por volta do ano 1510, encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Após a morte de Scipione, Tartaglia se ocupou em resolver tais equações. Ele não tinha visto o método de Scipione mas, como já era de se esperar, Tartaglia conseguiu resolver o problema e achou uma fórmula geral.

Nessa época, Cardano continuava escrevendo sobre álgebra, aritmética e geometria. Ao saber que Tartaglia conseguira uma fórmula geral para solucionar equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, Cardano implorou ao "amigo" que lhe mostrasse a fórmula para que pudesse publicar em seu próximo livro. Tartaglia negou exaustivamente as petições de Cardano alegando que ele mesmo iria publicar. De tanto insistir, Cardano consegue convencer Tartaglia a mostrá-lo a fórmula jurando não publicá-la. Cardano não cumpriu com sua promessa e publicou a fórmula para desespero de Tartaglia. Ficou conhecida como "Fórmula de Cardano".

Cardano verificou que uma equação do 3° grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ pode ser escrita na forma $z^3 + pz + q = 0$ em que z se relaciona com x através da fórmula $z = x + m$ para algum m conveniente. Desta maneira, a fórmula de Cardano resolve qualquer equação do 3° grau. Segue a fórmula de Cardano:

$Seja\ a\ equação\ x^3 + px + q = 0.\ As\ raízes\ dessa\ equação\ são\ dadas\ por$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Aplicando a fórmula de Cardano para $x^3 - 15x - 4 = 0$ vamos encontrar como solução o número $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Ao analisarmos essa solução, vemos que o conjunto dos números reais é insuficiente quando tratamos das mais diversas equações algébricas. Mas então, o que fazer?

Posteriormente teremos o surgimento de um novo conjunto, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Ao longo dessa dissertação vamos entender e descobrir um pouco mais sobre esses números e, em seguida, resolver algumas questões interessantes.

2 NÚMEROS COMPLEXOS

Para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ $(x \epsilon \mathbb{R})$, ou seja, para encontrar as raízes reais de uma equação do 2° grau, basta usar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo o estudo das raízes temos que:

I) Se $b^2 - 4ac > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas
II) Se $b^2 - 4ac = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais
III) Se $b^2 - 4ac < 0$, a equação não possui raiz real

A conclusão (III) acontece pelo fato de que não há, no conjunto dos números reais, nenhum número x que satisfaça equações do tipo: $x^2 = -a$ com $a \epsilon \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Ao resolvermos, por exemplo, equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ teremos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}\,,$$

portanto, as raízes serão $x' = 2 + \sqrt{-1}$ e $x'' = 2 - \sqrt{-1}$. No conjunto dos números reais essa equação não possui solução. Agora, ao atribuirmos um símbolo para o valor de $\sqrt{-1}$ como se fosse um número, obtemos duas raízes. Seja $\boldsymbol{i}$ o símbolo adotado (chamado de *unidade imaginária)* tal que $\boldsymbol{i} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ com a seguinte propriedade: $\boldsymbol{i}^2 = \mathbf{-1}$ **.** Dessa forma, as soluções da equação serão $x' = 2 + i$ e $x'' = 2 - i$. Esses números são chamados *números complexos.* Eles são da forma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ em que a é chamado de *parte real* e b de *parte imaginária.* Essa é a forma algébrica dos números complexos.

2.1 Operações entre complexos

Usaremos as seguintes definições:

i) $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = b\, e\, c = d$ Se dois complexos são iguais, então suas partes reais são iguais, assim como suas partes imaginárias também são iguais.

ii) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

iii) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Multiplicando da maneira usual e usando o fato de que $i^2 = -1$

A subtração entre complexos fica bem definida quando usamos a operação da adição e o conceito de oposto. Seja $z = a + bi$, o seu oposto será $-z = (-a) + (-b)i$. Como exemplo, $se\ z_1 = a + bi\ e\ z_2 = c + di$,

então:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

2.2 Conjugado de um complexo

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é definido como sendo $\bar{z} = a - bi$, ou seja, obtemos o conjugado de um complexo z mudando o sinal da sua parte imaginária.

$$Se\ z = 3 + 4i\ então\ \bar{z} = 3 - 4i.$$

2.3 Divisão entre complexos

Concluindo as operações básicas entre complexos, o quociente da divisão entre dois números complexos é definido da seguinte maneira: $seja\ z_1 = a + bi\ e\ z_2 = c + di, o\ quociente \frac{z_1}{z_2}$ é $obtido\ multiplicando$

$\frac{z_1}{z_2}$ $pelo\ fator$ $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$.

Vejamos um exemplo: sejam $z_1 = 5 + 2i\ e\ z_2 = 4 - 3i$. Teremos então,

I) $z_1 + z_2 = (5 + 2i) + (4 - 3i) \Rightarrow z_1 + z_2 = (5 + 4) + [2 + (-3)]i = 9 - i$

II) $z_1 - z_2 = (5 + 2i) - (4 - 3i) \Rightarrow z_1 - z_2 = (5 - 4) + [2 - (-3)]i = 1 + 5i$

III) $z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i) \cdot (4 - 3i) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = [5 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)] + [5 \cdot (-3) + 2 \cdot 4]i \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 26 - 7i$

IV) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(20-6)+(15+8)i}{(16+9)+(12-12)i} = \frac{14+23i}{25} = \frac{14}{25} + \frac{23}{25}\ i$

2.4 Potências de i

As potências de i possuem um comportamento periódico:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^5 \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$

.

.

Os possíveis valores para as potências de i são: $1, i, -1\ e\ -i$. Para calcularmos uma potência de base i, basta dividirmos o expoente por 4 e pegarmos o resto da divisão. Observe:

$I)\ Calcular\ o\ valor\ de\ i^{74}$:

$i^{74} = i^{4 \cdot 18} \cdot i^2 = (i^4)^{18} \cdot (-1) = 1^{18} \cdot (-1) = -1$

$II)\ Calcular\ o\ valor\ de\ i^{891}$

$i^{891} = (i^4)^{222} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM COMPLEXO

Assim como os números reais possuem representação geométrica na reta, os números complexos também são representados geometricamente. Usaremos o plano complexo para representar os números complexos. Esse plano é semelhante ao plano cartesiano, onde o eixo x (eixo das abscissas) é chamado eixo real e o eixo y (eixo das ordenadas) é chamado eixo imaginário. Isso se faz necessário pois, como vimos anteriormente, todo número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária.

Vejamos a seguir a representação do número complexo $z = a + bi \, (a \; e \; b \; positivos)$

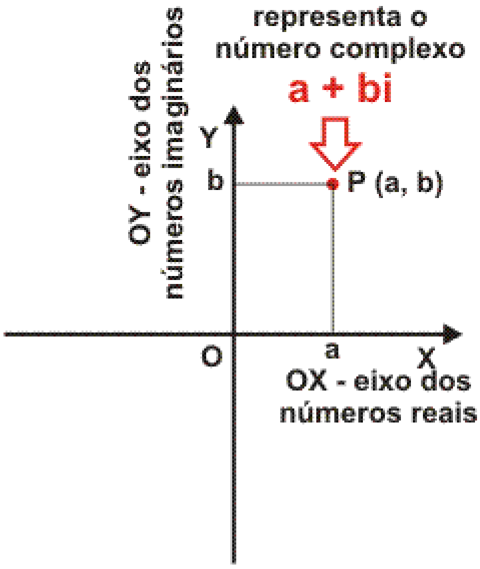


FIGURA 1

O ponto P da figura é chamado de **afixo**. No exemplo dado, $a \; e \; b$ são positivos. O ponto P pertence ao 1º quadrante do plano complexo. Se $a < 0$ e $b > 0$, P estará no 2º quadrante. Caso $a < 0 \; e \; b < 0$, P estará no 3º quadrante. Finalmente, se $a > 0 \; e \; b < 0$, então P estará no 4º quadrante. Abaixo temos a representação do afixo de $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ no plano complexo.

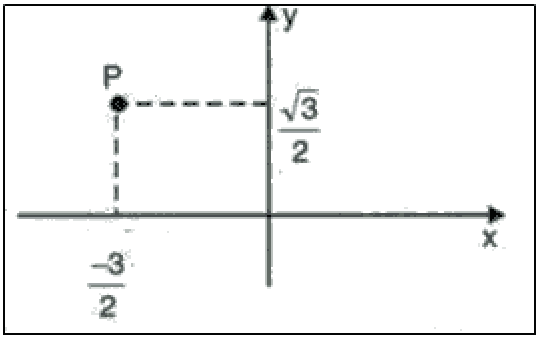


FIGURA 2

3.1 Módulo de um complexo

O módulo de um número complexo z é definido da mesma maneira que o módulo de um número real, ou seja, calculando a distância da origem até o afixo de z. Vamos denotar o módulo por ρ**.** O cálculo para obtermos o valor de ρ é simples. Acompanhe a figura:

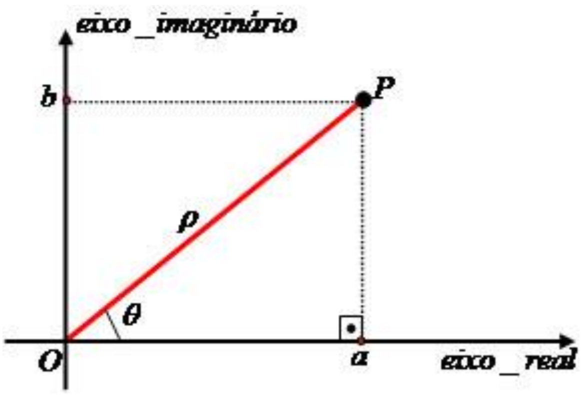


FIGURA 3

Pelo teorema de Pitágoras vemos facilmente que $|z|$ = ρ = $\sqrt{a^2 + b^2}$. O ângulo θ da figura acima é chamado de **argumento**. Ele é o ângulo formado pela semirreta $\overrightarrow{OP}$ e o eixo real, partindo do eixo real e percorrendo no sentido anti-horário.

3.2 Forma trigonométrica de um complexo

Usando as razões trigonométricas podemos relacionar o argumento de z com suas partes: real e imaginária. Pela figura 3 temos:

$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \;\; e \;\; cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Daí,

$$a = \rho \cdot cos\theta \text{ e } b = \rho \cdot sen\theta \;.$$

Substituindo as expressões encontradas acima, podemos reescrever z da seguinte maneira:

$$z = a + bi = \rho \cdot cos\theta + \rho \cdot sen\theta \cdot i \Rightarrow \boldsymbol{z = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)}$$

Quando z está escrito dessa maneira, ou seja, em função do modulo ρ e do argumento θ, dizemos que ele está na forma trigonométrica. Escrevermos z na forma trigonométrica facilita bastante alguns cálculos entre números complexos. Vejamos agora como transformar z, inicialmente na forma algébrica, para forma trigonométrica . Seja $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Vamos calcular inicialmente o módulo e o argumento de z:

$$|z| = \rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$Como\ sen\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \;\; e \;\; cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ então\ \theta = 30° \,.$$

Portanto, $z = 4 \cdot (cos30° + isen30°)$. De uma maneira geral, $\theta = 30° + 2k\pi$ $com\ k \in Z$.

3.3 Multiplicação de complexos na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = \rho_1 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1)\ e\ z_2 = \rho_2 \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2)$ dois complexos escritos na forma trigonométrica. Ao efetuarmos o produto desses dois números encontraremos:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2) \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\ cos\theta_1 cos\theta_2 +\ isen\theta_2 cos\theta_1 +\ isen\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_1)\ \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\ cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_1 +\ i(sen\theta_2 cos\theta_1 +\ sen\theta_1 cos\theta_2)]\ \Rightarrow$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) +\ isen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

3.4 Potenciação de complexos na forma trigonométrica

Na multiplicação de complexos na forma trigonométrica basta multiplicarmos os módulos e somarmos os argumentos. Agora, ao elevarmos o complexo $z = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$ à enésima potência, é natural pensarmos que

$z^n = \rho^n \cdot [(\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$. Podemos verificar por indução. Se n = 1 não há o que fazer. Supondo verdadeiro que $z^n = \rho^n \cdot [(\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$,

precisamos mostrar que vale $z^{n+1} = \rho^{n+1} \cdot \{\cos[(n+1)\theta] + isen[(n+1)\theta]\}$.

Teremos então:

$z^{n+1} = z^n \cdot z = \rho^n \cdot [(\cos(n\theta) + isen(n\theta)] \cdot \rho \cdot (cos\theta + isen\theta) \quad \Rightarrow$

$z^{n+1} = \rho^{n+1} \cdot \{\cos[(n+1)\theta] + isen[(n+1)\theta]\}$■

Portanto, calcular a enésima potência de um complexo fica bem mais simples ao tomarmos sua forma trigonométrica. Se $z = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$, basta aplicarmos:

$$\boldsymbol{z^n = \rho^n \cdot [(\cos(n\theta) + isen(n\theta)]}$$

Esse resultado é conhecido como $\boldsymbol{f\text{ó}rmula\ de\ De\ Moivre}$. Vejamos um exemplo: seja $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Vamos determinar o valor de z^{10}. Sabemos que $|z|\ =\ 4\ e\ \theta = 30°, logo$:

$z^{10} =\ 4^{10} \cdot [\cos(10 \cdot 30°) + isen(10 \cdot 30°)] = 2048 \cdot (cos300° + isen300°) \Rightarrow$

$z^{10} = 2048 \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right] = 1024 \cdot \left(1 - \sqrt{3}i\right) = 1024 - 1024\sqrt{3}i\ \Rightarrow$

$$\therefore z^{10} = 1024 - 1024\sqrt{3}i.$$

3.5 Divisão de complexos na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = \rho_1 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1)\ e\ z_2 = \rho_2 \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2)$, vamos determinar uma fórmula para o quociente $\frac{z_1}{z_2}$. Usando o fato de que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ teremos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2 \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2)} \cdot \frac{\rho_2 \cdot (cos\theta_2 - isen\theta_2)}{\rho_2 \cdot (cos\theta_2 - isen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - icos\theta_1 \cdot sen\theta_2 + isen\theta_1 \cdot cos\theta_2 - i^2 sen\theta_1 \cdot sen\theta_2)}{\rho_2 \cdot (cos\theta_2 \cdot cos\theta_2 - i^2 sen\theta_2 \cdot sen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + sen\theta_1 \cdot sen\theta_2 + i(sen\theta_1 \cdot cos\theta_2 - cos\theta_1 \cdot sen\theta_2))}{\rho_2 \cdot (cos\theta_2 \cdot cos\theta_2 - i^2 sen\theta_2 \cdot sen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))}{\rho_2 \cdot (cos\theta_2^2 + sen\theta_2^2)}$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))}$$

Considerando $z_1 = 6 \cdot \left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right) e\ z_2 = 3 \cdot (cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$ teremos:

$$\boldsymbol{I}) \ z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 3 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 18 \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4})$$

$$\boldsymbol{II}) \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \cdot \left(cos\frac{-\pi}{4} + isen\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot \left(cos\frac{\pi}{4} - isen\frac{\pi}{4}\right)$$

3.6 Radiciação de complexos na forma trigonométrica

Um número z é dito raiz n-ésima de um certo complexo x quando temos $z^n = x$. Suponhamos que $z = r \cdot (cos\beta + isen\beta)$ e $x = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$. Usando a fórmula de Moivre e o fato de que dois complexos são iguais quando têm suas partes real e imaginária iguais, segue que:

$z^n = x \Rightarrow r^n \cdot [(\cos(n\beta) + isen(n\beta)] = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$, logo:

$r^n \cdot \cos(n\beta) = \rho cos\theta\ e\ r^n \cdot \mathrm{sen}(n\beta) = \rho sen\theta.$

Do exposto acima podemos concluir que $r^n = \rho\ \ e\ \ n\beta = \theta + 2k\pi$ com k sendo um número inteiro. Usando esses resultados encontramos as raízes n-ésimas de x através da fórmula:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\rho} \cdot (cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n})}$$

Com a fórmula obtemos n raízes distintas fazendo o k variar de 0 até

$n - 1$. Isso se deve ao fato das funções seno e cosseno terem período igual a 2π. Concluímos então que um número complexo $x \neq 0$ possui n raízes

$n - ésimas$.

Vejamos um exemplo: seja $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Vamos determinar as raízes cúbicas de z, ou seja, $\sqrt[3]{2\sqrt{3} + 2i}$. Primeiramente escrevemos z na sua forma polar:

$z = 4 \cdot (cos30° + isen30°)\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \cdot \left(\cos\frac{30° + 2k\pi}{3} + isen\frac{30° + 2k\pi}{3}\right)$

Fazendo $k\ =\ 0$ e $\pi rad = 180°$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \cdot \left(\cos\frac{30° + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + isen\frac{30° + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4} \cdot (cos10° + isen10°)$$

Fazendo $k\ =\ 1$ e $\pi rad = 180°$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \cdot \left(\cos\frac{30° + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + isen\frac{30° + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4} \cdot (cos130° + isen130°)$$

Fazendo $k\ =\ 2$ e $\pi rad = 180°$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4} \cdot \left(\cos\frac{30° + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + isen\frac{30° + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4} \cdot (cos250° + isen250°)$$

Portanto, as raízes cúbicas de $z = 2\sqrt{3} + 2i$ são $\sqrt[3]{4} \cdot (cos10° + isen10°)$, $\sqrt[3]{4} \cdot (cos130° + isen130°)$ e $\sqrt[3]{4} \cdot (cos250° + isen250°)$.

4 OUTRAS APRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nos capítulos anteriores apresentamos os números complexos da maneira tradicional, ou seja, como uma extensão do conjunto dos números reais. No capítulo 4 vamos apresentar os números complexos de uma maneira um pouco diferente. Inicialmente trataremos os complexos como matrizes e, em seguida, como pontos no $\mathbb{R}^2$.

4.1 Complexos como subconjunto de matrizes 2X2

Uma matriz real de ordem 2 é do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em que a, b, c e d são números reais. Sabemos que a unidade em matrizes é dada pela matriz identidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sendo X uma matriz real de ordem 2, que entradas teria que ter a matriz X para termos $X \cdot X = -I$?

Essa pergunta nos liga diretamente ao que foi exposto no capítulo 2: qual a solução da equação $x^2 = -1$ $(x \in \mathbb{R})$? Precisamos descobrir as entradas da matriz X e verificar se todas as operações e implicações vistas anteriormente para os complexos estão bem definidas.

Seja $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vamos resolver a equação matricial $X \cdot X = -I$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + bc = -1, ac + cd = 0, ab + bd = 0 \; e \; bc + d^2 = -1.$$

Resolvendo o sistema de equações acharemos que $a = 0, b = -1, c = 1 \; e \; d = 0$.

Portanto a matriz X é definida como $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Usaremos a matriz $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para indicar a unidade imaginária.

Associando a um número qualquer $b \in \mathbb{R}$ a matriz $bI = b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ teremos que a soma entre dois números reais $b + c = c + b$ fica associada a matriz $\begin{pmatrix} b + c & 0 \\ 0 & b + c \end{pmatrix}$. De maneira semelhante, teremos que a multiplicação entre dois números reais $bc = cb$ fica associada a matriz $\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}$. Veja:

$$bc = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} \; e \; cb = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}.$$

Portanto, as matrizes com formato $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} com \; b \in \mathbb{R}$, se comportam da mesma maneira que os números reais quando se trata de soma e produto.

Podemos então considerar os números complexos como todas as matrizes que são da forma $bI + ci = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}$. As operações são definidas a partir da soma e do produto de matrizes:

$$(bI + ci) + (dI + ei) = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + d & -(c + e) \\ c + e & b + d \end{pmatrix} = (b + d)I + (c + e)i,$$

pelo exposto acima vemos que a soma é comutativa. O elemento neutro será $0I + 0i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, o elemento neutro da multiplicação será $1I + 0i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e o simétrico dado por $-(bI + ci) = \begin{pmatrix} -b & c \\ -c & -b \end{pmatrix}$.

Finalmente, o produto será dado por:

$$(bI + ci) \cdot (dI + ei) = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd - ce & -(be + cd) \\ be + cd & bd - ce \end{pmatrix} =$$
$$(bd - ce)I + (be + cd)i.$$

Fazendo agora $(dI + ei) \cdot (bI + ci)$ teremos:

$$\begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd - ce & -(be + cd) \\ be + cd & bd - ce \end{pmatrix} = (bd - ce)I + (be + cd)i.$$

Concluímos então que o produto também é comutativo.

Uma matriz possui inversa se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Sendo $bI + ci = \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix}$, a condição para que $bI + ci$ tenha inversa é:

$det \begin{pmatrix} b & -c \\ c & b \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow b^2 - (-c^2) = b^2 + c^2 \neq 0 \Rightarrow b^2 \neq -c^2$, ou seja, o

determinante só será nulo se $b = c = 0$. Um complexo $bI + ci$ terá um inverso se $b \neq 0 \; ou \; c \neq 0$. Equivale a dizer que se $bI + ci \neq 0I + 0i$ então $bI + ci$ tem inversa. Para achar o inverso multiplicativo basta aplicarmos:

$$(aI + bi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(aI + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} I + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

Da Álgebra Linear sabemos que a soma e o produto de matrizes quadradas são operações que gozam da associatividade e da distributividade do produto em relação à soma. Por isso, podemos dizer que essas propriedades são válidas para a soma e o produto dos números complexos.

Portanto, à matriz $bI + ci$ associamos o número complexo $b + ci$. Desta forma, podemos apresentar os números complexos como um subconjunto de matrizes $2\text{x}2$ com entradas reais.

4.2 Complexos como o produto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$

Sabemos que o plano $\mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ é composto por pontos e que cada ponto é representado por um par ordenado. Par porque temos duas coordenadas, x e y, ordenado porque temos uma ordem a ser respeitada, primeiro x e depois y. A coordenada x chamamos de *abscissa* e a coordenada y chamamos de *ordenada.* Abaixo temos a representação do ponto $(2,3)$ no $\mathbb{R}^2$:

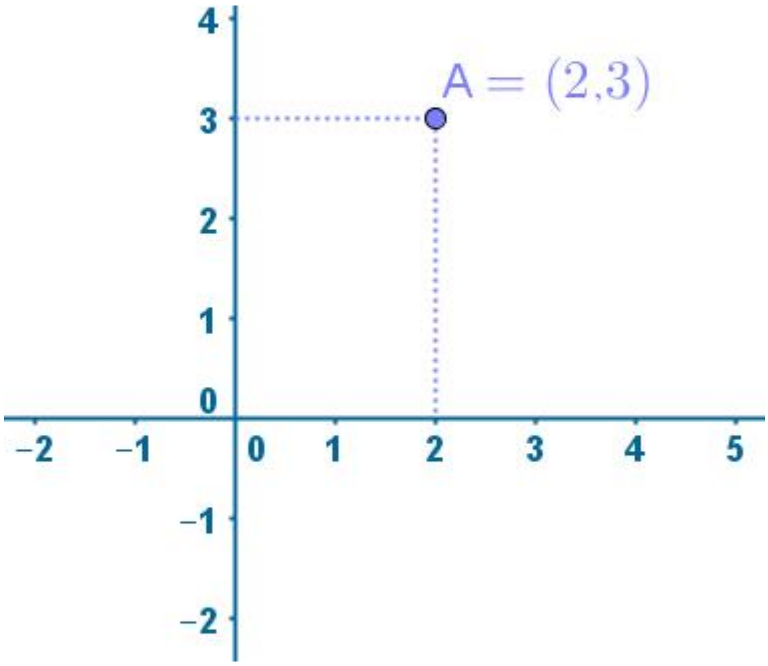


FIGURA 4

No tópico anterior apresentamos os números complexos como um subconjunto de matrizes reais $2x2$. Nosso objetivo agora é apresentar os números complexos como sendo o produto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ munido das operações de soma e multiplicação.

Por definição teremos que um número complexo z é um par ordenado (x, y) com as seguintes regras para a soma e o produto:

$Sejam\ z_1 = (x_1, y_1)\ e\ z_2 = (x_2, y_2).\ Teremos,$

$soma$: $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\ e$

$produto$: $\quad z_1 z_2 = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Vamos verificar agora as propriedades: comutatividade, associatividade, elemento neutro da adição e elemento neutro da multiplicação, elemento simétrico, inverso multiplicativo e a distributividade do produto em relação à soma.

$\boldsymbol{Comutatividade}$:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1$

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + y_2 x_1) = z_2 z_1.$

$\boldsymbol{Associatividade}$:

$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \Rightarrow$

$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3).$

$(z_1 z_2) z_3 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)(x_3, y_3) \Rightarrow$

$(z_1 z_2) z_3 = \big((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + y_1 x_2) y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) x_3\big) \Rightarrow$

$(x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3 + y_2 x_3), y_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) + x_1(x_2 y_3 + y_2 x_3)) = z_1(z_2 z_3).$

$\boldsymbol{Elemento\ Neutro\ Aditivo}$:

$Ao\ observamos\ o\ resultado\ da\ soma\ (0,0) + (x, y) = (x, y)\ concluímos\ que$

$o\ par\ ordenado\ (0,0)\text{é}\ o\ elemento\ neutro\ aditivo.$

$\boldsymbol{Elemento\ Neutro\ Multiplicativo}$:

$Ao\ observamos\ o\ resultado\ do\ produto\ (1,0)(x, y) = (x - 0, y + 0) = (x, y)$

$concluímos\ que\ o\ par\ ordenado\ (1,0)\ \text{é}\ o\ elemento\ neutro\ multiplicativo.$

$\boldsymbol{Elemento\ Simétrico}$:

$O\ simétrico\ de\ um\ complexo\ z = (x, y)\ será\ dado\ por - z = (-x, -y). De\ fato,$

$(x, y) + (-x, -y) = (0,0).$

$\boldsymbol{Inverso\ Multiplicativo}$:

$Seja\ z = (x, y) \neq (0,0)\ . Queremos\ um\ complexo\ w = (a, b)\ tal\ que\ zw = (1,0).$

$(x, y)(a, b) = (1,0) \Rightarrow (xa - yb, xb + ya) = (1,0) \Rightarrow xa - yb = 1\ e\ xb + ya = 0.$

$Resolvendo\ o\ sistema\ teremos\ que\ z^{-1} = w = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$

$\boldsymbol{Distributividade}$:

$$z_1(z_2 + z_3) = (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \Rightarrow$$

$$z_1(z_2 + z_3) = \big(x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)\big) \Rightarrow$$

$$(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Do exposto acima concluímos que os números complexos, conforme a definição dada neste tópico, formam um corpo. A unidade imaginária i é dada pelo par ordenado $(0,1)$. De fato, $(0,1)(0,1) = (0 - 1,0 + 0) = (-1,0)$. Podemos associar cada par ordenado (x, y) a sua forma algébrica $x + yi$ definida no capítulo 2. Portanto, os números complexos também podem ser apresentados como o plano $\mathbb{R}^2$ munido de soma e multiplicação.

5 APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A aplicação dos números complexos não se resume apenas à matemática. Uma área essencial e relevante que podemos usar os complexos é a física. Neste capítulo veremos como usar os complexos para resolver problemas ligados à eletrodinâmica. Serão apresentados alguns conceitos que fazem parte dos circuitos elétricos e em seguida a aplicação dos complexos na resolução de questões.

5.1 Conceitos da eletrodinâmica

A eletrodinâmica é o estudo das correntes elétricas, suas causas e os efeitos que produzem no caminho por onde passam os portadores de carga elétrica livres. As correntes elétricas têm papel fundamental no mundo moderno, estando presentes nos sistemas de iluminação residenciais e urbanos, nos eletrodomésticos em geral, na indústria, nos computadores etc. O que aconteceria se as fontes de energia elétrica parassem de funcionar e, consequentemente, não pudéssemos mais gerar correntes elétricas? Certamente seria um caos generalizado.

Corrente elétrica é o movimento ordenado, isto é, o movimento com direção e sentido preferenciais, de portadores de carga elétrica. Ela é gerada por uma diferença de potencial elétrico (d.d.p) estabelecida entre dois pontos. Essas cargas elétricas, que se movimentam gerando a corrente elétrica, são chamadas de elétrons. Eles possuem carga negativa de valor $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}C$. A unidade de carga elétrica é denotada por C em homenagem ao francês Charles Coulomb. Os elétrons sempre buscam pontos de maior potencial. Usaremos a letra i para representar a intensidade da corrente elétrica e a letra U para a d.d.p (tensão). A unidade de corrente elétrica é dada por A em alusão ao físico francês André-Marie Ampère, e a unidade de tensão é dada por V de Volts.

Uma corrente elétrica é dita contínua quando seu sentido não é alterado. Caso o sentindo da corrente seja alterado constantemente, então ela é dita corrente alternada. Para fornecer energia para as milhares e residências de uma metrópole, é necessário uma corrente alternada. Acompanhe o gráfico:

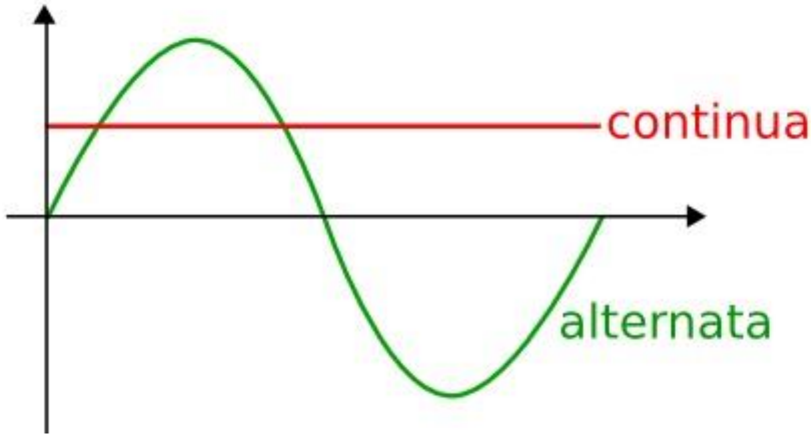


FIGURA 5

Gerador é um dispositivo capaz de manter uma d.d.p entre dois pontos. Ele tem grande importância nos circuitos elétricos conforme veremos a seguir. Como exemplo comum para um gerador temos a pilha, objeto bastante utilizado no dia a dia.

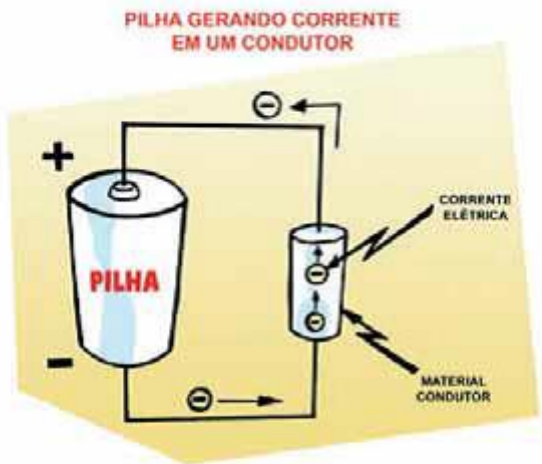


FIGURA 6

Os resistores são componentes elétricos responsáveis em transformar a energia elétrica gerada pelo gerador em energia térmica. Essa transformação é chamada de efeito Joule, em referência ao brilhante físico britânico James Prescott Joule. Cada resistor possui uma resistência R que é medida em Ω(ohms). Podemos citar como exemplos de aparelhos que fazem uso de resistores os chuveiros elétricos e os ferros de passar roupa. A figura 7 exemplifica um resistor.

FIGURA 7

Circuito elétrico é a ligação de vários componentes elétricos: resistores, indutores, capacitores, diodos, fontes de tensão etc. A corrente elétrica percorre o circuito elétrico alimentando o sistema para alcançar o objetivo para o qual ele foi construído. A seguir temos um exemplo de circuito elétrico.

FIGURA 8

O físico alemão Georg Simon Ohm deu uma contribuição gigantesca quando tratamos de eletricidade. Existem duas leis na eletrodinâmica que são atribuídas a ele. A primeira lei diz que $U = Ri$, ou seja, a tensão estabelecida entre dois pontos é igual ao produto da resistência pela corrente elétrica. Ohm conseguiu constatar essa relação através do valor constante que ele conseguia para a razão $\frac{U}{i}$. Alterando a tensão ele encontrava um novo valor para a corrente mas a razão desses valores permanecia a mesma. Ele chamou essa razão de resistência como vimos anteriormente.

Podemos gerar correntes alternadas por meio de dispositivos chamados alternadores. Essas correntes possuem um gráfico representativo em formato de onda senoidal. É possível constatar esse fato porque ela varia no tempo proporcionalmente ao seno de um ângulo que é descrito por um segmento que gira em torno da origem com velocidade uniforme. Uma onda senoidal pode ser representada pelas equações:

$v(t) = V_p \cdot sen(\omega t + \theta)$ ou $I(t) = I_p \cdot sen(\omega t + \theta), onde:$

V_p é $o\ valor\ máximo\ de\ tensão$

I_p é $o\ valor\ máximo\ de\ corrente$

ω é $a\ frequência\ angular\ ou\ velocidade\ de\ rotação$

θ é o ângulo $de\ fase$

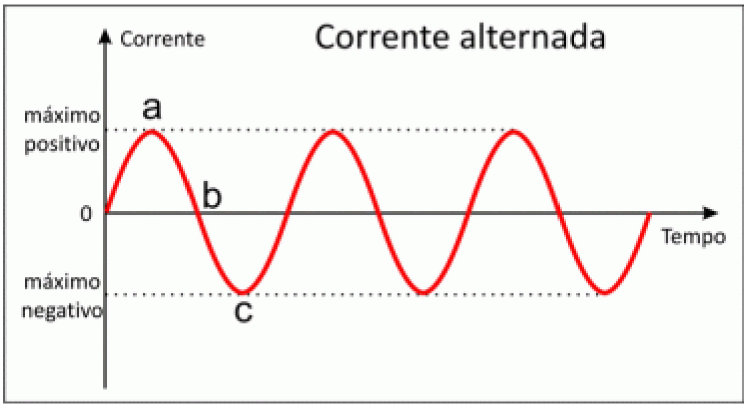


FIGURA 9

Os fasores são vetores que giram numa determinada velocidade em um ciclo trigonométrico originando as ondas senoidais. Podemos representar uma função senoidal usando um fasor. Um fasor possui uma frequência ω, um módulo igual a tensão de pico V_p e ângulo inicial de fase θ.

Os capacitores são componentes eletrônicos constituídos de duas peças condutoras chamadas de armaduras. Entre as armaduras existe um dielétrico, isto é, um isolante que pode ser, por exemplo, papel, óleo ou o próprio ar. A função dos capacitores é armazenar energia elétrica. Existe uma tensão entre as armaduras que vamos chamar de força eletromotriz (f.e.m). Cada capacitor tem a uma capacidade para armazenar energia. A essa capacidade damos o nome de capacitância que é medida em F (farad). A capacitância é calculada pela fórmula $C = \frac{Q}{U}$ em que C é a capacitância, Q é a carga armazenada e U é a tensão.

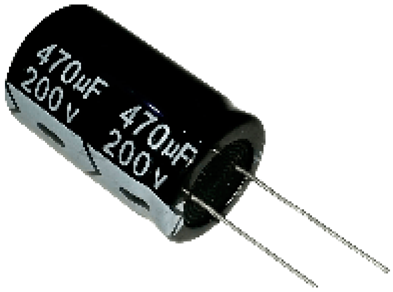


FIGURA 10

Um indutor é um dispositivo elétrico passivo capaz de armazenar energia criada num campo magnético formado por uma corrente alternada. Eles são geralmente usados para impedir variações de corrente elétrica ou para formar um transformador. A indutância é a grandeza física relacionada aos indutores e é representada pela letra L e medida em Henry(H). Podemos calcular a indutância de um indutor por: $V = L \cdot \frac{di}{dt}$ onde V é a tensão e L a indutância.

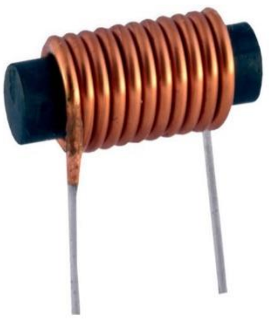


FIGURA 11

Chamamos de reatância e denotamos por X a capacidade que um capacitor ou um indutor tem de resistir a uma corrente alternada que passe por ele. Como se trata de resistência, a unidade de reatância será o $\Omega(ohm)$. O cálculo da reatância X é dado pela fórmula: $X_C = -\frac{1}{2\pi f C} = -\frac{1}{\omega C}$(reatância capacitiva) onde f é a frequência da f.e.m, ω é a velocidade angular e C é a capacitância do capacitor, e pela fórmula: $X_L = 2\pi f L = \omega L$(reatância indutiva) onde L é a indutância.

A impedância elétrica (Z) mede a capacidade de um circuito de resistir o fluxo de uma determinada corrente elétrica quando se aplica uma tensão entre seus terminais. Seu valor é dado em função da resistência elétrica e da reatância do circuito elétrico pela fórmula $Z = \frac{V}{I}$ onde V é a tensão de pico e I é a corrente de pico. A impedância equivalente de um circuito Z_{EQ} corresponde a um número complexo e é escrito da seguinte maneira : (aqui a unidade imaginária será denotada por j e usaremos a forma polar do complexo $Z\ que$ é $|Z|\angle\theta$)

$$Z_{EQ} = R + jX\ \ ou\ Z_{EQ} = \left|Z_{EQ}\right|\angle\theta, ou\ seja,\ Z_{EQ} = \sqrt{R^2 + X^2}\angle arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$em\ que\ R(resist\hat{e}ncia)\ \text{é}\ a\ parte\ real\ e\ X(imped\hat{a}ncia)\ \text{é}\ a\ parte\ imagin\acute{a}ria.$$

Vamos usar essa fórmula da impedância (escrita como um número complexo) para resolver as questões a seguir.

5.2 Questões sobre circuitos elétricos

$\mathbf{1)}$ ***Determine a reatância capacitiva de um circuito que tem um capacitor de capacitância $C = 5mF$ e que recebe um sinal alternado de frequência $f = 100Hz$.***

$$Solução: Sabemos\ que\ a\ reatância\ capacitiva\ \text{é}\ dada\ por\ X_C = -\frac{1}{2\pi fC}\ .$$

$$Substituindo\ os\ valores\ teremos\ que\ X_C = -\frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 \cdot 0{,}005} \approx -0{,}32\Omega$$

$\mathbf{2)}$ ***Qual a reatância indutiva de um circuito com um indutor $L = 5mH$ Sabendo que ele recebe um sinal alternado de frequência $f = 1kHz$?***

$$Solução: Sabemos\ que\ a\ reatância\ indutiva\ \text{é}\ dada\ por\ X_L = 2\pi fL.$$

$$Substituindo\ os\ vlores\ teremos\ que\ X_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1000 \cdot 0{,}005 \approx 31{,}4\Omega.$$

$\mathbf{3)}$***Determine a forma polar da impedância*** $\boldsymbol{Z = (100 - 50j)\Omega}$.

Solução: Precisamos escrever Z *na forma* $|Z|\angle\theta$. *Calculando* $|Z|$:

$$|Z| = \sqrt{100^2 + (-50)^2} = \sqrt{12500} \approx 111{,}80\Omega$$

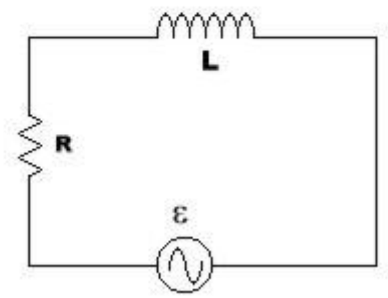
Agora, o cálculo de θ:

$$\theta = arctg\left(\frac{-50}{100}\right) = arctg(-0{,}5) \approx -26{,}57°$$

$$Portanto, a\ forma\ polar\ de\ Z\ \text{é}:\ Z = 111{,}80\angle -26{,}57°\ \Omega$$

$\mathbf{4)}$***Para o circuito abaixo considere os seguintes dados:*** $\boldsymbol{L = 20mH}$,

$\boldsymbol{R = 1000\ \Omega}$ **e** $\boldsymbol{\omega = \frac{10000rad}{s}}$. ***Calcule a impedância desse circuito e escreva na forma polar.***



Solução: Usando a fórmula $X_L = \omega L$ *teremos que* $X_L = 10000 \cdot 0{,}02 = 200\Omega$.

Como $R = 1000\Omega$ então $\mathrm{Z} = 1000 + 200\mathrm{j}$. *Precisamos achar o módulo de Z e o seu argumento.*

$|Z| = \sqrt{1000^2 + 200^2} = \sqrt{1040000} \approx 1019{,}80\Omega$

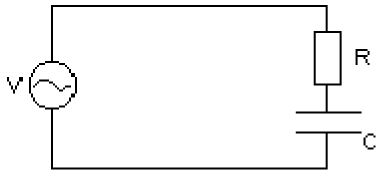
$Agora, \theta = arctg\left(\frac{200}{1000}\right) = arctg(0,2) \approx 11,31°$

$$Logo, Z = 1019,80\angle 11,31°\ \Omega$$

5) $\boldsymbol{Para\ o\ circuito\ abaixo\ considere\ os\ seguintes\ dados: C = 1\mu F,}$

$\boldsymbol{R = 1\mathbf{k\Omega}}$ **e** $\boldsymbol{\omega = \frac{1000rad}{s}. Calcule\ a\ imped\hat{a}ncia\ desse\ circuito}$

$\boldsymbol{na\ forma\ polar.}$



$Solução: Usando\ a\ fórmula\ X_C = -\frac{1}{\omega C}\ teremos\ que\ X_C = -\frac{1}{1000 \cdot 0,000001}\Omega \Rightarrow$

$X_C = -1000\Omega. A\ impedância\ será\ então\ igual\ a\ Z = 1000 - 1000j.$

$O\ cálculo\ do\ módulo\ será\ |Z| = \sqrt{1000^2 + (-1000)^2} = \sqrt{2000000} \approx 1414,21\Omega$

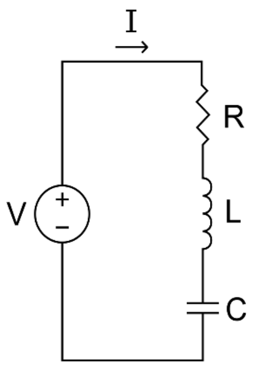
$Agora, \theta = arctg\left(\frac{-1000}{1000}\right) = arctg(-1) \approx -45,0°$

$$Logo, Z = 1414,21\angle -45°\ \Omega$$

6) $\boldsymbol{Para\ o\ circuito\ abaixo\ considere\ os\ seguintes\ dados: C = 1\mu F,}$

$\boldsymbol{R = 1\mathbf{k\Omega}, L = 10mH}$ **e** $\boldsymbol{\omega = \frac{1000rad}{s}. Calcule\ a\ imped\hat{a}ncia\ desse\ circuito}$

$\boldsymbol{na\ forma\ polar.}$



$Solução$: $Inicialmente, vamos\ calcular\ a\ reatância\ capacitiva\ e\ a\ reatância\ indutiva.$

$X_L = \omega L \Rightarrow X_L = 1000 \cdot 0{,}01 = 10\Omega,$

$X_C = -\frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C = -\frac{1}{1000 \cdot 0{,}000001} = -1000\Omega.$

$A\ impedância\ será\ então\ Z = 1000 + (10 - 1000)j = (1000 - 990j)\Omega.$

$Segue\ que\ |Z| = \sqrt{1000^2 + (-990)^2} = \sqrt{1980100} \approx 1407{,}16\Omega$

$Agora, \theta = arctg\left(\frac{-990}{1000}\right) = arctg(-0{,}99) \approx -44{,}71°$

$$Logo, Z = 1407{,}16\angle - 44{,}71°\ \Omega$$

5.3 Equações diferenciais lineares de segunda ordem

Quando estudamos cálculo, normalmente no início da nossa caminhada no ensino superior, aprendemos a calcular limites, derivadas e integrais. Isto permite chegarmos a vários resultados, que outrora difíceis de serem conseguidos, de maneira bem mais simples. Na verdade, a matemática tem essa façanha: simplificar a nossa vida.

Como dito anteriormente, as equações têm um papel fundamental nas ciências exatas. Aprendemos desde o ensino fundamental várias técnicas de resolução para os mais variados tipos de equações: primeiro grau, segundo grau, terceiro grau, exponencial, modular, logarítmica, equações com duas variáveis, equações irracionais etc.

Neste tópico vamos estudar um pouco sobre as equações diferenciais. São equações em que o termo desconhecido não é simplesmente um número, mas sim, uma ou várias funções. Estas equações possuem derivadas da função que se está procurando. Daí o motivo de serem chamadas “diferenciais”. Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais:

$$(1)y' = x^3, \qquad (2)y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1), \qquad (3)yy' = 2x \ \ e \ \ (4)2y" + y' - y = 0\,.$$

As equações (1), (2) e (3) são ditas de primeira ordem pois envolvem apenas a primeira derivada da função y. A equação (4) é chamada de equação de segunda ordem pois envolve a segunda derivada de y.

Analisando a equação (1), queremos uma função em que sua derivada seja igual a x^3. Para acharmos essa função basta calcularmos a integral de x^3dx. Veja:

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\therefore y = \frac{x^4}{4} + C, onde\ C\ \text{é}\ uma\ constante\ qualquer.$$

A equação (3) podemos reescrever da seguinte maneira:

$$y\frac{dy}{dx} = 2x$$

Resolvendo a equação teremos:

$$y\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow ydy = 2xdx \Rightarrow \int ydy = \int 2xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + C_1 = x^2 + C_2 \Rightarrow$$

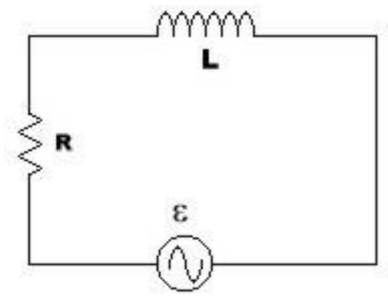
$$y^2 = 2x^2 + 2(C_2 - C_1) \Rightarrow y = \pm\sqrt{2(x^2 + K)}, onde\ K\ \text{é}\ arbitrário.$$

A equação (3) é um tipo de equação chamada de equação separável. A equação separável é aquela em que podemos escrever $\frac{dy}{dx}$ como o produto de uma função de x vezes uma função de y. Vejamos agora um exemplo do uso de equação diferencial para solucionar um problema envolvendo circuito elétrico.

$A\ equação\ L\frac{dI}{dt} + RI = V(t)$ é $a\ modelagem\ da\ corrente\ I(t)\ para\ o\ circuito$

$elétrico\ da\ figura\ abaixo. Sabendo\ que\ a\ resistência$ é $12\Omega, a\ indutância$ é $4H\ e\ a\ tensão$

$igual\ a\ 60V, determine\ uma\ expressão\ para\ a\ corrente\ elétrica\ I(t)$.



$Como\ L = 4, R = 12\ e\ V(t) = 60\ teremos$:

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 15 - 3I \Rightarrow \int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C \Rightarrow$$

$$|15 - 3\mathrm{I}| = e^{-3(t+C)} \Rightarrow 15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ke^{-3t} \Rightarrow I = 5 - \frac{1}{3}Ke^{-3t}.$$

$Fazendo\ I(0) = 0\ teremos\ que\ 5 - \frac{1}{3}A = 0 \Rightarrow A = 15.$

$Logo, a\ expressão\ será$: $\quad I(t) = 5 - 5e^{-3t}$.

Uma equação diferencial de primeira ordem é dita *linear* quando pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas em um certo intervalo. Por exemplo, a equação $xy' + y = 2x$ é linear pois pode ser escrita como $y' + \frac{1}{x}y = 2$.

Toda equação diferencial linear de primeira ordem pode ser solucionada usando uma função adequada $I(x)$, chamada fator integrante.

Multiplicando ambos os lados da equação $y' + P(x)y = Q(x)$ pelo fator integrante $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ e, em seguida, integrando os dois membros, teremos a solução da equação. Vejamos um exemplo:

$Na\ equação\ \frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2\ \ temos\ que\ P(x) = 3x^2 e\ Q(x) = 6x^2. Vamos$

$calcular\ o\ fator\ integrante: I(x) =\ e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}. Multiplicando\ os\ membros$

$da\ equação\ teremos: e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3} \Rightarrow$

$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}dx = 2e^{x^3} + C \Rightarrow y = 2 + Ce^{-x^3}, com\ C\ arbitrário.$

Uma equação diferencial de segunda ordem é dita linear quando tem o seguinte formato:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

Onde $P, Q, R\ e\ G$ são funções contínuas. Quando $G(x)\ =\ 0$ a equação é dita homogênea. Se duas funções $y_1\ e\ y_2$ são soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem então qualquer combinação linear

$y = c_1y_1 +\ c_2y_2$ com c_1 e c_2 quaisquer, também será solução. Agora, se $y_1\ e\ y_2$ forem soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem e $P(x)$ sempre for não nula, então a solução geral dessa equação será dada por:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), com\ c_1\ e\ \ c_2\ arbitrários.$$

Certamente não é tarefa simples resolver uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Agora, no caso das funções $P, Q\ e\ R$ serem constantes teremos a seguinte configuração:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Sabemos que a função exponencial $y = e^{rx}$ com r constante tem a propriedade de que sua derivada é um múltiplo por constante dela mesma.

Vamos substituir a primeira e a segunda derivada da função $y = e^{rx}$ na equação $ay'' + by' + cy = 0$. Teremos então:

$y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$

$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$

$Logo, y = e^{rx}$ é $solução\ se\ r\ for\ raiz\ da\ equação\ ar^2 + br + c = 0$.

A equação $ar^2 + br + c = 0$ é chamada de equação característica da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Vamos analisar agora o que acontece com as soluções da equação diferencial nos casos em que a equação característica possui discriminante positivo, nulo ou negativo:

$I - Discriminante\ positivo$:

$Se\ r_1 e\ r_2\ são\ as\ raízes\ da\ equação\ característica, então\ a\ solução\ geral\ da$

$equação\ diferencial\ será\ dada\ por$ $\boldsymbol{y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}}$, $pois\ c_1e^{r_1x}\ e\ c_2e^{r_2x}\ são\ LI.$

$II - Discriminante\ nulo$:

$Se\ r$ é a única $raiz\ da\ equação\ característica, então\ a\ solução\ geral\ da$

$equação\ diferencial\ será\ dada\ por$ $\boldsymbol{y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}}$, $pois\ c_1e^{rx}\ e\ c_2xe^{rx}\ são\ LI.$

$III - Discriminante\ negativo$:

$Aqui\ faremos\ uso\ da$ $\boldsymbol{exponencial\ complexa.}$ $O\ grande\ matemático\ suíço\ Leonhard\ Euler,$

$conseguiu\ chegar\ ao\ seguinte\ resultado\ usando\ a\ série\ de\ Taylor$:

$Seja\ b\ um\ número\ real. A\ potência\ e^{bi}, em\ que\ i$ é $a\ unidade\ imaginária, pode\ ser\ escrita$

$como$ $\boldsymbol{e^{bi} = cosb + isenb}$.

$Sendo\ a\ um\ número\ real, usando\ uma\ propriedade\ básica\ da\ potenciação\ teremos\ que$

$o\ número\ e^{a+bi}\ pode\ ser\ escrito\ como\ e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (cosb + isenb). Portanto, para$

$qualquer\ complexo\ a + bi, segue\ que$:

$$\boldsymbol{e^{a+bi} = e^a \cdot (cosb + isenb)}.$$

$Esse\ resultado$ é $conhecido\ como$ $\boldsymbol{fórmula\ de\ Euler}$.

$No\ caso\ do\ discrimanante\ negativo\ teremos\ r_1 = c + di\ e\ r_2 = c - di.$

$A\ solução\ geral\ da\ equação\ diferencial\ será\ dada\ por$:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \Rightarrow y = C_1e^{(c+di)x} + C_2e^{(c-di)x} = C_1e^{cx}e^{dxi} + C_2e^{cx}e^{-dxi} \Rightarrow$$

$$e^{cx}\left(C_1e^{dxi} + C_2e^{-dxi}\right) = e^{cx}[C_1(cosdx + isendx) + C_2(cosdx - isendx)] \Rightarrow$$

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = e^{cx}[(C_1 + C_2)cosdx + i(C_1 - C_2)sendx].$$

$Observe\ que\ y_1 = c_1e^{cx}cosdx\ e\ y_2 = c_2e^{cx}sendx\ são\ LI.$

$Fazendo\ C_1 + C_2 = c_1\ e\ i(C_1 - C_2) = c_2\ teremos\ a\ solução\ geral$:

$$\boldsymbol{y = e^{cx}[c_1 \cos(dx) + c_2 sen(dx)]}.$$

Como podemos solucionar a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$ usando o que foi apresentado? Veja:

$A\ equação\ característica\ é\ r^2 - 6r + 13 = 0. Calculando\ as\ raízes\ teremos$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

$Logo, a\ solução\ geral\ da\ equação\ será\ dad\ por\ y = e^{3x}[c_1 \cos(2x) + c_2 sen(2x)].$

Veremos agora algumas aplicações das equações diferenciais lineares de segunda ordem na engenharia. O problema a seguir trata da vibração gerada em molas. Um problema clássico na mecânica.

A Lei de Robert Hooke, cientista inglês do século XVII, diz que se uma mola estiver esticada (ou comprimida) x unidades a partir do comprimento natural, então ela exerce uma força, chamada força elástica, proporcional a x calculada através da fórmula:

$$F = -kx, onde\ k\ é\ positivo\ e\ chamado\ de\ constante\ elástica.$$

Aplicando a segunda Lei de Newton na fórmula da força elástica teremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Encontramos então uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com equação característica dada por $mr^2 + k = 0$. As raízes serão iguais a $r = \pm\omega i, onde\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $é\ a\ frequência\ angular$. Portanto, a solução geral é dada por: $x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)$. A solução também pode ser escrita como $x(t) = Acos(\omega t + \theta), onde\ A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ $é\ a\ amplitude\ e\ \theta$

$é\ o\ ângulo\ de\ fase\ \ tal\ que\ cos\theta = \frac{c_1}{A}\ e\ sen\theta = -\frac{c_2}{A}$.

Essas características são de um movimento chamado movimento harmônico simples.

Vamos analisar agora o movimento de uma mola presa a uma massa e que está sujeita a uma força de atrito(movimento horizontal sobre uma superfície) ou força de amortecimento(movimento vertical dentro de um fluido). Supomos que a força de amortecimento seja proporcional à velocidade da massa e atue na direção oposto ao movimento. Podemos escrever então:

$$F = -c\frac{dx}{dt}, onde\ c\ é\ positivo\ e\ chamado\ de\ constante\ de\ amortecimento.$$

Neste caso, a força resultante será o somatória da força restauradora com a força de amortecimento. A segunda lei de Newton nos faz chegar ao seguinte resultado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Essa equação diferencial tem como equação característica $mr^2 + cr + k = 0$.

Vamos agora discutir o problema nos três casos para o discriminante.

$I - Discriminante\ positivo$:

$Se\ r_1 e\ r_2\ são\ as\ raízes\ da\ equação\ característica, então\ a\ solução\ geral\ da$ $equação\ diferencial\ será\ dada\ por\ \ x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$.

$Quando\ c^2 - 4mk > 0\ ocorre\ o\ \boldsymbol{superamortecimento}. Fisicamente\ isso\ nos$ $mostra\ que\ há\ uma\ forte\ força\ de\ amortecimento\ gerada\ por\ um\ óleo\ de\ alta\ viscosidade$ $ou\ graxa$.

$II - Discriminante\ nulo$:

$Se\ r = -\dfrac{c}{2m}$ é $a\ única\ raiz\ da\ equação\ característica, então\ a\ solução\ geral\ da$

$equação\ diferencial\ será\ dada\ por \quad x = (c_1 + c_2)e^{-(c/2m)t}.$

$Quando\ c^2 = 4mk\ ocorre\ o$ $\boldsymbol{amortecimento\ crítico.}$ $Nesse\ caso,$

$o\ amortecimento$ é $apenas\ o\ suficiente\ para\ retirar\ as\ vibrações.$

$III - Discriminante\ negativo$:

$Se\ r_1 = -\dfrac{c}{2m} + \omega i\ e\ r_2 = -\dfrac{c}{2m} + \omega i\ são\ as\ raízes\ complexas$

$da\ equação\ característica, então\ a\ solução\ geral\ da\ equação\ diferencial\ será\ dada\ por$

$$x = e^{-(c/2m)t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)], onde\ \omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}.$$

$Quando\ c^2 - 4mk < 0\ ocorre\ o$ $\boldsymbol{subamortecimento}$ $.Aqui\ temos\ oscilações$

$amortecidas\ pelo\ fator\ e^{-(c/2m)t}. O\ movimento\ decai\ a\ 0$ à $medida\ que\ o\ tempo\ cresce.$

Vejamos algumas aplicações do que foi exposto:

$\boldsymbol{Situação\ 1)\ Uma\ mola\ está\ presa\ a\ uma\ massa\ de\ 2kg\ e\ tem\ um\ comprimento\ de\ 0,5m.}$
$\boldsymbol{Uma\ força\ de\ 25,6N}$ é $\boldsymbol{necessária\ para\ mantê - la\ esticada\ num\ comprimento}$
$\boldsymbol{de\ 0,7m. Se\ a\ mola\ distender - se\ até\ 0,7m\ e\ depois\ for\ solta\ com}$
$\boldsymbol{velocidade\ inicial\ nula, determine\ a\ expressão\ que\ fornece\ a\ posição\ da\ mola.}$

$Solução$: $Pelo\ enunciado\ e\ usando\ a\ Lei\ de\ Hooke, a\ força\ necessária\ para\ estender\ a\ mola$ é:

$k(0{,}2) = 25{,}6.\ Consequentemente\ teremos\ que\ k = \dfrac{25{,}6}{0{,}2} = 128. Usando\ o\ valor$

$de\ k\ e\ sabendo\ que\ m = 2, teremos$: $2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0\ que\ nos\ dá\ como\ equação$

$característica\ 2r^2 + 128 = 0. A\ solução\ da\ equação\ será\ então$:

$x(t) = c_1\cos(8t) + c_2 sen(8t).$ *Como a condiçao inicial* é $x(0) = 0{,}2$ *teremos que*

$x(0) = c_1 cos0 + c_2 sen0 = c_1 \Rightarrow c_1 = 0{,}2.$ *Para acharmos o valor de* c_2 *vamos*

derivar a solução: $x'(t) = -8c_1 sen(8t) + 8c_2\cos(8t)$. *Como* $x'(0) = 0$

então $c_2 = 0$. *Logo, a espressão que fornece a posição da mola* é:

$$x(t) = 0{,}2\cos(8t)$$

Situação 2) Suponha que a mola da situação 1 esteja imersa em um fluido com constante de amortecimento $c = 40$. Sabendo que ela iniciou o movimento da posição de equilíbrio com uma velocidade de $0{,}6\ ^{m}/_{s}$, determine a expressão da mola em função do tempo t.

Solução: *Sabemos que a massa* é *igual a* 2 *e a constante elástica vale* 128. *Substituindo*

os valores na equação $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$ *teremos*:

$2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 40\dfrac{dx}{dt} + 128x = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + 20\dfrac{dx}{dt} + 64x = 0.$ *A equação característica*

$r^2 + 20r + 64 = 0 \Rightarrow (r+4)(r+16) = 0 \Rightarrow r_1 = -4$ *e* $r_2 = -16.$

A solução então será $x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$. *Como* $x(0) = 0$ *então* $c_1 + c_2 = 0.$

Derivando $x(t)$ *teremos* $x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t} \Rightarrow x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0{,}6.$

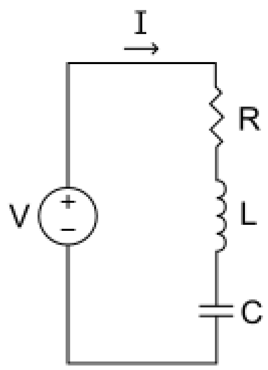
$Como\ c_2 = -c_1\ então\ c_1 = 0{,}05. Logo, a\ solução\ será$:

$$x = 0{,}05(e^{-4t} - e^{-16t})$$

$\boldsymbol{Situação\ 3)\ A\ lei\ de\ voltagem\ de\ Gustav\ Robert\ Kirchhoff, mais\ conhecida\ como}$ $\boldsymbol{lei\ de\ Kirchhoff, diz\ que\ o\ somatório\ algébrico\ de\ todas\ as\ quedas\ de\ voltagem}$ $\boldsymbol{em\ um\ circuito\ elétrico\ é\ igual\ a\ voltagem\ total\ fornecida\ para\ o\ circuito.}$
$\boldsymbol{Pode-se\ traduzir\ a\ \ lei\ de\ Kirchhoff\ através\ da\ equação}$:

$$\boldsymbol{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)}\ ,$$

$\boldsymbol{onde\ L\ é\ a\ indutância, Q\ a\ carga\ armazenada\ no\ capacitor, R\ a\ resistência, C\ a}$ $\boldsymbol{capacitância\ e\ V\ a\ tensão\ (força\ eletromotriz). Essa\ equação\ diferencial}$
$\boldsymbol{é\ de\ segunda\ ordem\ \ e\ faz\ referência\ ao\ circuito\ da\ figura\ abaixo}$:



$\boldsymbol{Considere\ um\ circuito\ em\ que\ R = 40\Omega, L = 1H, C = 1600\mu F\ e\ V(t) = 100cos10t.}$
$\boldsymbol{Calcule\ a\ carga\ armazenada\ no\ capacitor\ e\ a\ corrente\ no\ instante\ t\ sabendo}$ $\boldsymbol{que\ a\ carga\ inicial\ \ e\ a\ corrente\ inicial\ \ são\ iguais\ a\ 0.}$
$Solução: Substituindo\ os\ valores\ na\ equação\ dada$:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{0{,}0016}Q = 100cos10t \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100cos10t$$

Essa equação não é homogênea, mas é razoável pensarmos que exista uma solução particular Q_p *que seja do tipo* $Q_p(t) = Acost + Bsent$ *associando a* $V(t)$.

Teremos então:

$Q'_p(t) = -10Asen10t + 10Bcos10t$ *e* $Q''_p(t) = -100Acos10t - 100Bsen10t$.

Substituindo na equação:

$(-100Acos10t - 100Bsen10t) + 40(-10Asen10t + 10Bcos10t) + 625(Acost + Bsent) = 100cos10t \Rightarrow$

$(525A + 400B)cos10t + (-400A + 525B)sen10t = 100cos10t$

Igualando os coeficientes:

$525A + 400B = 100$ *e* $-400A + 525B = 0$

$21A + 16B = 4$ *e* $-16A + 21B = 0$

Resolvendo o sistema acharemos os valores:

$A = \frac{84}{697}$ *e* $B = \frac{64}{697}$.

$$\therefore Q_p(t) = \frac{1}{697}(84cos10t + 64sen10t)$$

A equação característica no lado esquerdo é $r^2 + 40r + 625 = 0$. *Resolvendo*:

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 2500}}{2} = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = \frac{-40 \pm 30i}{2} = -20 \pm 15i.$$

Portanto, a solução da euação caracerística: $Q_c(t) = e^{-20t}[c_1\cos(15t) + c_2 sen(15t)]$.

A carga total $Q(t)$ *será a soma das duas cargas obidas*:

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_c(t) = \frac{1}{697}(84cos10t + 64sen10t) + e^{-20t}[c_1 \cos(15t) + c_2sen(15t)]$$

Pelo enunciado temos que $Q(0) = 0$. *Portanto,*

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{84}{697} .$$

Para aharmos c_2 *precisamos primeiro derivar* $Q(t)$ *pois, da eletricidade,*

temos que $I = \frac{dQ}{dt}$ *, segue então:*

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{697}(84cos10t + 64sen10t) + e^{-20t}[c_1 \cos(15t) + c_2sen(15t)] \Rightarrow$$

$$I = \frac{40}{697}(-21sen10t + 16cos10t) + e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)cos15t + (-15c_1 - 20c_2)sen15t].$$

Pelo enunciado temos que $I(0) = 0$. *Aplicando teremos,*

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{464}{2091}.$$

Portanto, A carga $Q(t)$ *e a corrente* $I(t)$ *são dadas pelas fórmulas:*

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63cos15t - 116sen15t) + 120(-21sen10t + 16cos10t)\right]$$

$$I(t) = \frac{1}{2091}[e^{-20t}(-1920cos15t + 13060sen15t) + 120(-21sen10t + 16cos10t)].$$

6 PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS E VESTIBULARES

Neste capítulo serão resolvidos alguns problemas de olimpíadas e outros de vestibulares. Serão aplicados os conceitos e resultados apresentados até aqui com o objetivo de justificar a aprendizagem.

Problema 1 (Olimpíada do Peru/2003)

Considere $|z+w| = |z-w|\ \forall\, z, w\ \in \mathbb{C}$. Achar a parte real do complexo $(z \cdot \overline{w})$.

Solução

$$Sendo\ z = a + bi\ e\ w = x + yi\ teremos$$

$$|z+w| = |z-w| \Rightarrow |(a+x)+(b+y)i| = |(a-x)+(b-y)i|$$

$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2} = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} \Rightarrow (a+x)^2+(b+y)^2 = (a-x)^2+(b-y)^2$$

$$a^2+2ax+x^2+b^2+2by+y^2 = a^2-2ax+x^2+b^2-2by+y^2 \Rightarrow 4ax = -4by$$

$$\therefore ax + by = 0.$$

$$Agora, \qquad z\cdot\overline{w} = (a+bi)\cdot(x-yi) = ax - ayi + bxi - byi^2 = (ax+by)+(bx-ay)i$$

$$Logo, a\ parte\ real\ do\ complexo\ \ (z\cdot\overline{w})\ \text{é}\ \ ax+by = 0.$$

Problema 2 (Academia da Força Aérea/2007)

Seja z um número complexo não nulo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$), $z \neq i$. O conjunto de todos os valores de z, para os quais $\frac{z+i}{1+i\cdot z}$ é um número real, representa um(a) :

a) Elipse
b) Hipérbole
c) Circunferência
d) Círculo

<u>Solução</u>

$$Seja\ z = a + bi\ e\ w = \frac{z+i}{1+i\cdot z}.$$

$$Para\ que\ um\ número\ seja\ real, a\ sua\ parte\ imaginária\ precisa$$

$$ser\ igual\ \ a\ zero.$$

$$w = \frac{z+i}{1+i\cdot z} = \frac{a+bi+i}{1+i\cdot(a+bi)} = \frac{a+(b+1)i}{(1-b)+ai}$$

$$Precisamos\ mulplicar\ o\ resultado\ obtido\ pelo\ fator\ \frac{(1-b)-ai}{(1-b)-ai}.$$

$$Teremos\ então:$$

$$\frac{a+(b+1)i}{(1-b)+ai}\cdot\frac{(1-b)-ai}{(1-b)-ai} = \frac{a-ab-a^2i+bi-b^2i-abi^2+i-bi-ai^2}{1-2b+b^2-a^2i^2} =$$

$$= \frac{a-ab+ab+a+(1-a^2-b^2)i}{1-2b+b^2+a^2} = \frac{2a+(1-a^2-b^2)i}{1-2b+b^2+a^2}$$

$$\therefore Im(w) = \frac{(1-a^2-b^2)}{1-2b+b^2+a^2}$$

$$Fazendo\ Im(w) = 0\text{:}\ \ \frac{(1-a^2-b^2)}{1-2b+b^2+a^2} = 0 \Rightarrow 1-a^2-b^2 = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 1.$$

$$A\ equação\ a^2+b^2 = 1\ representa\ uma\ circunferência\ centrada$$

$$na\ origem\ e\ raio\ igual\ a\ 1.$$

$$O\ item\ c\ é\ o\ correto.$$

Problema 3 (Instituto Tecnológico da Aeronáutica/2003)
Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $|\sum_{n=1}^{60} z^n|$.

<u>Solução</u>

$$Seja\ k = \left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right|.$$

$$Escrevendo\ z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\ na\ forma\ trigonométrica\ teremos:$$

$$|z| = \rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$sen\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .Logo, \theta = 45°.$$

$$Portanto, z = cos45° + isen45°.$$

$$Precisamos\ achar\ o\ valor\ de\ k = \left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{60}|.$$

$$Usando\ o\ fato\ de\ que\ \boldsymbol{z^n} = \boldsymbol{\rho^n} \cdot [(\mathbf{cos}(\boldsymbol{n\theta}) + \boldsymbol{isen}(\boldsymbol{n\theta})]\ segue\ que$$

$$k = \left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |cos45° + isen45° + cos90° + isen90° + \cdots + \cos(60 \cdot 45°)$$
$$+ isen(60 \cdot 45°)| =$$

$$|cos45° + cos90° + cos135° + \cdots + \cos(60 \cdot 45°)$$
$$+ [sen45° + sen90° + sen135° + \cdots + sen(60 \cdot 45°)]i| =$$

$$\left|\sum_{n=1}^{60} \cos(n \cdot 45°) + \sum_{n=1}^{60} sen(n \cdot 45°)\right| =$$

$$\left|\sum_{n=1}^{56} \cos(n \cdot 45°) + \sum_{n=57}^{60} \cos(n \cdot 45°) + [\sum_{n=1}^{56} sen(n \cdot 45°) + \sum_{n=57}^{60} sen(n \cdot 45°)]i\right|.$$

$$Como\ \sum_{n=1}^{56} \cos(n \cdot 45°) = \sum_{n=1}^{56} sen(n \cdot 45°) = 0,$$

$$temos\ que\ k = \left|\sum_{n=57}^{60} \cos(n \cdot 45°) + \sum_{n=57}^{60} sen(n \cdot 45°)i\right| =$$

$$\left|\sum_{n=1}^{4}\cos(n\cdot 45°)+\sum_{n=1}^{4}sen(n\cdot 45°)i\right|=$$

$|cos45° + cos90° + cos135° + cos180° + (sen45° + sen90° + sen135° + sen180°)i| =$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-1)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)i\right|=\left|-1+\left(1+\sqrt{2}\right)i\right|=$$

$$\sqrt{(-1)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Problema 4 (Instituto Militar de Engenharia/1997)

Determine os parâmetros α, β, γ e θ da transformação complexa, $w = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \theta}$ que leva os pontos z = 0, -i, -1 para w = i, 1, 0, respectivamente, bem como, o valor de z para w = -2 –i, onde i é a unidade imaginária.

Solução

$$Tomando\ z = 0\ e\ w = i, teremos:\ i = \frac{\alpha \cdot 0 + \beta}{\gamma \cdot 0 + \theta} \Rightarrow \beta = \theta i$$

$$Tomando\ z = -1\ e\ w = 0, segue: 0 = \frac{\alpha \cdot (-1) + \beta}{\gamma \cdot (-1) + \theta} \Rightarrow 0 = -\alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \theta i = \beta$$

$$Tomando\ z = -i\ e\ w = 1, teremos: 1 = \frac{\alpha \cdot (-i) + \beta}{\gamma \cdot (-i) + \theta} \Rightarrow -\gamma i + \theta = -\alpha i + \beta \Rightarrow$$

$$-\gamma i = -\theta i \cdot i + \theta i - \theta \Rightarrow -\gamma i = \theta + \theta i - \theta \Rightarrow -\gamma i = \theta i \Rightarrow \gamma = -\theta.$$

$$Portanto, os\ parâmetros\ são:\ \alpha = \theta i, \beta = \theta i\ e\ \gamma = -\theta.$$

$$Substituindo\ na\ transformação\ w = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \theta} = \frac{\theta i \cdot z + \theta i}{-\theta \cdot z + \theta} = \frac{(z + 1) \cdot i}{1 - z}.$$

$$Agora, sendo\ w = -2 - i\ teremos:$$

$$-2 - i = \frac{(z + 1) \cdot i}{1 - z} \Rightarrow -2 + 2z - i + zi = zi + i \Rightarrow 2z = 2i + 2 \Rightarrow z = 1 + i$$

$$\therefore z = 1 + i$$

Problema 5 (Instituto Militar de Engenharia/2006)

Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s) \cdot i$ $(n > 1)$ termos de uma sequência. Determine, em função de n, os valores de r e s que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e i é a unidade imaginária.

Solução

Seja k a razão da progressão aritmética a_n. *Teremos* $k = a_{n+1} - a_n$. *Daí,*

$k = r - s + (r + s) \cdot i - (r + si) = r - s + ri + si - r - si = ri - s \Rightarrow k = ri - s.$

O termo geral de uma P.A é dado por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$.

Substituindo as expressões dadas na questão teremos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k \Rightarrow r + si = 1 - i + (n - 1) \cdot (ri - s) \Rightarrow$

$r + si = 1 - i + nri - ns - ri + s \Rightarrow r + si = 1 + s(1 - n) + (nr - r - 1)i$

Igualado as partes reais e as parte imaginárias:

$(I)\ r = 1 + s(1 - n)$ *e* $(II)\ s = nr - r - 1$.

Substituindo o valor de s na equação I:

$r = 1 + (nr - r - 1)(1 - n) = 1 + nr - n^2 r - r + nr - 1 + n \Rightarrow$

$r = r(2n - n^2 - 1) + n \Rightarrow r(n^2 - 2n + 2) = n \Rightarrow r = \dfrac{n}{n^2 - 2n + 2}.$

Substituindo o valor de r na equação II:

$s = r(n - 1) - 1 \Rightarrow s = \dfrac{n}{n^2 - 2n + 2} \cdot (n - 1) - 1 = \dfrac{n^2 - n}{n^2 - 2n + 2} - 1 \Rightarrow$

$$s = \frac{n^2 - n}{n^2 - 2n + 2} - \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2 - 2n + 2} = \frac{n - 2}{n^2 - 2n + 2}.$$

$$\therefore s = \frac{n - 2}{n^2 - 2n + 2} .$$

Problema 6 (Olimpíada da Austrália/2002)

Seja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(a + b \cdot i) = f(b) + i \cdot f(a)$ onde i é a unidade imaginária dos complexos. Determine o valor da expressão $\sum_{k=1}^{2002} f(k + i)$.

<u>Solução</u>

$Queremos\ o\ valor\ de\ f(1 + i) + f(2 + i) + f(3 + i) + \cdots + f(2002 + i).$

$Como\ o\ contradomínio\ de\ f$ é $o\ conjunto\ dos\ números\ reais, então\ temos\ que$

$f(b) + i \cdot f(a)$ é $um\ número\ real. Logo, a\ parte\ imaginária$ é $zero.$

$Portanto, \qquad f(a) = 0\ \forall a \in \mathbb{R}\ . Segue\ então\ que$

$f(a + b \cdot i) = f(b) + i \cdot f(a) = 0 + i \cdot 0 = 0.$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2002} f(k + i) = f(1 + i) + f(2 + i) + \cdots + f(2002 + i) = 2002 \cdot 0 = 0.$$

Problema 7 (Olimpíada da Índia)

Se $z_1 e\ z_2 \in \mathbb{C}$ são números complexos tais que $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}\ \ e\ |z_1| = |z_2| = 1$, qual o valor de $|z_1 - z_2|$?

<u>Solução</u>

$Sejam\ z_1 = a + bi\ e\ z_2 = c + di. Pelo\ enunciado\ segue\ que$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$

$Sabemos\ que\ \ z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$

$Consequentemente, |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = 3 \Rightarrow (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd) = 3 \Rightarrow$

$2(ac + bd) = 1 \Rightarrow ac + bd = \dfrac{1}{2}.$

$Queremos\ saber\ o\ valor\ de\ |z_1 - z_2|. Temos\ que\ z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$

$Portanto, |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2} \Rightarrow$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2(ac + bd)} = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)} = \sqrt{2 - 1} = 1$

$$\therefore |z_1 - z_2| = 1.$$

Problema 8 (Instituto Militar de Engenharia)

Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ e localize-os no plano complexo, sendo i a unidade imaginária.

Solução

$$Seja\ z = a + bi.\ A\ equação\ pode\ ser\ escrita\ da\ seguinte\ maneira:$$

$$z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0 \Rightarrow (a + bi)^2 + 2i(a + bi) + 2 - 4i = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 2abi - b^2 + 2ai - 2b + 2 - 4i = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2 - 2b + 2) + (2ab + 2a - 4)i = 0$$

$$Igualando\ a\ parte\ real\ e\ a\ parte\ imaginária\ a\ zero\ teremos:$$

$$a^2 - b^2 - 2b + 2 = 0\ (I)\ \ e$$

$$2ab + 2a - 4 = 0 \Rightarrow ab + a - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{2 - a}{a} = \frac{2}{a} - 1\ (II)$$

$$Substituindo\ (II)\ em\ (I):$$

$$a^2 - \left(\frac{2}{a} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{2}{a} - 1\right) + 2 = 0 \Rightarrow a^2 - \left(\frac{4}{a^2} - \frac{4}{a} + 1\right) - \frac{4}{a} + 2 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - \frac{4}{a^2} + 3 = 0 \overset{\cdot a^2}{\Rightarrow} a^4 - 4 + 3a^2 = 0 \Rightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \xRightarrow{k = a^2} k^2 + 3k - 4 = 0.$$

$$As\ raízes\ k_1 e\ k_2\ serão\ tais\ que\ k_1 + k_2 = -3\ e\ k_1 \cdot k_2 = -4.\ Os\ números\ que$$

$$satisfazem\ essas\ condições\ são\ \ k_1 = 1\ e\ \ k_2 = -4\ .\ Teremos\ então:$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1\ ou\ a^2 = -4 \Rightarrow a \notin \mathbb{R}.\ Como\ b = \frac{2}{a} - 1\ segue\ então\ que:$$

$$Se\ a = 1\ \Rightarrow b = \frac{2}{1} - 1 = 1\ .\ Se\ a = -1 \Rightarrow\ b = \frac{2}{-1} - 1 = -3.\ Logo, as\ raízes\ são$$

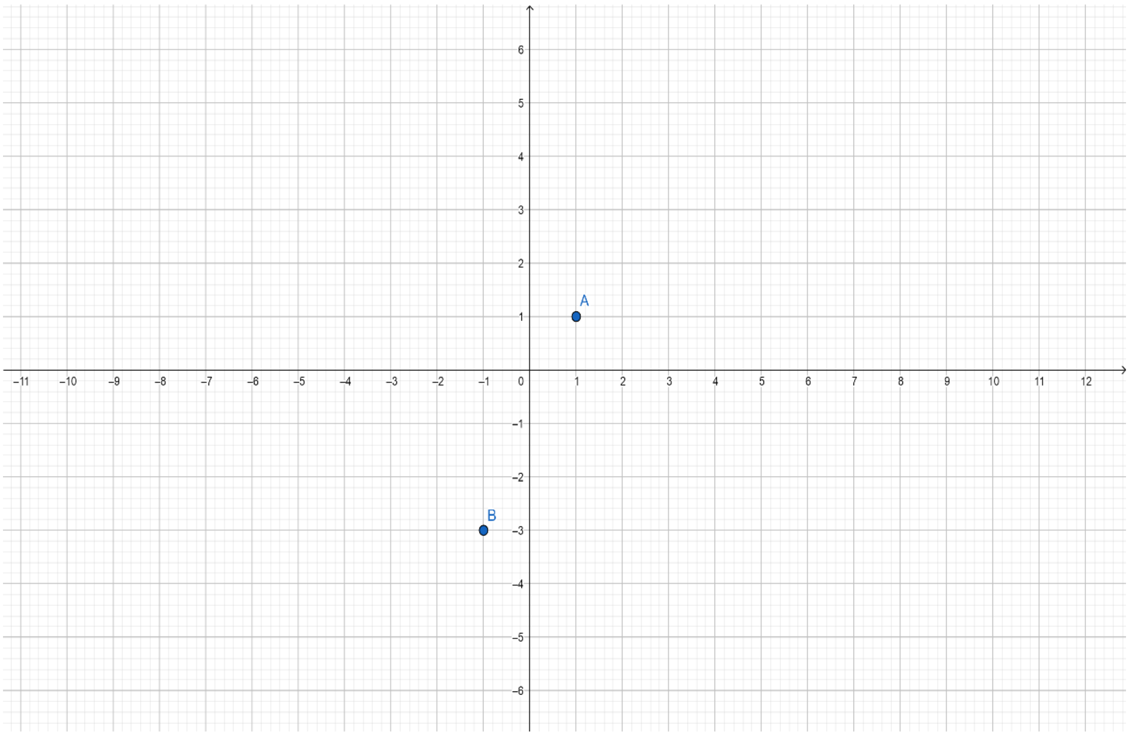
$$z_1 = 1 + i\ e\ z_2 = -1 - 3i.$$

$$Portanto, o\ complexo\ z_1\ tem\ parte\ real\ igual\ a\ 1\ e\ parte\ imaginária\ igual\ a\ 1.$$

$$O\ complexo\ z_2\ tem\ parte\ real\ igual - 1\ e\ parte\ imaginária\ igual\ a - 3.$$

$$A\ representação\ de\ z_1 e\ z_2\ no\ plano\ complexo\ estão\ a\ seguir.\ O\ ponto\ A(1{,}1)\ representa\ z_1$$

$$e\ o\ ponto\ B(-1, -3)\ representa\ z_2.$$


A
B

Problema 9 (Olimpíada dos Estados Unidos)

Se $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ onde $i^2 = -1$, determine o valor de $x^{13} + y^{13}$.

Solução

$Escrevendo\ x\ na\ forma\ trigonométrica\ teremos$:

$$Como\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, o\ módulo\ de\ x\ será\ \rho_x = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$Teremos\ então\ que\ sen\theta_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ cos\theta_x = -\frac{1}{2}\ . Logo, \theta_x = 120°.$$

$Portanto, x = cos120° + isen120°.$

$Escrevendo\ y\ na\ forma\ trigonométrica\ teremos$:

$$Como\ y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, o\ módulo\ de\ y\ será\ \rho_y = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$Teremos\ então\ que\ sen\theta_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ cos\theta_y = -\frac{1}{2}\ . Logo, \theta_y = 240°.$$

$Portanto, y = cos240° + isen240°.$

$Calculando\ x^{13}\ e\ y^{13}$:

$x^{13} = \cos(13 \cdot 120°) + isen(13 \cdot 120°) = \cos(1560°) + isen(1560°).$

$Como\ 1560° = 4 \cdot 360° + 120°\ então\ x^{13} = cos120° + isen120°.$

$y^{13} = \cos(13 \cdot 240°) + isen(13 \cdot 240°) = \cos(3120°) + isen(3120°).$

$Como\ 3120° = 8 \cdot 360° + 240°\ então\ y^{13} = cos240° + isen240°.$

$$Portanto, x^{13} + y^{13} = x + y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1.$$

Problema 10 (Instituto Tecnológico da Aeronáutica)

Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. Marque as raízes no plano complexo e determine a área desse polígono.

<u>Solução</u>

$Resolvendo\ a\ equação: z^6 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} \Rightarrow z = \sqrt[6]{1+0i}.$

$Queremos\ então\ as\ raízes\ sextas\ do\ complexo\ x = 1 + 0i.$

$Escrevendo\ x\ na\ forma\ trigonométrica:$

$Como\ x = 1 + 0i\ então\ \rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1. Daí, sendo\ \theta\ o\ argumento\ de\ x\ teremos\ que$

$cos\theta = 1\ e\ sen\theta = 0.\ Logo, \theta = 0°\ e\ x = cos0° + isen0°$

$Agora, usando\ a\ fórmula\ \boldsymbol{\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}\ com\ n = 6,$

$\theta = 0°\ e\ k\ variando\ de\ 0\ até\ 5, vamos\ achar\ as\ raízes\ sextas:$

$$para\ k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{x} = cos0° + isen0° = 1 \Rightarrow ponto\ A(1,0)$$

$$para\ k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{x} = cos\frac{2\pi}{6} + isen\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow ponto\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

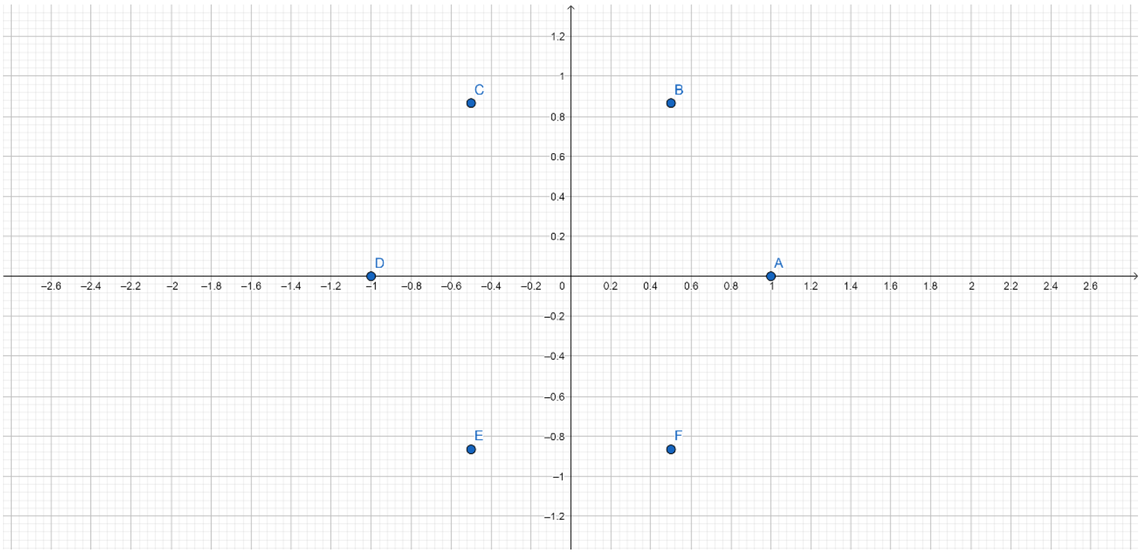
$$para\ k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{x} = cos\frac{4\pi}{6} + isen\frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow ponto\ C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$para\ k = 3 \Rightarrow z_4 = \sqrt[6]{x} = cos\frac{6\pi}{6} + isen\frac{6\pi}{6} = -1 + 0i = -1 \Rightarrow ponto\ D(-1,0)$$

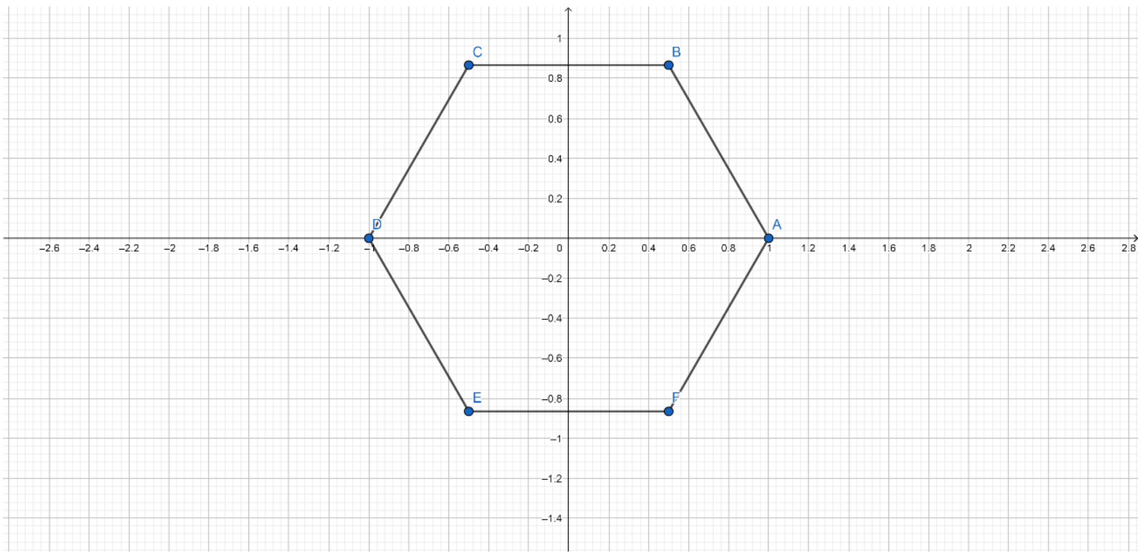
$$para\ k = 4 \Rightarrow z_5 = \sqrt[6]{x} = cos\frac{8\pi}{6} + isen\frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow ponto\ E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$para\ k = 5 \Rightarrow z_6 = \sqrt[6]{x} = cos\frac{10\pi}{6} + isen\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow ponto\ F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$A\ representação\ no\ plano\ complexo\ de\ todas\ as\ raízes\ segue\ abaixo:$



Ao ligarmos os pontos, será formado um hexágono regular centrado na origem e com lado medindo $1\ u.c$.



De fato, os complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 posuem módulo igual a 1 e os argumentos medem, respectivamente, $0°, 60°, 120°, 180°, 240°$ e $300°$. O hexágono, então, é formado por seis triângulos equiláteros de lado $1\ u.c$.

Portanto, a área do polígono é igual a: $A = 6 \cdot \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} u.a$.

7 CONCLUSÃO

Através do que foi exposto nesse trabalho podemos perceber a importância dos números complexos em várias situações. A forma como eles podem ser apresentados e a maneira como são construídos, mostram uma característica de versatilidade. Não foram poucos os estudiosos que destinaram boa parte de seus tempos para estudá-los e aprimorá-los.

Os complexos podem ser apresentados como subconjunto de matrizes 2x2 e também como o produto cartesiano RxR. De qualquer uma das maneiras, teremos a presença da unidade imaginária i. Ela possui uma propriedade estranha aos números reais, a saber: o seu quadrado é igual a -1. Isso faz com que o conjunto dos números complexos receba um olhar diferenciado.

O fato é que os complexos podem ser usados para solucionar problemas não só da matemática, mas também da física. Usando os métodos adequados para resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem, circuitos elétricos são plenamente determinados com o auxílio dos números complexos. Cálculo de corrente elétrica, capacitância e carga elétrica são algumas das grandezas que podem ser calculadas.

No universo da matemática muitas são as possibilidades. É necessário que o caminho a ser percorrido seja o mais simples possível. Nesta esteira, os números complexos fornecem ótimas ferramentas para que, de fato, a trajetória a ser seguida seja a menos custosa dentre as opções existentes.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

BISCUOLA, Gualter José; BÔAS, Newton Villas; DOCA, Ricardo Helou. **Tópicos de Física 3: Eletricidade, Física Moderna**. 15.ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1993. V. 6.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio.** 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. V. 1.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio.** 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. V. 3.

LORENZATO, Sergio. **Para Aprender Matemática**. 3.ed.rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores)

SOARES, Márcio G. **Cálculo em Uma Variável Complexa**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

STEWART, James. **Cálculo**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012. V. 2.